

[Redacted]

Robson Cavalcanti Lins

[Redacted]

## Splines e Modelagem Geométrica

Dissertação submetida à Coordenação de Pós-Graduação em Informática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Informática.

Prof. Mario Toyotaro Hattori, M.Sc  
(Orientador)

[Redacted]

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Robson Cavalcanti Lins, 1996

[Redacted]

[Redacted]

[Redacted]

DIS  
007.125-3 (2/17)  
L 1352



L735s Lins, Robson Cavalcanti.  
Splines e modelagem geometrica / Robson Cavalcanti Lins.  
- Campina Grande, 1996.  
79 f.

Dissertacao (Mestrado em Informatica) - Universidade  
Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Modelagem Geometrica - Computacao Grafica. 2.  
Computacao Grafica. 3. Splines. 4. Dissertacao -  
Informatica. I. Hattori, Mario Toyotaro. II. Universidade  
Federal da Paraiba - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 004.925.8(043)

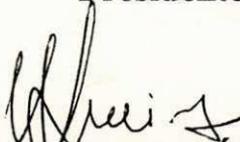
**SPLINES E MODELAGEM GEOMÉTRICA**

**ROBSON CAVALCANTI LINS**

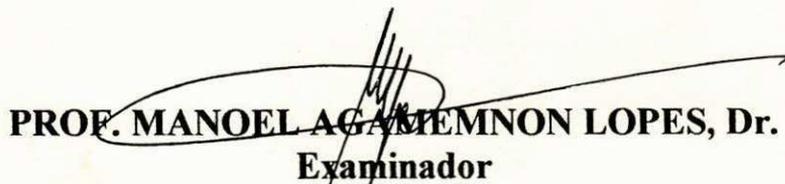
**DISSERTAÇÃO APROVADA EM 26 06.96**



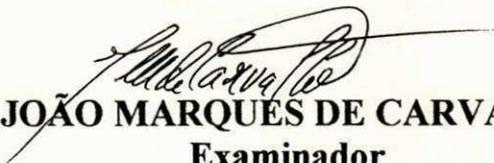
**PROF. MÁRIO TOYOTARO HATTORI, M.S.c**  
**Presidente**



**PROF. BRUNO CORREIA DA NOBREGA QUEIRÓZ, M.Sc**  
**Examinador**



**PROF. MANOEL AGAMENON LOPES, Dr.**  
**Examinador**



**PROF. JOÃO MARQUES DE CARVALHO, Ph.D**  
**Examinador**

**CAMPINA GRANDE - PB**

Aos Meus pais, Minhas esposa e filha.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente tornaram este trabalho possível. De início, peço desculpas às pessoas que deveriam estar aqui citadas e foram esquecidas.

Agradeço inicialmente a toda a minha família, em particular aos meus pais (Amaro e Maria), pelo apoio e compreensão. A Cida e Thaisa, minhas esposa e filha, pelo carinho, amor, compreensão e momentos de descontração.

Meus agradecimentos pela ajuda direta neste trabalho. Ao meu orientador Prof. Hattori, pelo apoio, incentivo e confiança; Ao Prof. Agamemnon, pelo apoio e observações que proporcionaram enriquecimento ao trabalho; Ao Prof. Bruno, pelo apoio quando o Hattori esteve ausente; Ao amigo Gilson, que sempre esteve disposto a discutir comigo boa parte dos assuntos aqui contidos.

Aos colegas e companheiros; Washington, Haroldo, Carlos, Kátia, Kissia, Joseana, Sônia, Edberto, Vitor, Galileu, Ivan, ...

Agradecimento especial a todos os Professores e Funcionários do Departamento de Sistemas e Computação. Em particular, aos professores Peter e Hélio, e aos Funcionários Ana, Alberto, Lilian, Zeneide, Manuela e Josenilda.

## Resumo

*Splines*, que podem ser matematicamente descritos, possuem propriedades muito adequadas para modelagem de curvas. Uma curva definida por uma função arbitrária  $f$  sob certas condições pode ser bem aproximada por *splines*. Por outro lado, dada uma curva cuja função  $f$  que a define é desconhecida, é possível construir, a partir de um número modesto de pontos da curva, uma boa aproximação de  $f$  usando *splines*. Ainda mais, as aproximações construídas usando *splines* podem preservar muitas propriedades matemáticas e geométricas das curvas.

Em computação gráfica a incorporação dessas propriedades implica na fidelidade do objeto modelado. Na busca dessa fidelidade, muitos *splines* foram propostos: *B-splines*, Curvas de *Bezier*,  $\beta$ -*splines*,  $\nu$ -*splines*,  $\tau$ -*splines*, *WF-splines*,  $\gamma$ -*splines*, etc. Este trabalho tenta responder a questão quanto à possibilidade ou não de estudar os *splines* de forma unificada ao invés de estudar cada tipo isoladamente.

## Abstract

Splines, which are mathematically describable, have very nice properties for modeling curve. A curve defined by a function  $f$  satisfying a few conditions can be approximated by splines. Also, given a curve whose defining function  $f$  is unknown, splines provide a good approximation to this function from a given number of points in the curve. Furthermore, approximations built using splines can preserve many mathematical and geometrical properties of the curves.

In computer graphics, the combination of the above properties warrants the accuracy of the model with respect to the object modelled. In the quest for this accuracy, many splines have been proposed: *B-splines*, *Bezier*,  *$\beta$ -splines*,  *$\nu$ -splines*,  *$\tau$ -splines*, *WF-splines*,  *$\gamma$ -splines*, etc. This thesis attempts to answer the question of whether or not it is possible to study splines in an unified way, rather than studying each kind of spline separately.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.1.1	Modelagem Geométrica e Computação Gráfica . . . . .	1
1.1.2	Solução Numérica de Problemas . . . . .	3
1.2	Interpolação e Aproximação . . . . .	4
1.2.1	Interpolações Polinomial e Polinomial por Partes . . . . .	5
1.2.2	Aproximação . . . . .	6
1.2.3	Norma . . . . .	7
1.2.4	Aproximação dos Mínimos Quadrados . . . . .	8
1.3	Interpolação e Aproximação por Splines . . . . .	10
1.4	Aproximação Polinomial por Partes . . . . .	12
1.5	Objetivos da Dissertação . . . . .	15
1.6	Organização da Dissertação . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Resenha das Splines</b>	<b>18</b>
2.1	Transformações Geométricas . . . . .	19
2.2	Geometria Diferencial . . . . .	20
2.2.1	Curva Parametrizada Diferenciável e Comprimento de Arco . . . . .	21

2.2.2	A Estrutura de Frenet . . . . .	23
2.2.3	Movendo a Estrutura de Frenet . . . . .	24
2.3	Spline mais Geral . . . . .	26
2.4	Curvas de Bézier . . . . .	31
2.5	Propriedades da Curva de Bézier . . . . .	33
2.6	Curva Spline da Forma de Bézier . . . . .	35
2.7	Curvas B-splines . . . . .	38
2.7.1	B-Spline Uniforme . . . . .	38
2.7.2	B-spline Geral . . . . .	39
2.8	Curvas $\beta$ -spline . . . . .	44
2.9	Curvas $\nu$ -splines . . . . .	45
2.10	Curvas WF-splines . . . . .	47
2.11	Curvas $\tau$ -splines . . . . .	50
2.12	Curvas $\gamma$ -splines . . . . .	51
2.13	Considerações Finais . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Uma Abordagem Unificada para Splines</b>	<b>56</b>
3.1	Continuidade Geométrica de Curvas . . . . .	57
3.2	Construção dos $\beta$ -splines . . . . .	62
3.3	Construção de uma Spline Geral . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
4.1	Considerações Finais . . . . .	71
4.2	Sugestão de Trabalhos Futuros . . . . .	73
<b>A</b>	<b>Segmentos das Bases <math>\tau</math>-splines</b>	<b>75</b>

# Lista de Tabelas

2.1	Segmentos das bases $\beta$ -spline, $\nu$ -spline e $B$ -spline . . . . .	54
2.2	Segmentos das bases $WF$ -spline, $\gamma$ -spline e <i>Bézier</i> . . . . .	54

# Lista de Figuras

1.1	Interpolacção de uma seqüência de pontos . . . . .	4
1.2	Aproximacção de uma seqüência de pontos . . . . .	5
1.3	Figura 1.2 com os eixos coordenados . . . . .	12
1.4	$Q_2(u)$ , o segundo componente da curva na figura 1.3 . . . . .	13
1.5	A base <i>spline</i> $B_i(u)$ é uma função polinomial por partes de grau $\leq 3$ com continuidade $C^2$ . . . . .	14
1.6	A curva da figura 1.4 como combinação linear das funções bases . . . . .	17
2.1	Sistema local (esquerda) e Estrutura de Frenet (direita) . . . . .	24
2.2	Interpretação Geométrica das Fórmulas de Frenet . . . . .	25
2.3	Uma curva polinomial por partes com $l + 1 = 7$ . . . . .	27
2.4	Coordenadas Locais: o intervalo $[u_2, u_3]$ foi mapeado para o intervalo $[0, 1]$ com coordenada local $t$ . . . . .	27
2.5	Partições, juntas e matrizes de conexão . . . . .	29
2.6	Bases de Bézier de grau $\leq 3$ . . . . .	32
2.7	A casca convexa de um conjunto de vértices de controle . . . . .	34
2.8	Continuidade $C^1$ (esquerda) e continuidade $C^2$ (direita) . . . . .	37
2.9	Expansão da base $B_{0,3}(u)$ . . . . .	43
2.10	Sistema de coordenada local para um WF-spline . . . . .	48

2.11	Continuidade na tangente para um WF-spline. . . . .	49
3.1	Aproximação por splines . . . . .	57
3.2	A base spline $B_{i,4}(u)$ é uma função polinomial por partes de grau $\leq 4$ com continuidade $G^3$ . . . . .	64
3.3	Cada $B_{i+k,4}$ é uma cópia de $B_{i,4}(u)$ deslocado $k$ intervalos . . . . .	66
3.4	Relação entre a base geral e as bases <i>splines</i> de grau $\leq 3$ . Bez-spline significa uma curva <i>spline</i> na forma de Bézier . . . . .	70
3.5	Relação entre a base geral e as bases <i>splines</i> de grau $\leq 4$ . . . . .	70

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Curvas e Superfícies suaves precisam ser geradas em muitas aplicações de computação gráfica. Essa necessidade pode surgir em dois casos: na modelagem de objetos reais, como a da carroceria de um carro, ou na criação de novas formas, como na concepção de uma nova carroceria. No primeiro caso, uma descrição matemática do objeto pode não estar disponível. Pode-se usar como modelo as coordenadas de um grande número de pontos do objeto, o que pode ser inviável num computador com memória finita. Na prática, os objetos são aproximados com pedaços de planos, esferas ou outras formas que podem ser matematicamente descritas.

A seguir são descritas algumas aplicações onde há necessidade de construir tais aproximações.

#### 1.1.1 Modelagem Geométrica e Computação Gráfica

Entende-se por modelagem a criação, representação e manipulação de objetos no computador [GV90]. A representação de um objeto está diretamente relacionada com técnicas de topologia combinatória e estrutura de dados. A manipulação dos modelos

se utiliza das transformações do espaço ambiente, enquanto a criação dos modelos se baseia em métodos geométricos e análise numérica.

Os sistemas de modelagem geométrica evoluíram a partir dos sistemas de desenho que, por suas limitações, levaram à busca de métodos mais rigorosos e precisos para a representação de objetos no computador.

As transformações geométricas ocupam uma posição de destaque em computação gráfica e principalmente na área de modelagem geométrica, onde sua presença se faz notar em dois aspectos distintos: a transformação geométrica dos modelos permite que a partir de um dado objeto se obtenha uma família de modelos; por exemplo, o escalamento permite que de uma esfera de raio unitário se obtenha uma esfera de raio arbitrário. A transformação possibilita também o reposicionamento de objetos no espaço, permitindo o agrupamento desses objetos modelados.

Pode-se entender o processo de modelagem como abrangendo três níveis lógicos [GV90]:

- Universo Físico. Onde estão os objetos que se deseja modelar.
- Universo Abstrato. Que representa uma idealização dos objetos do mundo físico. Nesse universo, os objetos modelados têm uma relação com os objetos do mundo físico. No entanto, apresenta um nível de abstração que permite sua descrição por meio de um modelo matemático.
- Representação. É a atribuição de uma estrutura simbólica que descreve o modelo matemático.

Na modelagem geométrica representa-se no computador objetos do mundo físico real. *O espaço dos modelos* em geral consiste de uma quantidade infinita de pontos, e os *esquemas de representação* buscam uma maneira de dar uma descrição finita a conjuntos desses pontos de modo a possibilitar uma manipulação dos mesmos pelo computador. Nessas representações, os modelos são descritos por uma coleção de objetos primitivos (sólidos ou superfícies) que são eventualmente transformados e em seguida combinados.

### 1.1.2 Solução Numérica de Problemas

O método dos elementos finitos pode ser descrito em poucas palavras [SF73]. Suponha que se deseje minimizar o seguinte funcional quadrático

$$I(f) = \int_0^\pi [p(x)(f'(x))^2 + q(x)(f(x))^2 - 2g(x)f(x)] dx \quad (1.1)$$

sobre o espaço de funções de dimensão infinita  $H_E^1$ . Os elementos desse espaço satisfazem as condições expressas por

$$f(0) = 0 \quad [\text{indicado pelo índice } E] \quad (1.2)$$

$$\int_0^\pi f'(x) dx < \infty, \quad (1.3)$$

onde  $< \infty$  indica que a integral em (1.3) é finita. A minimização de  $I$  leva a uma equação diferencial em  $f$ . Mas, normalmente uma solução analítica não é possível obter e assim torna-se necessário usar um método numérico que, em geral, só encontra uma aproximação da solução desejada.

O método de Ritz substitui o espaço  $H_E^1$  nesse problema variacional por um subespaço  $S$ , ou mais precisamente, por uma seqüência de subespaços  $S_i$  de  $H_E^1$  de dimensão finita. Os elementos  $f_i$  de  $S_i$  são chamados **funções teste**, pertencem a  $H_E^1$  e satisfazem  $f_i(0) = 0$ . Sobre cada espaço  $S_i$  a minimização de  $I$  leva à solução de um sistema de equações lineares. O número de equações coincide com a dimensão de  $S_i$ . A aproximação de Ritz é a função  $g_i$  que minimiza  $I$  sobre o espaço  $S_i$ :

$$I(g_i) \leq I(f_i), \text{ para todo } f_i \in S_i. \quad (1.4)$$

A dificuldade está em escolher **funções teste**  $f_i$  que sejam convenientes o bastante para minimizar e calcular  $I$ , e ao mesmo tempo geral o suficiente para aproximar bem a solução desconhecida  $f$ . Em teoria, foi provado que o método de Ritz converge, mas efetuar cálculos com tais funções é outro assunto. A solução encontrada foi o fracionamento das funções  $f_i$  em alguns pedaços, chamados segmentos, cada um definido

por um polinômio distinto, e unir os segmentos para formar uma curva polinomial por partes.

O problema fundamental é descobrir de que maneira funções polinomiais por partes podem aproximar bem uma solução desconhecida  $f$ . Intuitivamente, qualquer função contínua  $f$  pode razoavelmente ser aproximada com precisão arbitrária por funções lineares por partes. A tarefa matemática é estimar a distância entre a solução aproximada e a verdadeira solução, e determinar com que velocidade o erro decresce quando o número de funções polinomiais por partes cresce.

## 1.2 Interpolação e Aproximação

Existe uma variedade de maneiras de definir uma curva que seja uma aproximação de uma dada função contínua  $f$ . Todas são baseadas em técnicas de *interpolação* ou de *aproximação*. No caso da *interpolação* é exigido que a curva passe por todos os pontos  $P_i = f(u_i)$  dados, onde  $u_0, \dots, u_n$  é uma seqüência de  $n+1$  pontos distintos da reta real  $R$  e  $f(u_0), \dots, f(u_n)$  são dados obtidos, como se pode ver na figura 1.1. Para aquelas técnicas baseadas em *aproximação* é somente exigido que a curva passe próximo dos pontos  $P_i = f(u_i)$  dados, como mostra a figura 1.2.

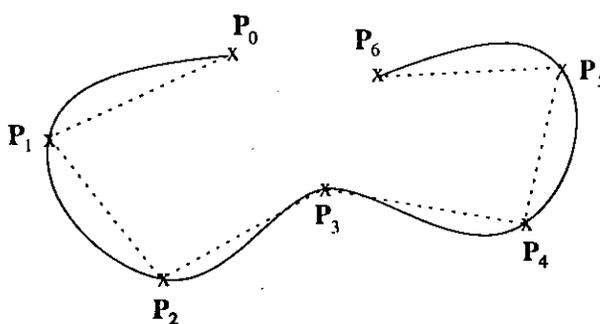


Figura 1.1: Interpolacção de uma seqüência de pontos

Usam-se funções polinomiais para *interpolação* ou *aproximação*, porque elas podem facilmente ser avaliadas, diferenciadas e integradas. Uma função polinomial de ordem  $n+1$  ou de grau  $\leq n$  é uma função da forma

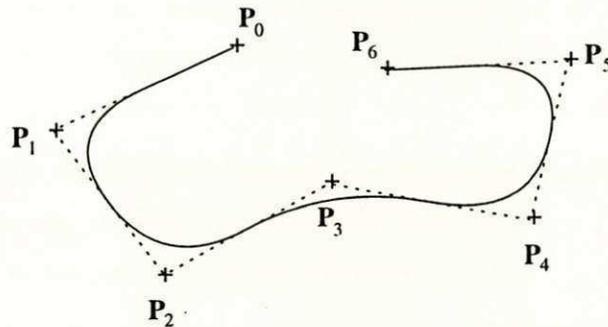


Figura 1.2: Aproximacção de uma seqüência de pontos

$$Q(u) = a_0 + a_1u + \dots + a_nu^n = \sum_{i=0}^n a_iu^i, \quad a_i \in R, \quad u \in I \subset R. \quad (1.5)$$

### 1.2.1 Interpolações Polinomial e Polinomial por Partes

Seja  $U = (u_i)_{i=0}^n$  uma seqüência de  $n + 1$  pontos distintos da reta real  $R$ . Então,

$$L_{i,n}(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (1.6)$$

é a  $i$ -ésima função polinomial de *Lagrange* para a seqüência  $U$ . Esta é uma função polinomial de grau  $\leq n$  e anula-se em todos os  $u_j$ 's exceto para  $u_i$  onde assume o valor 1, ou seja

$$L_{i,n}(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Assim, para uma dada função contínua  $f$ ,

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n f(u_i) \cdot L_{i,n}(u), \quad (1.8)$$

e satisfaz

$$Q(u_i) = f(u_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.9)$$

Isso mostra que como construir, usando as funções polinomiais de Lagrange, uma função interpolante  $Q$  para uma função contínua  $f$  sobre a seqüência  $U$ . Além disso, pode-se mostrar que esta é a única função interpolante para  $f$  sobre a seqüência  $U$  [dB78].

Do ponto de vista da Álgebra Linear, os polinômios de Lagrange  $L_{0,n}, \dots, L_{n,n}$  constituem uma base de um espaço vetorial de dimensão  $n + 1$ . Os elementos desse espaço vetorial são as funções polinomiais de grau  $\leq n$ .

A forma de Lagrange é certamente muito elegante. Mas, comparada com outras formas de escrever e avaliar a função interpolante, ela está longe de ser a mais “eficiente”, pois a modificação de um ponto implica em refazer todos os cálculos [dB78].

Outra desvantagem da interpolação polinomial é a sensibilidade quanto à escolha dos pontos de interpolação. Se a seqüência de pontos  $U = (u_i)_{i=0}^n$  tiver o espaçamento uniforme, a função polinomial interpolante pode não aproximar a função  $f$ , isto é, o erro máximo

$$\|e_n\| = \max_{a \leq u \leq b} |Q(u) - f(u)| \quad (1.10)$$

pode crescer com o aumento de  $n$ . Assume-se que a seqüência de pontos  $U = (u_i)_{i=0}^n$  pertence a algum intervalo  $[a, b]$  da reta real [dB78].

Embora as funções polinomiais sejam computacionalmente eficientes e fáceis de trabalhar, não é normalmente possível definir curvas satisfatórias usando uma única função polinomial [RA90]. Ao contrário, costuma-se usar uma curva polinomial por partes. Essas funções fornecem tanto aproximações suaves como também aproximações mais eficientes.

### 1.2.2 Aproximação

Os problemas de aproximação se dividem em três classes distintas (e cada uma usa um método diferente) [Ric83]:

1. **Aproximação de Funções Matemáticas:** Trata-se de uma função que precisa ser aproximada por outras funções. Os exemplos típicos são  $\sin(u)$  ou  $e^u$  quando

se deseja calcular o valor dessas funções num determinado ponto. Visto que não é possível calcular o valor dessas funções diretamente no computador, usa-se uma aproximação das mesmas por séries, onde os termos dessas séries podem ser avaliados utilizando apenas operações que o computador pode executar (operações aritméticas). Especificamente, a série de Taylor das funções  $\text{sen}(u)$  e  $e^u$  em torno do ponto  $u = 0$  são expressas por

$$\text{sen}(u) = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}u^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (1.11)$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots \quad (1.12)$$

Com um número finito de termos essas relações podem ser usadas para aproximar as funções  $\text{sen}(u)$  e  $e^u$  em algum ponto. Nota-se que as aproximações em (1.11) e (1.12) são ainda restritivas, porque a função que está sendo aproximada precisa ser infinitamente diferenciável. Portanto, torna-se necessário utilizar outras formas de aproximação, como a aproximação polinomial.

2. **A Representação e Compactação de Dados:** Dado um conjunto grande de dados, precisa-se de uma aproximação simples, ou mais conveniente, que reproduza esse conjunto. Como exemplo, suponha que são dadas 192 medidas da pressão atmosférica como função da altitude e se deseja substituir essa tabela por uma fórmula matemática para ser usada em cálculos.
3. **Suavidade e Análise de Dados:** É dado um conjunto de dados com uma incerteza substancial em alguns ou todos os valores. A incerteza é normalmente devida à limitação da precisão nos instrumentos de medida ou nas técnicas usadas para obter os dados.

### 1.2.3 Norma

Aproximações são definidas com relação a alguma medida de proximidade; no caso de dados ou funções, essa medida é induzida pela *norma*. Norma é uma aplicação  $\|\cdot\|: V \rightarrow R$ , onde  $V$  é um espaço vetorial, que satisfaz as seguintes propriedades

1.  $\|v\| = 0$ , se e somente se,  $v = 0$ .
2.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Desigualdade do Triângulo).
3.  $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$ ,  $v \in V$ ,  $c \in R$  (Homogeneidade).

Assuma que se deseje aproximar uma função  $f(u)$  sobre o intervalo  $[a, b]$  por algo na forma  $Q(u)$ .  $Q$  pode ser uma função polinomial. De acordo com a seção 1.2.1, se  $u_0, \dots, u_n$  forem pontos distintos e  $f(u_0), \dots, f(u_n)$  forem conhecidos, então  $Q(u)$  pode ser escrito na forma

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot B_i(u), \quad (1.13)$$

onde  $B_i(u)$  são as funções base para o modelo da função que está sendo aproximada. A distância entre  $f(u)$  e  $Q(u)$  é a norma  $\|f - Q\|$ .

A medida mais usada é a norma  $L_2$  (ou Mínimos Quadrados). Para a aproximação de dados discretos  $(u_i, f(u_i))$ ,  $i = 0, \dots, m$ , a norma é expressa por

$$\|f(u) - Q(u)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^m (f(u_i) - Q(u_i))^2}. \quad (1.14)$$

#### 1.2.4 Aproximação dos Mínimos Quadrados

A primeira motivação para o uso da aproximação dos mínimos quadrados é a sua adequação para uma variedade de situações. Sua maior vantagem é poder resolver o problema de aproximação por aplicação direta de métodos e programas que realizam cálculos com matrizes.

A aproximação dos mínimos quadrados é a melhor aproximação em relação a uma norma que resulta de um *produto interno*. **Produto Interno** é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \rightarrow R$ , onde  $V$  é um espaço qualquer, que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle$ ,  $c \in R$ .

2.  $\langle v + w, r \rangle = \langle v, r \rangle + \langle w, r \rangle$ .
3.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ .
4.  $\langle v, v \rangle \geq 0$  se  $v \neq 0$ .

Se  $v = (v_0, \dots, v_n)^T$  e  $w = (w_0, \dots, w_n)^T$  pertencem ao espaço  $R^{n+1}$ , o produto interno é expresso por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^n v_i \cdot w_i. \quad (1.15)$$

Definindo  $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , obtém-se a “norma”  $\|\cdot\|_2$  induzida pelo produto interno  $\langle, \rangle$ .

Seja  $C[a, b]$  o espaço com dimensão finita das funções contínuas sobre o intervalo  $[a, b]$ . O critério dos mínimos quadrados encontra uma boa aproximação para  $g$  sobre  $C[a, b]$  em relação à “norma”  $\|\cdot\|_2$ , isto é, encontra uma  $f^* \in C[a, b]$  tal que

$$\|g - f^*\| = \min_{f \in C[a, b]} \|g - f\|_2. \quad (1.16)$$

As aspas em *norma* indicam que  $\|\cdot\|_2$  é somente uma *semi-norma*, porque existem muitas funções  $f$  diferentes da função identicamente nula para as quais  $\|f\|_2 = 0$ . O fato de  $C[a, b]$  ter dimensão finita garante que uma  $f^*$  existe. Na realidade, a função  $f^*$  é uma boa aproximação para  $g$  sobre  $C[a, b]$  em relação à norma  $\|\cdot\|_2$  se e somente se, a função  $f^* \in C[a, b]$ , e a função erro  $g - f^*$  for *ortogonal* a  $C[a, b]$ , isto é,

$$\langle f, g - f^* \rangle = 0, \quad f \in C[a, b]. \quad (1.17)$$

A prova dessa afirmação é feita com o auxílio da relação [dB78]

$$\|g - f\|_2^2 = \|g - f^*\|_2^2 + 2 \langle f^* - f, g - f^* \rangle + \|f^* - f\|_2^2. \quad (1.18)$$

No desenvolvimento da prova, chega-se à conclusão de que  $g$  tem uma *única* boa aproximação em  $C[a, b]$  se e somente se,  $\|\cdot\|_2$  for de fato uma norma sobre  $C[a, b]$ , ou seja, se e somente se a única função  $f \in C[a, b]$  para o qual  $\|f\|_2 = 0$  for  $f = 0$ .

Assume-se agora que  $\| \cdot \|_2$  seja uma norma sobre o espaço  $C[a, b]$  e que  $(B_i)_{i=0}^m$  seja uma base para  $C[a, b]$ . Então a equação (1.17) tem uma única solução  $f^* \in C[a, b]$ . Além disso, pode-se verificar que (1.17) é equivalente a

$$\langle B_i, g - f^* \rangle = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.19)$$

Portanto, o sistema de equações (1.19) tem uma solução única  $f^* \in C[a, b]$ . Como  $f^*$  também tem uma representação única  $\sum_{i=0}^m d_i \cdot B_i$  em função da base  $(B_i)_{i=0}^m$ , o sistema

$$\langle B_i, g - \sum_{j=0}^m d_j \cdot B_j \rangle = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.20)$$

tem solução única  $(d_i)_{i=0}^m$ . Essas últimas equações constituem as *equações normais*, comumente expressas da forma

$$\sum_{j=0}^m \langle B_i, B_j \rangle d_j = \langle B_i, g \rangle, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.21)$$

usando a linearidade do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em seus segundos argumentos. A determinação de  $f^*$  através das equações normais pode ou não ser uma boa alternativa. Depende da base particular  $(B_i)_{i=0}^m$  para  $C[a, b]$ , pois uma má escolha pode levar a uma base *mal condicionada*, isto é, para a qual pequenas mudanças no vetor dos coeficientes  $(d_i)_{i=0}^m$  pode resultar em grandes mudanças na função  $\sum_{i=0}^m d_i \cdot B_i$ .

### 1.3 Interpolação e Aproximação por Splines

Existe uma grande classe de curvas que não possuem a ordem de regularidade que torna as modelagens geométricas convenientes. Para estas, os sistemas usam objetos primitivos que podem, eles próprios, serem curvas. Geralmente esses sistemas são baseados na interpolação ou aproximação de pontos que são fornecidos pelo usuário. Em cada caso uma curva é definida por uma sucessão de *segmentos de curva*; tal abordagem *por partes* é tomada por razões de flexibilidade e generalidade. Uma curva polinomial por partes, em que a curva como um todo é formada pela junção, especial

para manter a diferenciabilidade, de suas partes é chamada de **spline**<sup>1</sup>. Existem vários tipos de *splines*: Como exemplos podem-se citar *Curvas de Bézier*, *B-splines*,  *$\beta$ -splines*,  *$\nu$ -splines*,  *$\tau$ -splines*, *WF-splines*,  *$\gamma$ -splines*, etc.

Matematicamente, uma curva construída usando os vértices de um polígono depende de um método de *interpolação* ou de *aproximação* para estabelecer uma relação entre a curva e o polígono [RA90]. Esse método é fornecido pela escolha de uma base.

As bases *B-splines* (ver Seção 2.7) também podem ser usadas para construir uma função interpolante  $Q(u)$ . Seja  $U = (u_i)_{i=0}^{m+n+1}$  uma seqüência não decrescente, com  $u_i < u_{i+n+1}$ , para todo  $i$ , e  $(B_i)_{i=0}^m$  a correspondente seqüência de *B-splines* de grau  $< n + 1$ . Seu espaço tem dimensão  $m + 1$ . Precisa-se, portanto, de  $m + 1$  condições de interpolação. De acordo com a seção 1.2.1,  $Q(u)$  é uma função interpolante para  $g$  sobre uma seqüência estritamente crescente de pontos  $\xi = (x_i)_{i=0}^m$  se e somente se

$$\sum_{j=0}^m d_j \cdot B_j(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, \dots, m. \quad (1.22)$$

Este é um sistema de  $m + 1$  equações a  $m + 1$  incógnitas, com a matriz dos coeficientes  $(B_j(x_i))$ . É possível mostrar que o sistema (1.22) tem solução única se e somente se  $u_i < x_i < u_{i+n+1}$ , para todo  $i$  [dB78].

Note que a função interpolante  $Q(u)$  pode ser definida por dois conjuntos de pontos: pelos pontos  $d_i$  ou pelos pontos  $g(x_i)$  dados. Modificando algum  $d_i$ , afeta somente uma parte local limitada da curva, enquanto que a mudança de algum  $g(x_i)$  (e subsequentemente resolvendo o sistema linear) influenciará a curva toda. Em muitos casos tais mudanças fazem com que a curva oscile. Esse efeito pode ser reduzido acrescentando mais pontos  $g(x_i)$  (com correspondentes  $x_i$ ) que os necessários para determinar uma curva *spline* interpolante. Isso leva a um sistema linear superdeterminado e alguma aproximação se torna necessária.

O método dos mínimos quadrados fornece os  $d_i$  como solução das equações normais da forma expressa por (1.21). A curva interpolante resultante minimiza a soma dos quadrados das distâncias  $\|g(u) - Q(u)\|$ .

<sup>1</sup>Mais adiante será apresentada uma definição formal de spline

## 1.4 Aproximação Polinomial por Partes

Nesta seção é discutida a construção de uma aproximação polinomial por partes.

Uma *curva parametrizada* em  $R^N$  é uma aplicação  $Q : I \rightarrow R^N$ ,  $u \in I$ , em que  $I$  é um intervalo da reta real  $R$ . A aplicação  $Q$  determina  $N$  funções  $Q_i : I \rightarrow R$ , que são chamadas componentes da curva  $Q$ . As  $N$  funções  $Q_1(u), \dots, Q_N(u)$ , são chamadas *equações paramétricas* da curva  $Q$ .

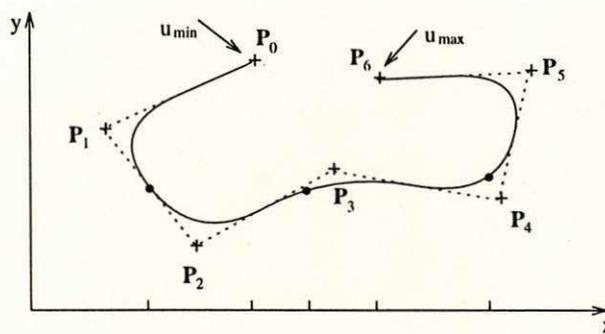


Figura 1.3: Figura 1.2 com os eixos coordenados

A figura 1.3 representa uma *curva parametrizada* em  $R^2$ . A representação paramétrica de uma curva bidimensional é expressa por  $Q(u) = (Q_1(u), Q_2(u))^T$ , onde os componentes  $Q_1(u)$  e  $Q_2(u)$  são funções do parâmetro  $u$ .  $Q_1(u)$  e  $Q_2(u)$  são, respectivamente, as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto sobre a curva, para qualquer valor de  $u$ . Os pontos  $P_i = (x_i, y_i)$  são chamados *vértices (ou pontos) de controle* e o polígono formado por  $P_0, \dots, P_6$  é chamado *polígono de controle*.

De acordo com a seção 1.2.1, costuma-se fracionar a curva em alguns pedaços, chamados *segmentos*, cada um definido por polinômios distintos, e unir os segmentos para formar uma curva polinomial por partes. Assim, como o parâmetro  $u$  varia entre algum valor inicial  $u_{min}$  e algum valor final  $u_{max}$  para definir a curva, certos valores distinguíveis de  $u$ , chamados *pontos de partição*, são encontrados. Esses pontos correspondem às junções entre os segmentos polinomiais. A partir dos pontos de partição, costuma-se construir uma seqüência de valores para os parâmetros não decrescentes,

$$u_0 \leq \dots \leq u_j = u_{\min} \leq \dots \leq u_l = u_{\max} \leq \dots \leq u_m. \quad (1.23)$$

Essa seqüência de valores para os parâmetros é chamada *seqüência (ou vetor) de juntas*.

Portanto, as equações paramétricas  $Q_1(u)$  e  $Q_2(u)$  são compostas de segmentos polinomiais, um segmento com o valor de parâmetro variando de  $u_j$  até a próxima junta distinta à direita, o segmento seguinte variando desse valor até a junta distinta subsequente à direita, e assim por diante (ver figura 1.4).

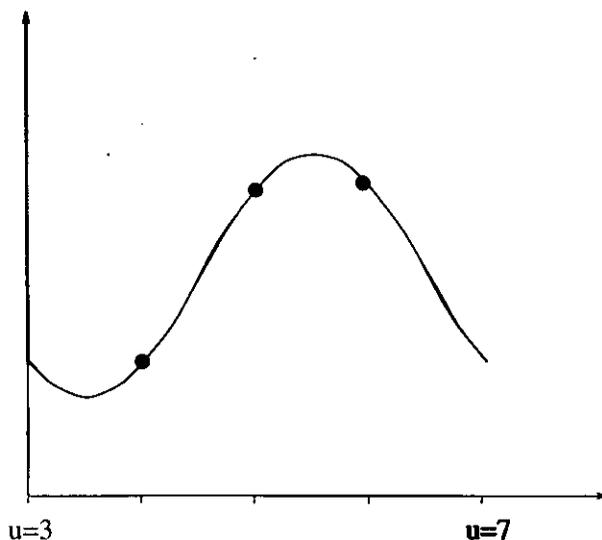


Figura 1.4:  $Q_2(u)$ , o segundo componente da curva na figura 1.3

Normalmente, exige-se que a curva  $Q(u)$  satisfaça algumas condições de continuidade nas junções entre os segmentos polinomiais sucessivos. Se a curva for tal que, a primeira e a segunda derivadas são todas contínuas (em particular, nas junções), diz-se que a curva tem continuidade paramétrica de grau 2 (ou continuidade  $C^2$ ). Em particular, os componentes da curva também satisfazem essas condições de continuidade.

Pode-se alcançar a continuidade desejada se as funções bases com as quais se definem os componentes  $Q_1(u)$  e  $Q_2(u)$  são, elas próprias, funções polinomiais por partes de grau  $\leq 3$  com continuidade  $C^2$  nas junções, uma vez que uma combinação linear de tais funções bases também será uma função polinomial por partes de grau  $\leq 3$  com continuidade  $C^2$ . Por exemplo,  $Q_2(u)$  para a curva da Figura 1.4, pode ser representada

por uma combinação linear das *funções bases por partes* de grau  $\leq 3$  com continuidade  $C^2$ .

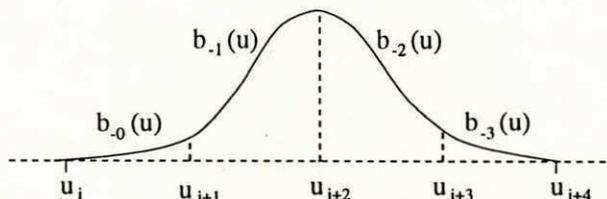


Figura 1.5: A base *spline*  $B_i(u)$  é uma função polinomial por partes de grau  $\leq 3$  com continuidade  $C^2$

A figura 1.6 mostra várias convenções. Os vértices de controle são indexados de zero até  $m$  (sendo  $m = 6$  na figura 1.6). Como será visto no capítulo 2, são necessárias quatro funções bases para univocamente definir cada segmento de curva com grau  $\leq 3$ . Assim, existem mais três funções bases (e mais três vértices de controle) além dos segmentos de curva. Cada função base é diferente de zero sobre quatro intervalos paramétricos (que por conveniência foram considerados de comprimento unitário)<sup>2</sup>. A função base mais à esquerda da figura, estende-se por dois intervalos adicionais para a esquerda da curva, e a função base mais à direita estende-se por dois intervalos adicionais para a direita da curva. Resumindo: existem  $m + 1$  vértices de controle,  $m + 1$  funções bases,  $m$  segmentos de curva limitadas por  $m + 1$  pontos de partição e  $m + 1 + 2 + 2 = m + 5$  juntas ao todo.

Agora será descrito como definir essas funções bases  $B(u)$ <sup>3</sup>. De acordo com a figura 1.6, cada função base é diferente de zero num conjunto de quatro intervalos sucessivos (como mostra a figura 1.5) e considera-se que dentro de cada intervalo uma função base seja definida por uma função polinomial por partes de grau  $\leq 3$  da forma

$$b_{-j}(u) = a_j + b_j u + c_j u^2 + d_j u^3, \quad 0 \leq j \leq 3. \quad (1.24)$$

Visto que cada seção da função base  $B(u)$  consiste de um dos quatro segmentos

<sup>2</sup>Caso não seja, bastaria dividir  $u$  pelo comprimento do intervalo

<sup>3</sup>Cada  $B_{i+k}$  é uma cópia de  $B_i$ , deslocado  $k$  intervalos para a direita

$b_{-0}(u)$ ,  $b_{-1}(u)$ ,  $b_{-2}(u)$  e  $b_{-3}(u)$ , que são chamados segmentos das bases, e como cada segmento tem 4 coeficientes, existem 16 coeficientes a determinar.

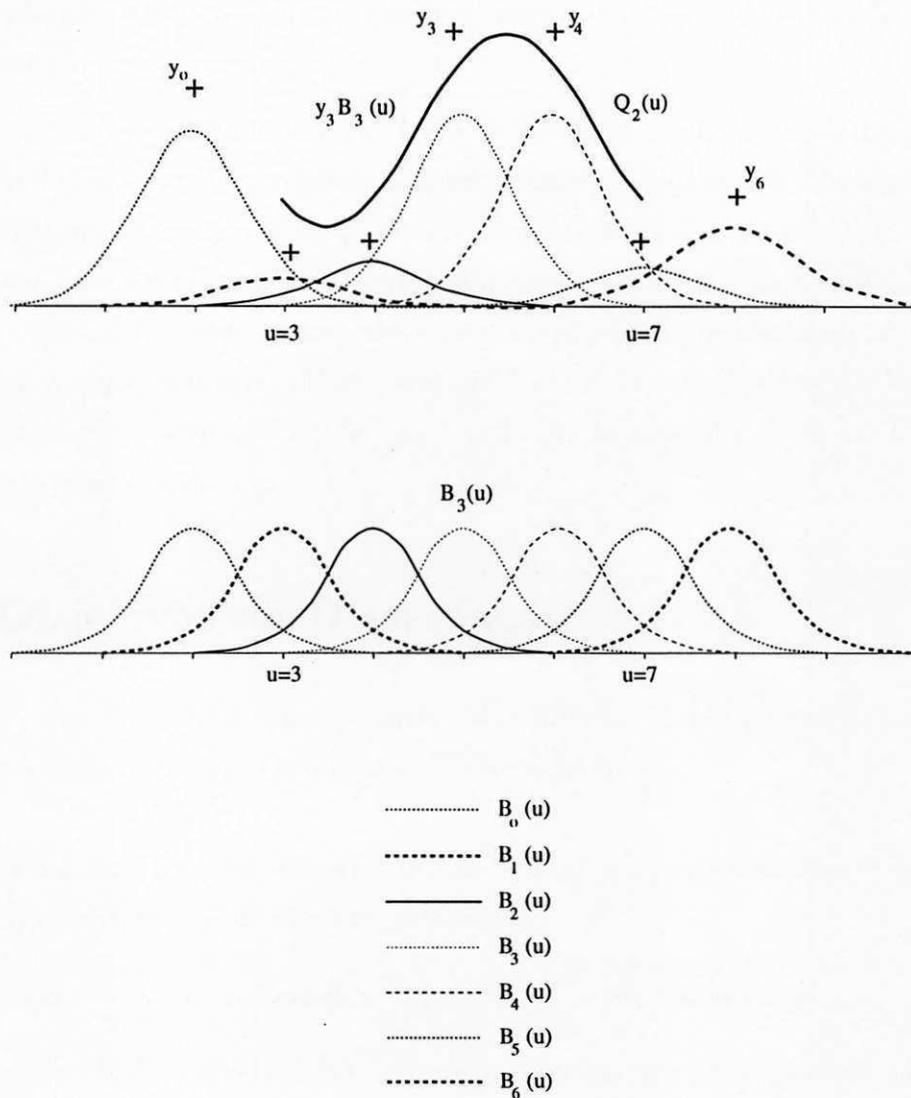


Figura 1.6: A curva da figura 1.4 como combinação linear das funções bases

Para determinar a curva  $Q(u)$ , após encontrados os coeficientes, seleciona-se um conjunto distinto de pontos  $P_i = f(u_i)$ ,  $i = 0, \dots, m$  que são usados para definir uma aproximação polinomial por partes para uma função contínua  $f$  sobre uma seqüência de juntas  $U = (u_i)_0^m$ . De agora em diante toda referência a uma aproximação deve ser

entendida como sendo esse tipo de aproximação.

Essa construção para as funções bases não é necessária para as bases de *Bézier* e *B-spline*, porque existe uma formulação geral para as mesmas. As outras bases *splines* não apresentam uma formulação geral.

Este trabalho apresenta uma abordagem unificada para a construção das bases *splines* através de uma formulação geral, da qual é possível obter os diversos tipos de bases *splines*. Visto que a aproximação de curvas complexas geralmente é obtida utilizando mais de uma base *spline*, com essa abordagem basta converter a representação de uma base para outra, facilitando assim, não só a construção da aproximação de curvas como também a implementação. Além disso, o estudo unificado das bases *splines* facilita a compreensão das mesmas e auxilia na escolha da base *spline* a ser usada para um determinado problema ou parte dele.

## 1.5 Objetivos da Dissertação

A seção anterior apresentou que é possível construir uma aproximação por *splines* para uma dada função contínua. Os objetivos deste trabalho são:

- Elaborar uma resenha das *splines* mais conhecidas, apresentando o que tem de comum e o que tem de diferente entre elas.
- Mostrar como construir *splines* impondo condições geométricas.
- Investigar se é possível encontrar uma formulação que permita construir todas as ou a maioria das *splines* conhecidas.

## 1.6 Organização da Dissertação

Este trabalho foi organizado em 4 capítulos, incluindo esta introdução.

No capítulo 2, é apresentada uma resenha das *splines* mais conhecidas, com a construção das respectivas *bases splines*. É também apresentada uma definição geral de *splines*.

No capítulo 3, é mostrada uma maneira de construir, de forma geral, as bases *splines* a partir de algumas condições impostas à aproximação.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões obtidas com a elaboração deste trabalho e são propostos também alguns trabalhos futuros visando dar continuidade a este estudo sobre *splines*.

## Capítulo 2

# Resenha das Splines

De acordo com o capítulo 1, matematicamente, uma curva construída usando uma seqüência de pontos depende de um método de interpolação ou aproximação [RA90]. Esse método é fornecido pela escolha de uma base. A base de *Bernstein*, por exemplo, produz curvas de *Bézier*. Duas características da base de *Bernstein*, contudo, limitam a flexibilidade da curva resultante <sup>1</sup>. Primeiro, o número de pontos especificado fixa o grau da curva resultante. A segunda característica limitante é a natureza global da base de *Bernstein*, porque para uma aproximação com um dado conjunto de pontos, a modificação de um ponto implica na necessidade de repetir todos os cálculos feitos anteriormente. A base *B-spline* permite modificar o grau das funções da base e, em conseqüência, o grau da curva resultante sem mudar o número de pontos que definem o polígono de controle. Essa base é geralmente não global.

Neste capítulo serão apresentados vários modelos matemáticos usados para construir aproximação de curvas. Essa aproximação é definida satisfazendo certas propriedades geométricas. Inicialmente são apresentadas noções de transformações geométricas e de geometria diferencial para tornar o presente trabalho autocontido. Maiores detalhes sobre os assuntos tratados são encontrados em [FVD92, RA90, GV90] (transformações geométricas) e em [DoC76, Ten88] (geometria diferencial). Em seguida será

---

<sup>1</sup>Estas características valem para aproximações polinomiais em geral

apresentada uma definição geral de *spline*. Finalmente é fornecida uma descrição sistemática de várias *splines* de grau  $\leq 3$  conhecidas.

## 2.1 Transformações Geométricas

Muitas das transformações que são utilizadas para reposicionar ou mudar de escala um objeto em Computação Gráfica ou num ambiente CAD (Computer Aided Design) são transformações geométricas. Entende-se por **transformação** uma aplicação  $T : R^M \rightarrow R^N$ ,  $M \leq N$ . Uma transformação que permite mover (translação ou rotação), alterar o tamanho (escalamento) ou modificar a forma (cisalhamento) de objetos é chamada *transformação geométrica*.

Os modelos poliedrais são comuns na criação de objetos em Computação Gráfica. As transformações que preservam essa estrutura linear merecem uma posição de destaque. Desse modo, uma classe de transformações importantes são as que transformam quadriláteros em quadriláteros. Entre os elementos dessa classe estão as *transformações afins*.

**Definição 2.1.1** Uma transformação afim  $T : R^3 \rightarrow R^3$  é definida por

$$T[x] = A[x] + v \quad (2.1)$$

em que  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$ ,  $x$  e  $v$  são vetores de  $R^3$ .

**Definição 2.1.2** Uma combinação baricêntrica é uma combinação linear dos vetores  $v_i \in R^3$  cujos coeficientes  $c_i \in R$  somam 1, isto é,

$$\sum_{i=0}^m c_i \cdot v_i, \quad c_0 + \dots + c_m = 1, \quad v_i \in R^3. \quad (2.2)$$

Usando o fato de que  $\sum c_i = 1$ , é possível mostrar que combinações baricênticas são *invariantes* (preservadas) quando submetidas a transformações afins, isto é

$$T(\sum c_i \cdot v_i) = \sum c_i \cdot T(v_i). \quad (2.3)$$

A expressão  $v = \sum c_i \cdot v_i$  especifica como se deve ponderar os  $v_i$  para que a média ponderada seja  $v$ . Essa relação continua válida se for aplicada uma transformação afim a todos os  $v_i$  e a  $v$ . Por exemplo, o ponto médio de um segmento de reta será mapeado para o ponto médio do mapeamento deste segmento por uma transformação afim. Na seção 2.5 será vista a implicação dessa propriedade para aproximação de curvas.

**Definição 2.1.3** *Uma combinação baricêntrica em que os coeficientes  $c_i$ , além de somarem 1, sejam também não negativos é uma combinação convexa.*

Um caso especial importante de transformações afins são os *movimentos rígidos*. Esses são caracterizados por matrizes  $A$  ortogonais, aquelas que satisfazem a propriedade  $A^T A = I$ , onde  $A^T$  é a matriz transposta de  $A$  e  $I$  uma matriz identidade. Os movimentos rígidos preservam ângulos e comprimentos; os exemplos mais importantes são rotação e translação.

## 2.2 Geometria Diferencial

A Geometria Diferencial tem origem nos trabalhos pioneiros de L. Euler, de C. Monge e de C. F. Gauss, e tem como objetivo descrever propriedades locais de curvas e superfícies, por exemplo, curvatura. Esses conceitos são importantes também em modernos projetos geométricos auxiliados por computador. A principal abordagem para obter resultados gerais é o uso de sistemas de coordenadas locais nos quais as propriedades geométricas são facilmente descritas e estudadas. Esta seção discute as propriedades locais de curvas no espaço.

### 2.2.1 Curva Parametrizada Diferenciável e Comprimento de Arco

**Definição 2.2.1** Uma curva parametrizada diferenciável de  $R^3$  é uma aplicação  $Q : I \rightarrow R^3$ ,  $u \in I \subset R$  que para cada  $u$  associa  $Q(u) = (Q_1(u), Q_2(u), Q_3(u))^T$ , onde os componentes  $Q_1(u)$ ,  $Q_2(u)$  e  $Q_3(u)$  são funções infinitamente diferenciáveis ou de classe  $C^\infty$  em  $u$ . A variável  $u$  é o parâmetro da curva.

Para evitar problemas relativos à parametrização de curvas, assume-se que o *vetor tangente* é diferente de zero, para todo  $u \in I$ , onde “ ’ ” indica derivada em relação a  $u$ .

**Definição 2.2.2** Seja  $Q : I \rightarrow R^3$  uma curva parametrizada diferenciável, que a cada  $u \in I$  associa  $Q(u) = (Q_1(u), Q_2(u), Q_3(u))^T$ . O vetor

$$Q'(u) = (Q'_1(u), Q'_2(u), Q'_3(u))^T \quad (2.4)$$

é o *vetor tangente* a  $Q$  em  $u$ .

**Definição 2.2.3** Uma curva parametrizada diferenciável  $Q : I \rightarrow R^3$  é *regular* se para todo  $u$ ,  $Q'(u) \neq 0$ .

Geometricamente uma curva regular é suave em todos os seus pontos (não apresenta bicos) pois em cada ponto dela existe uma *reta tangente* bem definida.

**Definição 2.2.4** Seja  $Q : I \rightarrow R^3$  uma curva regular. A *reta tangente* a  $Q$  em  $a \in I$  é a reta que passa por  $Q(a)$  na direção de  $Q'(a)$ , isto é, a reta expressa por

$$\alpha(r) = Q(a) + rQ'(a), \quad r \in R. \quad (2.5)$$

Uma mudança  $s = s(u)$  de parâmetro, onde  $s$  é uma função diferenciável ( $C^\infty$ ) em  $u$ , não mudará a forma da curva. Esta reparametrização será regular se  $s' \neq 0$  para todo  $s \in I$ , o que implica que é possível obter a inversa  $u = u(s)$ . Seja

$$s = s(u) = \int_a^u \|Q'(u)\| du, \quad a \in I \quad (2.6)$$

uma parametrização regular onde  $\| \cdot \|$  é uma norma de  $Q'(u)$ .

De agora em diante toda referência a uma norma deve ser entendida como sendo à norma euclideana, definida a seguir.

**Definição 2.2.5** *Seja  $v$  um vetor de componentes  $v = (v_0, v_1, v_2)$ . A norma euclideana de  $v$  é dada por*

$$\|v\| = \sqrt{(v_0)^2 + (v_1)^2 + (v_2)^2}. \quad (2.7)$$

Visto que

$$Q' du = \frac{dQ}{ds} \cdot \frac{ds}{du} du = \frac{dQ}{ds} ds, \quad (2.8)$$

$s$  é independente de qualquer reparametrização regular. O parâmetro  $s$  definido por (2.6) é denominado *função comprimento de arco* da curva  $Q$  a partir de  $a$ . Essa função é diferenciável porque  $Q$  é uma curva regular. O *comprimento de arco* da curva  $Q$  de  $a$  a  $b$  é expresso por

$$\int_a^b \|Q'(u)\| du; \quad a, b \in I, \quad a \leq b. \quad (2.9)$$

**Definição 2.2.6** *Uma curva regular  $Q : I \rightarrow R^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada  $a, b \in I$ ,  $a \leq b$ , o comprimento de arco da curva  $Q$  de  $a$  a  $b$  for igual a  $b - a$ , isto é,*

$$\int_a^b \|Q'(u)\| du = b - a. \quad (2.10)$$

**Proposição 2.2.1** Uma curva regular  $Q : I \rightarrow R^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, para todo  $u \in I$ ,  $\|Q'(u)\| = 1$ .

Além disso, toda curva regular no espaço admite uma reparametrização  $\hat{Q}$  pelo comprimento de arco.

### 2.2.2 A Estrutura de Frenet

Agora será introduzido um sistema especial de coordenadas local, ligado a um ponto  $Q(u)$  sobre a curva, que facilitará significativamente a descrição das propriedades locais da curva nesse ponto. A expansão de  $Q(u) = (Q_1(u), Q_2(u), Q_3(u))$  em série de Taylor nas vizinhanças de  $a \in I$  é

$$Q(u) = Q(a) + (u - a)Q'(a) + \frac{(u - a)^2}{2}Q''(a) + \frac{(u - a)^3}{6}Q'''(a) + \dots, \quad (2.11)$$

em que “...” denota termos de grau  $\geq 4$  em  $(u - a)$ . Se as três primeiras derivadas de  $Q(u)$  forem linearmente independentes,  $Q'(u)$ ,  $Q''(u)$  e  $Q'''(u)$  formam um sistema de coordenadas local com origem em  $Q(a)$ . Nesse sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} Q_1(u) &= (u - a) + \dots, \\ Q_2(u) &= \frac{1}{2}(u - a)^2 + \dots, \\ Q_3(u) &= \frac{1}{6}(u - a)^3 + \dots. \end{aligned} \quad (2.12)$$

As expressões em (2.12) constituem a *representação canônica* da curva  $Q$  em uma vizinhança de  $u = a$ . Desse sistema de coordenadas pode-se obter um sistema de coordenadas ortonormais local com eixos  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  pelo processo de ortogonalização de Gram Schmidt (ver figura 2.1)

$$\mathbf{t} = \frac{Q'}{\|Q'\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} = \frac{Q' \wedge Q''}{\|Q' \wedge Q''\|}, \quad (2.13)$$

onde “ $\wedge$ ” denota o produto vetorial.

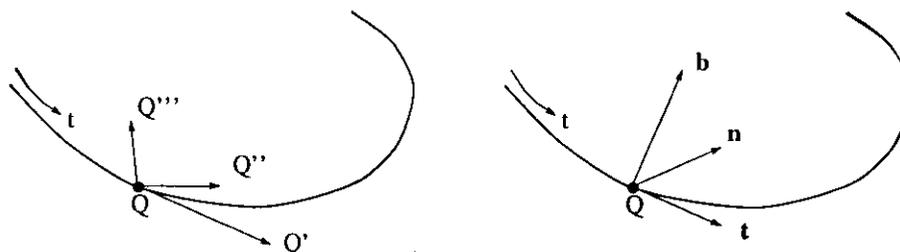


Figura 2.1: Sistema local (esquerda) e Estrutura de Frenet (direita)

**Definição 2.2.7** Dados dois vetores  $v$  e  $w$  de componentes  $v = (v_0, v_1, v_2)$  e  $w = (w_0, w_1, w_2)$ , o produto vetorial de  $v$  e  $w$ , denotado por  $v \wedge w$ , é o vetor

$$v \wedge w = (v_1 w_2 - w_1 v_2, -v_0 w_2 + w_0 v_2, v_0 w_1 - w_0 v_1)^T. \quad (2.14)$$

Nas equações em (2.13), o vetor  $t$  é chamado *vetor tangente unitário*,  $n$  é chamado *vetor normal*, e  $b$  é chamado *vetor binormal*. A estrutura (ou triedro)  $t, n, b$  é chamada *estrutura de Frenet* e sua orientação muda em função do parâmetro  $u$ .

### 2.2.3 Movendo a Estrutura de Frenet

Permitindo a estrutura de Frenet variar em função de  $u$ , fornece uma boa idéia do comportamento da curva no espaço. Um resultado fundamental em geometria diferencial diz que é possível expressar a mudança local da estrutura de Frenet em termos dela mesma. Se for usada a parametrização pelo comprimento de arco, as fórmulas são particularmente simples. Denotando a diferenciação em relação ao comprimento de arco por “ $\dot{\phantom{x}}$ ”, com alguns cálculos obtêm-se as chamadas *Fórmulas de Frenet*.

$$\begin{aligned} \dot{t} &= +\kappa n, \\ \dot{n} &= -\kappa t + \tau b, \\ \dot{b} &= -\tau n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $\kappa$  e  $\tau$ , chamadas *curvatura* e *torção*, podem ser definidas tanto em função do comprimento de arco  $s$  como em função do parâmetro  $u$ . As definições são, em função do comprimento de arco,

$$\begin{aligned}\kappa = \kappa(s) &= \|\ddot{Q}\|, \\ \tau = \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot \det[\dot{Q}, \ddot{Q}, \ddot{\ddot{Q}}],\end{aligned}\quad (2.16)$$

e em função da coordenada  $u$

$$\begin{aligned}\kappa = \kappa(u) &= \frac{\|Q' \wedge Q''\|}{\|Q'\|^3}, \\ \tau = \tau(u) &= \frac{\det[Q', Q'', Q''']}{\|Q' \wedge Q''\|^2}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Nas equações (2.16) e (2.17) os vetores que aparecem entre colchetes constituem as colunas de uma matriz. A figura 2.2 ilustra as relações expressas em (2.15).

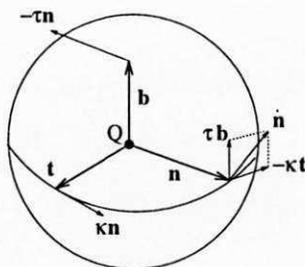


Figura 2.2: Interpretação Geométrica das Fórmulas de Frenet

A curvatura e a torção têm um significado geométrico intuitivo:  $\kappa$  e  $\tau$  indicam as velocidades com que variam  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente. De fato, fixado  $s_0 \in I$ , considere os vetores tangentes  $\mathbf{t}(s_0)$  e  $\mathbf{t}(s_0 + h)$ , onde  $s_0 + h \in I$ . Seja  $\phi(h)$  o ângulo formado por esses vetores. Então,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{h}$  é a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Com isso pode-se mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{h} = \|Q''(s_0)\| = \kappa(s_0).\quad (2.18)$$

A idéia da prova para o vetor binormal  $\mathbf{b}$  é semelhante.

Observe que  $\kappa$  e  $\tau$  não são alterados por movimentos rígidos, ou seja, a curvatura e a torção são independentes da parametrização corrente da curva. Além disso, quaisquer duas funções contínuas  $\kappa = \kappa(s) > 0$  e  $\tau = \tau(s)$  definem unicamente (a menos de movimentos rígidos) uma curva que tem curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$ .

## 2.3 Spline mais Geral

Antes de iniciar uma apresentação das *splines*, serão apresentadas as definições principais que serão usadas posteriormente.

**Definição 2.3.1** [dB78] *Seja  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  uma partição do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  da reta real  $R$ , e seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $S_0, \dots, S_l$  for qualquer seqüência de  $l+1$  funções polinomiais onde cada  $S_i$  está definida sobre  $[u_i, u_{i+1}]$ , cada uma de grau  $\leq n$ , então uma função polinomial por partes  $Q$  de grau  $\leq n$  sobre o intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  corresponde a*

$$Q(u) = S_i(u), \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, l. \quad (2.19)$$

Cada número real  $u_i$  é chamado ponto de partição (*breakpoint*). A coleção de todos os  $u_i$  é chamada seqüência (ou vetor) de juntas.

A figura 2.3 mostra uma curva polinomial por partes sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_7$  do intervalo  $[u_0, u_7]$ . Observa-se que em alguns pontos de partição nenhuma condição de continuidade foi imposta, por exemplo, no ponto  $u_2$ . Em outras palavras, a passagem de  $S_1$  para  $S_2$  foi realizada sem restrição alguma.

Para qualquer  $u$  tem-se assim um correspondente ponto  $Q(u)$  sobre a curva  $Q$ . Se  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ , pode-se introduzir uma coordenada (ou parâmetro) local  $t$  para o intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  fixando

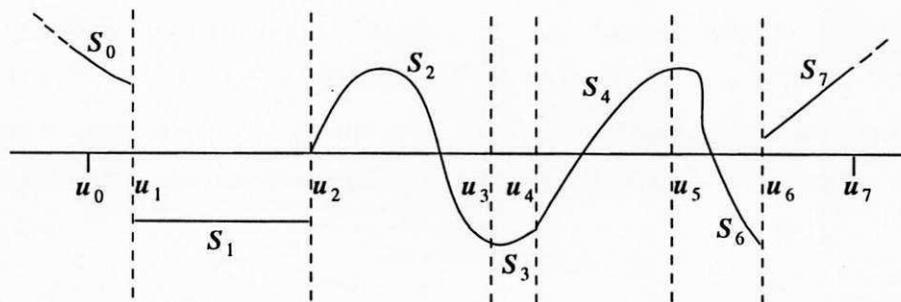


Figura 2.3: Uma curva polinomial por partes com  $l + 1 = 7$ .

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta_i}. \quad (2.20)$$

Note que  $t$  varia de 0 a 1 quando  $u$  varia de  $u_i$  a  $u_{i+1}$ .

Uma discussão sobre a curva  $Q$  completa, será mais conveniente em termos do parâmetro global  $u$ . Escreve-se  $Q(u) = S_i(t)$  para denotar um ponto sobre a curva. A figura 2.4 ilustra a relação entre as coordenadas global e local. Os pontos  $Q(u_i) = S_{i-1}(1) = S_i(0)$  são chamados *pontos de junção* de  $S_{i-1}(t)$  e  $S_i(t)$ .

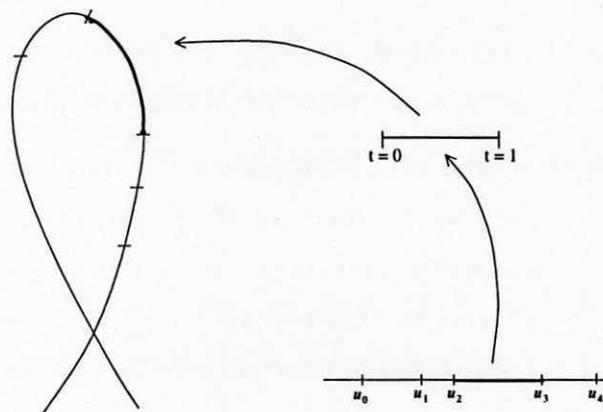


Figura 2.4: Coordenadas Locais: o intervalo  $[u_2, u_3]$  foi mapeado para o intervalo  $[0, 1]$  com coordenada local  $t$ .

Se forem impostas algumas condições de continuidade nesses pontos de junção, obtém-se uma classe de curvas que são chamadas *splines*.

**Definição 2.3.2** [Sei93] Seja  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  uma partição do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  da reta real  $R$ . Um spline de grau  $\leq n$  é uma curva polinomial por partes de grau  $\leq n$  sobre o intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que é  $n - 1$  vezes continuamente diferenciável nesse intervalo, tal que as derivadas em relação a  $u$ , pela direita e pela esquerda em  $u_j$  estão relacionadas.

Uma maneira de especificar essa relação é através de *matrizes de conexão*. Sejam

$$Q^{(k)}(u^+) = (Q(u^+), Q'(u^+), Q''(u^+), \dots, Q^{(k)}(u^+))^T \quad (2.21)$$

e

$$Q^{(k)}(u^-) = (Q(u^-), Q'(u^-), Q''(u^-), \dots, Q^{(k)}(u^-))^T, \quad (2.22)$$

os vetores colunas que contêm as  $k$  primeiras derivadas de  $Q$  pela direita e pela esquerda de um ponto  $u$ , respectivamente. A equação

$$Q^{(k)}(u_j^+) = C^j \cdot Q^{(k)}(u_j^-), \quad (2.23)$$

fixa uma relação linear entre as derivadas pela direita e pela esquerda do spline  $Q$  nos pontos da partição  $u_j$ . A matriz  $C^j$   $k \times k$  é chamada **matriz de conexão**.

Se for permitido que a seqüência estritamente crescente da definição 2.3.2 seja não decrescente, os pontos de partição podem aparecer repetidas vezes.

A fim de especificar o grau de continuidade nos pontos de partição  $u_j$ , multiplicidades são incluídas nesses pontos. Se um ponto de partição  $u_j$  for listado com multiplicidade  $\mu_j$ , exige-se que as  $(n - \mu_j)$  primeiras derivadas de  $Q$  estejam relacionadas por  $C^j$ . Em outras palavras,  $C^j$  é uma matriz de ordem  $(n - \mu_j)$ . Usando a convenção padrão de pontos de partição extremos com multiplicidade  $n + 1$ , é fácil ver que o vetor de juntas

$$U = (\underbrace{u_0, \dots, u_0}_{n+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{\mu_1}, \dots, \underbrace{u_l, \dots, u_l}_{\mu_l}, \underbrace{u_{l+1}, \dots, u_{l+1}}_{n+1}) = (u_i)_{i=0}^{n+m+1}, \quad (2.24)$$

pode ser indexado por  $i = 0, \dots, n + m + 1$ , com

$$m = n + \sum_{j=1}^l \mu_j. \tag{2.25}$$

Se um vetor de juntas  $U = (u_i)_{i=0}^{n+m+1}$  e uma seqüência de matrizes  $(C^j)_{j=1}^l$  de conexão nos pontos interiores da partição  $u_1, \dots, u_l$  forem dados (ver figura 2.5), denota-se por  $\mathcal{J}$  o espaço das splines sobre  $U$ , em que

$$\mathcal{J}_n(U, C) = \mathcal{J}_n((u_i)_{i=0}^{n+m+1}, (C^j)_{j=1}^l), \tag{2.26}$$

correspondente ao espaço das splines de grau  $\leq n$ .

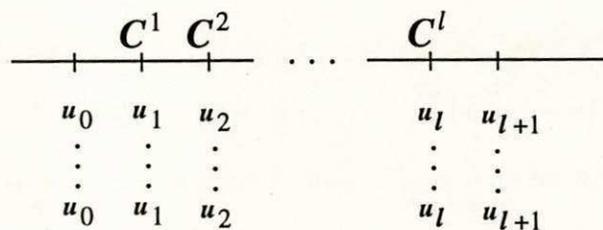


Figura 2.5: Partições, juntas e matrizes de conexão

Uma propriedade importante das matrizes de conexão para o resultado a seguir é a *total positividade*. A fim de definir a total positividade de uma matriz é necessário que se faça um comentário sobre submatrizes de uma dada matriz. Se  $C$  for uma matriz  $k \times k$ , então uma submatriz de  $C$  é qualquer matriz obtida suprimindo  $q$  linhas e  $q$  colunas,  $0 \leq q \leq k - 1$ .

**Definição 2.3.3** [dB78] *Uma matriz  $C$   $k \times k$  é totalmente positiva se e somente se todos os determinantes das submatrizes de  $C$  forem não negativos ( $\geq 0$ ).*

**Teorema 2.3.1** [DM88] *Dada uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  da reta real  $R$  e uma seqüência de inteiros não negativos  $\mu = (\mu_j)_{j=1}^l$  com  $\mu_j \leq n + 1$ , para todo  $j$  e fixando*

$$m + 1 = n + 1 + \sum_{j=1}^l \mu_j = \dim \mathcal{J}_n, \tag{2.27}$$

seja  $U = (u_i)_{i=0}^{n+m+1}$  qualquer seqüência de juntas tal que

1.  $\mu_0 = \mu_{l+1} = n + 1$ ,
2. Para  $j = 1, \dots, l$ , o ponto de partição  $u_j$  ocorre exatamente  $n - \mu_j + 1$  vezes em  $U$ .

Se as matrizes de conexão  $C^j$  forem totalmente positivas, então existe uma única base para  $\mathcal{J}_n((u_i)_{i=0}^{n+m+1}, (C^j)_{j=1}^l)$  de funções  $B_{i,n}(u)$ , chamadas funções bases,  $i = 0, \dots, m$  sobre o intervalo  $[u_n, u_{m+1}]$  satisfazendo

$$B_{i,n}(u) > 0, \quad u \in (u_i, u_{i+n+1}) \quad (\text{positividade}) \quad (2.28)$$

$$B_{i,n}(u) = 0, \quad u \notin (u_i, u_{i+n+1}) \quad (\text{suporte local}) \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=0}^m B_{i,n}(u) = 1, \quad u_0 \leq u \leq u_{l+1} \quad (\text{partição da unidade}) \quad (2.30)$$

e  $B_{i,n}(u)$  tem um único ponto de máximo local em  $(u_i, u_{i+n+1})$ .

Portanto, qualquer spline  $Q \in \mathcal{J}_n(U, C)$  tem representação única

$$Q(u) = \sum_{i=0}^m d_i \cdot B_{i,n}(u). \quad (2.31)$$

Os coeficientes  $d_i \in R^N$  são chamados *vértices (ou pontos) de controle* e o polígono formado por  $d_0, \dots, d_m$  é chamado *polígono de controle*.

Em vista da equação (2.31), agora uma definição mais geral de *spline* é apresentada.

**Definição 2.3.4** Uma função *spline* de grau  $\leq n$  com seqüência de juntas  $U$  é qualquer combinação linear de funções base  $B_{i,n}(u)$  de grau  $\leq n$  do teorema 2.3.1 para essa seqüência de juntas.

Essa definição de função *spline* pode causar dúvidas sobre o que as *splines* realmente são e não está totalmente de acordo com a definição 2.3.2. A diferença é justificada. Historicamente [Sch46], uma função *spline* de grau  $\leq n$  foi definida como uma função

polinomial por partes de grau  $\leq n$  sobre algum intervalo com  $n - 1$  derivadas contínuas nesse intervalo. Mas, as funções polinomiais por partes com menos suavidade que  $n - 1$ , por exemplo, as funções de Hermite, são também interessantes e úteis [dB78]. Tais *splines* são chamadas *splines com juntas múltiplas*.

Portanto, com essa extensão do conceito de *spline*, desde que as matrizes de conexão sejam totalmente positivas, pode-se obter uma função *spline* para uma dada seqüência de juntas. Por outro lado, dada uma função polinomial por partes que satisfaz algumas condições de continuidade nas junções entre os segmentos, pode-se afirmar se essa função é um *spline*, analisando a total positividade das matrizes de conexão. Dessa forma, a noção de *spline* é simplesmente uma maneira particular de olhar as funções polinomiais por partes que satisfazem certas condições de continuidade nas junções entre os segmentos.

Observa-se que no teorema 2.3.1 algumas propriedades das funções bases foram mencionadas. O significado de cada uma dessas propriedades será explicado quando as várias *splines* conhecidas forem descritas sistematicamente. Essa descrição se inicia com as chamadas *curvas de Bézier por partes* que satisfazem certas condições de continuidade nas junções entre os segmentos (ver seção 2.6). Para facilitar a compreensão das seções subseqüentes é útil conhecer curvas de Bézier.

## 2.4 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier podem ser definidas por um algoritmo recursivo, que foi como De Casteljau as desenvolveu [Far88]. É necessário também uma representação *explícita* para essas curvas, isto é, expressar as curvas de Bézier por uma fórmula não necessariamente recursiva. Essa fórmula utiliza a base de *Bernstein*, que facilita consideravelmente o estudo teórico dessas curvas.

**Definição 2.4.1** Uma curva de Bézier de grau  $\leq n$  é definida por

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot B_{i,n}(u), \quad u \in [0, 1], \quad (2.32)$$

onde

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2.33)$$

são as  $i$ -ésimas bases de Bernstein (ou Bézier) de grau  $\leq n$  com

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (2.34)$$

Os pontos  $d_i \in R^N$  são os vértices de controle e o polígono formado por  $d_0, \dots, d_n$  é o polígono de controle.

As bases de Bernstein satisfazem uma *partição da unidade*, ou seja,  $B_{i,n}(u)$  são funções não negativas sobre o intervalo  $[0, 1]$  e

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) = 1. \quad (2.35)$$

A figura 2.6 ilustra as bases para  $n = 3$ .

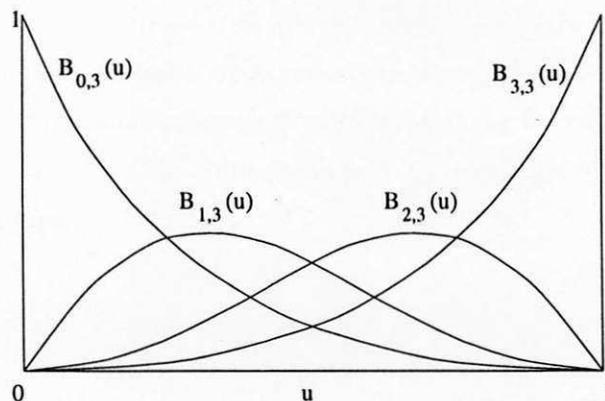


Figura 2.6: Bases de Bézier de grau  $\leq 3$

A próxima seção mostra como essa propriedade facilita a construção de aproximações de curvas.

## 2.5 Propriedades da Curva de Bézier

As propriedades apresentadas nesta seção podem ser obtidas usando argumentos geométricos; aqui elas serão desenvolvidas usando argumentos algébricos [Far88].

1. **Invariância sob transformação afim:** Combinações baricêntricas são invariantes sob transformações afins, e assim usando (2.35) é possível verificar algebricamente essa propriedade. Essas transformações constituem uma ferramenta para qualquer sistema CAD (Computer Aided Design): os objetos precisam ser reposicionados por rotação e/ou translação. Essa propriedade implica que os dois procedimentos seguintes têm o mesmo resultado: a) calcular um ponto  $Q(u)$  para um valor de  $u$  e então aplicar uma transformação afim a esse ponto; b) aplicar uma transformação afim ao polígono de controle e então avaliar  $Q(u)$ , com o polígono transformado, para um valor do parâmetro  $u$ .
2. **Invariância sob transformação paramétrica afim:** O mapeamento do intervalo  $[a, b]$  para o intervalo  $[0, 1]$  é uma transformação afim. A transformação de  $u \in [a, b]$  para um ponto de  $[0, 1]$  é obtida usando uma *coordenada local*  $t = (u - a)/(b - a)$ . Portanto, de acordo com a propriedade 1, as curvas de Bézier são invariantes sob transformação paramétrica afim. Isso significa que uma curva de Bézier pode ser definida sobre qualquer intervalo  $[a, b]$  da reta real  $R$ . Esta propriedade diz que

$$\sum_{i=0}^n d_i \cdot B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n d_i \cdot B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right). \quad (2.36)$$

Isto assegura que a curva é independente de parametrização.

3. **Casca convexa:** Formalmente, a *casca convexa* definida pelos vértices de controle  $d_i$  consiste de todos os pontos que podem ser escritos como combinação convexa desses vértices de controle. Para  $u \in [0, 1]$ , a curva de Bézier  $Q(u)$  pertence a casca convexa do polígono de controle. Isso decorre do fato de que para  $u \in [0, 1]$ , as bases de Bernstein formarem uma partição da unidade. Como consequência,

uma curva de Bézier gerada a partir de um polígono de controle planar também é planar. A casca convexa de um conjunto de vértices de controle no plano pode ser imaginada como a região delimitada por esses vértices (ver figura 2.7).

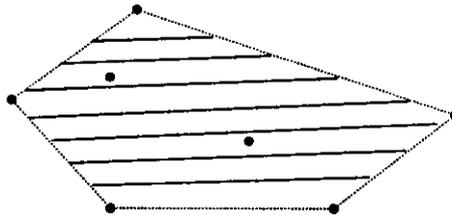


Figura 2.7: A casca convexa de um conjunto de vértices de controle

4. **Preservação de Forma:** A curva de Bézier tem menos intersecções com qualquer plano que o polígono de controle. Em particular, um polígono de controle convexo garante uma curva convexa. Um polígono é convexo se este não tem mais que duas intersecções com qualquer plano. Para mostrar a propriedade da preservação de forma necessita-se da propriedade *variation diminishing* que é descrita agora. Costuma-se denotar o número de mudanças de sinal na seqüência  $d = (d_0, \dots, d_n)$  por  $S^-d$ . Para ser preciso,  $S^-d$  é o maior inteiro  $r$  com a propriedade de que para algum  $0 \leq i_0 < \dots < i_{r+1} \leq n$ ,  $d_{i_j} d_{i_{j+1}} < 0$  para  $j = 0, \dots, r$ . Usando uma notação semelhante para uma função contínua  $f$ , o número de mudanças de sinal  $S^-f$ , é o *supremo* sobre todos os números  $S^-(f(x_0), \dots, f(x_r))$  com  $r$  arbitrário e  $x_0, \dots, x_r$  arbitrário no domínio de  $f$ . Um elemento  $b \in R$  chama-se *supremo* do conjunto  $X \subset R$  se e somente se, satisfaz as seguintes condições

- (a) Para todo  $x \in X$ , tem-se  $x \leq b$ .
- (b) Se  $c \in R$  for tal que  $x \leq c$  para todo  $x \in X$ , então  $b \leq c$ .

A primeira condição diz que  $b$  é uma *cota superior*, isto é, existe  $b \in R$  tal que  $b \geq x$  para todo  $x \in X$ . A segunda afirma que qualquer outra cota superior de  $X$  deve ser maior do que, ou igual a  $b$ . Com essa notação a propriedade *variation diminishing* estabelece que as bases de *Bernstein* satisfazem, para qualquer seqüência  $d$ , a desigualdade

$$S^-\left(\sum_{i=0}^n d_i \cdot B_{i,n}\right) \leq S^-(d_0, \dots, d_n). \quad (2.37)$$

## 2.6 Curva Spline da Forma de Bézier

As curvas de Bézier possibilitam o desenvolvimento de uma poderosa ferramenta para aproximação de curvas. Mas existem algumas limitações: se a curva a ser modelada tiver uma forma complexa, então sua representação de Bézier terá um alto grau (na prática, graus excedendo 10 são proibitivos). Tal curva complexa pode, contudo, ser modelada usando *curvas de Bézier por partes* (ou *splines*) que satisfazem certas condições de continuidade nas junções entre os segmentos. Esta seção descreve as condições de suavidade (ou continuidade) para tais *splines*. Mais especificamente, será mostrado que impondo condições geométricas aos pontos de controle pode-se obter uma curva *spline da forma de Bézier*.

Quando se considera uma única curva de Bézier, assume-se que essa é uma função sobre o intervalo  $[0,1]$ . Essa afirmação pode ser feita por causa da invariância das curvas de Bézier sob transformações paramétricas afins (ver Seção 2.5). A existência dessa propriedade não é fácil de se ver em curvas contínuas por partes. Em cada segmento individual de uma curva polinomial por partes,  $Q$  é uma função sobre o intervalo  $[0,1]$ , mas a curva como um todo é uma função numa coleção de intervalos, e seus comprimentos relativos tem um papel importante.

Os segmentos individuais de  $Q$  podem ser escritos como curvas de Bézier, e é fácil descrever cada um usando coordenadas locais, como foi descrito na seção 2.3.

A introdução de coordenadas locais tem algumas implicações nas derivadas da curva  $Q$  (para detalhes ver [Far88]). Para  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ , a regra da cadeia fornece

$$Q^{(r)}(u) = \frac{d^r Q(u)}{du^r} = \left(\frac{dt}{du}\right)^r \cdot \frac{d^r S_i(t)}{dt^r} = \left(\frac{1}{\Delta_i}\right)^r \cdot \frac{d^r S_i(t)}{dt^r} \quad (2.38)$$

onde  $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ .

A representação de Bézier dos segmentos é agora expressa por

$$S_i(t) = \sum_{k=0}^n d_{ni+k} \cdot B_{k,n}(t). \quad (2.39)$$

As derivadas de  $S_i(t)$  em relação a  $t$  são expressas por

$$\frac{d^r}{dt^r} S_i(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r d_{nr+k} \cdot B_{k,n-r}(t), \quad (2.40)$$

onde  $\Delta^r d_j = \Delta^{r-1}(d_{j+1} - d_j)$ .

As derivadas de  $Q(u)$  pela esquerda e pela direita numa junta  $u_i$  são, respectivamente,

$$Q^{(r)}(u_i^-) \equiv \lim_{u \rightarrow u_i^-} Q^r(u) = \left(\frac{1}{\Delta_{i-1}}\right)^r \cdot \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r d_{ni-r}, \quad (2.41)$$

e

$$Q^{(r)}(u_i^+) \equiv \lim_{u \rightarrow u_i^+} Q^r(u) = \left(\frac{1}{\Delta_i}\right)^r \cdot \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r d_{ni}, \quad (2.42)$$

Portanto, igualando as equações (2.41) e (2.42), a condição para a continuidade  $C^r$  em uma junta  $u_i$  é expressa por

$$\left(\frac{1}{\Delta_{i-1}}\right)^j \Delta^j d_{ni-j} = \left(\frac{1}{\Delta_i}\right)^j \Delta^j d_{ni}, \quad j = 0, \dots, r. \quad (2.43)$$

Em função desse último resultado será definida uma *curva spline da forma de Bézier*.

**Definição 2.6.1** Uma curva spline da forma de Bézier de grau  $\leq n$  é uma função polinomial por partes de grau  $\leq n$  sobre uma partição  $u_0 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que satisfaz as condições de continuidade expressas pela relação (2.43).

Usando a equação (2.43) pode-se mostrar que as condições necessárias e suficientes para as continuidades  $C^1$  e  $C^2$  numa junta  $u_i$  satisfazem, respectivamente, as relações

$$d_{ni} = (1-t)d_{ni-1} + td_{ni+1} \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned}d_{ni-1} &= (1-t)d_{ni-2} + ts_i, \\d_{ni+1} &= (1-t)s_i + td_{ni+2},\end{aligned}\tag{2.45}$$

onde  $t$  é o parâmetro local de  $u$  em relação ao intervalo  $[u_{i-1}, u_{i+1}]$ , ou seja, a transformação de  $u \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$  para um ponto de  $[0, 1]$  é obtida usando uma coordenada local  $t = \Delta_{i-1}/(u_{i+1} - u_{i-1})$  [Far88].

A figura 2.8 ilustra as relações (2.44) e (2.45).

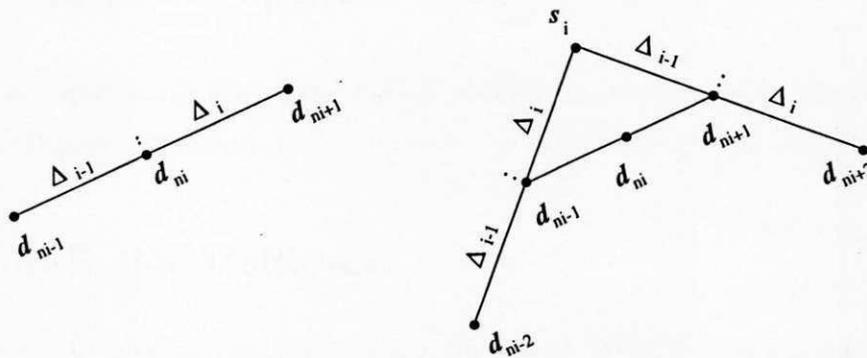


Figura 2.8: Continuidade  $C^1$  (esquerda) e continuidade  $C^2$  (direita)

Observa-se que para a continuidade  $C^1$  os vértices de controle  $d_{ni-1}, d_{ni}, d_{ni+1}$  precisam ser colineares com razão  $\Delta_{i-1} : \Delta_i$ . No caso da continuidade  $C^2$ , deve existir um único ponto de intersecção  $s_i$  que satisfaça (2.45).

Costuma-se também expressar as equações (2.44) e (2.45), respectivamente, da forma

$$(1 + q_i)d_{ni} = q_id_{ni-1} + d_{ni+1}\tag{2.46}$$

e

$$\begin{aligned}(1 + q_i)d_{ni-1} &= q_id_{ni-2} + s_i, \\(1 + q_i)d_{ni+1} &= q_is_i + d_{ni+2},\end{aligned}\tag{2.47}$$

onde

$$q_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad (2.48)$$

As equações (2.44) e (2.45) assim como as equações (2.46) e (2.47) relacionam as continuidades da *curva*, da *primeira derivada* e da *segunda derivada* com a forma geométrica do polígono de controle. Na próxima seção, ver-se-á que é possível construir analiticamente funções bases para essa classe de *splines*, quando for considerada uma seqüência de juntas com o espaçamento uniforme.

## 2.7 Curvas B-splines

A representação paramétrica de curvas usando as chamadas bases *B-splines* é um método útil para aproximação de curvas em computação gráfica [BFK84].

### 2.7.1 B-Spline Uniforme

Posteriormente será apresentada uma definição de *B-spline* mais geral. Nesta seção é introduzida uma classe particular de *B-splines* que são chamadas *B-splines uniformes*. Como o nome implica, trata-se de uma curva polinomial por partes de grau  $\leq n$  sobre uma seqüência de juntas com o espaçamento uniforme que satisfaz algumas condições de continuidade nas junções entre os segmentos.

**Definição 2.7.1** *Uma curva B-spline uniforme de grau  $\leq n$  é uma curva polinomial por partes sobre uma partição  $u_0 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que satisfaz as seguintes condições de continuidade*

$$Q^{(j)}(u_i^+) = Q^{(j)}(u_i^-), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2.49)$$

Para grau 3, obtêm-se as seguintes condições de continuidade

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-) \quad (2.50)$$

$$Q'(u_i^+) = Q'(u_i^-) \quad (2.51)$$

$$Q''(u_i^+) = Q''(u_i^-). \quad (2.52)$$

As equações (2.50), (2.51) e (2.52) expressam continuidades da curva, da primeira derivada e da segunda derivada. A partir dessas condições pode-se construir as funções bases *B-splines uniformes*.

Usando o método de construção das *bases splines* de grau  $\leq 3$  descrito no capítulo 1 e que será discutido no capítulo 3, os segmentos das bases *B-splines uniformes* de grau  $\leq 3$  são

$$\begin{aligned} b_{-0}(u) &= \frac{1}{6}u^3, \\ b_{-1}(u) &= \frac{1}{6}(1 + 3u + 3u^2 - 3u^3), \\ b_{-2}(u) &= \frac{1}{6}(4 - 6u^2 + 3u^3), \\ b_{-3}(u) &= \frac{1}{6}(1 - 3u + 3u^2 - u^3). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Observa-se que as relações para os segmentos das bases *B-splines uniformes* em (2.53) são as mesmas relações para os segmentos das bases de uma *curva spline da forma de Bézier*. Mais adiante na seção (2.13) será justificada essa afirmação.

## 2.7.2 B-spline Geral

**Definição 2.7.2** [dBH87] *Seja  $U$  uma seqüência de juntas com multiplicidade máxima igual a  $n+1$ , isto é,  $u_0 \leq \dots \leq u_{m+n+1}$  e  $u_i < u_{i+n+1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ . As bases *B-splines* de grau  $\leq n$  correspondentes a essa seqüência de juntas são funções que satisfazem*

$$B_{i,n}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} \cdot B_{i,n-1}(u) + \frac{u_{i+1+n} - u}{u_{i+1+n} - u_{i+1}} \cdot B_{i+1,n-1}(u), \quad (2.54)$$

com

$$B_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}), \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.55)$$

$i = 0, \dots, m$ , em que o primeiro e segundo termos do segundo membro da relação (2.54) são iguais a zero, respectivamente, sempre que  $u_{i+n} - u_i = 0$  e  $u_{i+1+n} - u_{i+1} = 0$ .

Desenvolvendo a relação (2.54), para uma seqüência de juntas uniforme, e reparametrizando cada intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  para  $[0, 1]$ , verifica-se que os segmentos das bases *B-splines* são os mesmos segmentos expressos por (2.53).

Agora pode-se definir uma curva *B-spline*. Nota-se uma semelhança com a definição 2.3.4.

**Definição 2.7.3** [dB78] *Uma curva B-spline de grau  $\leq n$  com seqüência de juntas  $U$  é qualquer combinação linear de funções base B-splines  $B_{i,n}(u)$  de grau  $\leq n$  para essa seqüência de juntas.*

Observa-se que, de acordo com o teorema 2.3.1, se as matrizes de conexão  $(C^j)_{j=1}^l$  forem as matrizes identidade, então o espaço  $\mathcal{J}_n$  é o espaço das *B-splines* de grau  $\leq n$  com juntas de multiplicidade  $\mu_j$  em  $u_j$ , para  $j = 1, \dots, l$ . Em outras palavras, qualquer curva  $Q \in \mathcal{J}_n$  tem representação única da forma expressa por (2.31).

As equações (2.54) e (2.55) mostram claramente que a escolha de um vetor de juntas tem uma influência significativa sobre as bases  $B_{i,n}(u)$  e assim sobre a curva resultante [RA90]. Fundamentalmente, três tipos desses vetores são usados: *uniforme*, *aberto uniforme* (ou aberto) e *não uniforme*.

Em um vetor de juntas *uniforme*, os valores individuais das juntas são igualmente espaçados. Exemplos são: (0 1 2 3 4), (0 0.25 0.5 0.75 1). Para um dado grau  $\leq n$ , o vetor de juntas *uniforme* produz bases uniformes periódicas, ou seja,

$$B_{i,n}(u) = B_{i-1,n}(u-1) = B_{i+1,n}(u+1). \quad (2.56)$$

De acordo com (2.56) vê-se que existe essencialmente uma única base *B-spline* de um dado grau. As curvas *B-splines* em que o vetor de juntas  $U = (u_i)_{i=0}^{n+m+1}$  é *uniforme* são chamadas *splines cardinais*.

Formalmente, um vetor de juntas **aberto uniforme** é definido por

$$\begin{aligned} u_i &= 0, & 0 \leq i \leq n, \\ u_i &= i - n, & n + 1 \leq i \leq m + 1, \\ u_i &= m - n + 2, & m + 2 \leq i \leq m + n + 1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Os vetores **não uniformes** podem ter alternativamente valores com espaçamento desigual e/ou valores múltiplos internos. Eles também podem ser periódicos ou abertos.

As bases *B-splines* satisfazem, além das propriedades apresentadas na seção 2.5 e a expressa por (2.35), as seguintes propriedades.

1. **Continuidade:**

$$B_{i,n}(u_j) \in C^{n-\mu_j}, \quad (2.58)$$

onde  $\mu_j \leq n + 1$  é a multiplicidade num ponto de partição  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  em  $U$ . Essa propriedade dá uma “receita” para escolher um vetor de juntas apropriado. A escolha de  $U$  transfere o número de condições de continuidade num ponto de partição  $u_j$  para a correspondente multiplicidade nesse ponto. Desse modo, uma junta com multiplicidade maior corresponde a uma função base, e consequentemente, uma curva com suavidade menor e vice versa. Assim, um ponto de partição com multiplicidade  $\mu_j = n + 1$  corresponde a uma descontinuidade em  $u_j$ , enquanto  $\mu_j = 0$  força a continuidade  $C^n$ . Com essa última afirmação, pode-se verificar que o segmento polinomial  $S_{j-1}$  de  $Q \in \mathcal{J}_n$  sobre  $[u_{j-1}, u_j]$  determina  $Q$  unicamente sobre  $[u_j, u_{j+1}]$ .

2. **Suporte Local:**

$$B_{i,n}(u) = 0 \text{ para } u \notin (u_i, u_{i+n+1}) \quad (2.59)$$

Essa propriedade diz que mudando um dos vértices de controle, afeta no máximo  $n + 1$  segmentos da curva. Isso não ocorre nas *curvas de Bézier*, em que a mudança é global. Uma consequência dessa propriedade, para o caso  $n = 2$ , é a possibilidade de incluir segmentos de reta em uma curva *B-spline* quadrática: se três vértices sucessivos de controle são colineares, o segmento de curva quadrático determinado por eles precisa ser linear. Tais curvas ocorrem freqüentemente no desenho de fontes de letras usadas na imprensa.

### 3. Positividade:

$$B_{i,n}(u) > 0 \text{ para } u \in (u_i, u_{i+n+1}) \quad (2.60)$$

Esta propriedade junto com a relação (2.35) asseguram que a curva é uma combinação convexa dos vértices  $\{d_i : B_{i,n}(u) \neq 0\}$ .

Existe uma relação importante entre as bases de *Bernstein* e as bases *B-splines*. As bases *B-splines* de grau  $\leq n$  sobre uma seqüência de juntas em que cada ponto de partição tem multiplicidade  $n + 1$  são exatamente as bases de *Bernstein* de grau  $\leq n$ . Para  $n = 3$ , a idéia dessa relação é obtida considerando o seguinte vetor de juntas aberto uniforme

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = 1. \quad (2.61)$$

As quatro bases *B-splines*  $B_{i,3}(u)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  de grau  $\leq 3$  sobre essa seqüência de juntas são exatamente as bases de *Bernstein*  $(1 - u)^3$ ,  $3u(1 - u)^2$ ,  $3u^2(1 - u)$  e  $u^3$  de grau  $\leq 3$ . Para verificar essa afirmação, usam-se as equações (2.54) e (2.55) para encontrar as expressões de  $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,1}, \dots$ . O conjunto de todos os  $B_{i,j}$ , para  $i, j = 0, \dots, 3$  necessários para obter  $B_{0,3}$  na equação (2.54) será designado expansão de  $B_{0,3}$ . Analogamente o conjunto de todos os  $B_{i,j}$  necessários para obter  $B_{i,3}$ ,  $i = 1, \dots, 3$  será chamado expansão de  $B_{i,3}$ . A figura 2.9 mostra a expansão de  $B_{0,3}(u)$ , que possui suporte  $(u_0, u_4)$ .

Os seguintes fatos são observados:

- Para avaliar uma *B-spline* de grau  $\leq 3$ , a árvore precisa ter altura 3, com a raiz possuindo nível zero.
- O valor de  $B_{0,3}$  é uma soma de oito termos que são as folhas da árvore de expansão.
- Uma folha será diferente de zero somente se o seu denominador for  $u_4 - u_3$ . Neste caso somente a folha mais à direita é diferente de zero.

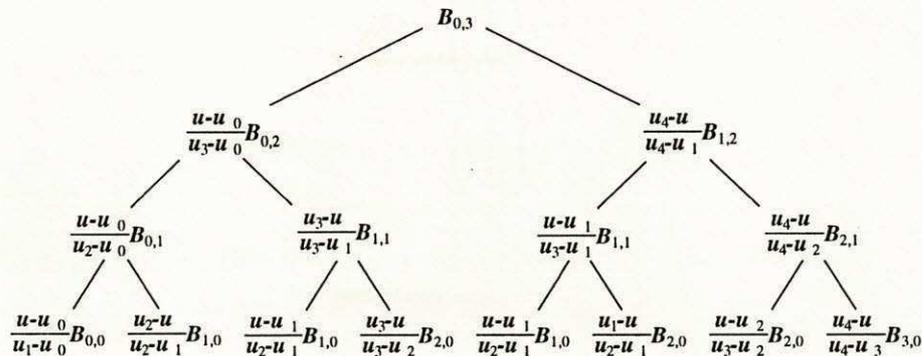


Figura 2.9: Expansão da base  $B_{0,3}(u)$

- Para se chegar a uma folha percorre-se um caminho a partir da raiz. O ramo da esquerda contém o primeiro termo do segundo membro da relação de recorrência (2.54); o da direita contém o segundo termo.
- Os denominadores ao longo do caminho para uma folha diferente de zero são iguais a um, pois eles precisam incluir  $[u_3, u_4]$  e  $u_4 - u_3 = 1$ . O numerador em um nodo é  $u$  se o nodo for introduzido por um ramo esquerdo, e  $(1 - u)$  se for introduzido por um ramo direito.
- Como neste caso inicia-se com suporte  $(u_0, u_4)$  e precisa-se terminar com  $(u_3, u_4)$ , é claro que se necessita sempre seguir o ramo mais à direita. Nota-se que existe exatamente  $\binom{3}{0} = 1$  caminho.
- Portanto,

$$B_{0,3}(u) = \binom{3}{0} (1 - u)^3. \tag{2.62}$$

Usando um raciocínio e construção análogos, verifica-se que

$$B_{1,3}(u) = \binom{3}{1} u(1 - u)^2, \tag{2.63}$$

$$B_{2,3}(u) = \binom{3}{2} u^2(1-u), \quad (2.64)$$

$$B_{3,3}(u) = \binom{3}{3} u^3. \quad (2.65)$$

Assim, as curvas de *Bézier* são um subconjunto das curvas *B-splines*.

## 2.8 Curvas $\beta$ -spline

**Definição 2.8.1** [BBB87] *Uma curva  $\beta$ -spline de grau  $\leq 3$  é uma curva polinomial por partes de grau  $\leq 3$  sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que satisfaz as seguintes condições de continuidade em cada junta  $u_i$*

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-), \quad (2.66)$$

$$Q'(u_i^+) = \beta_{1i} Q'(u_i^-), \quad (2.67)$$

$$Q''(u_i^+) = \beta_{1i}^2 Q''(u_i^-) + \beta_{2i} Q'(u_i^-), \quad (2.68)$$

em que  $\beta_{1i} > 0$ ,  $\beta_{2i} \geq 0$ .

As condições (2.66), (2.67) e 2.68 são, respectivamente, *continuidades da curva*, da *tangente* e da *curvatura*. Se essas últimas condições forem satisfeitas, diz-se que a curva tem *continuidade geométrica* de grau 2 (ou continuidade  $G^2$ ). Farin em [Far85] refere-se a esse tipo como continuidade visual de grau 2 (ou continuidade  $V^2$ ).

Como anteriormente, se as matrizes de conexão tiverem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

o espaço das *splines*  $\mathcal{J}_3$  é o espaço das  $\beta$ -*splines* de grau  $\leq 3$  com juntas de multiplicidade  $\mu_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, l$  em  $u_i$ . Ou seja, qualquer curva  $Q \in \mathcal{J}_3$  tem representação única na forma (2.31).

No capítulo 3 será mostrado que os parâmetros  $\beta_{1i}$  e  $\beta_{2i}$  dão alguma liberdade à forma da curva. Se for repetido o método de construção das bases *splines* (ver seção 3.2) para as condições de continuidade expressas por (2.66), (2.67) e (2.68), com  $\beta_{1i} = \beta_1$  e  $\beta_{2i} = \beta_2$ , as expressões dos segmentos das bases  $\beta$ -splines de grau  $\leq 3$  sobre uma seqüência de juntas *uniforme* são

$$\begin{aligned} b_{-0}(u) &= \frac{1}{\delta}[2u^3], \\ b_{-1}(u) &= \frac{1}{\delta}[2 + (6\beta_1)u + (3\beta_2 + 6\beta_1^2)u^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2)u^3], \\ b_{-2}(u) &= \frac{1}{\delta}[(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1)u - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2)u^2 \\ &\quad + (2\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1)u^3], \\ b_{-3}(u) &= \frac{1}{\delta}[(2\beta_1^3) - (6\beta_1^3)u + (6\beta_1^3)u^2 - (2\beta_1^3)u^3], \end{aligned} \quad (2.70)$$

em que

$$\delta = \beta_2 + 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2.$$

Nota-se que a substituição  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$  nas equações (2.70) produz as equações (2.53) para os segmentos das bases *B-splines uniformes*.

As bases  $\beta$ -splines satisfazem todas as propriedades satisfeitas pelas bases *B-splines* [Goo85]. Além disso, se a parametrização pelo *comprimento de arco* for utilizada, a base  $\beta$ -spline se transforma na base *B-spline* [BBB87].

## 2.9 Curvas $\nu$ -splines

**Definição 2.9.1** [Las90] *Seja  $Q(u)$  uma curva polinomial por partes de grau  $\leq 3$  sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que possui continuidade  $C^1$  em cada junta  $u_i$ . Uma curva  $\nu$ -spline é uma função que minimiza*

$$\int_{u_0}^{u_{l+1}} \|Q''(u)\|^2 du + \sum_{i=0}^{l+1} \nu_i \|Q'(u_i)\|^2, \quad \nu_i \geq 0, \quad (2.71)$$

sujeito às condições de interpolação  $Q(u_i) = P_i$ ,  $i = 0, \dots, l+1$ , e uma das seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} Q'(u_0) &= P'_0, \\ Q'(u_{l+1}) &= P'_{l+1}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} Q''(u_0^+) &= \nu_0 Q'(u_0), \\ Q''(u_{l+1}^-) &= \nu_{l+1} Q'(u_{l+1}), \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} Q(u_0) &= Q(u_{l+1}), \\ Q'(u_0) &= Q'(u_{l+1}), \\ Q''(u_0^+) - Q''(u_{l+1}^-) &= (\nu_0 + \nu_{l+1})Q'(u_0). \end{aligned} \quad (2.74)$$

As  $\nu$ -splines satisfazem em qualquer junta  $u_i$ , para  $i = 1, \dots, l$  as seguintes condições de continuidade

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-), \quad (2.75)$$

$$Q'(u_i^+) = Q'(u_i^-), \quad (2.76)$$

$$Q''(u_i^+) = Q''(u_i^-) + \nu_i Q'(u_i^-). \quad (2.77)$$

Novamente, se as matrizes de conexão tiverem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \nu_i & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

o espaço das splines  $\mathcal{J}_3$  é o espaço das  $\nu$ -splines de grau  $\leq 3$  com juntas de multiplicidade  $\mu_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, l$  em  $u_i$ . Ou seja, qualquer curva  $Q \in \mathcal{J}_3$  tem representação única da forma expressa por (2.31).

A equação (2.77) pode ser resolvida mesmo que alguns dos  $\nu_i$  sejam negativos, mas a solução correspondente não minimiza (2.71). Se  $\nu_i = \nu$ ,  $i = 1, \dots, l$ , usando novamente o método de construção descrito no capítulo 1, obtêm-se os segmentos das bases  $\nu$ -splines sobre uma seqüência de juntas uniforme expressos por

$$\begin{aligned} b_{-0}(u) &= \frac{1}{\delta}[2u^3], \\ b_{-1}(u) &= \frac{1}{\delta}[2 + 6u + (3\nu + 6)u^2 - (2\nu + 6)u^3], \\ b_{-2}(u) &= \frac{1}{\delta}[(\nu + 8) - (3\nu + 12)u^2 + (2\nu + 6)u^3], \\ b_{-3}(u) &= \frac{1}{\delta}[(2 - 6u + 6u^2 - 2u^3)], \end{aligned} \quad (2.79)$$

em que

$$\delta = \nu + 12.$$

Observe que a substituição  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = \nu$  em (2.70) dá origem às equações (2.79), ou seja, as curvas  $\nu$ -splines constituem um subconjunto das curvas  $\beta$ -splines. Por outro lado, qualquer curva  $\beta$ -spline pode ser convertida para uma curva  $\nu$ -spline, utilizando a seguinte reparametrização

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_i &= t_{i-1} + \alpha_i(u_i - u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (2.80)$$

em que cada  $\alpha_i$  é uma constante positiva satisfazendo  $\alpha_{i+1} = \beta_{1i}\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Assim,  $\alpha_1$  é arbitrário e cada  $\alpha_i$  restante precisa ser calculado a partir dessa última relação, conforme [Fri86] demonstra.

## 2.10 Curvas WF-splines

**Definição 2.10.1** [FW66] *Uma curva WF-spline  $Q(u) \in R^2$  é uma curva polinomial por partes de grau  $\leq 3$  sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que possui continuidade  $G^2$  em cada junta  $u_i$ .*

Considere  $l + 1$  pontos dados  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, l$  no plano. De acordo com a seção 2.3, tem-se

$$Q(u) = S_i(t) = P_i = (x_i, y_i). \quad (2.81)$$

Como a figura 2.10 mostra, o segmento de curva que une  $P_i$  e  $P_{i+1}$  é definido em um sistema de coordenadas local  $tv$ , com variável independente  $t$  percorrendo a corda que liga os pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$ , e  $v = S_i(t)$  representando o desvio da corda como uma função polinomial de grau  $\leq 3$  (*cúbica de Hermite*), da forma:

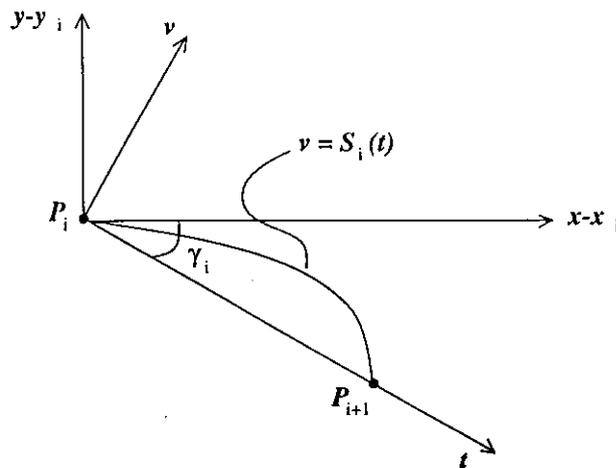


Figura 2.10: Sistema de coordenada local para um WF-spline

$$S_i(t) = tg(A_i)t(t - L_i)^2/L_i^2 + tg(B_i)t^2(t - L_i)/L_i^2. \quad (2.82)$$

Aqui,  $L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$  é o comprimento da corda. Essa curva de grau  $\leq 3$  é definida pelas seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} S_i(0) &= 0 \quad , \quad S_i(L_i) = 0, \\ S_i'(0) &= tg(A_i) \quad , \quad S_i'(L_i) = tg(B_i). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Os segmentos são unidos de tal forma que a curva descrita tem *vetores tangente e curvatura* contínuos. A continuidade do vetor tangente permite expressar  $tg(B_i)$  em

termos de  $tg(A_i)$ , ou seja,

$$tg(B_i) = \frac{tg(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + tg(A_i)}{1 - tg(A_i) \cdot tg(\gamma_i - \gamma_{i-1})}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.84)$$

em que  $\gamma_i$  é o ângulo entre a  $i$ -ésima corda e o eixo positivo de coordenadas  $x$  (ver figura 2.10). Deve-se, também, usar o fato de que  $B_{i-1} = (\gamma_i - \gamma_{i-1}) + A_i$  (ver figura 2.11).

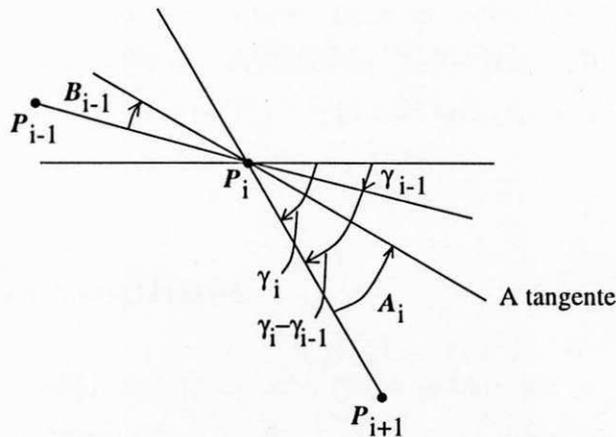


Figura 2.11: Continuidade na tangente para um WF-spline.

As condições de *continuidade na curvatura* dão origem a um sistema tridiagonal de equações não lineares nos parâmetros  $tg(A_i)$  [FW66], que pode ser escrito na forma:

$$\frac{2tg(A_i) + tg(B_i)}{L_i(1 + tg^2(A_i))^{3/2}} = -\frac{tg(A_{i-1}) + 2tg(B_{i-1})}{L_{i-1}(1 + tg^2(B_{i-1}))^{3/2}}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.85)$$

Nota-se que (2.84) e (2.85) fornecem apenas  $2l$  equações para  $2(l + 1)$  parâmetros.  $tg(A_0)$  e  $tg(B_l)$  são determinados pelas *condições de contorno*. Um algoritmo para resolver (2.85) foi apresentado em [FW66], conforme [Fri86] sem análise. W. R. Melvin em [Mel82] estudou as propriedades de existência e unicidade da solução desse sistema e apresentou um algoritmo com menor complexidade do que foi apresentado em [FW66]. De acordo com sua definição, uma curva *WF-spline* é uma curva  $\beta$ -spline de grau  $\leq 3$ . Na realidade, pode-se expressar os parâmetros  $\beta_{1i}$  e  $\beta_{2i}$  em (2.67)-(2.68) em função dos parâmetros  $tg(A_i)$  e  $tg(B_i)$  na forma

$$\beta_{1i} = \cos(\gamma_i - \gamma_{i-1}) - tg(A_i)\text{sen}(\gamma_i - \gamma_{i-1}), \quad (2.86)$$

$$\beta_{2i} = (2/L_i)(2tg(A_i) + tg(B_i))sen(\gamma_i - \gamma_{i-1}), \quad (2.87)$$

conforme [Fri86] demonstra. Assim, calculando os parâmetros  $tg(A_i)$  e  $tg(B_i)$  com o algoritmo de [Mel82] e substituindo os parâmetros  $\beta_{1i}$  e  $\beta_{2i}$  a partir de (2.86) e (2.87) conclui-se que as *WF-splines* constituem um subconjunto das  $\beta$ -splines. De acordo com a seção 2.8 qualquer curva  $Q \in \mathcal{J}_3$  tem representação única da forma expressa por (2.31). Em conseqüência, as equações para os segmentos das bases *WF-splines* sobre um vetor de juntas uniforme são também dados por (2.70). Visto que, para se encontrar os parâmetros  $tg(A_i)$  e  $tg(B_i)$  implica na solução de um sistema não linear, não serão apresentados os segmento das bases *WF-splines*.

## 2.11 Curvas $\tau$ -splines

**Definição 2.11.1** [Hag85] *Seja  $Q(u)$  uma curva polinomial por partes de grau  $\leq n$  ( $n > 4$ ) sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  que possua continuidade  $C^2$  em cada junta  $u_i$ . Uma curva  $\tau$ -spline é uma função que minimiza*

$$\int_{u_0}^{u_{l+1}} \|Q^{(k)}(u)\|^2 du + \sum_{i=0}^{l+1} \sum_{j=1}^{k-1} \nu_{i,j} \|Q^{(j)}(u)\|^2, \quad k \geq 2, \quad \nu_{i,j} \geq 0, \quad (2.88)$$

para  $k = 3$ , sujeito às condições de interpolação  $Q(u_i) = P_i$ , para  $i = 0, \dots, l+1$  e uma das seguintes condições de contorno ( $j = k, \dots, 2(k-1)$ ):

$$\begin{aligned} Q^{(2k-1-j)}(u_0) &= P_0^{(2k-1-j)}, \\ Q^{(2k-1-j)}(u_{l+1}) &= P_{l+1}^{(2k-1-j)}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} Q^{(j)}(u_0^+) &= \nu_{0,2k-1-j} Q^{(2k-1-j)}(u_0), \\ Q^{(j)}(u_{l+1}^-) &= \nu_{l+1,2k-1-j} Q^{(2k-1-j)}(u_{l+1}), \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} Q(u_0) &= Q(u_{l+1}), \\ Q^{(2k-1-j)}(u_0) &= Q^{(2k-1-j)}(u_{l+1}), \\ Q^{(j)}(u_0^+) - Q^{(j)}(u_{l+1}^-) &= (\nu_{0,2k-1-j} + \nu_{l+1,2k-1-j}) Q^{(2k-1-j)}(u_0). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Em qualquer junta  $u_i$ , sendo  $i = 1, \dots, l$ , as  $\tau$ -splines satisfazem as seguintes condições de continuidade:

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-), \quad (2.92)$$

$$Q'(u_i^+) = Q'(u_i^-), \quad (2.93)$$

$$Q''(u_i^+) = Q''(u_i^-), \quad (2.94)$$

$$Q^{(3)}(u_i^+) = Q^{(3)}(u_i^-) + \nu_{i,2}Q''(u_i^-), \quad (2.95)$$

$$Q^{(4)}(u_i^+) = Q^{(4)}(u_i^-) - \nu_{i,1}Q'(u_i^-). \quad (2.96)$$

Visto que a curvatura e a torção de uma curva no espaço são expressas pelas equações (2.16) e (2.17), conclui-se que as curvas  $\tau$ -splines possuem continuidade da curvatura e da torção.

Analisando as equações que expressam as condições de continuidade das  $\tau$ -splines, conclui-se que para se aplicar a técnica de construção dos segmentos das bases splines é necessário que o segmento  $b_{-j}(u)$  possua grau  $\leq 5$ . Como o estudo neste capítulo é restrito a splines de grau até 3, neste capítulo não serão apresentadas bases  $\tau$ -splines. No apêndice são encontradas as expressões para os segmentos dessa base.

## 2.12 Curvas $\gamma$ -splines

**Definição 2.12.1** [Far88] *Uma curva  $\gamma$ -spline é uma curva polinomial por partes de grau  $\leq 3$  sobre uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$ , onde os segmentos são curvas de Bézier de grau  $\leq 3$  que satisfazem as seguintes condições de continuidade em cada junta  $u_i$*

$$(1 + q_i)d_{3i} = q_i d_{3i-1} + d_{3i+1}, \quad (2.97)$$

$$(1 + \gamma_i q_i)d_{3i-1} = \gamma_i q_i d_{3i-2} + s_i, \quad (2.98)$$

$$(\gamma_i + q_i)d_{3i+1} = q_i s_i + \gamma_i d_{3i+2}, \quad (2.99)$$

onde

$$q_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \quad (2.100)$$

e

$$\gamma_i = 1 / \left( 1 + \frac{1}{1 + q_i} \frac{\Delta_i}{2} \nu_i \right). \quad (2.101)$$

Os pontos  $d_i \in R^N$  são os vértices de controle.

As condições de continuidade para as  $\gamma$ -splines são obtidas pela substituição de (2.39) em (2.75), (2.76) e (2.77) para  $n = 3$ .

A equação (2.101) permite a avaliação dos  $\gamma_i$  para valores de  $\nu_i$  dados. Por outro lado, pode-se expressar os  $\nu_i$  em função dos  $\gamma_i$ , na forma

$$\nu_i = \frac{2}{\Delta_i} (1 + q_i) \left( \frac{1}{\gamma_i} - 1 \right). \quad (2.102)$$

A equação (2.102) foi primeiro encontrada por Boehm [Boe85]. Portanto, para  $\gamma_i = \gamma$ ,  $i = 1, \dots, l$ , os segmentos das bases  $\gamma$ -splines podem ser expressos por (2.79). Ou seja, as  $\gamma$ -splines constituem um subconjunto das  $\nu$ -splines e de acordo com a seção 2.9 qualquer curva  $Q \in \mathcal{J}_3$  tem representação única da forma expressa por (2.31).

## 2.13 Considerações Finais

Os diferentes tipos de splines podem ser comparados por critérios diferentes tais como facilidade de manipulação interativa, grau de continuidade nas junções entre os segmentos e eficiência computacional [FVD92]. Este capítulo apresentou definições que caracterizam uma conceituação mais geral de splines para tentar estudá-las de forma unificada. As tabelas 2.1 e 2.2 mostram uma comparação entre os segmentos das bases splines de grau  $\leq 3$  sobre uma seqüência de juntas uniforme mencionados anteriormente.

Além das funções bases, podem ser destacados os seguintes fatos

- Qualquer *WF-spline* é um  $\beta$ -*spline*: Por definição, um *WF-spline* é uma curva polinomial por partes com continuidade  $G^2$ , portanto um  $\beta$ -*spline*. Além disso, Fritsch em [Fri86] obtém expressões explícitas para os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  em função dos parâmetros  $tg(A)$  e  $tg(B)$ .
- Qualquer  $\nu$ -*spline* é um  $\beta$ -*spline*: Nota-se que a substituição  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = \nu$  nas expressões para os segmentos das bases  $\beta$ -*splines*, permitem obter as expressões para os segmentos das bases  $\nu$ -*splines*.
- A curva *spline* da forma de Bézier é um *B-spline*: De acordo com a seção 1.4, os segmentos das bases *splines* são uma função polinomial de grau  $\leq 3$  (equação (1.24)). No caso da curva *spline* da forma de Bézier, esses segmentos são

$$b_{-j}(u) = \bar{a}_j(1-u)^3 + \bar{b}_j 3u(1-u)^2 + \bar{c}_j 2u^2(1-u) + \bar{d}_j u^3, \quad 0 \leq j \leq 3. \quad (2.103)$$

Conseqüentemente, pode-se transformar uma representação na outra. Para converter os coeficientes da representação (1.24) para os coeficientes da representação (2.103) é necessário igualar os coeficientes de  $u^i$  (que precisam ser únicos, pois os  $u^i$  formam uma base) em (1.24) e (2.103), e resolver o sistema obtido

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_j \\ \bar{b}_j \\ \bar{c}_j \\ \bar{d}_j \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{bmatrix}, \quad i-3 \leq j \leq i. \quad (2.104)$$

Após ter encontrado os coeficientes  $\bar{a}_j, \bar{b}_j, \bar{c}_j, \bar{d}_j$ , e expressado os coeficientes da curva *spline* da forma de Bézier em função dos  $u^i$ , obtêm-se as mesmas expressões para os segmentos das bases *B-splines* uniformes.

- Qualquer  $\gamma$ -*spline* é um  $\nu$ -*spline*: Lembre-se que a equação (2.102) permite a avaliação dos  $\nu$  para valores de  $\gamma$  dados.

Tabela 2.1: Segmentos das bases  $\beta$ -spline,  $\nu$ -spline e  $B$ -spline

	$\beta$ -spline	$\nu$ -spline	$B$ -spline
$b_{-0}$	$\frac{1}{8}[2u^3]$	$\frac{1}{8}[2u^3]$	$\frac{1}{8}[2u^3]$
$b_{-1}$	$\frac{1}{8}[2 + (6\beta_1)u + (3\beta_2 + 6\beta_1^2)u^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2)u^3]$	$\frac{1}{8}[2 + 6u + (3\nu + 6)u^2 - (2\nu + 6)u^3]$	$\frac{1}{8}(2 + 6u + 6u^2 - 6u^3)$
$b_{-2}$	$\frac{1}{8}[(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1)u - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2)u^2 + (2\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1)u^3]$	$\frac{1}{8}[(\nu + 8) - (3\nu + 12)u^2 - (2\nu + 6)u^3]$	$\frac{1}{8}(8 - 12u^2 + 6u^3)$
$b_{-3}$	$\frac{1}{8}[(2\beta_1^3) - (6\beta_1^3)u + (6\beta_1^3)u^2 - (2\beta_1^3)u^3]$	$\frac{1}{8}[(2 - 6u + 6u^2 - 2u^3)]$	$\frac{1}{8}(2 - 6u + 6u^2 - 2u^3)$
$\delta$	$\beta_2 + 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2$	$\nu + 12$	12

Tabela 2.2: Segmentos das bases  $WF$ -spline,  $\gamma$ -spline e Bézier

	$WF$ -spline	$\gamma$ -spline	Bézier
$b_{-0}$	$\frac{1}{8}[2u^3]$	$\frac{1}{8}[2u^3]$	$\frac{1}{8}[2u^3]$
$b_{-1}$	$\frac{1}{8}[2 + (6\beta_1)u + (3\beta_2 + 6\beta_1^2)u^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2)u^3]$	$\frac{1}{8}[2 + 6u + (3\nu + 6)u^2 - (2\nu + 6)u^3]$	$\frac{1}{8}(2 + 6u + 6u^2 - 6u^3)$
$b_{-2}$	$\frac{1}{8}[(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1)u - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2)u^2 + (2\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1)u^3]$	$\frac{1}{8}[(\nu + 8) - (3\nu + 12)u^2 - (2\nu + 6)u^3]$	$\frac{1}{8}(8 - 12u^2 + 6u^3)$
$b_{-3}$	$\frac{1}{8}[(2\beta_1^3) - (6\beta_1^3)u + (6\beta_1^3)u^2 - (2\beta_1^3)u^3]$	$\frac{1}{8}[(2 - 6u + 6u^2 - 2u^3)]$	$\frac{1}{8}(2 - 6u + 6u^2 - 2u^3)$
$\delta$	$\beta_2 + 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2$	$\nu + 12$	12

Em vista das observações acima, conclui-se que a base  $\beta$ -spline é analiticamente mais geral que as outras bases *splines* mencionadas. Observa-se, também, que as *B-splines* não impõem condições geométricas para a construção dos segmentos das bases. No entanto, se a derivada da curva *spline* em relação ao parâmetro utilizado for diferente de zero, pode-se construir *splines* que possuem continuidade geométrica.

Um outro resultado importante que merece ser enfatizado é o estabelecido pelo teorema 2.3.1, segundo o qual existe uma única base para o espaço das *splines*, desde que as matrizes de conexão sejam totalmente positivas. Em função desse resultado, o próximo capítulo apresentará uma formulação unificada para as bases *splines*.

## Capítulo 3

# Uma Abordagem Unificada para Splines

No capítulo anterior, foram estudados alguns *splines* tendo sido mostradas as bases que os compõem. Como foi visto, cada tipo de *spline* possui a sua base em particular. Entretanto, seria interessante ter uma formulação a partir da qual se pudesse obter todas ou a maioria das bases *splines*. Neste capítulo é apresentada uma abordagem unificada para a construção das bases *splines*, usando uma formulação geral da qual é possível obter os diversos tipos destas bases. Isso será feito baseado no teorema 2.3.1 do capítulo 2 que garante a existência de bases *splines* e pelas propriedades que garantem a continuidade geométrica de uma curva *spline*. Inicialmente é revisto o conceito de continuidade geométrica de curvas. Em seguida, será apresentada a construção da base  $\beta$ -*spline*, pois o modo como a base geral é contruída é idêntica à da base  $\beta$ -*spline*; dessa forma a construção da base  $\beta$ -*spline* serve para ilustrar como se procede a construção da base geral. Em seguida será apresentada uma formulação que permite construir as bases *splines* estudadas. Será discutido, também, como se obtém a partir dessa base as diversas representações das bases *splines* mostradas no capítulo 2 e neste capítulo.

Tendo uma base geral é possível implementar uma única rotina (ou procedimento) para representar os diversos *splines*, bastando para isso adotar valores adequados de alguns parâmetros para cada *spline*.

Uma outra consequência de se ter uma base geral, é a facilidade de obter uma aproximação de uma dada função contínua por *splines*: 1) escolhendo alguns pontos da função; 2) construindo a base *spline*; e 3) obtendo uma aproximação para essa função (ver figura 3.1).

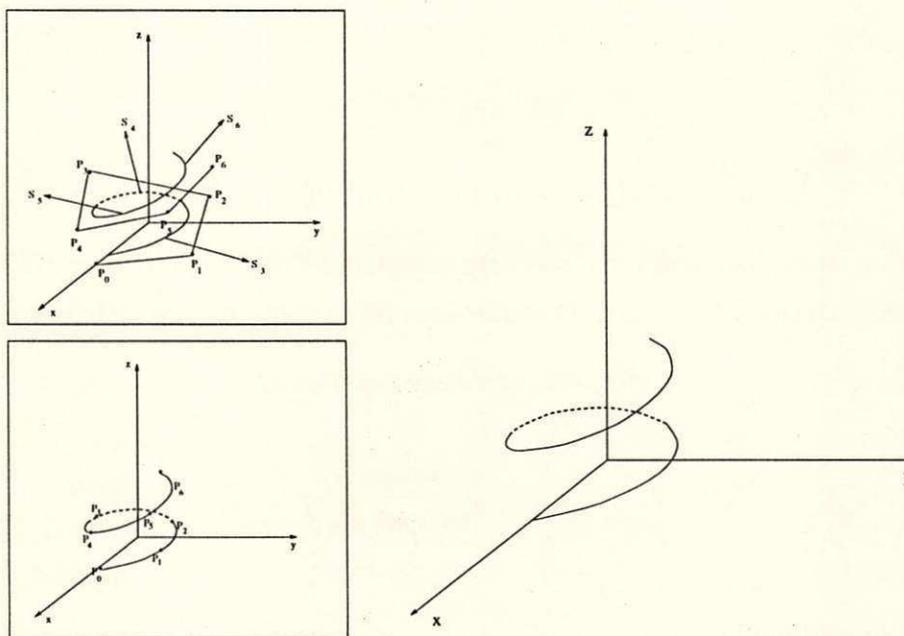


Figura 3.1: Aproximação por splines

A fim de desenvolver uma técnica para obtenção de uma base geral é necessário mostrar como o espaço dos *splines*  $\mathcal{J}_n$ , discutido na seção 2.3, pode ser usado para modelar curvas suaves no espaço. Esse é o objetivo da próxima seção.

### 3.1 Continuidade Geométrica de Curvas

Inicialmente, serão definidas duas noções de suavidade para curvas em  $R^N$ .

**Definição 3.1.1** [Goo85] Uma curva  $Q : I \rightarrow R^N$ ,  $u \in I \subset R$ , possui continuidade em relação ao comprimento de arco de grau  $k$  ou continuidade  $C^k$  em um ponto  $a \in I$ , se quando parametrizada pelo comprimento de arco  $s(u)$ , a curva  $\hat{Q}(s) = Q(s(u))$  e suas  $k$  primeiras derivadas em relação a  $s$  forem contínuas numa vizinhança de  $\sigma = s(a)$ .

Para a segunda noção de suavidade alguns conceitos de geometria diferencial apresentados na seção 2.2 são estendidos.

A estrutura de Frenet de uma curva suave  $Q : I \rightarrow R^N$ ,  $u \in I \subset R$  em um ponto  $a$ , onde as suas  $N$  primeiras derivadas  $Q'(a), \dots, Q^{(N)}(a)$  em relação a  $u$  são linearmente independentes, é um único conjunto de vetores ortonormais  $\bar{Q}_1(a), \dots, \bar{Q}_N(a) \in R^N$ , satisfazendo

$$[Q'(a), \dots, Q^{(N)}(a)] = [\bar{Q}_1(a), \dots, \bar{Q}_N(a)]H(a), \quad (3.1)$$

em que  $H(a)$  é uma matriz  $N \times N$  triangular superior, com diagonal positiva, e os colchetes indicam a matriz formada pelos vetores colunas  $Q'(a), \dots, Q^{(N)}(a)$  e  $\bar{Q}_1(a), \dots, \bar{Q}_N(a)$ .

As  $N - 1$  curvaturas de  $Q(u)$  em  $a$  são definidas por

$$\kappa_i(a) = \frac{h_{i+1,i+1}(a)}{h_{i,i}(a)h_{1,1}(a)}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (3.2)$$

em que  $H = (h_{i,j})$ .

Com esses novos conceitos uma segunda noção de suavidade é apresentada.

**Definição 3.1.2** [DM88] *Uma curva  $Q : I \rightarrow R^N$ ,  $u \in I \subset R$ , possui continuidade geométrica ou continuidade  $G^N$  em um ponto  $a \in I$ , se a sua estrutura de Frenet e as  $N - 1$  curvaturas estiverem definidas e forem contínuas numa vizinhança de  $a$ .*

Observa-se que a continuidade em relação ao comprimento de arco de grau  $N$  implica em continuidade geométrica. Para verificar essa implicação, são usados os fatos de que a função comprimento de arco é inversível e que a ortogonalização dos vetores contínuos (componentes contínuos)  $Q', \dots, Q^{(N)}$  produz um outro conjunto de vetores contínuos.

Para  $N = 3$ , a estrutura de Frenet é um triedro e  $\kappa_1, \kappa_2$  são chamadas, em geometria diferencial, curvatura ( $\kappa$ ) e torção ( $\tau$ ). Assim, uma curva possui continuidade  $G^3$  sempre que a curva, a tangente, a curvatura e a torção forem contínuas.

Agora será discutida a modelagem de curvas em  $R^N$  por *splines* de grau  $\leq n$  onde se utilizam esses conceitos. Dada uma partição  $u_0 < u_1 < \dots < u_{l+1}$  do intervalo  $[u_0, u_{l+1}]$  os componentes  $Q_1(u), \dots, Q_N(u)$  de  $Q(u)$  são funções polinomiais de grau  $\leq n$  em  $[u_i, u_{i+1}]$  para  $i = 0, \dots, l$ . A suavidade da curva é determinada pelo seu comportamento nas junções entre os segmentos. Assume-se que para cada  $u \in [u_0, u_{l+1}]$ , as derivadas  $Q'(u^+), \dots, Q^{(k)}(u^+)$  sejam linearmente independentes e que  $Q'(u^-), \dots, Q^{(k)}(u^-)$  também o sejam. Essa hipótese exige que  $n \geq N$ , porque  $n < N$  implica que a derivada  $Q^{(N)} = 0$  e um vetor identicamente nulo não é linearmente independente de outros vetores.

Para as funções polinomiais por partes que satisfazem certas condições de continuidade nos pontos de partição da forma

$$Q^{(k)}(u_i^+) = \sum_{j=0}^N c_{kj}^i Q^{(j)}(u_i^-), \quad k = 0, \dots, N, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.3)$$

onde  $C^i = (c_{kj}^i)$ , para  $i = 1, \dots, l$  são matrizes não singulares de ordem  $(N+1)$ . De acordo com a seção 2.3, a curva  $Q(u)$  pertence ao espaço  $\mathcal{J}_n((u_i)_{i=1}^l, (C^i)_{i=1}^l)$ . Para que curvas sejam *contínuas* é necessário, além disso, que

$$c_{0j}^i = \delta_{0j}, \quad j = 0, \dots, N, \quad (3.4)$$

onde

$$\delta_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

A seguir são fornecidas as condições sobre as matrizes  $C^1, \dots, C^l$  de ordem  $(N+1)$  que garantem continuidade geométrica da curva em  $R^N$  modelada.

**Proposição 3.1.1** [DM88] *Uma curva  $Q : I \rightarrow R^N$ ,  $u \in I \subset R$  em  $\mathcal{J}_n((u_i)_{i=1}^l, (C^i)_{i=1}^l)$  é geometricamente contínua em  $u_i$  se e somente se  $C^i$  for uma matriz triangular inferior de ordem  $(N+1)$  satisfazendo as condições*

$$c_{11}^i > 0, \quad c_{jj}^i = (c_{11}^i)^j, \quad j = 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

$$c_{j0}^i = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Notam-se os seguintes casos especiais da proposição 3.1.1: Para curvas em  $R^2$  necessita-se de no mínimo segmentos de grau  $\leq 3$  para alcançar a *continuidade geométrica* e um grau de liberdade em cada junta  $u_i$ . Portanto, as matrizes de conexão têm a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

com  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$  para que a matriz (3.8) seja totalmente positiva (ver definição 2.3.3). Para curvas em  $R^3$  que são geometricamente contínuas as matrizes de conexão são da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_1^3 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Para a total positividade necessita-se  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 2, 3, 4$  e

$$\beta_2\beta_4 \geq \beta_3\beta_1^2. \quad (3.10)$$

As condições sobre as matrizes de conexão para *continuidade em relação ao comprimento de arco* de grau  $k$  são fornecidas em [Goo85]. O autor mostrou que a continuidade em relação ao comprimento de arco de grau  $k$  em  $u_i$  é equivalente à existência de  $\beta_{1i}, \dots, \beta_{ki} \in R$ ,  $\beta_{1i} > 0$ , tal que  $C^i$  seja uma matriz triangular inferior de ordem  $(k+1)$  com elementos:  $c_{j0}^i = c_{0j}^i = \delta_{0j}$ ,  $j = 0, \dots, k$ , e

$$c_{jl}^i = \sum_{v_1 + \dots + v_l = j} p_{v_1 \dots v_l}^j \beta_{v_1 i} \cdots \beta_{v_l i}, \quad 1 \leq l \leq j \leq k. \quad (3.11)$$

Aqui  $v_1, \dots, v_l$  são inteiros positivos e  $p_{v_1, \dots, v_l}^j$  é o número de partições distintas de um conjunto de  $j$  elementos distintos em  $l$  subconjuntos contendo os elementos  $v_1, \dots, v_l$ , respectivamente. Esse resultado é obtido pela aplicação repetida da regra da cadeia.

Em particular, (3.11) implica em

$$c_{jj}^i = (c_{11}^i)^j, \quad j = 2, \dots, k. \quad (3.12)$$

Assim, para  $k = N$  a classe de matrizes de conexão triangulares inferiores que garante *continuidade em relação ao comprimento de arco* é uma subclasse das que garantem *continuidade geométrica*, em concordância com a observação de que a continuidade em relação ao comprimento de arco de grau  $N$  é uma propriedade mais forte que continuidade geométrica no sentido de que existem menos curvas satisfazendo continuidade em relação ao comprimento de arco do que continuidade geométrica.

A matriz (3.11) no caso  $k = 2$  tem a forma expressa por (3.8), enquanto que para  $k = 3$  tem a estrutura como em (3.9) mas com a relação extra

$$\beta_4 = 3\beta_1\beta_2. \quad (3.13)$$

Portanto, a desigualdade (3.10) torna-se  $3\beta_2^2 \geq \beta_1\beta_3$  que é verdadeira se a função quadrática

$$\frac{\beta_3}{6}u^2 + \frac{\beta_2}{2}u + \beta_1, \quad (3.14)$$

tiver somente zeros não negativos. Na realidade, tem-se o seguinte resultado

**Proposição 3.1.2** [DM88] *Uma matriz triangular inferior  $C$   $k \times k$  com elementos*

$$c_{jl} = \sum_{v_1 + \dots + v_l = j} p_{v_1, \dots, v_l}^j \beta_{v_1} \cdots \beta_{v_l}, \quad 1 \leq l \leq j \leq k, \quad (3.15)$$

em que  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2, \dots, \beta_k$  são não negativos, é totalmente positiva se a função polinomial

$$b(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\beta_{i+1}}{(i+1)!} z^i, \quad (3.16)$$

tiver somente zeros não negativos.

Logo, dada uma matriz de conexão  $C$ , a proposição 3.1.2 fornece uma maneira de descobrir as relações que garantem *continuidade pelo comprimento de arco* de uma curva em  $R^N$  modelada.

A seguir, será mostrado como construir analiticamente as bases  $b_{-j}(u)$  de grau  $\leq 4$  para  $\beta$ -splines sobre uma seqüência de juntas uniforme. A escolha do grau se deve ao fato de possibilitar impor 4 condições geométricas nas junções, a saber *continuidades da curva*, da *tangente*, da *curvatura* e da *torção*. Com menos condições, é possível construir aproximações de curvas, mas a suavidade alcançada com grau  $\leq 4$  é superior.

### 3.2 Construção dos $\beta$ -splines

A técnica que será desenvolvida não interpola os *vértices de controle*. Ao invés disso, cada seqüência de vértices de controle define uma curva que “passa próximo” desses pontos. Como antes, pode-se restringir a atenção a um único componente como  $Q_2(u)$  (ver figura 1.4).

De acordo com a seção 3.1, a matriz de conexão para uma curva  $\beta$ -spline  $Q : I \rightarrow R^3$ ,  $u \in I \subset R$  com continuidade  $G^3$  tem a forma [Goo85]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

em que  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 2, 3$ .

Isso implica que a curva  $Q(u)$  satisfaz as seguintes condições de continuidade em cada junta  $u_i$  (ver equação (3.3)).

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-), \quad (3.18)$$

$$Q'(u_i^+) = \beta_1 Q'(u_i^-), \quad (3.19)$$

$$Q''(u_i^+) = \beta_1^2 Q''(u_i^-) + \beta_2 Q'(u_i^-), \quad (3.20)$$

$$Q'''(u_i^+) = \beta_1^3 Q'''(u_i^-) + 3\beta_1\beta_2 Q''(u_i^-) + \beta_3 Q'(u_i^-). \quad (3.21)$$

Como no capítulo 2,  $\beta_{1i} = \beta_1$  e  $\beta_{2i} = \beta_2$ . As condições (3.18)-(3.21) são, respectivamente, as *continuidades da curva*, da *tangente*, da *curvatura* e da *torção*. Em particular, o componente  $Q_2$  satisfaz as relações

$$Q_2(u_i^+) = Q_2(u_i^-), \quad (3.22)$$

$$Q_2'(u_i^+) = \beta_1 Q_2'(u_i^-), \quad (3.23)$$

$$Q_2''(u_i^+) = \beta_1^2 Q_2''(u_i^-) + \beta_2 Q_2'(u_i^-), \quad (3.24)$$

$$Q_2'''(u_i^+) = \beta_1^3 Q_2'''(u_i^-) + 3\beta_1\beta_2 Q_2''(u_i^-) + \beta_3 Q_2'(u_i^-). \quad (3.25)$$

Condições análogas valem para  $Q_1(u)$  e  $Q_3(u)$ . Pode-se conseguir as continuidades desejadas se as funções bases com as quais se definem  $Q_1(u)$ ,  $Q_2(u)$  e  $Q_3(u)$  forem elas próprias funções polinomiais por partes de grau  $\leq 4$  com continuidade  $G^3$  nas juntas  $u_i$ , pois uma combinação linear de tais funções bases também será uma função polinomial por partes de grau  $\leq 4$  com continuidade  $G^3$ .

Agora é apresentada a construção dessas funções bases. Para uma seqüência de juntas uniforme, cada função  $B_{i,4}(u)$  é positiva em seu suporte ( $B_{i,4}(u) > 0$  para  $u \in [u_i, u_{i+5}]$ ) que, por conveniência, assume-se que cada intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  tenha comprimento 1 (ver figura 3.2), e exige-se que dentro de cada intervalo uma função base seja definida por uma função polinomial por partes de grau  $\leq 4$  com continuidade  $G^3$ , da forma

$$b_{-j}(u) = a_j + b_j u + c_j u^2 + d_j u^3 + e_j u^4, \quad 0 \leq j \leq 4. \quad (3.26)$$

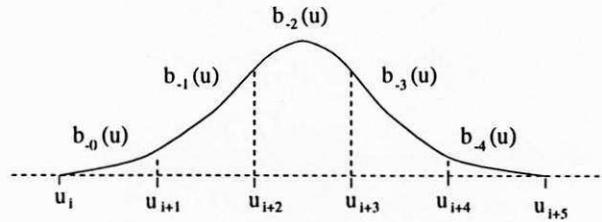


Figura 3.2: A base spline  $B_{i,4}(u)$  é uma função polinomial por partes de grau  $\leq 4$  com continuidade  $G^3$

A parte diferente de zero da função base  $B_{i,4}(u)$  consiste de cinco segmentos (da esquerda para a direita)  $b_{-0}(u)$ ,  $b_{-1}(u)$ ,  $b_{-2}(u)$ ,  $b_{-3}(u)$ ,  $b_{-4}(u)$ . Visto que cada segmento tem 5 coeficientes, existem 25 coeficientes a determinar. Por suposição,  $B_{i,4}(u)$  é identicamente nulo para  $u \leq u_i$  e para  $u \geq u_{i+5}$ . Dessa forma, a primeira, a segunda e terceira derivadas  $B'_{i,4}(u)$ ,  $B''_{i,4}(u)$  e  $B'''_{i,4}(u)$  são também identicamente nulos fora do intervalo  $(u_i, u_{i+5})$ . A exigência de que a curva, a *tangente*, a *curvatura* e a *torção* sejam contínuas em cada junta  $u_i$  fornece as relações a seguir, em que para simplificar, cada segmento foi individualmente parametrizado de tal forma que  $u = 0$  no seu ponto extremo esquerdo e  $u = 1$  no extremo direito. :

Continuidade da curva

$$\begin{aligned}
 0 &= b_{-0}(0) \\
 b_{-0}(1) &= b_{-1}(0) \\
 b_{-1}(1) &= b_{-2}(0) \\
 b_{-2}(1) &= b_{-3}(0) \\
 b_{-3}(1) &= b_{-4}(0) \\
 b_{-4}(1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Continuidade da tangente

$$\begin{aligned}
 0 &= b'_{-0}(0) \\
 \beta_1 b'_{-0}(1) &= b'_{-1}(0) \\
 \beta_1 b'_{-1}(1) &= b'_{-2}(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 b'_{-2}(1) &= b'_{-3}(0) \\
 \beta_1 b'_{-3}(1) &= b'_{-4}(0) \\
 \beta_1 b'_{-4}(1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Continuidade da curvatura

$$\begin{aligned}
 0 &= b''_{-0}(0) \\
 \beta_1^2 b''_{-0}(0) + \beta_2 b'_{-0}(0) &= b''_{-1}(0) \\
 \beta_1^2 b''_{-1}(1) + \beta_2 b'_{-1}(1) &= b''_{-2}(0) \\
 \beta_1^2 b''_{-2}(1) + \beta_2 b'_{-2}(1) &= b''_{-3}(0) \\
 \beta_1^2 b''_{-3}(1) + \beta_2 b'_{-3}(1) &= b''_{-4}(0) \\
 \beta_1^2 b''_{-4}(1) + \beta_2 b'_{-4}(1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Continuidade da torção

$$\begin{aligned}
 0 &= b'''_{-0}(0) \\
 \beta_1^3 b'''_{-0}(1) + 3\beta_1\beta_2 b''_{-0}(1) + \beta_3 b'_{-0}(1) &= b'''_{-1}(0) \\
 \beta_1^3 b'''_{-1}(1) + 3\beta_1\beta_2 b''_{-1}(1) + \beta_3 b'_{-1}(1) &= b'''_{-2}(0) \\
 \beta_1^3 b'''_{-2}(1) + 3\beta_1\beta_2 b''_{-2}(1) + \beta_3 b'_{-2}(1) &= b'''_{-3}(0) \\
 \beta_1^3 b'''_{-3}(1) + 3\beta_1\beta_2 b''_{-3}(1) + \beta_3 b'_{-3}(1) &= b'''_{-4}(0) \\
 \beta_1^3 b'''_{-4}(1) + 3\beta_1\beta_2 b''_{-4}(1) + \beta_3 b'_{-4}(1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Isso fornece um total de 24 equações. É conveniente exigir que

$$b_{-0}(0) + b_{-1}(0) + b_{-2}(0) + b_{-3}(0) + b_{-4}(0) = 1, \tag{3.31}$$

visto que essas juntas são igualmente espaçadas. Cada  $B_{i+k,4}(u)$  é uma cópia de  $B_{i,4}(u)$  deslocado  $k$  intervalos para a direita (ver figura 3.3). Essa suposição é chamada uma *condição normalizante* e serve para definir a função  $B_{i,4}(u)$  univocamente. Ao invés de miraculosa, essa condição *normalizante* é de fato verdadeira para todos os valores de  $u$  (ver seção 2.3.1).

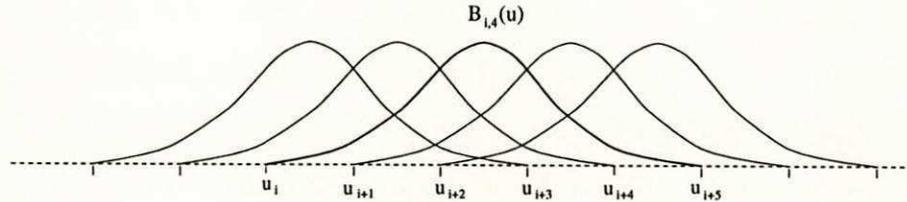


Figura 3.3: Cada  $B_{i+k,4}$  é uma cópia de  $B_{i,4}(u)$  deslocado  $k$  intervalos

Agora tem-se um total de 25 equações e 25 incógnitas. Para quaisquer valores particulares de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , essas equações podem ser resolvidas para obter fórmulas explícitas para as funções polinomiais que compõem as funções bases. Contudo, isso não é muito prático, pois não se quer resolver um novo sistema cada vez que se deseja alterar o valor de um dos parâmetros  $\beta$ . Ao contrário, pode-se resolver esse sistema simbolicamente usando um sistema de software para manipulação algébrica, como MAPLE [BKG88], para obter a expressão analítica dos segmentos  $b_{-j}$  das funções bases para valores arbitrários de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ . Resolvendo analiticamente obtêm-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 b_{-0}(u) &= \frac{1}{\delta}[6u^4] \\
 b_{-1}(u) &= \frac{1}{\delta}[6 + 24\beta_1 u + (36\beta_1^2 + 12\beta_2)u^2 + (24\beta_1^3 + 36\beta_1\beta_2 + 4\beta_3)u^3 \\
 &\quad - (6\beta_1^3 + 6\beta_1^2 + 18\beta_1\beta_2 + 6\beta_1 + 6 + 6\beta_2 + 6\beta_3)u^4] \\
 b_{-2}(u) &= \frac{1}{\delta}[18\beta_1^3 + 30\beta_1^2 + 18\beta_1\beta_2 + 18\beta_1 + \beta_3 + 6\beta_2 \\
 &\quad + (48\beta_1^4 + 36\beta_1^2\beta_2 + 48\beta_1^3 - 24\beta_1)u \\
 &\quad + (36\beta_1^5 - 36\beta_1^3 + 24\beta_1^3\beta_2 - 36\beta_1^2 - 6\beta_1^2\beta_3 + 18\beta_1\beta_2^2 - 12\beta_2)u^2 \\
 &\quad - (24\beta_1^5 + 24\beta_1^4 + 24\beta_1^3 + 24\beta_1^3\beta_2 - 8\beta_1^2\beta_3 + 36\beta_1^2\beta_2 + 36\beta_1\beta_2 \\
 &\quad + 24\beta_1\beta_2^2 + 4\beta_3)u^3 \\
 &\quad + (6\beta_1^5 + 6\beta_1^4 + 12\beta_1^3 + 6\beta_1^3\beta_2 + 6\beta_1^2 - 3\beta_1^2\beta_3 + 18\beta_1^2\beta_2 + 18\beta_1\beta_2 \\
 &\quad + 6\beta_1 + 9\beta_1\beta_2^2 + 6\beta_2 + 3\beta_3)u^4] \\
 b_{-3} &= \frac{1}{\delta}[30\beta_1^4 + 18\beta_1^3 + 18\beta_1^2\beta_2 + 15\beta_1^5 + 6\beta_1^3\beta_2 - \beta_3\beta_1^2 + 3\beta_1\beta_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(24\beta_1^6 - 48\beta_1^4 - 48\beta_1^3 - 36\beta_1\beta_2)u \\
& -(36\beta_1^6 + 36\beta_1^5 - 36\beta_1^3 + 24\beta_1^3\beta_2 - 6\beta_3\beta_1^2 + 18\beta_2^2\beta_1)u^2 \\
& +(24\beta_1^6 + 24\beta_1^5 + 24\beta_1^4 - 8\beta_3\beta_1^2 + 24\beta_1^3\beta_2 + 36\beta_1^2\beta_2 + 24\beta_2^2\beta_1)u^3 \\
& -(6\beta_1^6 + 6\beta_1^5 + 6\beta_1^4 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^3\beta_2 + 18\beta_1^2\beta_2 - 3\beta_3\beta_1^2 + 9\beta_2^2\beta_1)u^4] \\
b_{-4}(u) = & \frac{1}{\delta} [6\beta_1^6 - (24\beta_1^6)u + (36\beta_1^6)u^2 - (24\beta_1^6)u^3 + (6\beta_1^6)u^4], \quad (3.32)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\delta = & 6\beta_1^6 + 18\beta_1^5 + 30\beta_1^4 + 36\beta_1^3 + 6\beta_1^3\beta_2 + 30\beta_1^2 - \beta_1^2\beta_3 + 18\beta_1^2\beta_2 + \\
& 18\beta_1 + 18\beta_1\beta_2 + 3\beta_1\beta_2^2 + 6 + \beta_3 + 6\beta_2.
\end{aligned}$$

Para determinar uma curva, seleciona-se um conjunto de pontos  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  que são usados para definir a curva

$$Q(u) = \sum_i P_i B_{i,4}(u) = \sum_i (x_i B_{i,4}(u), y_i(u) B_{i,4}(u), z_i B_{i,4}(u)) \quad (3.33)$$

em que cada  $B_{i+k,4}(u)$  é simplesmente uma cópia de  $B_{i,4}(u)$  deslocado  $k$  intervalos para a direita, e os coeficientes na soma são dados pelos vértices de controle  $P_i$ .

### 3.3 Construção de uma Spline Geral

A seguir, será apresentada uma representação geral dos segmentos  $b_{-j}(u)$  das funções bases  $B_{i,4}(u)$  de uma curva *spline* de grau  $\leq 4$ , da qual as diversas representações mostradas no capítulo 2 e neste capítulo podem ser obtidas. De acordo com a proposição 3.1.1, as condições de continuidade mais gerais para a curva, a *tangente*, a *curvatura* e a *torção* são da forma [DM88]

$$Q(u_i^+) = Q(u_i^-), \quad (3.34)$$

$$Q'(u_i^+) = \omega_1 Q'(u_i^-), \quad (3.35)$$

$$Q''(u_i^+) = \omega_1^2 Q''(u_i^-) + \omega_2 Q'(u_i^-), \quad (3.36)$$

$$Q'''(u_i^+) = \omega_1^3 Q'''(u_i^-) + \omega_4 Q''(u_i^-) + \omega_3 Q'(u_i^-), \quad (3.37)$$

em que  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_i \geq 0, i = 2, 3, 4$  e  $\omega_2\omega_4 \geq \omega_3\omega_1^2$  garantem a total positividade da matriz de conexão. A partir das condições de continuidade acima, constrói-se um sistema de equações semelhante as relações (3.27)-(3.30) e (3.31). Resolvendo-se esse sistema algebricamente, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 b_{-0}(u) &= \frac{1}{\delta}[6u^4] \\
 b_{-1}(u) &= \frac{1}{\delta}[6 + (24\omega_1)u + (36\omega_1^2 + 12\omega_2)u^2 + (24\omega_1^3 + 4\omega_3 + 12\omega_4)u^3 \\
 &\quad - (6\omega_1^3 + 6\omega_1^2 + 6\omega_1 + 6\omega_2 + 6\omega_4 + 3\omega_3 + 6)u^4] \\
 b_{-2}(u) &= \frac{1}{\delta}[18\omega_1 + 6\omega_2 + 6\omega_4 + \omega_3 + 30\omega_1^2 + 18\omega_1^3 \\
 &\quad + (48\omega_1^4 + 48\omega_1^3 - 24\omega_1 + 12\omega_4\omega_1)u \\
 &\quad + (36\omega_1^5 - 36\omega_1^3 + 24\omega_1^3\omega_2 - 36\omega_1^2 - 6\omega_3\omega_1^2 - 12\omega_2 + 6\omega_4\omega_2)u^2 \\
 &\quad - (24\omega_1^5 + 24\omega_1^4 + 24\omega_1^3\omega_2 + 24\omega_1^3 - 8\omega_3\omega_1^2 + 12\omega_4\omega_1 + 8\omega_4\omega_2 \\
 &\quad + 4\omega_3 + 12\omega_4)u^3 \\
 &\quad + (6\omega_1^5 + 6\omega_1^4 + 12\omega_1^3 + 6\omega_1^2 + 6\omega_1 - 3\omega_3\omega_1^2 + 3\omega_3 + 6\omega_1^3\omega_2 + 6\omega_2 \\
 &\quad + 6\omega_4\omega_1 + 6\omega_4 + 3\omega_4\omega_2)u^4] \\
 b_{-3}(u) &= \frac{1}{\delta}[6\omega_4\omega_1 + 18\omega_1^3 + 30\omega_1^4 + \omega_4\omega_2 - \omega_3\omega_1^2 + 18\omega_1^5 + 6\omega_1^3\omega_2 \\
 &\quad + (-12\omega_4\omega_1 - 48\omega_1^3 - 48\omega_1^4 + 24\omega_1^6)u \\
 &\quad - (-36\omega_1^3 + 6\omega_4\omega_2 - 6\omega_3\omega_1^2 + 36\omega_1^5 + 36\omega_1^6 + 24\omega_1^3\omega_2)u^2 \\
 &\quad + (24\omega_1^4 + 8\omega_4\omega_2 - 8\omega_3\omega_1^2 + 24\omega_1^5 + 24\omega_1^6 + 24\omega_1^3\omega_2 + 12\omega_4\omega_1)u^3 \\
 &\quad - (6\omega_1^6 + 6\omega_1^5 + 6\omega_1^4 + 6\omega_1^3 + 6\omega_1^3\omega_2 - 3\omega_3\omega_1^2 + 6\omega_4\omega_1 + 3\omega_4\omega_2)u^4] \\
 b_{-4}(u) &= \frac{1}{\delta}[6\omega_1^6 - (24\omega_1^6)u + (36\omega_1^6)u^2 - (24\omega_1^6)u^3 + (6\omega_1^6)u^4], \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \delta &= 6\omega_1^6 + 18\omega_1^5 + 30\omega_1^4 + 36\omega_1^3 - \omega_3\omega_1^2 + 30\omega_1^2 + 6\omega_4\omega_1 + 18\omega_1 + \\
 &\quad 6\omega_2 + \omega_4\omega_2 + 6\omega_4 + \omega_3 + 6.
 \end{aligned}$$

Nota-se que se fizer a substituição  $\omega_1 = \beta_1$ ,  $\omega_2 = \beta_2$ ,  $\omega_3 = \beta_3$ ,  $\omega_4 = 3\beta_1\beta_2$  nas equações em (3.38), obtêm-se as equações (3.32) que representam os segmentos  $b_{-j}(u)$

das funções bases para as  $\beta$ -splines de grau  $\leq 4$ . Se  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ ,  $\omega_4 = 0$ , obtêm-se os segmentos  $b_{-j}(u)$  das funções bases para as  $B$ -splines de grau  $\leq 4$ . Contudo, as equações para os segmentos  $b_{-j}(u)$  das funções bases de grau  $\leq 3$  não estão contidas nas equações (3.38). Mas, se for eliminada a condição (3.37) e  $e_j = 0$  em (3.26), a solução deste novo sistema é exatamente a mesma expressa por (2.70), com a substituição  $\omega_1 = \beta_1$  e  $\omega_2 = \beta_2$ . Portanto, a substituição para os splines de grau  $\leq 3$  são:

1.  $\beta$ -spline: Na equação (2.70) nenhuma substituição precisa ser feita.
2.  $B$ -spline: Na equação (2.70) use  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$  que resultará na equação (2.53)
3. *Bézier por partes*: Idem para o caso 2.
4.  $\nu$ -spline: Na equação (2.70) use  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \nu$  que resultará na equação (2.79)
5.  $WF$ -spline: Na equação (2.70) use  $\beta_1$  e  $\beta_2$  em função dos parâmetros  $tg(A)$  e  $tg(B)$  da seguinte maneira:
  - (a) Calcule os parâmetros  $tg(A)$  e  $tg(B)$  usando, por exemplo, o algoritmo em [Mel82].
  - (b) Calcule os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  a partir de (2.86) e (2.87).
6.  $\gamma$ -spline: Na equação (2.70) use  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \nu(\gamma)$ , onde  $\nu$  é calculado a partir de (2.102).

As figuras (3.4) e (3.5) mostram graficamente as relações existentes entre a base geral e as várias bases splines.

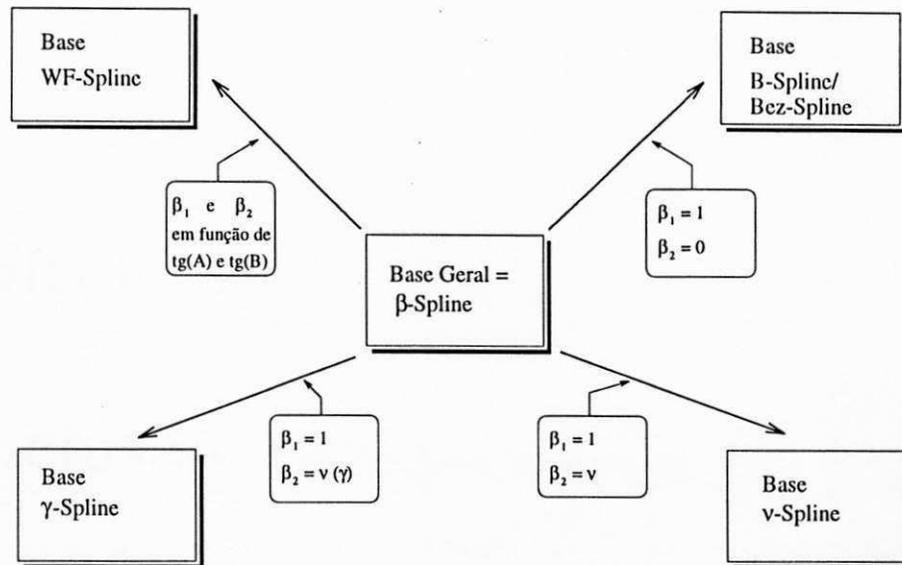


Figura 3.4: Relação entre a base geral e as bases *splines* de grau  $\leq 3$ . Bez-spline significa uma curva *spline* na forma de Bézier

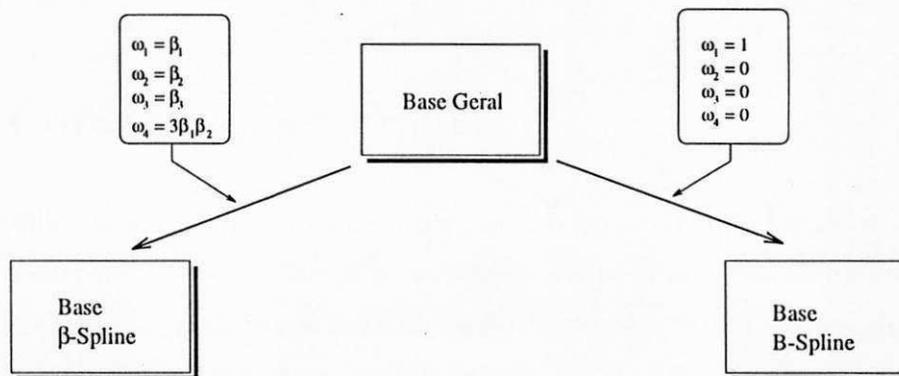


Figura 3.5: Relação entre a base geral e as bases *splines* de grau  $\leq 4$

# Capítulo 4

## Conclusão

Neste capítulo são apresentadas as conclusões sobre o trabalho executado e com as observações feitas durante a sua realização. Relacionam-se, também, algumas sugestões para trabalhos futuros.

### 4.1 Considerações Finais

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de encontrar uma formulação geral que permita construir todos ou a maioria das *splines* conhecidas. Essa formulação, estabelecida no capítulo 3, está baseada no teorema da existência e unicidade de bases *splines* [DM88], como também nas propriedades que garantem a continuidade geométrica de uma curva *spline* [DM88]. Foi possível estabelecer uma formulação pela qual se obtém os diversos *splines* estudados, bastando para tal atribuir valores específicos aos parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  (equação 2.70) na formulação para grau  $\leq 3$  ou aos parâmetros  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (equação 3.38) na formulação para grau  $\leq 4$ . Além dessa formulação unificada, foi também apresentada uma descrição sistemática de vários *splines* de grau  $\leq 3$  conhecidos, ressaltando as características de cada um. Nessa descrição, apresentada no capítulo 2, pode-se notar o que as *splines* apresentadas têm de comum e o que têm de diferente.

Para descrever as *splines* foi necessário, inicialmente, abordar Transformações Geométricas e Geometria Diferencial, cujos conceitos dão subsídios para a compreensão das propriedades geométricas de cada um dos *splines* estudados (*Bézier*, *B-splines*,  *$\beta$ -splines*,  *$\nu$ -splines*,  *$\gamma$ -splines*, *WF-splines*,  *$\tau$ -splines*).

Como primeira etapa do estudo de *splines*, foram apresentadas definições que caracterizam uma conceituação mais geral de *splines*. Depois dessa conceituação, foram apresentadas as características de cada tipo de *spline*. Observa-se que partindo das propriedades das funções bases das *splines*, a saber,

- positividade,
- suporte local,
- partição da unidade,

pode-se verificar as propriedades que caracterizam a forma da curva:

- invariância sob transformação afim,
- invariância sob transformação paramétrica afim,
- convexidade (que implica na existência de uma casca convexa envolvendo a curva),
- preservação de forma.

Observa-se, também, que as curvas *splines* satisfazem uma relação linear entre as derivadas da equação paramétrica da curva em relação ao parâmetro utilizado nas junções entre os seus segmentos. A diferença existente entre as diversas *splines* está na forma como essa relação acima é estabelecida (como foi apresentada na descrição de cada *spline*). A partir dessas condições de continuidade em cada junta, foram deduzidas as expressões para os segmentos das bases uniformes para as várias *splines* estudadas. Apenas as bases  *$\tau$ -splines* não foram apresentadas, pois o grau mínimo exigido para a

construção dos segmentos  $b_{-j}(u)$  é igual 5, tornando impossível fazer uma comparação com as outras *splines*.

As comparações permitem concluir que

- Quaisquer *WF-spline* e  $\nu$ -*spline* são  $\beta$ -*splines*,
- A curva *spline* na forma de Bézier é um *B-spline*,
- Qualquer  $\gamma$ -*spline* é um  $\nu$ -*spline*.

A maior parte das expressões das bases *splines* para graus 3 e 4 apresentadas neste trabalho não foram publicadas, com exceção das bases *B-splines* e  $\beta$ -*splines* que também podem ser encontradas em [BBB87]. Mas a dedução de todas essas expressões estão baseadas no teorema 2.3.1. Portanto, as expressões que foram apresentadas constituem realmente uma base *spline*.

Espera-se que este estudo contribua para uma melhor compreensão das *splines* bem como para facilitar a utilização das mesmas. O estabelecimento de uma formulação unificada é importante porque possibilita implementar uma única rotina (ou procedimento) para representar as diversas *splines*. Vale salientar a importância de um sistema de *software* para manipulação algébrica, como MAPLE, para deduzir a expressão analítica dessa formulação.

## 4.2 Sugestão de Trabalhos Futuros

1. Se  $n - 1$  condições de continuidade paramétricas ( $C^r$ ) forem impostas nas junções entre os segmentos resultam as bases *B-splines* uniformes de grau  $\leq n$ . Isso porque foi considerado somente seqüência de juntas uniforme. Sugere-se, então, repetir o que foi feito para seqüências de juntas não uniformes para generalizar a formulação unificada estabelecida no capítulo 3.
2. Outra sugestão de trabalho seria fazer um estudo, utilizando a formulação unificada para analisar a influência dos parâmetros  $\beta$  e  $\omega$  nas bases *splines*, como

também implementar um ambiente para comparar o efeito visual entre as diversas *splines* apresentadas.

# Apêndice A

## Segmentos das Bases $\tau$ -splines

A seguir são apresentados os segmentos das bases  $\tau$ -splines, para uma seqüência de juntas uniforme, usando o método discutido no capítulo 3.

De acordo com a seção 2.11, a matriz de conexão para uma curva  $\tau$ -spline com  $\nu_{i,1} = \nu_1$ ,  $\nu_{i,2} = \nu_2$  tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & -\nu_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

em que  $\nu_1 = 0$  e  $\nu_2 \geq 0$  garantem a total positividade.

De acordo com a seção 3.2, isso implica que os segmentos das bases  $b_{-j}(u)$ ,  $0 \leq j \leq 5$  devem possuir grau  $\leq 5$ . Visto que cada segmento tem 6 coeficientes, existem 36 coeficientes a determinar. Construindo um sistema de equações semelhante as relações (3.27)-(3.30) e (3.31), e resolvendo esse sistema algebricamente, obtêm-se

$$b_{-0}(u) = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{10} u^5 \right]$$

$$\begin{aligned}
b_{-1}(u) &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{10} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}(3 + \nu_2)u^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{10}(5 + \nu_2)u^5 \right] \\
b_{-2}(u) &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{30}(78 + 7\nu_2) + \frac{1}{2}(10 + \nu_2u + 2u^2 \right. \\
&\quad \left. - 2u^3 - \frac{1}{2}(4 + \nu_2)u^4 + \frac{1}{10}(10 + 3\nu_2)u^5 \right] \\
b_{-3}(u) &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{15}(99 + 8\nu_2) - 6u^2 - \nu_2u^3 \right. \\
&\quad \left. (3 + \nu_2)u^4 - \frac{1}{10}(10 + 3\nu_2)u^5 \right] \\
b_{-4}(u) &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{30}(78 + 7\nu_2) - \frac{1}{2}(10 + \nu_2)u + 2u^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}(3 + \nu_2)u^3 - \frac{1}{2}(4 + \nu_2)u^4 - \frac{1}{10}(5 + \nu_2)u^5 \right] \\
b_{-5}(u) &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{10} - \frac{1}{2}u + u^2 - u^3 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{10}u^5 \right], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

em que

$$\delta = 12 + \nu_2. \tag{A.3}$$

## Referências

- [BBB87] R. H. Bartels, J. C. Beatty, and B. A. Barsky. *Splines For Use in Computer Graphics & Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann, Los Altos, CA, 1987.
- [BFK84] W. Böhm, G. Farin, and J. Kahmann. "A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD". *Comp. Aid. Geom. Des.*, 1:1-60, 1984.
- [BKG88] W. C. Bruce, O. G. Keith, and H. G. Gaston. *MAPLE Reference Manual*. Waterloo Maple Publishing, Ontario, fifth edition, 1988.
- [Boe85] W. Boehm. "Curvature Continuous Curve and Surface". *Comp. Aid. Geom. Des.*, 2(4):313-323, 1985.
- [dB78] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.
- [dBH87] C. de Boor and K. Höllig. B-spline without divided difference. In G. A. Farin, editor, *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, Philadelphia, 1987. SIAM.
- [DM88] N. Dyn and C. A. Micchelli. "Piecewise Polynomial Spaces and Geometric Continuity of Curves". *Numer. Math.*, 54:319-337, 1988.
- [DoC76] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.
- [Far85] G. Farin. "Some Remarks on  $V^2$ -splines". *Comp. Aid. Geom. Des.*, 2(4):325-328, 1985.

- [Far88] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*. Academic Press, New York, 1988.
- [Fri86] F. N. Fritsch. "The Fowler-Wilson is a  $\nu$ -spline". *Comp. Aid. Geom. Des.*, 3(2):155-162, 1986.
- [FVD92] D. J. Foley and A. Van Dam, et alii. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison Wesley, Massachusetts, 1992.
- [FW66] A. H. Fowler and C. W. Wilson. Cubic Spline, a Curve Fitting Routine. Technical report, Union Carbide Corporation, Oak Ridge, TN, 1966.
- [Goo85] T. N. T. Goodman. "Properties of  $\beta$ -splines". *ACM Transactions on Graphics*, 9:198-211, 1985.
- [GV90] J. M. Gomes and L. C. Velho. *Conceitos Básicos de Computação Gráfica*. IME-USP, Sao Paulo, 1990.
- [Hag85] H. Hagen. "Geometric Spline Curves". *Comp. Aid. Geom. Des.*, 2(1-3):223-227, 1985.
- [Las90] D. Lasser. "Two Remarks on tau-splines". *ACM Transactions on Graphics*, 9:198-211, 1990.
- [Mel82] W. R. Melvin. Error analysis and uniqueness properties of the Wilson-Fowler spline. Technical report, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1982.
- [RA90] D. F. Rogers and J. A. Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1990.
- [Ric83] J. R. Rice. *Numerical Methods, Software, and Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 1983.
- [Sch46] I. J. Schoenberg. Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. *Quart. Appl. Math.*, 4:45-99, 1946.

- [Sei93] H. P. Seidel. "Polar Forms for Geometrically Continuous Spline Curves of Arbitrary Degree". *ACM Transactions on Graphics*, 12:1–34, 1993.
- [SF73] G. Strang and J. G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- [Ten88] K. Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial*. Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1988.