



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDRÉ MACEDO COSTA

**UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO USANDO SÉRIES DE  
FOURIER**

CUITÉ - PB  
2019

ANDRÉ MACEDO COSTA

**UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO USANDO SÉRIES DE  
FOURIER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientadora: Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva.

CUITÉ - PB

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

C837u

Costa, André Macedo.

Uma solução do problema isoperimétrico usando séries de Fourier. / André Macedo Costa– Cuité: CES, 2019.

48 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva

1. Teorema do divergente. 2. Desigualdade isoperimétrica. 3. Lenda de Dido. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG

CDU 517.52

ANDRÉ MACEDO COSTA

**UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO USANDO SÉRIES DE  
FOURIER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 14 de agosto de 2019.

**BANCA EXAMINADORA**

Maria de Jesus Rodrigues da Silva.  
Prof.<sup>a</sup>. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva -  
UFCG  
Orientadora

Aluizio Freire da S. Júnior  
Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Júnior - UFCG  
Examinador

Célia Maria Rufino Franco  
Prof.<sup>a</sup>. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG  
Examinadora

Este trabalho é dedicado à minha mãe Sandra e meu pai Edmilson.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a minha família, minha mãe Sandra, meu pai Edmilson, meus irmãos Evandro, Vanessa e Ailton, pelo apoio incondicional, saiba que sem vocês nada disso seria possível.

Agradeço também aos inúmeros amigos que fiz durante essa graduação, em especial a Anderson, Brenda, Eduardo, Geovane, Isaac, Marcos Sérgio, Maria da Paz pelos favores, e a todos pelos momentos de alegria compartilhados durante esse tempo.

Aos professores da unidade acadêmica de Física e Matemática da UFCG-CES, em especial a professora Maria de Jesus, pelas disciplinas ministradas, pela ajuda em diversos momentos do curso com dúvidas e elaboração de trabalhos e pela paciência e empenho na orientação deste trabalho.

Ao professor Aluizio Freire, pela oportunidade de participar do PIBIC sob sua orientação durante este 1 ano de projeto no qual pude aprender muito, com ensinamentos que levarei para o resto da minha vida acadêmica. Agradeço também por participar da banca examinadora ao lado da professora Célia Maria, cujas correções e sugestões melhoraram a qualidade deste trabalho.

Agradeço também aos professores Jorge, Leonardo e Luciano que me ajudaram em diversos momentos e a equipe do PIBID interdisciplinar, pelo aprendizado com todos vocês.

Agradeço também a UFCG, a CAPES e ao CNPQ, pela concessão de bolsas ao longo desse curso, sem as quais não estaria concluindo nesse momento.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão dessa jornada, meu muito obrigado.

*“A primeira regra do ensino é saber aquilo que se vai ensinar. A segunda regra é saber um pouco mais do que o que se vai ensinar ”*  
*(George Pólya)*

# RESUMO

O problema isoperimétrico é um tema cuja primeira aparição esta contida na obra Eneida escrita antes de cristo, e que também pode ser notado no formato dos núcleos das cidades mais antigas evidenciando o fato dos antepassados conhecerem sua solução. O problema em sua origem consiste em considerar um comprimento e encontrar dentre todas as curvas fechadas do plano com esse comprimento a que engloba maior área. O mesmo possui diversas aplicações, a exemplo da construção de cercas e embalagens. Esta pesquisa é caracterizada como uma revisão bibliográfica de livros, artigos e monografias, cujo objetivo é apresentar uma demonstração da desigualdade isoperimétrica no plano, através de séries de Fourier, e expor algumas de suas aplicações. Para isso, foram apresentados alguns resultados e definições sobre séries de Fourier e teoria das curvas planas de modo a facilitar seu entendimento. A desigualdade isoperimétrica mostra-se um assunto relevante para matemáticos em formação, visto que pode ser introduzido na educação básica através de sequências didáticas. Não obstante, sua resolução no plano envolve uma parte significativa da matemática apresentada no ensino superior, e além disso esse problema é objetivo de pesquisas em diversos campos da matemática, como o cálculo variacional e teoria dos espaços de Banach. Desta forma, é estabelecido através do Problema Isoperimétrico um elo entre a matemática nos diversos níveis, promovendo uma significação para tal estudo.

**Palavras-chave:** Teorema do divergente. Desigualdade isoperimétrica. Lenda de Dido.

# ABSTRACT

Isoperimetric problem is a theme whose first appearance is contained in the work Aeneid, written before Christ, and which can also be noted in the shape of the oldest cities core emphasizing the fact that the ancestors knew its solution. The problem in its origin is to consider a length and find among all closed curves of the plane which one contains the largest area. It has several applications, such as the construction of fences and packages. This research is characterized as a bibliographic review of books, articles and monographs, whose objective is to present a statement of isoperimetric inequality on the plane through the Fourier series, and expose some of its applications. In this regard, results and definitions about Fourier series and theory of plane curves were presented in order to facilitate its understanding. Isoperimetric inequality appears as a relevant subject for trainee mathematicians, since it can be introduced into basic education through didactic sequences. Nevertheless, its resolution in the plane involve a significant part of mathematics presented in higher education, and furthermore this problem is the aim of researches in several fields of mathematics, such as variational calculus and Banach space theory. Therefore, Isoperimetric Problem establishes a link between mathematics at different levels, promoting a significance for such study.

**Keywords:** Divergence theorem. Isoperimetric inequality. Legend of Dido.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER</b>	<b>13</b>
2.1	Sequência de funções	13
2.2	Série de funções	15
2.3	Coefficientes de Fourier	19
2.4	Séries de Fourier	22
2.5	Integração de série de Fourier	25
2.6	Identidade de Parseval	28
<b>3</b>	<b>CURVAS PLANAS</b>	<b>30</b>
3.1	Reparametrização de curvas	31
3.2	Comprimento de arco	32
3.3	Campo de Vetores ao longo de Curvas	34
3.4	Campos vetoriais, divergente e laplaciano	35
<b>4</b>	<b>DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E APLICAÇÕES</b>	<b>39</b>
4.1	Panorama histórico	39
4.1.1	A lenda de Dido	39
4.1.2	Estudo do P.I. ao longo dos anos	40
4.2	Teorema da desigualdade isoperimétrica	41
4.3	Aplicações do P.I.	45
4.3.1	Construção de cercas com $n$ mourões	45
4.3.2	Embalagens de alimentos	46
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade é necessário ao homem delimitar áreas, seja para sua própria moradia e proteção, ou para outra finalidade como manter seus animais em determinado local. Para realizar essa limitação são exigidos recursos que devem ser sempre bem aproveitados. Nesse contexto, surge a questão sobre a existência de um formato no qual tais recursos possam ter melhor aproveitamento, ou seja, qual formato deve ser utilizado visando englobar uma maior área. Essa situação traz uma possível origem do problema isoperimétrico (P.I.), que é descrito como segue.

Classicamente o P.I. possui o seguinte enunciado: *Dado um comprimento  $L > 0$ , encontrar dentre todas as curvas fechadas do plano com esse comprimento, a que englobe maior área.* De acordo com, Telichevesky e Klaser (2016), o problema pode ser reformulado como: *Dada uma área  $A > 0$ , encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.*

Ainda existe uma versão equivalente do enunciado, conhecida como a desigualdade isoperimétrica, esta versão está contida em diversos livros, a exemplo de Carmo (2008) e se apresenta da seguinte forma: *A área  $A$  englobada por qualquer curva  $\alpha$  plana fechada simples, de comprimento  $L$  satisfaz a desigualdade isoperimétrica  $A \leq L^2/4\pi$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\alpha$  for um círculo.*

A solução do P.I. é conhecida há muito tempo e percebe-se que foi usada na passagem da lenda de Dido escrita pelo poeta grego Virgílio, em sua obra Eneida, em 300 a.C.. No entanto, apenas no início do século passado foi apresentada uma solução atendendo ao rigor da matemática moderna.

Em outros contextos, o problema isoperimétrico pode ser utilizado como ferramenta didática na educação básica a exemplo do trabalho de Limbeger (2011), onde são apresentados resultados de uma sequência didática com esse tema e com *softwares* baseados nesse problema, propondo assim um roteiro para sua introdução na educação básica.

Apesar de não pertencer ao currículo obrigatório dos cursos de licenciatura em matemática, o P.I. possui relação com diversos conceitos estudados ao longo deste. Essa ligação pode ser evidenciada no trabalho de Telichevesky e Klaser (2016) onde são apresentadas cinco demonstrações da solução do P.I., duas através de conceitos geométricos, e três envolvendo princípios do cálculo diferencial e integral, sendo utilizadas para estas os multiplicadores de Lagrange, o teorema de Green e as séries de Fourier.

Os estudos com relação ao P.I. não se limitam aos conceitos presentes nos cursos de ensino superior, Figueiredo (2007) o classifica como um problema do cálculo variacional, já

Telichevesky e Klaser (2016) apontam que generalizações acerca desse tema ainda estão sendo elaboradas, tornando assim o P.I. ativo em diversas áreas da matemática, a exemplo de: Geometria diferencial, Teoria de espaços de Banach, Equações diferenciais parciais dentre outros.

Esta pesquisa caracteriza-se como uma revisão bibliográfica, cujo objetivo é apresentar uma solução do problema isoperimétrico no plano, utilizando as séries de Fourier, e ainda expor aplicações desse resultado. Além disso, busca-se tornar o texto completo com a exposição das definições e resultados necessários. O trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos, onde o primeiro consiste na introdução e os demais são descritos a seguir.

O segundo capítulo conta com uma introdução às séries de Fourier, iniciando com definições de sequências e séries de funções, seguidos da dedução dos coeficientes dessas séries, uma definição formal e resultados que estabelecem condições para sua convergência. Na sequência é exposto o teorema de integração que afirma que pode-se integrar termo a termo da série de Fourier de uma função  $f$  sem necessariamente ela convergir uniformemente. O capítulo encerra-se com o teorema da identidade de Parseval.

No terceiro capítulo, encontra-se um breve estudo sobre a teoria geral das curvas planas, partindo das definições fundamentais e expondo alguns resultados necessários a este trabalho. Após as definições, apresentam-se alguns resultados sobre reparametrização de curvas e de campo de vetores ao longo destas. Ao fim do capítulo são apresentados resultados sobre campos vetoriais, encerrando com o teorema do divergente e uma de suas consequências.

O último capítulo está organizado em três seções, a primeira aborda o panorama histórico do P.I., discorrendo sobre a lenda de Dido bem como a evolução no estudo desse problema ao longo dos anos. A segunda apresenta o teorema da desigualdade isoperimétrica com sua demonstração, além de duas proposições que são consequências diretas do teorema. A terceira seção conta com duas aplicações da desigualdade isoperimétrica: uma relacionada a construção de uma cerca com um número limitado de mourões buscando-se delimitar a maior área possível, e a outra relacionada a construção de uma embalagem com área da base e tampa fixadas, buscando gastar o mínimo de material possível na sua confecção.

## 2 SÉRIES DE FOURIER

Antes de apresentar a demonstração da desigualdade isoperimétrica, se faz necessário a explanação de definições e resultados do cálculo diferencial e integral indispensáveis ao entendimento da mesma. Este capítulo, contempla as sequências e séries de funções, enfatizando a série de Fourier que é peça importante neste trabalho, já que a partir da utilização dessa série e de alguns resultados como o teorema da identidade de Parseval, consegue-se apresentar a demonstração da desigualdade.

De acordo com Figueiredo (2007), em 1759 o grande matemático Lagrange (1736-1813) ao propor uma solução para a equação da onda, fazendo o tempo igual a zero, obteve o desenvolvimento de uma função  $f$  em uma série de senos e cossenos. Anos mais tarde, Fourier (1768 - 1830) em sua obra sobre teoria matemática da condução de calor, explicitou os coeficientes dessa série, e também, escreveu as séries de várias funções, afirmando ainda que qualquer função poderia ser aproximada por séries de senos e cossenos. Certo tempo depois, diversos matemáticos a exemplo de Dirichlet mostraram exemplos de funções que não podem ser aproximadas por estas séries.

As séries de Fourier são casos particulares de séries de funções, que por sua vez estão intimamente ligadas com o estudo das sequências de funções. Desta forma, serão apresentados, as definições e alguns resultados de sequências e séries de funções.

### 2.1 Sequência de funções

**Definição 2.1** De acordo com Lima (2008), dado  $I \subset \mathbb{R}$  uma sequência de funções  $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$  é uma correspondência que associa a cada número  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $I$  e tomando valores reais.

Assim, seja  $f_n$  uma sequência de funções definidas em  $I \subset \mathbb{R}$ . Para cada  $x \in I$ , pode-se considerar a sequência numérica de  $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ , com termo geral  $f_n(x)$ . Seja  $B = \{x \in I \mid f_n(x) \text{ converge}\}$ , ou seja,  $B$  é o subconjunto de  $I$ , onde:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Nessas condições, a sequência  $f_n$  converge à função  $f$  em  $B$ .

**Exemplo 2.1** Mostre que a sequência de funções  $f_n(x) = x^n$  converge no intervalo  $(0, 1]$ , à função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

**Solução:** Deve-se mostrar que, para todo  $x \in (0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Para  $x = 1$ , tem-se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ . E considerando agora,  $x \in (0, 1)$ , observa-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Assim, verifica-se que a sequência de funções  $f_n(x)$  converge para a função  $f(x)$  no intervalo  $(0, 1]$ .

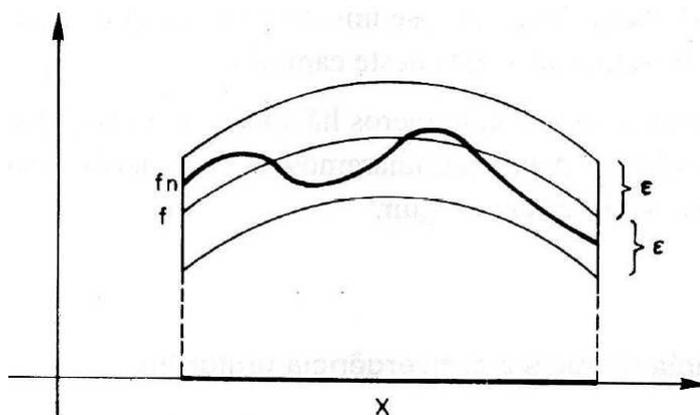
De acordo com Lima (2010), existem várias noções de limite para sequências e séries de funções, no entanto, as mais comuns são as de convergência simples e convergência uniforme, que serão abordadas a seguir.

**Definição 2.2** Uma sequência de funções  $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$  converge simplesmente para a função  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  quando para todo  $x \in I$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , ou seja, dados  $\epsilon > 0$  e  $x \in I$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo de  $\epsilon$  e de  $x$ ), tal que,  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

**Definição 2.3** Uma sequência de funções  $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$  converge uniformemente para a função  $f(x)$ , se dados  $\epsilon > 0$  e  $x \in I$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo apenas de  $\epsilon$ ) tal que  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

Graficamente a definição de convergência simples significa que em cada reta vertical, ficam determinados os pontos  $(x, f_1(x)), (x, f_2(x)), (x, f_3(x)), \dots, (x, f_n(x)), \dots$ , tais que a sequência determinada por estes converge para o ponto  $(x, f(x))$ . Já a definição de convergência uniforme, graficamente significa que, dado  $\epsilon > 0$  existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que, para todo  $n > n_0$ , o gráfico de  $f$  está contido na faixa de raio  $\epsilon$  ao seu redor.

Figura 1 – O gráfico de  $f_n$  está contido na faixa de  $F(f, \epsilon)$ .



Fonte: Elon (2008).

Existem diversos resultados que estabelecem as condições para a continuidade, integrabilidade e derivabilidade para funções definidas como o limite de uma sequência de funções, além de existirem testes para saber se uma sequência converge uniformemente ou não. Porém, como o foco deste trabalho é outro, serão expostas apenas as definições acima.

## 2.2 Série de funções

O estudo de série de funções é parecido com o de séries numéricas, com a grande diferença que uma converge para uma função real e a outra para um número real. Deste modo, assim como as séries numéricas que tem uma forte relação com sequências, as de funções possuem relação com as sequências de funções.

**Definição 2.4** De acordo com Guidorizzi (2002), uma série de funções é uma soma infinita do tipo  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , em que cada  $f_n$  é uma função.

Uma série de funções  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  é dita convergente, em um conjunto  $I$ , à função  $s : I \mapsto \mathbb{R}$  se para cada  $x \in I$ ,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

ou seja,

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x), \forall x \in I,$$

a função  $s(x)$  denomina-se soma da série e seu domínio são os  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série converge.

**Exemplo 2.2** Mostre que a série de funções  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  converge para  $0 < x < 1$ .

**Solução:** Por se tratar da série geométrica, sabe-se que se  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

deste modo, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  converge à função  $s(x) = \frac{1}{1-x}$  com  $0 < x < 1$ .

O exemplo acima se contrapõe a complexidade que pode ser analisar se uma série converge ou não à uma função. Diante dessa dificuldade, existem critérios para a convergência uniforme de uma série de funções. A seguir será apresentada a definição de convergência uniforme, e os critérios de Cauchy e de Weistress para tal convergência.

**Definição 2.5** De acordo com Guidorizzi (2002), a série de funções  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente, em  $I$ , à função  $s : I \mapsto \mathbb{R}$  se, dado  $\epsilon > 0$  existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $\forall x \in I$ ,

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - s(x) \right| < \epsilon.$$

**Teorema 2.1 (Critério de Cauchy)** A série de funções  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente, em  $I$ , à função  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  se, e somente se,  $\forall \epsilon > 0$  dado, existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, quaisquer que sejam os naturais  $m$  e  $n$  e para todo  $x \in I$ ,

$$m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| < \epsilon.$$

**Demonstração:** Suponha que a série de funções  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  convirja uniformemente, em  $I$ , à função  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ . Assim, pela definição 2.5, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^n f_k - s(x) \right| < \epsilon,$$

por outro lado, dado  $m \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| = \left| \sum_{k=0}^m f_k - s(x) + s(x) - \sum_{k=0}^n f_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m f_k - s(x) \right| + \left| \sum_{k=0}^n f_k - s(x) \right|,$$

logo,  $\forall x \in I$ , segue:

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^m f_k - s(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } m > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^n f_k - s(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} \implies$$

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| < \epsilon.$$

Suponha agora que,  $\forall \epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, quaisquer que sejam os naturais  $m$  e  $n$  e para todo  $x \in I$ ,  $m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| < \epsilon$ . como a sequência das somas parciais formam uma sequência de Cauchy segue que  $\sum_{k=0}^m f_k$  é convergente, logo, fazendo  $m \rightarrow \infty$ , tem-se,  $\forall x \in I$ :

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{k=0}^n f_k - s(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e portanto a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente. ■

O teorema acima também é válido para a convergência uniforme de sequências de funções, com enunciado e demonstração análogos.

**Teorema 2.2 (Critério M de Weierstress)** *Seja  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  uma série de funções e suponhamos que exista uma única série numérica  $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$  tal que, para todo  $x \in I$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$|f_k(x)| \leq M_k.$$

*Nestas condições, se a série numérica  $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$  for convergente, então a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  convergirá uniformemente, em  $I$ , à função  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ .*

**Demonstração:** Por hipótese,  $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$  é convergente, então pelo critério de Cauchy,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais maiores que  $n_0$ :

$$m > n \implies \left| \sum_{k=0}^m M_k - \sum_{k=0}^n M_k \right| < \epsilon \implies |M_{n+1} + M_{n+2} + \dots + M_m| < \epsilon. \quad (2.1)$$

Por outro lado,

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| = |f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_m| \leq |f_{n+1}| + |f_{n+2}| + \dots + |f_m|, \quad (2.2)$$

como  $|f_k(x)| \leq M_k$ , segue de 2.1 e 2.2:

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k \right| \leq M_{n+1} + M_{n+2} + \dots + M_m < \epsilon,$$

e portanto, pelo critério de Cauchy, segue que a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente, em  $I$ , a função  $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ . ■

Serão apresentados a seguir, os teoremas que garantem a continuidade, integrabilidade e derivabilidade de uma função dada como uma série de funções. Suas respectivas demonstrações serão omitidas por necessitarem de mais resultados sobre sequências de funções, o que está fora do escopo deste trabalho. Os teoremas a seguir podem ser encontrados em Guidorizzi (2002).

**Teorema 2.3 (Continuidade)** *Seja  $s : I \mapsto \mathbb{R}$  dada por*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

*Se a série de funções  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  convergir uniformemente a  $s$ , em  $I$ , e se cada  $f_k$  for contínua em  $x_0 \in I$ , então  $s$  será contínua em  $x_0$ .*

**Teorema 2.4 (Integração termo a termo)** *Seja  $s = s(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , dada por*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se cada  $f_k$  for contínua em  $[a, b]$  e se a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  convergir uniformemente a  $s$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

**Teorema 2.5 (Derivação termo a termo)** Seja  $s : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalo, dada por

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se cada  $f_k$  for de classe  $C^1$  em  $I$  e se a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$  convergir uniformemente em  $I$ , então, para todo  $x \in I$ ,

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x),$$

ou seja,

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x).$$

Os teoremas acima apontam que se uma série de funções converge uniformemente à uma função, então esta função é contínua. Além disso, ao integrar ou derivar esta função, pode-se integrar ou derivar sua série termo a termo. Este fato é muito importante na análise de algumas séries de funções, a exemplo das séries de Fourier.

A seguir, será iniciado o estudo sobre as séries de Fourier, as quais possuem um papel importante na solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, além de estarem intimamente ligadas a diversas aplicações, a exemplo da condução de calor em uma barra uniforme. Inicialmente serão estudados os coeficientes desta série, e posteriormente será apresentada uma definição mais consistente da mesma.

Uma série de Fourier é uma aproximação de uma função real como uma soma de senos e cossenos dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right].$$

A partir disso pode-se utilizar essa representação para solucionar equações diferenciais, inclusive algumas cuja solução não pertence ao conjunto das funções elementares.

## 2.3 Coeficientes de Fourier

Antes da dedução das expressões para os coeficientes da série de Fourier de uma função  $f$ , serão expostos alguns resultados.

**Definição 2.6** Uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é periódica de período  $T$  se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x$ . O menor valor de  $T$  que satisfaz essa condição é chamado de período fundamental da função.

**Exemplo 2.3** Determine o período fundamental  $T$  da função  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ .

**Solução:** Deve-se ter,

$$\text{sen} \frac{n\pi(x + T)}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \text{sen} \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Para  $x = L/2n$ , segue

$$\text{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} = \text{sen} \frac{\pi}{2} \implies \cos \frac{n\pi T}{L} = 1.$$

Usando a relação fundamental da trigonometria, obtêm-se:

$$\cos^2 \frac{n\pi T}{L} + \text{sen}^2 \frac{n\pi T}{L} = 1 \implies \text{sen}^2 \frac{n\pi T}{L} = 0 \implies \text{sen} \frac{n\pi T}{L} = 0,$$

para obter o menor valor positivo de  $T$ , faça  $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \implies T = \frac{2L}{n}$ , este é o período fundamental da função  $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Usando a relação  $\text{sen} x = \cos(x + \pi)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , segue que  $T = \frac{2L}{n}$  é o período fundamental da função  $\cos \frac{n\pi x}{L}$ .

**Definição 2.7** Uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é dita par se  $f(x) = f(-x)$ , para todos os pontos do seu domínio.

**Definição 2.8** Uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é dita ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ , para todos os pontos do seu domínio.

As proposições a seguir estabelecem resultados sobre soma e produto de funções pares e ímpares, além de integrais para essas funções em um intervalo simétrico são facilmente demonstradas e podem ser encontradas em Figueiredo (2007).

**Proposição 2.1** Com as operações usuais de soma e produto de funções, tem-se os seguintes resultados acerca de funções pares e ímpares:

- (i) A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma ímpar;

- (ii) O produto de duas funções pares é uma função par;  
 (iii) O produto de duas funções ímpares é uma função par;  
 (iv) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

**Proposição 2.2** (i) Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  uma função ímpar integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

**Proposição 2.3** Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$ , e integrável em qualquer intervalo. Então

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f,$$

onde  $a$  é um número real fixado.

Esta última proposição será usada diversas vezes nesse trabalho, sem necessariamente ser feita menção a ela.

Agora de fato, serão deduzidos os coeficientes da série de Fourier. Se uma função  $f(x)$ , pode ser escrita na forma de uma série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (2.3)$$

é de se esperar que os coeficientes,  $a_n$  e  $b_n$  possuam relação com a função  $f$  em questão. Para encontrar essas relações, suponha que a igualdade 2.3 seja válida e que a série em 2.3 convirja uniformemente.

Pelo teorema 2.3, segue que a função  $f(x)$  é contínua (e assim, pode ser integrada), entretanto como o período fundamental das funções  $\cos \frac{\pi x}{L}$  e  $\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$  é  $2L$ , a função  $f$  deve ter esse mesmo período fundamental. Pelo teorema 2.4 pode-se integrar ambos os lados da equação 2.3:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right],$$

observe que,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = 0,$$

e pela proposição 2.2

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Assim,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx \implies a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx.$$

Agora, multiplicando a igualdade 2.3 por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ , com  $m$  natural maior ou igual que 1 fixado, obtêm-se:

$$f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\frac{a_0}{2} + \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right] \quad (2.4)$$

Usando a expansão a seguir da série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right] = \left[a_1\cos\frac{\pi x}{L} + b_1\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \dots + a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right],$$

e integrando a equação 2.4 em ambos os lados de acordo com o teorema 2.4, tem-se:

$$\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\frac{a_0}{2}dx + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\left[a_1\cos\frac{\pi x}{L} + b_1\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \dots + a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]dx, \quad (2.5)$$

Note que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0.$$

Agora utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, e propriedades da integral, a equação 2.5 se torna:

$$\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = a_1 \int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}dx + b_1 \int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}dx + \dots + a_n \int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \quad (2.6)$$

como  $\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$  é uma função ímpar segue que  $\int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 0$ .

Mostra-se que:

$$\int_{-L}^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

De fato, se  $n = m \implies \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} = \cos^2\frac{m\pi x}{L}$ , e

$$\int_{-L}^L \cos^2\frac{m\pi x}{L} = \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2m\pi x}{L}\right) = L.$$

Se,  $n \neq m$ , basta usar transformação de soma em produto de funções cosseno, que é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{2}(\cos(p) + \cos(q)) = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Considerando:

$$\frac{p+q}{2} = \frac{n\pi x}{L} \text{ e } \frac{p-q}{2} = \frac{m\pi x}{L},$$

segue que

$$p = \frac{(n+m)\pi x}{L} \text{ e } q = \frac{(n-m)\pi x}{L},$$

assim,

$$\cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right],$$

e,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{L}{(n+m)\pi} \left[ \text{sen} \frac{(n+m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L + \frac{1}{2} \frac{L}{(n-m)\pi} \left[ \text{sen} \frac{(n-m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= L \left[ \frac{\text{sen}((n+m)\pi)}{(m+n)\pi} + \frac{\text{sen}((n-m)\pi)}{(n-m)\pi} \right]. \end{aligned}$$

Como  $m, n \in \mathbb{Z}$ , então  $n+m, n-m \in \mathbb{Z}$ , desta forma,  $\text{sen}((n+m)\pi) = \text{sen}((n-m)\pi) = 0$ .

Logo:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

e a equação 2.6 se torna:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = La_m.$$

De maneira análoga obtêm-se:

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = Lb_m.$$

Portanto:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 0; \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 1. \quad (2.8)$$

Agora que as expressões relativas aos coeficientes da séries de Fourier de uma função  $f$  foram deduzidas, pode-se definir melhor a esta série.

## 2.4 Séries de Fourier

**Definição 2.9** De acordo com Figueiredo (2007), dada uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podem ser calculados os coeficientes de

Fourier pelas expressões 2.7 e 2.8. E assim, pode-se escrever:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

A definição acima exige que a função  $f$  seja absolutamente integrável, ou seja, que  $\int_a^b |f(x)| dx$  exista. Para um estudo mais detalhado da necessidade dessa hipótese consulte Figueiredo (2007).

Uma pergunta surge de modo natural: A série de Fourier de  $f$  converge à  $f$ ? A resposta é nem sempre, pois existem funções tais que essa convergência não ocorre, e até casos em que a série diverge.

A seguir, será apresentado o teorema de Fourier que mostra uma condição suficiente para que a série de Fourier de  $f$  convirja a  $f$  e o primeiro teorema de convergência das séries de Fourier, que estabelece um critério para que esta série convirja uniformemente a função. Antes, porém se faz necessário observar as seguintes definições.

**Definição 2.10** De acordo com Figueiredo (2007), uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado, ou seja, dados  $a < b$ , existem  $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) = f(a_j + 0) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x) = f(a_j - 0).$$

As descontinuidades de primeira espécie também conhecidas como descontinuidades removíveis podem ser removidas alterando-se o domínio da função. Desta definição, segue que toda função contínua também é seccionalmente contínua. Além disso, toda função seccionalmente contínua integrável, também é absolutamente integrável.

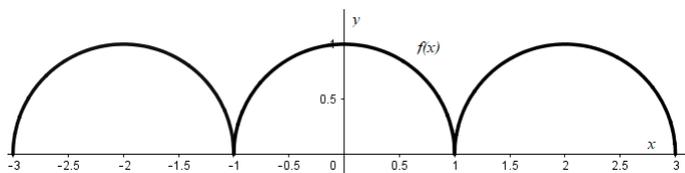
**Definição 2.11** De acordo com Figueiredo (2007), uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  será seccionalmente diferenciável se a função  $f'$  também for seccionalmente contínua.

**Exemplo 2.4** A seguinte função é contínua, mas não seccionalmente diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, \text{ se } |x| \leq 1, \\ \text{e periódica de período 2.} \end{cases}$$

**Solução:** Observe pelo gráfico abaixo que  $f$  é contínua: Entretanto, como  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\infty$  suas descontinuidades são de segunda espécie, o que implica que  $f(x)$  não é seccionalmente diferenciável.

Figura 2 – Gráfico da função  $f$ .



Fonte: Própria.

**Teorema 2.6 (Teorema de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$ , converge, em cada ponto  $x$ , para a função  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , ou seja,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right).$$

**Teorema 2.7 (Primeiro teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier)** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com derivada primeira de quadrado integrável. Então a série de Fourier de  $f$ , converge uniformemente para  $f$ .*

Em razão da necessidade de outros resultados, a demonstração desses teoremas serão aqui omitidas, o leitor interessado pode consultar (FIGUEIREDO, 2007).

**Exemplo 2.5** *Calcule a série de Fourier da função estendida  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$*

**Solução:** Define-se  $f$  fora do intervalo  $[-\pi, \pi]$  de modo que  $f(x + 2\pi) = f(x)$  para todo  $x$ . Como  $f(x)$  possui apenas descontinuidades de 1ª espécie, segue que  $f(x)$  é seccionalmente contínua. Assim, como  $f'(x) = 0, \forall x$  tem-se que  $f(x)$  é seccionalmente diferenciável, pelo teorema 2.6, a série de Fourier de  $f$  converge. Faltando apenas calcular os valores dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} dx \right) = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

Se  $n \geq 1$ , tem-se:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{\pi} \right) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \implies$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sen(nx) \Big|_0^{\pi} = 0,$$

e por outro lado,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sen(nx) dx \right) = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \implies b_{2k} = 0 \text{ e } b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a série de Fourier de  $f$  é:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \text{sen}[(2k-1)x].$$

## 2.5 Integração de série de Fourier

Se uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  for igual a sua série de Fourier, ou seja,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

então a série converge uniformemente para  $f$ . Do teorema 2.3  $f$  é contínua e assim deduz-se do teorema 2.4 que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right).$$

Entretanto o teorema a seguir mostra que mesmo se à série de Fourier de uma função  $f$  não convergir uniformemente, ou até se a série não convergir para  $f$ , ainda pode-se calcular a integral dessa função a partir da expressão acima, evidenciando assim a importância e utilidade das séries de Fourier (GUIDORIZZI, 2009).

**Teorema 2.8** *Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua (contínua por partes) e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

*sua série de Fourier. Então*

- i) *A série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de  $f$ , mais precisamente,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right).$$

- ii) *A função  $F(x) = \int_0^x [f(t) - (a_0/2)] dt$  é periódica de período  $2L$ , tem derivada  $F'$  seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier*

$$\int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-Lb_n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{La_n}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

**Demonstração:** Seja  $f(x)$  uma função real nas hipóteses do teorema. Considere  $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  definida por:

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt,$$

do teorema fundamental do cálculo,  $F'(x)$  existe para todo  $x$ . Pela definição 2.10 os limites laterais de  $f(x)$  existem em cada ponto, tem-se que os limites de  $F'(x)$  existem. Assim, para todos os pontos  $x$  onde  $f(x)$  é contínua, a função  $F'(x)$  será contínua.

Seja  $x_0$  um ponto de descontinuidade de  $f(x)$  então:

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt,$$

perceba que a integral da igualdade anterior é uma integral imprópria, deste modo:

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x).$$

Assim,  $F'(x)$  é contínua em cada ponto de descontinuidade de  $f(x)$ . Portanto,  $F'(x)$  é contínua  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Perceba que  $F(x)$  é periódica de período  $2L$ , pois:

$$\begin{aligned} F(x + 2L) - F(x) &= \int_0^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_x^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{(x+L)-L}^{(x+L)+L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \implies a_0 L = \int_{-L}^L f(t) dt$  e  $\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = a_0 L$ , e deste modo,  $F(x + 2L) - F(x) = 0$ .

Com isso mostrou-se que  $F(x)$  é contínua e periódica de período  $2L$ . Assim usando o teorema 2.6, segue:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.9)$$

com os coeficientes:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 0;$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sen \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, n \geq 1.$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) dx.$$

Resolvendo, por partes, a integral da expressão de  $A_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \left[ F(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{L}{n\pi} [F(L) \operatorname{sen}(n\pi) - F(-L) \operatorname{sen}(-n\pi)] - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L [F'(x) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} dx] \\ &= -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L [F'(x) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} dx] \\ &= \frac{-Lb_n}{n\pi}, n \geq 1. \end{aligned}$$

De modo semelhante

$$\begin{aligned} B_n &= \left[ -F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{-L}{n\pi} \left[ \cos n\pi (F(L) - F(-L)) + \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \\ &= \frac{-L}{n\pi} \left[ \cos n\pi (F((-L) + 2L) - F(-L)) + \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \\ &= \frac{La_n}{n\pi}, n \geq 1. \end{aligned}$$

Resta calcular  $A_0$ , para tanto faça  $x = 0$  na série de Fourier de  $F$ , assim tem-se:

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi 0}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi 0}{L} \right) \implies 0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \implies A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Substituindo as expressões de  $A_n$ ,  $B_n$  e  $A_0$  na equação 2.9 segue:

$$\begin{aligned} \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-Lb_n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{La_n}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \implies \\ \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-Lb_n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{La_n}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.10) \end{aligned}$$

o que demonstra o item *ii*) do teorema.

Utilizando propriedades de somatório na equação 2.10, obtêm-se:

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ b_n \frac{L}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi x}{L} \right) + a_n \left( \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \right].$$

Usando o fato que  $\int_0^x \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi n} (1 - \cos \frac{n\pi x}{L})$  e que  $\int_0^x \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi n} (\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L})$ , pode-se reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^x \cos \frac{n\pi t}{L} dt + b_n \int_0^x \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right],$$

Como as funções são todas periódicas, pode-se integra-las em qualquer intervalo, logo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

Deste teorema, pode-se concluir que a função  $f$ , cuja primitiva é  $F$ , é uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua, e portanto pode ser representada por sua série de Fourier.

## 2.6 Identidade de Parseval

A seguir será apresentado o teorema da Identidade de Parseval, entretanto, como sua demonstração requer mais resultados que fogem ao foco deste trabalho a mesma será omitida. O leitor interessado pode consultar (FIGUEIREDO, 2007).

**Teorema 2.9 (Identidade de Parseval)** *Dada uma função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , onde,  $f$ ,  $|f|$  e  $|f^2|$  são integráveis. Vale a seguinte igualdade:*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

com  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  os coeficientes da série de Fourier de  $f$ .

**Corolário 2.1** *Se  $f$  e  $g$  são funções como no teorema anterior,  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e  $c_n$  e  $d_n$  os de  $g$ , então*

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x)g(x)dx.$$

**Demonstração:** Como  $f$  e  $g$  estão nas condições do teorema da identidade de Parseval, pode utilizá-lo sobre  $f + g$ , para obter:

$$\frac{1}{2}(a_0 + c_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2] = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x) + g(x)|^2 dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x) + g(x))^2 dx,$$

desenvolvendo os termos quadráticos e usando propriedades de somatório e integral obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{2}c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + d_n^2) + a_0 c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + b_n c_n &= \int_0^{2L} f(x)^2 dx \\ &+ \int_0^{2L} g(x)^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^{2L} f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade de Parseval sobre  $f$  e  $g$ , a expressão acima se torna:

$$a_0c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n c_n) = \frac{2}{L} \int_0^{2L} f(x)g(x)dx,$$

dividindo ambos os lados da equação por 2, tem-se:

$$\frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n c_n) = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x)g(x)dx.$$



## 3 CURVAS PLANAS

Este capítulo é dedicado a uma introdução à teoria das curvas planas, serão apresentados definições e resultados como por exemplo o teorema que garante que toda curva plana pode ser reparametrizada por comprimento de arco, fato este que será necessário no capítulo subsequente. Ao fim deste capítulo será enunciado o famoso teorema do divergente, também conhecido como teorema de Stokes no plano, o qual tem como consequência direta uma proposição que será utilizada na demonstração da desigualdade isoperimétrica.

**Definição 3.1** *Uma curva contínua no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é contínua se cada função coordenada  $x, y : I \mapsto \mathbb{R}$  é uma função contínua.*

Denomina-se *traço* de  $\alpha$  o conjunto imagem dessa aplicação:

$$C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2; \quad t \in I\}$$

onde  $\alpha$  é uma parametrização de  $C$  e  $t$  é um parâmetro de  $\alpha$ .

Partindo da definição de curvas, serão caracterizadas algumas curvas especiais, tais como: curva fechada, periódica, simples, curvas de Jordan e curva regular.

**Definição 3.2** *Seja  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  uma curva.*

- *Se a curva estiver definida num intervalo fechado  $I = [a, b]$ , então os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são denominados respectivamente de ponto inicial e ponto final de  $\alpha$ .*
- *Se  $\alpha$  estiver definida num intervalo fechado  $I = [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , então a curva  $\alpha$  é dita curva fechada.*
- *A curva  $\alpha$  é dita periódica se existe  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ , tal que*

$$\alpha(t + k) = \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*O menor valor  $k_0$  que satisfaz a igualdade acima é chamado de período de  $\alpha$ . Observe que ao restringir a curva à um intervalo do tipo  $[t_0, t_0 + k_0]$ ,  $\alpha$  fica completamente determinada, já que por ser periódica ela está definida para qualquer subconjunto da reta.*

**Definição 3.3** *Seja  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  uma curva.*

- *$\alpha$  é uma curva simples se a aplicação for injetiva. Se  $\alpha$  não for injetiva, então possui um ponto duplo (ou múltiplo).*

- Uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$  é fechada e simples se  $\forall t, s \in [a, b], t \neq s$ , tem-se  $\alpha(t) \neq \alpha(s)$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Isso equivale a dizer que o único ponto duplo de  $\alpha$  ocorre nos extremos do intervalo.
- Se  $\alpha$  é fechada e simples ela é dita curva de Jordan.

**Definição 3.4** Seja uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  sua derivada é dada por  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ .

**Definição 3.5** Uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dita de classe  $C^k$  se suas funções coordenadas  $x, y : I \mapsto \mathbb{R}$  admitem derivadas contínuas até a  $k$ -ésima ordem.

**Definição 3.6** Uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dita regular se  $\alpha'(t) \neq (0, 0), \forall t \in I$ .

**Definição 3.7** Uma curva regular em todos os pontos do seu domínio é chamada de curva plana.

**Definição 3.8** Uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dita suave se e somente se cada função coordenada  $x, y : I \mapsto \mathbb{R}^2$  são funções de classe  $C^\infty$ .

As definições acima foram obtidas de Alencar e Santos (2003), e são a base para o estudo das curvas planas. Na seção seguinte será estudado o fato que uma mesma curva pode ser representada por infinitas parametrizações.

## 3.1 Reparametrização de curvas

Seja  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  uma curva suave, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e seja  $h : J \mapsto I$  uma função de classe  $C^\infty$ . Considere uma curva  $\beta : J \mapsto \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

Assim  $\beta$  é uma curva parametrizada de classe  $C^\infty$ . Considera-se então que  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$ . Aplicando a regra da cadeia tem-se:

$$\beta'(t) = [\alpha(h(t))]' = [x(h(t)), y(h(t))]' = [x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)] = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t).$$

Serão consideradas apenas as reparametrizações em que  $h'(t) \neq 0$ , ou seja, quando  $h$  é monótona. Deste modo, se  $\alpha$  é uma curva regular em  $I$  então sua reparametrização  $\beta = (\alpha \circ h)$  também será regular em  $J$ .

- Se  $h$  é crescente, então  $\beta = \alpha \circ h$  é dita uma reparametrização positiva ou própria.

- Se  $h$  é decrescente, então  $\beta = \alpha \circ h$  é dita uma *reparametrização negativa ou que reverte a orientação de  $\alpha$* .

Além disso, se  $\beta$  for uma curva fechada e estiver no sentido anti-horário é dita uma curva positivamente orientada, do contrário  $\beta$  é negativamente orientada.

Como existem infinitas reparametrizações de uma mesma curva, é sugestivo que exista uma parametrização padrão. Essa parametrização é conhecida como parametrização por comprimento de arco, e é caracterizada pelo fato da norma do vetor derivada ser sempre igual a 1.

## 3.2 Comprimento de arco

**Definição 3.9** Seja  $t_0 \in I$ , define-se o comprimento de arco de uma curva parametrizada  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , a partir do ponto  $t_0$  por:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$

Como  $\|\alpha'(t)\|$  é uma função contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|,$$

e assim a função  $L_\alpha$  é de classe  $C^1$ .

**Exemplo 3.1 (Comprimento do círculo)** - Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$$

uma parametrização de um círculo de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $R$ , então

$$\alpha'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = R.$$

Assim o comprimento de  $\alpha$  é

$$L_\alpha(t) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Definição 3.10** Uma curva seccionalmente diferenciável é uma curva  $\alpha(t)$  em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções seccionalmente diferenciáveis.

Pode-se mostrar que o comprimento de arco de uma curva seccionalmente diferenciável também é dado pela expressão:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$

**Definição 3.11** Uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se o parâmetro  $t$  difere de  $L_\alpha(t)$  apenas por uma constante:

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

**Exemplo 3.2** A curva  $\alpha : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$  está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1.$$

Consequentemente,

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t 1 ds = t - t_0.$$

**Proposição 3.1** Uma curva  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

**Demonstração:** Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então tem-se  $L_\alpha(t) = t + C$ , logo  $L'_\alpha(t) = 1$ , por outro lado  $L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$  portanto  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Note que se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$  tem-se que:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_{t_0}^t ds = t - t_0.$$

Perceba que  $L_\alpha(t)$  difere apenas por uma constante do parâmetro  $t$ , logo  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

**Teorema 3.1** Toda curva regular  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa, fixado  $t_0 \in I$  existe uma bijeção  $h : J \mapsto I$  de classe  $C^\infty$  definida em um intervalo  $J$  sobre  $I$ , com  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , de modo que a curva  $\beta : J \mapsto \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  satisfaz  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Demonstração:** Como  $\alpha$  é regular a função comprimento de arco satisfaz:

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

Deste modo  $L_\alpha$  é estritamente crescente e portanto é injetiva. Por outro lado, tem-se que  $L_\alpha$  é contínua, logo  $L_\alpha(I)$  é um intervalo  $J$  e  $L_\alpha(t_0) = 0$ . Portanto  $L_\alpha$  possui inversa diferenciável:

$$h : J \mapsto I.$$

além disso tem-se que  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , será mostrado que  $\beta$  dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Sabe-se que  $h = L_\alpha^{-1}$ , daí aplicando o teorema da inversa, obtêm-se:

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Por outro lado:

$$\beta'(s) = [(\alpha \circ h)(s)]' = \alpha'(h(s))h'(s).$$

Deste modo tem-se

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\||h'(s)| = 1.$$

■

### 3.3 Campo de Vetores ao longo de Curvas

Um campo de vetores  $X(t)$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^2$  é uma aplicação que associa a cada  $t \in I$  um vetor com origem em  $\alpha(t)$ . Como a extremidade inicial do vetor  $X(t)$  é  $\alpha(t)$  então, para determiná-lo, basta conhecer a extremidade final.

**Definição 3.12** *Um campo de vetores de classe  $C^r$  ao longo de uma curva  $\alpha$  é uma aplicação  $X : I \mapsto \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X$  é dado, em cada ponto  $\alpha(t)$ , pelo vetor de extremidades  $\alpha(t)$  e  $X(t)$ .*

**Definição 3.13** *Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada e regular, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , então  $T(t) = (x'(t), y'(t))$  é um campo de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$  e denominado campo Tangente.*

Quando  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se  $\|T(t)\| = 1$ , ou seja,  $T$  é um campo unitário.

**Definição 3.14** *O campo  $N$  dado por  $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ , também é um campo de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$  e denominado campo Normal.*

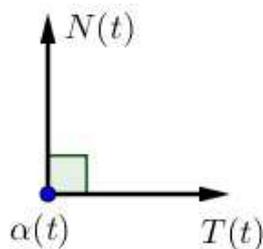
Note que, para todo  $t \in I$ , temos que  $N$  é perpendicular a  $T$ , pois:

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0.$$

como pode-se observar na figura 3, além disso o vetor  $-N(t)$  também é perpendicular a  $T$ .

Quando  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se que  $N$  é também um campo unitário.

Figura 3 – Posição relativa entre  $N$  e  $T$ .



Fonte: Própria.

### 3.4 Campos vetoriais, divergente e laplaciano

**Definição 3.15** De acordo com Telichevesky e Klaser (2016), um campo de vetores  $V$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma função que a cada ponto  $p \in \Omega$  associa um vetor  $V(p) = (x(p), y(p))$  do  $\mathbb{R}^2$ , onde  $x$  e  $y$  são funções de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ .

Um exemplo de um campo de vetores é o campo gradiente de uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  diferenciável, definido como segue:  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right)$ .

**Definição 3.16** De acordo com Telichevesky e Klaser (2016), se  $V$  é um campo de vetores definido em um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dado por,  $V(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ , o divergente de  $V$  é definido por:

$$\text{div}V = \frac{\partial X}{\partial x}(p) + \frac{\partial Y}{\partial y}(p)$$

**Exemplo 3.3** Dado o campo vetorial  $V(x, y) = (-y, x)$ , mostre que  $\text{div}V(x, y) = 0$ .

**Solução:** De fato,

$$\text{div}V = \frac{\partial X}{\partial x}(p) + \frac{\partial Y}{\partial y}(p) = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

A seguinte proposição fornece um resultado importante sobre divergente que será utilizado neste trabalho.

**Proposição 3.2** Se  $V$  e  $W$  são campos de vetores diferenciáveis em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  uma função diferenciável, então:

- i.  $\text{div}(V + W) = \text{div}V + \text{div}W$ .
- ii.  $\text{div}(fV) = f\text{div}V + \langle \nabla f, V \rangle$ .

**Demonstração:** Com  $p \in \Omega$  sejam  $V(p) = (A(p), B(p))$  e  $W = (C(p), D(p))$  vetores diferenciáveis, segue que  $V + W$  também o é, deste modo da definição de divergente, temos:

$$\operatorname{div}(V+W)(p) = \frac{\partial(A+C)}{\partial x}(p) + \frac{\partial(B+D)}{\partial y}(p) = \frac{\partial(A)}{\partial x}(p) + \frac{\partial(B)}{\partial y}(p) + \frac{\partial(C)}{\partial x}(p) + \frac{\partial(D)}{\partial y}(p)$$

e portanto,

$$\operatorname{div}(V+W) = \operatorname{div}V + \operatorname{div}W.$$

o que demonstra [i].

Seja  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , tem-se que  $(fV)(p) = ((fA)(p), (fB)(p))$ , e da definição de divergente segue:

$$\operatorname{div}(fV)(p) = \frac{\partial(fA)}{\partial x}(p) + \frac{\partial(fB)}{\partial y}(p)$$

usando a regra do produto e reordenando a soma, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fV)(p) &= f \frac{\partial(A)}{\partial x}(p) + A \frac{\partial(f)}{\partial x}(p) + f \frac{\partial(B)}{\partial y}(p) + B \frac{\partial(f)}{\partial y}(p) \implies \\ \operatorname{div}(fV)(p) &= f \left[ \frac{\partial(A)}{\partial x}(p) + \frac{\partial(B)}{\partial y}(p) \right] + A \frac{\partial(f)}{\partial x}(p) + B \frac{\partial(f)}{\partial y}(p) \implies \\ &\operatorname{div}(fV) = f \operatorname{div}V + \langle \nabla f, V \rangle. \end{aligned}$$

o que demonstra [ii]. ■

**Definição 3.17** Se  $f$  é uma função seccionalmente diferenciável, o laplaciano de  $f$  denotado por  $\Delta f$ , é definido por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Note que se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ , então  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

**Observação 3.1** Daqui em diante, será utilizado a notação  $\partial\Omega$  para denotar a fronteira de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

**Teorema 3.2 (Teorema do divergente)** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado com fronteira suave  $C$ . Se  $V$  é um campo de vetores diferenciável com derivada contínua em uma vizinhança de  $\partial\Omega$ , então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}V \, dx \, dy = \int_C \langle V, n \rangle \, ds$$

para  $n$  o campo de vetores unitário ortogonal a  $C$  que aponta na direção exterior de  $\Omega$ , onde  $ds$  denota o elemento de comprimento da curva  $C$ .

O teorema do divergente relaciona a integral de uma função, com uma integral sob a fronteira do domínio na qual ela está definida. Em outros contextos esse teorema fornece uma maneira mais fácil de se calcular áreas através de integrais.

**Observação 3.2** Uma integral de linha sob uma curva  $C$  é calculada da seguinte forma: Se  $\alpha : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$  parametriza  $C$ , e  $g : C \mapsto \mathbb{R}$  é a função a ser integrada, então

$$\int_C g(x, y) ds = \int_a^b g(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Perceba que a integral do lado direito é de uma função de uma variável real. O termo  $\|\alpha'(t)\| dt$ , que aparece no teorema do divergente, é relativo ao comprimento da curva e independe da parametrização utilizada.

A seguir será apresentado um resultado que é consequência do teorema da divergência, o qual possui uma fórmula para o cálculo da área de uma região usando integral de linha.

**Proposição 3.3** A área de uma região  $\Omega$  do plano delimitada pela curva de Jordan  $C$  pode ser calculada pela integral de linha com relação a  $x$  e  $y$ , pela seguinte expressão:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

**Demonstração:** De fato, por um lado:

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy,$$

note que  $1 = \operatorname{div} V(x, y)$ , onde  $V$  é o campo dado por

$$V(x, y) = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right).$$

Por outro lado, usando o teorema da divergência, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle ds.$$

A integral de linha da direita na igualdade acima pode ser calculada parametrizando  $\partial\Omega$  por uma curva regular  $\alpha : [0, l] \mapsto \mathbb{R}^2$ , suave e parametrizada por comprimento de arco, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , orientada no sentido anti-horário. Como a curva é regular segue que o vetor  $-n(t) = (y'(t), -x'(t))$  é o externo a curva  $\alpha$ . Neste caso, temos que o lado direito da equação acima é igual a:

$$\int_0^l \langle V(x(t), y(t)), -n(t) \rangle dt = \int_0^l \left\langle \left( \frac{x(t)}{2}, \frac{y(t)}{2} \right), (y'(t), -x'(t)) \right\rangle dt \implies$$

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^l [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx. \quad (3.1)$$

■

Perceba ainda que,

$$\int_C x dy - y dx = \int_C x dy - \int_C y dx = \int_C x dy - \left( \int_0^l y(\alpha(t)) x'(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \right),$$

Utilizando integração por partes, tem-se que:

$$\int_0^l y(\alpha(t))x'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = y(\alpha(t))x(\alpha(t))\Big|_0^l - \int_0^l x(\alpha(t))y'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = - \int_C xdy,$$

Logo,  $\int_C xdy - ydx = 2 \int_C xdy$ , substituindo em 3.1, tem-se:

$$A(\Omega) = \int_C xdy. \quad (3.2)$$

Esta última equação será um ponto importante da demonstração da desigualdade isoperimétrica, e com ela encerram-se os resultados preliminares. Estando agora o leitor apto a entender a solução do problema isoperimétrico através de séries de Fourier, e algumas de suas aplicações.

# 4 DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E APLICAÇÕES

## 4.1 Panorama histórico

É interessante conhecer a matemática em seus contextos e lendas, pois contribui para uma melhor compreensão da sua essência de solucionar problemas. Nesse contexto será exposto um pouco sobre a história do problema isoperimétrico, desde a lenda que o cerca até os avanços da matemática em relação a este problema ao longo dos anos.

Problema este que admite o seguinte enunciado: *Dado um comprimento  $L > 0$ , encontrar dentre todas as curvas fechadas do plano com esse comprimento, a que englobe maior área.* De acordo com Telichevesky e Klaser (2016), o problema pode ser reformulado com o seguinte enunciado: *Dada uma área  $A > 0$ , encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.*

### 4.1.1 A lenda de Dido

O episódio da lenda de Dido, que de acordo com Pereira et al. (2004) foi relatado pelo poeta grego Virgílio na obra Eneida, é sem dúvida um dos mais interessantes da história da matemática, pois mostra que as vezes a intuição para solucionar um problema, pode levar a descoberta de coisas importantíssimas. De acordo com Pedroso e Pereira (2013), Dido (ou Elisa) era uma princesa Fenícia do século IX antes de Cristo, da cidade de Tiro, as margens do rio mediterrâneo, nas terras que atualmente pertencem ao Líbano.

O rei Pigmaleão, irmão de Dido, assassinou o marido dela, visando tomar-lhe seus tesouros. Temendo sua morte Dido decidiu fugir em um navio, com um grande número de seguidores que também estavam insatisfeitos com o rei, em busca de criar uma nova cidade a qual levaria o nome de Cartago.

O destino final do navio foi o norte da África, também as margens do mediterrâneo, em terras que hoje pertencem a Tunísia. Chegando lá, Dido e seus seguidores compraram terras do rei local para que se estabelecessem. Entretanto, do acordo com o rei a terra que lhes pertenceria, seria apenas aquela que pudesse ser abrangida as margens do mar com a pele de um boi.

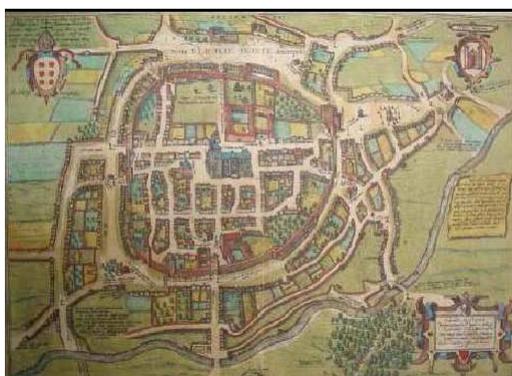
Eis que Dido, tem a ideia de cortar a pele do boi, em tiras muito finas, e amarra-las umas as outras, e com isto delimitou uma área semi-circular as margens do mediterrâneo, a qual se tornou o núcleo da cidade de Cartago. A intuição da princesa a levou a escolher o que era

justamente a curva com o menor perímetro que engloba a maior área, ou seja, ela utilizou a solução do P.I..

### 4.1.2 Estudo do P.I. ao longo dos anos

De acordo com Pedroso e Pereira (2013), as evidências de que a solução para esse problema já era conhecida, vão além da literatura com a Lenda de Dido, mas também, podem ser observadas do fato que nas cidades mais antigas os muros que as cercavam possuíam sempre o formato circular ou semicircular. Como esses muros eram feitos de pedras e exigiam grande mão-de-obra, pode-se concluir que esses formatos eram escolhidos por serem mais eficientes, e deste modo utilizava-se a solução do problema isoperimétrico.

Figura 4 – Mapa da cidade de Braga.



Fonte: Pedroso e Pereira (2013).

Sob outra perspectiva, Pedroso e Pereira (2013) afirmam que a primeira evidência de estudo e de uma demonstração para o P.I. foi feito por Pappus de Alexandria no século IV d.C., em sua coleção matemática composta por oito livros. Já de acordo com Pereira et al. (2004) uma solução aceitável para este problema com um rigor matemático só foi dada por J. Steiner no século XIX.

O P.I. talvez seja um dos poucos resultados da matemática, no qual seu estudo se mantém vivo desde o século passado até os dias atuais. Caracterizado atualmente como um problema do cálculo das variações (FIGUEIREDO, 2007), o P.I. vem sendo mais estudado nos últimos dois séculos, após a invenção do cálculo diferencial e integral.

De acordo com Telichevesky e Klaser (2016), atualmente o P.I. é objeto de estudo da geometria diferencial, onde matemáticos se debruçam afim de encontrar generalizações para este resultado, em diferentes espaços. Além de ter seu estudo ativo em diversas áreas da matemática, a exemplo de: geometria diferencial, teoria de espaços de Banach, equações diferenciais parciais dentre outros.

## 4.2 Teorema da desigualdade isoperimétrica

Nesta seção, será apresentada a demonstração da desigualdade isoperimétrica, além de alguns resultados e aplicações na resolução de problemas. Evidenciando um pouco da utilidade dessa poderosa ferramenta da matemática.

**Teorema 4.1 (Teorema da desigualdade isoperimétrica)** *A área  $A$  englobada por qualquer curva plana  $\alpha$  fechada simples, de comprimento  $L$  satisfaz a desigualdade isoperimétrica*

$$A \leq L^2/4\pi.$$

*Além disso a igualdade ocorre se, e somente se,  $\alpha$  for um círculo.*

**Demonstração:** Seja  $\alpha$  uma curva plana fechada simples de comprimento  $L$  que engloba uma área  $A$ . Nessas condições, pode-se reparametrizar  $\alpha$  por comprimento de arco, e seja essa reparametrização dada por  $\gamma(s) = (x_a(s), y_a(s))$  com  $s \in [0, L]$  e como  $\|\gamma'(s)\| = 1$  segue que  $x_a(s)^2 + y_a(s)^2 = 1$ .

Fazendo  $t = \frac{s}{L}$ , obtêm-se a parametrização  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , onde  $x(t) = x_a(Lt)$  e  $y(t) = y_a(Lt)$  e deste modo:

$$x(t) = x_a(Lt) \implies x'(t) = Lx'_a(Lt) \text{ e } y(t) = y_a(Lt) \implies y'(t) = Ly'_a(Lt)$$

e portanto,

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = L^2. \quad (4.1)$$

Como  $\alpha(t)$  é uma curva fechada simples, pode-se considerar a extensão das funções  $x(t)$  e  $y(t)$ , sendo estas periódicas de período 1, e seccionalmente diferenciáveis. Usando o teorema de Fourier 2.6 para as funções  $x(t)$  e  $y(t)$ , tem-se:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{1/2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{1/2}\right) \right],$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{1/2}\right) + d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{1/2}\right) \right],$$

Como as funções  $x'(t)$  e  $y'(t)$  são seccionalmente contínuas segue que são de quadrado integráveis, assim pelo teorema 2.7 a série converge uniformemente e assim pelo teorema 2.5 tem-se que:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-a_n \operatorname{sen}2n\pi t + b_n \cos2n\pi t)$$

e

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(-c_n \operatorname{sen}2n\pi t + d_n \cos2n\pi t)$$

Por outro lado pelo teorema 2.8 de integração das séries de Fourier tem-se a garantia que  $x'(t)$  e  $y'(t)$  tem período 1 e são seccionalmente contínuas, além disso como  $x'(t)$  e  $y'(t)$  são integráveis segue que  $|x'(t)|^2$  e  $|y'(t)|^2$  são integráveis, aliás, pode-se considerar uma partição do intervalo  $[0, 1]$  tal que nessas partições  $x'(t)$  seja sempre contínua maior que 0 ou menor que zero, donde se conclui que  $|x'(t)|$  é integrável pois é periódica de período 1, analogamente  $|y'(t)|$  é integrável. Assim  $x'$  e  $y'$  podem ser representadas por sua série de Fourier e satisfazem as hipóteses do teorema da identidade de Parseval.

Considere  $A_n = 2n\pi b_n$  e  $B_n = -2n\pi a_n$ , e  $A_0 = 0$ , deste modo:

$$x'(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2n\pi t + B_n \sin 2n\pi t)$$

e assim pelo teorema 2.9 da identidade de Parseval, sobre  $x'$ , tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) = 2 \int_{-1/2}^{1/2} |x'(t)|^2 dt \implies \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt$$

e de maneira análoga, observa-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (c_n^2 + d_n^2) = 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt.$$

Somando as duas igualdades, e pela equação 4.1, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) &= \int_0^1 (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt = \int_0^1 L^2 dt = L^2 \implies \\ L^2 &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

Da proposição 3.3 que decorre do teorema do divergente, existe a seguinte igualdade:

$$A = \int_0^1 x(t)y'(t) dt$$

considerando,

$$y'(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 2n\pi t + D_n \sin 2n\pi t),$$

com  $C_0 = 0$ ,  $C_n = d_n 2n\pi$  e  $D_n = -c_n 2n\pi$  e a função  $x(t)$  com sua respectiva série de Fourier, pode-se usar o corolário 2.1, do teorema da identidade de Parseval, donde segue a expressão:

$$2 \int_0^1 x(t)y'(t) dt = \frac{a_0 C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n C_n + b_n D_n) \implies \int_0^1 x(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (a_n d_n - b_n c_n).$$

e portanto:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (a_n d_n - b_n c_n).$$

multiplicando a equação anterior por  $-4\pi$ , obtêm-se:

$$-4\pi A = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n d_n - b_n c_n) = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2nb_n c_n - 2na_n d_n). \quad (4.3)$$

Somando as equações 4.2 e 4.3, tem-se:

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 + 2nb_n c_n - 2na_n d_n.$$

Adicionando e subtraindo  $c_n^2$  e  $d_n^2$  dentro da série do lado direito da equação acima, e reagrupando seus termos:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 - 2na_n d_n + d_n^2) + (n^2 b_n^2 + 2nb_n c_n + c_n^2) + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1) \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Conclui-se que,  $L^2 - 4\pi A \geq 0$  o que demonstra a primeira parte do teorema. Restando apenas mostrar que a igualdade ocorre apenas se, e somente se, a curva em questão é o círculo. Se a curva  $\alpha$  for um círculo,  $L = 2\pi r \implies L^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi A$ . Suponha então que valha a igualdade  $L^2 = -4\pi A$ , logo,  $2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1) = 0$ , daí conclui-se que para  $n > 1$ ,  $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$  e para  $n = 1$ ,  $b_1 = -c_1$  e  $a_1 = d_1$ , e deste modo, as séries de Fourier de  $x(t)$  e  $y(t)$  se tornam:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d\cos(2\pi t) - c\sen(2\pi t) \text{ e } y(t) = \frac{c_0}{2} + c\cos(2\pi t) + d\sen(2\pi t),$$

podemos reescrever  $x(t)$  e  $y(t)$ , da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \langle (d, -c)(\cos(2\pi t), \sen(2\pi t)) \rangle \text{ e } y(t) = \frac{c_0}{2} + \langle (d, c)(\sen(2\pi t), \cos(2\pi t)) \rangle,$$

sabe-se da álgebra vetorial, que dados dois vetores  $u$  e  $v$  o  $\langle u, v \rangle = |u||v|\cos\theta$  onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ , usando este fato as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  se tornam:

$$x(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{d^2 + c^2}\cos\theta \text{ e } y(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sqrt{d^2 + c^2}\sen\theta$$

pois, pondo  $\cos(2\pi t) = p$  e  $\sen(2\pi t) = q$  tem-se:

$$\langle (d, -c)(p, q) \rangle^2 = (d^2 + c^2)(p^2 + q^2)\cos^2\theta = d^2 p^2 - 2cdpq + c^2 q^2$$

$$\langle (d, c)(q, p) \rangle^2 = (d^2 + c^2)(p^2 + q^2)\cos^2\theta' = d^2 q^2 + 2cdpq + c^2 p^2$$

somando as duas equações acima, obtêm-se:

$$(d^2 + c^2)(p^2 + q^2)(\cos^2\theta + \cos^2\theta') = (d^2 + c^2)(p^2 + q^2) \implies \cos^2\theta + \cos^2\theta' = 1 \implies \cos\theta' = \sen\theta.$$

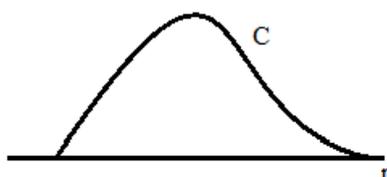
Deste modo a curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  representa um círculo de centro  $(a_0/2, c_0/2)$  e raio  $\sqrt{d^2 + c^2}$  o que completa a demonstração do teorema. ■

A seguir, serão apresentadas duas proposições que mostram aplicações diretas da desigualdade isoperimétrica em sua solução. As proposições abaixo foram obtidas de Araújo (2011).

**Proposição 4.1** *São dadas uma reta  $r$  no plano e uma corda flexível  $C$  de comprimento  $L$ . Pousando  $C$  no plano de forma a que suas extremidades estejam sobre  $r$ , obtemos uma figura limitada por  $r$  e por  $C$  e cuja área depende da forma que dermos à corda. Mostre que a figura de área máxima entre todas as assim obtidas é um semicírculo com base em  $r$ .*

**Demonstração:** Considere a reta  $r$  como o eixo de rotação, e considere a projeção  $C'$  da figura limitada por  $r$  e  $C$  no semiplano oposto. Seja  $\alpha$  a curva fechada formada por  $C \cup C'$ .

Figura 5 – Esboço.



Fonte: Própria.

Suponha por contradição que a figura 5 formada por  $C$  e  $r$  não seja o semi-círculo. Logo,  $C \cup C'$  não é um círculo, o que contradiz o teorema da desigualdade isoperimétrica. ■

A proposição 4.1, mostra que a intuição de Dido a conduziu a escolher de fato a melhor curva possível as margens do mediterrâneo.

**Proposição 4.2** *Dados dois pontos  $p$  e  $q$  no plano e uma corda flexível  $C$  de comprimento  $L > |p - q|$ , determine a figura de maior área entre aquelas limitadas por  $C$  e pelo segmento de reta  $pq$ .*

**Demonstração:** Será mostrado que a curva obtida com as condições estabelecidas é o arco de círculo.

Construa uma curva  $C_0$  com comprimento fixo  $l_0$  tal que a curva  $C \cup C_0$  seja uma curva fechada, simples e regular. Pelo teorema da desigualdade isoperimétrica, a área máxima que a curva  $S$  pode delimitar é quando  $S = C \cup C_0$  for uma circunferência. Logo a curva  $C$  estabelecida é um arco de círculo. ■

Além das proposições 4.1 e 4.2, é consequência imediata do teorema da desigualdade isoperimétrica que dados  $n$  segmentos de reta de mesmo comprimento, o polígono que engloba

maior área delimitado por estes segmentos é o polígono regular de  $n$  lados. A demonstração para esse resultado pode ser encontrada em Moreto (2013).

### 4.3 Aplicações do P.I.

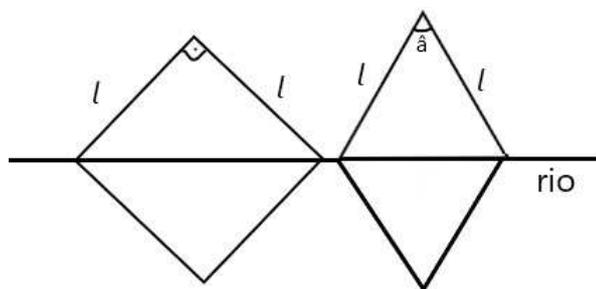
A seguir serão discutidas duas situações cotidianas, para as quais o caso da desigualdade isoperimétrica no  $\mathbb{R}^2$  se mostra uma ferramenta poderosa em sua solução.

#### 4.3.1 Construção de cercas com $n$ mourões

Um fazendeiro possui em suas terras um rio, e dispõe de  $n$  mourões para fazer um cercado na sua margem, de modo que aproveite a maior área. Além disso, sabe-se que a distância entre cada mourão deve ser sempre igual a  $l$ , pois ao contrário compromete-se a qualidade da cerca.

**Solução:** Inicialmente deve-se colocar dois mourões nas margens do rio. Para  $n = 3$ , o problema possui solução possível apenas para triângulos, ou seja, pode-se construir triângulos variando o ângulo entre os mourões e respeitando a desigualdade triangular. Entretanto se considerarmos a projeção no plano oposto, teremos polígonos com 4 lados. Como pode-se ver na imagem abaixo:

Figura 6 – Cerca com 3 mourões.



Fonte: própria.

O polígono com 4 lados de mesmo comprimento que engloba maior área, é o quadrado, que é obtido justamente quando o ângulo considerado entre os lados é de noventa graus. Portanto, a melhor opção para o fazendeiro construir a cerca com 3 mourões é um triângulo retângulo isósceles.

Pode-se realizar testes para outros números de mourões, por exemplo utilizando 4 mourões, a melhor opção seria construir metade de um hexágono. Deste modo conjectura-se que, com  $n$  mourões o maior cercado é formado pela metade de um polígono regular de  $2(n - 1)$  lados. Essa conjectura, será provada a seguir.

Seja uma reta  $r$  representando a margem do rio, construam-se os polígonos de  $n$  lados com 2 mourões fixados sobre a reta  $r$ . Considere a reflexão desses polígonos no semiplano oposto a reta  $r$ , donde que a união dos dois polígonos de  $n$  lados forma um polígono com  $2(n - 1)$  lados. Entretanto, sabe-se que o polígono de  $2(n - 1)$  lados de mesmo comprimento que engloba maior área é o polígono regular, portanto o melhor formato para o cercado é construir metade de um polígono regular de  $2(n - 1)$  lados.

Esse resultado está intimamente ligado ao teorema da desigualdade isoperimétrica, pois quando o número de lados de um polígono regular tende pra infinito, sua área se torna suficientemente próxima da área de um círculo. Ou seja, para um número suficientemente grande de lados, a solução é o mesmo resultado obtido na proposição 4.1. Evidenciando assim a influência do teorema nessa situação problema.

A situação acima descrita, foi baseada na apresentada por Silva (2013).

### 4.3.2 Embalagens de alimentos

Uma certa empresa deseja construir uma embalagem para seus produtos sob as seguintes condições:

- A base e a tampa dessa embalagem devem ser planas e possuir uma determinada área  $A$ , de modo a facilitar seu transporte e acomodação nas prateleiras;
- A ligação entre a base e a tampa devem ser feitas por um conjunto de retas perpendiculares a base, visando também facilitar seu manuseio.

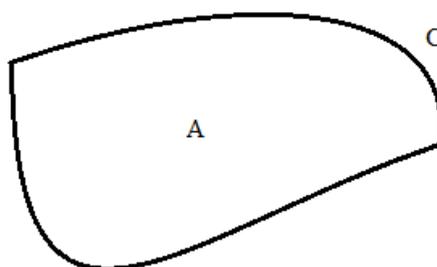
A empresa visa gastar o mínimo possível com material para a construção da embalagem, deste modo qual formato terá a embalagem para que atenda a essas condições?

**Solução:** A primeira afirmação pode ser entendida como, a base e a tampa do produto estão contidos em planos paralelos  $r$  e  $s$ . Usando o fato da base e a tampa estarem ligados por retas tem-se que a intersecção da embalagem com um plano qualquer  $s'$ , paralelo ao plano  $r$ , é uma curva igual á base da embalagem.

Perceba que, área total do material gasto será a soma da área lateral com a área da base e da tampa. Dessa forma como a tampa e a base possuem área fixada  $A$  e a área lateral é determinada pelo produto do comprimento da curva  $C$  que engloba a área  $A$  multiplicado pela altura do produto.

Assim, para minimizar a área superficial da embalagem, deve-se selecionar para a figura 7 dentre todas as curvas do plano que englobam a área  $A$  a que possuir o menor comprimento  $l$ . Pelo teorema da desigualdade isoperimétrica, conclui-se que a curva desejada é o círculo. Pelo fato que a curva se repete em cada plano paralelo a base, segue que a embalagem possuirá um formato cilíndrico.

Figura 7 – Curva qualquer que engloba a área A



Fonte: Própria.

Analisando a situação acima, pode-se concluir que as indústrias de produção de embalagens fazem uso desse resultado, visto que, o formato cilíndrico é um dos mais utilizados para embalagens de diversos produtos a exemplo da figura 8, que apresenta embalagens que são usadas para armazenar milho, ervilha, leite condensado dentre outros produtos. Obviamente, esse formato possui também outras vantagens, uma das principais é a eficiência para o transporte de líquidos.

Figura 8 – Exemplos de embalagens cilíndricas



Fonte: Google imagens.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema isoperimétrico é um tema que se relaciona com a maximização de áreas, sendo também estudado sob outras perspectivas na geometria diferencial. Nesta pesquisa foi apresentada uma demonstração da solução desse problema no plano, usando séries de Fourier e elementos da teoria das curvas planas, e além disso, expostas aplicações do mesmo.

Pode-se perceber que esse tema é um instrumento de ligação entre diversos níveis e campos da matemática e que possui aplicações em situações cotidianas, tornando-se interessante principalmente para matemáticos em formação. Na elaboração desse trabalho notou-se a direta relação entre o cálculo diferencial e geometria plana, bem como a aplicabilidade de conceitos avançados da matemática em algumas situações corriqueiras, contribuindo de forma muito positiva para a formação enquanto professor de matemática.

Esse problema, no plano, apresenta-se como uma conexão entre diversos ambientes de estudo da matemática. Sua solução no  $\mathbb{R}^3$  ou o estudo sobre em quais superfícies a curva com menor perímetro que engloba uma área  $A$  ainda é um círculo, podem se tornar objetivo de futuros trabalhos.

# REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H., SANTOS, W. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003, v. 1. 222p.
- ARAÚJO, J. G. S. **A desigualdade isoperimétrica**. Campina Grande: 2011, p. 50. Trabalho de conclusão de curso(Bacharelado em matemática), Centro de ciências e tecnologia, Universidade federal de Campina grande, PB, Brasil.
- CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 6ªed Rio de Janeiro: SBM(2014).
- FIGUEIREDO, D. G., **Análise de fourier e equações diferenciais parciais**. 4ªed Rio de Janeiro: IMPA (2007).
- GUIDORIZZI, L. H., **Um curso de cálculo**.vol.04, 5ªed Rio de Janeiro: LTC, (2002).
- LIMA, E. L., **Análise real**. vol.01, 10ªed Rio de Janeiro: IMPA (2010).
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. vol. 1, 12ª ed. Rio de janeiro, IMPA(2008).
- LIMBERGER, R.; **Abordagens do problema isoperimétrico**. Campinas: 2011. Dissertação de mestrado (Mestrado profissional), Universidade estadual de Campinas, SP, Brasil.
- MORETO, F. A. **O Problema Isoperimétrico e Aplicações para o Ensino Médio**. Rio Claro: 2013, p. 80. Dissertação de mestrado (Mestrado profissional em matemática em rede nacional - PROFMAT), Universidade federal de Rio Claro, SP, Brasil.
- PEDROSO, H. A.; PEREIRA, J. C. P. Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. Bauru, v. 2, n. 1, p. 32-48, jul. 2013.
- PEREIRA, A. L. POSSANI, C.; TEREZINHA, N.; KRIPKA, R. M. L. Qual o maior terreno que sua cerca pode delimitar?. **Revista do professor de matemática**, vol.54, 2004.
- SILVA, C. C. A. **A desigualdade isoperimétrica**. João Pessoa: 2013, p. 80. Dissertação de mestrado(Mestrado profissional em matemática em rede nacional - PROFMAT), Universidade federal de João Pessoa, PB, Brasil.
- TELICHEVESKY, M.; KLASER, P. **O problema isoperimétrico**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016, 66p.