

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Transferência de Calor e Massa em Sólidos  
Heterogêneos com Geometria Arbitrária: Uma  
Análise Concentrada**

---

**Autor: Genival da Silva Almeida**

**Orientadores: Antonio Gilson Barbosa de Lima**

**José Jefferson da Silva Nascimento**

---

Campina Grande, Março de 2003

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Transferência de Calor e Massa em Sólidos Heterogêneos com Geometria Arbitrária: Uma Análise Concentrada**

**Autor: Genival da Silva Almeida**

**Orientadores: Antonio Gilson Barbosa de Lima**

**José Jefferson da Silva Nascimento**

**Curso: Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Térmica e Fluidos**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Engenharia Mecânica,  
como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campina Grande, Março de 2003  
PB - Brasil



|       |   |
|-------|---|
| A447t | <p>Almeida, Genival da Silva.<br/>Transferência de calor e massa em sólidos heterogêneos com geometria arbitrária : uma análise concentrada / Genival da Silva Almeida. - Campina Grande, 2003.<br/>64 f.</p> <p>Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2003.<br/>"Orientação : Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, Prof. Dr. José Jefferson da Silva Nascimento".<br/>Referências.</p> <p>1. Transferência de Calor. 2. Transferência de Calor e Massa. 3. Sólidos Heterogêneos - Geometria Arbitrária. 4. Dissertação - Engenharia Mecânica. I. Lima, Antonio Gilson Barbosa de. II. Nascimento, José Jefferson da Silva. III. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). IV. Título</p> |
|       | CDU 621:536.24(043)   |

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

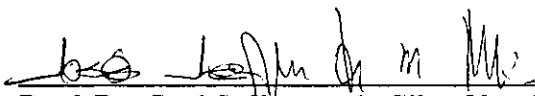
**Transferência de Calor e Massa em Sólidos  
Heterogêneos com Geometria Arbitrária: Uma  
Análise Concentrada**

Dissertação Aprovada em 27 de Março de 2003.



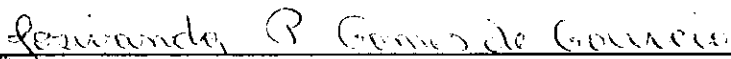
---

**Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, Presidente  
UFCG/CCT/DEM**



---

**Prof. Dr. José Jefferson da Silva Nascimento  
UFCG/CCT/DEM**



---

**Prof. Dra. Josivanda Palmeira Gomes de Gouveia  
UFCG/CCT/DEAg**



---

**Prof. Dr. Celso Rosendo Bezerra Filho  
UFCG/CCT/DEM**

Campina Grande,  
PB - Brasil

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao meu pai (in memorian) e a minha mãe por me ajudarem nos momentos mais difíceis de minha vida.

À minha esposa Lourdinha e aos meus filhos Helber e Helder por compreenderem a minha ausência nos dias dedicados a este curso, acreditando sempre no meu sucesso.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, o criador, por ter concedido-me saúde, força e perseverança, essenciais para a conquista de meus objetivos.

À minha família por acreditarem sempre em mim.

Ao orientador e amigo, Professor Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima pelo estímulo e dedicação fundamentais na realização deste trabalho.

Ao Professor e orientador Dr. José Jefferson da Silva Nascimento, pelo apoio no momento necessário.

Aos professores do curso de Engenharia Mecânica, pelos conhecimentos primordiais à qualidade e conclusão deste curso.

À Universidade Federal de Campina Grande pela oportunidade.

Aos amigos do cursinho FISMAQUI (Física, Matemática e Química), pelos conhecimentos prévios que ajudaram na conclusão do trabalho.

Ao amigo Fabrício José Nóbrega Cavalcante, pela sua contribuição.

Aos amigos que direto ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

*As leis da natureza nada mais são que  
pensamentos matemáticos de Deus.*

*Kepler*

# SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| 1 Introdução   | 01 |
| 2 Revisão da Literatura                                  | 04 |
| 2.1 O processo de secagem                                | 04 |
| 2.1.1 Princípios gerais de secagem                       | 04 |
| 2.2 Teoria e modelos de secagem                          | 07 |
| 2.2.1 Mecanismos de transporte de umidade                | 07 |
| 2.2.2 Modelos de secagem                                 | 08 |
| 2.2.2.1 Modelos baseados numa análise concentrada        | 09 |
| 2.2.2.2 Modelos baseados numa análise distribuída        | 14 |
| 3 Modelagem teórica                                      | 17 |
| 3.1 Análise da transferência de massa                    | 20 |
| 3.2 Análise da transferência de calor                    | 23 |
| 3.3 Análise simultânea da transferência de calor e massa | 26 |
| 4 Resultados e Discussões                                | 31 |
| 5 Conclusões e Sugestões                                 | 43 |
| Referências Bibliográficas                               | 46 |
| Anexos   | 53 |



## RESUMO

ALMEIDA, Genival da Silva, *Transferência de Calor e Massa em Sólidos Heterogêneos com Geometria arbitrária: Uma Análise Concentrada*, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, 2003. 78p. Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho foram desenvolvidos modelos matemáticos para simular a transferência de calor e massa, durante o processo de secagem de sólidos heterogêneos e de forma arbitrária baseando-se numa análise concentrada. As soluções exatas para as equações governantes, considerando os fenômenos de transferência de calor e massa simultânea e não-simultânea, são apresentados e analisados. Vários resultados do teor de umidade e temperatura do sólido durante o processo de secagem variando-se a densidade, calor específico e calor latente de vaporização da água no sólido são apresentados e analisados. Alguns resultados obtidos foram comparados com os resultados analíticos reportado na literatura, para um corpo homogêneo. Verificou-se que a condição de heterogeneidade da matriz sólida assegura uma melhor análise no processo de secagem, obtendo-se resultados mais concretos e fisicamente reais.

### *Palavras Chave:*

Secagem, Modelos empíricos, Capacitância global, Solução analítica.

## ABSTRACT

ALMEIDA, Genival da Silva, *Heat and Mass Transfer in Heterogeneous Solids with Arbitrary Shape: A Lumped Approach*, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, 2003. 78p. Dissertação (Mestrado)

In this work mathematical models were developed to simulate the heat and mass transfer, during the drying process of heterogeneous solids of arbitrary shape basing on a lumped approach. The exact solutions to the ruling equations considering the phenomenon simultaneous and no simultaneous of heat and mass transfer are presented and analyzed. Several results of moisture content and temperature of the solid during the process being varied the density, specific heat and latent heat of vaporization of the water in the solid are presented and analyzed. Any results obtained were compared with the analytical results reported in the literature for a homogeneous body. It was verified that the heterogeneity condition of the solid matrix assures a better analysis in the drying process, being obtained results more concrete and physically real.

### *Key Words:*

Drying, Lumped models, Global capacitance, Analytical solution.

## LISTA DE FIGURAS

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 2.1  | Esquema representativo do processo de secagem de material sólido.   | 05 |
| Figura 2.2  | Esquema representativo do processo de secagem de material baseado numa análise concentrada  | 09 |
| Figura 3.1  | Efeito da resistência térmica de contato na distribuição de temperatura no sistema do sólido heterogêneo.   | 18 |
| Figura 3.2  | Esquema representativo do sólido composto por dois materiais diferentes.  | 18 |
| Figura 4.1  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ).                    | 33 |
| Figura 4.2  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho_1=900 \text{ kg/m}^3$ , $\rho_2=2100 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ). | 33 |
| Figura 4.3  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho_1=2100 \text{ kg/m}^3$ , $\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ). | 34 |
| Figura 4.4  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho_1=900 \text{ kg/m}^3$ , $\rho_2=4100 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ). | 34 |
| Figura 4.5  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho_1=4100 \text{ kg/m}^3$ , $\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ). | 35 |
| Figura 4.6  | Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_{p1}=700 \text{ J/kgK}$ , $C_{p2}=2300 \text{ J/kgK}$ ).  | 36 |
| Figura 4.7  | Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ).                           | 36 |
| Figura 4.8  | Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_{p1}=700 \text{ J/kgK}$ , $C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ).         | 37 |
| Figura 4.9  | Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_{p1}=1300 \text{ J/kgK}$ , $C_{p2}=700 \text{ J/kgK}$ ).         | 38 |
| Figura 4.10 | Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ , $C_{p1}=700 \text{ J/kgK}$ , $C_{p2}=2300 \text{ J/kgK}$ ).         | 38 |

- Figura 4.11 Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p1}=2300 \text{ J/kgK}$ ,  $C_{p2}=700 \text{ J/kgK}$ ). 39
- Figura 4.12 Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001). ( $\rho_1=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2=2100 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ). 39
- Figura 4.13 Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida no caso desacoplado e no caso acoplado. ( $\rho=\rho_1=\rho_2=1500 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ,  $h_{fg}=0 \text{ J/kg}$ ). 41
- Figura 4.14 Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida no caso desacoplado e no caso acoplado. ( $\rho=\rho_1=\rho_2=1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ,  $h_{fg}=2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ). 41
- Figura 4.15 Comparação entre os resultados da temperatura adimensional média obtida no caso desacoplado e no caso acoplado. ( $\rho=\rho_1=\rho_2=1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ,  $h_{fg}=1,0 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ). 42

## LISTA DE TABELAS

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Tabela 2.1 | Modelos empíricos e semi-empíricos reportados na literatura.  | 13 |
| Tabela 4.1 | Parâmetros físicos usados neste trabalho para o fenômeno de transferência de calor e massa desacoplados | 31 |

## NOMENCLATURA

### *Letras Latinas*

|              |  |                           |
|--------------|--|---------------------------|
| $\Delta X_i$ | Comprimento característico do sólido ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) | [m]                       |
| $A_c$        | Área de contato  | [m <sup>2</sup> ]         |
| $A_i$        | Área do sólido ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )                       | [m <sup>2</sup> ]         |
| $A_v$        | Área vaga  | [m <sup>2</sup> ]         |
| $Bi_c$       | Número de Biot de transferência de calor                         | [-]                       |
| $Bi_m$       | Número de Biot de transferência de massa                         | [-]                       |
| $C_{pi}$     | Calor específico do produto ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )          | [J/kgK]                   |
| $C_v$        | Calor específico para aquecer o vapor d'água no ambiente         | J/kg                      |
| $D_i$        | Difusibilidade de massa do sólido ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )    | [m <sup>2</sup> /s]       |
| $h_c$        | Coefficiente de transferência de calor                           | [W/m <sup>2</sup> K]      |
| $h_{fg}$     | Calor latente de vaporização de água livre                       | [J/kg]                    |
| $h_m$        | Coefficiente de transferência de massa                           | [W/m <sup>2</sup> K]      |
| $K_f$        | Condutividade térmica do fluido                                  | [W/mK]                    |
| $K_i$        | Condutividade térmica do sólido ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )      | [W/mK]                    |
| $L$          | Comprimento característico do sólido                             | [m]                       |
| $L_v$        | Espessura do espaço vago   | [m]                       |
| $M$          | Teor de umidade do sólido homogêneo                              | [kg/kg]                   |
| $M''$        | Fluxo de massa por unidade de área                               | [kg/kg/s/m <sup>2</sup> ] |
| $M'''$       | Geração de massa por unidade de volume                           | [kg/kg/s/m <sup>3</sup> ] |
| $M_0$        | Teor de umidade inicial do produto                               | [kg/kg]                   |
| $M_\infty$   | Teor de umidade do meio externo                                  | [kg/kg]                   |
| $M_c$        | Teor de umidade de equilíbrio                                    | [kg/kg]                   |
| $M_i^*$      | Teor de umidade adimensional ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )         | [kg/kg]                   |
| $P_{var}$    | Pressão parcial de vapor d'água no ar                            | [Pa]                      |
| $P_{vp}$     | Pressão parcial de vapor d'água na superfície do produto         | [Pa]                      |
| $q''$        | Fluxo de calor por unidade de área                               | [W/m <sup>2</sup> ]       |
| $q'''$       | Geração de calor por unidade de volume                           | [W/m <sup>3</sup> ]       |
| $q_{21}$     | Fluxo de calor   | [W]                       |
| $R_c$        | Coefficiente de contato  | [°C/W]                    |
| $S$          | Área superficial do sólido homogêneo                             | [m <sup>2</sup> ]         |
| $T$          | Temperatura do sólido homogêneo                                  | [K] ou [°C]               |
| $t$          | Tempo  | [s]                       |
| $T_0$        | Temperatura inicial do produto                                   | [K] ou [°C]               |

|              |  |                        |
|--------------|--|------------------------|
| $T_{\infty}$ | Temperatura do meio externo                          | [K] ou [ $^{\circ}$ C] |
| $T_i$        | Temperatura ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )              | [K] ou [ $^{\circ}$ C] |
| $T_i^*$      | Temperatura adimensional ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) | [K] ou [ $^{\circ}$ C] |
| $V$          | Volume do sólido homogêneo                           | [ $m^3$ ]              |
| $V_i$        | Volume do sólido ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )         | [ $m^3$ ]              |

### ***Letras Gregas***

|                         |  |              |
|-------------------------|--|--------------|
| $\Gamma, \Gamma^{\Phi}$ | propriedade do material                      | [-]          |
| $\alpha$                | difusividade térmica do sólido               | [ $m^2/s$ ]  |
| $\rho_i$                | densidade do sólido ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) | [ $kg/m^3$ ] |

### ***Superescritos***

\* Adimensional

### ***Subscritos***

|     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| o   | Inicial                               |
| vp  | Vapor d'água na superfície do produto |
| var | Vapor d'água no ar                    |
| vg  | Vapor d'água na superfície dos grãos  |
| p   | Produto                               |
| e   | Equilíbrio                            |
| m   | Massa                                 |
| c   | Calor                                 |

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

Operações de desidratação e secagem são muito importantes nos processos das indústrias químicas e de alimentos, como também no armazenamento de grãos e outros tipos de produtos biológicos, uma vez que durante a secagem destes podem ocorrer variações nas suas características físicas, químicas e biológicas. Dependendo da intensidade e do efeito da secagem, pode-se ter a perda ou inutilidade do produto para uma determinada função (seja ela alimentícia ou germinativa). Neste contexto, ressalta-se que a secagem de um sólido depende de sua estrutura, teor de umidade inicial, teor de umidade da superfície exposta, como também de parâmetros de secagem como temperatura, umidade relativa e velocidade do ar (Lima, 1999).

Um vasto número de estudos tem sido conduzido para analisar o processo de secagem, uns consideram as condições externas do ar, tais como, temperatura, umidade relativa e velocidade, relacionadas à taxa de secagem do sólido, enquanto outros consideram as condições internas ao produto com ênfase aos mecanismos de movimento de umidade e seus efeitos sobre o mesmo (Lima, 1999).



Os modelos matemáticos de secagem podem ser usados para prever o comportamento de secagem para um determinado tipo de produto em particular. Tais modelos podem ser usados para determinar o efeito da mudança de certos parâmetros na eficiência da secagem ou para minimizar os custos de operação do sistema.

A distribuição de temperatura e umidade no interior de um sólido submetido a um processo de secagem, depende fortemente das propriedades físicas do material de que é feito o sólido e das condições de transferência de calor e/ou massa entre a superfície e o fluido ambiental, no qual o sólido é posto para secar.

Uma distribuição de temperatura e/ou umidade num processo transiente, em sólido submetido à secagem, será uniforme em relação às coordenadas espaciais se a resistência interna a transferência de calor e/ou massa for pequena se comparada à resistência a convecção na superfície do sólido.

Uma análise matemática que considera resistência interna ao transporte de calor e/ou massa desprezível é chamado de análise concentrada, sendo mais simples do que aquele em que se usa uma análise distribuída, pois este último envolve a resolução das equações de difusão de calor e/ou massa.

Diante do exposto, torna-se importante o conhecimento dos efeitos da secagem sobre as propriedades químicas e biológicas dos produtos, uma vez que estas afetam sensivelmente os fenômenos transferência de calor e massa, principalmente em alimentos.

Visando dar uma contribuição na predição do fenômeno de secagem, este trabalho tem como objetivos:

- Desenvolver modelos matemáticos para descrição do fenômeno de transferência de calor e massa em sólidos com forma arbitrária supondo que o mesmo é composto por dois materiais distintos, baseados numa análise concentrada.

- ❑ Formular e implementar um programa computacional com as equações que governam o problema, visando a aplicação do modelo estabelecido.
- ❑ Simular a variação do teor de umidade adimensional e temperatura adimensional em função dos parâmetros de processo para transferência de calor e massa.
- ❑ Analisar os resultados obtidos, observando a influência da variação das propriedades de um sólido composto por dois materiais distintos, bem como os processos de transferência de calor e massa acoplados.

## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO DA LITERATURA**

#### **2. 1 O processo de secagem**

##### **2.1.1 Princípios gerais de secagem**

Na literatura existente, alguns autores definem secagem como sendo um processo termodinâmico por meio do qual ocorre a redução do teor de umidade de materiais biológicos, através da transferência simultânea de calor e massa, necessária para evaporar a umidade do produto por meio de um fluido externo, normalmente o ar, ou ainda, um processo que envolve transferência simultânea de calor, massa e momento, Marinos-Kouris et al (1996). Por outro lado, Rizvi (1986), define a secagem simplesmente como um fenômeno de simultânea transferência de calor, massa e quantidade de movimento. Tais definições estão esquematizadas na Figura 2.1.

Na secagem, a remoção da umidade deve ser feita até um nível tal em que o produto fique em equilíbrio com o ar do ambiente onde será armazenado e deve ser feita de modo a preservar a aparência, a qualidade nutritiva e, no caso de grãos, a viabilidade como semente.

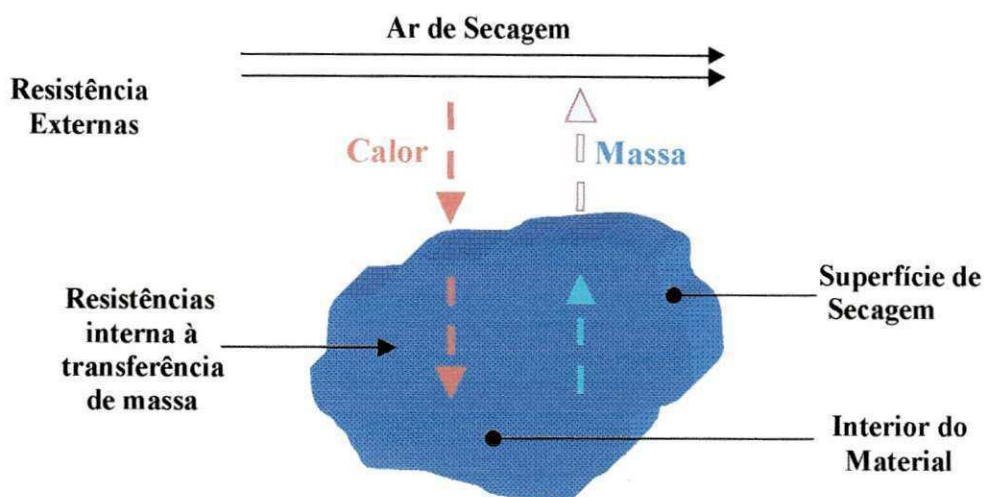


Figura 2.1- Esquema representativo do processo de secagem de um material sólido.

Segundo Silva et al. (2001), a importância da secagem de produtos agrícolas aumenta à medida que cresce a produção, devido às seguintes vantagens:

- permite antecipar a colheita, disponibilizando a área para novos cultivos;
- minimiza a perda do produto no campo;
- permite armazenagem por períodos mais longos, sem o perigo de deterioração do produto;
- o poder germinativo é mantido por longos períodos;
- impede o desenvolvimento de microrganismos e insetos.

O processo de secagem de produto biológico, por exemplo tem início quando, os grãos ou frutos atingem o ponto de maturação fisiológica. Ocasão em que desvinculam da "planta mãe". Para a maioria dos espécies de grãos, isto ocorre quando o teor de umidade é de aproximadamente 50% b.u (base úmida). O teor de umidade em base úmida, corresponde a relação porcentual entre a massa de água e a massa total (massa de água mais massa do material seco) de um sólido. O teor de umidade em base seca (b.s.) corresponde a relação porcentual entre esta mesma massa de água e a massa total (massa do material seco) de um sólido.

Os materiais biológicos, como grãos e sementes, possuem a característica de serem higroscópicos, uma vez que, entre estes e o ar são estabelecidos fluxos de vapor de água. O sentido e intensidade destes fluxos irão depender do gradiente imposto pela diferença dos valores da pressão de vapor na superfície do sólido ( $P_{vp}$ ) e a pressão de vapor no ar ( $P_{var}$ ). Desta forma, dependendo das condições do produto e do ar pode-se ter a ocorrência de três situações:

- a) Se  $P_{vp} > P_{var}$ , tem-se a secagem do produto;
- b) Se  $P_{vp} < P_{var}$ , tem-se o umedecimento do produto;
- c) Se  $P_{vp} = P_{var}$ , tem-se o equilíbrio higroscópico, nesta situação não há fluxo de massa.

Em processos de secagem de grãos sob condições atmosféricas, o ar é utilizado como meio de transporte de calor e massa. O calor cedido aos grãos promove a migração da água contida nestes para a superfície que é então transportada pelo fluxo de ar que escoar pelas superfícies dos grãos. Ressalta-se que estes transportes acontecem simultaneamente. Portanto, o ar de secagem deve possuir uma quantidade de calor a ceder para os grãos e possuir condições de reter e transladar uma quantidade de massa de água na forma de vapor. Estas características definem o potencial de secagem do ar, que, teoricamente, terá o seu valor acrescido quanto maior for a temperatura e menor for a umidade relativa. No entanto, por grãos e sementes serem materiais biológicos, o potencial de secagem deve ser definido a níveis que não promova danos (Silva, 2000).

Vários produtos biológicos, quando estão sendo secos individualmente ou em camada fina, apresentam uma perda de umidade a uma taxa constante durante o período inicial da secagem, seguido por um período a uma taxa decrescente. A taxa constante de secagem durante o primeiro período do processo é uma função de 03 (três), parâmetros externos (Fellows, 1998):

- Velocidade do ar;
- Temperatura do ar;
- Umidade relativa do ar.

No período de taxa decrescente, os fatores que interferem no processo de secagem são:

- Temperatura do ar;
- Forma do sólido;
- Umidade relativa do ar

A taxa constante de secagem se dá em produtos cuja resistência interna ao transporte de umidade é muito menor que a resistência externa à remoção de vapor de água da superfície do produto para o meio ambiente.

Durante o período de secagem à taxa decrescente a superfície do produto não se encontra coberta por um filme de água. Nesta etapa, a resistência interna ao transporte de água se torna maior que a resistência externa. Esta etapa se dá à medida que o teor de umidade vai decrescendo abaixo do teor de umidade crítico. O teor de umidade crítico acontece no momento da mudança da taxa de secagem constante para a taxa de secagem decrescente.

Além do transporte simultâneo de calor e massa, outro fenômeno ocorre durante o processo de secagem, é a variação de dimensão do sólido. O encolhimento é um dos principais fatores que depreciam os alimentos durante a remoção de umidade e aumenta a taxa de secagem. Sendo assim, um estudo do fenômeno de encolhimento torna-se importante para o melhor entendimento do processo de secagem (Rovedo et al., 1995).

## **2.2 Teoria e modelos de secagem**

### **2.2.1 Mecanismo de transporte de umidade**

Os seguintes mecanismos de transporte em sólidos têm sido propostos na literatura (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kudra, 1986; Brooker et al, 1992; Lima, 1995), podem ser citados:

- transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (devido a gradientes de temperatura);
- transporte por efusão, que ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros;
- transporte de vapor por termo-difusão devido a gradientes de temperatura;
- transporte de líquido por forças capilares;
- transporte de líquido por pressão osmótica;
- transporte de líquido devido à gravidade;
- transporte de líquido e de vapor, devido a diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade;
- transporte por difusão superficial.

Neste sentido, apesar do não detalhamento de cada um dos mecanismos acima citados, informações adicionais podem ser encontradas nas referências citadas.

As transferências internas de massa são acompanhadas por outros fenômenos de extrema importância para materiais biológicos, por exemplo, migração do soluto. Os solutos, tais como os açúcares de frutas, depositam-se sobre a superfície das mesmas formando uma crosta, esta tem o efeito de diminuir a velocidade de secagem (Lima, 2001).

### **2.2.2 Modelos de secagem**

Numerosos modelos têm sido propostos para descrever a taxa de perda de umidade durante a secagem de produtos, podendo ser classificados em dois grupos:

- Modelos baseados numa análise concentrada
- Modelos baseados numa análise distribuída.

### 2.2.2.1 Modelos baseados no método de análise concentrada

Para compreensão deste método, considere um sólido de forma arbitrária como ilustrado na Figura 2.2. O sólido pode receber (ou ceder) um fluxo de calor e/ou umidade por unidade de área em sua superfície e ter geração interna de massa e/ou energia por unidade de volume uniformemente distribuída, como por exemplo, durante a respiração e transpiração dos produtos biológicos. Admitindo que a umidade e/ou temperatura do sólido seja espacialmente uniforme em qualquer instante durante o processo transiente, isto é, que os gradientes de umidade e/ou temperatura no interior do sólido sejam desprezíveis, todo o fluxo de massa e/ou calor recebido e gerado, difundirá instantaneamente através do mesmo. Isto acontece quando  $\Gamma^\phi$  (uma propriedade qualquer de transporte, por exemplos, a condutividade térmica ou o coeficiente de difusão para massa) for suficientemente alta ( $\Gamma^\phi \rightarrow \infty$ ). Embora esta condição não seja fisicamente possível, ela será bem aproximada se a resistência aos fluxos de calor e/ou massa no sólido for muito menor que a resistência à transferência de calor e/ou massa entre o sólido e a sua vizinhança.

Este método admite uma distribuição uniforme de massa e/ou temperatura dentro do sólido em qualquer instante, de modo tal que, a temperatura ou teor de umidade do sólido possa ser expressa exclusivamente em função do tempo, ou seja,  $M = M(t)$  e  $\theta = \theta(t)$ .

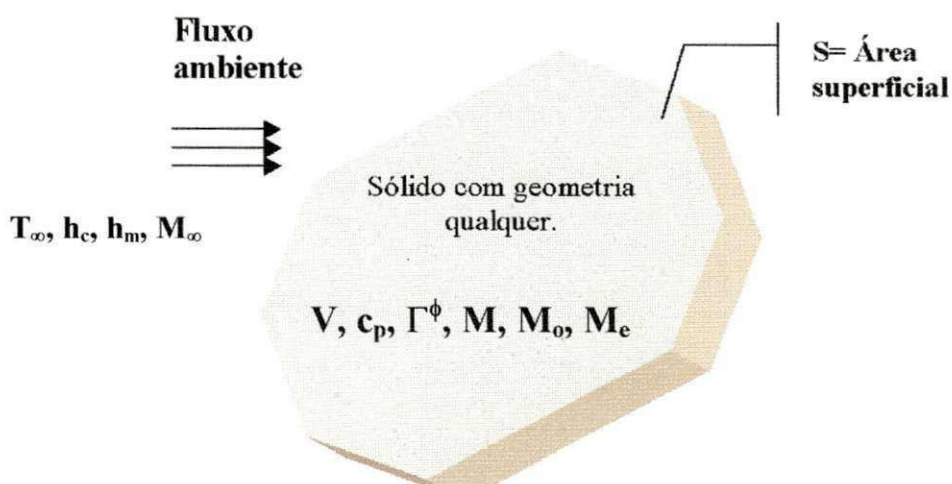


Figura 2.2 - Esquema representativo do processo de secagem de material baseado numa análise concentrada



onde,  $T_\infty$  é a temperatura do meio externo (K) ou ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $h_c$  e  $h_m$  são os coeficientes de transferência de calor ( $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ) e massa ( $\text{m}/\text{s}$ ) respectivamente,  $M_\infty$  teor de umidade do meio externo ( $\text{kg}/\text{kg}$ ),  $V$  o volume do sólido homogêneo ( $\text{m}^3$ ),  $C_p$  o calor específico ( $\text{J}/\text{KgK}$ ),  $\Gamma^\phi$  a propriedade do material,  $M$  o teor de umidade do produto ( $\text{kg}/\text{kg}$ ),  $M_0$  o teor de umidade inicial do produto ( $\text{kg}/\text{kg}$ ) e  $M_e$  o teor de umidade de equilíbrio ( $\text{kg}/\text{kg}$ ).

Aplicando um balanço de massa e energia na superfície do sólido apresentado na Figura 2.2, em qualquer sistema de coordenadas, assumindo propriedades termo-físicas constantes e variações dimensionais desprezíveis, tem-se as seguintes equações para massa e energia, respectivamente:

$$V \frac{dM}{dt} = -M''S + M'''V \quad (2.1)$$

$$V\rho \frac{dT}{dt} = -\frac{q''}{c_p}S + \frac{q'''}{c_p}V \quad (2.2)$$

onde  $S$  representa a área superficial do sólido homogêneo ( $\text{m}^2$ ), densidade do sólido homogêneo ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $t$  o tempo (s),  $M''$  o fluxo de massa por unidade de área ( $\text{kg}/\text{kg}/\text{s}/\text{m}^2$ ),  $M'''$  a geração de massa por unidade de volume ( $\text{kg}/\text{kg}/\text{s}/\text{m}^3$ ),  $q''$  o fluxo de calor por unidade de área ( $\text{W}/\text{m}^2$ ),  $q'''$  a geração de calor por unidade de volume ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) e  $T$  a temperatura do sólido homogêneo (K) ou ( $^{\circ}\text{C}$ ).

As quantidades  $M''$ ,  $M'''$ ,  $q''$  e  $q'''$ , podem ser positivas ou negativas, podendo também, serem constantes ou dependentes do tempo. Particularmente com respeito à energia, a quantidade  $q''$  pode ser convectiva, radiativa, evaporativa e/ou aquecimento de vapor. A hipótese de ausência de gradientes de  $T$  ou  $M$  internamente ao sólido não é apenas uma simplificação matemática, mas também uma forma simplificada para tratamento de problemas mais complexos (mais realista fisicamente). A presente formulação pode ser aplicada em regiões de transferência de calor e massa simultânea. O caso particular ocorre quando os dois

fenômenos são completamente independentes. Os dois fenômenos são acoplados quando adsorção e dessorção na região são acompanhadas de efeitos térmicos.

Num caso mais geral, se a temperatura ou teor de umidade na superfície de um sólido for alterada repentinamente, e o valor de  $\Gamma^\phi$  não for suficientemente alto, então o valor do teor de umidade e/ou temperatura no interior do sólido varia com o tempo. Passa-se algum tempo antes que seja atingida a distribuição de M ou T estacionárias. Como ambas variam de acordo com o tempo e com a posição, torna-se difícil, determinar tal distribuição. Para se determinar a dependência da distribuição de M e/ou T no interior do corpo em relação ao tempo, durante o processo, inicia-se pela resolução da forma apropriada da equação da difusão (Lei de Fick para massa e lei de Fourier para calor) (Gebhart, 1993). Para condições em que os gradientes de M ou T no interior do sólido são pequenos, pode-se empregar o procedimento do método da capacidade global, como mencionado.

- **Validade do método da capacitância global (análise concentrada).**

O significado físico do número de Biot de transferência é tido como a relação numérica entre a resistência de condução no interior do corpo e uma resistência a convecção na superfície do mesmo.

$$Bi = \frac{R_{\text{Cond}}}{R_{\text{Conv}}} = \frac{\left(\frac{L}{\Gamma^\phi S}\right)}{\frac{1}{hS}} = \frac{hL}{\Gamma^\phi} \quad (2.3)$$

onde L é um comprimento característico pré-determinado que pode variar com a geometria do corpo.

O número de Biot, tem um papel fundamental nos problemas de difusão que envolve efeitos convectivos nas fronteiras. Para  $Bi \ll 1,0$ , os resultados experimentais sugerem supor uma razoável distribuição uniforme de temperaturas e/ou massas ao longo do corpo, em

qualquer instante  $t$ , do processo transiente. Logo a resistência de condutividade no interior do sólido é muito menor do que a resistência convectiva através da camada limite no fluido.

Conclui-se, portanto que, para a análise de um problema de difusão, deve-se calcular o número de Biot e, uma vez sendo este inferior a 0,1, o erro associado a capacitância global é pequeno, entretanto, este valor é dependente da forma com que este parâmetro é definido (Lima, 1999; Lima e Nebra, 2000). Para se ter idéia, Parti (1993) reporta que os modelos empíricos e semi-empíricos podem ser utilizados desde que os números de Biot de transferência de massa e calor sejam menores que 10 e 1,5 respectivamente. Lima (1999), reporta os valores máximos de número de Biot de 0,05 para elipsóide ( $L_2/L_1=2,0$ ) e de 0,005 para esfera ( $L_2/L_1=1,0$ ), onde o comprimento característico  $L$  usado na equação (2.3) é dado por  $L=(L_2^2-L_1^2)^{1/2}$  e  $L_2$  e  $L_1$  são os semi-eixos, maior e menor do elipsóide, respectivamente. Ressalta-se, portanto, que o valor do número de Biot depende da forma com que este é calculado (Lima, 1999).

#### a) Modelos empíricos e semi-empíricos:

Os modelos empíricos, que são modelos baseados numa análise concentrada, consistem em uma relação direta entre o teor de umidade e o tempo de secagem. Já o modelo semi-empírico, baseia-se na validade da lei de Newton do resfriamento, assumindo uma proporcionalidade de diferença entre o teor de umidade do produto e o seu respectivo teor de umidade de equilíbrio (Lima, 1999).

O uso de modelos matemáticos para secagem em camada fina, é muito comum, sendo usado por vários autores para o estudo de secagem de grãos e frutas. Tais trabalhos trazem na sua grande maioria estudos baseados na equação de Page, dada por:

$$\bar{M}^* = \frac{\bar{M} - \bar{M}_e}{\bar{M}_0 - \bar{M}_e} = \text{Exp}(-Kt^N) \quad (2.4)$$

onde  $K$  e  $N$  são parâmetros da equação.

Dentre vários trabalhos em que se modela o fenômeno de secagem por camada fina pode-se citar Henderson e Pabis (1962); para trigo; Misra e Brooker (1980), para milho; Hutchison e Otten (1982), para feijões brancos e soja; Bala e Ziauddin (1990), no estudo de canola; Alsina et al. (1999), com goiabas em cubo; Lopez et al. (2000), para legumes de mercados atacadistas; Basunia e Abe (2001), para arroz duro tipo japonês; Chen et al. (2001), para kiwi; Almeida et. Al. (2002), para vagens de algaroba, dentre outros.

Outros modelos podem ser encontrados na literatura sendo apresentados na Tabela 2.1 (Ozdemir e Devres, 1995; Yaldiz et al., 2001; Basunia e Abe, 2001), onde  $K_i$  e  $B_i$  são os coeficientes das equações e  $a_w$  é a atividade da água.

Comparações numéricas e experimentais entre os modelos podem ser encontradas em Sinicio et al. (1995); Ozdemir e Devres (1999); Basunia e Abe (2001) e Yaldiz et al. (2001).

Particularmente, para corpos homogêneos com forma arbitrária, Lima (2001) e Silva (2002), apresentam uma modelagem matemática para descrever a transferência de calor e massa em sólidos homogêneos com forma arbitrária, baseando-se numa análise concentrada.

As seguintes equações são fornecidas:

\* Massa (teor de umidade)

$$\bar{M}^* = P^* + (1 - P^*) \text{Exp}(-S^* \text{Bi}_m \text{Fo}_m) \quad (2.5)$$

\* Calor (temperatura)

$$\bar{T}^* = \left[ \left( \frac{P^* - 1}{V^* - R^*} \right) + Q^* + 1 \right] \text{Exp}(-S^* \text{Bi}_c \text{Fo}_c) - \left( \frac{P^* - 1}{V^* - R^*} \right) \text{Exp}(-S^* \text{Bi}_m \text{Fo}_m) - Q^* \quad (2.6)$$

Tabela 2.1- Modelos empíricos e semi-empíricos reportados na literatura

| Equação  | Nome do Modelo                       |
|--|--------------------------------------|
| $\bar{M}^* = \text{Exp}(-Kt)$  | de Newton                            |
| $\bar{M}^* = \text{Exp}(-Kt^N)$  | de Page                              |
| $\bar{M}^* = \text{Exp}(-(Kt)^N)$  | de Page Modificado                   |
| $\bar{M}^* = B_1 \text{Exp}(-Kt)$  | de Henderson and Pabis               |
| $\bar{M}^* = \left[ \frac{\ln(1-a_w)}{-B_1(T+B_2)} \right]^{1/B_3}$        | de Henderson Modificada<br>(MHEE)    |
| $t = B_1 \ln(\bar{M}^*) + B_2 \ln(\bar{M}^*)^2$                            | de Thompson                          |
| $\bar{M}^* = B_1 \text{Exp}(-Kt) + B_2$                                    | Logarítmico                          |
| $\bar{M}^* = B_1 \text{Exp}(-K_0 t) + B_2 \text{Exp}(-K_1 t)$              | de dois termos                       |
| $\bar{M}^* = B_1 \text{Exp}(-Kt) + (1 - B_2) \text{Exp}(-KB_1 t)$          | de dois termos exponenciais          |
| $\bar{M}^* = (B_1 + B_2 T) \left[ \frac{1-a_w}{a_w} \right]^{-1/B_3}$      | modificado de Oswin (MOSE)           |
| $\bar{M}^* = \frac{\ln B_1}{B_3} - \frac{1}{B_3} \ln[-(T + B_2) \ln(a_w)]$ | modificado de Chung - Pfof<br>(MCPE) |
| $\bar{M}^* = \text{Exp}(B_1 + B_2 T) [-\ln(a_w)]^{-1/A_3}$                 | de Halsey Modificada (MNEA)          |
| $\bar{M}^* = 1 + B_1 t + B_1 t^2$  | de Wang e Singh                      |

### 2.2.2.2 Modelos baseados no método de análise distribuída

#### a) Modelos difusivos:

São modelos baseados na difusão de líquido e/ou vapor dentro do produto, descrevendo as taxas de transferência de calor e massa como função da posição dentro do sólido e do tempo de secagem, considerando as resistências aos fluxos de calor e massa externa e interna (Lima, 1999).

A concepção de difusão líquida como único mecanismo de transporte de umidade tem sido causa de várias discussões, apresentando constantemente discordâncias entre os valores experimentais e teóricos, Berger, citado por Alvarenga et al. (1980); Fortes e Okos (1980); Mariz (1986); Keey (1992). Os principais questionamentos podem ser atribuídos à consideração do coeficiente de difusão constante, condições de contorno inadequadas e não consideração da ocorrência de encolhimento do material, conforme constatado por (Lima, 1999).

O fenômeno físico do encolhimento ocorre simultaneamente com a perda de umidade do produto. Este fenômeno pode ocasionar um efeito considerável no coeficiente de difusão de massa, e conseqüentemente na taxa de secagem.

Apesar das discussões, a teoria da difusão líquida tem ganhado, ao longo do tempo, a preferência dos pesquisadores, Brooker et al. (1974); Steffe e Singh (1980); Sokhansanj (1984); Dalpasquale et al. (1985); Parti (1990); Brooker et al. (1992); Zogzas e Maroulis (1996); Sarker et al. (1994); Queiroz (1994); Rovedo et al. (1995a); Rovedo et al. (1995b); Ben Mabrouk e Belghith (1995); Hasatani e Itaya (1992); Alsina e Brasileiro (1997); Carmo, (2000); Oliveira (2001); Farias (2002); Nascimento (2002).

#### **b) Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis:**

Baseiam-se na validade das relações recíprocas de Onsager, no princípio de Curie e na existência de um equilíbrio termodinâmico local no interior do produto.

Considerando os vários fluxos envolvidos em uma mistura de ar, vapor, líquido e sólido, Luikov (1966), guiando-se através de trabalhos anteriores de Prigogine (1947), DeGroot (1951), Luikov e Mikhailov (1965), tomou por base os princípios da termodinâmica de não-equilíbrio e sugeriu a utilização de um modelo para expor o processo de secagem de produtos capilares porosos baseado nos mecanismos de difusão, efusão, convecção de vapor e difusão e convecção de água no interior do meio poroso. O processo é descrito por um sistema de

equações diferenciais parciais acopladas para a temperatura, umidade e pressão (em casos de intensa secagem).

Outras discussões sobre estes dois modelos de secagem podem ser encontradas em Fortes e Okos (1980), Alvarenga et al. (1980), Fortes (1982), Parry (1985), Mariz (1986), Keey (1992), Parti (1993), Lima (1995), Lima (1999), Lima e Nebra (2000), dentre outros.

## CAPÍTULO 3

### MODELAGEM TEÓRICA

Como pôde ser constatado no capítulo 2 (Tabela 2.1), todos os trabalhos que usam os modelos concentrados, supõem que o sólido é homogêneo, o que é irreal. Para um estudo da transferência de calor e massa, em um sólido heterogêneo (composto por dois materiais distintos), considere a Figura 3.1.

Na modelagem matemática, são assumidas as seguintes considerações:

- Material composto unicamente de água na fase líquida e matéria sólida;
- As propriedades termo-físicas constantes para cada sólido;
- Nenhuma geração de energia ou massa ocorre;
- Gradientes de temperatura e teor de umidade internos são desprezíveis em cada sólido individualmente;
- Fenômeno ocorre sob condição convectiva na superfície;
- Dilatação do sólido devido à elevação de temperatura durante a secagem como sendo desprezível;



- Contração volumétrica devido à perda de água, desprezível;
- Condução de calor e massa ocorrem unicamente na interface entre os sólidos;
- Material composto unicamente de água na fase líquida e matéria sólida.

Baseando-se nestas considerações adicionais, segue toda a formulação matemática para massa e energia.

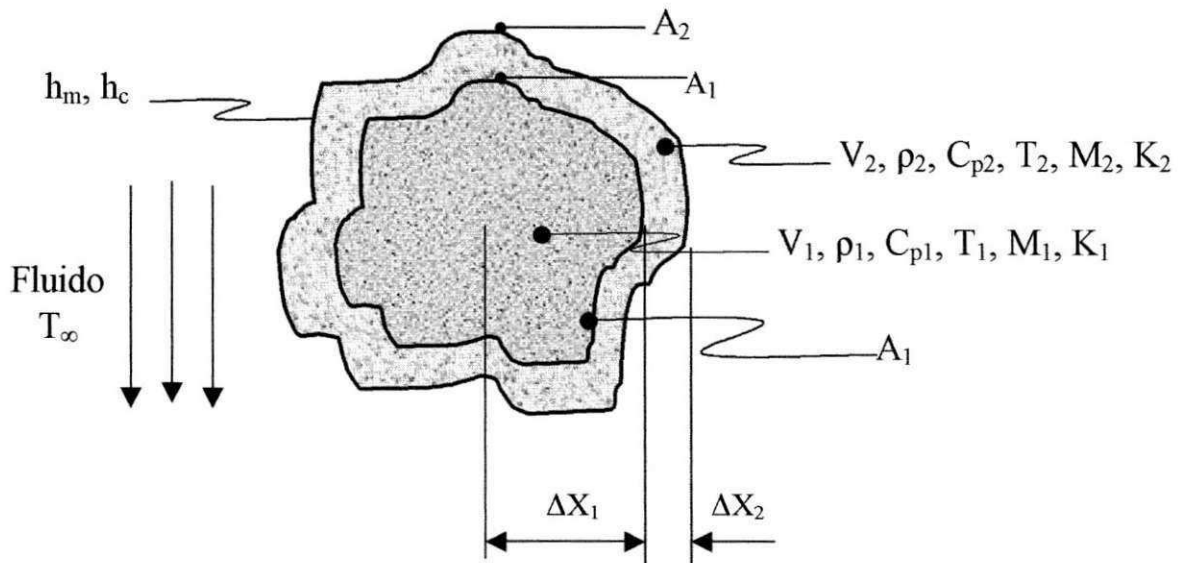


Figura 3.1 – Esquema representativo do sólido composto por dois materiais diferentes.

Sendo assim, do ponto de vista da transferência de calor neste sólido, o seguinte comportamento da temperatura, por exemplo, pode ser evidenciado:

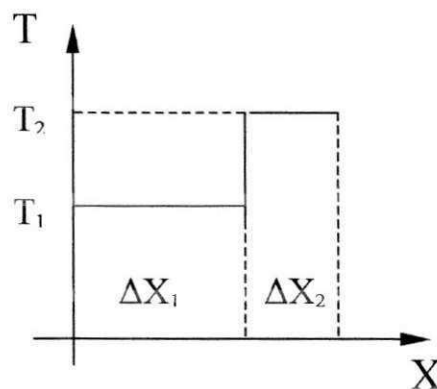


Figura 3.2 – Efeito da resistência térmica de contato na distribuição de temperatura no sistema do sólido heterogêneo.

A queda de temperatura ocorre exatamente na interface dos dois sólidos e é devido a uma resistência térmica de contato.

Um balanço de energia entre os dois sólidos dá como resultado:

$$q_{21} = R_c A_c (T_2 - T_1) \quad (3.1a)$$

onde a quantidade  $R_c$  é denominado coeficiente de contato ( $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ ).

O mecanismo físico da resistência de contato é devido às irregularidades existentes entre as superfícies em contato, cujos espaços vazios geralmente é preenchido por fluido. A transferência de calor se dá por:

- Condução sólido-sólido pelos pontos de contato.
- Condução, convecção e radiação através dos fluidos aprisionados nos espaços criados pelo contato. No entanto, geralmente, considera-se desprezíveis a convecção e radiação.

Este último fator representa a maior resistência ao fluxo de calor, pois, o fluido tem geralmente uma condutividade térmica menor que a do sólido.

Designando  $A_c$  por área de contato e  $A_v$  a área vaga na interface entre os sólidos, tem-se que (Holman, 1983):

$$q_{21} = \frac{T_2 - T_1}{\frac{L_v}{2K_1 A_c} + \frac{L_v}{2K_2 A_c}} + K_f A_v \frac{T_2 - T_1}{L_v} = \frac{(T_2 - T_1)}{\frac{1}{R_c A}} \quad (3.1b)$$

onde  $L_v$  é a espessura do espaço vago,  $K_f$  é a condutividade térmica do fluido que preenche esse espaço e  $A$  a área total de transferência de calor.

Então:

$$R_c = \frac{1}{\left( \frac{L_v}{2K_1 A_c} + \frac{L_v}{2K_2 A_c} \right) A} + \frac{K_f A_v}{L_v A} \quad (3.1c)$$

O maior problema desta teoria simples é a dificuldade efetiva dos valores de  $A_c$ ,  $A_v$  e  $L_v$  para as superfícies de contato.

Infelizmente, não existe uma teoria satisfatória que permita prever com boa exatidão a resistência térmica de contato, nem estudos que forneçam correlações empíricas perfeitamente confiáveis. Isto se deve às muitas condições superficiais complexas que podem ser encontradas na prática (Holman, 1983).

Desta forma, neste trabalho, o  $R_c$  foi assumido ser:

$$R_c = \frac{K_1 A_1}{\Delta X_1} \quad (3.1d)$$

A mesma analogia pode ser feita para o transporte de massa de forma que  $R_c$  assume a forma equivalente ao apresentado para transporte de calor. Sendo assim:

$$R_c = \frac{D_1 A_1}{\Delta X_1} \quad (3.1e)$$

onde  $D$  é o coeficiente de difusão de massa.

### 3.1 Análise da transferência de massa

Considerando o sólido apresentado na Figura 3.1, e realizando a análise para transferência de massa, tem-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

□ Sólido 1:

$$\frac{D_1 A_1}{\Delta X_1} (M_2 - M_1) = V_1 \frac{dM_1}{dt} \quad (3.1)$$

ou ainda:

$$\left( \frac{D_1 A_1}{V_1 \Delta X_1} + \frac{d}{dt} \right) M_1 - \left( \frac{D_1 A_1}{V_1 \Delta X_1} \right) M_2 = 0 \quad (3.2)$$

□ Sólido 2:

$$h_m A_2 (M_e - M_2) + \frac{\rho_1 D_1 A_1}{\rho_2 \Delta X_1} (M_1 - M_2) = V_2 \frac{dM_2}{dt} \quad (3.3)$$

ou ainda:

$$\left( \frac{h_m A_2}{V_2} + \frac{\rho_1 D_1 A_1}{\rho_2 \Delta X_1 V_2} + \frac{d}{dt} \right) M_2 - \left( \frac{\rho_1 D_1 A_1}{\rho_2 \Delta X_1 V_2} \right) M_1 = M_e \left( \frac{h_m A_2}{V_2} \right) \quad (3.4)$$

Considerando os seguintes parâmetros:

$$X_1 = \frac{D_1 A_1}{V_1 \Delta X_1}, \quad X_2 = \frac{\rho_1 D_1 A_1}{\rho_2 V_2 \Delta X_1}, \quad Y_2 = \frac{h_m A_2}{V_2}, \quad G = \frac{d}{dt} \quad (3.5a-c)$$

tem-se que:

$$(X_1 + G)M_1 - X_1 M_2 = 0 \quad (3.6)$$

e

$$(X_2 + Y_2 + G)M_2 - X_2M_1 = Y_2M_e \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) são resolvidas simultaneamente, obtendo-se uma equação diferencial envolvendo somente  $M_1$ . Esta equação é dada por:

$$\left[ G^2 + (Y_2 + X_1 + X_2)G + Y_2X_1 \right] M_1 = Y_2X_1M_e \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação (3.8) obtem-se a solução geral, que na forma dimensional em relação a  $M_1$  resulta em:

$$M_1 = N_1e^{b_1t} + N_2e^{b_2t} + M_e \quad (3.9)$$

Os parâmetros  $b_1$  e  $b_2$  são dados a seguir. As constantes  $N_1$  e  $N_2$  são obtidas aplicando as condições iniciais:

$$b_1 = \frac{-(X_1 + X_2 + Y_2) + \left[ (X_1 + X_2 + Y_2)^2 - 4X_1Y_2 \right]^{1/2}}{2} \quad (3.10)$$

$$b_2 = \frac{-(X_1 + X_2 + Y_2) - \left[ (X_1 + X_2 + Y_2)^2 - 4X_1Y_2 \right]^{1/2}}{2} \quad (3.11)$$

As condições iniciais para o problema são:

$$M_1 = M_2 = M_o \quad \text{e} \quad \frac{\partial M_1}{\partial t} = \frac{\partial M_2}{\partial t} = 0, \quad \text{para } t = 0$$

Aplicando as condições iniciais na equação (3.9) obtém-se:

$$N_1 = \frac{b_2}{b_2 - b_1} (M_o - M_e) \quad (3.12)$$

e

$$N_2 = -\frac{b_1}{b_2 - b_1}(M_0 - M_e) \quad (3.13)$$

Para  $M_2$ , a solução pode ser obtida pela substituição da relação para  $M_1$ , da equação (3.9), na equação (3.8), resultando em:

$$M_2 = N_1 e^{b_1 t} \left(1 + \frac{b_1}{X_1}\right) + N_2 e^{b_2 t} \left(1 + \frac{b_2}{X_1}\right) + M_e \quad (3.14)$$

Definindo  $M^* = \frac{M - M_e}{M_0 - M_e}$ , tem-se que:

$$M_1^* = \left(\frac{b_2}{b_2 - b_1}\right) e^{b_1 t} + \left(\frac{-b_1}{b_2 - b_1}\right) e^{b_2 t} \quad (3.15)$$

$$M_2^* = \left(\frac{b_2}{b_2 - b_1}\right) \left(1 + \frac{b_1}{X_1}\right) e^{b_1 t} + \left(\frac{-b_1}{b_2 - b_1}\right) \left(1 + \frac{b_2}{X_1}\right) e^{b_2 t} \quad (3.16)$$

### 3.2 Análise da transferência de calor

Realizando um balanço de energia em cada sólido (Figura 3.1), tem-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

□ Sólido 1:

$$\frac{K_1 A_1}{\Delta X_1} (T_2 - T_1) = \rho_1 V_1 C_{p1} \frac{dT_1}{dt} \quad (3.17)$$

Que pode ser escrita na forma:

$$\left( \frac{K_1 A_1}{\rho_1 V_1 C_{p1} \Delta X_1} + \frac{d}{dt} \right) T_1 - \left( \frac{K_1 A_1}{\rho_1 V_1 C_{p1} \Delta X_1} \right) T_2 = 0 \quad (3.18)$$

□ Sólido 2:

$$h_c A_2 (T_\infty - T_2) + \frac{K_1 A_1}{\Delta X_1} (T_1 - T_2) = \rho_2 V_2 C_{p2} \frac{dT_2}{dt} \quad (3.19)$$

Que pode ser escrita na forma:

$$\left( \frac{h_c A_2}{\rho_2 V_2 C_{p2}} + \frac{K_1 A_1}{\rho_2 V_2 C_{p2} \Delta X_1} + \frac{d}{dt} \right) T_2 - \left( \frac{K_1 A_1}{\rho_2 V_2 C_{p2} \Delta X_1} \right) T_1 = T_\infty \left( \frac{h_c A_2}{\rho_2 V_2 C_{p2}} \right) \quad (3.20)$$

Definindo os seguintes parâmetros:

$$B_1 = \frac{K_1 A_1}{\rho_1 V_1 C_{p1} \Delta X_1}, \quad B_2 = \frac{K_1 A_1}{\rho_2 V_2 C_{p2} \Delta X_1}, \quad F_2 = \frac{h_c A_2}{\rho_2 V_2 C_{p2}} \quad (3.21a-c)$$

e re-escrevendo as equações (3.18) e (3.20), numa forma mais simplificada, obtêm-se:

$$(B_1 + G)T_1 - B_1 T_2 = 0 \quad (3.22)$$

e

$$(F_2 + B_2 + G)T_2 - B_2 T_1 = F_2 T_\infty \quad (3.23)$$

As equações (3.22) e (3.23) são resolvidas simultaneamente, obtendo-se uma equação diferencial envolvendo somente  $T_1$ . O operador  $G$  denota diferenciação em relação ao tempo.

Assim:

$$[G^2 + (F_2 + B_1 + B_2)G + F_2B_1]T_1 = F_2B_1T_\infty \quad (3.24)$$

resolvendo a equação (3.24) obtém-se a solução geral, que escrita na forma adimensional em relação a  $T_1$  fica da seguinte forma:

$$T_1 = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + T_\infty \quad (3.25)$$

Para  $T_2$  a solução pode ser obtida pela substituição da relação para  $T_1$  da equação (3.25) na equação (3.22) assumindo a forma:

$$T_2 = C_1 e^{m_1 t} \left(1 + \frac{m_1}{B_1}\right) + C_2 e^{m_2 t} \left(1 + \frac{m_2}{B_1}\right) + T_\infty \quad (3.26)$$

Os parâmetros,  $m_1$  e  $m_2$  são dados a seguir.

$$m_1 = \frac{-(B_1 + B_2 + F_2) + [(B_1 + B_2 + F_2)^2 - 4B_1F_2]^{1/2}}{2} \quad (3.27)$$

$$m_2 = \frac{-(B_1 + B_2 + F_2) - [(B_1 + B_2 + F_2)^2 - 4B_1F_2]^{1/2}}{2} \quad (3.28)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são obtidas aplicando as condições iniciais. Estas são dadas:

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0 \quad \text{em } t = 0.$$

Então, obtém-se:

$$C_1 = \frac{m_2}{m_2 - m_1} (T_0 - T_\infty) \quad (3.29)$$



e

$$C_2 = -\frac{m_1}{m_2 - m_1} (T_o - T_\infty) \quad (3.30)$$

Definindo  $T^* = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$ , tem-se que:

$$T_1^* = \left( \frac{m_2}{m_2 - m_1} \right) e^{m_1 t} + \left( \frac{-m_1}{m_2 - m_1} \right) e^{m_2 t} \quad (3.31)$$

$$T_2^* = \left( \frac{m_2}{m_2 - m_1} \right) \left( 1 + \frac{m_1}{B_1} \right) e^{m_1 t} + \left( \frac{-m_1}{m_2 - m_1} \right) \left( 1 + \frac{m_2}{B_1} \right) e^{m_2 t} \quad (3.32)$$

### 3.3. Análise simultânea da transferência de calor e massa

Para a análise de simultaneidade da transferência de calor e massa, foi considerado para o balanço de energia o mesmo sólido ilustrado na Figura 3.1 e realizou-se a análise para transferência de calor com consideração de que existe convecção térmica e influência da variação da massa devido ao aquecimento do vapor e evaporação na superfície do sólido. Neste caso as seguintes equações são obtidas:

□ Sólido 1:

$$\frac{K_1 A_1}{\Delta X_1} (T_2 - T_1) = \rho_1 V_1 C_{p1} \frac{dT_1}{dt} \quad (3.33)$$

Que pode ser escrita na forma:

$$\left( \frac{K_1 A_1}{\rho_1 V_1 C_{p1} \Delta X_1} + \frac{d}{dt} \right) T_1 - \left( \frac{K_1 A_1}{\rho_1 V_1 C_{p1} \Delta X_1} \right) T_2 = 0 \quad (3.34)$$

□ Sólido 2:

$$\begin{aligned} h_c A_2 (T_\infty - T_2) - \frac{K_1 A_1}{\Delta X_1} (T_2 - T_1) + \rho_2 V_2 \frac{dM_2}{dt} [h_{fg} + C_p (T_\infty - T_2)] = \\ = \rho_2 V_2 C_{p2} \frac{dT_2}{dt} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Que pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \left( \frac{h_c A_2}{\rho_2 V_2 C_{p2}} + \frac{K_1 A_1}{\rho_2 V_2 C_{p2} \Delta X_1} + \frac{C_v}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + G \right) T_2 - \left( \frac{K_1 A_1}{\rho_2 V_2 C_{p2} \Delta X_1} \right) T_1 = \\ = \frac{h_{fg}}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + \left( \frac{h_c A_2}{\rho_2 V_2 C_{p2}} + \frac{C_v}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + F_2 \right) T_\infty \end{aligned} \quad (3.36)$$

Os parâmetros  $B_1$ ,  $B_2$  e  $F_2$  já foram definidos anteriormente nas equações (3.21a-c). Reescrevendo as equações (3.34) e (3.36), numa forma mais simplificada, obtém-se:

$$(B_1 + G)T_1 - B_1 T_2 = 0 \quad (3.37)$$

e

$$\left( F_2 + B_2 + \frac{C_v}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + G \right) T_2 - B_2 T_1 = \frac{h_{fg}}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + \left( \frac{C_v}{C_{p2}} \frac{dM_2}{dt} + F_2 \right) T_\infty \quad (3.38)$$

Por outro lado, pode-se reescrever a equação (3.3) na forma:

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{h_m A_2}{V_2} (M_c - M_2) + \frac{\rho_1 D_1 A_1}{\rho_2 \Delta X_1 V_2} (M_1 - M_2) \quad (3.39)$$

Usando-se dos parâmetros definidos nas equações 3.5a-c, 3.12 e 3.13, pode-se reescrever a equação 3.39 na forma:

$$\frac{dM_2}{dt} = W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t} \quad (3.40)$$

onde:

$$W_1 = -Y_2 N_1 - \frac{Y_2 N_1 b_1}{X_1} - \frac{X_2 N_1 b_1}{X_1} \quad (3.41a)$$

$$W_1 = -Y_2 N_2 - \frac{Y_2 N_2 b_2}{X_1} - \frac{X_2 N_2 b_2}{X_1} \quad (3.41b)$$

Substitui-se a equação (3.40) na equação (3.38) e resolvendo as equações (3.37) e (3.38) simultaneamente, obtém-se uma equação diferencial envolvendo somente  $T_1$ . O operador  $G$  denota diferenciação em relação ao tempo. Assim pode-se escrever:

$$\left\{ G^2 + \left[ F_2 + B_1 + B_2 + \frac{C_v}{C_{p2}} (W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t}) \right] G + F_2 B_1 + \frac{C_v}{C_{p2}} B_1 (W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t}) \right\} T_1 = \frac{h_{fg}}{C_{p2}} B_1 (W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t}) + \left[ \frac{C_v}{C_{p2}} (W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t}) + F_2 B_1 \right] T_\infty \quad (3.42)$$

A equação (3.42) é uma equação diferencial de 2ª ordem, não-linear e não-homogênea. Tal equação não pode ser resolvida de forma fechada, para a obtenção de uma solução exata. No entanto, para efeito de simplificação foi desconsiderada a energia necessária para aquecer o vapor d'água desde a temperatura na superfície do sólido até a temperatura do fluido, podendo desta forma ser obtida a sua solução. A equação 3.42 na sua forma simplificada é dada por:

$$\left[ G^2 + (F_2 + B_1 + B_2)G + F_2 B_1 \right] T_1 = \frac{h_{fg}}{C_{p2}} B_1 (W_1 e^{b_1 t} + W_2 e^{b_2 t}) + F_2 B_1 T_\infty \quad (3.43)$$

Com o auxílio do Software Mathematica<sup>®</sup>, a equação (3.43) foi resolvida, obtendo-se a solução, que é dada por:

$$T_1 = 32B_1 e^{H_2 t} F_2 \left[ (b_1^2 H_{10}) + b_1 (b_2^2 H_6 + b_2 H_1 H_6 + B_1 H_{11}) + B_1 b_2^2 H_{12} \right] \quad (3.44)$$

Sendo os valores das variáveis que aparecem em  $T_1$ , dadas por:

$$H_1 = F_2 + B_2 + B_1 \quad (3.45a)$$

$$H_2 = -\frac{(H_1 + \sqrt{-4B_1 F_2 + H_1^2})}{2} \quad (3.45b)$$

$$H_3 = \frac{(H_1 + \sqrt{-4B_1 F_2 + H_1^2})}{2} \quad (3.45c)$$

$$H_4 = \sqrt{-4B_1 F_2 + H_1^2} \quad (3.45d)$$

$$H_5 = (-1 + e^{H_4 t}) H_1 (T_\infty - T_o) + H_4 \left[ (1 + e^{H_4 t} - 2e^{H_3 t}) \Gamma_\infty - (1 + e^{H_4 t}) \Gamma_o \right] \quad (3.45e)$$

$$H_6 = C_{p2} H_1 H_5 + 2B_1 (-1 + e^{H_4 t}) h_{fg} W_2 \quad (3.45f)$$

$$H_7 = (-1 + e^{H_4 t}) H_1 + (1 + e^{H_4 t} - 2e^{(b_2 + H_4)t}) H_4 \quad (3.45g)$$

$$H_8 = (-1 + e^{H_4 t}) H_1^2 W_1 + (1 + e^{H_4 t} - 2e^{(b_1 + H_4)t}) H_1 H_4 W_1 + 2B_1 (-1 + e^{H_4 t}) F_2 W_2 \quad (3.45h)$$

$$H_9 = (-1 + e^{H_4 t}) H_1 (W_1 + W_2) + H_4 (W_1 + 1 + e^{H_4 t} W_1 - 2e^{(b_1 + H_4)t} W_1 + W_2 + e^{H_4 t} W_2 - 2e^{(b_1 + H_4)t} W_2) \quad (3.45i)$$

$$H_{10} = b_1^2 C_{p2} H_5 + b_2 H_6 + B_1 C_{p2} F_2 H_5 H_7 h_{fg} W_2 \quad (3.45j)$$

$$H_{11} = C_{p2} F_2 H_1 H_5 + h_{fg} \left[ 2B_1 (-1 + e^{H_4 t}) F_2 W_1 + H_1 H_7 W_2 \right] \quad (3.45l)$$

$$H_{12} = b_2^2 (C_{p2} F_2 H_5 + H_7 h_{fg} W_1) + b_2 (C_{p2} F_2 H_5 H_7 + h_{fg} H_8) + B_1 F_2 (C_{p2} F_2 H_5 + h_{fg} H_9) \quad (3.45m)$$

Na forma adimensional, a equação 3.44 é dada por:

$$T_1^* = \frac{T_1 - T_\infty}{T_o - T_\infty} \quad (3.46)$$

Para  $T_2$  a solução foi obtida derivando a equação (3.44) em relação a  $T_1$  e substituindo na equação (3.37). Assim tem-se que:

$$\frac{dT_1}{dt} = 32B_1H_2e^{H_2t}F_2 \left[ (b_1^2H_{10}) + b(b_2^2H_6 + b_2H_1H_6 + B_1H_{11}) + B_1b_2^2H_{12} \right] \quad (3.47)$$

e

$$T_2 = T_1 + \left( \frac{dT_1}{dt} \right) / B_1 \quad (3.48)$$

Na forma adimensional, tem-se que:

$$T_2^* = \frac{T_2 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (3.49)$$

Todas as resoluções das equações estão no anexo, juntamente com os programas computacionais. Para obtenção dos resultados, foi desenvolvido um código computacional em linguagem C++. Os resultados foram expostos em forma gráfica, utilizando o software Grapher®. A metodologia empregada para a geração dos resultados, foi a da variação das propriedades, densidade e calor específico dos sólidos, mantendo-se constantes as demais. Essa variação foi dada em proporções diferentes e com valores coerentes fisicamente, mas aleatórios. O valor da densidade e do calor específico, ambos medidos para o sólido considerado homogêneo foi obtido a partir dos valores destas grandezas para um sólido heterogêneo usando as seguintes equações:

$$\rho = \rho_1 \left( \frac{V_1}{V_1 + V_2} \right) + \rho_2 \left( \frac{V_2}{V_1 + V_2} \right) \quad (3.50)$$

$$C_p = \frac{C_{p1} + C_{p2}}{2} \quad (3.51)$$

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a validação da metodologia, os resultados do teor de umidade médio e temperatura média obtidos neste trabalho foram comparados com resultados obtidos da literatura (Lima, 2001), para um sólido considerado homogêneo. A Tabela 4.1 apresenta todos os valores dos parâmetros usados neste trabalho, sendo sólido 1 (sólido interno) e o sólido 2 (sólido externo).

Tabela 4.1 – Parâmetros físicos usados neste trabalho para o fenômeno de transferência de calor e massa desacoplados

| Parâmetro    | valor                                   |
|--------------|---|
| $h_m$        | $1,61 \cdot 10^{-9}$ m/s                |
| D            | $2,8 \cdot 10^{-10}$ m <sup>2</sup> /s  |
| $h_c$        | 0,0255 W/m <sup>2</sup> K               |
| $K_1$        | 0,1 W/mK                                |
| $\Delta X_1$ | 0,005 m                                 |
| $\Delta X_2$ | 0,003 m                                 |
| $D^*$        | $2,8 \cdot 10^{-10}$ m <sup>2</sup> /s  |
| $L^*$        | $2 (\Delta X_1 + \Delta X_2) = 0,016$ m |

\*Usados no modelo de Lima (2001) para validação do modelo proposto neste trabalho.

A validação do modelo matemático desenvolvido neste trabalho pode ser verificada pelo ajuste nas curvas mostradas nas Figuras 4.1 e 4.7, ou seja, quando não há variações nos valores da densidade e do calor específico, o sólido heterogêneo tem um comportamento semelhante ao do sólido considerado homogêneo. Todos os resultados foram gerados tomando como análise os sólidos 1 e 2 de forma esférica, com raios  $\Delta X_1$  e  $(\Delta X_2 + \Delta X_1)$ , respectivamente. No entanto, qualquer outra geometria pode ser utilizada para análise. Os valores de  $\Delta X_1$  e  $\Delta X_2$  foram assumidos tal que o número de Biot de transferência fosse inferior a 0,1. Os resultados apresentados na Figura 4.1-4.12 referem-se ao caso em que os fenômenos de transferência de calor e massa estão desacoplados.

As Figuras 4.2 – 4.5 ilustram o efeito das densidades dos sólidos no transporte de massa. A partir da análise da Figura 4.2, pode-se perceber que o aumento da densidade no sólido 2, proporciona um aumento na velocidade de perda de massa dos sólidos 1 e 2. Verifica-se que a consideração de que o sólido heterogêneo que se comporta como homogêneo, retarda o fenômeno de transferência de massa.

Do exposto, a densidade tem seu papel importante no processo de secagem. Para um corpo com densidades diferentes, sendo a do sólido 2 maior que a do sólido 1, a taxa da perda de umidade é acelerada. A explicação está no fato de que o sólido 2 possui maior massa por unidade de volume e conseqüentemente uma maior quantidade de água, proporcionando uma maior perda de umidade no início do processo, (relacionado ao modelo reportado por Lima (2001) para sólido homogêneo), persistindo em quase todo o processo, equilibrando-se no final.

De forma contrária, a Figura 4.3 mostra o efeito da densidade, desta feita com os valores das densidades invertidas, o sólido heterogêneo retarda o fenômeno de transferência de massa. Isso devido a baixa densidade do sólido 2. Como para um sólido homogêneo tem-se  $\rho > \rho_2$ , este tem maior perda de massa. As Figuras 4.4 e 4.5 ilustram novamente, a influência da densidade no comportamento dos sólidos, este de forma mais intensa, devido a uma maior diferença das densidades. O sólido 1, apesar de ter a menor densidade, forma com o sólido 2 um único sólido e que, apesar de terem propriedades diferentes, agem como um único material.

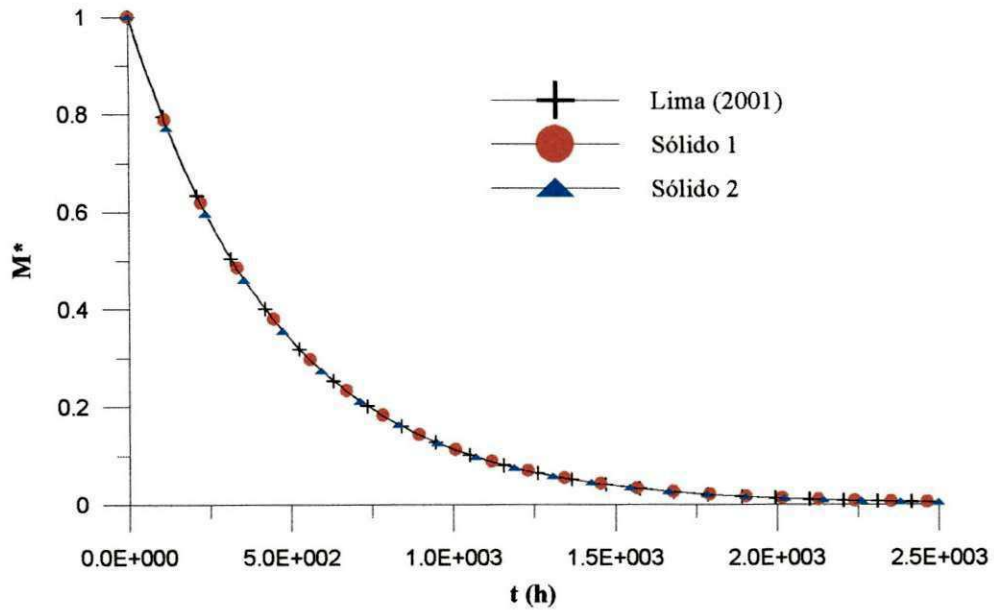


Figura 4.1 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).  
 $(\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK})$ .

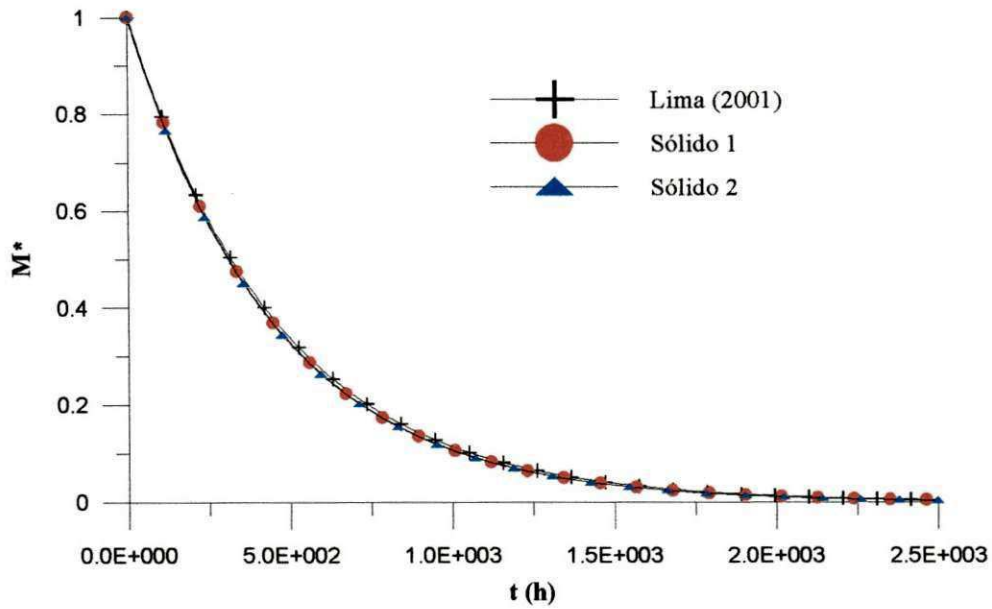


Figura 4.2 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).  
 $(\rho_1=900 \text{ kg/m}^3, \rho_2=2100 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK})$ .



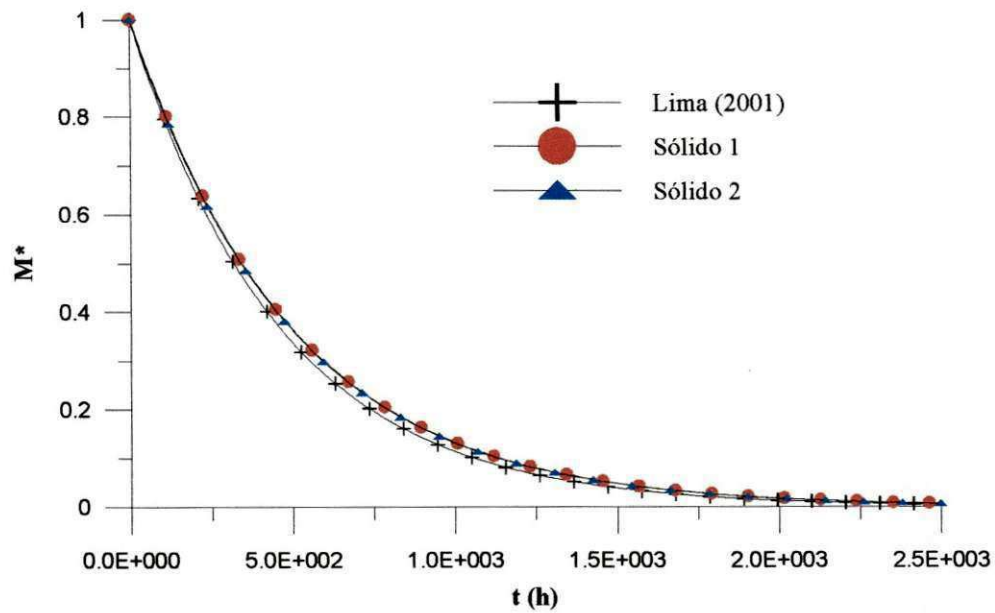


Figura 4.3 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).

$$(\rho_1=2100 \text{ kg/m}^3, \rho_2=900 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}).$$

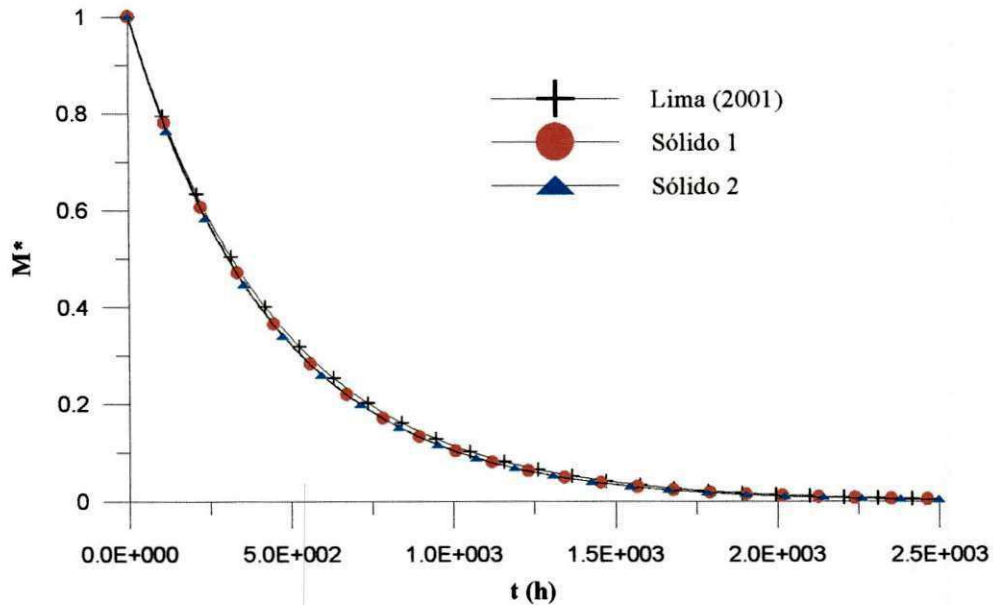


Figura 4.4 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).

$$(\rho_1=900 \text{ kg/m}^3, \rho_2=4100 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}).$$

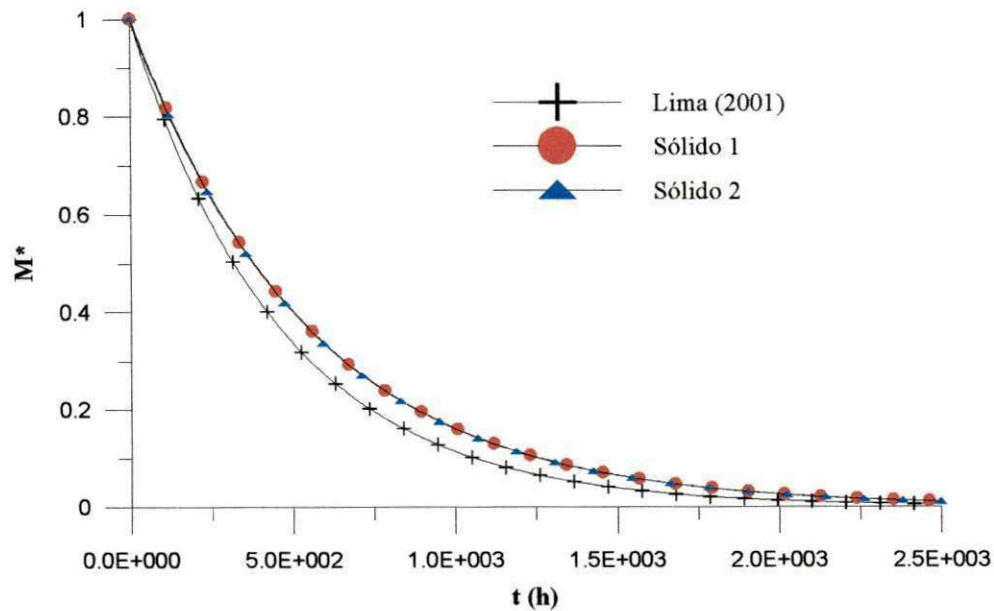


Figura 4.5 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).

$$(\rho_1=4100 \text{ kg/m}^3, \rho_2=900 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}).$$

Quanto maior for a diferença entre as densidades dos sólidos 1 e 2 e aquela correspondente a um sólido heterogêneo suposto homogêneo com densidade de valor igual ao obtido pela equação (3.49), maior será o erro cometido na análise. Na análise da transferência de massa a variação do calor específico não exerceu mudanças consideráveis na cinética de secagem. A Figura 4.6 ilustra este efeito.

As Figuras 4.8 e 4.9, ilustram o efeito do calor específico no transporte de calor nos sólidos 1 e 2. O sólido 2 é o sólido externo. Este sólido tendo calor específico maior, demora a se aquecer, ou seja, o processo de transferência de calor torna-se mais lento, e conseqüentemente, o sólido 1 também tem seu fenômeno de aquecimento retardado. Por outro lado, se o calor específico do sólido 1 (interno) é maior que o do sólido 2 (externo), a transferência de calor é acelerada. Isso porque o calor que chega no sólido 2 é facilmente transferido para o sólido 1, acelerando o processo, em relação ao sólido homogêneo (Lima, 2001), cujo calor específico é obtido pela média do calor específico de cada um dos sólidos. Para transferência de calor, o sólido é mais sensível a variação do calor específico do que a variação da densidade.

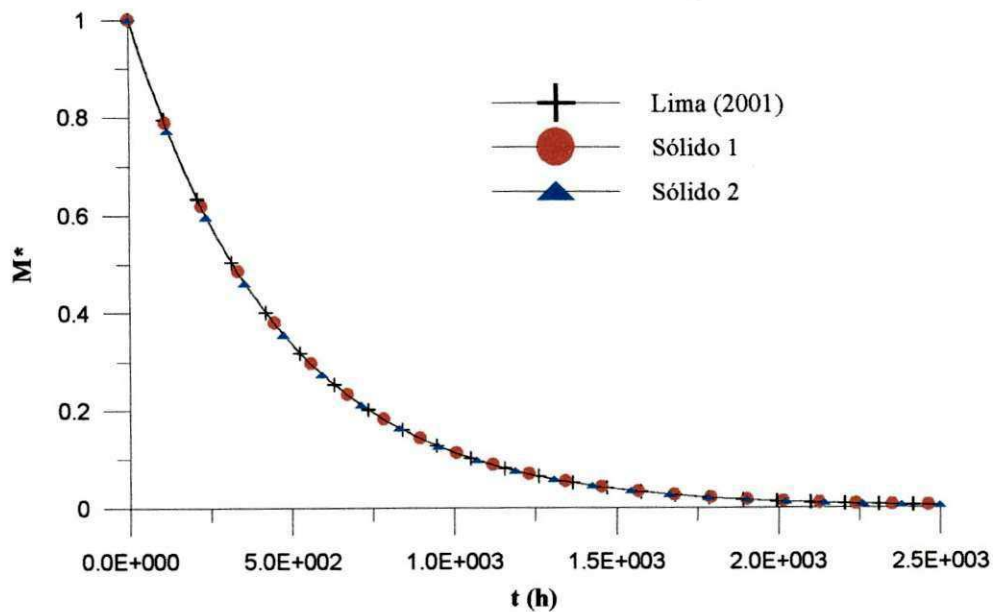


Figura 4.6 – Comparação entre os resultados do teor de umidade médio adimensional obtidos neste trabalho e aqueles obtidos a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p1} = 700 \text{ J/kgK}$ ,  $C_{p2} = 1300 \text{ J/kgK}$ ).

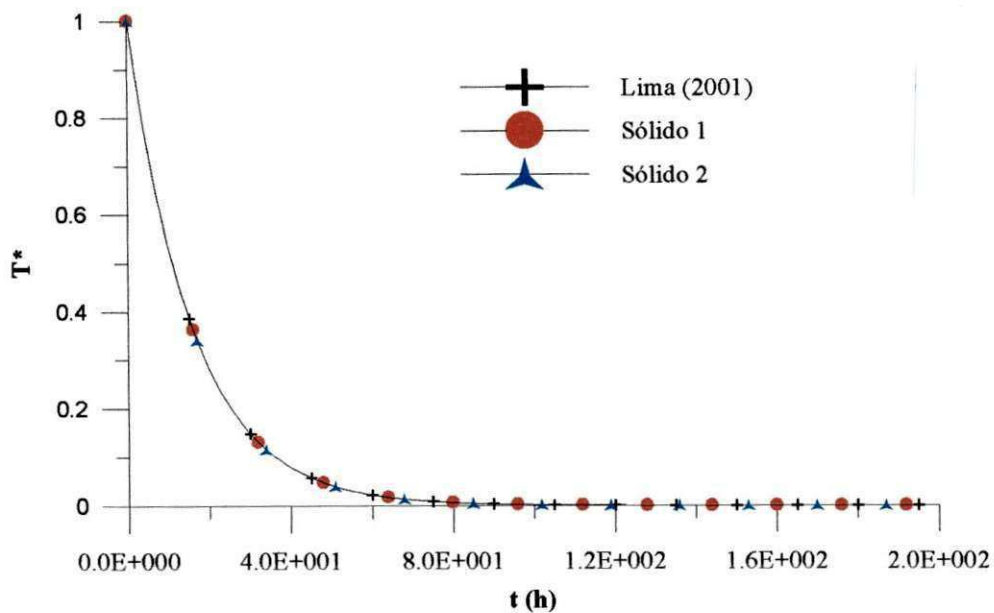


Figura 4.7 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = C_{p1} = C_{p2} = 1300 \text{ J/kgK}$ ).

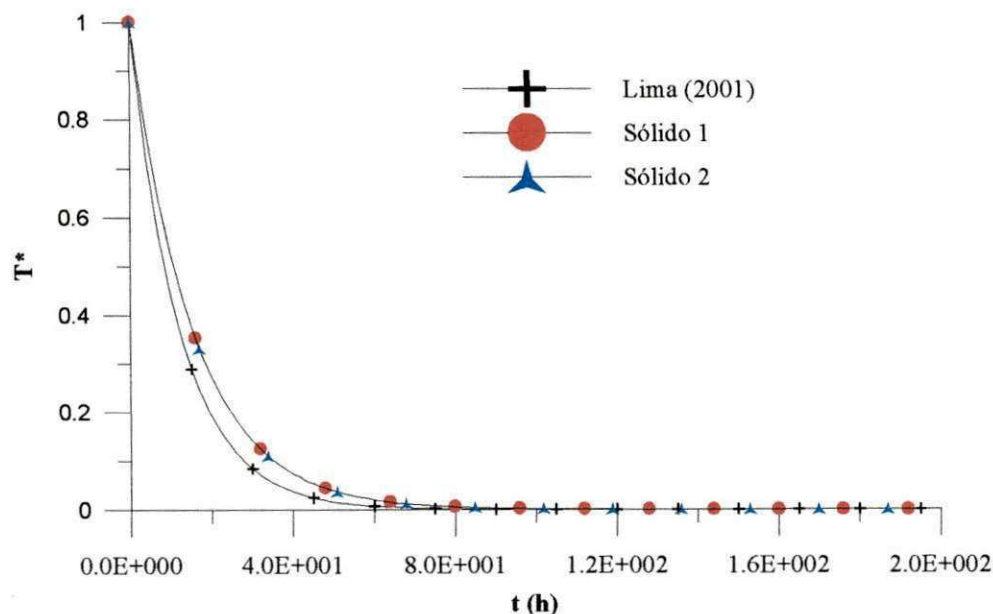


Figura 4.8 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

$$(\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3, C_{p1}=700 \text{ J/kgK}, C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}).$$

As Figuras 4.10 e 4.11 ilustram a influência do calor específico no comportamento dos sólidos, desta feita de forma mais intensa, devido a uma maior diferença entre o valor da propriedade termo-física.

Na análise da transferência de calor, a variação da densidade não afeta a cinética de aquecimento do sólido. A única diferença encontrada foi o tempo em que os corpos chegaram ao equilíbrio e que é proporcional a densidade, ou seja, quanto maior a densidade maior o tempo que o corpo leva para chegar ao teor de umidade de equilíbrio.

Comparando-se as Figuras 4.1 - 4.6 com as Figuras 4.7 – 4.12, verifica-se que a taxa de secagem é sempre inferior a taxa de aquecimento dos sólidos, como esperado.

Nenhuma diferença significativa entre os teores de umidade  $M_1^*$  e  $M_2^*$  e temperatura  $T_1^*$  e  $T_2^*$  no interior do sólido heterogêneo ocorreu. Isto é atribuído ao baixo número de Biot de transferência obtido em cada caso. Aumentando-se o número de Biot, o efeito vai se tornando cada vez mais nítido, contudo o método de análise concentrada vai deixando de ter validade.

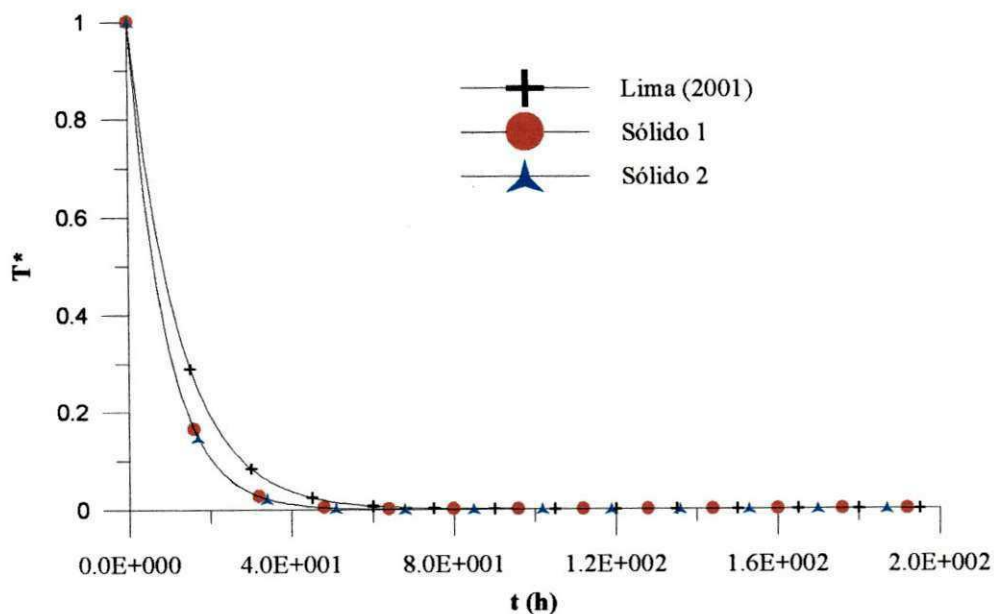


Figura 4.9 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p1}=1300 \text{ J/kgK}$ ,  $C_{p2}=700 \text{ J/kgK}$ ).

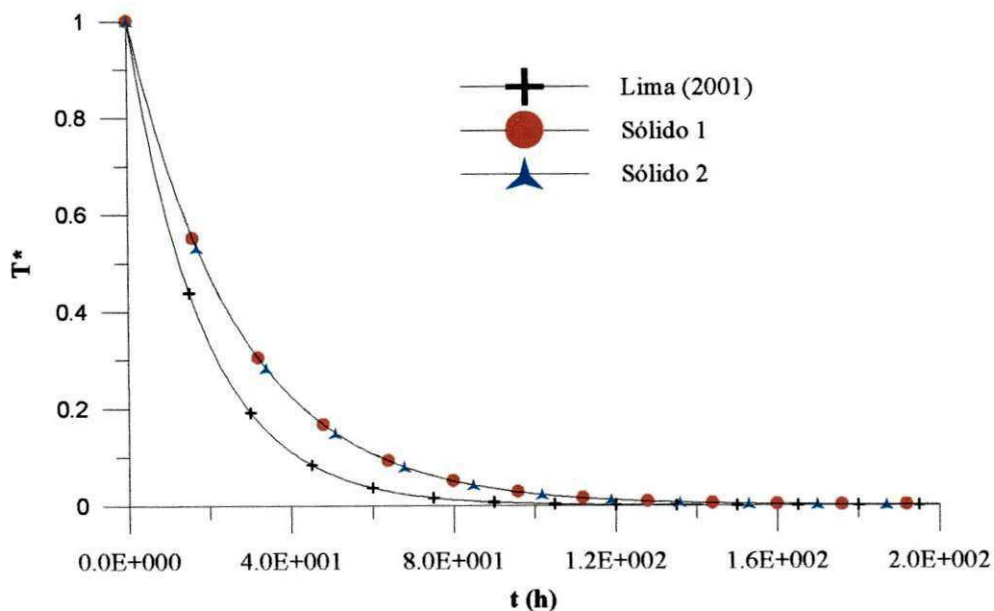


Figura 4.10 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p1}=700 \text{ J/kgK}$ ,  $C_{p2}=2300 \text{ J/kgK}$ ).

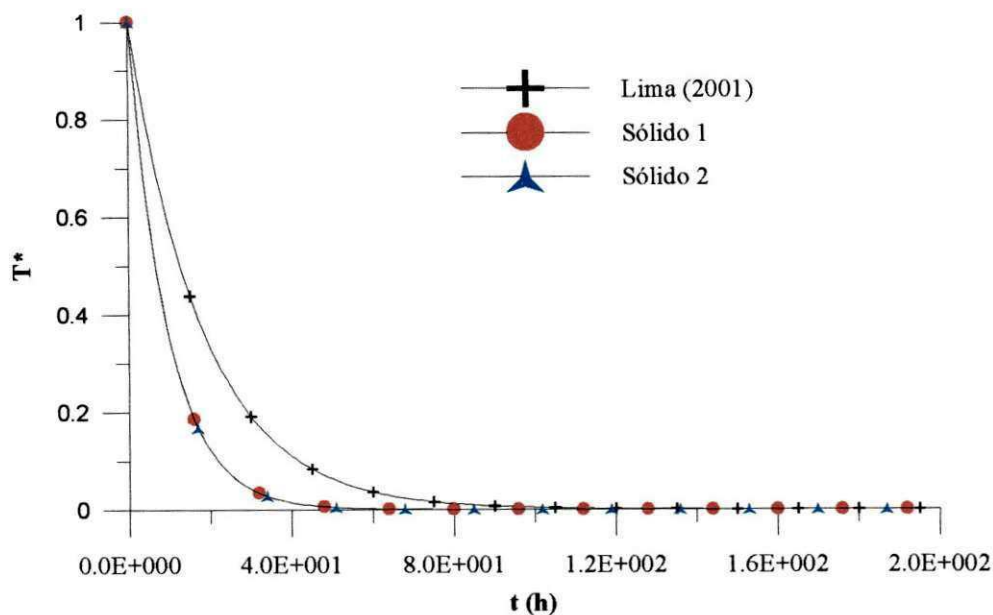


Figura 4.11 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho=\rho_1=\rho_2=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{p1}=2300 \text{ J/kgK}$ ,  $C_{p2}=700 \text{ J/kgK}$ ).

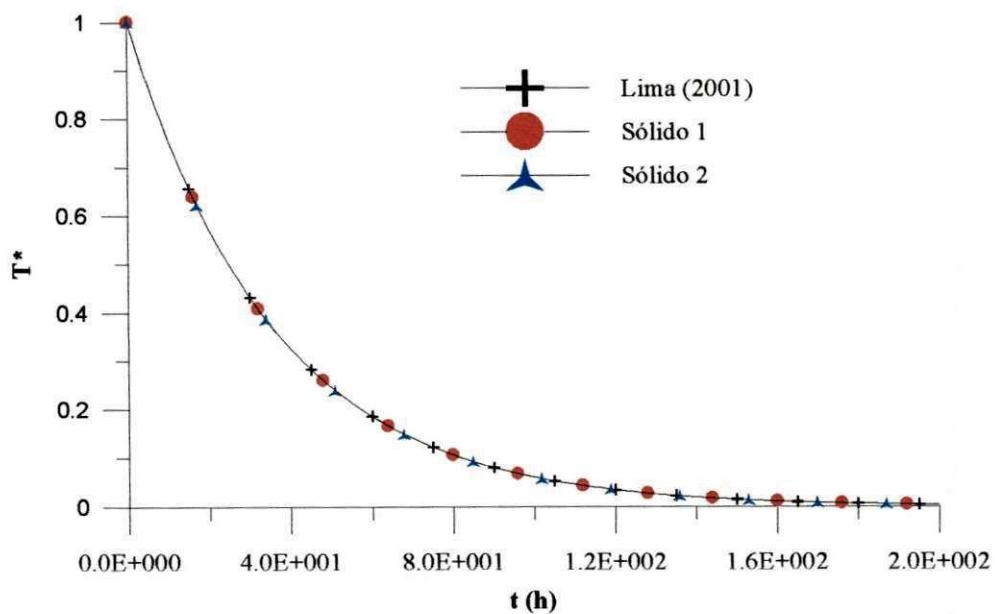


Figura 4.12 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida neste trabalho e aquela obtida a partir do modelo proposto por Lima (2001).

( $\rho_1=900 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2=2100 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}$ ).

Para a análise simultânea de transferência de calor e massa, alguns parâmetros de entrada foram mudados visando uma melhor interpretação dos resultados obtidos. Os seguintes valores foram utilizados  $h_m = 3,15 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $h_c = 1,5 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $T_\infty = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $M_o = 0,8 \text{ kg/kg}$ ,  $M_c = 0,2 \text{ kg/kg}$ . O restante das propriedades dos sólidos foram mantidas como mostra a Tabela 4.1.

Nos resultados apresentados, todas as temperaturas estão na forma adimensional. Os resultados do processo desacoplado significam existência do fenômeno de transferência de calor por convecção apenas, no caso acoplado tem-se a transferência de calor por convecção acrescentada a parcela que diz respeito à evaporação da água na superfície do sólido e o aquecimento do vapor produzido. A seguir apresenta-se os resultados obtidos nas simulações de secagem.

A Figura 4.13 ilustra a validade do modelo que considera fenômeno de transferência de calor e massa acoplados desenvolvido neste trabalho, pela comparação entre os resultados apresentados pela formulação dada pelas equações (3.17) e (3.19) e aquelas mostradas pelas equações (3.33) e (3.35) para  $h_{fg} = 0 \text{ J/kg}$ . Verifica-se a excelente concordância entre os resultados.

A temperatura de equilíbrio é atingida primeiramente no caso desacoplado, com um calor latente de vaporização de  $h_{fg} = 0 \text{ J/Kg}$ , e de forma mais lenta quando é considerado o  $h_{fg} > 0$ . A transferência de calor é acentuada no início do processo e bastante lenta no fim do processo, como esperado.

A influência da transferência de massa na transferência de calor pode ser verificada nas Figuras 4.14 e 4.15, onde se considera que uma parcela da energia da transferência de calor que chega ao sólido por convecção é gasta para evaporar a água que se encontra na superfície do sólido externo (sólido 2), proporcionando o retardamento do fenômeno de aquecimento dos sólidos 1 e 2. Isto é visto nitidamente em ambas as figuras e de forma mais intensa na Figura 4.14 devido a um valor mais acentuado para o  $h_{fg}$  que aquele usado no caso apresentado na Figura 4.15.

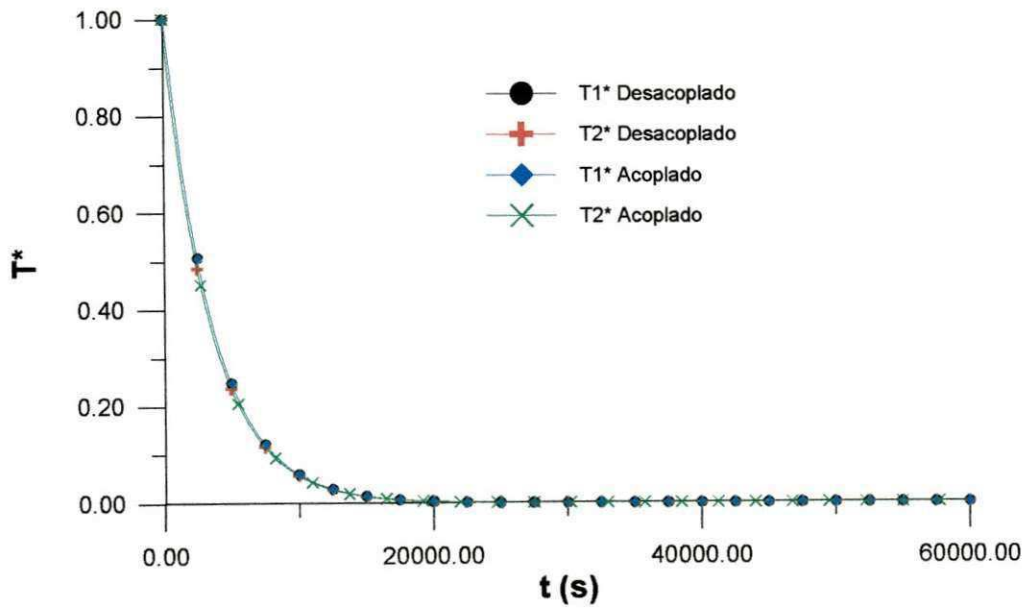


Figura 4.13- Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida no caso desacoplado e no caso acoplado.

( $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 1500 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = C_{p1} = C_{p2} = 1300 \text{ J/kgK}$ ,  $h_{fg} = 0 \text{ J/kg}$ ).

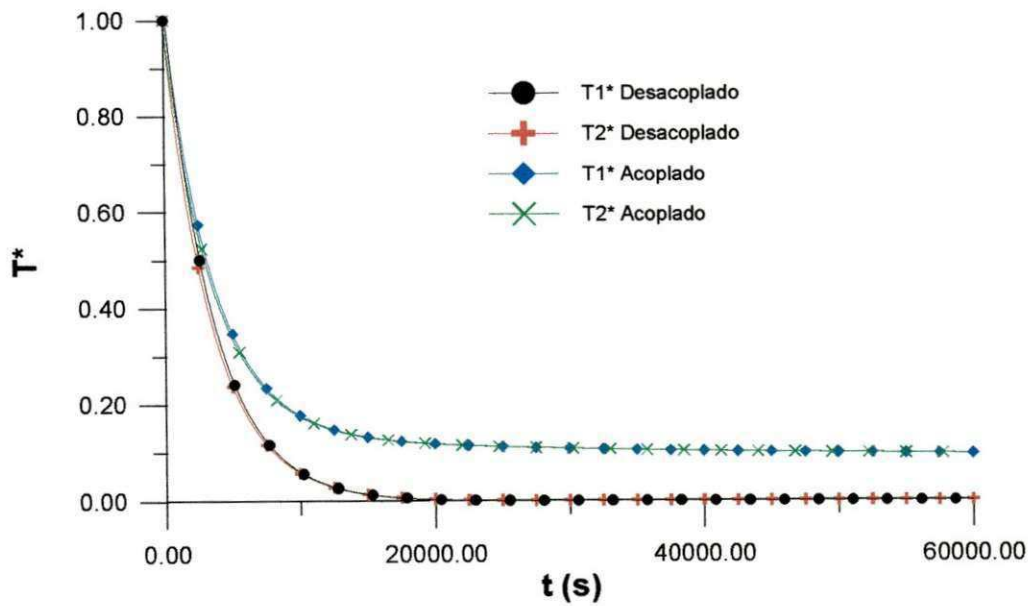


Figura 4.14 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida no caso desacoplado e no caso acoplado.

( $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_p = C_{p1} = C_{p2} = 1300 \text{ J/kgK}$ ,  $h_{fg} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ).



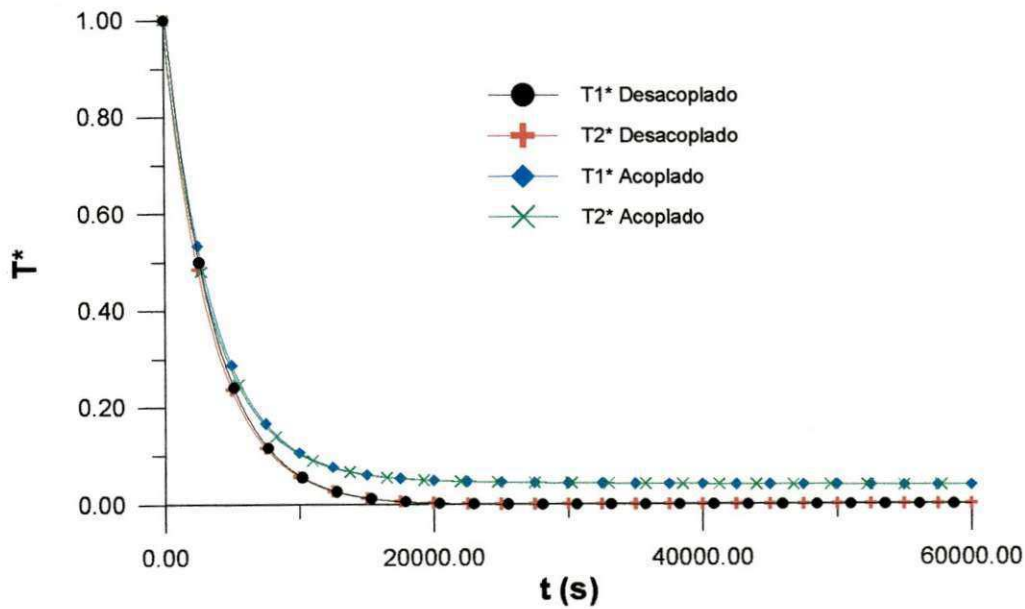


Figura 4.15 – Comparação entre os resultados da temperatura média adimensional obtida no caso desacoplado e no caso acoplado.

$$(\rho=\rho_1=\rho_2=1300 \text{ kg/m}^3, C_p=C_{p1}=C_{p2}=1300 \text{ J/kgK}, h_{fg}=1,0.10^6 \text{ J/kg}).$$

Do exposto, verifica-se que uma formulação matemática que engloba os fenômenos de evaporação e aquecimento do vapor na superfície do sólido gera menores taxas de aquecimento, proporcionando uma maior confiabilidade nos resultados obtidos e na tomada de decisão, no que diz respeito à qualidade do produto no final do processo.

Para finalizar, dada a quantidade de informações fornecidas e o bom ajuste obtido nas comparações apresentadas, pode-se afirmar que a metodologia e os modelos são versáteis. Apesar deste trabalho se direcionar a secagem de sólidos esféricos, esta metodologia pode ser usada para descrever processos de umidificação e resfriamento em sólidos com geometria arbitrária.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

#### **5.1 Conclusões**

A partir dos resultados gerados e apresentados, pode-se concluir que:

□ As propriedades dos materiais necessitam de uma atenção maior nos problemas que envolvem fluxo de calor e massa, uma vez que estas influenciam no processo de secagem. Quando se tem um sólido que apresenta propriedades distintas, especificamente densidade e calor específico, este terá um comportamento na cinética de secagem diferente de um sólido tomado para estudo com propriedades médias.

□ Os seguintes modelos matemáticos foram desenvolvidos:

- Teor de umidade:

$$M_1^* = \left( \frac{b_2}{b_2 - b_1} \right) e^{b_1 t} + \left( \frac{-b_1}{b_2 - b_1} \right) e^{b_2 t}$$

$$M_2^* = \left( \frac{b_2}{b_2 - b_1} \right) \left( 1 + \frac{b_1}{X_1} \right) e^{b_1 t} + \left( \frac{-b_1}{b_2 - b_1} \right) \left( 1 + \frac{b_2}{X_1} \right) e^{b_2 t}$$

- Temperatura:

$$T_1^* = \frac{\{ 2B_1 e^{H_2 t} F_2 [(b_1^2 H_{10}) + b_1 (b_2^2 H_6 + b_2 H_1 H_6 + B_1 H_{11}) + B_1 b_2^2 H_{12}] \} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$T_2^* = \frac{\left[ T_1 + \left( \frac{dT_1}{dt} \right) / B_1 \right] - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

□ A consideração do corpo heterogêneo nos assegura uma melhor análise no processo de secagem, obtendo-se resultados mais concretos e mais reais. Como o estudo foi feito para sistemas concentrados (número de Biot de transferência baixo), caracterizando uma secagem lenta, verificou-se que o sólido 2, sólido externo, tem uma grande influência no processo devido as propriedades do mesmo, agindo como um controlador do fenômeno.

□ Trabalhou-se na modelagem matemática com sólido de forma arbitrária, o que abre um leque de aplicações para o modelo desenvolvido.

□ Para a análise do caso simultâneo de transferência de calor e massa, verificou-se a grande influência da transferência de massa na transferência de calor, e que para um sólido considerado heterogêneo, este efeito é apresentado mais precisamente, uma vez que, se suas propriedades físicas são distintas, tem-se os fenômenos de transferência de calor e massa de forma diferenciada.

□ Verificou-se que, quando engloba-se na formulação matemática os fenômenos de evaporação e aquecimento do vapor na superfície do sólido, tem-se uma menor taxa de aquecimento do mesmo, obtendo-se assim resultados mais confiáveis e uma maior segurança na tomada de decisões, uma vez que estes resultados tem uma influência significativa em relação à qualidade do produto.

## **5.2 Sugestões para futuros trabalhos**

Como sugestões podem ser citados os seguintes trabalhos:

- Usar os modelos desenvolvidos nesta pesquisa para auxiliar na modelagem e otimização de secadores;
- Modelar matematicamente a secagem de sólidos heterogêneos com qualquer geometria considerando o fenômeno de variação volumétrica;
- Validar experimentalmente os modelos desenvolvidos neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. A. C.; GOUVEIA, J. P. G.; SILVA, J. E.; VILAMIL, J. M. P.; SILVA, M. M. Secagem natural e artificial de vagens de algaroba. **Revista Brasileira de Armazenamento**, v.27, n.1, p.48-57, 2002.

ALSINA, O. L.S., ALMEIDA, M.M., SILVA, Y.C., SÁ, R.M. Estudo do efeito das variáveis de operação na secagem de fatias de goiaba: aplicação de um modelo difusional, In: II Congresso de Engenharia de Processos do MERCOSUL (ENPROMER), 1999. Florianópolis - SC. **Anais...** Florianópolis-SC, 1999, CD ROM.

ALSINA, O L. S., BRASILEIRO, I. M. N. Drying kinetics of west indian cherry. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997. Itu. **Proceedings...** v.B, p.434-440.

ALVARENGA, L. C., FORTES, M., PINHEIRO FILHO, J. B. HARA, T. Transporte de umidade no interior de grãos de feijão preto sob condições de secagem. **Revista Brasileira de Armazenamento**. v.5, n.1, p.5-18, Junho 1980.

BALA, B. K., ZIAUDDIN, A. T. M. Drying characteristics of canola. **Transactions of the ASAE**, v.33, n.3, p.871-876, 1990.

BASUNIA, M.A., ABE, T., Thin-layer solar drying characteristics of rough rice under natural convection. **Journal of Food Engineering**, v.47, p.295-301, 2001.

BEN MABROUK, S.; BELGHITH, A. A. Numerical simulation of the drying of a derfomable material: evolution of the diffusion coefficient. **Drying Technology**, v.13, n.8-9, p.1789-1805, 1995.

BROOKER, D. B., BAKKER-ARKEMA, F.W., HALL, C.W. **Drying and storage of grains and oilseeds**. New York: AVI Book, 1992, 450 p.

BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; HALL, C. W. **Drying cereal grains**, Connecticut: AVI Publishing Company, Inc., 1974, 265p.

CARMO, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblates: modelagem e simulação**. 2000. 76 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina grande.

CHEN, X.D., PIRINI, W., OZILGEN M., The reaction engineering approach to modeling drying of thin layer of pulped Kiwifruit flesh under conditions of small Biot numbers. **Chemical Engineering and Processing**, v.40 , p.311–320, 2001.

DALPASQUALE, V. A.; QUEIROZ, D. M.; PEREIRA, J. A. M; SASSERON, J. L. Curvas de secagem de amendoim utilizando teoria de difusão de líquido. **Revista Brasileira de Armazenamento**, v. 9 - 10, n.1 - 2, p.16-19, 1984/1985.

DEGROOT, S. R. **Thermodynamics of irreversible processes**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

FARIAS, S. N. **Secagem de sólidos esferoidais usando o método de Galerkin**. 2002. 60 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

FELLOWS, P. **Food processing technology: principles and practice**. Published jointly Ellis Horwood Ltd., Chichester, England and VCA, Verlagsgesellschaft GmbH, Weinheim. Federal Republic of Germany, 1998.

FORTES, M. OKOS, M. R., 1980, **Advances in Drying**. Hemisphere Publishing Corporation, 1980, Washington, USA., v.1, p.119-154.

FORTES, M. **Um estudo fundamental das equações de transporte de massa e energia em meios capilares porosos**. 1982. 100 p. Tese (Livre Docência). Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

GEBHART, B. **Heat conduction and mass diffusion**. New York: McGraw-Hill, Inc., 1993, 634 p.

HASATANI, N.; ITAYA, Y. Deformation characteristic of ceramics during drying, In: 8 th International Drying Symposium (IDS, 92), 1992, Montreal, **Proceedings...** Montreal, 1992, pp 190-199, Parte A.

HENDERSON, S. M., PABIS, S. Grain drying theory ,VI. The effect of airflow rate on the drying index. . **Journal of Agricultural Engineering Research.**, v.7, p.85-89, 1962.

HOLMAN, J.P. **Transferência de calor**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983, 639p.

HUTCHISON, D., OTTEN, S. L. Thin-layer drying of soybeans and white beans. CSAE Paper No. 82-104, Ottawa, Ontario: **Canadian Society of Agricultural Engineering**, 1982.

KEEY, R.B. **Drying of loose and particulate materials**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1992. 502p.

LIMA, A. G. B. **Estudo da secagem e dimensionamento de secador de casulos do bicho-da-seda**. 1995. 190p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, PB, Brasil.

LIMA, A. G. B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de bananas**. 1999. 256p. Tese (Doutorado), UNICAMP, S.P.,

LIMA, A. G. B.; NEBRA, S. A., Modelos concentrados de transferência de calor e massa aplicados a corpos com forma arbitrária. In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM) 2000, Natal-RN, **Anais...**, Natal, 2000, CD-ROM.

LIMA, L.A. **Difusão em sólidos com geometria arbitrária: uma abordagem concentrada**, 2001, 49 p. Relatório técnico-científico PIBIC/UFPB-CCT.

LUIKOV, A. V. **Heat and mass transfer in capillary porous bodies**. New York: Pergamon Press, 1966, 523p.

LUIKOV, A. V., MIKHAILOV, Y. A. **Theory of energy and mass transfer**. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1965, 392p.

LOPEZ, A., IGUAZ, A., ESNOZ, A., VISEDA, P. Thin layer drying behavior of vegetables wasters from wholesale market. In **Drying Technology**, v.18, n.4, p.995-1006, 2000.

MARINOS-KOURIS, D.; MAROULIS, Z.B.; KIRANOUDIS, C.T. Computer simulation of industrial dryers. **Drying Technology**, v.14, n.5, p.971-1010, 1996

MARIZ, T. F. **Secagem da casca de caroço de algodão em leito fixo**. 1986. 139p. Dissertação (Mestrado). Departamento de Engenharia Química, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.



MISRA, M. K., BROOKER, D. B. Thin-layer drying and rewetting equation for shelled yellow corn. **Transaction of the ASAE**, v.23, n.5, p.1254-1260, 1980.

NASCIMENTO, J. J. S. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: secagem de materias cerâmicos.** 2002. 205p. Tese (Doutorado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

OLIVEIRA, V. A. B. **Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica,** 2001. 87 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

OZDEMIR, M., DEVRES, Y.O. The thin layer drying characteristics of hazelnuts during roasting. **Journal of Food Engineering**, v.42, p.225-233, 1999.

OZDEMIR, M., DEVRES, Y.O. The thin layer drying and rewetting equation for shelled yellow corn **Transaction of the ASAE**, v.23, n 5, p.1254-1260, 1995.

PARRY, J. L. Mathematical modeling and computer simulation of heat and mass transfer in agricultural grain drying. A review. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v.32, p.1-29, 1985.

PARTI, M. Evaluation of selected mathematical models for grain drying. In: International Drying Symposium (IDS'90/CHISA'90), 1990, Praha: **Proceedings...** v.3, p.153-162.

PARTI, M. Selection of mathematical models for drying grain in thin-layers. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v.54, p.339-352, 1993.

PRIGOGINE, I. **Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles.** Lieja: Editora Desoer, 1947.

QUEIROZ, M. R.. **Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas**. 1994. 176p. Tese (Doutorado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP.

RIZVI, S.S.H., **Thermodynamic properties of foods in dehydration**. In: RAO, M.A, RIZVI, S.H. Engineering properties of foods. New York: Marcel Dekker, Inc., 1986, p.133-214.

ROVEDO, C. A, SUAREZ,C., VIOLLAZ,P.E. Drying of foods: evaluation of drying model. **Journal of Food Engineering**, v.26,p.1-12,1995a.

ROVEDO, C. O.; SUAREZ, C.; VIOLLAZ, P. E. Drying simulation of a solid slab with three dimensional shrinkage. **Drying Technology**, v.13, n.1-2, p.371-393, 1995b.

SARKER, N. N.; KUNZE, O. R.; STROUBOLIS, T. Finite-element simulation of rough rice drying. **Drying Technology**, v.12, n.4, p.761-775, 1994.

SILVA, L. C **Secagem de grãos**. Disponível em : <http://www.unioeste.br>. Acesso em 20 Novembro de 2000.

SILVA, J.S.; AFONSO; A.D.L.; DONZELES, S.M.L. **Secagem e secadores**. Disponível em; <http://www.ufv.br/poscolheita/livro1.htm>. Acesso em 14 de Maio de 2001.

SILVA, J. B. **Secagem de sólidos em camada fina via análise concentrada: modelagem e simulação**. 2002. 64 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

SINICIO, R., MUIR, W.E., JAYAS, D.S., CENKOSKWI, S. Thin-layer drying and wetting of wheat. **Postharvest Biology and Technologic**, n.5, p.261-275, 1995.

SOKHANSANJ, S. **Advances in drying**. New York: Hemisphere Publishing Corporation. v.3, 1984. Chapter four: Grain drying simulation with respect to energy conservation and grain quality, p.121-179.

STEFFE, J. F.; SINGH, R. P. Theoretical and practical aspects of rough rice tempering. **Transactions of the ASAE**, v.23, n.3, p.775-782, 1980.

STRUMILLO, C.; KUDRA, T., 1986. **Drying: principles, science and design**. Gordon and Breach Science Publishers, New York, USA, 448p.

YALDIZ, O., ERTEKIN, C., UZUN H. I., Mathematical modeling of thin layer solar drying of sultana grapes. **Energy**, v.26, p.457-465, 2001.

ZOGZAS, N. P.; MAROULIS, Z. B. Effective moisture diffusivity estimation from drying data: a comparison between various methods of analysis. **Drying Technology**, v.14, n.7 e 8, p.1543-1573, 1996.

## **ANEXOS**

```

#include <fstream.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>

main()
{
int t;
const int dt=50,nt=60000;
float dx1=0.005,dx2=0.003,Pi=3.141516;
double L,V,V1,V2,A1,A2;
double hinf=1.125,hm=0.00000000315,K1=0.1,D1=0.00000000028;
double hfg=1000000,Tinf=60,To=25,Mo=0.8,Minf=0.2;
double X1,X2,Y2,b1,b2,N1,N2,B1,B2,F2,H1;
float Tcm1[nt],Tcm2[nt],Tc1[nt],Tc2[nt];
float w1,w2,C1,C2,m1,m2;
float ro1=1500,ro2=1500,Cp1=1300,Cp2=1300;

ofstream MC ("MC.dat");

clrscr();

//calculo das areas e volumes:
L=2*(dx1+dx2);
A1=4*Pi*(pow(dx1,2));
A2=4*Pi*(pow(dx2+dx1,2));
V=(1.3333333333)*Pi*(pow((L/2),3));
V1=(1.3333333333)*Pi*(pow(dx1,3));
V2=V-V1;

```

//Dados de entrada:

$$B1=(K1*A1)/(ro1*V1*Cp1*dx1);$$

$$B2=(K1*A1)/(ro2*V2*Cp2*dx1);$$

$$F2=(hinf*A2)/(ro2*V2*Cp2);$$

$$X1=(D1*A1)/(V1*dx1);$$

$$X2=(ro1*D1*A1)/(ro2*V2*dx1);$$

$$Y2=(hm*A2)/V2;$$

$$H1=(B1+B2+F2);$$

//Cálculo das raízes:

$$b1=0.5*(-(Y2+X2+X1)+(\text{sqrt}((Y2+X2+X1)*(Y2+X2+X1)-(4*Y2*X1))));$$

$$b2=0.5*(-(Y2+X2+X1)-(\text{sqrt}((Y2+X2+X1)*(Y2+X2+X1)-(4*Y2*X1))));$$

$$m1=0.5*(-(F2+B2+B1)+(\text{sqrt}((F2+B2+B1)*(F2+B2+B1)-(4*F2*B1))));$$

$$m2=0.5*(-(F2+B2+B1)-(\text{sqrt}((F2+B2+B1)*(F2+B2+B1)-(4*F2*B1))));$$

//Cálculo das constantes:

$$N1=(b2/(b2-b1))*(Mo-Minf);$$

$$N2=(-b1/(b2-b1))*(Mo-Minf);$$

$$C1=m2/(m2-m1);$$

$$C2=-m1/(m2-m1);$$

//Cálculo das constantes para o caso acoplado:

$$w1=(-Y2*N1)-(Y2*N1*b1/X1)-(X2*N1*b1/X1);$$

$$w2=(-Y2*N2)-(Y2*N2*b2/X1)-(X2*N2*b2/X1);$$

//Cálculo das Temperaturas:

for (t=0;t<=nt;t+=dt)

{

//Calculo da temperatura do solido 1 acoplado massa + calor:

$$\begin{aligned}
T_{cm1}[t] = & (((32*B1*F2*(b1*b1*(b2*b2*Cp2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) + \\
& b2*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * hfg*w2) + \\
& B1*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) + \\
& ((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} * hfg*w2)) + \\
& b1*(b2*b2*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * hfg*w1) + \\
& b2*H1*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * hfg*(w1 + w2)) + \\
& B1*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))) * To)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{hfg}*(2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*F2*w1 + \\
& H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1))*w2))) + B1*(b2*b2*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1*(Tinf - \\
& To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*To)) + \\
& ((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)/2.)))* \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*\text{hfg}*w1) + \\
& b2*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*To)) + \\
& \text{hfg}*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1*H1*w1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)/2.)))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w1 + 2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)))^*F2*w2)) + B1*F2*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)))^*H1*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*To)) + \\
& \text{hfg}*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)))^*H1*(w1 + w2) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(w1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))^*w1 - \\
& 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*w1 + w2 + \\
& (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))^*w2 - \\
& 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*w2))))/ \\
& (Cp2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(-H1 + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(-2*b1 - H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(-2*b2 - H1 +
\end{aligned}$$



$$\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))-Tinf)/(To-Tinf);$$

//Calculo da temperatura do solido 2 acoplado massa + calor:

$$\begin{aligned} Tcm2[t]=&(((B1*((32*B1*F2*(b1*b1*(b2*b2*Cp2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To)+\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) *Tinf - \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*To)) + \\ &b2*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To) + \\ &\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - \\ &2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) *Tinf - \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*To)) + \\ &2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*hfg*w2) + \\ &B1*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To) + \\ &\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - \\ &2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) *Tinf - \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*To)) + \\ &((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1 + \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) * \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*hfg*w2)) + \\ &b1*(b2*b2*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To) + \\ &\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - \\ &2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) *Tinf - \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*To)) + \\ &2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*hfg*w1) + \\ &b2*H1*(Cp2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To) + \\ &\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))) - \\ &2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))) *Tinf - \\ &(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*To)) + \\ &2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*hfg*(w1 + w2)) + \\ &B1*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*t))))*H1*(Tinf - To) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*To) + \\
& hfg*(2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*F2*w1 + \\
& H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*w2))) + \\
& B1*(b2*b2*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*To) + \\
& ((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*hfg*w1) + \\
& b2*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*To))+hfg*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t))*H1*H1*w1+(1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w1 + 2*B1*(-1 + \\
& (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*F2*w2) + \\
& B1*F2*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*To) + \\
& hfg*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*(w1 + w2) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(w1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*w1 - \\
& 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*w1 + w2 + \\
& (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*w2 - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t)/2.))*w2)))) / (Cp2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*\sqrt{- \\
& 4*B1*F2 + H1*H1}*(-H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(-2*b1 - H1 + \sqrt{-4*B1*F2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H1*H1))*(-2*b2 - H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*(H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*(2*b1 \\
& + H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*(2*b2 + H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))))+ \\
& ((16*B1*F2*(-H1 - \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*(\text{pow}(b1,2)*(\text{pow}(b2,2)*Cp2*((-1 + \\
& (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + \\
& (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*To)) + \\
& b2*(Cp2*H1*((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \\
& \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - \\
& 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*hfg*w2) + \\
& B1*(Cp2*F2*((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \\
& \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - \\
& 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf - (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + \\
& H1*H1)*t))*To)) + ((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1 + \\
& (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - 2*(\text{exp}(((2*b2 + H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + \\
& H1*H1))*t)/2.)))* \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*hfg*w2)) + \\
& b1*(\text{pow}(b2,2)*(Cp2*H1*((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \\
& \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - \\
& 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*hfg*w1) + \\
& b2*H1*(Cp2*H1*((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \\
& \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - \\
& 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*To)) + \\
& 2*B1*(-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))*hfg*(w1 + w2)) + \\
& B1*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t))))*H1*(Tinf - To) + \\
& \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*((1 + (\text{exp}(\text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1)*t)) - \\
& 2*(\text{exp}(((H1 + \text{sqrt}(-4*B1*F2 + H1*H1))*t)/2.)))*Tinf -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*To)) + hfg*(2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*F2*w1 + H1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^*w2))) + \\
& B1*(pow(b2,2)*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*To)) + \\
& ((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1 + (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) \\
& - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})) * hfg*w1) + b2*(Cp2*F2*H1*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*(Tinf - \\
& To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*To)) + \\
& hfg*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*H1*w1 + \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) - 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^*w1 + 2*B1*(-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*F2*w2) \\
& + B1*F2*(Cp2*F2*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)) - \\
& 2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*Tinf - \\
& (1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*To)) + \\
& hfg*((-1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*(w1 + w2) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(w1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*w1 - \\
& 2*(\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*w1 + w2 + \\
& (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*w2 - 2*(\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*w2))))/(Cp2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.)))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(-H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))*(-2*b1 - H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))*(2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))*(2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})) + \\
& (32*B1*F2*(pow(b1,2)*(pow(b2,2)*Cp2*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H1*H1)*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1}*To)) + b2*(Cp2*H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4* \\
& B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1}))*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& 2*B1*(\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*hfg*w2) + \\
& B1*(Cp2*F2*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(Tinf - \\
& To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1}))*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& ((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1} - (\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(2*b2 + H1 + \sqrt{-4* \\
& B1*F2 + H1*H1}))*hfg*w2)) + b1*(pow(b2,2)*(Cp2*H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})* \\
& (((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - \\
& (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}))*Tinf - \\
& (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& 2*B1*(\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*hfg*w1) + \\
& b2*H1*(Cp2*H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4* \\
& B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1}))*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& 2*B1*(\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*hfg*(w1 + w2)) + \\
& B1*(Cp2*F2*H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1})*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t)/2.))*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + \\
& H1*H1}))*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& hfg*(2*B1*(\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*t))*F2*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*w2))) + B1*(\text{pow}(b2,2)*(Cp2*F2*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^* \\
& (((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& (((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*hfg*w1) + b2*(Cp2*F2*H1*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(Tinf - To) + \\
& \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& hfg*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w1 + H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*w1 + 2*B1*(\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*F2*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w2)) + B1*F2*(Cp2*F2*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(Tinf - To) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1} - (\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})))^*Tinf - (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*To)) + \\
& hfg*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^H1*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*(w1 + w2) + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*((\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w1 - (\exp(((2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(2*b1 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^*w1 + (\exp(\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1}*w2 - (\exp(((2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*(2*b2 + H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^*w2))))/(Cp2*(\exp(((H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^t)/2.))^*\sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(-H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})*(-2*b1 - H1 + \sqrt{-4*B1*F2 + H1*H1})^*
\end{aligned}$$

```

(-2*b2 - H1 + sqrt(-4*B1*F2 + H1*H1))*(H1 + sqrt(-4*B1*F2 + H1*H1))*
(2*b1 + H1 + sqrt(-4*B1*F2 + H1*H1))*(2*b2 + H1 + sqrt(-4*B1*F2 +
H1*H1))))/B1)-Tinf)/(To-Tinf);

```

```
//Calculo da temperatura do solido 1 independente massa e calor:
```

```
Tc1[t]=(C1*(exp(m1*t)))+(C2*(exp(m2*t)));
```

```
//Calculo da temperatura do solido 2 independente massa e calor:
```

```
Tc2[t]=(C1*exp(m1*t)*(1+(m1/B1)))+(C2*exp(m2*t)*(1+(m2/B1)));
```

```
//Dados de saida:
```

```
//cout<<t<<"\t"<<Tcm1[t]<<"\t"<<Tcm2[t]<<endl;
```

```
//cout<<t<<"\t"<<Tc1[t]<<"\t"<<Tc2[t]<<endl;
```

```
MC<<t<<"\t"<<Tc1[t]<<"\t"<<Tc2[t]<<"\t"<<Tcm1[t]<<"\t"<<Tcm2[t]<<endl;
```

```
}
```

```
cout<<"O Programa ja rodou" <<endl;
```

```
cin.get();
```

```
}
```