



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CAMPUS II
PPGEM - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENG. MECÂNICA



PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DIFUSÃO EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS PROLATOS:
UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA**

VITAL ARAÚJO BARBOSA DE OLIVEIRA

CAMPINA GRANDE - PB

2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DIFUSÃO EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS PROLATOS:
UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Vital Araújo Barbosa de Oliveira

Campina Grande, Pb

2001

Vital Araújo Barbosa de Oliveira

**DIFUSÃO EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS PROLATOS:
UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima

Campina Grande, Pb

2001

ii

CGSC_Dis



048d Oliveira, Vital Araújo Barbosa de.
Difusão em sólidos esferoidais prolatos : uma solução analítica / Vital Araújo Barbosa de Oliveira. - Campina Grande, 2001.
74 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2001.
"Orientação : Prof. Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima".
Referências.

1. Difusão de Transferência de Massa. 2. Esferóide Prolato. 3. Modelagem. 4. Solução Formal. 5. Secagem. 6. Dissertação - Engenharia Mecânica. I. Lima, Antônio Gilson Barbosa de. II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título

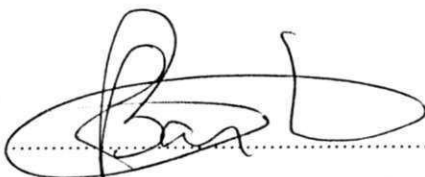
CDU 621:554.034(043)

VITAL ARAÚJO BARBOSA DE OLIVEIRA

**DIFUSÃO EM CORPOS ESFEROIDAIS PROLATOS:
UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA**

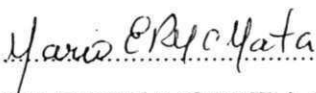
DISSERTAÇÃO APROVADA EM 23/07/2001.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. ANTONIO GILSON BARBOSA DE LIMA

ORIENTADOR



Prof. Dr. MÁRIO EDUARDO RANGEL MOREIRA CAVALCANTI MATA

MEMBRO



Prof. Dr. CELSO ROSENDO BEZERRA FILHO

MEMBRO

CAMPINA GRANDE – PB

JULHO/2001

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Luis Barbosa de Oliveira e Terezinha Anselmo de Oliveira, as minhas irmãs, e com amor e carinho, a minha esposa Adriana de Almeida Silva e a minha amada filha Vallesk Stephany Almeida de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Ao Arquiteto do Universo que sempre nos dá as coordenadas certas para alcançar o objetivo desejado.

Ao meu querido amigo e Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, pela dedicação, estímulo e incentivo. Sem sua orientação constante, este trabalho não teria se concretizado. Meu muito obrigado.

Ao colega João Evangelista, pelo apoio e auxílio no transcorrer desta pesquisa.

Ao DEM/CCT/UFPB/CAMPUS II, pelo suporte físico.

Aos professores do DEM/CCT/UFP/CAMPUS II, pelos ensinamentos.

À Márcia pela dedicação e atenção aos pós-graduandos.

Aos demais colegas de mestrado e doutorado, pelos auxílios e apoio, em especial a Jefferson, Rossini (in memorian) e Vinícius.

E a todos que colaboraram direta ou indiretamente para conclusão deste trabalho.

“Uma vida humana sem busca, não é digna
de ser vivida”.

Socrátes

SUMÁRIO

1 Introdução	01
2 Revisão da Literatura	03
2.1 O Processo de secagem	03
2.1.1 Considerações gerais	03
2.1.2 Período de taxa de secagem e aquecimento do sólido	04
2.1.3 Teores de umidade	06
2.1.4 Mecanismos de transporte de umidade	06
2.1.5 Teorias de secagem	07
2.1.6 Encolhimento	10
2.2 Modelagem de secagem	12
2.2.1 Modelos difusivos	13
2.2.2 Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis	16
2.2.3 Modelos baseados numa análise concentrada	17
3 Modelagem matemática	19
3.1 A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esféricas prolatas	19
3.2 Solução analítica da equação de difusão	26
4 Resultados e discussões	39
5 Conclusões e sugestões	52
5.1 Conclusões	52
5.2 Sugestões para trabalhos futuros	53
Referências bibliográficas	54
Anexos	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Cinética e aquecimento do sólido durante a secagem	05
Figura 3.1 Características de um esferóide prolato sólido	20
Figura 3.2 Sistema de coordenadas esferoidais prolato	22
Figura 4.1 Comparação entre os teores de umidade médios obtidos pelo método proposto, os numéricos reportados por Lima (1999), para um sólido com $L_2/L_1=2,0$ e os analíticos apresentados por Luikov (1968), para uma esfera ($L_2/L_1=1,0$), para $Bi=1,0$.	40
Figura 4.2 Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $Bi=1,0$.	42
Figura 4.3 Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$), para vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e $Bi=1,0$.	42
Figura 4.4a As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para $Fo=0,122$ e $Bi=1,0$.	43
Figura 4.4b As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para $Fo=0,366$ e $Bi=1,0$.	44
Figura 4.4c As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para $Fo=0,732$ e $Bi=1,0$.	45
Figura 4.5 Teor de umidade médio adimensional em função do Fo , para vários esferóides prolatos e Bi infinito.	46
Figura 4.6 Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários Fo , $L_2/L_1=1,5$ e Bi infinito.	47
Figura 4.7 Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários Fo , $L_2/L_1=1,5$ e Bi infinito.	47
Figura 4.8 Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e Bi infinito.	48
Figura 4.9 Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários Fo , $L_2/L_1=2,0$ e Bi infinito.	48
Figura 4.10 As linhas de iso concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=1,5$, para $Fo=0,122$ e Bi infinito.	49
Figura 4.11 As linhas de iso concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=1,5$, para $Fo=0,122$ e Bi infinito.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Comparação entre os coeficientes b_n e $d_{n,m}$ obtidos neste trabalho e os reportados na literatura.

39

NOMENCLATURA

Letras Latinas

a', b', c', d', e', f' - coeficiente das Equações 3.9a-f	[-]
A_{mk} - constante da Equação 3.51	[-]
b - autovalor das Equações 3.28 e 3.29	[-]
Bi - número de Biot de transferência de massa	[-]
c_p - calor específico	[J / kg / K]
c - constante da Equação 3.24	[-]
D - coeficiente de difusão	[m ² / s]
d - coeficiente esferoidal	[-]
$dM/dt, \partial M/\partial t$ - taxa de difusão	[kg/kg / s]
f, g_m, g_n funções de variáveis	[-]
h_m - coeficiente de transferência de massa	[m / s]
J - jacobiano da transformação	[-]
$j(\xi)$ - função de Bessel esférica	[-]
k - condutividade térmica	[W / m / .K]
L - comprimento focal	[m]
L_1, L_2 - dimensões do esferóide prolato	[m]
M - teor de umidade (base seca ou base úmida)	[kg / kg]
m - massa	[kg]
M^* - razão de umidade	[kg / kg]
\bar{M} - teor de umidade médio	[kg / kg]
\bar{M}^* - razão de umidade médio	[kg / kg]
P^ϕ - termo de pressão	[-]
$P(\eta)$ - função de Legendre	[-]
S - área superficial do sólido	[m ²]
S^ϕ - termo fonte	[-]
t - tempo	[s]
T - temperatura do sólido	[°C]
t^* - tempo adimensional de transferência de massa	[-]
$\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$ - coeficientes métricos	[-]
U, U_1, U_2 - funções da constante de separação	[-]
u, v, w - componentes do vetor velocidade nas direções x, y e z respectivamente	[m / s]
UR - umidade relativa	[%]
V - volume	[m ³]
x, y, z - coordenadas cartesianas	[m]

Letras Gregas

α_{ij} - parâmetros	[-]
α - difusividade térmica	[m ² / s]
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ - parâmetros da Equação 3.36	[-]
χ - função esferoidal radial	[-]
$\hat{\delta}, \hat{\phi}$ - parâmetros das equações 3.41 e 3.42	[-]
Φ - função	[-]
Γ^Φ - propriedade do material	[-]
η - coordenada angular ($\perp x$)	[-]
λ - função esferoidal angular	[-]
μ, ϕ, ω - coordenadas esferoidais prolato	[-]
ρ - densidade (massa específica)	[kg / m ³]
ξ - coordenada radial	[-]
ξ_0, η_0, ω_0 - valores constantes das coordenadas esferoidais	[-]
ψ - função de posição	[-]
ζ - coordenada angular ($\perp z$)	[-]
∇ - operador nabla	[-]

Superescritos

* - adimensional

Subscritos

a - água

e - equilíbrio

n, m, r, k, p - números inteiros

o - Inicial

p - produto úmido

s - seco

Abreviações

exp - exponencial

RESUMO

Oliveira, Vital Araújo Barbosa de, Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica. Campina Grande, 2001. 87 p. (Dissertação) Mestrado em Engenharia Mecânica – Universidade Federal da Paraíba.

Uma solução analítica da equação de difusão para descrever a transferência de massa dentro de esferóides prolatos considerando coeficiente de difusão constante e condição de contorno do tipo convectiva, é apresentada. A equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidais prolato é usada para um caso bidimensional. A solução é obtida usando o método de separação de variáveis. A solução formal é aplicada para prever o teor de umidade médio e a distribuição do teor de umidade de esferóides prolatos (elipsóides de revolução), durante o processo de secagem. Os efeitos dos números de Fourier e Biot e da razão de aspecto na taxa de secagem, teor de umidade médio e distribuição do teor de umidade, durante o processo, são apresentados e analisados. Para investigar o efeito da razão de aspecto, diferentes resultados do teor de umidade médio, são mostrados. Os resultados obtidos são consistentes e o modelo apresentado pode ser utilizado para resolver problemas de difusão tais como secagem, umidificação, aquecimento e resfriamentos de sólidos com forma que variam de uma esfera até um cilindro infinito, inclusive esferóides prolatos.

Palavras-chave

Difusão, esferóide prolato, modelagem, solução formal, secagem.

ABSTRACT

Oliveira, Vital Araújo Barbosa de, Diffusion in prolate spheroidal solids: an analytical solution.
Campina Grande, 2001. 87 p. (Dissertação) Mestrado em Engenharia Mecânica – Universidade
Federal da Paraíba.

The analytical solution of the diffusion equation to predict the mass transfer inside the prolate spheroids considering constant diffusion coefficient and convective boundary condition is presented. The diffusion equation in the prolate spheroidal coordinate systems was obtained by the method of separation of variables. The formal solution was applied to predict the average moisture content and moisture content distribution of prolate spheroidal solids (ellipsoids of revolution) during drying process. The effects of the Fourier and Biot numbers and the aspect ratio on the drying rate, average moisture content and moisture content distribution during the process are presented and analyzed. To investigate the effect of the aspect ratio different results of the average moisture content are shown. The results are physically consistent and the model presented can be utilized to solve diffusion problem such as: drying, wetting, heating and cooling of the solids with Geometries that changes from sphere to infinite cylinder including prolate spheroid.

Key words:

Diffusion, prolate spheroid, modelling, formal solution, drying.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O processo que envolve fenômenos de transferência simultânea de calor, massa, quantidade de movimento e encolhimento é denominado de “secagem”. A secagem é um dos processos utilizados em indústrias de alimentos e químicas para manter a qualidade dos produtos biológicos ou químicos durante seu armazenamento.

O processo de secagem é muito complexo envolvendo vários fenômenos físicos. Para sua predição, existe a necessidade de se gerar modelos matemáticos que simule a secagem com grande realismo físico. Para que isto ocorra, é importante inserir no modelo de secagem, o máximo de informações, tais como: mecanismo de transporte de calor e umidade dentro do sólido, coeficiente de difusão constante ou variável, encolhimento, transferência de calor e massa acoplados, condições ambientais externas próximo do sólido, entre outros, tornando possível relacionar corretamente o modelo com a situação real e com isto obter valores confiáveis da variável de interesse.

Várias teorias e modelos são usados para descrever a secagem de produtos higroscópicos. Várias soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão para vários casos, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante ou do tipo convectiva, para várias geometrias (cilindros, paralelepípedos e esferas), podem ser encontradas na literatura. No entanto poucos trabalhos enfocam as geometrias esferoidais (oblata e prolata). Sólidos com formas elipsoidais são muito comuns na natureza, por exemplo, a banana, o casulo do bicho-da-seda, o trigo, a soja, a laranja, tem forma aproxima da a de um esferóide prolato,

enquanto que a lentilha, e as sementes de vários produtos têm forma aproximadamente de esferóide oblato. Sendo assim, torna-se importante estudar estes sólidos quando submetido a processos de difusão.

O presente estudo constitui uma abordagem analítica do processo de difusão (secagem, umidificação, esfriamento ou aquecimento) em corpos esferoidais prolatos. O autor se propõe em síntese, alcançar os seguintes objetivos:

- Apresentar uma solução analítica para o problema de difusão transiente em corpos com geometria esferoidal prolata, baseando-se no modelo difusivo.
- Simular a distribuição do teor de umidade no interior do corpo esferoidal prolato e suas respectivas cinéticas de difusão.

CAPÍTULO II

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 O Processo de secagem

2.1.1 Considerações gerais

Um dos melhores processos utilizados, quando se quer conservar um produto biológico ou químico por um determinado tempo, para diversas situações tem sido a secagem ou desidratação dos mesmos, que consiste na separação parcial de um líquido (geralmente água) da matéria sólida. Pode também ser explicado como um processo de transferência de calor e massa, consistindo na remoção de parte da umidade contida no interior do produto por meio de evaporação (Fortes 1982).

A preservação de alguns alimentos pela evaporação da umidade permite minimizar o crescimento microbiano e previne o desenvolvimento da maioria das reações bioquímicas que acontece quando a umidade esta presente. Portanto, essas operações têm tido um grande avanço nas indústrias de alimento e química, como também na estocagem de determinados produtos. Durante o processo de secagem, os sólidos sofrem variações nas suas características químicas, físicas e biológicas, que dependendo da intensidade do efeito, pode ocasionar sua perda ou inutiliza-los para certas funções. Por exemplo, no caso de grãos, as características alimentícias podem ser afetadas e no caso das sementes a sua característica germinativa.

A secagem convectiva diferencia-se de outras técnicas de separação, tal como a secagem osmótica, entre outras, pela maneira de como a água é retirada do sólido. Na secagem convectiva, a retirada de moléculas de água se dá pela movimentação do líquido ou vapor de H₂O, graças a uma diferença de pressão parcial do vapor d' água entre a superfície do produto e o ar que o envolve. Em relação aos alimentos, a remoção de água do material é feita até que não afete de forma violenta suas características físicas, químicas e biológicas, como também suas funções alimentícias.

Na maioria das indústrias, atualmente, se utiliza no processo de secagem o ar como agente de secagem, este é composto, na sua maioria, por moléculas de oxigênio e nitrogênio, no entanto este mesmo ar pode provocar mudanças nas funções organolépticas do produto, no caso específico das sementes durante o processo de secagem o aparecimento de fissuras e a perda parcial da função germinativa acontecem, devido à existência de tensões termo-mecânicas sobre o material. Essas tensões podem ser minimizadas se for feita uma análise da distribuição do teor de umidade e da temperatura no interior do sólido. Portanto, para preservar ao máximo a qualidade final do produto, é necessário um estudo minucioso sobre as propriedades termodinâmicas do ar e o mecanismo de transferência de água do interior do material para a superfície.

2.1.2 Períodos de taxa de secagem e aquecimento do sólido

Diversos produtos biológicos, durante a secagem individual ou em camada delgada após atingir o ponto de maturação fisiológica, apresentam uma perda de umidade a uma taxa constante no período inicial de secagem, seguido por um período de secagem a uma taxa decrescente, conforme ilustra a Figura 2.1b.

A secagem a taxa constante pode ser observada em produtos nos quais a resistência interna ao transporte de umidade é menor do que a resistência externa à remoção do vapor de água na superfície do produto para o meio ambiente. Já durante o período de secagem a taxa decrescente,

a superfície do produto não se encontra coberta por uma camada fina de umidade, porque a resistência interna ao transporte de água se torna maior do que a resistência externa.

A Figura 2.1c, apresenta o comportamento da temperatura do sólido durante o processo de secagem o período (muito curto) que antecede o estágio de secagem à taxa constante, é denominado de período de acomodação, onde a temperatura do sólido alcança a temperatura de bulbo úmido do ar de secagem. Esta temperatura mantém-se constante durante o período à taxa constante. Quando o sólido atinge o período de taxa decrescente, sua temperatura começa a aumentar até atingir a temperatura do ar de secagem.

2.1.3 Teores de umidade

No processo de secagem, o material pode conter ou atingir os seguintes teores de umidade: teor de umidade inicial, teor de umidade crítico e teor de umidade de equilíbrio. O teor de umidade inicial consiste no valor da umidade no material no princípio do processo de secagem. Quando acontece uma mudança na taxa de secagem de constante para decrescente, têm-se o teor de umidade crítico. O teor de umidade de equilíbrio se dá quando o material está em equilíbrio com o ar. Neste caso não existe troca de umidade entre eles, e o teor de umidade dentro do material se uniformiza. O teor de umidade de um produto é representado de duas formas:

- Teor de umidade em base seca

$$M = m_a / m_s \quad (2.1)$$

onde M é o teor de umidade na base seca, m_a é a massa da água contida no produto e m_s é a massa do produto totalmente seco.

- Teor de umidade em base úmida

$$M = m_a / m \quad (2.2)$$

onde $m = m_a + m_s$ é a massa total do sólido em qualquer tempo durante o processo de secagem.

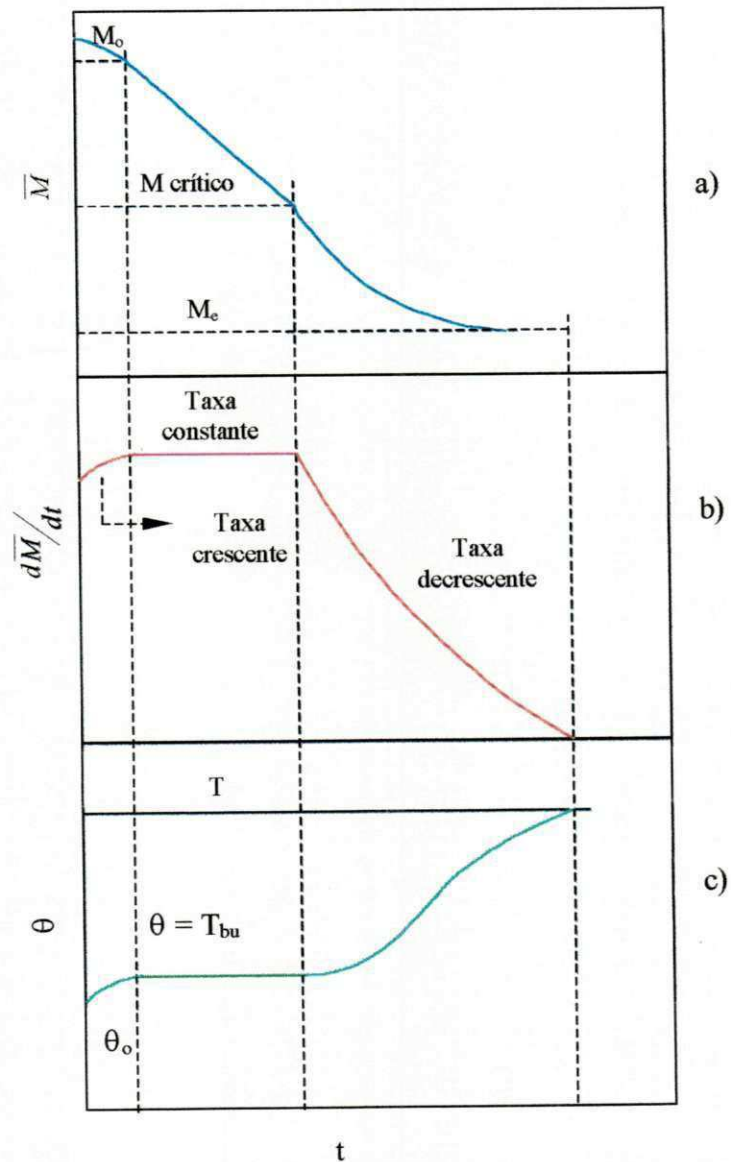


Figura 2.1 Cinética e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.

(Adaptado de Júnior et al, 1999)

2.1.4 Mecanismos de transporte de umidade

O fenômeno de migração de umidade no interior do produto biológico ainda não é bem claro para os estudiosos. De acordo com Steffe e Singh (1980), a migração pode ser uma combinação de movimentos de umidade por difusão de líquido e de vapor, cada um predominando em certas etapas de secagem. Os seguintes mecanismos de transporte da umidade no interior dos sólidos são apresentados na literatura (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kundra, 1986):

- Transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- Transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (devido a gradientes de temperatura);
- Transporte por efusão, que ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros;
- Transporte de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura;
- Transporte de líquido por forças capilares;
- Transporte de líquido por pressão osmótica;
- Transporte de líquido devido à gravidade;
- Transporte de líquido e de vapor, devido a diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade;
- Transporte por difusão superficial.

Para o melhor entendimento dos mecanismos de transporte de umidade em sólidos, informações adicionais podem ser encontradas nas referências citadas acima.

2.1.5 Teorias de secagem

Baseando-se nos mecanismos de transporte de umidade no interior do sólido, várias teorias têm sido propostas na literatura:

- Teoria da difusão líquida;
- Teoria capilar;
- Teoria de vaporização-condensação;
- Teoria de Luikov;
- Teoria de Fortes e Okos;
- Teoria de Berger e Pei;
- Teoria de Philip- De Vries;
- Teoria de Krischer.

a) Teoria da difusão líquida

A teoria de difusão líquida estabelece que a difusão de umidade no interior do sólido é devido a um gradiente de concentração no sólido. Nesta teoria considera-se que a água migra apenas na fase líquida. Alguns pesquisadores como Newman, Sherwood e Lewis, citados por Keey (1992), consideram a teoria de difusão líquida como principal mecanismo do fluxo de umidade no interior dos sólidos. Na secagem de grãos e cereais, o modelo de difusão líquida tem apresentados bons resultados, provavelmente devido ao fato destes produtos não apresentarem um período de taxa constante nas curvas características de secagem, o que permite concluir que o processo de secagem é controlado totalmente pelas condições internas do material (Queiroz, 1994). No caso de secagem de produtos biológicos, percebe-se que os pesquisadores têm preferência pelos modelos de difusão líquida (Steffe e Singh, 1980; Suarez e Viollaz, 1991, Queiroz e Nebra, 2001). Estes trabalhos refere-se a secagem de grãos e são baseados na equação de difusão líquida (lei de Fick).

Discussão sobre os modelos de secagem pode ser encontrada, por exemplo, em Fortes e Okos (1980), Alvarenga et al (1980), Fortes (1982), Parry (1985), Mariz (1986), Keey (1992), Parti (1993), Lima (1995), Lima (1999), Lima e Nebra (2000a), dentre outros.

b) Teoria capilar

A teoria capilar é baseada no conceito do potencial capilar, que pode ser definido como a diferença de pressão entre a água e o ar na interface água-ar presente em um capilar. Ceaglske e Hougen (1937), citados por Fortes e Okos (1980), destacaram que na secagem de sólidos granulados, o fluxo de água é completamente determinado por forças capilares, sendo independentes da concentração de água. Verificou-se experimentalmente que o fluxo de umidade pode até estar na direção de incremento da umidade. Para processos de secagem de alimentos, principalmente em alta temperatura, a teoria capilar apresenta bons resultados.

c) Teoria de evaporação-condensação

A teoria de evaporação-condensação afirma que a água, num meio poroso, migra inteiramente na fase gasosa. Segundo Henry (1940), citado por Fortes e Okos (1980), esta teoria considera a difusão simultânea de calor e massa e, pressupõe que os poros têm uma rede contínua de espaços incluídos no sólido. Considera ainda, que o balanço de calor e massa origina as equações que rege o fluxo de umidade no material. Tal balanço de massa é influenciado pelo movimento de vapor através do sólido. O balanço de energia é gerado levando em consideração o fluxo de calor por condução somado ao calor envolvido na adsorção e/ou absorção de umidade pelo sólido.

Muitos experimentos, após Henry (1940), foram feitos. Verificou-se que em material poroso insaturado, tal como solo, há escoamento quando a água move-se devido a um gradiente de

temperatura. Porém, quando há gradiente de pressão, ocorre fluxo de água inteiramente na fase líquida.

d) Teoria de Luikov

A teoria de Luikov é baseada nos princípios da Termodinâmica de não-equilíbrio levando em consideração os mecanismos de difusão, efusão e convecção de água no interior do meio poroso. Portanto, as equações que define o modelo de Luikov levam em consideração que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontece ao mesmo tempo (Luikov, 1975).

e) Teorias de Philip e De Vries e de Berger e Pei

Tais teorias consideram que a água se move em meios porosos, basicamente por meio dos mecanismos de difusão de líquido e capilaridade. Segundo Fortes (1978), nestas teorias se propõe uma abordagem mecanística sendo que as equações de Berger e Pei são semelhantes às de Luikov.

f) Teoria de Fortes e Okos

Fortes (1978) e Fortes e Okos (1980), tendo por base os conceitos termodinâmicos dos processos irreversíveis propõem que a força motriz para transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, sendo isto, devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz para transferência de líquido e vapor, é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é uma função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Os autores afirmam que a água em meios capilares porosos pode até mover-se em sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio.

2.1.6 Encolhimento

Durante a secagem de produtos com alto teor de umidade inicial, como é o caso de frutas e vegetais, o encolhimento é um fenômeno físico bastante significativo. Devido a este fenômeno, o produto sofre alterações em sua forma e dimensões originais. Diversos autores têm incluído o fenômeno do encolhimento em seus modelos, porém, com diversas formas de tratamento. Para alguns autores, o encolhimento dos materiais submetidos à secagem pode ser considerado proporcional ao volume de água removida durante o processo (Balaban, 1989a; Lima, 1999; Gouveia et al, 1999; Queiroz e Nebra, 2001; Lima et al, 2000).

Balaban (1989) verificou a influência do encolhimento nos problemas de difusão de calor e massa no interior de alimentos e na dimensão do corpo, desenvolvendo modelos matemáticos com e sem a consideração de encolhimento. O autor por simplicidade assumiu um decréscimo linear com o teor de umidade, alertando, porém, que quando esta correlação fosse não-linear, poderia ser facilmente incorporada ao modelo. Definiu funções que expressavam o grau de encolhimento e repetiu os cálculos com diferentes níveis de encolhimento máximo: 70 % , 50 % e 30 % do original. Para a solução numérica, utilizou o método de diferenças finitas centrais com malha variável. Após cada passo de tempo, a distância entre os nodos era ajustada de acordo com o teor de umidade médio daquela fatia. Comparando os resultados obtidos dos modelos com e sem a consideração de encolhimento, concluiu que estes podem apresentar diferenças significativas nos valores estimados e locais do teor de umidade e da temperatura.

Vagenas e Marinos-Kouris (1991), ao estudarem a secagem de damasco, propuseram encolhimento linear proporcional à variação do teor de umidade. Consideraram variação nas três dimensões, porém, supondo material isotrópico, ou seja, o coeficiente de encolhimento linear era o mesmo nas três direções e no interior do sólido.

Fusco et al. (1991) estudaram o encolhimento nos modelos difusionais, considerando diferentes geometrias. Apresentaram uma boa revisão de literatura sobre estudos do encolhimento representado pelas relações de volume com o teor de umidade e, diferentemente dos demais, optaram por uma expressão que correlacionava estas duas propriedades através de uma função do terceiro grau. Obtiveram solução numérica pelo método de diferenças finitas adotando uma malha fixa com a interface móvel localizada no contorno do material. Em todas as geometrias estudadas, os modelos com encolhimento apresentaram melhores resultados.

Berthet et al. (1992) desenvolveram um modelo difusional com evaporação na superfície do material, considerando o encolhimento, ao analisarem a secagem de polímeros. Foi derivada uma expressão para o volume de uma membrana esférica em função da concentração local que levava em conta a aditividade do volume do esqueleto sólido e da umidade presente neste. A partir desta relação, calcularam o teor de umidade ao longo do raio como o produto da nova concentração pelo novo volume da membrana. Desta forma, conseguiram analisar a cinética da variação da dimensão ao longo do raio e do tempo e concluíram que o encolhimento ocorre primeiro em pontos próximos à superfície externa do material e leva algum tempo para acontecer no interior da esfera; este tempo será maior para posições mais próximas do centro da esfera.

A consideração do efeito de encolhimento nos modelos de secagem depende do conhecimento das propriedades relativas ao fenômeno. No entanto, existem poucas informações na literatura sobre os coeficientes de encolhimento, assim como de relações matemáticas entre a difusividade de massa, encolhimento e densidade. Apesar deste inconveniente, vários trabalhos incluem o efeito de encolhimento volumar no estudo do processo de secagem, fornecendo interpretações teóricas sobre o mesmo (Misra e Yong, 1980; Sokhansanj e Patil, 1996). Contudo, pouca pesquisa tem sido reportada na literatura sobre estudos do fenômeno de encolhimento em problemas bidimensionais (Fusco et al., 1991; Jomaa e Puiggali, 1991; Lima et al; 2000), e tridimensionais (Rovedo et al; 1995).

2.2 Modelagem da secagem

Os trabalhos reportados na literatura que se referem à modelagem do processo de secagem permitem que se possa listar duas formas de abordar o tema: uma se baseia principalmente nas condições externas, tais como a umidade relativa, temperatura e velocidade do ar, correlacionando-as com a velocidade de secagem do sólido, e a outra tem como características as condições internas, e os mecanismos de transporte de umidade interno ao sólido.

A modelagem deve estabelecer, entre os mecanismos de transporte de umidade dentro do sólido, aquele que for determinante. Desenvolver modelos matemáticos que descrevam um processo de secagem de maneira adequada tem sido uma preocupação constante de muitos pesquisadores por muito tempo. Atualmente, um número crescente de modelos, cada vez mais sofisticados, tem sido apresentados. Na tentativa de correlacionar dados experimentais de secagem de um material particular a um modelo matemático, os pesquisadores da área de secagem têm divulgado uma gama de modelos que representam a cinética de secagem de um material particular, mas existe a necessidade de um modelo melhor para se ter um comportamento físico bem próximo do real.

Para se modelar um processo de secagem é primordial o conhecimento das propriedades termodinâmicas do ar e suas mudanças no decorrer do processo. Os modelos de secagem são classificados de acordo com a espessura da camada do material ou se o material a ser seco é apenas uma partícula. Nestes casos, os modelos são em nível de camada espessa, camada fina ou ainda nível de partícula. Os modelos que são propostos para relatar a taxa de perda de umidade no transcorrer da secagem em sólidos a nível de partícula são:

- Modelos difusivos;
- Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis;
- Modelos baseados numa análise concentrada

Alassar (1999), Igathinathane e Chattopadhyay (2000), Carmo (2000) e Carmo e Lima (2000a e 2000b).

2.2.2 Modelos baseados na Termodinâmica dos processos irreversíveis

a) Modelo de Luikov

Baseia-se na teoria de Luikov, e, portanto, na termodinâmica dos processos irreversíveis. O modelo propõe que a água move-se em meios porosos, em condições isotérmicas, sob a ação de um gradiente de potencial de transferência de massa.

Luikov e Mikhailov (1965) e Luikov (1975), reportam em seus trabalhos, um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas para a temperatura, umidade e em casos de intensa secagem, também a pressão.

Vieira e Silva (1997), utilizando em seu trabalho um modelo de Luikov modificado, que leva em consideração o acoplamento de transferência de calor e massa no interior do produto, considerando um sólido poroso, propuseram uma solução numérica para o mesmo, utilizando a técnica de elementos de fronteira (Brebbia e Dominguez, 1989).

b) Modelo de Fortes e Okos

Baseia-se na teoria de Fortes e Okos (1978) e Fortes e Okos (1980, 1981), onde foi proposto um modelo que descreve o transporte de calor e umidade (líquido e vapor) simultâneos no interior do sólido, considerando que o fenômeno de encolhimento e efeitos de pressão total são negligenciados.

2.2.3 Modelos baseados numa análise concentrada

Diferentemente dos outros modelos apresentados, os modelos concentrados admitem que as grandezas em estudo (temperatura e/ou massa) dentro do sólido são espacialmente uniformes em qualquer tempo durante o processo transiente. Desta maneira modelos matemáticos elementares podem ser estudados para descrever o teor de umidade médio ao longo do processo de secagem (Alsina et al, 1997; Azzouz et al, 1998; e Lima e Lima (2001)).

Lima e Nebra (2000b) e Lima e Lima (2001), apresentaram modelos matemáticos baseados numa análise concentrada que descrevem a transferência de calor e massa simultânea em corpos com geometria arbitrária, considerando existência de geração interna de massa e energia, convecção térmica e de massa, evaporação e aquecimento do vapor produzido na superfície do produto. Segundo os autores, a transferência de massa tem uma importância significativa na transferência de calor.

Lewis, segundo Marinos-Kouris e Maroulis (1995), sugeriu que para materiais higroscópicos porosos, durante o período de taxa decrescente, a taxa do teor de umidade médio seja proporcional à diferença instantânea entre o teor de umidade médio do material e o teor de umidade de equilíbrio higroscópico. Os casos em que gradientes de umidade dentro do sólido são desprezíveis acontecem quando o processo de secagem é lento. Isto acontece, por exemplo, para secagem a baixas temperaturas e a baixa velocidade do ar de secagem, que proporcionam baixos coeficientes de transporte.

Uma extensa revisão sobre os modelos concentrados pode ser encontrada em Parry (1985), Parti (1990 e 1993); Lima (1999) e Lima (2001).

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 - A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esféricas prolatas

A equação de Fick de difusão de massa em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional na sua forma expandida é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

A equação correspondente a esta em condução de calor é a lei de Fourier, que é obtida substituindo M por T (Temperatura) e D por α , a difusividade térmica, assumindo-se que as propriedades térmicas c_p e ρ sejam constantes, como mencionado no capítulo II.

Em muitos problemas físicos, as condições de contorno são tais que os valores de uma função (ou de sua derivada) são especificados em curvas ou superfícies (esferas, cilindros, etc.). Neste caso, o sistema de coordenadas cartesianas não é adequado para solucionar o problema, o que viabiliza a interligação de novos sistemas de coordenadas que sejam convenientes para descrever a fronteira do domínio a ser estudado. A escolha de um sistema particular de coordenadas deve ser motivada pela forma geométrica do corpo em estudo e resulta numa melhor adequação e validade dos resultados obtidos.

No caso específico de elipsóides de revolução, um sistema de coordenadas que se adequa muito bem à forma do corpo é o esferoidal prolato. Um elipsóide de revolução, em que o eixo de revolução é maior que outro eixo, é chamado esferóide prolato. No caso do eixo de revolução ser o menor, o elipsóide é chamado esferóide oblato.

As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o esferoidal prolato (elíptico) (μ, ϕ, ω) são dados a seguir (Haji-Sheikh e Sparrow, 1966; Happel e Brenner, 1991; Magnus et al; 1966):

$$x=L \operatorname{senh}\mu \operatorname{sen}\phi \cos\omega \quad y=L \operatorname{senh}\mu \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega \quad z=L \operatorname{cosh}\mu \cos\phi \quad (3.2a-c)$$

De acordo com a Figura 3.1, percebe-se que quando $L_2=L_1$, o esferóide será uma esfera; para $L_2<L_1$, o esferóide é dito oblato e para $L_2>L_1$ tem-se um esferóide prolato. No limite, quando a distância interfocal tende a zero ($L_2 \rightarrow L_1$), o sistema de coordenadas esferoidal prolato se reduz o sistema de coordenadas esféricas. Na Figura 3.1, L é o comprimento focal, e é igual a $(L_2^2 - L_1^2)^{1/2}$, sendo L_1 e L_2 os semi-eixos menor e maior da elipse, respectivamente.

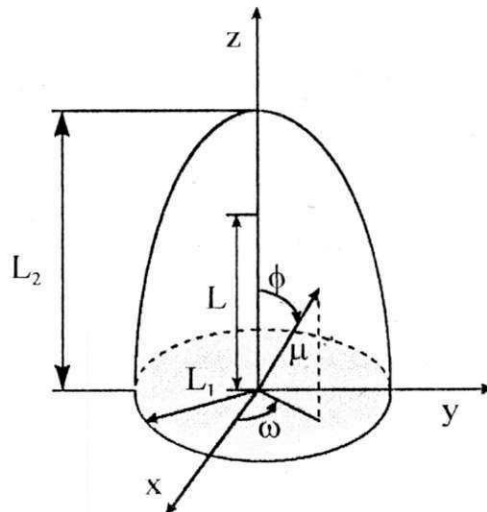


Figura 3.1- Características de um esferóide prolato sólido (Lima, 1999).

Para expressar a equação de difusão no sistema de coordenadas esferóidais prolato, considere as seguintes variáveis:

$$\xi = \cosh \mu \quad \eta = \cos \phi \quad \zeta = \cos \omega \quad (3.3)$$

Substituindo essas variáveis nas equações 3.2a-c, tem-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema esferoidal prolato (Magnus et al, 1966):

$$x = L\sqrt{(1-\xi^2)(\eta^2-1)} \zeta \quad y = L\sqrt{(1-\xi^2)(\eta^2-1)} \sqrt{(1-\zeta^2)} \quad z = L\xi\eta \quad (3.4a-c)$$

Para chegar-se as equações 3.4a-c, utiliza-se as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \quad \cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu = 1 \quad (3.5a-b)$$

O domínio das variáveis ξ , η e ζ (em termos de ω) no sistema esferoidal prolato (Fig. 3.2) é:

$$1 \leq \xi \leq L_2/L \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (3.6a-c)$$

A Figura 3.2 apresenta um detalhamento do sistema de coordenadas esferóidais prolato. As superfícies $\xi = \xi_0$ (constante), $\xi_0 > 1$, são elipsóides de revolução confocais alongados em torno do eixo z. A superfície $\xi = 1$ é a linha reta que une a origem ($z=0$) e o ponto focal ($z=L$). As superfícies $\eta = \eta_0$ (cte), $\eta_0 < 1$, são hiperbolóides de duas capas, com um cone assintótico que é gerado por linhas que passam pela origem e estão inclinadas com um ângulo $\phi = \cos^{-1} \eta$ em relação ao eixo z. A superfície $\eta = 1$ é parte do eixo $z > L$. As superfícies $\omega = \omega_0$ (constante) são planos que passam pelo eixo z e perpendiculares ao plano xy, formando o ângulo ω com o eixo x.

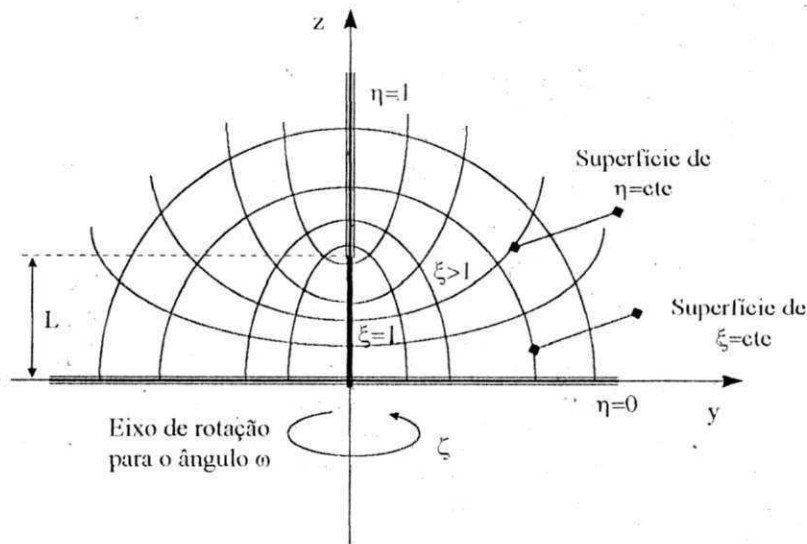


Figura 3.2 - Sistema de coordenadas esferoidais prolato (Lima 1999)

Informação adicional, sobre o sistema esferoidal prolato, podem ser obtidas em Page et al. (1938); Page (1944a); Page (1944b); Aoi (1955); Aho (1992); Do-Nhat e MacPhie (1996a) e Do-Nhat e MacPhie (1996b).

Para se obter a equação de difusão no novo sistema de coordenadas, utilizar-se-á a metodologia apresentada por Maliska (1995). A equação geral de difusão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v \Phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho w \Phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - P^{\Phi} + S^{\Phi} \quad (3.7)$$

onde J é o jacobiano da transformação, e é obtido pela seguinte relação:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Os coeficientes α_{ij} podem ser calculados, usando as seguintes expressões:

$$\alpha_{11} = \frac{a'}{J^2}; \quad \alpha_{22} = \frac{b'}{J^2}; \quad \alpha_{33} = \frac{c'}{J^2}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{d'}{J^2}; \quad \alpha_{31} = \alpha_{13} = \frac{e'}{J^2}; \quad \alpha_{32} = \alpha_{23} = \frac{f'}{J^2}; \quad (3.9a-f)$$

com:

$$\begin{aligned} a' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \\ b' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \\ c' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ d' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\ e' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ f' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.10a-f)$$

Os termos que contém α_{ij} , com $i \neq j$, que aparecem na equação são os termos difusivos referentes à não-ortogonalidade da malha. Desta forma, torna-se necessária à verificação da ortogonalidade do sistema de coordenadas a ser utilizado. As condições necessárias e suficientes para que um sistema de coordenadas seja ortogonal são (MacRobert, 1967):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (3.11a)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (3.11b)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (3.11c)$$

Para que os sistemas de coordenadas esferoidais prolata seja ortogonal estas condições tem que ser satisfeitas, nas variáveis ξ , η e ζ . Isto é verdade (conforme verificado pelo autor deste trabalho). Neste caso, os termos d' , e' e f' das equações 3.10d-f são eliminados da equação 3.7. Na condição do problema ser puramente difusivo, sem geração de energia ou qualquer outro termo fonte, a equação geral reduz-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.12)$$

Substituindo-se os valores do jacobiano J e dos coeficientes α_{ij} , com $i=j$; Γ^Φ por ρD e Φ por M , o teor de umidade do material, re-arranjando os termos, a equação 3.12, assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) D \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

De acordo com a Figura 3.1, existe simetria em torno do eixo z e, este caso tem-se $\partial/\partial\omega=0$, e $\partial/\partial\zeta=0$. Assim, o terceiro termo da equação se anulará e a equação 3.13 reduz-se a:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.14)$$

Como esta equação diferencial parcial é de segunda ordem na posição e de primeira ordem no tempo, a sua solução requer no mínimo duas condições de contorno e uma condição inicial. São elas:

$$M(\xi, \eta, t=0) = g_1(\xi, \eta) \quad (3.15a)$$

$$M(\xi=L_2/L, \eta, t) = g_2(\eta, t) \quad (3.15b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial A}(\xi, \eta, t) = g_3(\xi, t) \quad (3.15c)$$

As relações matemáticas dadas por Magnus et al (1966); Brodkey (1967); Abramowitz e Stegun (1972) e Kreyszig (1988) são usadas para calcular o gradiente de Φ , as áreas de transferência de massa e o volume diferencial do sólido no novo sistema de coordenadas. São elas:

❖ Volume diferencial:

$$dV = \left(\frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} \right) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.16)$$

❖ Área diferencial de fluxo de Φ

$$dS_{\xi} = \frac{1}{\hat{V}\hat{W}} d\eta d\zeta$$

$$dS_{\eta} = \frac{1}{\hat{W}\hat{U}} d\zeta d\xi \quad (3.17a-c)$$

$$dS_{\zeta} = \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta$$

❖ Gradiente de Φ

$$\nabla\Phi = \text{Grad } \Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}; \hat{V} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}; \hat{W} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \quad (3.18)$$

onde os coeficientes métricos são obtidos por:

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.21)$$

cujo produto da o jacobiano da transformação (J).

3.2. Solução analítica da equação da difusão

Como mencionado no Capítulo II, Haji-Sheikh, Sparrow (1966), Lima (1999) e Lima et al (1999) apresentaram uma solução analítica para o problema de difusão de calor em esferóide

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{c^2}{L^2} \right) \psi = 0 \quad (3.26)$$

Esta expressão é chamada equação de Helmholtz (Morse e Feshbach, 1953a). Quando $c=0$, a equação diferencial de Helmholtz se reduz à equação de Laplace. A equação 3.26 pode ser resolvida em 11 sistemas de coordenadas, dos quais 10 (exceto o sistema de coordenadas paraboloidal confocal) são casos particulares do sistema elipsoidal. São eles: cartesiano, elipsoidal confocal, cônico, cilíndrico, cilíndrico elíptico, paraboloidal, cilíndrico parabólico, esférico, esferoidal prolato e esferoidal oblato. Sendo $\psi = \psi(\xi, \eta)$, pode-se admitir:

$$\psi(\xi, \eta) = \chi(\xi) \lambda(\eta) \quad (3.27)$$

A função χ é a função radial ou de variação em função da posição radial, enquanto que a função λ é a função angular ou de posição numa superfície do esferóide (interna ou externa). Informações adicionais sobre as funções esferoidais podem ser encontradas em Stratton et al. (1941), Morse e Feshbach (1953b), Stratton et al (1956), Flammer (1957), Robin (1959) e Abramowitz e Stegun (1972), além daqueles citados anteriormente.

Derivando-se ψ com relação à ξ e a η , substituindo os resultados obtidos na equação 3.27, separando as variáveis e reagrupando os termos comuns, obtém-se duas equações diferenciais ordinárias homogêneas, dadas por:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\chi}{d\xi} \right) \right] + (b - c^2 \xi^2) \chi = 0 \quad (3.28)$$

$$\left[\frac{d}{d\eta} \left((1 - \eta^2) \frac{d\lambda}{d\eta} \right) \right] + (b - c^2 \eta^2) \lambda = 0 \quad (3.29)$$

Nas equações 3.28 e 3.29, b é a constante de separação ou autovalor. As duas equações têm a mesma forma, sendo que a referente a λ envolve um comportamento da solução entre o ponto singular $+1$ e o ponto 0 (zero), enquanto que a referente a χ , do ponto singular $+1$ até L_2/L . O ponto em que uma função $f(x)$ deixa de ser analítica é chamado de ponto singular de $f(x)$, isto é, $f(x)$ possui uma singularidade nesse ponto. Definindo de uma outra forma, um ponto $x=x_0$ é singular de $f(x)$, se $f(x)$ não for derivável em x_0 , mas se toda vizinhança de x_0 contiver um ponto em que $f(x)$ é derivável (Kreyszig, 1988). A exigência de que as soluções das equações 3.28 e 3.29 sejam finitas nos pontos singulares, torna-as equações de autovalor característico para b , isto é, b deve ser determinado para que as equações em χ e λ sejam finitas nestes pontos. Assim, as soluções das equações (3.28) e (3.29) devem ser funções de 1ª espécie (funções de 2ª espécie são infinitas nos intervalo $0 \leq \eta \leq 1$ e $1 \leq \xi \leq L_2/L$).

Quando $c \neq 0$, a equação (3.28) difere da equação de Legendre associada, por ter uma singularidade essencial no infinito. Isto sugere que as funções angulares de 1ª espécie sejam dadas por uma soma infinita. Particularmente, as funções radiais de 2ª espécie convergem lentamente para pequenos valores de $c\xi$ e em outros casos, elas não são absolutamente convergentes para qualquer valor de $c\xi$ (Flammer, 1957). Do exposto, a solução da função angular $\lambda(\eta)$ é expressa em termos de uma série de funções de Legendre, enquanto $\chi(\xi)$ é obtida a partir de uma série de funções de Bessel esféricas. As soluções das respectivas equações são dadas por:

$$\chi_m(c, \xi) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m} \right]^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot d_{n,m} \cdot j_n(c\xi) \quad (3.30)$$

$$\lambda_m(c, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,m}(c) \cdot P_n(\eta) \quad (3.31)$$

com $m=0, 2, 4, \dots$ e $n=0, 2, 4, \dots$. Nas equações 3.30 e 3.31, $j_n(c\xi)$ é a função de Bessel esférica de 1ª espécie de ordem n , enquanto que $P_n(\eta)$ é a função de Legendre de 1ª espécie, respectivamente. Embora as equações 3.28 e 3.29 não sejam definidas para $\xi=1$ e $\eta=1$, as soluções apresentadas

são analíticas e finitas nestes pontos. Em particular, condições físicas geralmente exigem que a solução obtida seja analítica em $|x|=1$.

Para uma variável genérica x , as funções de Bessel esféricas relacionam-se com as funções de Bessel cilíndricas por (Abramowitz e Stegun, 1972):

$$j_n(cx) = \sqrt{\frac{\pi}{2cx}} j_{n+1/2}(cx) \quad (3.32)$$

onde $j_n(cx)$ é a função de Bessel esférica.

As funções de Bessel cilíndricas de ordem fracionárias são obtidas a partir da relação:

$$\frac{2n}{x} j_m(x) = j_{m-1}(x) + j_{m+1}(x) \quad (3.32)$$

onde (MacRobert, 1967):

$$j_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}(x) \quad j_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{cos}(x) \quad (3.33a-b)$$

Os polinômios de Legendre na sua forma compacta são dados por (Oliveira e Maiorino, 1997; Wylie e Barret, 1995):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{(n-2k)} \quad (3.34)$$

onde:

$$N = \begin{cases} n/2 & \text{para } n \text{ par.} \\ (n-1)/2 & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

As funções χ e λ são funções ortogonais duas a duas com peso $v(x)$. Uma seqüência de funções $g_m(x)$ e $g_p(x)$, são ditas ortogonais com relação à função de peso $v(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ se:

$$\int_a^b g_m(x) g_p(x) v(x) dx = 0 \quad (3.35)$$

com $m \neq p$, (Kreyszig, 1983, Wylie e Barrett, 1995). Se estas funções devem ser reais, a função $v(x)$ deve ser não-negativa.

Quando a equação 3.31 é substituída na equação 3.29, e relações conhecidas para as funções de Legendre associadas são usadas, os coeficientes $d_{n,m}$ são determinados através da seguinte relação de recorrência (Flammer, 1957):

$$\hat{\alpha}_r d_{r+2,m} + (\hat{\beta}_r - b_n) d_{r,m} + \hat{\gamma}_r d_{r-2,m} = 0 \quad (3.36)$$

onde:

$$\hat{\alpha}_r = \frac{(r+2)(r+1)c^2}{(2r+5)(2r+3)} \quad (3.37)$$

$$\hat{\beta}_r = \frac{[(2r)(r+1) - 1]c^2}{(2r-1)(2r+3)} + r(r+1) \quad (3.38)$$

$$\hat{\gamma}_r = \frac{r(r-1)c^2}{(2r-3)(2r-1)} \quad (3.39)$$

com $r=0, 2, 4, \dots$. Os valores dos coeficientes b_n para $c \leq 7,5$ são dados pela equação transcendental seguinte:

$$U(b_n) = U_1(b_n) + U_2(b_n) = 0 \quad (3.40)$$

com:

$$U_1(b_n) = \hat{\varphi}_n - b_n - \frac{\hat{\delta}_n}{(\hat{\varphi}_{n-2} - b_n) - \frac{\hat{\delta}_{n-2}}{(\hat{\varphi}_{n-4} - b_n) - \dots}} \quad (3.41)$$

$$U_2(b_n) = -\frac{\hat{\delta}_{n+2}}{(\hat{\varphi}_{n+2} - b_n) - \frac{\hat{\delta}_{n+4}}{(\hat{\varphi}_{n+4} - b_n) - \dots}} \quad (3.42)$$

sendo que:

$$\hat{\delta}_n = \frac{n^2(n-1)^2 c^4}{(2n-1)^2(2n+1)(2n-3)}; \quad n \geq 2 \quad (3.43)$$

$$\hat{\varphi}_n = n(n+1) + \frac{c^2}{2} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right]; \quad n \geq 0 \quad (3.44)$$

Esta técnica utilizada para determinar os coeficientes b_n é denominada técnica da fração continuada; comentários adicionais podem ser encontrados em Stratton et al. (1941), Morse e Feshbach (1953a) e Stratton et al (1956). Quando $c > 10$, os autovalores são conseguidos através de uma expansão assintótica. O desenvolvimento assintótico de b_n é dado a partir do método de aproximações sucessivas:

$$\begin{aligned} b_n = (2n+1)c &- \frac{(2n^2 + 2n + 3)}{2^2} - \frac{(2n+1)(n^2 + n - 3)}{2^4 c} - \frac{5(n^4 + 2n^3 + 7n + 3)}{2^6 c^2} - \\ &- \frac{(66n^5 + 165n^4 + 962n^3 + 1278n^2 + 1321n + 453)}{2^{10} c^3} - \\ &- \frac{(252n^6 + 75n^5 + 5885n^4 + 10510n^3 + 18478n^2 + 13349n + 4425)}{2^{12} c^4} - \\ &- \frac{[527(2n+1)^7 + 61529(2n+1)^5 + 1043961(2n+1)^3 + 2241599(2n+1)]}{2^{20} c^5} + O(c^{-6}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

No intervalo $7,5 < c \leq 10$, nenhuma das soluções fornece resultados coerentes.

Uma série convergente para $d_{n,m}$ pode ser obtida para um conjunto de valores discretos da constante de separação b . Desta forma, tornam-se possíveis dois conjuntos de soluções finitas, um para cada valor de n par, e outro quando n for ímpar. Para n par, o menor valor de b está relacionado com $n=0$, o próximo com $n=2$, e assim por diante (Morse e Feshbach, 1953b).

Dependendo do esquema de normalização adotado, os valores dos coeficientes $d_{n,m}$ serão diferentes, contudo, os coeficientes devem ser normalizados para que cada função esferoidal se reduza à correspondente função esférica quando $c \rightarrow 0$. O critério adotado neste trabalho é apresentado na equação 3.46:

$$\sum_{r=0}^n \frac{(-1)^{r/2} (r)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!} d_{r,m} = \frac{(-1)^{n/2} (n)!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (3.46)$$

válida para $r=0,2, \dots$ e $n=0,2, \dots$. Outros critérios de normalização podem ser encontrados em Flamme (1957) Esta equação adicional é que possibilita a determinação dos coeficientes $d_{n,m}$, completamente. Vale ressaltar que, quando $n < 0$, tem-se $P_n(\eta)=0$, implicando que a série realmente começa em $n=0$. A condição que restringe b nas equações diferenciais é refletida na equação 3.22b como um requisito de que a relação de coeficientes $d_n/d_{n-2} \rightarrow 0$ (tende a zero), quando $n \rightarrow \infty$, (Stratton et al., 1956). Além disso, como n é par, o coeficiente d_1, d_3, \dots são irrelevantes e não devem ser considerados. A solução geral do problema é dada pela soma das soluções particulares para χ e λ . Isto é:

$$M(\xi, \eta, t) - M_c = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} e^{-c_{mk}^2 \frac{Dt}{L^2}} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.47)$$

Os coeficientes A_{mk} são obtidos, aplicando a condição de contorno em $t=0$ (equação 3.22a). Assim, tem-se que:

$$M_o - M_c = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.48)$$

Multiplicando ambos os membros da equação 3.48 por $\chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2)$, e integrando-os sobre o volume de controle em estudo (Figura 3.1), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) (M_o - M_c) d\xi d\eta = \\ & = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) A_{mk} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde foram trocadas as operações de somatório e integração. Supondo válida a integração termo a termo, conclui-se que o único termo no lado direito que fornece uma integral não nula é o termo em $m=p$, devido à propriedade de ortogonalidade das funções, expressa pela equação:

$$\int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_p(c_{pk}, \xi) \lambda_p(c_{pk}, \eta) \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta = 0, m \neq p \quad (3.50)$$

Observe que o termo $(\xi^2 - \eta^2)$ é a função de peso referenciada na equação 3.35.

Para $p=m$, o resultado da equação 3.49 será:

$$A_{mk} = \frac{\int_0^1 \int_1^{L/2} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) (\xi^2 - \eta^2) (M_o - M_c) d\xi d\eta}{\int_0^1 \int_1^{L/2} [\chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta)]^2 (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta} \quad (3.51)$$

onde o denominador é a norma de $(\chi_m \lambda_m)(\xi^2 - \eta^2)$. Desde que $(M_o - M_c)$ é um valor constante, este termo pode ser isolado da integral acima, e, portanto, a solução apresentada na equação 3.47 passa a referir-se à razão de umidades $(M - M_c) / (M_o - M_c)$, em vez de $(M - M_c)$.

Definindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_c}{M_o - M_c}; \quad t^* = \frac{Dt}{L^2}; \quad Bi = \frac{h_m L}{D} \quad (3.52a-c)$$

pode-se escrever a solução geral para o problema como segue:

$$M^* = \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{mk}}{(M_o - M_c)} \right] e^{-c_{mk}^2 t^*} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \quad (3.53)$$

Os coeficientes c_{mk} , b_n e $d_{n,m}$ devem ser obtidos satisfazendo a condição de contorno na superfície do esferóide prolato ($\xi=L_2/L$). Sendo assim, substituindo $M(\xi, \eta, t)$ e sua derivada na equação 3.22b, e usando o parâmetro adimensional definido na equação 3.52, obtém-se

$$\chi_m = -\frac{1}{Bi} \sqrt{\frac{\xi_f^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi} \Big|_{\xi_f = L_2/L} \quad (3.54)$$

Observa-se que para $Bi \rightarrow \infty$, tem-se $\chi_m \rightarrow 0$ na superfície. Esta condição é conhecida como sendo condição de equilíbrio (1ª espécie) (Lima, 1999). Isto significa que em qualquer ponto na superfície do sólido, o teor de umidade $M^* = 0 \Rightarrow M = M_c$.

Para determinar a perda de umidade no processo de secagem, torna-se necessário determinar o teor de umidade médio no volume total do elipsóide. A definição da média espacial do teor de umidade (\bar{M}), requer que a mesma seja uma função associada ao centróide do volume do corpo em estudo (Whitaker, 1980). Sendo assim, é expressa por:

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (3.55)$$

onde V é o volume total do domínio em estudo, obtido pela integração da equação 3.16, no limite do domínio, de acordo com a Figura 3.1.

Substituindo os valores do teor de umidade adimensional e dos volumes infinitesimal e total na equação 3.55, tem-se que o teor de umidade médio será dado por:

$$\bar{M}^* = \frac{\int_0^1 \int_1^{L_2/L_1} \left\{ \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{mk}}{(M_o - M_e)} \right] e^{-c_{mk}^2 \frac{Dt}{L^2}} \chi_m(c_{mk}, \xi) \lambda_m(c_{mk}, \eta) \right\} (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta}{\int_0^1 \int_1^{L_2/L_1} (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta} \quad (3.56)$$

A equação 3.56 assume esta forma, em virtude da simetria em torno do eixo z , isto é, da independência da razão de umidade na direção de ζ .

Pela substituição direta de M por T e D por α , os resultados deste equacionamento passam a representar a distribuição de temperatura e seu valor médio, durante o processo de difusão.

Uma peculiaridade da solução destas equações é que para pequenos valores de Dt/L^2 é necessário utilizar um alto número de termos das séries, resultando num considerável inconveniente. Todavia, para altos valores desta grandeza, o termo exponencial predomina e a solução converge rapidamente, em virtude do rápido decréscimo da função exponencial.

A formulação aqui apresentada pode ser utilizada para descrever fenômenos difusivos transientes, de difusão de massa (secagem ou umidificação) e calor (aquecimento ou resfriamento) em corpos com geometria esférica ($L_2/L_1=1,0$), cilíndrica ($L_2/L_1 \rightarrow \infty$) e elipsoidal ($1,0 < L_2/L_1 < \infty$), com a condição de contorno indicada.

Vale salientar que a complexidade para obter a solução analítica do problema, para condição de contorno convectiva, é muito grande, e métodos numéricos mostram-se mais adequados para

obter soluções mais rápidas. No entanto, estudos podem ser conduzidos neste sentido, para poder auxiliar pesquisadores em futuros trabalhos.

Para demonstrar o mérito relativo do presente método de solução, no que diz respeito à utilidade e limitações, foi decidido selecionar alguns casos para que uma solução convencional pudesse ser realmente obtida e comparada com outros resultados da literatura, obtidas para esfera ($L_2/L_1=1,0$), elipsóide ($L_2/L_1=2,0$) e cilindro infinito ($L_2/L_1=100,0$); considerando-se um coeficiente de difusão $D= 1,22 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ e $L_1=0.01\text{m}$, em todos os casos estudados.

Para obtenção dos valores dos coeficientes c , b , $d_{n,m}$ e $A_{m,k}$, condição de ortogonalidade das funções, o teor de umidade médio adimensional, assim como o próprio teor de umidade adimensional dentro do sólido, três programas computacionais utilizando o Software Matemática[®] foram implementados. Particularmente com referência às determinações de $A_{m,k}$ e à condição de ortogonalidade, problemas foram encontrados para resolver analiticamente as integrais que envolvem estas equações, especificamente a integral do tipo:

$$\int j_m(c\xi)j_p(c\xi)\xi^2 d\xi \quad (3.51)$$

Todas as integrais que envolvem χ e λ podem ser reduzidas a integrais mais simples que envolvem as funções de Bessel esféricas e polinômios de Legendre, respectivamente. Contudo uma extensa bibliografia especializada sobre funções de Bessel, suas derivadas e integrais, foi consultada, mas não foram encontradas expressões que auxiliassem na tarefa de reduzir as integrais referenciadas a expressões mais simples para se poder obter a solução totalmente analítica. Como exemplos citam-se: Watson (1944), Batteman (1951), Robin (1959), Farrel e Ross (1963), Gradshteyn e Ryzhik (1965) e Abramowitz e Stegun (1972). Sendo assim, técnicas numéricas já implementadas no Software Mathematica[®] foram usadas para resolver estas integrais.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos da cinética de secagem e do teor de umidade adimensional no interior do sólido esferóide prolato em função da posição e do tempo. A obtenção da solução analítica referenciada neste trabalho requer um elevado número de horas de trabalho computacional, comparados com a solução numérica reportado por Lima (1999). Alguns dos resultados dos coeficientes b_n e $d_{n,m}$ obtidos com os códigos computacionais para certas condições prefixadas foram comparados com resultados obtidos por Stratton, (1941) e Flammer, (1957). A Tabela 4.1 apresenta comparação de alguns resultados obtidos por estes pesquisadores e evidencia que os programas computacionais fornecem resultados praticamente iguais.

Tabela 4.1 – Comparação entre os coeficientes b_n e $d_{n,m}$ obtidos neste trabalho e os reportados na literatura.

c	Este Trabalho			Stratton et al (1941)			Flammer (1957)		
	b_n	$d_{n,m}$		b_n	$d_{n,m}$		b_n	$d_{n,m}$	
		n = 0	n = 2		n=0	n=2		n=0	n=2
0,1	0,003332	0,999445	-0,001110	0,003330	0,99945	-0,001110	0,003330	0,999450	-0,00110
3,0	2,136730	0,714803	-0,514222	2,136730	0,71480	-0,514220	2,136730	0,714800	-0,51422
5,0	4,195130	0,560318	-0,695613	4,195140	0,56032	-0,695610	4,195130	0,560320	-0,69561

Uma vez que a metodologia utilizada apresenta coeficientes similares, duas situações foram estudadas: a primeira com respeito à cinética de secagem do sólido e a segunda referente aos perfis de teor de umidade no interior do sólido em diferentes tempos de secagem.

Na Figura 4.1 mostra-se os resultados analíticos do teor de umidade médio de um esferóide prolato com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$, número de Biot, $Bi=1,0$ em função do número de Fourier $Fo=Dt/L_1^2$, comparados com os resultados analíticos reportados por Luikov (1968), para uma esfera e os resultados numéricos apresentados por Lima (1999), para as mesmas condições de número de Biot.

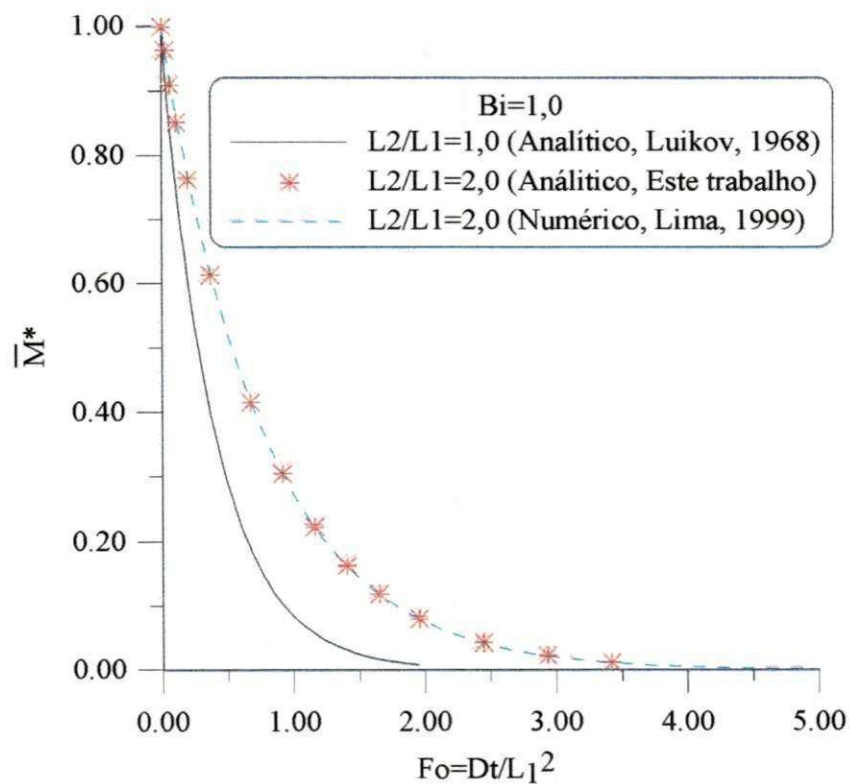


Figura 4.1 – Comparação entre os teores de umidade médios obtidos pelo método proposto, os numéricos reportados por Lima (1999), para um sólido com $L_2/L_1=2,0$ e os analíticos apresentados por Luikov (1968), para uma esfera ($L_2/L_1=1,0$), e o número de Biot, $Bi=1,0$.

Percebe-se a boa concordância entre os resultados deste trabalho com os resultados obtidos por Lima (1999). Ocorre um pequeno erro na determinação do teor de umidade médio adimensional para número de Fourier, $Fo=0,01$, cujo valor atingiu um máximo de 1,5%. Esta divergência é atribuída ao fato da solução analítica em estudo ser obtida por uma série discreta de valores, obtidos por sua vez por uma série de aproximações e equações transcendentais, bem

como para funções de Bessel esférica e polinômios de Legendre de alta ordem. Parte destas divergências podem ser minimizadas, utilizando-se um número de termos mais elevado nas séries, principalmente para determinar os coeficientes de expansão $d_{n,m}$ e os autovalores b_n . Também se pode dizer que estes erros são oriundos das sucessivas aproximações numéricas ocorridas durante os cálculos das integrais contidas na equação 3.56, que calcula o teor de umidade médio do material.

O teor de umidade adimensional para um esferóide com razão de aspecto $L_2/L_1=2,0$, número de Biot, $Bi=1,0$ e vários números de Fourier, em função das coordenadas angular e radial, está ilustrados nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente. Aqui a atenção esta focalizada na variação do teor de umidade com o valor de Fourier, para valores fixos da coordenada radial(ξ) e coordenada angular(η). A influência da difusão é estabelecida pela magnitude do número de Fourier.

Para baixos valores do Fourier, que é o caso de situações iniciais do processo, a difusão é relativamente alta; em contraste ocorre para altos números de Fourier. Isto se verifica em qualquer número de Biot. Para valores crescentes deste parâmetro, o teor de umidade adimensional decresce para qualquer par (ξ, η), indicando que o fluxo de umidade ocorre do centro do corpo para superfície. Observa-se também que a dependência do teor de umidade com a coordenada angular(η) é levemente mais forte que a sua dependência com a coordenada radial(ξ). Este efeito é mais acentuado com a maximização da razão de aspecto, fixado o número de Biot. Vale salientar que para número de Fourier, $Fo=0,0366$, a solução analítica ainda esta se mostrando instável com respeito à coordenada angular, conforme ilustra a Figura 4.3, pelas razões já citadas.

Nas Figuras 4.4a-c ilustram-se a distribuição do teor de umidade dentro de um esferóide prolato com $L_2/L_1=2,0$, número de Biot, $Bi= 1,0$ em três número de Fourier . Verifica-se neste caso que o teor de umidade adimensional decresce com o aumento do número de Fourier em qualquer posição no interior do sólido.

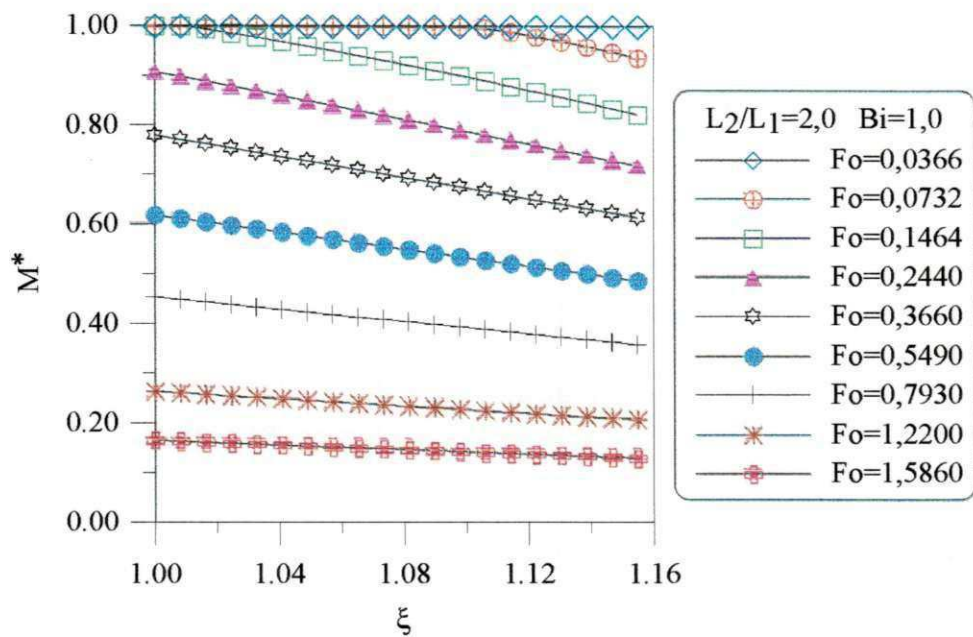


Figura 4.2 – Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários Fourier, $L_2/L_1=2,0$ e número de Biot, $Bi=1,0$.

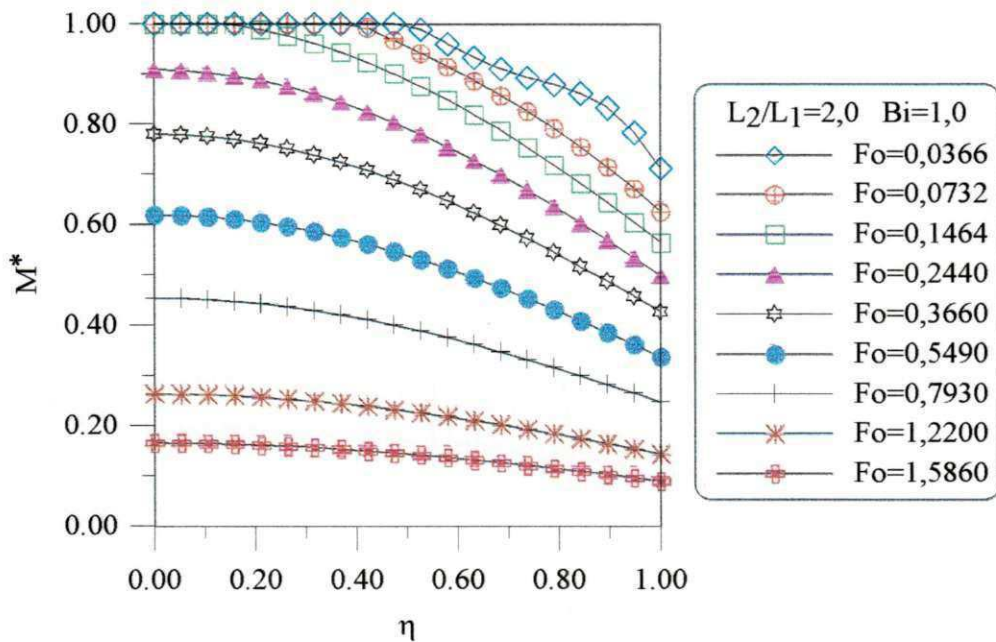


Figura 4.3- Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$), para vários Fourier, $L_2/L_1=2,0$ e número de Biot, $Bi=1,0$.

De uma forma geral, nota-se a existência de duas regiões distintas para a difusão de massa: uma se localiza nas proximidades do ponto focal e outra no restante do corpo. A medida que a razão de aspecto é maximizada, a difusão de massa aumenta na região onde está inserida o ponto focal ($y=0, z=L$) decrescendo no restante do corpo. Este efeito é minimizado com a diminuição da razão de aspecto até o caso em que $L_2/L_1=1,0$, onde as regiões se coincidem formando uma única região, com um comportamento de difusão de massa independente da coordenada angular (esfera).

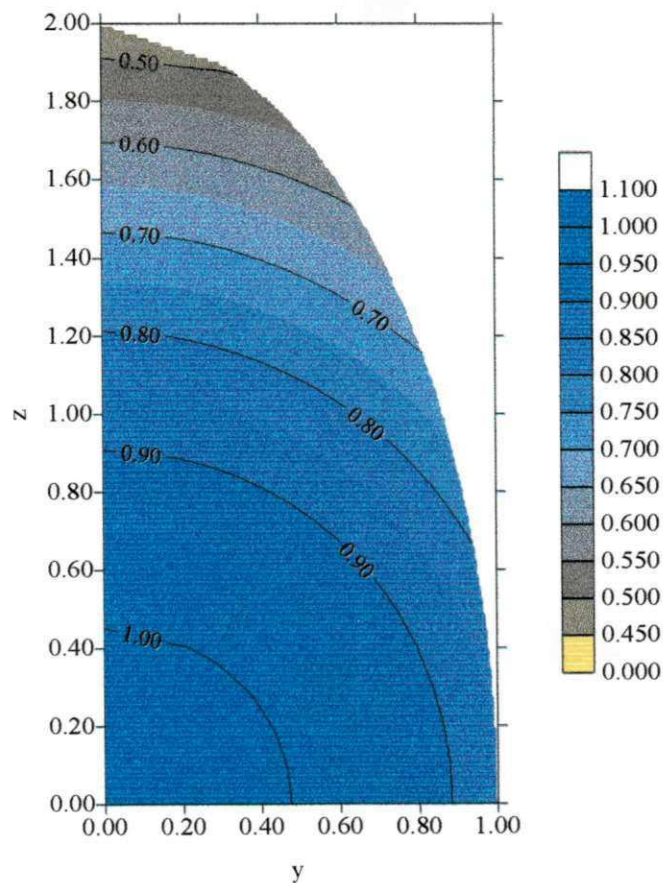


Figura 4.4a – As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para número de Fourier, $Fo= 0,122$ e número de Biot, $Bi=1,0$.

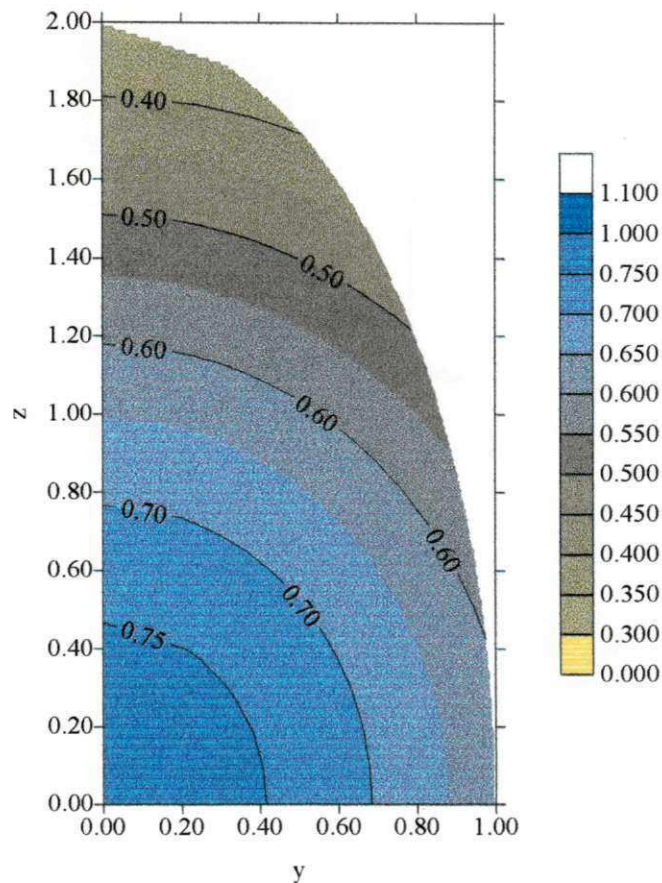


Figura 4.4b – As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para número de Fourier, $Fo= 0,366$ e número de Biot, $Bi=1,0$.

Pelas linhas de iso-concentração nota-se que no interior do sólido com forma elíptica a região próxima à superfície do sólido e, particularmente próxima ao ponto focal é onde aparece os maiores gradientes de umidade e conseqüentemente o processo de secagem é rápido. Esta verificação é importante, pois permite prever a existência de tensões termo-mecânicas que comprometem a qualidade do produto ao final do processo. Altos gradientes térmicos e mecânicos podem gerar trincas, deformações além de poder alterar a cor e o sabor dos alimentos. Resultados similares foram apresentados por Lima (1999).

A Figura 4.5 apresenta o teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para vários esferóides prolatos, com $Bi \rightarrow \infty$. Esta condição de contorno equivale ao

caso do sólido, no início do processo de secagem, atingir rapidamente o seu teor de umidade de equilíbrio e permanecer assim até o término do processo. A análise da figura evidencia que o teor de umidade médio decresce com o aumento do número de Fourier, para qualquer razão de aspecto. Para um mesmo número de Fourier, o teor de umidade médio adimensional é maior para esferóides com razão de aspecto maior. Além disso, percebe-se que corpos com razão de aspecto menor secam mais rápido, sendo isto devido à relação área/volume. Vale salientar que $L_2/L_1 \rightarrow \infty$, o sólido tende a um cilindro infinito.

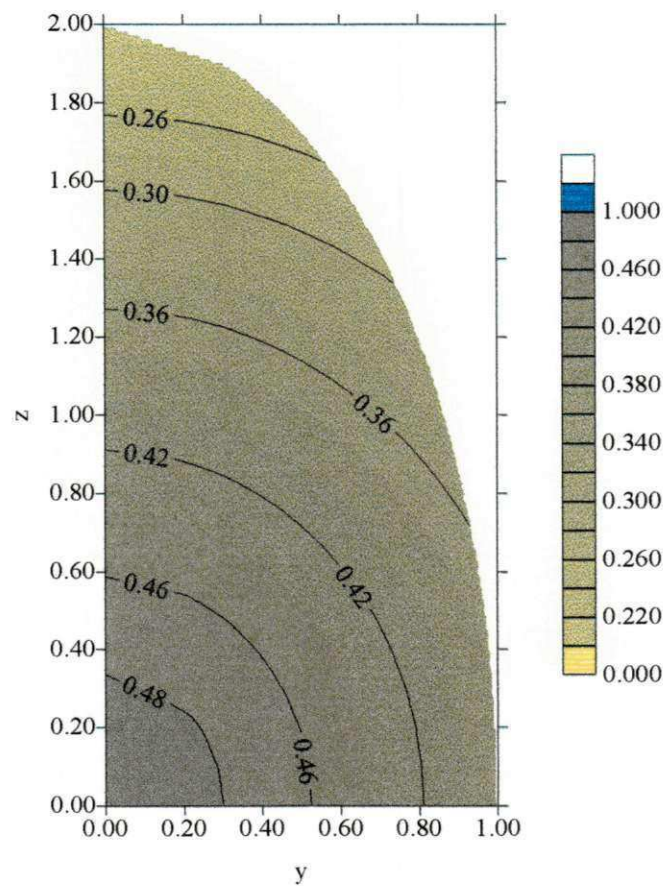


Figura 4.4c – As linhas de iso-concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para número de Fourier, $Fo= 0,732$ e número de Biot, $Bi=1,0$.

Comparando-se a Figura 4.5 com a Figura 4.1, observa-se que no caso de número de Biot (Bi) infinito, o sólido seca mais rápido, em qualquer razão de aspecto. Por exemplo, para o caso

$L_2/L_1=2,0$, para número de Biot, $Bi=1,0$, o sólido atinge o equilíbrio em número de Fourier, $Fo \approx 5,0$, enquanto que para o número de Biot (Bi) infinito o sólido atinge este mesmo ponto em número de Fourier, $Fo \approx 0,9$.

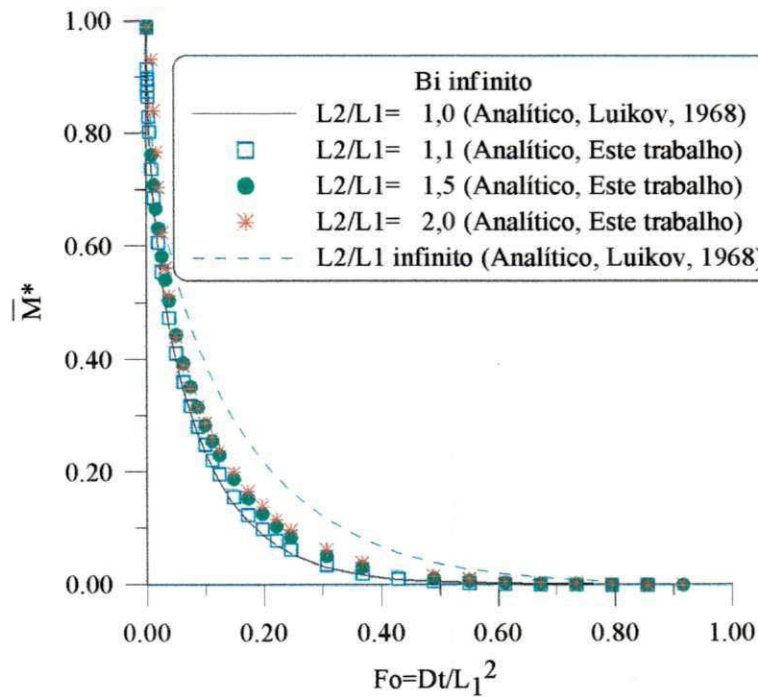


Figura 4.5 – Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier (Fo), para vários esferóides prolatos e número de Biot (Bi) infinito.

Nas Figuras 4.6 e 4.7 mostra-se a evolução do teor de umidade adimensional em função das coordenadas radial e angular, respectivamente, para um elipsóide com $L_2/L_1=1,5$ e número de Biot (Bi) infinito, em vários número de Fourier. As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam a mesma situação, desta feita para uma razão de aspecto de $L_2/L_1=2,0$. Observa-se, após análise das curvas, que o teor de umidade é fortemente dependente de ambas as coordenadas angulares e radiais, principalmente para caso $L_2/L_1=2,0$. A severidade da secagem é maior. Em ambos os casos, os gradientes de umidade são mais acentuados, quando comparados com o caso de número de Biot, $Bi=1,0$ (Figuras 4.2 e 4.3). Este efeito vai gradativamente decrescendo com o aumento do número de Fourier.

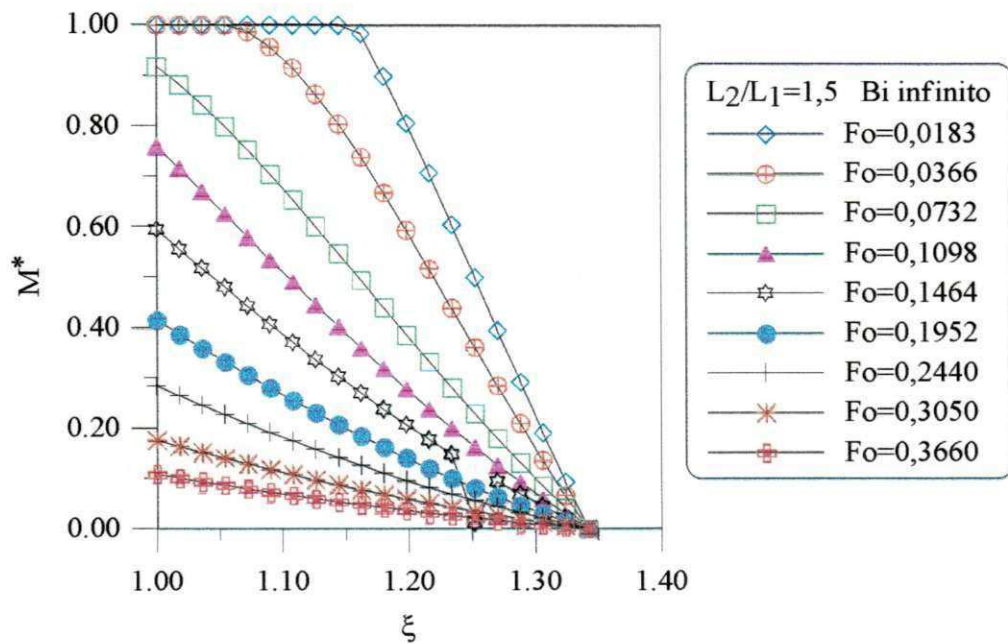


Figura 4.6 – Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários número de Fourier (Fo), $L_2/L_1=1,5$ e número de Biot (Bi) infinito.

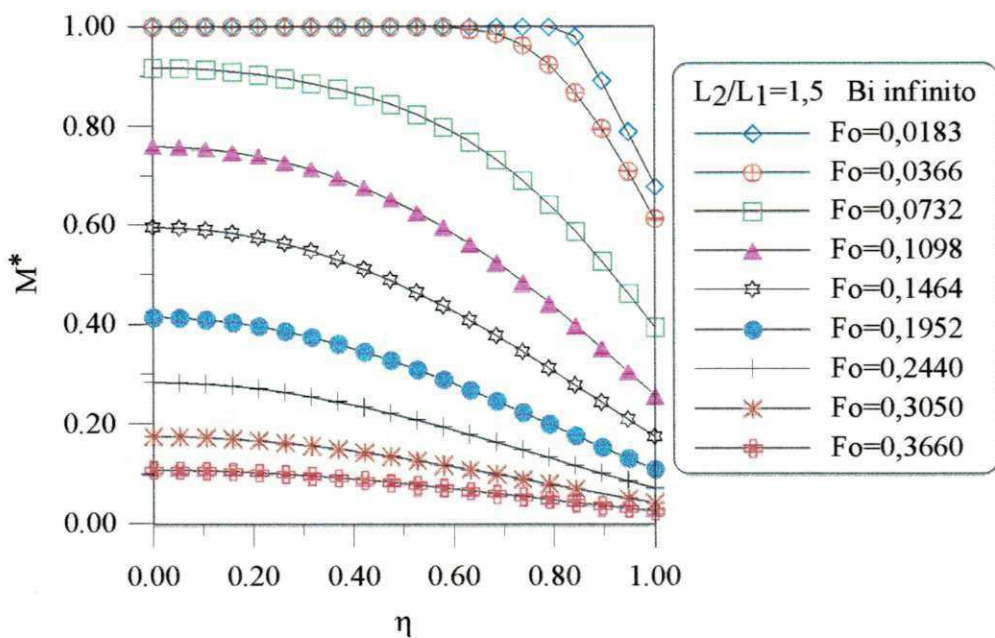


Figura 4.7 - Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários números de Fourier (Fo), $L_2/L_1=1,5$ e número de Biot (Bi) infinito .

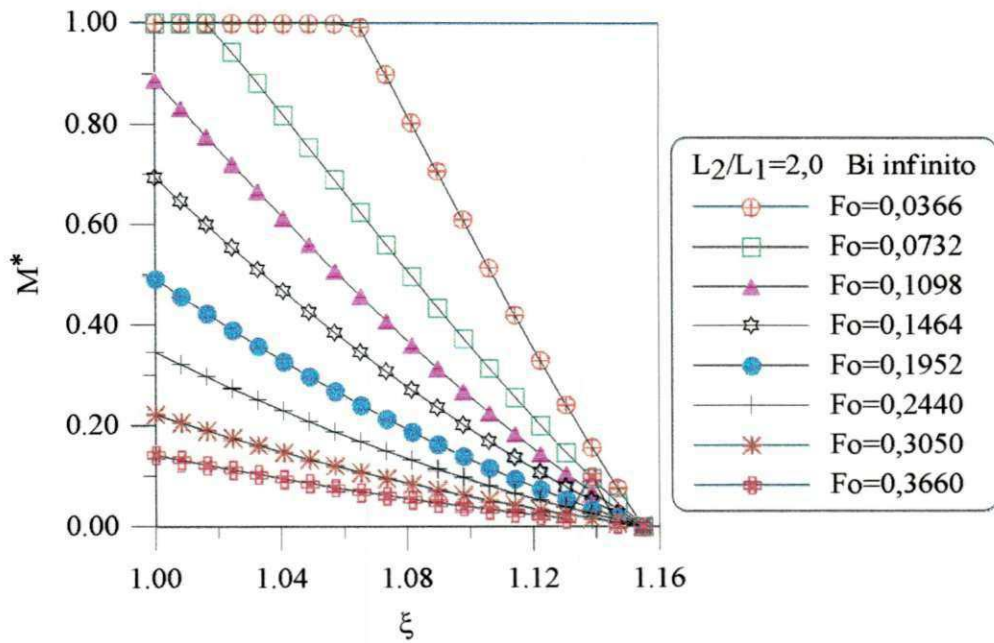


Figura 4.8 -- Teor de umidade adimensional em função de ξ em $\eta=0,0$ ($0 \leq y \leq L_1$), para vários número de Fourier (Fo), $L_2/L_1=2,0$ e número de Biot (Bi) infinito.

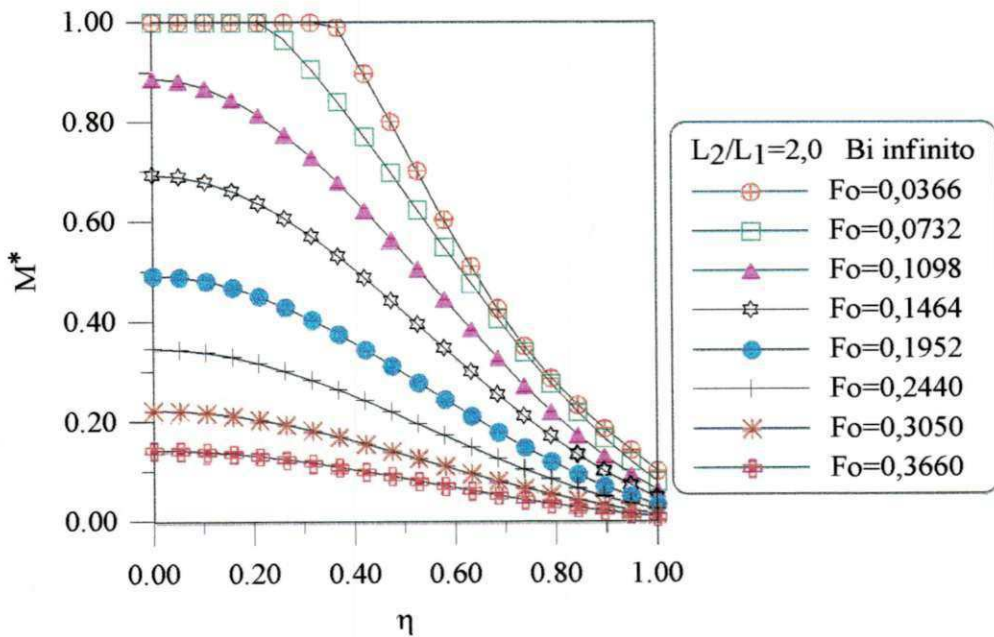


Figura 4.9 - Teor de umidade adimensional em função de η em $\xi=1,0$ ($0 \leq z \leq L$) para vários número de Fourier (Fo), $L_2/L_1=2,0$ e número de Biot (Bi) infinito.

O mapeamento de dois esferóides prolatos com $L_2/L_1=1,5$ e $L_2/L_1=2,0$, para número de Biot (Bi) infinito, está ilustrado nas Figuras 4.10 e 4.11, respectivamente. Como se pode esperar à medida que a razão de aspecto aumenta, a difusão de massa na região próxima ao ponto focal também aumenta, decrescendo na região mais afastada dele. Disto pode-se afirmar que, quanto maior a razão de aspecto, mais rapidamente o processo de secagem se concretiza, para qualquer número de Biot fixo. Este efeito acontece devido à geometria do corpo e, está ligada diretamente com a relação área/volume, como já mencionado.

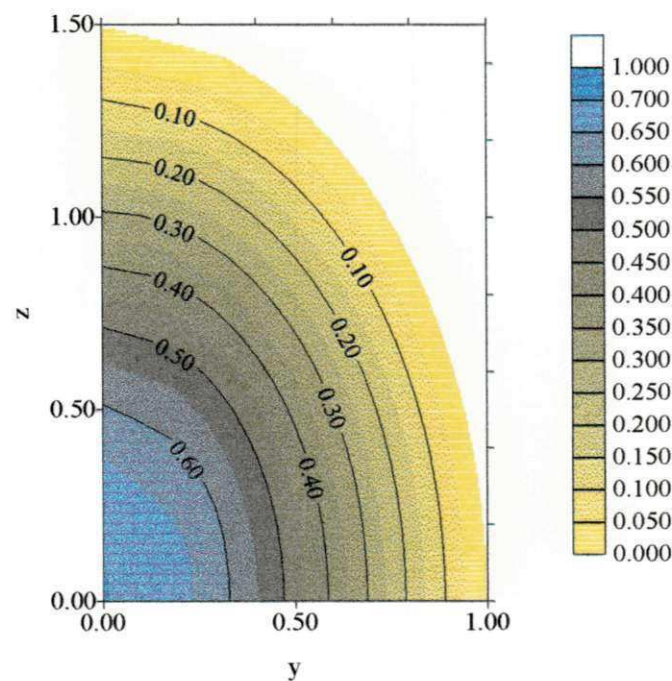


Figura 4.10 - As linhas de iso concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=1,5$, para número de Fourier, $Fo= 0,122$ e número de Biot (Bi) infinito.

Observando-se as figuras pode-se dizer que, corpos com razão de aspecto mais acentuada, apresentam o ponto focal bem próximo a superfície do sólido. É nesta região, onde o processo de secagem é rápido e estão concentrados os mais altos gradientes de umidade. Sendo assim, esta região é mais volúvel a trincas e deformações originadas por tensões termo-mecânicas, que comprometem a qualidade final do produto, principalmente se o processo ocorre para números de Biot elevados ($Bi > 10,0$) (Lima, 1999). No caso de grãos, a severidade das deformações, pode

originar rupturas, diminuição do vigor e germinabilidade das sementes. Isto deve ser tanto quanto possível evitado, por exemplo, pelo controle das condições do ar de secagem.

Pela comparação entre as Figuras 4.4a e 4.11, evidencia-se a total diferença na distribuição de umidade. Este efeito é exclusivo devido ao número de Biot.

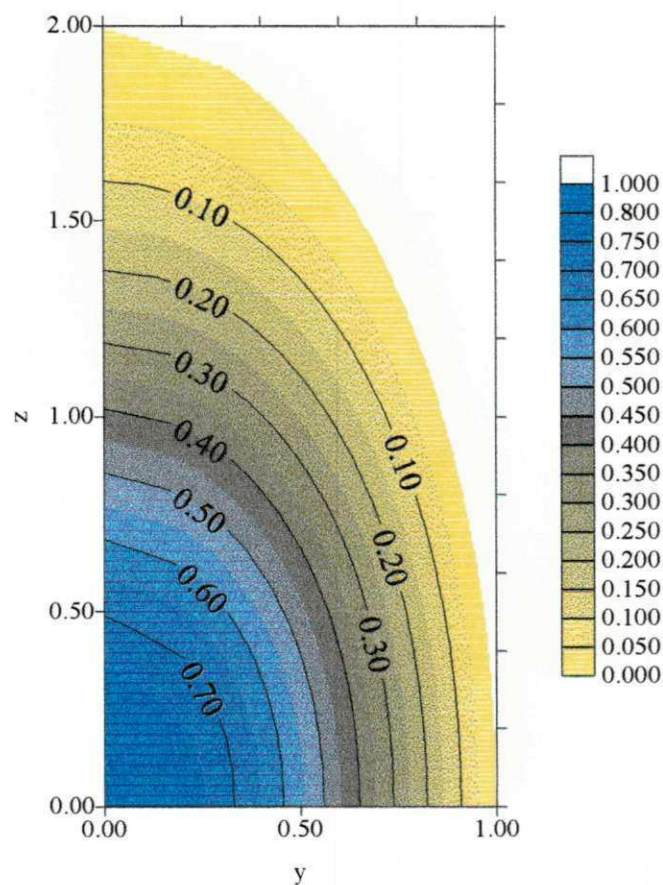


Figura 4.11 - As linhas de iso concentração e a forma de um elipsóide com $L_2/L_1=2,0$, para número de Fourier(Fo)= 0,122 e número de Biot (Bi) infinito.

Para finalizar, dada a quantidade de informações fornecidas e o bom ajuste obtido nas comparações apresentadas, tem-se evidencia de que a metodologia é satisfatória e o modelo é versátil. Apesar deste trabalho se direcionar a difusão de umidade dentro de sólidos esferoidais prolatos, os resultados contemplados também configura o transporte de energia, bastando para

isso substituir a taxa de secagem pela taxa de resfriamento do sólido. Portanto, esta metodologia pode ser utilizada para descrever processos de secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento, considerando as condições de contorno constante ou do tipo convectiva e ainda variando a geometria que vai desde uma esfera até um cilindro infinito, passando por um esferóide prolato.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 Conclusões

Considerando a solução analítica da equação de difusão de massa para o processo de secagem em corpos com geometria elipsoidal, pode-se chegar de forma geral as seguintes conclusões:

◆ O tratamento matemático utilizado para obtenção da solução analítica da equação de difusão em coordenadas esferoidais prolata com condição de contorno convectiva na superfície do corpo, foi adequado e pode ser utilizado para descrever fenômenos difusivos, tais como: aquecimento, resfriamento, secagem e umidificação, bem como ratificar os modelos numéricos.

◆ A partir da solução encontrada, é possível obter a distribuição interna da grandeza em estudo, bem como a cinética de difusão, em corpos com formas de cilindro infinito, elipsóide e esfera, considerando o coeficiente de difusão constante e não-existência de encolhimento.

◆ O teor de umidade médio adimensional de um esferóide prolato diminui com o aumento do número de Fourier, para qualquer razão de aspecto durante o processo de secagem. Comportamento similar é evidenciado em qualquer ponto no interior do sólido.

◆ A diferença entre o teor de umidade no centro e no ponto focal de um esferóide prolato depende da razão de aspecto L_2/L_1 e é maior em sólidos com maior razão de aspecto. Esta diferença depende do número de Biot.

◆ A taxa de difusão de um sólido e a distribuição de umidade no seu interior é afetada pelo número de Biot característico do processo. Para L_2/L_1 fixo, o aumento do número de Biot origina um acréscimo nos gradientes de umidade no interior do sólido.

◆ O teor de umidade é fortemente dependente da coordenada radial(ξ), decrescendo com o aumento dessa coordenada ξ , é independentemente da coordenada angular(η) para o caso $L_2/L_1=1,0$, e é fortemente dependente das coordenadas radial e angular para o caso $L_2/L_1=2,0$, principalmente para altos números de Biot.

◆ Para sólidos esferoidais prolatos com o número de Biot qualquer, submetidos às mesmas condições externas de ar de secagem, o equilíbrio higroscópico é atingido mais rapidamente naqueles sólidos onde a razão de aspecto é menor. Atribui-se isto a relação área/volume.

◆ As linhas de iso-concentração de umidade mostram que, em regiões pontiagudas, o processo de secagem é rápido.

◆ O teor de umidade no interior de um sólido que se aproxima de uma forma esférica, depende apenas da coordenada radial (ξ), em qualquer número de Biot.

5.2 Sugestões para futuros trabalhos

◆ Na formulação apresentada, adicionar o encolhimento do produto durante o processo de secagem.

◆ Validar experimentalmente a solução apresentada neste trabalho.

◆ Apresentar a solução analítica da equação de difusão aplicada a sólidos esferoidais oblatos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications, Inc., USA, 1972, p. 752-772.
- Acho, T. M. Scalar wave scattering of a prolate spheroid as a parameter expansion of that of a sphere. Quarterly of Applied Mathematics, v. L, n. 3, p. 451-468, 1992.
- Alassar, R. S. Heat conduction from spheroids. Journal of Heat Transfer, v. 121, n. 2, p. 497-499, 1999.
- Alsina, O.L.S.; Aragão, R.F.; Monteiro, L.F. Thin layer drying of mesquite beans. In: Inter-American Drying Conference, 1997. Itu: Proceedings... v. B, p. 524-529.
- Alvarenga, L. C.; Fortes, M.; Pinheiro Filho, J. B.; Hara, T. Transporte de umidade no interior de grãos de feijão preto sob condições de secagem. Revista Brasileira de Armazenamento, v.5, n.1, p. 5-18, junho de 1980.
- Aoi, T. On spheroidal functions. Journal of Physical Society of Japan, v. 10, n.2, p.130-141, 1995.
- Aregba, W.; Jomaa, W.; Puigalli J. R. Une approche du sechage de matériaux fortement deformables. Revue Phys. Appl. v. 25, n. 11, p.161-1175, 1990.
- Azzouz, S.; Jomaa, W.; Belghith, A. Drying kinetic equation of single layer of grapes. In: International Drying Symposium (Drying'98), Thessaloniki: Proceedings... v.B, 1998, p. 988-997.
- Balaban, M. Effect of volume change in foods on the temperature and moisture content predictions of simultaneous heat and moisture transfer models. Journal Food Processing Engineering, v. 12, n. 1, p. 67-68, 1989.
- Batteman, H. Tables integral transforms. V.II. New York: McGraw-Hill Company, Inc., 1954, 451p.

- Beck, J.V.; Cole, K.D.; Haji-Sheikj, A.; Litkouhi, B. Heat conduction using Green's functions. London: Hemisphere Publishing Comparison, 1992, 523p.
- Berthet, D.; Bakhouya, A.; Bouzon, J.; Vergnaud, J. M. Drying of polymers. Modeling with diffusion-evaporation and shrinkage. In: Mujumdar, A. S. ed. Drying'92. Elsevier Science Publishers B. V. 1992.
- Brebia, C. A., Dominguez, J. Boundary elements: an introductory course. New York: McGraw-Hill Company, 1989, 292 p.
- Brodkey, R. S. The phenomena of fluid motions. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1967, p.18-23.
- Butkov, E. Física matemática. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A. 1978, 725 p.
- Carmo, J. E. F. Difusão em sólidos esferoidais oblatos: modelagem e simulação. Campina Grande, Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 2000, 76 p. Dissertação (mestrado).
- Carmo, J. E. F; Lima, A G. B. Mass transfer in oblate spheroidal solids. In: Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT 2000), 2000a. Porto Alegre: Proceedings..., CD-ROM.
- Carmo, J. E. F; Lima, A G. B. Simulação numérica da transferência de massa em esferóides oblatos. In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2000), 2000b. Natal: Anais..., CD-ROM.
- Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. Conduction of heat in solids, Oxford University Press, New York, USA, 1959, 510p.
- Coutelieris, F.A.; Burganos, V. N.; Payatakes, A. C. Convective diffusion and adsorption in a swarm of spheroidal particles. AICHE Journal, v. 41, n.3, May 1995. p. 1122-1134.
- Crank, J. The mathematics of diffusion. Oxford Science Publications, New York, USA, 1992, 414p.

- Dennemeyer, R. Introduction to partial differential equations and boundary value problems. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968, 376p.
- Do-Nhat, T., MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. Quarterly Applied Mathematics, v. LIV, n. 4, p. 677-685, 1996a.
- Do-Nhat, T.; MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. Quarterly of Applied Mathematics, v. LIV, n. 4, p.721-725, 1996b.
- Elvira, C. The Diffusion process modelling in elliptic shaped bodies. In: International Congress Engineering and Food, London. Proceedings.... v. 1, p.456-464, 1990.
- Farrel, J.; Ross, B. Solved problems: Gamma and Beta functions, Legendre polynomials, Bessel functions. New York: The MacMillan Company, 1963, 410 p.
- Fortes, M. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media with special reference to drying of grains and foods. Purdue University, 1978, 226p. (Ph.D Thesis).
- Fortes, M. Um estudo fundamental de transporte de massa e energia em meios capilares porosos. Belo Horizonte. Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, 1982, 100 p. Tese (Livre Docência).
- Feng, Z.; Michaelides, E. E. Unsteady heat and mass transfer from a spheroid. AIChE Journal. v. 43 n.3, march, 1997.
- Flammer, C. Spheroidal wave functions. Stanford University Press, Stanford, 1957, 220p.
- Fortes, M.; Okos, M. R. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media. Transactions of the ASAE, v.24, p. 756-760, 1981.
- Fortes, M., Okos, M. R. Advances in drying. Washington: Hemisphere Publishing Corporation. 1980, Chapter Five: Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, v.1, p.119-154.

- Fusco, A J.; Avanza, J. R.; Aguerre, R. J.; Gabitto, J. F. Diffusional model for drying with volume change. *Drying Technology*, v. 9, n. 2, pp. 397-417, 1991.
- Gebhart, B. Heat conduction and mass diffusion. McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1993, 634p.
- Gouveia, J. P. G. Almeida, F. A C.; Murr, F. E. X. Estudo da difusividade e do encolhimento do gengibre durante a secagem. *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*. v.1 n.1, 1999, p.51-58.
- Gradsteyn, I. S., Ryzhik, I. M. Tables of integrals, series, and products. New York: Academic Press, 1965, 1086 p.
- Haghighi, K.; Irudayaraj, J.; Stroshine, R. L.; Sokhansanj, S. Grain kernel drying simulation using the finite element method. *Transaction of the ASAE*, v.33, n.6, p.1957-1965, 1990.
- Haji-Sheikh, A.; Sparrow, E. M. The solution of heat conduction problems by probability methods. *Transactions of the ASAE: Journal of Heat Transfer*, v. 89, series C, n.2. May, 1967.
- Haji-Sheikh, A.; Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. *Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer*, v. 88, n. 3, p. 331-333, August 1966.
- Haji-Sheikh, A. 1986, Integral methods in science and engineering, Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions, p.467-479.
- Happel, J.; Brenner, H. Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, 553 p.
- Igathinathane, C.; Chattopadhyay, P. K. Surface area of general ellipsoid shaped food materials by simplified regression equation method. *Journal of Food Engineering*. v. 46, 2000, p. 257-266.
- Jomaa, W.; Puiggali, J. R. Drying of shrinkage materials: modelling with shrinkage velocity. *Drying Technology*, v. 9, n. 5, p. 1271-1293, 1991.

- Júnior, S. A.; Innocentini, M. D.; Pandolfelli, V. C. Variáveis críticas no processo de secagem de concretos cerâmicos. *Cerâmica*, v. 45, n. 292-293, 1999.
- Kakaç, S.; Yener, Y. *Heat conduction*. Washington: Taylor & Francis, 1993, 363p.
- Keey, R. B. *Drying of loose and particulate materials*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1992. 502 p.
- Keltner, N. R. Transient heat flows in half-space due to an isothermal disk on the surface. *Journal Heat Transfer*. Aug., 1973, p. 412-414.
- Kreyszig, E. *Advanced engineering mathematics*. 6.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988, p. 498-504.
- Kreyszig, E. *Matemática superior*. 2. ed v.1, Rio de Janeiro: LTC: Livros Técnicos e Científicos S. A., 1983, p. 211-215.
- Lima, A G. B. *Estudo da secagem e dimensionamento de secador de casulos do bicho-da-seda*. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 1995. 190 p. Dissertação (Mestrado).
- Lima, A. G. B. Nebra, S. A, Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids. *Drying Technology*, v. 18, n. 1-2, 2000a, p. 21-48.
- Lima, L. A.; Lima. A. G. B. Transferência de calor e massa durante a secagem de sólidos com forma arbitrária: uma abordagem concentrada. *Anais do XXX Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola (Conbea'2001)*, Fox do Iguaçu, Brasil, v. 1., 2001, CD-ROM.
- Lima, A G. B.; Nebra, S. A; Sakanaka, P. H., Analytical solution of mass diffusion equation applied to ellipsoid of revolution, *Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, November 22-26, Águas de Lindóia, Brazil, vol. 1., 1999, CD-ROM.
- Lima, A. G. B.; Queiroz, M. R.; Nebra, S. A., Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solids with ellipsoidal configuration. *Proceedings of the International Drying Symposium (IDS'2000)*, Noordwijkerhout, Holanda, vol. 1, 2000, CD-ROM.

- Lima, L. A. Difusão em sólidos com geometrias arbitrárias: uma abordagem concentrada. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 2001, 60p. Relatório Técnico - Científico (PIBIC/UFPB/CNPq).
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. caracterização de formas geométricas de sólidos e seus efeitos no fenômeno difusional. Anais do XXVII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola (Conbea'99), Pelotas, Brasil, v. 1., 1999, CD-ROM.
- Lima, A.G.B. Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 265p. Tese (doutorado).
- Lu, R.; Siebenmorgen, T. J. Moisture diffusivity of long-grain in rice components. Transactions of the ASAE, v. 35, n. 6, p. 1955-1961, 1992.
- Luikov, A. V.; Mikhailov, Yu. A. Theory of energy and mass transfer. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1965, 392 p.
- Luikov, A. V. Analytical heat diffusion theory. Academic Press, Inc. Ltd., London, England, 1968, 684p.
- Luikov, A. V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies: review. International Journal heat and mass transfer, v.18, p.1-14, 1975.
- MacRobert, T. M. Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic function with application. Oxford: Pergamon Press, 1967, 349 p.
- Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R. P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 1966, p.472-495.
- Maliska, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 1995, 424 p.
- Marinos-Kouris D.; Maroulis, B. Transport properties in the drying of solids. Handbook of Industrial Drying. New York: Marcel Dekker Inc. v. 1, p.113-150, 1995.

- Mariz, T. F.. Secagem da casca de caroço de algodão em leito fixo. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 1986. 139 p. dissertação (Mestrado).
- Misra, R. N.; Young, J. H. Numerical solution of simultaneous diffusion and shrinkage during soybean drying. *Trans. ASAE*, v. 23, n. 5, p. 1277-1282, 1980.
- Morse, P. M.; Feshbach, H. *Methods of theoretical physics. Part I.* New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953a, p. 557-560.
- Morse, P. M.; Feshbach, H. *Methods of theoretical physics. Part II.* New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953b, p. 1502-1503.
- Niven, C. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution. *Philosophical Transactions Royal Society, London*, v.171, p. 117-151, 1880.
- Norminton, E. J.; Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids an the thin circular disk. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. XVII, Part. 1, p. 65-72, 1964.
- Oliveira, E. C.; Maiorino, J. E. *Introdução aos métodos da matemática aplicada.* Editora da Unicamp, Campinas, 1997.
- Page, L.; Júnior, N. I. A. The electrical oscillations of a prolate spheroid. *The Physical Review*, v.53, p.819-831, May, 1938.
- Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper II. Prolate spheroidal wave functions. *The Physical Review*, v. 65, n. 3 e 4, p. 98-110, 1944a.
- Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper III. The antenna problem. *The Physical Review*, v. 65, n. 3 e 4, p. 111-117, 1944b.
- Parry, J. L. Mathematical modelling and computer simulation of heat and mass transfer in agricultural grain drying. A review. *Journal of Agricultural Engineering Research*, v. 32, p. 1-29, 1985.

- Parti, M. Evaluation of selected mathematical models for grain drying. In: Proceedings of the International Drying Symposium (IDS'90/CHISA'90), Praha, v. 3, 1990, p. 153-162.
- Parti, M. Selection of mathematics models for drying grain in thin-layers. Journal of Agricultural Engineering Research, v.54, p. 339-352, 1993.
- Queiroz, M. R.; Nebra, S. A. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas. Journal of Food Engineering. v. 47, 2001, p. 127-132.
- Queiroz, M. R. Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1994, 176p. Tese (Doutorado).
- Robin, L. Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheróidales. Tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1959, 288p.
- Rovedo, C. O.; Suarez, C.; Viollaz, P. E. Drying simulation of a solid slab with three dimensional shrinkage. Drying Technology, v. 13, n. 1-2, p. 371-393, 1995.
- Sarker, N. N., Kunze, O. R., Stroubolis, T. Finite element simulation of rough rice drying. Drying Technonology, v.12, n.4, p. 761-775, 1994.
- Sheen, S.; Hayakawa, K. Parametric analysis for frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. Journal of Food Science, v.57, n.1, 1992, p. 236-248.
- Sokhansanj, S., Patil, R. T. Kinetics of dehydration of green alfafa. Drying Technology, v.14. n.5, p. 1197-1234, 1996.
- Sokhansanj, S. Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application, In: International Drying Symposium (IDS'80), 1980, Montreal: Proceeding...v.2, p.229-232.
- Steffe, J. T.; Singh. R. P. Theoretical and practical aspects of rough rice tempering. Transactions of the ASAE, v. 23, p. 775-782, 1980.

- Stratton, J. A.; Morse, P. M.; Chu, L. J.; Little, J. D. C.; Huntner, R. A. Elliptic cylinder and spheroidal wave functions. The Tech. Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, Inc., USA, 1941, 127p.
- Stratton, J. A.; Morse, P. M.; Chu, L. J.; Little, J. D. C.; Corbató, F. J. Spheroidal wave functions. New York: The Technology Press of M. I. T and John Wiley & Sons, Inc., 1956, 613 p.
- Strumillo, C.; Kudra, T. Drying: principles, science and design. New York: Gordon and Beach Publishing, 1986, 448 p.
- Suarez, C.; Viollaz, P.E. Shrinkage effect on drying behavior or potato slabs. J. Food Eng. v. 13, n. 2, p. 103-114, 1991.
- Vagenas, G. K.; Marinos-Kouris, D. Drying kinetics of apricots. Drying Technology. v. 9, n. 3, p. 735-752, 1991.
- Vieira, W. G.; Silva, L. H. M. Modeling drying process of granular cereal: a boundary element approach. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997,Itu. Proceedings... v.B, p. 347-355.
- Watson, G. N. Theory of Bessel functions. Cambridge, 1944.
- Whitaker, S. Advances in drying. Chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media, New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, v.1, p. 23-61.
- Wrobel, L. C.; Brebbia, C. A. A formulation of the boundary element method for axi-symmetric transient heat conduction. International Journal Heat and Mass Transfer, v. 24, n. 5, p. 843-850, 1981.
- Wylie, C. R.; Barrett, L. C. Advanced engineering mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.

ANEXOS

Tabela A1.1 - Valores dos coeficientes c, b e $A_{m,k}$ e critério de ortogonalidade das funções esferoidais para $L_2/L_1=1,5$ e Bi infinito.

m	k	c	b	$A_{m,k}/(M_o - M_e)$	$\int_0^1 \int_1^{1,2/L} \chi_m \lambda_m \chi_p \lambda_p (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta, m \neq p$
0	1	3.1613	2.3041	2.8898	$1.97789 \cdot 10^{-9}$
	2	6.6042	5.8177	-3.2574	$3.47835 \cdot 10^{-3}$
	3	14.1771	13.4390	-9.3857	$-6.62832 \cdot 10^{-4}$
	4	18.7941	18.0533	-3.1550	$-5.13144 \cdot 10^{-9}$
2	1	5.0489	20.4261	1.7855	$-1.42201 \cdot 10^{-9}$
	2	7.0626	49.4593	0.9060	$2.27170 \cdot 10^{-5}$
	3	8.4710	38.3903	-2.2259	$1.26861 \cdot 10^{-4}$
	4	11.8407	55.3294	2.0254	$1.39304 \cdot 10^{-5}$
	5	16.5901	79.1242	-4.7425	$-1.56134 \cdot 10^{-4}$
	6	18.8150	90.2606	3.4800	$4.16671 \cdot 10^{-5}$
4	1	10.3359	80.7357	-1.8682	$-2.32673 \cdot 10^{-5}$
	2	13.7548	112.0640	1.8693	$-3.87878 \cdot 10^{-4}$
	3	16.7759	139.4910	0.5535	$8.39733 \cdot 10^{-5}$
	4	19.0630	160.1890	-3.8840	$-3.21613 \cdot 10^{-5}$
	5	21.1952	179.4580	5.8075	$-1.37470 \cdot 10^{-5}$
	6	23.4855	200.1350	-9.9613	$3.84428 \cdot 10^{-5}$
	7	25.8430	221.4050	14.6651	$-6.51851 \cdot 10^{-4}$
6	1	9.0350	87.4265	-3.1760	$-6.51835 \cdot 10^{-4}$
	2	12.3075	133.8000	-1.4692	$6.58380 \cdot 10^{-5}$
	3	15.6380	178.5460	1.7359	$-5.28245 \cdot 10^{-6}$
	4	18.8999	221.6740	-1.0665	$4.40830 \cdot 10^{-5}$
	5	21.5036	255.9240	-3.7644	$3.52393 \cdot 10^{-5}$
	6	23.6310	283.7650	8.3081	$4.45120 \cdot 10^{-6}$
	7	25.7666	311.7030	-9.4549	$-1.95840 \cdot 10^{-5}$
8	1	14.3543	198.0180	-1.2088	$9.97762 \cdot 10^{-5}$
	2	17.5744	255.4870	1.7303	$3.87932 \cdot 10^{-6}$
	3	20.9040	313.6180	-1.5427	$2.05554 \cdot 10^{-6}$
	4	26.3767	408.0380	18.4540	$1.81890 \cdot 10^{-5}$
	5	27.6548	429.9840	24.5638	$2.48666 \cdot 10^{-5}$
	6	29.4351	460.5120	24.3596	$7.71987 \cdot 10^{-5}$
10	1	16.4436	278.4280	-0.5374	$1.53761 \cdot 10^{-3}$
	2	19.5762	343.5460	1.7343	$1.34411 \cdot 10^{-9}$
	3	22.8731	415.4000	-1.5988	$-1.49759 \cdot 10^{-6}$
	4	25.8536	479.5230	0.5930	$-9.22916 \cdot 10^{-7}$
	5	28.7182	540.7350	-4.8223	$-2.49691 \cdot 10^{-3}$
	6	32.6842	624.5930	-2.4928	$-1.10659 \cdot 10^{-4}$
	7	35.9851	695.0430	-3.3487	$-1.29627 \cdot 10^{-5}$

12	1	18.5447	359.5830	0.1699	$1.22497 \cdot 10^{-4}$
	2	21.6308	443.0280	2.2809	$2.77808 \cdot 10^{-5}$
	3	24.8761	528.1340	-1.5598	$-2.16264 \cdot 10^{-7}$
	4	27.7597	602.5810	-0.8195	$-9.01749 \cdot 10^{-5}$
	5	29.4742	646.5230	7.4353	$9.20700 \cdot 10^{-5}$
	6	32.6842	728.3640	1.9211	$7.60434 \cdot 10^{-5}$
	7	36.0142	812.8580	2.1957	$3.71984 \cdot 10^{-6}$
14	1	20.6000	494.6910	0.2244	$5.43180 \cdot 10^{-5}$
	2	23.7235	554.0250	3.0554	$6.19466 \cdot 10^{-5}$
	3	26.9558	653.3760	-1.9157	$6.3467 \cdot 10^{-7}$
	4	32.6316	823.8420	-1.3512	$-4.73789 \cdot 10^{-5}$
	5	35.8860	920.3840	-1.7197	$2.98396 \cdot 10^{-7}$
	6	38.8789	1008.720	1.9743	$-8.71227 \cdot 10^{-6}$
	7	41.8776	1096.930	-0.6502	$-3.40215 \cdot 10^{-6}$

Tabela A1.2 - Coeficientes de expansão das funções esferoidais para $L_2/L_1=1,5$ e Bi infinito.

C_{mk}		$d_{n,m}$								
m	k	n=0	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=14	n=16
0	1	0.69841	-0.538419	0.815576	-0.005534	0.000213	-5.259021	9.052570	-1.146990	1.114100
	2	0.48769	-0.73134	0.320319	-0.074607	0.010727	-0.001040	0.000072	-3.768330	1.52523
	3	0.332679	-0.665574	0.536624	-0.291132	0.115337	-0.033463	-0.008114	-0.001516	0.000230
	4	0.289004	-0.612202	0.561917	-0.371160	0.189384	-0.076958	0.025394	-0.006912	0.001571
2	1	0.251012	0.880995	-0.683741	0.156465	-0.017907	0.0012460	-0.000058	1.992090	-5.131000
	2	-0.166005	-0.819522	-0.913960	0.972904	-0.304859	0.0502361	-0.005240	0.000381	-0.000020
	3	0.221593	0.311014	-0.894007	0.558226	-0.17289	0.032788	-0.004231	0.000397	-0.000028
	4	0.184130	0.077210	-0.714162	0.740189	-0.389569	0.129552	-0.030030	0.005148	-0.000680
	5	0.154563	-0.055670	-0.465528	0.738216	-0.595162	0.315738	-0.121168	0.035435	-0.008175
	6	0.144958	-0.086890	-0.376983	0.695500	-0.641164	0.394124	-0.177889	0.062000	-0.172383
4	1	0.150235	0.438015	-0.121645	-0.751809	0.648643	-0.250548	0.058610	-0.009391	0.001105
	2	0.127793	0.237651	-0.401363	-0.350352	0.765535	-0.538142	0.220018	-0.061133	0.012471
	3	0.115187	0.135037	-0.438233	-0.049585	0.640068	-0.680163	0.397444	-0.156918	0.045627
	4	0.107898	0.083602	-0.421320	0.1058150	0.495697	-0.704062	0.511742	-0.249395	0.089723
	5	0.102225	0.048343	-0.392815	0.204745	0.358319	-0.677754	0.588165	-0.338237	0.143771
	6	0.097085	0.019788	-0.357651	0.274368	0.223239	-0.615982	0.635253	-0.425762	0.210854
	7	0.092521	-0.002513	-0.321168	0.317830	0.103926	-0.532756	0.649758	-0.499796	0.283320
6	1	-0.011458	0.205627	0.551465	0.503787	-0.638326	0.243729	-0.050878	0.006931	-0.000674
	2	0.012631	0.453591	0.319684	-0.368296	-0.613867	0.724096	-0.340039	0.095681	-0.018523
	3	0.102755	0.290995	-0.819605	-0.530978	-0.020684	0.682080	-0.631075	0.307426	-0.099239
	4	0.091610	0.191030	-0.240433	-0.378777	0.331821	0.360527	-0.698805	0.528986	-0.251922
	5	0.085374	0.137015	-0.286868	-0.228899	0.438027	0.089317	-0.603890	0.634875	-0.392092
	6	0.081216	0.103709	-0.298630	-0.120872	0.450648	-0.090919	-0.471740	0.658947	-0.492864
	7	0.077636	0.077220	-0.297413	-0.031036	0.424072	-0.225028	-0.321286	0.632645	-0.567592
8	1	0.100995	0.373315	0.446362	0.150480	-0.441762	-0.406712	0.667244	-0.374036	0.123967
	2	0.085368	0.293764	0.139153	-0.310326	-0.457931	0.207658	0.528595	-0.650524	0.372199
	3	0.076093	0.211444	-0.066336	-0.397872	-0.123253	0.478591	0.076269	-0.608678	0.595921
	4	0.067089	0.124445	-0.199498	-0.252112	0.248775	0.300295	-0.397136	-0.116367	0.563541
	5	0.065473	-0.211510	-0.209497	0.287775	0.223765	-0.429949	0.0005979	0.493596	0.109940
	6	0.063433	0.092324	-0.221639	-0.152925	0.319758	0.119075	-0.438214	0.141557	0.376043
10	1	0.104157	0.361784	0.519016	0.474357	0.0459431	-0.554407	-0.305065	0.739198	-0.487694
	2	0.080152	0.298286	0.278515	-0.039062	-0.4348	-0.348941	0.363166	0.392427	-0.671840
	3	0.067334	0.221449	0.065114	-0.284543	-0.362829	0.113561	0.481247	-0.143853	-0.486874
	4	0.062013	0.173128	-0.0492355	-0.325419	-0.156622	0.339364	0.266524	-0.411825	-0.132729
	5	0.058477	0.138017	-0.114414	-0.293678	0.0218865	0.380361	0.008439	-0.448457	0.180649
	6	0.055126	0.102503	-0.162770	-0.214269	0.182552	0.285951	-0.244945	-0.271354	0.411007
	7	0.053628	0.081808	-0.184133	-0.146692	0.253225	0.163622	-0.342528	-0.067810	0.430093

12	1	0.072447	0.231699	0.359914	0.446427	0.358028	-0.037480	-0.471229	-0.140759	0.580967
	2	0.073014	0.269366	0.324582	0.174970	-0.165784	-0.436807	-0.199536	0.416879	0.224779
	3	0.059872	0.216746	0.154521	-0.122477	-0.370799	-0.230949	0.274460	0.390273	-0.292979
	4	0.055223	0.178349	0.041145	-0.242536	-0.304636	0.056540	0.403762	0.0702593	-0.461391
	5	0.053583	0.160086	-0.00810	-0.269921	-0.225836	0.183878	0.367387	-0.115293	-0.423164
	6	0.052121	0.134977	-0.074428	-0.276153	-0.072690	0.315278	0.194952	-0.341345	-0.201171
	7	0.052687	0.123309	-0.120786	-0.261858	0.0578057	0.351185	-0.007813	-0.413097	0.072011
14	1	0.039722	0.140432	0.254324	0.398274	0.500488	0.380584	-0.091688	-0.527573	-0.065563
	2	0.086770	0.295664	0.394703	0.349085	0.101916	-0.284173	-0.479970	-0.092108	0.508176
	3	0.058748	0.221546	0.221406	0.023336	-0.269554	-0.386260	-0.087872	0.384699	0.280706
	4	0.051344	0.172975	0.042100	-0.232839	-0.303241	0.0217615	0.384106	0.183260	-0.382181
	5	0.049186	0.174569	-0.001480	-0.286654	-0.23167	0.203678	0.394875	-0.081907	-0.471643
	6	0.041118	0.187781	-0.006331	-0.311342	-0.184481	0.299750	0.346297	-0.258087	-0.428591
	7	0.024079	0.200660	0.019230	-0.318074	-0.16921	0.342940	0.297429	-0.357497	-0.349672

C_{mk}		$d_{n,m}$						
m	k	n=18	n=20	n=22	n=24	n=26	n=28	n=30
0	1	-8.558280	5.328780	-2.743520	1.187370	-4.380020	1.393500	-3.862780
	2	-4.926700	1.298530	-2.844270	5.257480	-8.308620	1.135250	-1.354050
	3	-0.000029	3.044510	-2.720610	2.086840	-1.387530	8.066800	-4.123960
	4	-0.000302	0.000049	-7.015370	8.629080	-9.299300	8.842000	-7.421920
2	1	1.036780	-1.688250	2.263410	-2.542530	2.42813	-1.99559	1.42705
	2	8.564390	-2.846780	7.732590	-1.749910	3.352207	-5.50774	7.84893
	3	1.589450	-7.206530	2.694890	-8.455290	2.25787	-5.19421	1.03984
	4	0.000070	-6.092190	4.314350	-2.575010	1.31276	-5.7824	2.21982
	5	0.001526	-0.000235	0.000030	-3.354740	3.18065	-2.62245	1.88889
	6	0.003915	-0.000740	0.000118	-0.000016	1.90272	-1.96041	1.76570
4	1	-0.000010	7.186220	-4.213590	2.055200	-8.475660	2.995640	-9.171450
	2	-0.001959	0.000245	-0.000025	2.139060	-1.544050	9.56460	-5.129880
	3	-0.010269	0.001850	-0.000273	0.0000338	-3.549500	3.206540	-2.506850
	4	-0.025095	0.005643	-0.001045	0.000162	-0.000021	2.460130	-2.430520
	5	-0.047701	0.012781	-0.002832	0.000528	-0.000084	0.000012	-1.387760
	6	-0.081820	0.025759	-0.006738	0.001491	-0.000283	0.000046	-6.611070
	7	-0.126228	0.045830	-0.013889	0.003576	-0.000793	0.000153	-0.000026
6	1	0.0000495	-2.85939	1.33362	-5.14013	1.66659	-4.61262	1.10265
	2	0.002655	-0.000295	0.000026	-1.92743	1.18276	-6.1762	2.77563
	3	0.023356	-0.004233	0.000612	-0.000073	7.21416	-6.08852	4.40833
	4	0.086121	-0.022551	0.004708	-0.000806	0.000115	-0.000014	1.46623
	5	0.170975	-0.056853	0.0150637	-0.003274	0.000597	-0.000092	0.000012
	6	0.255447	-0.100482	0.031476	-0.008097	0.001748	-0.000322	0.000050
	7	0.343732	-0.156966	0.057024	-0.017027	0.004273	-0.000916	0.000165

8	1	-0.028346	0.004828	-0.000642	0.000069	-6.131139	4.58984	-2.9299
	2	-0.137558	0.036823	-0.007587	0.00125089	-0.000169	0.000019	-1.8605
	3	-0.334263	0.130799	-0.038769	0.009122	-0.001757	0.000283	-0.000038
	4	-0.595760	0.388169	-0.184231	0.0683419	-0.020621	0.005188	-0.001073
	5	-6.145830	0.446214	-0.232746	0.094426	-0.031101	0.008531	-0.001911
	6	-0.610121	0.514218	-0.303857	0.138529	-0.0511127	0.0156724	-0.00389099
10	1	0.186954	-0.049474	0.009799	-0.001524	0.000192	-0.000020	1.784940
	2	0.448754	-0.188249	0.0567982	-0.013318	0.002451	-0.000376	0.000048
	3	0.628946	-0.410166	0.180871	-0.059733	0.015590	-0.003325	0.000570
	4	0.579262	-0.570157	0.343157	-0.149548	0.050728	-0.013932	0.003069
	5	0.373168	-0.608712	0.490688	-0.273372	0.115396	-0.039136	0.010414
	6	0.010988	-0.469084	0.594004	-0.451374	0.250939	-0.109139	0.035901
	7	-0.239676	-0.249802	0.565564	-0.562797	0.385076	-0.20025	0.076006
12	1	-0.445286	0.194072	-0.058329	0.013164	-0.002344	0.000340	-0.000041
	2	-0.599345	0.466775	-0.220816	0.074510	-0.019314	0.000401	-0.000674
	3	0.060175	0.473293	-0.588440	0.402972	-0.193959	0.071411	-0.019974
	4	-0.333609	0.606786	-0.459418	0.22688	-0.082883	0.023766	-0.005348
	5	0.254443	0.311335	-0.592999	0.497057	-0.279635	0.117930	-0.036915
	6	0.448187	-0.036678	-0.461817	0.602886	-0.451582	0.240158	-0.090186
	7	0.441280	-0.335294	-0.209490	0.597024	-0.607061	0.400020	-0.175263
14	1	0.615459	-0.535016	0.259069	-0.086443	0.021724	-0.004322	0.000690
	2	0.105453	-0.621387	0.565978	-0.300377	0.112579	-0.032262	0.007144
	3	-0.405638	-0.190319	0.590175	-0.524254	0.289819	-0.110900	0.034095
	4	-0.235816	0.473550	0.0200259	-0.534595	0.622947	-0.419880	0.181088
	5	0.086512	0.507143	-0.332768	-0.306686	0.681816	-0.603934	0.307793
	6	0.315293	0.399146	-0.533015	-0.063543	0.639223	-0.719424	0.415382
	7	0.448401	0.257945	-0.618051	0.139039	0.545409	-0.771898	0.493122

Tabela A2.1 - Valores dos coeficientes c, b e $A_{m,k}$ e critério de ortogonalidade das funções esferoidais para $L_2/L_1=2,0$ e Bi infinito.

m	k	c	b	$A_{m,k}/(M_0 - M_c)$	$\int_0^1 \int_1^{L_2/L_1} \chi_m \lambda_m \chi_p \lambda_p (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta, m \neq p$
0	1	4.6746	3.8636	3.5348	$6.41587 \cdot 10^{-4}$
	2	9.5115	8.7779	-1.3877	$-8.37506 \cdot 10^{-4}$
	3	11.6334	10.897	-0.2967	$8.79536 \cdot 10^{-4}$
	4	13.5690	12.831	17.9204	$-5.46176 \cdot 10^{-4}$
2	1	11.6904	54.576	-2.0966	$-4.20132 \cdot 10^{-5}$
	2	14.4583	68.440	-3.5026	$-1.40557 \cdot 10^{-4}$
4	1	13.9965	114.26	-2.4213	$-1.23023 \cdot 10^{-5}$
	2	17.4440	145.54	-2.3423	$-5.45907 \cdot 10^{-5}$
	3	19.1603	161.0600	17.0185	$4.40289 \cdot 10^{-5}$
	4	21.8324	185.2120	-29.5373	$-2.65425 \cdot 10^{-5}$
6	1	16.2665	186.8890	-2.2122	$-2.04179 \cdot 10^{-6}$
	2	20.2481	239.4070	-0.8406	$-6.80734 \cdot 10^{-5}$
8	1	18.5545	272.6900	-1.9484	$1.12794 \cdot 10^{-6}$
	2	22.8528	347.3490	0.7631	$3.08781 \cdot 10^{-5}$
10	1	20.8910	372.3620	-1.6245	$3.23293 \cdot 10^{-6}$
	2	25.3161	467.9990	1.7290	$3.96643 \cdot 10^{-6}$
	3	45.3369	892.6470	2.5201	$-4.79024 \cdot 10^{-6}$
	4	48.7639	964.9200	-0.5360	$2.16565 \cdot 10^{-6}$
12	1	23.2782	486.4580	-1.4192	$5.74296 \cdot 10^{-6}$
	2	27.4693	597.1170	0.5330	$-2.50993 \cdot 10^{-6}$
	3	33.5620	750.6710	5.7007	$2.24648 \cdot 10^{-5}$
	4	37.9740	862.4740	-9.1902	$-5.66002 \cdot 10^{-6}$
	5	41.9405	962.5950	4.1460	$1.17455 \cdot 10^{-6}$
	6	45.5260	1052.960	-1.1493	$-1.11135 \cdot 10^{-5}$
	7	48.8385	1136.290	0.5752	$2.91798 \cdot 10^{-5}$
14	1	25.7160	615.5500	-1.1231	$9.87850 \cdot 10^{-6}$
	2	29.1545	719.8420	-2.5687	$-3.65720 \cdot 10^{-6}$
	3	33.6244	853.361	-3.9293	$-7.39001 \cdot 10^{-6}$
	4	38.0194	983.39	5.2104	$-3.21383 \cdot 10^{-6}$
	5	41.6690	1090.81	-0.6771	$-8.43853 \cdot 10^{-6}$
	6	45.1529	1193.04	1.7729	$196329 \cdot 10^{-5}$
	7	48.7000	1296.89	-5.1569	$-2.02926 \cdot 10^{-5}$

Tabela A2.2 - Coeficientes de expansão das funções esferoidais para $L_2/L_1=2,0$ e Bi infinito.

C_{mk}		$d_{n,m}$								
m	k	n=0	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=14	n=16
0	1	0.579337	-0.680100	0.191686	-0.026038	0.002072	-0.000107	3.95599	-1.074260	2.246260
	2	0.405938	-0.721804	0.447820	-0.166316	0.041137	-0.007208	0.0009358	-0.000093	7.331450
	3	0.367169	-0.697473	0.500450	-0.228800	0.072964	-0.017045	0.0030235	-0.000418	0.000046
	4	0.340037	-0.673169	0.529959	-0.277677	0.105082	-0.029932	0.0066094	-0.001158	0.000164
2	1	0.185381	0.083991	-0.723080	0.736468	-0.380596	0.124095	-0.028169	0.004725	-0.000610
	2	0.165883	-0.011234	-0.567317	0.761276	-0.522336	0.232006	-0.073355	0.017438	-0.003235
4	1	0.126611	0.227432	-0.408713	-0.322369	0.760897	-0.554384	0.234112	-0.067162	0.014148
	2	0.112900	0.118201	-0.435631	0.001868	0.599730	-0.693868	0.43376	-0.182877	0.056827
	3	0.107619	0.081763	-0.420199	0.111203	0.489333	-0.703747	0.515911	-0.253479	0.091945
	4	0.100728	0.039560	-0.383259	0.227423	0.219060	-0.663315	0.604834	-0.363783	0.161743
6	1	0.100130	0.267971	-0.125603	-0.693808	0.631489	-0.663408	0.353689	-0.123925	0.031560
	2	0.088190	0.160904	-0.270235	-0.299884	0.402295	0.215165	-0.662162	0.594414	-0.325115
8	1	0.082005	0.266680	0.064170	-0.366248	-0.367138	0.334155	0.404012	-0.674219	0.451007
	2	0.0723887	0.174877	-0.134190	-0.362754	0.0502961	0.467526	-0.156098	-0.459430	0.644706
10	1	0.073299	0.263614	0.180280	-0.172271	-0.447956	-0.150975	0.477944	0.167113	-0.640888
	2	0.628096	0.180820	-0.032779	-0.325592	-0.194435	0.314437	0.314672	-0.388648	-0.199230
	3	0.052759	0.068159	-0.217737	-0.026348	0.311149	-0.107843	-0.321111	0.323543	0.136700
	4	0.049649	0.080239	-0.224555	-0.014332	0.317356	-0.159381	-0.286871	0.385634	0.028681
12	1	0.064601	0.242324	0.235518	0.001760	-0.322442	-0.378352	0.0723054	0.478769	-0.063523
	2	0.053555	0.193976	0.134383	-0.114042	-0.338335	-0.245432	0.179377	0.414011	-0.031050
	3	0.052979	0.130348	-0.088229	-0.272884	-0.034831	0.331867	0.140044	-0.373849	-0.128122
	4	0.053672	0.124774	-0.141934	-0.256489	0.118868	0.350997	-0.112711	-0.407395	0.213153
	5	0.054669	0.150460	-0.175530	-0.270473	0.217167	0.348740	-0.288564	-0.357578	0.442520
	6	0.049545	0.202828	-0.193313	-0.324004	0.289291	0.375986	-0.426799	-0.317106	0.617441
	7	0.033614	0.275160	-0.189785	-0.414872	0.345470	0.443121	-0.556118	-0.306112	0.785607
14	1	0.065152	0.244280	0.282284	0.131012	-0.172208	-0.411236	-0.262685	0.264156	0.428746
	2	0.053555	0.193976	0.134383	-0.114042	-0.338335	-0.245432	0.179377	0.414011	-0.031050
	3	0.051022	0.171461	0.024562	-0.253218	-0.281341	0.086219	0.400201	0.098348	-0.431257
	4	0.044308	0.183478	-0.008310	-0.306196	-0.195210	0.278406	0.361948	-0.215853	-0.447677
	5	0.025539	0.200017	0.016639	-0.318143	-0.169298	0.341241	0.30023	-0.352672	-0.355111
	6	-0.002538	0.202614	0.071021	-0.307816	-0.184253	0.352261	0.269827	-0.405476	-0.278253
	7	-0.034622	0.018492	0.141062	-0.280773	-0.227991	0.342604	0.275675	-0.426256	-0.239937

C_{mk}		$d_{n,m}$						
m	k	n=18	n=20	n=22	n=24	n=26	n=28	n=30
0	1	-3.726120	5.021320	-5.604760	5.265760	-4.221110	2.920720	-1.761960
	2	-4.656550	2.435310	-1.065870	3.958420	-1.262370	3.493030	-8.458700
	3	-4.200930	3.153540	-1.993430	1.074520	-4.99360	2.020130	-7.167480
	4	-0.000019	1.882160	-1.559970	1.108020	-6.812740	3.658680	-1.726690

2	1	0.000062	-5.21815 10 ⁻⁶	3.60858 10 ⁻⁷	-2.10266 10 ⁻⁸	1.0463 10 ⁻⁹	-4.4977 10 ⁻¹¹	1.68491 10 ⁻¹²
	2	0.000481	-0.000059	5.98644 10 ⁻⁶	-5.16471 10 ⁻⁷	3.82136 10 ⁻⁸	-2.45099 10 ⁻⁹	1.37199 10 ⁻⁶
4	1	-0.002296	0.000297	-0.000031	2.767820	-2.065860	1.323430	-7.340510
	2	-0.013685	0.002641	-0.000419	0.00005	-6.270040	6.090350	-5.118865
	3	-0.025937	0.005882	-0.001099	0.000172	-0.000023	2.658330	-2.650490
	4	-0.056196	0.015788	-0.003674	0.000721	-0.000121	0.000017	-2.205640
6	1	0.315689	-0.006185	0.000967	-0.000124	0.0000133	-1.213330	9.487020
	2	0.126703	-0.037730	0.008956	-0.001745	0.000285	-0.000039	4.676530
8	1	-0.189662	0.057211	-0.013224	0.002440	-0.000360	0.000047	-5.045130
	2	-0.452756	0.215029	-0.076491	0.021494	-0.004934	0.0009471	-0.000152
10	1	0.544869	-0.273241	0.096504	-0.025956	0.005566	-0.000980	0.000142
	2	0.603208	-0.548938	0.312751	-0.129944	0.042152	-0.011091	0.002340
	3	-0.480378	0.317513	0.170312	-0.568934	0.661746	-0.504381	0.251747
	4	-0.461064	0.430561	0.019576	-0.495833	0.693712	-0.585988	0.312275
12	1	-0.512768	0.575229	-0.344298	0.141476	-0.043881	0.010802	-0.002119
	2	-0.471219	0.145335	0.429925	-0.604924	0.437016	-0.215924	0.074739
	3	0.463314	-0.125347	-0.402478	0.612309	-0.496247	0.279934	-0.109835
	4	0.378179	-0.459543	-0.044735	0.549654	-0.678764	0.501785	-0.237331
	5	0.202006	-0.618754	0.274333	0.401033	-0.788159	0.717999	-0.385679
	6	0.030953	-0.711573	0.542204	0.243297	-0.873448	0.935937	-0.549273
	7	-0.11332	-0.796006	0.791747	0.090724	-0.963196	1.172710	-0.733418
14	1	-0.263901	-0.381676	0.618136	-0.445596	0.212431	-0.075150	0.019927
	2	-0.471219	0.145335	0.429925	-0.604924	0.437016	-0.215924	0.074739
	3	-0.136196	0.508326	-0.098874	-0.476139	0.654021	-0.479886	0.218596
	4	0.259617	0.437198	-0.488752	-0.131380	0.658831	0.692961	0.387021
	5	0.441851	0.267405	-0.614969	0.126974	0.552581	-0.769972	0.488785
	6	0.515460	0.130294	-0.634632	0.289836	0.436481	-0.782013	0.545121
	7	0.550963	0.040868	-0.630035	0.393705	0.345919	-0.782337	0.585886

Tabela A3.1 - Valores dos coeficientes c, b e $A_{m,k}$ e critério de ortogonalidade das funções esféricas para $L_2/L_1=2,0$ e $Bi=1,0$.

m	k	c	b	$A_{m,k}/(Mo - Mc)$	$\int_0^1 \int_1^{L_2/L_1} \chi_m \lambda_m \chi_p \lambda_p (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta, m \neq p$
0	1	1.9534	1.0835	1.4848	$-4.899991 \cdot 10^{-4}$
	2	7.4799	6.6989	-0.86643	$3.30227 \cdot 10^{-3}$
	3	10.2890	9.5545	0.3427	$2.90506 \cdot 10^{-3}$
2	1	5.8139	39.3376	0.0109	$-1.64286 \cdot 10^{-4}$
	2	23.8162	115.2830	-14.8797	$-1.0286 \cdot 10^{-4}$
	3	26.5321	128.8690	8.43806	$1.39206 \cdot 10^{-5}$
4	1	10.2660	80.0890	1.5796	$4.06412 \cdot 10^{-4}$
	2	15.6924	129.6700	0.3835	$1.47741 \cdot 10^{-3}$
	3	26.5200	227.5110	-7.2162	$-1.95042 \cdot 10^{-5}$
6	1	12.5860	137.5930	1.5067	$2.4729 \cdot 10^{-4}$
	2	18.1100	211.2650	-0.0824	$-1.92767 \cdot 10^{-5}$
	3	21.2492	252.5510	3.8600	$8.23914 \cdot 10^{-5}$
	4	34.9026	430.9360	-7.6299	$-2.24578 \cdot 10^{-4}$
8	1	15.0168	210.0100	1.9137	$1.87496 \cdot 10^{-4}$
	2	20.2214	301.7630	-0.7724	$-4.22199 \cdot 10^{-5}$
	3	23.9797	366.7910	0.3870	$1.54751 \cdot 10^{-5}$
	4	26.5471	410.9660	-1.6702	$4.47683 \cdot 10^{-7}$
	5	39.5201	632.9110	-12.1622	$-8.27413 \cdot 10^{-5}$
10	1	17.4991	297.3570	2.4177	$2.0642 \cdot 10^{-4}$
	2	22.2250	401.3710	-1.1331	$-3.85566 \cdot 10^{-5}$
	3	26.6785	497.1830	-0.2904	$-4.62464 \cdot 10^{-5}$
	4	29.1810	550.5980	-5.8569	$-3.07788 \cdot 10^{-4}$
	5	35.2714	679.9300	-4.8792	$-8.27867 \cdot 10^{-5}$
	6	39.3943	767.1630	10.6966	$7.00765 \cdot 10^{-5}$
	7	43.0748	844.9070	-11.6956	$-3.72207 \cdot 10^{-5}$
12	1	20.0120	399.6930	4.2805	$-1.90972 \cdot 10^{-4}$
	2	24.4463	516.9600	-1.1030	$-2.71166 \cdot 10^{-5}$
	3	29.3276	642.7740	6.3025	$1.50271 \cdot 10^{-4}$
	4	35.3235	795.3590	2.8917	$6.6225 \cdot 10^{-5}$
	5	39.5376	901.9590	-4.5353	$-5.53565 \cdot 10^{-5}$
	6	43.2863	996.5240	3.3275	$2.1578 \cdot 10^{-5}$
	7	46.6769	1081.910	-0.5601	$-3.06273 \cdot 10^{-7}$
14	1	22.5451	517.0670	5.4711	$2.51751 \cdot 10^{-4}$
	2	26.7931	648.4310	-1.0389	$-1.97972 \cdot 10^{-5}$
	3	30.7106	766.5220	-5.9336	$-1.16087 \cdot 10^{-4}$
	4	35.4096	906.2880	-1.7285	$-2.50977 \cdot 10^{-5}$
	5	39.2967	1021.030	1.2265	$-5.16498 \cdot 10^{-6}$
	6	42.8197	1124.60	3.4166	$2.16238 \cdot 10^{-5}$
	7	46.3882	1229.20	-4.3679	$-1.17765 \cdot 10^{-5}$

Tabela A3.2 - Coeficientes de expansão das funções esferoidais para $L_2/L_1=2,0$ e $Bi=1,0$.

C_{mk}		$d_{n,m}$								
m	k	n=0	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=14	
0	1	0.837466	-0.310125	0.019481	-0.005260	7.915450	-7.59411	5.04992	-2.464472	9.202205
	2	0.45826	-0.734131	0.366803	-0.101456	0.017745	-0.002124	0.0001840	-0.000012	6.14187
	3	0.390350	-0.713514	0.470162	-0.190145	0.052143	-0.010259	0.0015092	-0.000171	0.0000154
2	1	-0.106784	-0.665092	-1.241060	0.698887	-0.139027	0.0150396	-0.001042	0.0000507	-1.836602
	2	0.128653	-0.126335	-0.230654	0.57864	-0.004610	0.0010595	0.0000365	-5.59225	7.47122
	3	0.121838	-0.137896	-0.173579	0.516472	-0.653293	0.561688	-0.367647	0.19267	-0.083233
4	1	0.150836	0.443302	-0.110920	-0.758138	0.641984	-0.24438	0.0563916	-0.008912	0.0010343
	2	0.119231	0.166255	-0.436166	-0.144592	0.698650	-0.644657	0.334994	-0.117906	0.0305248
	3	0.091326	-0.007896	-0.310983	0.326342	-0.507016	0.648514	-0.517454	0.30389	-0.140363
6	1	0.123540	0.43793	0.273224	-0.40855	-0.563840	0.739329	-0.368618	0.10922	-0.022199
	2	0.093858	0.211275	-0.215309	-0.423981	0.271876	0.446829	-0.704453	0.481742	-0.210397
	3	0.085910	0.141569	-0.284201	-0.242928	0.432785	0.113794	-0.617218	0.628237	-0.378808
	4	0.066547	0.009438	-0.241586	0.179376	0.183263	-0.396645	0.188249	0.243546	-0.547756
8	1	0.098324	0.364616	0.384945	0.0208322	-0.508217	-0.274926	0.685897	-0.44781	0.167152
	2	0.077598	0.022612	-0.034769	-0.399801	-0.192756	0.457617	0.169814	-0.643493	0.562384
	3	0.070535	0.156825	-0.161557	-0.330682	0.129873	0.427289	-0.259208	-0.3527	0.640573
	4	0.066866	0.122411	-0.201376	-0.246382	0.254862	0.290204	-0.403004	-0.100169	0.555157
	5	0.056016	0.030100	-0.215408	0.067912	0.258677	-0.25002	-0.132811	0.40564	-0.244729
10	1	0.099525	0.359434	0.458659	0.285456	-0.202809	-0.573986	-0.030608	0.680028	-0.588959
	2	0.068937	0.234134	0.098738	-0.257642	-0.399643	0.0355846	0.498826	-0.050538	-0.54892
	3	0.060883	0.162055	-0.071599	-0.320799	-0.100604	0.365777	0.190383	-0.447627	-0.033531
	4	0.057998	0.133153	-0.122085	-0.285473	0.459531	0.375736	-0.029141	-0.437083	0.220945
	5	0.053844	0.085587	-0.180412	-0.160482	0.241824	0.190281	-0.329184	0.436409	0.436409
	6	0.053260	0.068858	-0.198497	-0.088835	0.288366	0.443041	-0.365002	0.11592	0.349539
	7	0.053324	0.065017	-0.211100	-0.439642	0.305364	-0.059357	-0.343474	0.261173	0.218403
12	1	0.083301	0.280855	0.385590	0.35265	0.094408	-0.316651	-0.420973	0.17707	0.463
	2	0.060914	0.223342	0.175125	-0.093648	-0.366050	-0.274786	0.229054	0.424767	-0.239644
	3	0.053690	0.161518	-0.004338	-0.268466	-0.232951	0.17465	0.372733	-0.100893	-0.429483
	4	0.052421	0.124355	-0.112433	-0.264817	0.033661	0.348791	0.0322728	-0.408482	0.0176995
	5	0.054432	0.131061	-0.156563	-0.257251	0.160877	0.34833	-0.18696	-0.390558	0.311343
	6	0.053770	0.166777	-0.183997	-0.285435	0.245572	0.354331	-0.341292	-0.339938	0.509364
	7	0.045553	0.225562	-0.194947	-0.350887	0.310114	0.394183	-0.47094	-0.309826	0.673851
14	1	0.103932	0.319759	0.444825	0.477023	0.323738	-0.070733	-0.485291	-0.354353	0.401375
	2	0.059388	0.224169	0.228881	0.0361257	-0.259610	-0.392675	-0.110625	0.37357	0.302517
	3	0.052099	0.181482	0.086870	-0.178566	-0.335483	-0.121635	0.303899	0.334582	-0.211665
	4	0.049785	0.173243	0.002395	-0.280841	-0.241529	0.182343	0.399543	-0.046647	-0.470074
	5	0.039189	0.189877	-0.004430	-0.31331	-0.180718	0.308513	0.338704	-0.276233	-0.418239
	6	0.017063	0.287000	0.032162	-0.316837	-0.170497	0.34873	0.286259	-0.376177	-0.326145
	7	-0.013642	0.198851	0.094349	-0.300043	-0.196710	0.35059	0.267734	-0.414587	-0.260078

C_{mk}		$d_{n,m}$						
m	k	n=18	n=20	n=22	n=24	n=26	n=28	n=30
0	1	-2.713589	6.47966	-1.278425	2.11908	-2.99253	3.643432	-3.863950
	2	-2.50899	8.38387	-2.332562	5.48463	-1.103859	1.92265	-2.925300
	3	-1.129165	6.81179	-3.44647	1.482207	-5.48148	1.76088823	-4.954360
2	1	5.14946778	-1.1533486	2.1131841300	-3.22832	4.1772	-4.63829	4.46898
	2	0.030228	-0.009364	0.002500	-0.000583	0.000119	-0.000021	3.414133
4	1	-0.000092	6.54928	-3.78871	1.823210	-7.41820	2.586750	-7.813530
	2	-0.006105	0.000975	-0.000128	0.000014	-1.293997	1.031232	-7.113770
	3	-0.140363	0.052896	-0.016660	0.004463	-0.001030	0.000208	-0.000036
6	1	0.003359	-0.000388	0.000036	-2.78110	1.78606	-9.759690	4.588550
	2	0.066232	-0.015990	0.003078	-0.000486	0.000064	-7.209160	6.928970
	3	0.161575	-0.0525797	0.013634	-0.002901	0.000517	-0.000078	0.000010
	4	0.58253	-0.436908	0.256569	-0.123764	0.050405	-0.017565	0.004994
8	1	-0.045546	0.008023	-0.001178	0.000139	-0.000014	1.120370	-7.848430
	2	-0.290861	0.105885	-0.029301	0.006447	-0.001162	0.000175	-0.000022
	3	-0.511344	0.269740	-0.105767	0.032661	-0.008229	0.001732	-0.000303
	4	-0.599359	0.396240	-0.190495	0.071536	-0.021845	0.005562	-0.001163
	5	-0.179294	0.509804	-0.579420	0.455490	-0.278690	0.137873	-0.051665
10	1	0.272710	-0.084903	0.019414	-0.003508	0.000509	-0.000061	6.172454
	2	0.611262	-0.365901	0.150316	-0.046519	0.011410	-0.002291	0.000377
	3	0.531849	-0.59447	0.389048	-0.182141	0.066041	-0.019330	0.004512
	4	0.331782	-0.602877	0.510071	-0.293973	0.128818	-0.045086	0.012333
	5	-0.193412	-0.300359	0.579859	-0.543604	0.356176	-0.178630	0.065908
	6	-0.399296	-0.00926717	0.451139	-0.614688	0.513643	-0.312932	0.133796
	7	-0.472248	0.212222	0.279729	-0.602672	0.619217	-0.436532	0.206833
12	1	-0.556316	0.317381	-0.118855	0.032693	-0.007009	0.001217	-0.000172
	2	-0.388046	0.606151	-0.430241	0.202318	-0.070791	0.019503	-0.004236
	3	0.240099	0.326567	-0.594848	0.489809	-0.271949	0.113405	-0.035174
	4	0.455433	-0.282325	-0.266455	0.60698	-0.578191	0.365166	-0.155364
	5	0.312818	-0.534215	0.0845411	0.496961	-0.726291	0.585161	-0.292198
	6	0.138789	-0.656061	0.376164	0.343052	-0.819945	0.796207	-0.443313
	7	-0.017058	-0.739682	0.627556	0.191023	-0.902749	1.01363	-0.609242
14	1	0.369234	-0.689744	0.486362	-0.216793	0.070182	-0.017624	0.003474
	2	-0.391449	-0.216172	0.596616	-0.514982	0.279210	-0.110062	0.031907
	3	-0.400405	0.331783	0.256967	-0.602913	0.532552	-0.303208	0.116470
	4	0.041929	0.515170	-0.288898	-0.345086	0.680811	-0.579912	0.289034
	5	0.339364	0.379650	-0.550946	-0.0318428	0.628091	-0.730316	0.428235
	6	0.473941	0.216934	-0.628141	0.189639	0.512904	-0.778163	0.510936
	7	0.529625	0.093683	-0.632900	0.331033	0.400848	-0.781212	0.559701