

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DIAMAGNETISMO DE LANDAU
***q*-DEFORMADO**
IMERSO EM *D*-DIMENSÕES
André Afonso Araujo Marinho

CAMPINA GRANDE

- 2010 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DIAMAGNETISMO DE LANDAU
 q -DEFORMADO
IMERSO EM D -DIMENSÕES
André Afonso Araujo Marinho

Dissertação realizada sob orientação do Prof.
Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada
à Unidade Acadêmica de Física em comple-
mentação aos requisitos para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2010 -

| | |
|------------------------------|-----------|
| UFMG - BIBLIOTECA - CAMPUS I | |
| 3146 | 06-07-030 |
| | |

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFGC

M338d

Marinho, André Afonso Araujo.

Diamagnetismo de Landau q -deformado imerso em D -dimensões
/ André Afonso Araujo Marinho. — Campina Grande, 2010.
49 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

1. Mecânica Estatística. 2. Matéria Condensada. 3. q -
Cálculo. 4. q -Álgebra. 5. Derivadas de Jackson. 6. q -Deformação.
7. Diamagnetismo de Landau. I. Título.

CDU 531.19(043)

ANDRÉ AFONSO ARAÚJO MARINHO

DIAMAGNETISMO DE LANDAU Q-DEFORMADO IMERSO EM D-DIMENSÕES

Dissertação aprovada em 30/04/2010

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro Externo)

Prof. Dr. Carlos Chesman de Araújo Feitosa
DFTE - UFRN



(Membro Interno)

Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente agradeço a Deus por chegar até aqui e por continuar.
- Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (Chico), pela orientação, sugestão, incentivo, estímulo, amizade, liberdade e competência com que conduziu este trabalho.
- Aos meus pais José Marinho Sobrinho e Mariana da Conceição Araujo Marinho, por todo carinho, apoio, incentivo, liberdade, confiança, dedicação e esforço para que hoje eu estivesse aqui. Eu teria que escrever outra dissertação para descrever tudo o que passou para que nunca nos faltasse nada. Agradeço a Deus por esse rígido alicerce em minha vida, sem vocês não estaria vivendo este momento, e partindo para o próximo passo. Meus pais obrigado por tudo, amo muito vocês.
- Às minhas queridas irmãs Ana Paula e Angela, pela união, amor, carinho, confiança e companheirismo que me passam, amo vocês.
- À minha amada namorada Valquiria, por todo apoio, incentivo, paciência e compreensão, te amo minha gatona.
- Aos Profs. José Suassuna e Eduardo Passos pelas colaborações que recebi para a preparação desta dissertação.

-
- Aos Professores que contribuíram para minha formação desde a graduação (UEPB) até este momento, gostaria de destacar: Alessandro, Áurea, Morgana, Jean Spinelly, Mará, Elialdo e João Batista.
 - Ao grupo de pesquisa de Teoria de Campos, pelo ambiente acadêmico descontraído, pelos seminários das sextas-feiras e pelas ótimas discussões geradas.
 - Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade. Em especial queria agradecer a Alex com o qual convivo desde a graduação e me auxiliou muito no início do mestrado.
 - À CAPES e a UFCG pelo suporte financeiro.
 - A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Resumo

Abordamos a questão da generalização das quantidades termodinâmicas através da q -deformação, ou seja, através da q -álgebra que descreve q -bósons e q -fermions. A motivação para o nosso estudo reside na ausência de uma plena compreensão da origem física da q -deformação, e buscamos obtê-la com a sua aplicação atuando como um fator de desordem ou uma impureza modificando as características de uma estrutura cristalina (caso dos semicondutores, por exemplo). No presente caso a aplicamos ao problema do diamagnetismo de Landau imerso em um espaço D -dimensional. Obtemos novos resultados para a energia interna, número de partículas, magnetização e susceptibilidade magnética, que recuperam os seus valores já conhecidos na literatura no limite $q \rightarrow 1$. O fato das quantidades termodinâmicas apresentadas dependerem do número de dimensões D , nos possibilita estendermos a sua aplicação para sistemas extra-dimensionais, tais como a Cosmologia Moderna, a Física de Partículas e Teoria de Cordas.

Palavras-chave: Mecânica Estatística; Matéria Condensada; q -Cálculo; q -Álgebra; derivadas de Jackson; q -deformação; diamagnetismo de Landau.

Abstract

We address the issue of generalizing the thermodynamic quantities via q -deformation, i.e., through the q -algebra which describes q -bosons and q -fermions. The motivation for our study is the lack of a full understanding of the physical origin of the q -deformation, and we attempt to find it with your application acting as a factor of disorder or impurity modifying the characteristics of a crystalline structure (the case of semiconductors, for example). In the present case, we apply to the Landau diamagnetism problem embedded in a D -dimensional space. We obtain new results for internal energy, number of particles, magnetization and magnetic susceptibility, which recover their well-known values in the literature in the limit $q \rightarrow 1$. The fact that the thermodynamic quantities presented depend on the number of dimensions D , enables us to extend the your application to extra-dimensional systems, such as Modern Cosmology, Particle Physics and String Theory.

Keywords: Statistical Mechanics; Condensed Matter; q -Calculus; q -Algebra; Jackson derivative; q -deformation; diamagnetism of Landau.

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | q-Álgebra e aplicações | 5 |
| 2.1 | q -Álgebra de Heisenberg e JD | 6 |
| 2.1.1 | q -bósons | 6 |
| 2.1.2 | q -férmions | 10 |
| 2.2 | Algumas propriedades da q -álgebra | 13 |
| 2.3 | Álgebra quântica q -deformada | 17 |
| 3 | Diamagnetismo de Landau q-deformado em D-Dimensões | 23 |
| 3.1 | Energia interna q -deformada | 27 |
| 3.2 | Número de partículas q -deformado | 28 |
| 3.3 | Calor específico | 29 |
| 3.3.1 | Gráficos q -deformados | 29 |
| 3.4 | Magnetização e susceptibilidade q -deformadas | 31 |
| 3.4.1 | Gráficos não q -deformados para diferentes dimensões D | 35 |
| 4 | Conclusões e Perspectivas | 39 |
| A | Diamagnetismo de Landau | 42 |
| A.1 | Degenerescência | 45 |
| | Referências | 48 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Energia interna q -deformada para $q = 0,99999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq. (3.1.31). | 30 |
| 3.2 | Número de partículas q -deformado para $q = 0,99999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq.(3.2.35). | 30 |
| 3.3 | Calor específico para $\beta=0.1$ e $\kappa_B = 1$, $q=0,5$ (tracejado), $q=0,99999999$ (ponto), $q = 0,1$ (quadrado), Eq. (3.3.40). | 31 |
| 3.4 | Magnetização q -deformada em função do campo magnético \mathbf{H} para $q=0,99999999$ (vermelho), $q=0,5$ (verde), $q=0,1$ (azul), Eq. (3.4.50). | 34 |
| 3.5 | Susceptibilidade magnética q -deformada em função do campo magnético \mathbf{H} para $q = 0,99999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq. (3.4.52). | 34 |
| 3.6 | Constante C^* em função do número de dimensões (0..11) para $L_- = 2\pi - 0.9$ (vermelho), $L_+ = 2\pi + 0.9$ (azul), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.4.56). | 36 |
| 3.7 | Energia interna em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+=2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_-=2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.1.31). | 36 |
| 3.8 | Número de partículas em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+=2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_-=2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.2.35). | 37 |
| 3.9 | Magnetização em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+=2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_-=2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq.(3.4.50). | 37 |

- 3.10 Susceptibilidade magnética em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+=2\pi + 0.9$ (**esquerda**) e $L_-=2\pi - 0.9$ (**direita**), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.4.52). 38

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos grupos quânticos e álgebras quânticas tem atraído um grande interesse nos últimos anos e, estimulado intensa investigação nos vários domínios da física [1], tendo em conta um largo espectro de aplicações, que vão desde cordas cósmicas e buracos negros ao efeito Hall quântico fracionário e supercondutores de alta temperatura T_c [2], bem como teorias racionais de campo, geometria não-comutativa, teoria quântica das super-álgebras e assim por diante [3].

Não há uma definição satisfatória universalmente reconhecida do que seja um grupo quântico. Todas as propostas em vigor sugerem a idéia de deformação de um objeto clássico, que pode ser, por exemplo, um grupo algébrico, ou um grupo de Lie. E em todas as propostas os objetos deformados perdem as propriedades de grupo [4, 5]. O que sempre se procura preservar nas deformações é o entendimento das diversas representações que os objetos admitem. O conceito de grupos quânticos foi motivado por problemas vindos de um grande número de situações físicas, e com isso o entendimento das idéias que motivaram a teoria requer naturalmente um amplo conhecimento anterior.

Em trabalho realizado em 1904 Jackson introduz a chamada álgebra q -deformada [6, 7, 8]. Mesmo com o passar do tempo tem sido objeto de interesse na literatura tanto em Física como em Matemática. As investigações realizadas em vários aspectos desempenharam um papel importante quanto à sua compreensão e desenvolvimento [2]. Uma realização concreta

de tais atributos atenta para o surgimento da deformação através de um de seus principais ingredientes o parâmetro de deformação q , introduzido nas relações de comutação que definem a álgebra de Lie do sistema, com a condição de que a álgebra de Lie original, não deformada, seja produzida no limite $q \rightarrow 1$ [9].

Os q -osciladores usando a derivada deformada de Jackson (JD) ou os chamados q -operadores derivativos [10] são considerados a fim de definir uma dinâmica generalizada q -deformada em um espaço de fase q -comutativo. Para esta finalidade fazemos uso dos operadores de criação e aniquilação da mecânica quântica q -deformada.

A motivação para o nosso estudo reside no fato de que uma plena compreensão da origem física da q -deformação em física clássica ainda falta. Não está claro a existência de uma resposta clássica para mecânica quântica q -deformada inspirada nos estudos dos grupos quânticos. Surgiu então, recentemente um grande interesse em investigar sistemas termodinâmicos q -deformados no nível clássico. Acredita-se que as teorias deformadas lidam com a estatística do comportamento de sistemas complexos, cuja dinâmica subjacente é calibrado em uma fase espacial multi-fractal, regida pela interação de longo alcance e (ou) efeitos de memória de longo prazo [11].

Um possível mecanismo capaz de gerar uma versão deformada da mecânica estatística clássica consiste em substituir, a distribuição Boltzmann-Gibbs, pela sua versão deformada. Nesse sentido postula-se uma forma de entropia deformada que implica numa teoria de termodinâmica generalizada. Desta forma, algumas generalizações da mecânica estatística foram propostas [12]-[15]. Neste contexto, foi demonstrado em [16] que uma realização natural da termodinâmica q -deformada de bósons e férmions pode ser construída sobre o formalismo de q -cálculos. Na realidade, ficou demonstrado que a q -integral está relacionada com a energia livre dos sistemas de spin sobre uma grande hierarquia [17].

Num passado recente, algumas idéias clássicas para a construção de um grupo quântico q -deformado têm sido investigadas [18]. Em um caso mais específico, focalizaremos nossa atenção ao estudo do problema do diamagnetismo de Landau [19]. Esse termo diamagne-

tismo é utilizado para designar um comportamento característico de determinados tipos de materiais e que se caracteriza pelo fato de serem ligeiramente repelidos por campos magnéticos fortes. Este comportamento justifica-se pelo fato dos elétrons terem uma tendência à se agruparem em pares com spins orientados em direções opostas, pelo que cada par tem um spin total nulo; conseqüentemente a maior parte dos átomos com número par de elétrons tem um spin total nulo, originando uma oposição ao campo de indução magnética induzido com relação ao campo externo que conduz à uma repulsão no campo externo.

A maior parte das substâncias são diamagnéticas, como é o caso da água, do vidro, do plástico e dos compostos orgânicos. Portanto, o diamagnetismo é uma propriedade do material que caracteriza a resposta de um ensemble de partículas carregadas (mais especificamente elétrons) aplicada a um campo magnético. O campo magnético de cada partícula causa movimento ciclotron, criando assim um momento magnético orbital, regido pela Lei de Faraday-Lenz. Assim, o sistema exibe uma susceptibilidade magnética negativa, marca característica do diamagnetismo. O problema do diamagnetismo resolvido por Landau, continua a levantar questões que têm forte relevância ainda hoje. Estas questões dizem respeito à natureza quântica inerente do problema. O papel de fronteira e de dissipação, o significado dos limites termodinâmicos e acima de tudo mescla mecânicas clássica e quântica.

O diamagnetismo pode ser utilizado como um fenômeno ilustrativo do papel essencial da mecânica quântica na superfície, no perímetro, e na dissipação da mecânica estatística do não-equilíbrio em si. O que é ainda mais notável é que a fronteira do meio como também qualquer fronteira interna desempenha um papel crucial, a contribuição diamagnética no momento angular anula a contribuição decorrente do assim chamado “salto de órbitas” desses elétrons, que batem na fronteira e buscam multiplicar e constituir o que se refletiu em um efeito chamado “corrente de fronteira” [20]. Esse foi um grande triunfo da mecânica quântica de Landau em 1930, quando revelou que a discretização de níveis de energia, e conseqüentemente a degeneração de cada nível conduzia de uma maneira natural para susceptibilidade magnética [21].

Nesta dissertação, os assuntos estão dispostos da seguinte forma: No CAPÍTULO 2, apresentamos uma breve introdução da q -álgebra. Destacam-se: a sua origem a partir do princípio da incerteza de Heisenberg o que nos conduz a q -álgebra de bósons e férmions e à derivada de Jackson (JD), algumas de suas propriedades e suas possíveis aplicações. No CAPÍTULO 3, aplicamos as JD ao problema do diamagnetismo de Landau. Com essa aplicação da q -álgebra, obtemos uma melhor compreensão da q -deformação. Nos nossos resultados obtemos valores deformados para a energia interna, número de partículas, magnetização e susceptibilidade magnética, os quais retornam aos valores já conhecidos da literatura no limite $q \rightarrow 1$. Notamos que a q -deformação pode estar ligada a fenômenos devidos a impurezas no material. Outras discussões relacionadas a D -dimensões são consideradas. O CAPÍTULO 4 apresenta as nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

q -Álgebra e aplicações

A construção de uma versão generalizada da álgebra dos operadores q -deformados, se faz necessária. Principalmente através da inserção de um fator multiplicativo em um operador linear, que modificará suas características. Representações da álgebra de Heisenberg q -deformada tem chamado muito a atenção na literatura [22], e sua conexão com o q -cálculo baseado no *número básico* (definido logo a seguir) vem sendo investigado por vários autores [10, 23, 24, 25, 26].

Embora não esteja claramente estabelecido se a q -modificação da relação de incerteza de Heisenberg nos conduz diretamente a q -álgebra de bósons e férmions e derivadas de Jackson (JD) [28], as regras da q -álgebra são estruturadas no contexto da representação isomórfica e holomórfica [8], que irá nos permitir mostrar que a álgebra dos q -bósons e q -férmions está intimamente conectada com a q -deformação da relação de Heisenberg e a JD está intimamente ligada à álgebra dos q -bósons e dos q -férmions [29].

O *número básico* é definido por

$$[\alpha] \equiv \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}}, \quad (2.0.1)$$

onde q é um número real arbitrário, $0 < q < \infty$. Na formulação simétrica podemos limitar a $0 < q < 1$ ou $1 < q < \infty$. Esta formulação é definida para ser simétrica em $q \leftrightarrow q^{-1}$. A JD

constitui a base “não-simétrica” [8], que está referida segundo a literatura como q -cálculo e também está intimamente ligada com os números básicos que desempenham um papel fundamental. Vamos agora demonstrar que a JD e o q -cálculo tem sua origem na relação da incerteza de Heisenberg q -deformada.

2.1 q -Álgebra de Heisenberg e JD

2.1.1 q -bósons

Consideramos o princípio da incerteza de Heisenberg q -deformado

$$qxp - px = i\hbar\Delta. \quad (2.1.2)$$

Há pelo menos duas opções onde Δ pode se manter preservado no limite correto (*limite clássico*) quando $q \rightarrow 1$. Uma possibilidade para que isso ocorra tem sido estudada por [26] sendo $\Delta = 1$. Iremos escolher $\Delta = q^{-N}$, onde N será especificado mais tarde, a fim de desenvolvermos a formulação que é simétrica em $q \leftrightarrow q^{-1}$. Isso nos leva a introduzir um ansatz [29]

$$qxp - px = i\hbar q^{-N}. \quad (2.1.3)$$

Para $q \neq 1$, o momento $p = -i\hbar\partial_x$, tem que ser substituído pelo operador generalizado $p = -i\hbar D$, de acordo com,

$$Dx - qxD = q^{-N}. \quad (2.1.4)$$

Buscamos a solução da equação (2.1.4) para o operador D . Obteremos a solução partindo da resolução dos q -osciladores [32]. Assim,

$$[a, a^\dagger]_q = aa^\dagger - qa^\dagger a = \Delta, \quad (2.1.5)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a), \quad (2.1.6)$$

onde a, a^\dagger são os operadores de aniquilação e criação dos osciladores de q -bóson.

Expressaremos a equação (2.1.5), em termos de \mathcal{H} e dos auto-estados $|N\rangle$:

$$a|N\rangle = [N]^{1/2}|N-1\rangle, \quad (2.1.7)$$

$$a^\dagger|N\rangle = [N+1]^{1/2}|N+1\rangle, \quad (2.1.8)$$

$$\mathcal{H}|N\rangle = \frac{1}{2}([N] + [N+1]), \quad (2.1.9)$$

$$\Delta|N\rangle = q^{-N}|N\rangle. \quad (2.1.10)$$

onde

$$[N] = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}. \quad (2.1.11)$$

Estabelecendo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Assim a equação (2.1.5) pode ser escrita como segue

$$\mathbf{A}^t \epsilon \mathbf{A} = q^{-(N+\frac{1}{2})}, \quad (2.1.13)$$

onde

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{-\frac{1}{2}} \\ -q^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.14)$$

A matriz (2.1.14) é invariante sob as transformações T pertencentes ao grupo $SU_q(2)$ [4]:

$$T^t \epsilon T = T \epsilon T^t = \epsilon. \quad (2.1.15)$$

Portanto qualquer novo vetor \mathbf{X} será definido por

$$\mathbf{A} = T\mathbf{X}, \quad (2.1.16)$$

e satisfará

$$\mathbf{X}^t \epsilon \mathbf{X} = \Delta. \quad (2.1.17)$$

A transformação de observáveis no espaço de Fock para o espaço de configuração é realizada definindo-se \mathbf{X} . A partir da definição dada por [32], obtemos o princípio da incerteza de Heisenberg q -deformado (2.1.2),

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} D \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.1.18)$$

inserindo o operador de dilatação θ (definido a seguir), chegamos a solução do operador D

$$D = \frac{1}{x} [\theta]_q = \frac{1}{x} \frac{q^\theta - q^{-\theta}}{q - q^{-1}}. \quad (2.1.19)$$

Isto também se processa na deformação da equação (2.1.3) original.

O *número básico* apresentado aqui, definido na equação (2.0.1) constitui a base da álgebra de osciladores q -deformados [5]. Para provarmos utilizamos a propriedade $x[N + 1] = [N]x$. Uma prova alternativa e instrutiva, consiste em mostrar primeiro que

$$[N]x = x[N + 1] = xq[N] + xq^{-N}, \quad (2.1.20)$$

que nos leva

$$[N]x - qx[N] = xq^{-N}. \quad (2.1.21)$$

Esta é a ligação fundamental entre o q -*número básico* e a q -deformação da relação de incerteza que nos leva automaticamente a JD através do *número básico*. A fim de mostrar que a equação (2.1.19) é de fato a derivada generalizada, procedemos como segue.

Primeiramente definimos o operador de dilatação

$$\theta \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.1.22)$$

tal que satisfaçam as propriedades

$$\theta x = x(\theta + 1), \quad \theta^r x = (\theta + 1)^r, \quad f(\theta)x = xf(\theta + 1), \quad (2.1.23)$$

onde r é um número qualquer e f é um polinômio arbitrário. Podemos mostrar que isto é verdade estendendo a propriedade para qualquer monômio de uma variável real q , quando

$$q^\theta x = xq^{\theta+1}. \quad (2.1.24)$$

Continuando da equação (2.1.24) podemos estabelecer a propriedade adicional

$$\theta x^r = r x^r, \quad (2.1.25)$$

para qualquer número r , que pode ser estendido para um monômio,

$$\theta^a x^r = r^a x^r. \quad (2.1.26)$$

Expandindo a série

$$q^\theta = 1 + \theta \ln q + \frac{\theta^2}{2!} (\ln q)^2 + \dots, \quad (2.1.27)$$

obtemos o monômio,

$$q^\theta x^r = x^r q^r = (qx)^r. \quad (2.1.28)$$

Essa relação imediatamente generaliza-se para um polinômio e obtemos a equação (2.1.25) para qualquer função polinomial. Temos agora de fazer a observação que existe na representação holomórfica [10]

$$\theta \Leftrightarrow N, \quad \theta = x\partial x \Leftrightarrow a^\dagger a = N, \quad \text{ou} \quad \theta = xD \Leftrightarrow a^\dagger a = [N], \quad (2.1.29)$$

onde N é o operador número de bósons q -deformado. A propriedade, (2.1.28), também é válida para uma função arbitrária polinomial, onde θ pode ser N ou $[N]$. Se escolhermos

$\theta = N$, obtemos a propriedade

$$q^N f(x) = f(qx), \quad (2.1.30)$$

que pode ser estendido para o resultado

$$q^{-N} f(x) = f(q^{-1}x). \quad (2.1.31)$$

A partir disso e do resultado (2.1.19), podemos obter imediatamente um importante resultado

$$Df(x) = \frac{1}{x} \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} f(x) = \frac{1}{x} \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{q - q^{-1}}, \quad (2.1.32)$$

que é reconhecido como a definição padrão [16, 8] na formulação simétrica da JD . A JD reduz-se à derivada ordinária no limite $q \rightarrow 1$. Concluimos que, a introdução de JD surge naturalmente a partir da relação de Heisenberg q -deformada através do q -número básico.

Vamos agora considerar os q -bósons e a JD que obedece a relação (2.1.4). Se escolhermos a representação $D \Rightarrow a, x \Rightarrow a^\dagger$ como em (2.1.29), então obteremos imediatamente

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N}. \quad (2.1.33)$$

Assim, a álgebra dos operadores de criação e aniquilação dos osciladores q -deformados pode ser considerada como decorrente de uma representação de coordenadas e da JD . Portanto, neste sentido, a álgebra de bósons q -deformados é uma consequência imediata da deformação da álgebra de Heisenberg. Podemos então concluir que

$$q^N a = aq^{N-1}, \quad [N]a = a[N-1], \quad [N+1] = q[N] + q^{-N}. \quad (2.1.34)$$

2.1.2 q -férmions

Vamos agora voltar nossa atenção para os q -férmions. A termodinâmica e a mecânica estatística dos férmions q -deformados tem sido exhaustivamente investigados [16], com base na álgebra q -deformada. Vamos considerar especificamente o número básico como definido na

equação (2.0.1), enquanto os operadores de criação e aniquilação satisfazem [16], a álgebra

$$bb^\dagger + q^{-1}b^\dagger b = q^{-N}. \quad (2.1.35)$$

Esta equação, que conduz à determinação de muitas funções termodinâmicas de q -férmions, mostra uma clara simetria desejável entre férmions e bósons e além disso o *número básico* utilizado para férmions é exatamente o mesmo que aquele utilizado para bósons. Quando examinamos as álgebras descritas pelas equações (2.0.1) e (2.1.35), juntamente com a relação de Heisenberg (2.1.3), concluímos que as mesmas, não fornecem uma representação para a JD (2.1.19) para produzir a álgebra q -férmions (2.1.35). Em outras palavras, não existe qualquer representação holomórfica útil de JD , como na equação (2.1.29), tal que $x \Leftrightarrow b^\dagger$, $\partial x \Leftrightarrow b$, que irá produzir a álgebra na equação (2.1.35).

Por outro lado devemos notar que a JD no caso de q -férmions ainda decorre da relação Heisenberg q -deformada como foi mostrado anteriormente. Na teoria baseada nesta álgebra de q -férmions, os autovalores do operador de número N pode assumir os valores $n = 0, 1$ apenas, obedecendo a teoria do princípio da exclusão de Pauli, assim como no caso de férmions não deformados. Além disso, podemos demonstrar que as álgebras apresentadas acima podem ser transformadas para o caso de férmions normais, ou seja não deformados [3, 31]. Existe uma outra representação interessante, resultando em uma álgebra de férmions q -deformada diferente que vamos investigar agora. Vamos introduzir a definição dos *números básicos* de férmions dado por [3]

$$[z]_F = \frac{q^{-z} - (-1)^z q^z}{q + q^{-1}}, \quad (2.1.36)$$

que apresenta muitas propriedades úteis e interessantes. Neste caso, obtemos o resultado que é análogo à equação (2.1.4) para o caso do bóson,

$$Bx + qx B = q^{-N}, \quad (2.1.37)$$

cuja solução é dada por $B = x^{-1}[N]_F$. Isso pode ser verificado da seguinte forma: Primeiro confirmamos que as propriedades apresentadas nas equações (2.1.22)-(2.1.28) também são válidas no caso dos férmions quando usamos os *números básicos* generalizados (2.1.36). Precisamos de uma extensão dessas propriedades básicas. Ao escrevermos $(-q)^N$ como $(\exp(i\pi)q)^N$ e por meio da extensão da série para o exponencial, obtemos

$$(-q)^N x = x(-q)^{N+1}. \quad (2.1.38)$$

Convém salientar que N é um operador e que a equação acima não está em conflito com a equação (2.1.24). Consequentemente, teremos a representação holomórfica $(1/x)[N]_F \Leftrightarrow b$, $x \Leftrightarrow b^\dagger$ o que leva a

$$bb^\dagger + qb^\dagger b = q^{-N} \quad (2.1.39)$$

Podemos fornecer uma prova direta para a solução da equação (2.1.37). A prova explícita começa com a observação de que sugirá uma interpretação melhor para $[N]_F x = x[N+1]_F$, junto com a propriedade $q[N] + [N+1] = q^{-N}$. Assim,

$$qx \frac{1}{x} [N]_F + \frac{1}{x} [N]_F x = q^{-N}, \quad (2.1.40)$$

$$qx \frac{1}{x} [N]_F + \frac{1}{x} x [N+1]_F = q^{-N}. \quad (2.1.41)$$

A partir da equação (2.1.39), faremos algumas observações, a seguir:

- A álgebra da equação (2.1.39) pode ser considerada como resultante da representação acima, decorrente especialmente do *número básico* de férmions definido na equação (2.1.36), que é uma introdução realizada por Chaichian et al [3];
- É notável que este número básico de férmions nos fornece prontamente uma representação consistente holomórfica em termos dos operadores de criação e de aniquilação para os q -férmions, ou seja, fornece uma justificativa fundamental para a definição (2.1.36) em si;

- Observamos que esta álgebra de q -férmions não se baseia na relação q -Heisenberg. A conexão com a relação de q -Heisenberg é válida somente para q -bósons. Apesar das aparências, o operador B que aparece na equação (2.1.37) não tem relação com a JD , que tem a sua única conexão com os q -bósons; ele não tem qualquer semelhança com as derivadas ordinárias no limite clássico. Finalmente, observamos que isto leva a uma generalização dos férmions [3] no sentido de que esta álgebra q -deformada vai além do princípio de exclusão de Pauli e os autovalores de N são arbitrários e não se restringem aos valores 0, 1;
- Os limites dos casos mais gerais estão descritas em [3]. Vale frizarmos que, enquanto a álgebra do q -bóson, a relação de Heisenberg q -deformada e JD estão intimamente ligados, o q -cálculo para q -férmions tem uma origem diferente e não está relacionado a relação de q -Heisenberg.

2.2 Algumas propriedades da q -álgebra

Para a introdução do q -operador diferencial, partiremos da definição

$$-\pi < \Im(\ln(q)) \leq \pi, \quad (2.2.42)$$

onde \Im representa a parte imaginária do número complexo que é definido por

$$q^a = \exp(a \ln(q)). \quad (2.2.43)$$

Além disso, os q -análogos dos números naturais, da função fatorial e função semi-fatorial são definidos por [30]

$$[n]_q = \sum_{k=1}^n q^{k-1}, \quad [0]_q = 0, \quad q \in \mathbb{C}, \quad (2.2.44)$$

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^n \{k\}_q, \quad [0]_q! = 1, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (2.2.45)$$

$$[2n-1]_{q!!} = \prod_{k=1}^n [2k-1]_q, \quad q \in \mathbb{C}, \quad (2.2.46)$$

$$[2n]_{q!!} = \prod_{k=1}^n [2k]_q, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (2.2.47)$$

Em (1908) Jackson [27], introduziu o q -operador diferencial de **Euler-Jackson**

$$(D_q \phi)(x) = \frac{\phi(x) - \phi(qx)}{(1-q)x}, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (2.2.48)$$

No limite de q aproximando-se de 1, temos a derivada usual de Leibniz,

$$\lim_{q \rightarrow 1} (D_q \phi)(x) = \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.2.49)$$

Podemos notar como essa derivada atua, através do exemplo:

$$D_q(x^\alpha) = \frac{x^\alpha - (qx)^\alpha}{(1-q)x} = \frac{x^\alpha(1-q^\alpha)}{x(1-q)} = [\alpha]_q x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.2.50)$$

Para realizarmos a soma, a multiplicação e a divisão, através do q -operador diferencial, seguimos as fórmulas

$$D(x)f(x) = (x)Df(x) + D(x)f(x), \quad (2.2.51)$$

$$D_q(u(x) + v(x)) = D_q u(x) + D_q v(x). \quad (2.2.52)$$

$$D_q(u(x)v(x)) = D_q u(x)v(x) + u(qx)D_q v(x). \quad (2.2.53)$$

$$D_q \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{v(x)D_q u(x) - u(x)D_q v(x)}{v(qx)v(x)}, \quad v(qx)v(x) \neq 0. \quad (2.2.54)$$

Aplicando Taylor no lado direito de (2.2.48) obtemos a seguinte expressão para o q -operador

diferencial:

$$D_q(f(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^k f^{(k+1)}(x), \quad (2.2.55)$$

desde que f seja analítica.

Se $|q| > 1$, ou $0 < |q| < 1$ e $|z| < |1 - q|^{-1}$, temos uma função q -exponencial $E_q(z)$, definida por Jackson [6] e Exton [8],

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} z^n, \quad (2.2.56)$$

aplicando a q -derivada em $E_q(z)$, temos

$$D_q E_q(az) = a E_q(az). \quad (2.2.57)$$

Assim, podemos tratar q -análogos das funções trigonométricas (sin e cos por exemplo), da forma

$$\sin_q(x) = \frac{1}{2i} (E_q(ix) - E_q(-ix)), \quad (2.2.58)$$

$$\cos_q(x) = \frac{1}{2} (E_q(ix) + E_q(-ix)), \quad (2.2.59)$$

aplicando q -derivada, temos

$$D_q \cos_q(ax) = -a \sin_q(ax), \quad (2.2.60)$$

$$D_q \sin_q(bx) = b \cos_q(bx). \quad (2.2.61)$$

Podemos também verificar a seguinte identidade

$$\cos_q(x) \cos_{\frac{1}{q}}(x) + \sin_q(x) \sin_{\frac{1}{q}}(x) = 1. \quad (2.2.62)$$

Temos que,

$$E_q(x) E_{\frac{1}{q}}(y) = E_q[x + y]_q. \quad (2.2.63)$$

$$e_q(x) e_{\frac{1}{q}}(y) = e_q[x + y]_q. \quad (2.2.64)$$

$$\frac{e_q(y)}{e_q(x)} = e_q[y - x]_q. \quad (2.2.65)$$

$$D_q e_q(x) = \frac{e_q}{1 - q}. \quad (2.2.66)$$

Wolfgang Hahn chamou $[a]_q$ de **basische Zahlen**, podemos traduzir como *números básicos*, ou seja nosso *número básico* definido em (2.0.1). Podemos apresentar dois exemplos de q -análogos simétricos:

$$[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} \quad e \quad [a]_q = \frac{q^{\frac{a}{2}} - q^{-\frac{a}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}. \quad (2.2.67)$$

Podemos ainda definir esses números pela relação

$$[a] = \frac{1 - q^a}{1 - q}, \quad (2.2.68)$$

onde q pode ser qualquer número real ou complexo. Veremos que os mesmos correspondem à sequência de números inteiros positivos, $1, 2, \dots, n, \dots$. Temos a sequência

$$[1] = 1 \quad (2.2.69)$$

$$[2] = 1 + q \quad (2.2.70)$$

$$[3] = 1 + q + q^2 \quad (2.2.71)$$

.....

$$[n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \quad (2.2.72)$$

.....

$$[n]! = [1][2][3] \cdots [n]. \quad (2.2.73)$$

Muito mais propriedades podem ser encontradas em [30].

2.3 Álgebra quântica q -deformada

Com base no que foi estudado nas seções anteriores, por meio dessa estrutura e também outros fatores que serão mostrados a seguir, formulamos uma q -álgebra onde engloba bósons e férmions.

A simetria algébrica do oscilador quântico é definida pela álgebra de Heisenberg, em termos dos operadores de aniquilação e criação c , c^\dagger , respectivamente, e o operador número N , por meio de [3, 33, 34]

$$[c, c]_k = [c^\dagger, c^\dagger]_k = 0, \quad cc^\dagger - kqc^\dagger c = q^{-N} \quad (2.3.74)$$

$$[N, c^\dagger] = c^\dagger, \quad [N, c] = -c, \quad (2.3.75)$$

onde o parâmetro de deformação q é real e $[x, y]_k = xy - kyx$, sendo $k = 1$ para q -bósons com comutadores e $k = -1$ para q -férmions com anti-comutadores. O valor observado do *número básico* $[x]$ tem que satisfazer a propriedade da não-aditividade

$$[x + y] = [x] + [y] + (q - 1)[x][y]. \quad (2.3.76)$$

Os operadores obedecem as seguintes relações

$$[x, y]_k = xy - kyx, \quad cc^\dagger = [1 + kN], \quad (2.3.77)$$

onde definimos nosso *número básico* como

$$[x] = \frac{q^x - 1}{q - 1}. \quad (2.3.78)$$

A ortonormalização do auto-estado $|n\rangle$ no espaço q -Fock é construída de acordo com

$$|n\rangle = \frac{(c^\dagger)^n}{\sqrt{[n]!}}|0\rangle, \quad c|0\rangle = 0, \quad (2.3.79)$$

As ações de c e c^\dagger sobre o estado $|n\rangle$ no espaço q -Fock são conhecidas por

$$c^\dagger|n\rangle = [n+1]^{1/2}|n+1\rangle, \quad (2.3.80)$$

$$c|n\rangle = [n]^{1/2}|n-1\rangle, \quad (2.3.81)$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.3.82)$$

A transformação do espaço de Fock para o espaço de configuração¹ existe segundo [10, 26]

$$c^\dagger = x, \quad c = D_x^{(q)}. \quad (2.3.83)$$

Jackson em [6] p. 255, introduziu operador $D_x^{(q)}$, conhecido por derivadas de Jackson (JD) [6, 27, 28], que é diferente do operador usual de Leibniz (Δ) [8],

$$D_x^{(q)}f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}. \quad (2.3.84)$$

No limite de $q \rightarrow 1$, o *número básico* $[x]$ é reduzido ao *número* x , visto em (2.2.49). Portanto, JD ocorre naturalmente em estruturas quânticas deformadas.

Da álgebra do oscilador² q -deformado (por exemplo, no caso de bósons), temos que o número de ocupação médio é dado por [16]:

$$n_i^{(q)} = \frac{1}{\ln q} \ln \left(\frac{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_i) - 1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_i) - q} \right). \quad (2.3.85)$$

Por outro lado do oscilador quântico não-deformado temos que o número de ocupação médio é dado por:

$$n_i = \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_i) - 1}. \quad (2.3.86)$$

¹Representação Holomórfica de Bargmann

²oscilador quântico

Temos que,

$$N^{(q)} = \sum_i n_i^{(q)} \quad \text{e} \quad N = \sum_i n_i. \quad (2.3.87)$$

Notamos que N pode ser obtido da função de partição Ξ da forma:

$$\ln \Xi = - \sum_i \ln(1 - z \exp(-\beta\epsilon_i)). \quad (2.3.88)$$

Como N é definido por

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi, \quad (2.3.89)$$

então

$$N = \sum_i \frac{z \exp(-\beta\epsilon_i)}{1 - z \exp(-\beta\epsilon_i)} = \sum_i \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta\epsilon_i - 1)}, \quad (2.3.90)$$

ou seja,

$$N = \sum_i n_i. \quad (2.3.91)$$

O mesmo não acontece com $N^{(q)}$ porque não podemos obter (2.3.85) através de (2.3.88) da mesma forma que obtemos (2.3.86), ou seja n_i . Normalmente o que se faz para manter o mesmo formalismo estatístico é fazer a seguinte mudança:

$$N^{(q)} = z D_z^{(q)} \ln \Xi, \quad (2.3.92)$$

onde $D_z^{(q)}$ é a derivada de Jackson (JD).

No limite $z \ll 1$ é fácil estabelecer uma relação entre $N^{(q)}$ e N via $D_z^{(q)}$ e ∂_z . Note que nesse limite temos:

$$n_i^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} z \exp(-\beta\epsilon_i) \quad \text{e} \quad n_i = z \exp(-\beta\epsilon_i), \quad (2.3.93)$$

logo,

$$n_i^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} n_i, \quad (2.3.94)$$

ou seja,

$$\sum_i n_i^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} \sum_i n_i \Rightarrow N^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} N. \quad (2.3.95)$$

Usando (2.3.89) e (2.3.91) temos:

$$z D_z^{(q)} \ln \Xi = \frac{q-1}{\ln q} z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi, \quad (2.3.96)$$

tal que,

$$D_z^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.3.97)$$

As energias médias $U^{(q)}$ e U são, portanto, também relacionadas. Note que:

$$U^{(q)} = \sum_i \epsilon_i n_i^{(q)} \quad \text{e} \quad U = \sum_i \epsilon_i n_i. \quad (2.3.98)$$

Usando (2.3.94) vemos que:

$$U^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} U. \quad (2.3.99)$$

Podemos escrever,

$$U^{(q)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = -\frac{\partial y_i}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \Xi. \quad (2.3.100)$$

Como $\frac{\partial}{\partial y_i}$ é similar a $\frac{\partial}{\partial z}$, pois $z = \exp(\beta\mu)$ e $y_i = \exp(\beta\epsilon_i)$, generalizamos

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow D_{y_i}^{(q)}, \quad (2.3.101)$$

logo,

$$U^{(q)} = \frac{\partial y_i}{\partial \beta} D_{y_i}^{(q)} \ln \Xi. \quad (2.3.102)$$

Para

$$D_{y_i}^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.3.103)$$

temos:

$$U^{(q)} = -\frac{\partial y_i}{\partial \beta} \left(\frac{q-1}{\ln q} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \ln \Xi, \quad (2.3.104)$$

ou seja,

$$U^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} U. \quad (2.3.105)$$

Basicamente a aplicação da JD resume-se em:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow D_z^{(q)} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow D_{y_i}^{(q)}, \quad (2.3.106)$$

onde vemos a conexão entre $D_z^{(q)}$ e a derivada usual definida por Leibinz ∂z ou (Δ) na equação (2.3.97).

Essa conexão também pode ser obtida através do *número básico* conforme demonstração logo a seguir.

Demonstração. Destacamos que a mesma só é válida para o *número básico* definido em (2.3.78).

Considere a definição de derivada usual

$$\Delta_x f(x) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (2.3.107)$$

onde $\Delta_x f \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x) \equiv \partial_x f(x)$, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, tal que

$$\partial_x f(x+\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad x+\epsilon = qx, \quad (2.3.108)$$

ou seja,

$$\partial_x f(qx) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)} \quad (2.3.109)$$

Assim,

$$\partial_x f(\epsilon + x) = D_x^{(q)} f(x). \quad (2.3.110)$$

Considere $f(x) = x^\alpha$, tal que

$$\partial_x f(\epsilon + x^\alpha) = \frac{(qx)^\alpha - x^\alpha}{x(q-1)}, \quad (2.3.111)$$

$$\frac{\alpha x^\alpha}{x} = \frac{q^\alpha - 1}{q-1} x^{\alpha-1}, \quad (2.3.112)$$

$$\alpha x^{\alpha-1} = [\alpha]_q x^{\alpha-1}, \quad (2.3.113)$$

ou seja

$$\alpha = [\alpha]_q, \quad [\alpha]_q = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}. \quad (2.3.114)$$

Voltando a equação (2.3.110)

$$D_x^{(q)} [\alpha]_q = \partial_x \alpha. \quad (2.3.115)$$

Agora, realizando uma expansão em α e considerando apenas a primeira ordem temos

$$D_x^{(q)} \frac{\ln q}{q-1} \alpha = \partial_x \alpha. \quad (2.3.116)$$

Finalmente chegamos ao mesmo resultado obtido no limite de altas temperaturas

$$D_x^{(q)} = \frac{q-1}{\ln q} \partial_x. \quad (2.3.117)$$

Após a obtenção das derivadas de Jackson, e da prova da relação entre as q -derivadas e as derivadas usuais através de um termo multiplicativo que insere o fator q nas quantidades termodinâmicas calculadas no limite das altas temperaturas. Por essa razão no CAPÍTULO 3 estaremos inserindo as JD , uma vez que resolvemos o problema de Landau no mesmo limite, e assim obtemos o problema do diamagnetismo de Landau q -deformado.

Capítulo 3

Diamagnetismo de Landau q -deformado em D -Dimensões

Para explicarmos o fenômeno do diamagnetismo, temos que levar em conta a interação entre o campo magnético externo e o movimento orbital dos elétrons. Descartando o termo de spin, o hamiltoniano de uma partícula de massa m e a carga e , na presença de um campo magnético \mathbf{H} , é dado pela expressão

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (3.0.1)$$

onde \mathbf{A} é o potencial vetor associado ao campo \mathbf{H} e c é a velocidade da luz. No contexto da mecânica estatística clássica, não há possibilidade de ocorrência do diamagnetismo [35, 36, 37]. Para ver isto, basta escrevermos a função de partição no espaço de fase clássico,

$$\Xi_{cl} = \int d^3r \int d^3p \exp(-\beta\mathcal{H}), \quad (3.0.2)$$

$$\Xi_{cl} = \int d^3r \int d^3p \exp \left[\frac{-\beta}{2m} \left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right]. \quad (3.0.3)$$

Note que podemos eliminar a dependência de Ξ_{cl} com o campo magnético, ao realizarmos

uma mudança de variável $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\mathbf{A}$, tal que

$$\Xi_{cl} = \int d^3r \int d^3p \exp \left[\frac{-\beta \mathbf{p}'^2}{2m} \right]. \quad (3.0.4)$$

Podemos fazer uma generalização para D -dimensões, mudando a dimensão do espaço de coordenadas e de momento de 3 para D dimensões. O problema original em ($D = 3$) pode ser visto de maneira detalhada a partir da equação (3.0.4) no **Apêndice A**, onde mostramos que o diamagnetismo de Landau é um fenômeno puramente quântico, obtemos a degenerescência g e também calculamos a frequência clássica de rotação definida por $\omega = \frac{eH}{mc}$, em unidades (CGS).

Partiremos da função de partição no ensemble grande canônico

$$\ln \Xi = -k \sum_{\delta} \sum_k \sum_n \ln \{1 - k \exp[-\beta(\epsilon - \mu)]\}, \quad (3.0.5)$$

onde $z = \exp(\beta\mu)$ é a fugacidade e $k = \pm 1$, para bósons e férmions respectivamente (definido na seção anterior).

Realizamos os somatórios, primeiramente considerando o limite contínuo,

$$\sum_k f(k) \rightarrow \frac{L^w}{(2\pi)^w} \int_{-\infty}^{\infty} d^w k_z f_n(k_z), \quad (3.0.6)$$

onde $w = (D - 2)$, e $k_z^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_w^2$ e $L^{(D)} = V$ (hiper-volume). Devemos notar que aumentamos apenas o número de dimensões para $(D - 2)$ dimensões extras. O sistema continua, em sua essência, um problema planar imerso em D dimensões.

Substituindo a fugacidade e a equação (3.0.6) na equação (3.0.5), obtemos

$$\ln \Xi = -k \sum_{\delta=1}^g \sum_n \frac{L^w}{(2\pi)^w} \int_{-\infty}^{\infty} d^w k_z \ln \left\{ 1 - k \exp \left[-\beta(\epsilon - \mu) \right] \right\}, \quad (3.0.7)$$

$$\ln \Xi = -k \frac{gL^w}{(2\pi)^w} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^w k_z \ln \left\{ 1 - kz \exp \left[\frac{-\beta \hbar^2 k_z^2}{2m} - \beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \quad (3.0.8)$$

onde definimos o fator de degenerescência g e a energia ϵ

$$g = \frac{2L^2 eH}{hc}, \quad \epsilon = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.0.9)$$

Realizando uma expansão numa série em z da forma, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$, ($x \ll 1$), e tomando o termo líder chegamos ao resultado que discutiremos abaixo.

Trabalhando em um limite de altas temperaturas ou de gás diluído ($z \ll 1$), o termo dominante da função de partição grande canônica pode ser escrito na forma:

$$\ln \Xi = \frac{gL^w}{(2\pi)^w} k^2 z \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d^w k_z \exp \left[\frac{-\beta \hbar^2 k_z^2}{2m} \right]}_I \exp \left[-\beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.0.10)$$

Resolvendo a integral (I) do somatório, observamos que temos uma integral gaussiana, dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\left(\frac{1}{2} \right)}. \quad (3.0.11)$$

Logo chegamos ao resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-\beta \hbar^2 k_z^2}{2m} \right) d^w k_z = \left(\frac{2\pi m}{\beta \hbar^2} \right)^{\left(\frac{w}{2} \right)}. \quad (3.0.12)$$

Lembrando que $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$, onde κ_B é a constante de Boltzmann, temos

$$\left(\frac{2\pi m \kappa_B T}{\hbar^2} \right)^{\left(\frac{w}{2} \right)} = \frac{1}{\lambda_T^w}, \quad (3.0.13)$$

onde, λ_T é o comprimento de onda térmico de De Broglie.

O fato de realizarmos essa aproximação deve-se ao critério de validade do tratamento clássico de um gás, ou seja, os efeitos quânticos são desprezíveis quando o comprimento de onda de De Broglie é muito pequeno comparando com outras distâncias físicas relevantes. A quantidade $a = \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}}$ representa o espaçamento médio entre partículas do gás. Assim é plausível que os efeitos quânticos sejam desprezados quando temos “poucas” partículas no sistema (baixa densidade) ou quando estas se distribuem por um grande número de estados

(altas temperaturas). Assim,

$$\lambda_T^w \ll a^w. \quad (3.0.14)$$

Podemos relacionar a com a energia de Fermi,

$$\epsilon_F^w = \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{2w}{3}} \frac{h^{2w}}{(2m^*)^w}, \quad (3.0.15)$$

$$a^w = \left(\frac{3n_e n_a}{8\pi} \right)^{\frac{w}{3}} \frac{h^w}{(2m^* \epsilon_F)^{\frac{w}{2}}}, \quad (3.0.16)$$

temos $\frac{N}{V} = \frac{n_e n_a}{a^3}$, onde n_e é o número de elétrons de condução por átomo, n_a é o número de átomos por célula e $m^* =$ massa efetiva $= 0,98m_e$, m_e é a massa do elétron.

Voltando a equação (3.0.14) e substituindo pelas equações (3.0.13) e (3.0.16),

$$\frac{1}{T^w} \ll \left(\frac{3n_e n_a}{8\pi} \right)^{\frac{2w}{3}} \frac{h^{2w}}{(2m^* \epsilon_F)^w} \frac{(2\pi m \kappa_B)^w}{\hbar^{2w}}, \quad (3.0.17)$$

$$T^w \gg \frac{0,98 T_F^w}{(n_e n_a)^{\frac{2w}{3}} (30,06)^w}, \quad (3.0.18)$$

onde T_F^w é a temperatura de Fermi $= \left(\frac{\epsilon_F}{\kappa_B} \right)^w$.

Podemos ter uma noção do valor da temperatura necessária para atingir o limite clássico, aplicando a equação (3.0.18) por exemplo, para o caso do sódio (Na), como segue:

$$n_e = 1, \quad n_a = 2, \quad T_F = 3,84 \times 10^4 K, \quad D = 3,$$

$$T \gg 788,6 K. \quad (3.0.19)$$

Agora realizamos o somatório da equação (3.0.10) e obtemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] = \left[2 \sinh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (3.0.20)$$

Com os resultado obtidos nas equações (3.0.13) e (3.0.20) e o valor de g , podemos reescrever

a equação (3.0.10),

$$\ln \Xi = \frac{2L^2 eH}{hc} \frac{L^w}{(2\pi)^w} \frac{1}{\lambda_T^w} k^2 z \left[\sinh \left(\frac{\beta \hbar eH}{2mc} \right) \right]^{-1}, \quad (3.0.21)$$

$$\ln \Xi = \frac{2L^D eH}{hc \lambda_T^w (2\pi)^w} k^2 z [\sinh(\beta \mu_B H)]^{-1}, \quad (3.0.22)$$

onde $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ é o magneton de Bohr. Podemos ainda definir um fator

$$C = \frac{2L^{(D)} eH}{\lambda_T^{(w)} (2\pi)^w hc}, \quad (3.0.23)$$

tal que

$$\ln \Xi = z k^2 C \left[\sinh(\beta \mu_B H) \right]^{-1}. \quad (3.0.24)$$

Após as mudanças necessárias para generalizarmos o problema do diamagnetismo de Landau em D -dimensões, voltamos agora nossa atenção à incorporação da q -álgebra no nosso estudo. Podemos escrever a função de partição no ensemble grande canônico da seguinte maneira

$$\ln \Xi = z k^2 C \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.0.25)$$

onde $k^2 = 1$, $y_n = \exp(-\beta \epsilon_n)$ e $\epsilon_n = \left[\frac{\hbar eH}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$.

3.1 Energia interna q -deformada

Vamos determinar a energia interna, que como sabemos é definida por

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi. \quad (3.1.26)$$

Vamos fazer uso das equações (2.3.106) e (2.3.97), que são adequadas para introduzirmos a JD . Contudo precisamos realizar a seguinte mudança

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} = -\left(\frac{\partial y_n}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial y_n} \right). \quad (3.1.27)$$

Voltando à equação (3.1.26), e aplicando a mudança realizada, obtemos

$$U = -\frac{\partial y_n}{\partial \beta} D_{y_n}^{(q)} \ln \Xi, \quad (3.1.28)$$

$$U = -zC \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial y_n}{\partial \beta} D_{y_n}^{(q)} y_n, \quad (3.1.29)$$

$$U = -zC \frac{q-1}{\ln q} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.1.30)$$

com o resultado da equação (3.0.20), chegamos à energia interna q -deformada

$$U = zC \frac{q-1}{\ln q} \left(\frac{\mu_B H \cosh(\beta \mu_B H)}{2 \sinh^2(\beta \mu_B H)} \right). \quad (3.1.31)$$

3.2 Número de partículas q -deformado

O número de partículas N é definido através de

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi. \quad (3.2.32)$$

Como a equação (3.2.32) depende explicitamente de z , logo aplicando a JD , obtemos

$$N = z D_z^{(q)} zC \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.2.33)$$

$$N = zC \frac{q-1}{\ln q} \partial_z z \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.2.34)$$

$$N = zC \frac{q-1}{\ln q} \frac{1}{2 \sinh(\beta \mu_B H)}. \quad (3.2.35)$$

Uma vez definido o número de partículas N q -deformado através de (3.2.35), podemos reescrever (3.1.31), e obtemos

$$U = N \left(\frac{\mu_B H \cosh(\beta \mu_B H)}{\sinh(\beta \mu_B H)} \right). \quad (3.2.36)$$

3.3 Calor específico

Para determinarmos o calor específico

$$C_V = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{-\kappa_B \beta^2}{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{V,N}, \quad (3.3.37)$$

fazemos uso de Jacobianos, definidos por

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_N = \frac{\partial(U, N)}{\partial(\beta, N)} = \frac{\partial(U, N)}{\partial(\beta, z)} \frac{\partial(\beta, z)}{\partial(\beta, N)} = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_z - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_\beta \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)_\beta. \quad (3.3.38)$$

Após realizarmos todas as derivadas, obtemos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_N = \frac{-zC}{2} \frac{q-1}{\ln q} \frac{\mu_B^2 H}{\sinh^3(\beta \mu_B H)}. \quad (3.3.39)$$

Aplicando esse resultado na definição (3.3.37) e realizando uma substituição do valor de N obtido na equação (3.2.35) chegamos ao calor específico

$$C_V = \kappa_B \left(\frac{\beta \mu_B H}{\sinh(\beta \mu_B H)} \right)^2, \quad (3.3.40)$$

onde κ_B é a constante de Boltzmann. Notamos que isto coincide com o resultado usual. O mesmo acontece com qualquer grandeza específica tipo energia por partícula ($u = \frac{U}{N}$), magnetização por partícula ($m = \frac{M}{N}$), etc. Assim a grandeza que é essencialmente afetada pela deformação é o número de partículas N . A q -deformação pode ser vista portanto como um efeito de impureza em um material magnético, a qual modifica suas características.

3.3.1 Gráficos q -deformados

Podemos observar pelos gráficos (3.1) e (3.2), que os resultados para diferentes valores de q , representados para energia interna e número de partículas q -deformados apresentam 3 comportamentos distintos pelas curvas vermelha, azul e verde, e no caso da curva vermelha, temos o resultado idêntico ao caso não deformado. Já no gráfico (3.3), o calor específico

não sofre qualquer alteração, como já foi citado anteriormente.

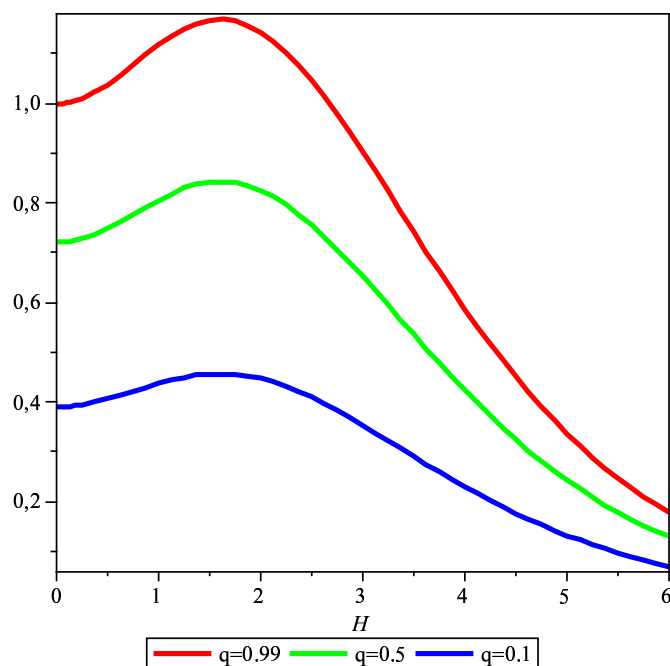


Figura 3.1: Energia interna q -deformada para $q = 0,999999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq. (3.1.31).

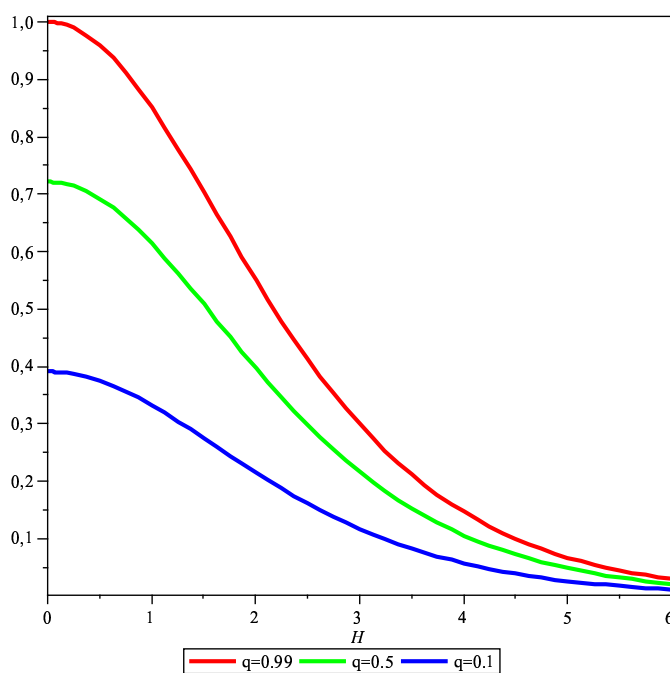


Figura 3.2: Número de partículas q -deformado para $q = 0,999999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq.(3.2.35).

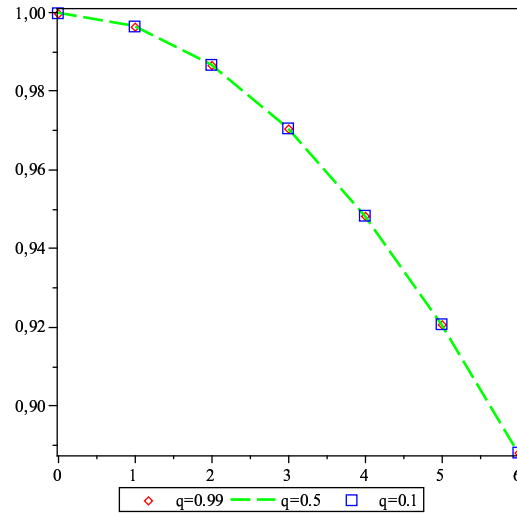


Figura 3.3: Calor específico para $\beta=0.1$ e $\kappa_B = 1$, $q=0,5$ (tracejado), $q=0,99999999$ (ponto), $q = 0,1$ (quadrado), Eq. (3.3.40).

3.4 Magnetização e susceptibilidade q -deformadas

A determinação da magnetização é realizada através da derivada termodinâmica

$$M = -\frac{\partial \phi}{\partial H}. \quad (3.4.41)$$

Onde determinamos o grande potencial canônico

$$\phi = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi, \quad \phi = \frac{-zC}{2\beta \sinh(\beta\mu_B H)}. \quad (3.4.42)$$

Entretanto, para aplicarmos a JD , teremos que reescrever a derivada da seguinte forma

$$-\frac{\partial \phi}{\partial H} = -\left(\frac{\partial y_n}{\partial H} \frac{\partial \phi}{\partial y_n} \right). \quad (3.4.43)$$

Assim,

$$M = -\frac{\partial y_n}{\partial H} D_{y_n}^{(q)} \phi, \quad (3.4.44)$$

$$M = \frac{zC^*}{\beta} \frac{q-1}{\ln q} \frac{\partial}{\partial H} \left(2H \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right), \quad (3.4.45)$$

ou seja,

$$M = \frac{zC^*}{\beta} \frac{q-1}{\ln q} \frac{1}{\sinh(\beta\mu_B H)} \left(1 - \frac{\beta\mu_B H \cosh(\beta\mu_B H)}{\sinh(\beta\mu_B H)} \right), \quad (3.4.46)$$

onde $C^* = C/2H$. Podemos ainda eliminar o potencial químico por meio do número de partículas N , e reescrever a magnetização como

$$M = \frac{N}{\beta H} \left(1 - \frac{\beta\mu_B H \cosh(\beta\mu_B H)}{\sinh(\beta\mu_B H)} \right). \quad (3.4.47)$$

Podemos ainda introduzir a função de Langevin,

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}, \quad (3.4.48)$$

tal que

$$\mathcal{L}(\beta\mu_B H) = \coth(\beta\mu_B H) - \frac{1}{\beta\mu_B H}, \quad (3.4.49)$$

e finalmente obtemos

$$M = -N\mu_B \mathcal{L}(\beta\mu_B H). \quad (3.4.50)$$

Assim, a q -deformação fica implícita em N , e a equação (3.4.50) fica escrita da mesma maneira encontrada na literatura [35, 36, 37].

Determinamos a susceptibilidade a partir da definição

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H}, \quad (3.4.51)$$

ou seja,

$$\chi = 2N\beta\mu_B^2 \coth(\beta\mu_B H) \left(\mathcal{L}(\beta\mu_B H) - \frac{1}{2\coth(\beta\mu_B H)} \right). \quad (3.4.52)$$

Agora realizamos uma análise no limite de campos fracos $\beta\mu_B H \ll 1$, partindo de

(3.4.50), expandida em uma série de Taylor

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3}, \quad (3.4.53)$$

onde consideramos até a primeira ordem, e obtemos

$$M = -\frac{N\mu_B^2 H}{3\kappa_B T}. \quad (3.4.54)$$

Temos portanto a susceptibilidade a campo nulo

$$\chi_0 = -\frac{N_0\mu_B^2}{3\kappa_B T}, \quad (3.4.55)$$

onde $N_0 = zC^* \frac{q-1}{\ln q}$.

Esses resultados são conhecidos da literatura e mostram que a magnetização no limite de altas temperaturas é dada pela mesma expressão obtida no modelo clássico de Langevin para o paramagnetismo, mas com sinal trocado. Esse sinal não depende da carga, pois se trata de uma função ímpar e a carga e comparece linearmente na expressão do magneton de Bohr. Já com relação a susceptibilidade a campo nulo, não tem nenhum análogo na mecânica estatística clássica (anula-se quando $\mathbf{H}=0$). É possível notarmos que esse resultado corresponde justamente a um terço, com sinal trocado da susceptibilidade de Pauli no regime de altas temperaturas [35, 36, 37].

Os gráficos (3.4) e (3.5), representam os valores q -deformados para a magnetização e susceptibilidade magnética em função do campo H , com a função de Langevin exata. Note que quando a q -deformação aumenta ($q \rightarrow 0$) a magnitude das grandezas diamagnéticas acima mencionadas diminuem, segundo a “lei” $\left(\frac{q-1}{\ln q}\right)$. Podemos pensar em uma substância diamagnética na qual se adiciona gradualmente uma impureza, por exemplo, outras substâncias à base de material paramagnético ou ferromagnético de modo a compensar o efeito diamagnético da primeira. Um outro exemplo, seria considerar cada valor de q associado a

uma determinada substância. A saber, as susceptibilidades do cobre $(-1.0 \times 10^{-5})^1$, diamante (-2.1×10^{-5}) e mercúrio (-2.9×10^{-5}) que estão em ordem crescente de magnitude $(|\chi|)$, poderiam muito bem ser representadas pelos gráficos azul, verde e vermelho da figura (3.5), respectivamente.

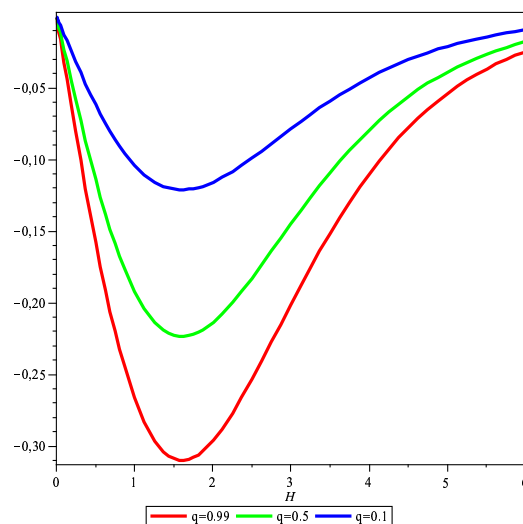


Figura 3.4: Magnetização q -deformada em função do campo magnético \mathbf{H} para $q=0,99999999$ (vermelho), $q=0,5$ (verde), $q=0,1$ (azul), Eq. (3.4.50).

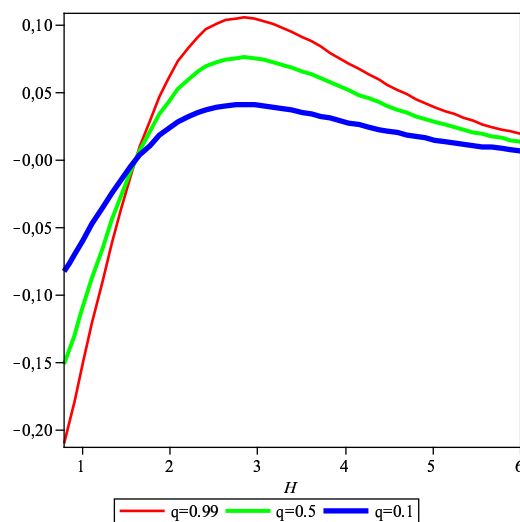


Figura 3.5: Susceptibilidade magnética q -deformada em função do campo magnético \mathbf{H} para $q = 0,99999999$ (vermelho), $q = 0,5$ (verde), $q = 0,1$ (azul), Eq. (3.4.52).

¹adimensional no sistema CGS

3.4.1 Gráficos não q -deformados para diferentes dimensões D

Até o presente fixamos $D = 3$ e variamos o valor de q para estudarmos a q -deformação. Entretanto, é claro que o número de dimensões D afetam as quantidades termodinâmicas observadas. Por isto, nesta seção vamos manter $q \rightarrow 1$ (sem deformação) e variar o número de dimensões D .

Como pode ser observado todas as quantidades termodinâmicas estudadas anteriormente dependem da constante

$$C^* = \frac{C}{2H} \quad \text{ou} \quad C^* \propto \left(\frac{L}{2\pi\lambda_T} \right)^D 4\pi^2\lambda_T^2. \quad (3.4.56)$$

Podemos observar que, para $L < 2\pi\lambda_T$ à medida que o número de dimensões D aumenta C^* diminui —ver equação (3.0.23). Por outro lado C^* aumenta com D quando $L > 2\pi\lambda_T$, e não sofre alterações quando $L = 2\pi\lambda_T$ — ver Fig. (3.6). Um fenômeno interessante, pode ser observado no segundo caso, onde a magnetização é minimizada para $D = 3$, um mecanismo que pode ser usado para selecionar o número máximo de dimensões do espaço-tempo, por exemplo. Este fato pode encontrar algumas aplicações em Física de Dimensões Extras, como a Cosmologia Moderna, Física de Partículas e Teoria de Cordas [19].

Portanto, é interessante observar o comportamento das grandezas termodinâmicas, como segue. Os demais gráficos representam o comportamento do calor específico, número de partículas, magnetização e susceptibilidade magnética não deformados ou seja, quando $q \rightarrow 1$, em função do campo \mathbf{H} , e de diferentes números de dimensões D .

Os gráficos comprovam o comportamento exponencial da razão entre L e λ_T com as dimensões D , previsto em (3.4.56).

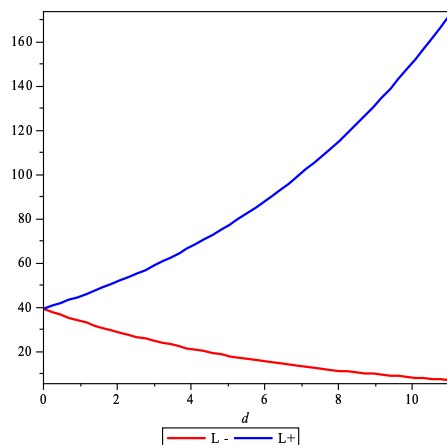


Figura 3.6: Constante C^* em função do número de dimensões (0..11) para $L_- = 2\pi - 0.9$ (vermelho), $L_+ = 2\pi + 0.9$ (azul), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.4.56).

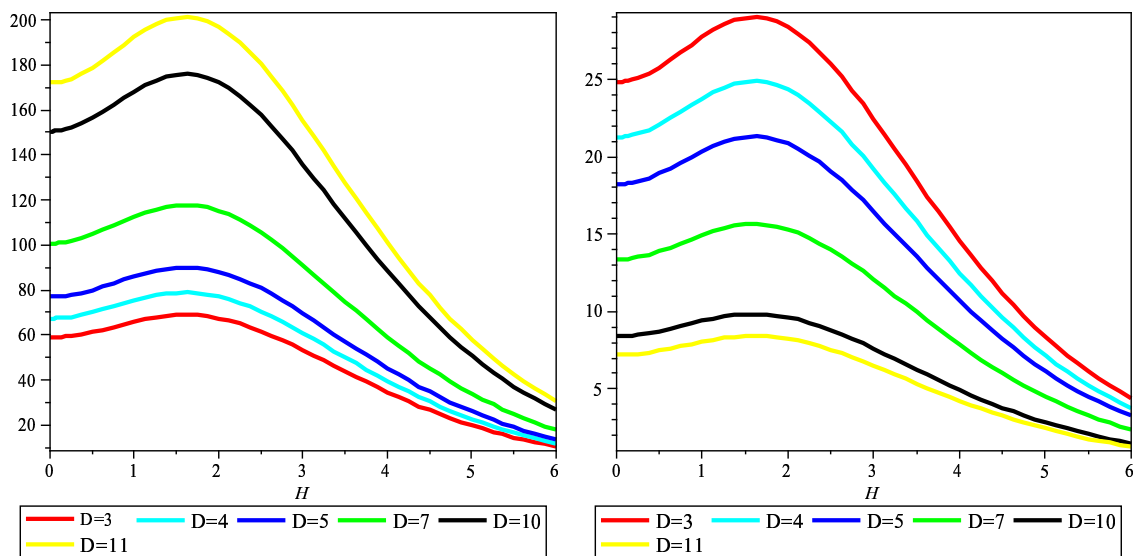


Figura 3.7: Energia interna em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+ = 2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_- = 2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.1.31).

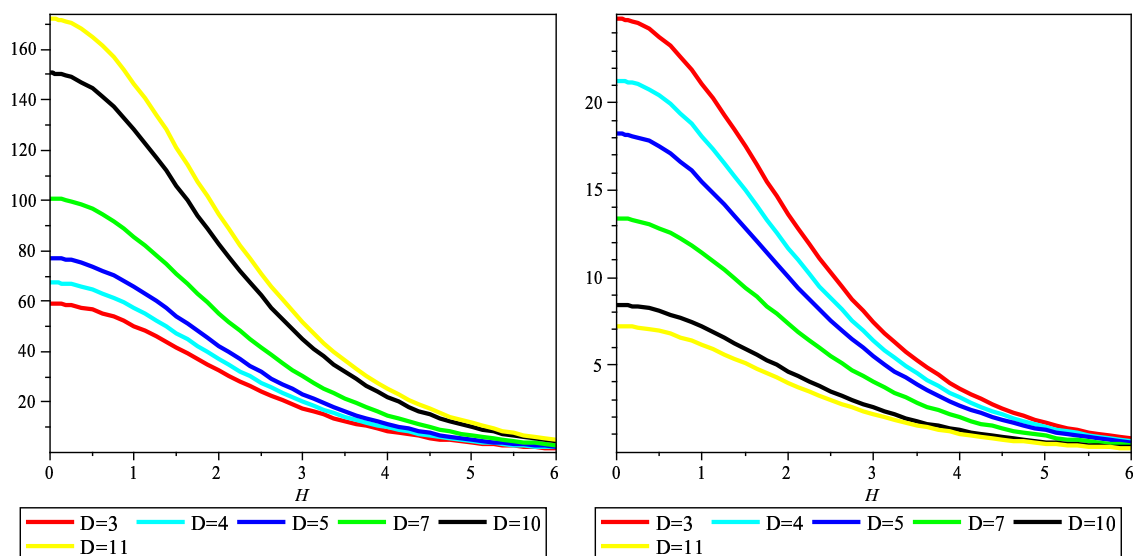


Figura 3.8: Número de partículas em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+ = 2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_- = 2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.2.35).

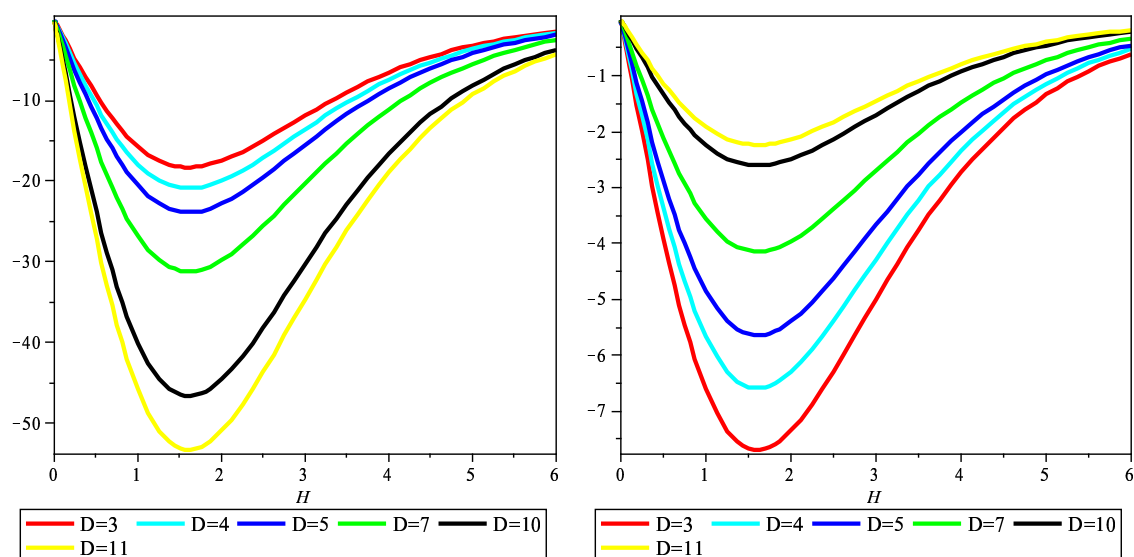


Figura 3.9: Magnetização em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+ = 2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_- = 2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq.(3.4.50).

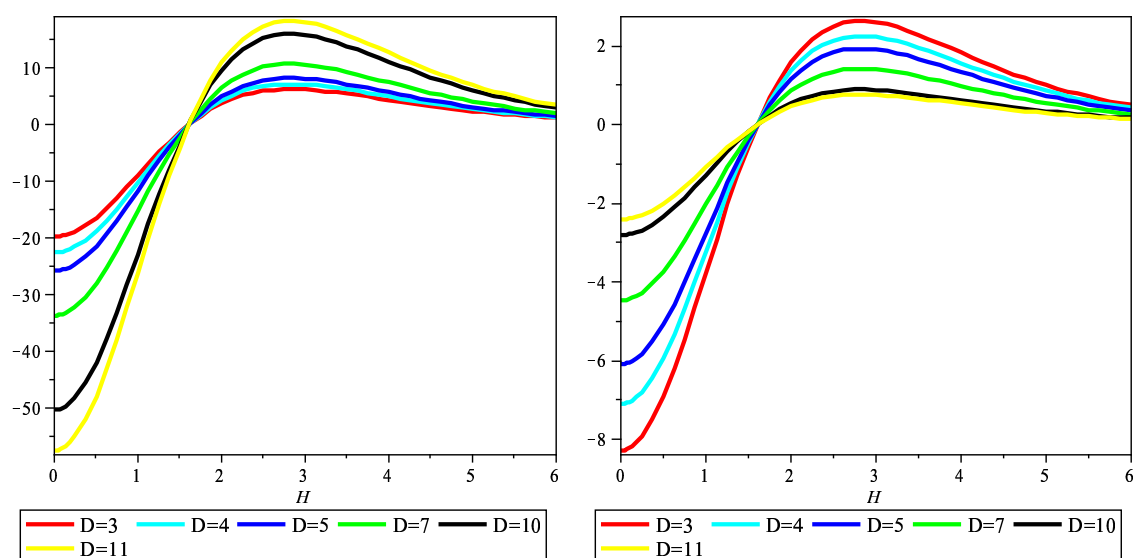


Figura 3.10: Susceptibilidade magnética em função do campo magnético \mathbf{H} para dimensões D conforme legenda, e com $L_+ = 2\pi + 0.9$ (esquerda) e $L_- = 2\pi - 0.9$ (direita), $\lambda_T = 1$, Eq. (3.4.52).

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Estudamos o problema do diamagnetismo de Landau no limite de altas temperaturas aplicando a q -deformação fundamentado na q -álgebra e nas derivadas de Jackson (JD), em uma estatística extensiva diferente da de Tsallis [12],

$$S_q = N\kappa_B[2\beta\mu_B H\mathcal{L}(\beta\mu_B H) + 3], \quad (4.0.1)$$

com isso conhecemos algumas de suas principais propriedades e aplicações. Assim, aplicando a q -deformação em um problema bem conhecido e estudado obtivemos uma melhor compreensão dessa deformação.

Obtemos valores q -deformados ($q \neq 1$) para energia interna, número de partículas, magnetização, susceptibilidade magnética e calor específico. Este estudo foi considerado no espaço de D -dimensões. No limite $q \rightarrow 1$ verificamos que os resultados são os mesmos da literatura [35, 36, 37].

Contudo, fica claro que o calor específico (3.3.40) não apresenta a q -deformação. Nas equações (3.2.36), (3.4.50)-(3.4.54) e (3.4.55) que descrevem as demais grandezas termodinâmicas, vale salientar que a q -deformação está completamente armazenada no número de partícula N . Assim, as quantidades específicas ou as quantidades por partículas, tais como o calor específico não são alteradas.

Observamos também que as quantidades termodinâmicas dependem do número de dimensões D . Este fato é importante, uma vez que podemos encontrar algumas aplicações em Física de Dimensões Extras, tais como a Cosmologia Moderna, a Física de Partículas e a Teoria de Cordas.

Uma perspectiva de trabalho, surge a partir do estudo em Física Atômica e Molecular, em especial estruturas cristalinas [38, 39, 40]. Vemos a possibilidade de aplicarmos a q -deformação, atuando como uma desordem ou uma impureza. Isso devido ao fato de que muitas propriedades dos materiais cristalinos de interesse prático estão definidos pelos efeitos da desordem. Podemos considerar que para esses defeitos o fator principal está na dopagem, ou seja, o acréscimo de impurezas ou defeitos (doadoras ou receptoras de cargas) que afetam drasticamente as suas propriedades eletrônicas. Os estados de impurezas são localizados e correspondem ao movimento do elétron numa região restrita do espaço (rede cristalina). Esses novos estados são similares aos estados do átomo de hidrogênio por causa das órbitas do único elétron no íon da impureza.

Em razão dessa possibilidade aplicamos também a q -deformação nos sólidos de Einstein e Debye atuando como se fosse uma impureza e obtemos suas respectivas temperaturas q -deformadas e conseqüentemente os respectivos calores específicos q -deformados [41].

Resultados preliminares mostram que certos materiais q -deformados apresentam características (temperatura de Debye e calor específico) de outros. Por exemplo, o sódio Na , apresentou características de ouro Au para $q = 0,5$ e quando $q = 0,1$ assemelhou-se ao paládio Pd . Ainda precisamos analisar outras características entre os materiais para estabelecer de forma mais precisa estas relações via q -deformação.

Apêndice A

Diamagnetismo de Landau

Partirmos da equação (3.0.4), pois, ainda não estamos trabalhando em D -dimensões e nem temos a presença da q -deformação, nos permitindo resolver o problema em sua forma original.

Temos que a função de partição grande canônica clássica é dada por,

$$\Xi = V^N \times P_N, \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$\int d^3\vec{r} = \int dV = V, \quad P_N = \int d^3P_1 \cdots \int d^3P_N \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^2}{2m}\right). \quad (\text{A.2})$$

Trataremos separadamente cada integral como:

$$\int d^3P_1 \exp\left(-\beta \frac{P_1^2}{2m}\right), \quad \iiint dP_1x dP_1y dP_1z \exp\left[\frac{-\beta(P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2)}{2m}\right]. \quad (\text{A.3})$$

Temos um produto de $3N$ integrais idênticas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP \exp\left(\frac{-\beta P^2}{2m}\right). \quad (\text{A.4})$$

Como podemos notar a equação (A.4) é uma integral gaussiana, e sua resolução é dada por

$$I_o(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(\frac{-\beta P'^2}{2m}\right) = \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.5})$$

onde $a = \frac{\beta}{2m}$.

Portanto, $P_N = \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{(3N/2)}$, ou seja

$$\Xi = V^N \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{(3N/2)}. \quad (\text{A.6})$$

Provamos que não existe dependência com o campo magnético. Portanto, o diamagnetismo é um fenômeno puramente quântico.

No entanto para tratar do diamagnetismo de Landau precisamos usar uma função de partição *quântica*. Antes vamos expor o formalismo eletromagnético necessário, para $D = 3$. A generalização para $D > 3$ é direta, fazendo uso do potencial quadrivetor $A_\mu = (0, 0, xH, 0, \dots, 0)$, onde $\mu = 0, 1, 2, \dots, D$.

Considerando um campo magnético uniforme na direção \mathbf{z} , partindo da definição

$$\vec{H} = \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.7})$$

obtemos,

$$B_z = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}. \quad (\text{A.8})$$

Podemos escolher o potencial vetor no *gauge de Landau*

$$\vec{A} = xH\vec{j}, \quad (\text{A.9})$$

onde $A_y = xH$ e $B_z = B = H$. Portanto

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} xH\vec{j} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left[P_x^2 + P_z^2 + \left(P_y^2 - \frac{2P_y e H x}{c} + \left(\frac{e}{c} xH \right)^2 \right) \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[P_x^2 + P_z^2 + \left(P_y - \frac{e}{c} x H \right)^2 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Para realizar a quantização, consideramos:

$$(1) \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (\text{A.12})$$

sendo

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \vec{P} = (P_x, P_y, P_z) \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (\text{A.13})$$

$$(2) \quad H\Psi = E\Psi, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eHx}{c} \right)^2 \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (\text{A.15})$$

Seja,

$$\Psi(x, y, z, t) = \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp(-ik_y Y) \exp(-ik_z Z) f(x). \quad (\text{A.16})$$

Aplicando a equação (A.16) na equação (A.15), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left\{ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \exp(-ik_y Y) \times \right. \right. \\ & \times \exp(-ik_z Z) f(x) \left. \right] - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp(-ik_y Y) \times \right. \\ & \times \exp(-ik_z Z) f(x) \left. \right] - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eHx}{c} \right)^2 \left[\exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \exp(-ik_y Y) \exp(-ik_z Z) f(x) \right] \right\} f(x) = E f(x). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Como

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \exp(-ik_y Y) = (-ik)^2 \exp(ik_y), \quad (\text{A.18})$$

e aplicando-a na equação (A.17), temos

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left(\hbar k_y - \frac{eHx}{c} \right)^2 f(x) = \frac{E + \hbar^2 k_z^2}{2m} f(x). \quad (\text{A.19})$$

Fazemos a seguinte mudança de variável

$$\left(\hbar k_y - \frac{eHx}{c}\right)^2 = \left(\frac{eH}{c}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{\hbar ck_y}{eH} - x\right)^2}_{x'}. \quad (\text{A.20})$$

Assim, aplicando a equação (A.20) na equação (A.19)

$$\frac{-\hbar^2 \partial^2 f(x')}{2m \partial x'^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{eH}{c}\right)^2 x'^2 f(x') = \frac{E + \hbar^2 k_z^2}{2m} = E' f(x'). \quad (\text{A.21})$$

onde

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{eH}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2, \quad \omega = \frac{eH}{mc}. \quad (\text{A.22})$$

Na equação (A.22) ω é a *frequência clássica básica*.

A.1 Degenerescência

Para calcular o fator de degenerescência, vamos fazer uma comparação com o espectro de elétrons livres em 3 dimensões, na ausência de um campo magnético. Podemos escrever o espectro de energia da forma

$$i) H = 0, \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2m\epsilon(\text{livres})}{\hbar^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$ii) H \neq 0, \quad \epsilon = \epsilon(n, k_z) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.24})$$

Comparando as energias temos

$$(k_x^2 + k_y^2) = \frac{2m}{\hbar} \omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.25})$$

Podemos reescrever a equação (A.25) aplicando a equação (A.22)

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{2eH}{\hbar c} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.26})$$

Consideramos o sistema dentro de um cubo de lado $L \gg 1$. Pela condição de contorno $\Psi(L) = 0$ na função de onda temos:

$$\Psi(y) \propto \sin k_y Y \rightarrow \sin k_y L = 0 \rightarrow k_y L = n\pi. \quad (\text{A.27})$$

Assim obtemos,

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L}. \quad (\text{A.28})$$

Com base na equação (A.20) temos, $x_0 = \frac{\hbar c}{eH} k_y$. Comparando com a equação (A.28), temos

$$x_0 = \frac{\hbar c}{eH} \frac{n_y \pi}{L}. \quad (\text{A.29})$$

O maior valor para x_0 é L , portanto,

$$L = \frac{\hbar c}{eH} \frac{n_{y(\max)}}{L} \pi. \quad (\text{A.30})$$

Para medirmos a degenerescência calculamos o $n_{y_{\max}} = g$. Substituindo isto na equação (A.30) temos

$$L^2 = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{c}{eH} g \pi \rightarrow g = \frac{2L^2 eH}{\hbar c}, \quad (\text{A.31})$$

onde g é o fator de degenerescência.

Levando em conta essa degenerescência, devemos reescrever as auto-energias na forma:

$$\epsilon = \epsilon(n, k_z, \delta) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.32})$$

onde $k_z = (-\infty, \infty)$; $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\delta = 1, 2, \dots, g$.

As quantidades termodinâmicas (Energia interna, Número de partículas, Calor específico, Magnetização e Susceptibilidade magnética) são determinadas a partir da aplicação do resultado obtido para o espectro de energia na equação (3.0.5) no **CAPÍTULO 3**, onde embora temos o problema do diamagnetismo de Landau q -deformado em D -dimensões,

vale salientar que quando $q \rightarrow 1$ e $D = 3$ o problema retorna a sua resolução original, consequentemente os mesmos resultados que obteríamos se continuássemos desse ponto.

Bibliografia

- [1] L.C. Biedenharn and M.A. Lohe, *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras*, World Scientific, Singapore, (1995).
- [2] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, (1990) and references therein.
- [3] M. Chaichian, R. Gonzales Felipe, C. Montonen, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 4017 (1993).
- [4] L. Biedenharn., *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L873 (1989).
- [5] A. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 4581 (1989).
- [6] F.H. Jackson, *Proc. Edin. Math. Soc.* **22**, 28-39(1904).
- [7] D. Galetti, *Braz. J. Phys.* **33**, 1 (2003).
- [8] H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications*, JohnWiley and Sons, New York, (1983).
- [9] B.E. Palladino e P. L. Ferreira, *RBEF* **21**,4 (1999).
- [10] E.G. Floratos, *J. Phys. Math.* **24**, 4739 (1991).
- [11] A. Lavagno , A. M. Scarfone and P. N. Swamy, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 8635-8654 (2007).

- [12] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988); E.M. Curado and C. Tsallis, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L69 (1991); C. Tsallis, R.S. Mendes and A.R. Plastino, Physica A **261**, 534 (1998).
- [13] S. Abe, Phys. Lett. A **224**, 326 (1997).
- [14] G. Kaniadakis, Phys. Rev. E **66**, 056125 (2002).
- [15] G. Kaniadakis, M. Lissia and A.M. Scarfone, Phys. A **340**, 410 (2004); G. Kaniadakis, M. Lissia and A. M. Scarfone, Phys. Rev. E **71**, 046128 (2005).
- [16] A. Lavagno and N.P. Swamy, Phys. Rev. E **61**, 1218 (2000); A. Lavagno and N.P. Swamy, Phys. Rev. E **65**, 036101 (2002).
- [17] A. Erzan, Phys. Lett. A **225**, 235 (1997).
- [18] G. Bimonte, C. Esposito, G Marmo and C.Stornaiolo, Phys. Lett. A **318**, 313 (2003).
- [19] F.A. Brito, A.A. Marinho, “*q*-Deformed Landau diamagnetism problem embedded in *D*-dimensions” *arXiv:0912.4920 v2* .
- [20] J. H. Van Vleck, *The Theory of Electrical and Magnetic Susceptibilities*, Oxford Univ. Press, London (1932).
- [21] L. Landau, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [22] L. Hellstrom, S. Silvestrov, *Commuting Elements in q-deformed Heisenberg Algebras*, World Scientific, Singapore, (2000).
- [23] A. Hebecker, et al., Z. Phys. C **64**, 355-359 (1994).
- [24] J. Schwenk, J. Wess, Phys. Lett. B **291**, 273 (1992).
- [25] B. Cerchiai, et al., Eur. Phys. J. C **8**, 547-558 (1999).
- [26] R.J. Finkelstein, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 1795 (1998).

- [27] F.H. Jackson, Trans. Roy Soc. Edin. **46**, 253-281 (1908).
- [28] F.H. Jackson, Mess. Math. **38**, 57 (1909).
- [29] P. N. Swamy, Physica A **328**, 145-153 (2003).
- [30] T. Ernst, *The History of q-calculus and a new method*. (Dep. Math., Uppsala Univ. 1999-2000).
- [31] P. N. Swamy, Mod. Phys. Lett. B **15**, 915-920 (2001).
- [32] R.J. Finkelstein, “*q*-Uncertainty Relations”, arXiv:q-alg/9707013v1.
- [33] Y.J. Ng, J. Phys. A **23**, 1023 (1990).
- [34] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Late-Univ. of California, LA (1985)).
- [35] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, USP (1999)
- [36] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Pergamon press, Oxford (1972)
- [37] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, (1987)
- [38] P.W. Anderson, *Absence of diffusion in certain random lattices*, Phys. Rev. **5**, 109 (1958).
- [39] P.A. Lee, T.V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **2**, 57 (1985).
- [40] Elliott et al., Rev. Mod. Phys., **3** 46 (1974).
- [41] F.A. Brito, A.A. Marinho, “*q*-Deformed Einstein and Debye solids” (em preparação).