

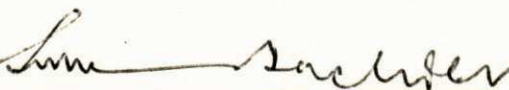
OTIMIZAÇÃO DE GRANDE SISTEMA UTILIZANDO O IBM - 1130

i

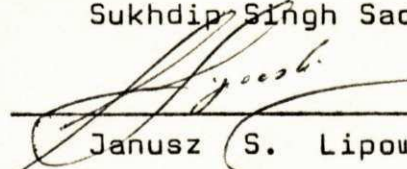
Jonas Manuel dos Santos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)


Aprovada por:



Sukhdip Singh Sachdeva



Janusz S. Lipowski



Gnanamuthu Daniel Theophilus

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA - BRASIL

JULHO 1975



S237o Santos, Jonas Manuel dos  
Otimizacao de grande sistema utilizando o IBM - 1130 /  
Jonas Manuel dos Santos. - Campina Grande, 1975.  
114 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia) \_ Universidade  
Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Computador - Componentes Fisicos 2. IBM - 1130 -  
Otimizacao 3. Dissertacao I. Sachdeva, Sukhdip Singh, Dr.  
II. Titulo

CDU 004.43(043)

## AGRADECIMENTOS

Àqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram comigo ao longo da preparação deste trabalho, deixo registrado aqui meu reconhecimento. De modo especial,

ao Professor Suckdip Singh Sachdeva, a quem coube a tarefa árdua e séria de me orientar;

ao Professor John H. Anderson, pelas sugestões e valiosos comentários críticos;

ao Núcleo de Processamento de Dados, em particular à equipe responsável pela operação e aos operadores do 1130;

ao DSC

ao CCT

à CAPES

OTIMIZAÇÃO DE GRANDE SISTEMA  
UTILIZANDO O IBM - 1130

Jonas manuel dos Santos  
Aluno

Suckdip Singh Sachdeva  
Orientador

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um método direto de otimização em computador IBM - 1130 para solução do problema geral de programação não-linear sujeito a restrições de igualdade e de desigualdade. O algoritmo usado minimiza funções quadráticas de várias variáveis, cujas restrições são eliminadas através de métodos de funções de penalidade mistas. Considerando que os métodos de funções de penalidade geralmente aumentam o tamanho do problema, foi desenvolvida uma teoria de decomposição do problema estudado. Como aplicação prática, foi feito o estudo de otimização de operação do sistema de Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. (CEMIG).



LARGE SYSTEM OPTIMIZATIONUSING IBM - 1130Jonas Manuel dos Santos  
StudentSuckdip Singh Sachdeva  
Adviser

## ABSTRACT

This work develops and illustrates a direct method of optimization for solving the general nonlinear programming problem under equality and inequality constraints using 1130 IBM computer facilities. The algorithm applies to quadratic functions of several variables, for which the constraints are removed by means of mixed penalty functions. As penalty functions approach increases the problem size, a decomposition technique is set up for large problem optimization. An application on a practical power system optimization is provided.

## Índice

Índice de Figuras .....	viii
Índice de Tabelas .....	ix
Lista de Símbolos .....	xii
1. Introdução .....	1
2. Algoritmo Composto .....	5
2.1. Métodos indiretos .....	5
2.2. Métodos diretos .....	9
2.2.1. Algoritmo de Fletcher-Powell .....	13
2.3. Métodos de Funções de Penalidade .....	17
2.3.1. Função de Penalidade Exterior .....	18
2.3.2. Função de Penalidade Interior .....	19
2.3.3. Métodos Mistos de Funções de Penalidade ...	21
2.3.4. Verificação Prática do Algoritmo .....	22
3. Algoritmo de Decomposição .....	35
3.1. Conversão do Algoritmo para o IBM 1130 .....	35
3.2. Tempo de Processamento .....	43
3.3. Algoritmo de Decomposição .....	43
4. Aplicação em Sistema de Potência .....	50
4.1. Configuração Física do Sistema e Equações Básicas .....	52

	vii
4.2. O problema de otimização .....	58
4.3. Operação ótima com as Perdas Mínimas	
a. O Sistema SPC .....	62
b. O Modelo Ótimo do Sistema CEMIG .....	66
5. Conclusão .....	77
Bibliografia .....	81
Apêndice I .....	84
-Estabilidade no Método de Fletcher-Powell	
-Convergência	
-Descrição do Fluxograma do Algoritmo de Fletcher-Powell	
-Descrição da Subrotina FMFP	
-Descrição do Fluxograma de Variação das Constantes de Penalidade	
-Passos Principais da Subrotina FUNCT	
Apêndice II .....	103
-Determinação das equações do sistema de potência	
Apêndice III .....	111
-Dados do Problema-Teste	

## Índice de Figuras

Fig. 2.1 - Obtenção de uma solução viável ótima pelo método indireto .....	8
Fig. 2.2 - Gráficos de convergência da função do problema-teste .....	11
Fig. 2.3 - (a) Fluxograma dos passos essenciais do método de Fletcher-Powell .....	15
(b) Fluxograma da interpolação cúbica .....	16
Fig. 2.4 - Função de penalidade exterior .....	19
Fig. 2.5 - Função de penalidade interior .....	20
Fig. 2.6 - Composição do algoritmo usado na determinação do mínimo de $f(x)$ .....	23
Fig. 2.7 - Fluxograma de variação das constantes de penalidade .....	24
Fig. 2.8 - Gráfico da região de soluções viáveis de $f(x)$ ...	28
Fig. 2.9 - Gráficos de convergência da função do problema-teste utilizando funções de penalidade mistas .....	32
Fig. 3.1 - Interligação do programa principal e subrotinas .....	37



Fig. 3.2 - Esquema de interligação do programa após partição da subrotina FUNCT .....	39
Fig. 3.3 - Estruturas (a) antiga e (b) atual do programa .....	41
Fig. 3.4 - Gráfico do tempo de processamento em relação ao número de variáveis .....	44
Fig. 3.5 - Fluxograma do algoritmo de decomposição .....	48
Fig. 4.1 - (a) Diagrama unifilar de uma linha de transmissão, (b) circuito equivalente, (c) diagrama de fasores .....	51
Fig. 4.2 - Limites de funções de penalidade .....	60
Fig. 4.3 - Gráficos de convergência de $f(x)$ , referidos à função-objetivo do problema-teste .....	64
Fig. 4.4 - (a) Diagrama unifilar do modelo EHV da CEMIG, configuração original .....	68
(b) configuração reduzida .....	69
Fig. I.1 - Fluxograma detalhado da subrotina FMFP .....	90
Fig. I.2 - Passos principais da função do usuário (FUNCT)..	96
Fig.II.1 - Diagrama de circuito e fasor .....	103
Fig.II.2 - Representação do circuito equivalente de um transformador .....	109



## Índice de Tabelas

Tab. 2.1 - Resultados da minimização de $f(x)$ para fator R no intervalo $10^{-5}$ a $10^{-7}$ .....	27
Tab. 2.2 - Resultados da minimização de $f(x)$ para fator R no intervalo $10^{-3}$ a $10^{-5}$ .....	29
Tab. 2.3 - Resultados da minimização de $f(x)$ para um fator R no intervalo $10^{-3}$ a $10^{-7}$ .....	30
Tab. 2.4 - Resultados da minimização de $f(x)$ para um fator R no intervalo $10^{-5}$ a $10^{-7}$ .....	31
Tab. 3.1 - Alocação de memória para o programa na estruturação original.....	37
Tab. 3.2 - Alocação de memória para as partições da função do usuário (FUNCT) .....	40
Tab. 3.3 - Alocação de memória para o programa após partição da função do usuário .....	40
Tab. 3.4 - Alocação de memória para a estrutura atual do programa .....	41
Tab. 3.5 - Alocação de memória para o mesmo programa processado em computador IBM 360/65 e tempo de processamento .....	42

Tab. 4.1 - Resultados da otimização de potências real e reativa pela minimização do custo-operacional (problema-teste) .....	66
Tab. 4.2 - Resultados da otimização das potências real e reativa pela minimização das perdas .....	67
Tab. 4.3 - Parâmetros da linha, modelo de sistema EHV da CEMIG .....	71
Tab. 4.4 - Dados das barras do sistema EHV da CEMIG .....	72
Tab. 4.5 - Restrições sobre as variáveis do sistema EHV da CEMIG .....	73
Tab. 4.6 - Vetor inicial usado na determinação das perdas mínimas do sistema .....	74
Tab. 4.7 - Ótimo obtido pela minimização das perdas (sistema CEMIG) .....	75
Tab. III.1-Parâmetros da linha do problema-teste, sistema SPC .....	112
Tab. III.2-Dados dos barramentos .....	113
Tab. III.3-Restrições sobre as variáveis .....	114
Tab. III.4-Dados de custo do sistema .....	114

## Lista de Símbolos

- $x$  vetor linha de  $n$  componentes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  
 $x^t$  vetor coluna de  $n$  componentes.  
 $f(x)$  função-objetivo  
 $g_i(x)$  função das restrições de desigualdade de  $x$ .  
 $h_j(x)$  funções das restrições de igualdade de  $x$ .  
 $E^n$  espaço euclidiano  $n$ -dimensional.  
 $Z$  conjunto genérico de  $E^n$ , e que contém o vetor solução  $x$ .  
 $z$  ponto ótimo de  $f(x)$  pertencente ao conjunto  $Z$ .  
 $f(x^*)$  solução ótima de  $f(x)$ .  
 $x^*$  ponto ótimo determinado do vetor  $x$ .  
 $\lambda_i$  multiplicadores de Lagrange.  
 $\nabla$  designação de gradiente.  
 $\mathcal{L}$  função lagrangeana.  
 $G(x)$  matriz hessiana das derivadas segundas de  $f(x)$ .  
 $H^i$  matriz simétrica e positivamente definida, para a qual se tem  $\lim_{i \rightarrow \infty} H^i = G(x)^{-1}$ .  
 $I$  matriz unitária  
 $g^i$  gradiente de  $f(x)$ .  
 $f^i$  valor de  $f(x)$ .  
 $x^i$   $i$ -ésimo vetor  $x$  de  $n$  componentes.

$s^i$	vetor de deslocamento ( $s^i = x^{i+1} - x^i$ ).
$\Delta$	identificador de uma diferença; incremento de um vetor, gradiente, função, etc.
$\epsilon$	tolerância.
$\eta^i$	coeficiente direcional utilizado na interpolação cúbica.
$\alpha_i$	fator utilizado na pesquisa do mínimo ao longo de uma direção.
$\lambda$	tamanho do passo na pesquisa do mínimo.
$P(x,R)$	função de penalidade
$p(x)$	função de penalidade exterior.
$I(x)$	função de penalidade interior.
$F(x(R,S),R,S)$	função de penalidade mista.
$R_i, S_i$	constantes de penalidade
$X^k$	vetor de $p$ componentes ( $1 \leq k \leq p$ ).
$Y^k$	vetor das componentes constantes de $X^k$ .
$i, k$	índices para indicar barramentos genéricos.
$P_i$	potência ativa gerada em um barramento $i$ .
$Q_i$	potência reativa gerada em $i$ .
$C_i$	consumo de potência ativa em $i$ .
$D_i$	consumo de potência reativa em $i$ .
$I_i$	potência ativa líquida injetada na linha, em $i$ .
$K_i$	potência reativa líquida injetada na linha em $i$ .
$\delta_{ik}$	complemento do ângulo de impedância da linha ( $\tan^{-1} \frac{R}{X}$ )
$\theta_i$	ângulo de fase, em um barramento genérico $i$ .
$V_i$	voltagem em $i$ .
$m_t$	derivações dos transformadores (taps).
$Y_{ii}$	admitância shunt no barramento $i$ .
$Y_{ik}$	admitância shunt na linha, trecho $ik$ .
$\tau$	compensador da rede.
$R_{ik}$	resistência na linha, num trecho qualquer $ik$ .
$X_{ik}$	reatância em um trecho de linha $ik$ .

$Z_{ik}$	impedância da linha ( $Z_{ik} = R_{ik} + jX_{ik}$ ).
$L$	função-objetivo das perdas.
$i_{ii}$	corrente que flui pela admitância $Y_{ii}$ .
$i_{ik}$	corrente no trecho de linha $ik$ .
$i_i$	corrente total no barramento $i$ .
$J$	número de linhas que partem de um barramento
$\Delta V_{ik}$	diferença entre voltagens dos barramentos $i$ e $k$ .
$\Delta \theta_{ik}$	diferença entre os ângulos de fase das barras $i$ e $k$ .



## 1 - INTRODUÇÃO

No mundo moderno a aplicação das técnicas de otimização nas áreas científicas e de engenharia é de importância irrefutável. Os sistemas de engenharia estão aumentando em tamanho e complexidade, com diversificação de objetivo a ser satisfeito. As técnicas de otimização tentam simplificar e chegar a uma solução única do problema complexo e sempre crescente de sistema de engenharia. Neste trabalho, um método de otimização foi aplicado na obtenção da solução de problema de operação ótima de sistema de potência.

Apesar de as primeiras técnicas de otimização conhecidas (steepest descent methods) terem sido introduzidas por Cauchy (1847), essas técnicas não tiveram ampla aplicação a não ser muito recentemente. O advento do computador tornou possível a aplicação de técnicas de otimização na solução de problemas de sistemas de engenharia. A disponibilidade de grandes facilidades computacionais tornou possível a solução de extensos problemas de sistemas de otimização. Entretanto, no caso de países em desenvolvimento, como o Brasil, muitas vezes não se dispõe de computadores de grande porte. Os grandes sis-

temas têm de ser resolvidos utilizando os recursos de pequenos computadores. Nesta tese, um problema extenso de operação ótima de sistema de potência foi resolvido utilizando técnicas de decomposição numérica (1) e recursos de overlay (2) do sistema operacional do IBM - 1130.

As técnicas de otimização podem-se classificar em métodos diretos e indiretos (3). Os métodos indiretos se servem das condições de ótimo obtidas pelo teorema de Kuhn-Tucker (3 a 7), a fim de determinarem o estado ótimo do sistema. Os métodos diretos, porém, determinam a solução ótima através da minimização repetida da função-objetivo aumentada. Nesta tese, foi abordado um método direto de otimização de problemas de programação não-linear - o método de Davidon-Fletcher-Powell (8). Essa escolha deveu-se ao fato de, além de já estar adaptado às condições particulares do problema estudado (9), se tratar de um método que apresenta ótimo desempenho na minimização de funções de várias variáveis, sem restrições.

No capítulo 2, tem-se uma breve discussão dos métodos indiretos, com as condições necessárias e suficientes de obtenção de pontos de ótimo, e dos métodos diretos. A função custo, sem restrições, resulta da aplicação de fatores de penalidade interiores, exteriores, ou mistos, sobre as restrições. Em seguida, os métodos computacionais de solução de funções sem restrições, e o método utilizado na tese, seguido de alguma experiência obtida.

Procurou-se resolver um grande problema, que precisava de aproximadamente 32K de memória, em computador de pequeno porte, IBM-1130, com apenas 16K de memória. Essa dificuldade foi superada usando-se duas técnicas. Na primeira, foram empregados recursos do sistema operacional do IBM-1130 e, na segunda, foi usado um método de decomposição numérica. As ex



periências computacionais, relativas a este método são discutidas no capítulo 3.

Os métodos composto e decomposto, discutidos nos capítulos 2 e 3, são aplicados ao sistema real da CEMIG - Centrais Elétricas de Minas Gerais, Brasil. O conceito básico de sistema de potência, a representação matemática, com a formulação do problema de otimização e a solução são discutidos no capítulo 4. A operação ótima de sistemas hidrelétrico e hidrotermalétrico foi examinada sob os aspectos de perdas mínimas e custos operacionais mínimos, respectivamente. Os resultados e interpretações do sistema são dados em detalhes.

A operação ótima de sistema de potência é um problema não-linear e por esta razão se considera técnica de otimização não-linear. Em linhas gerais, em problemas de programação não-linear, seleciona-se inicialmente um vetor  $x$ , com o qual se constroem sequências de pontos ou vetores (4), visando à maximização (ou minimização) de  $f(x)$ . Matematicamente, esses problemas são traduzíveis em proposições bastantes compactas, como seja, determinar um vetor  $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ , o qual é solução do problema

$$\text{minimizar } f(x) \quad (1.1)$$

sujeita às restrições

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.2)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1.3)$$

onde  $f(x)$  é a função-objetivo;  $g(x)$  e  $h(x)$ , restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente (10).

Pode-se, também, partir de um conjunto  $Z$  (5), pertencente ao espaço euclidiano  $n$ -dimensional,  $Z \in E^n$ , no qual se acham definidas as funções  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$ . Assim sendo, o problema de programação matemática poderá ser formulado para

determinar um ponto  $x$ , sempre que possível, tal que

$$z = \min f(x)$$

e

$$x \in Z = \{x | x \in Z, g_i(x) > 0, h_j(x) = 0\}$$

onde  $Z$  é um conjunto que contém o espaço das soluções viáveis e  $x$  é uma solução viável básica que fornece o ponto ótimo procurado -  $f(x^*)$ .

Finalmente, se as funções  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  forem lineares, tem-se um problema de programação linear.

## 2 - ALGORITMO COMPOSTO

O presente capítulo trata dos métodos diretos e indiretos de otimização, dedicando maior atenção aos métodos diretos. Discutem-se técnicas de solução de funções sem restrições, apresenta-se o algoritmo de Fletcher-Powell, com resultados obtidos da utilização desse algoritmo. O conceito de função de penalidade integra a teoria exposta. Usando fatores de penalidade, transforma-se a função sujeita a restrições em uma função sem restrições.

### 2.1 - Métodos Indiretos

As técnicas indiretas <sup>(3)</sup> de programação se fundamentam nas propriedades diferenciais das funções ou funcionais envolvidos. Essas propriedades diferenciais envolvem continuidade e teoria de máximos e mínimos, dentro das limitações previstas. A partir delas, desenvolvem-se as condições necessárias que um ponto deve satisfazer para fornecer uma solução ótima.

A teoria clássica sempre fornece máximos e mínimos relativos das funções. Supõe-se  $f(x)$  continuamente diferenciável uma vez em  $E^n$ , ou sobre parte de  $E^n$ ; e utilizam-se as derivadas parciais de  $f(x)$  de modo que, num ponto  $x^0$ , onde  $f(x)$  assume um máximo ou um mínimo, essas derivadas se anulam.



Um ponto assim determinado nada diz sobre o comportamento de  $f(x)$ . Porque (i) se pode ter encontrado um máximo, se  $f(x)$  for côncava, ou um mínimo, se  $f(x)$  for convexa; (ii) se trata de um ponto de inflexão, se  $f(x)$  é função de apenas uma variável; (iii) se a função considerada é de 2,3,4,... variáveis, poderá tratar-se de um ponto de sela, o qual não é máximo nem mínimo local de  $f(x)$ . Tais pontos são conhecidos como pontos estacionários de  $f(x)$  (4).

Sem perda de generalidade, considere-se o problema de programação não-linear (1.1), sujeito à restrição (1.2), com  $x_j > 0$ ,  $j=1, \dots, p$  e no qual  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções diferenciáveis uma vez em  $E^n$ . Então, se  $x^*$  é uma solução ótima, satisfeitas todas as restrições impostas a  $f(x)$ , é válido afirmar

- i)  $x^*$  é viável,
- ii) existem multiplicadores  $\lambda_i > 0$ , tais (2.1)  
que  $\lambda_i g_i(x^*) = 0$ ,  $i=1, \dots, m$ ; e
- iii)  $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$

As afirmações (i), (ii) e (iii) acima são as condições necessárias de Kuhn-Tucker (6). Se o problema proposto envolve restrições de igualdade e de desigualdade, os multiplicadores correspondem apenas às restrições de desigualdade, ao passo que quando referentes às restrições de igualdade poderão também ser negativos ou nulos. No caso do problema proposto pelas equações (1.1), (1.2) e (1.3) as condições (ii) e (iii) serão reformuladas para:

- ii) existem multiplicadores  $\lambda_i > 0$ ,  $i=1, \dots, m$   
e multiplicadores não sujeitos a restrições,  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, p$ , tais que (2.2)  
 $\lambda_i g_i(x^*) + \lambda_j h_j(x^*) = 0$ , e
- iii)  $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) = 0$

Para prova completa das condições (2.1) e (2.2), ver Zangwill (7).

Se  $x^*$  é um ponto que pertence ao conjunto de soluções viáveis de  $f(x)$ , as condições de Kuhn-Tucker são necessariamente satisfeitas quando um pequeno deslocamento desde  $x^*$  em qualquer direção não aumenta o valor da função-objetivo. No desenvolver das condições Kuhn-Tucker, supõe-se conhecido o conjunto das direções que partem de  $x^*$ . Os deslocamentos desde esse ponto não poderão violar as restrições iniciais sobre  $f(x)$ , caso em que as condições de máximo ou mínimo local de  $f(x)$  em  $x^*$  serão invalidadas.

Até quí, foram discutidas apenas as condições necessárias. O conjunto de equações (2.1) ou (2.2) resultantes fornece candidatos para o ótimo. As soluções obtidas são testadas através de testes de suficiência para a confirmação do ótimo. Referidas condições serão também suficientes, sempre que  $f(x)$  for convexa. Define-se, agora, um vetor  $\lambda_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x), \quad i=1, \dots, n \quad (2.3)$$

na qual  $\mathcal{L}$  é a função lagrangeana e os  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange. As condições de Kuhn-Tucker estabelecem que um vetor  $x^*$  é solução para o problema de otimização proposto (eq.1.1) se e somente se existir um vetor  $x^*$  tal que

$$\begin{aligned} x_j^* &\geq 0, \quad j=1, \dots, m \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, n \\ \mathcal{L}(x^*, \lambda) &\leq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(x, \lambda^*) \end{aligned} \quad (2.4)$$

para todo  $x_j \geq 0$  e  $\lambda_i \geq 0$ . Da equação (2.4), conclui-se que o ponto  $(x^*, \lambda^*)$  apresenta as seguintes características (6):

- para um vetor  $\lambda^*$  fixo,  $\mathcal{L}(x, \lambda^*)$  tem um mínimo global no domínio de  $x_j \geq 0, j=1, \dots, m$ ;



- para um vetor  $x^*$  fixo,  $\mathcal{L}(x^*, \lambda)$  tem um máximo global do domínio  $\lambda_i \geq 0, i=1, \dots, n$ .

Consequentemente, o ponto  $(x^*, \lambda^*)$  é um ponto de sela do lagrangeano (eq. 2.3) e

$$\min_x \mathcal{L}(x, \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \max_{\lambda} \mathcal{L}(x^*, \lambda)$$

Estas são condições necessárias e suficientes. Há, porém, pontos de ótimo que satisfazem as condições de Kuhn-Tucker mas não preenchem as condições de suficiência (7).

As condições ótimas de Kuhn-Tucker por si só não conduzem a um algoritmo computacional. Pode-se obter a solução por técnica indireta de otimização usando as condições de ótimo de Kuhn-Tucker juntamente com restrições de igualdade. As restrições de desigualdade são verificadas a cada passo do processo. De início, obtém-se uma solução viável resolvendo as restrições de igualdade. Verifica-se as condições de ótimo e os gradientes decidem a direção da mudança de variável para a função-objetivo, encontrando a próxima solução viável. A representação simplificada do processo é dada na figura 2.1.

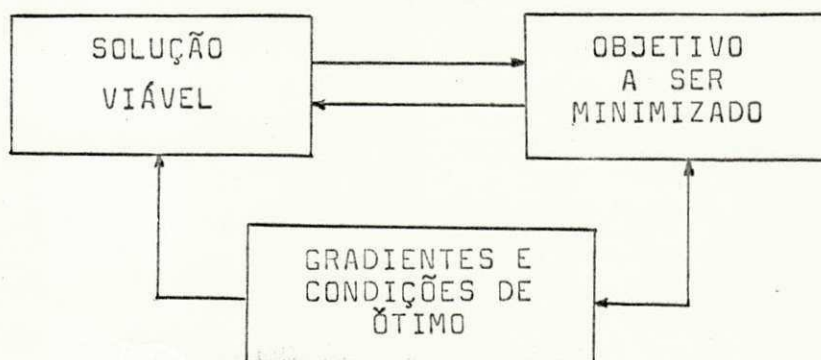


Figura 2.1 - Obtenção de uma solução viável ótima pelo método indireto.

## 2.2 - Métodos Diretos

Nas técnicas diretas de otimização, minimiza-se a função-objetivo juntamente com as restrições, para determinar o ponto de ótimo. Fazem-se algumas assunções referentes à função-objetivo e às restrições (10). As técnicas de minimização sem restrições são utilizadas iterativamente, para se chegar aos mínimos sujeitos a restrições. Abaixo, apresenta-se breve descrição das técnicas de minimização usadas no capítulo seguinte, para se chegar ao algoritmo da decomposição.

Os métodos diretos podem-se dividir em técnicas que usam gradientes e técnicas que não usam gradiente. Discutem-se aqui apenas algumas das técnicas de gradiente importantes, considerando que discutir todos os métodos acha-se além do escopo desta tese. Powell (13) e Zangwill (14) já propuseram métodos de otimização que não requerem o cálculo de derivadas. Estes métodos são muito úteis no caso de o cálculo das derivadas do programa de computador exigir considerável soma de esforço computacional. Os métodos de gradientes conjugados são importantes na localização do ponto ótimo. Fletcher-Reeves (15) localiza o mínimo de uma função quadrática em  $n$  passos, independente do vetor inicial. Fletcher-Powell (8), além da convergência em  $n$  passos, para funções quadráticas, gera a inversa da matriz hessiana das derivadas parciais segundas, ao caminhar para o ponto de ótimo. O método de Newton-Raphson generalizado (10) se constitui um dos mais eficientes, quanto à rapidez de convergência, porém requer o cálculo das derivadas parciais segundas.

Estudos comparativos sobre os métodos citados, Fiacco & McCormick (10) e Tabak & Kuo (6), indicaram que, para determinados tipos de problemas, o esforço computacional é praticamente o mesmo para todos os métodos. O método de Newton é desvantajoso para funções com grande número de variáveis, de

vez que  $f(x)$  é minimizada ao longo da direção  $-G(x)^{-1} \nabla f(x)$ .  $G(x)^{-1}$ , inversa da matriz hessiana, calculada a partir das derivadas parciais segundas, nem sempre existirá. O espaço necessário para armazenar  $G(x)$  é da ordem de  $n^3/3$  ( $n$ , número de variáveis de  $f(x)$ ); para funções não-convexas,  $f(x)$  poderá não convergir. A vantagem do método de Fletcher-Reeves ou de Fletcher-Powell dependerá da função-objetivo. Este último usa uma matriz  $H$  para obter  $G(x)^{-1}$  sem necessitar do cálculo das derivadas parciais segundas. Após um ciclo de  $n+1$  passos, pode-se restabelecer  $H = \mathbb{I}$ , para reiniciar outro ciclo com novo vetor inicial, resultante do  $n$ -ésimo passo do ciclo anterior. O método utiliza  $n^2/2$  locações de memória para armazenar  $H$  e, para computar os vetores direções, efetua  $n^2/2$  operações (10).

O método de Fletcher-Powell - também conhecido como Davidon-Fletcher-Powell (12) - resultou de modificações introduzidas por R. Fletcher e M.J.D. Powell em técnica proposta anteriormente por W.C. Davidon (1959). É bastante eficiente para resolver problemas em que  $f(x)$  é dada analiticamente e admite derivadas parciais segundas contínuas, com relação aos argumentos; e em que os cálculos de  $f(x)$  e do gradiente de  $f(x)$  demandam muito tempo de processamento, em comparação com os cálculos das matrizes associadas ao método. O objetivo desse método é determinar o mínimo local sem restrições de funções de várias variáveis,  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Ao pesquisar o mínimo de funções ou formas quadráticas, o método de Newton-Raphson usa a inversa da matriz hessiana  $G(x)$ , obtida das derivadas parciais segundas de  $f(x)$ . Daí,  $f(x)$  deverá ser duas vezes continuamente diferenciável. No presente método, porém, supõe-se inicialmente que as funções em estudo são calculáveis em todos os pontos do espaço considerado. O método é quadrático-convergente e iterativo. O resultado de cada iteração é utilizado na determinação da iteração seguinte e, para funções quadráticas, a



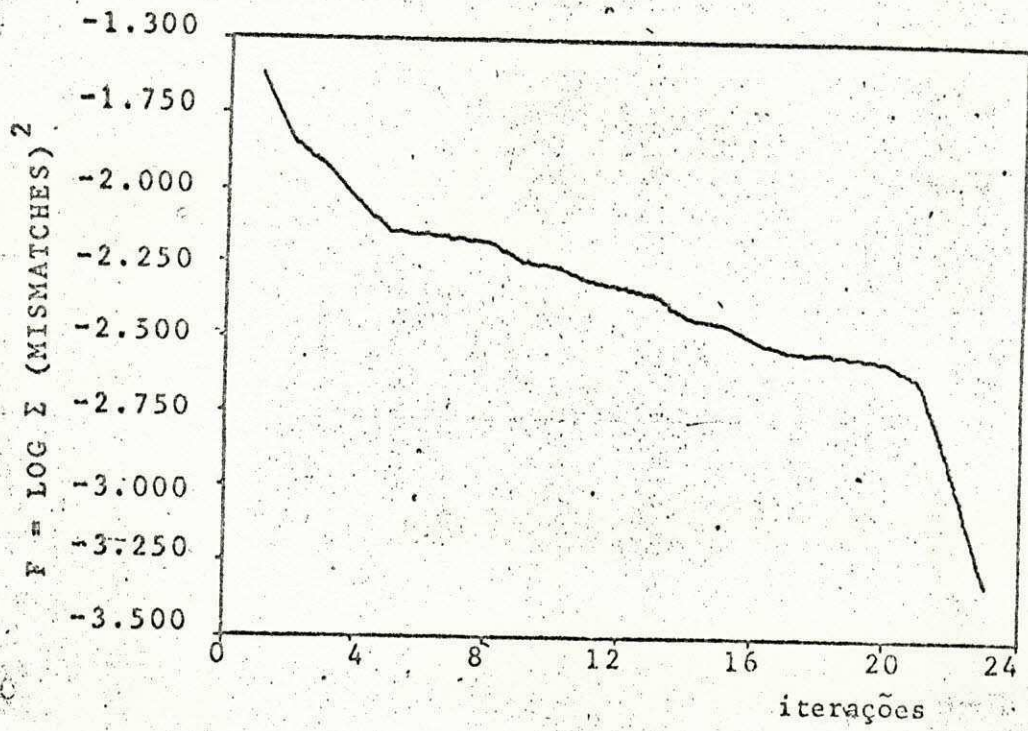


Fig. 2.2 (a) Convergência de  $f(x)$  após 23 iterações

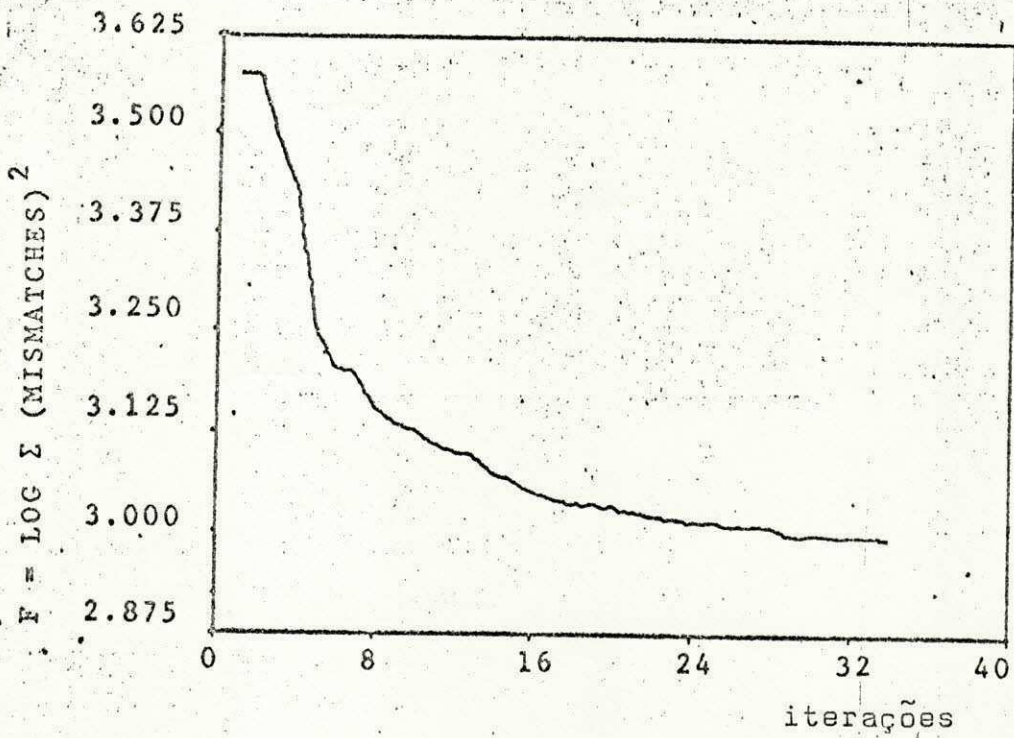


Fig. 2.2 (b) Convergência de  $f(x)$  após 34 iterações

convergência é assegurada em no máximo  $n$  iterações, onde  $n$  é o número de variáveis de  $f(x)$  (ver fig. 2.2a e b. Estes gráficos se referem ao problema-teste (23), Apêndice III). O método pesquisa mínimos de formas quadráticas

$$f = f_0 + \sum_i a_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij} x_i x_j \quad (2.5)$$

em que  $G_{ij}$  é a matriz hessiana das derivadas parciais segundas de  $f(x)$  ou de funções de segundo grau do tipo

$$f(x) = a_{0i} + a_{1i} x_i + a_{2i} x_i^2 \quad (2.6)$$

Se  $x_0$  é um ponto mínimo, na região de soluções viáveis de  $f(x)$ , o deslocamento entre um ponto qualquer  $x$  e o mínimo é dado por

$$x_0 - x = -G^{-1}g \quad (2.7)$$

Fica assim definida uma direção ao longo da qual  $f(x)$  se deslocará em movimento decrescente. A matriz  $G^{-1}$  é a inversa da matriz hessiana formada das derivadas parciais segundas de  $f(x)$ . Em vez de calculá-la, o método de Fletcher-Powell utiliza uma matriz  $H$  qualquer, simétrica e positivamente definida. Essa matriz  $H$  é modificada após cada iteração, de tal modo que para  $i \rightarrow \infty$ ,  $H^i \rightarrow G^{-1}$ .

Pela equação (2.7), a direção seguida pelo mínimo de  $f(x)$  é agora determinada por

$$x_0 - x = -Hg \quad (2.8)$$

ou pela linha reta  $x_0 - x = r$ , na qual  $r = -Hg$ .  $g$  é o gradiente, ou vetor direcional, cujas componentes são derivadas parciais primeiras de  $f(x)$ , calculadas no ponto  $x$ :

$$g = \nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

A função do gradiente é determinar a taxa de variação instan-

tânea de  $f(x)$  ao longo da direção  $r$ .

### 2.2.1 - Algoritmo

Inicialmente, faz-se  $H=I$ , de maneira que a primeira direção  $r=-Hg$  é no sentido descendente da linha de máxima inclinação (steepest descent). Tal fato é assegurado quando tomado o sentido negativo do gradiente. Os passos essenciais do algoritmo de Fletcher-Powell são:

1. Faz-se  $i = 0$ ; obtem-se um vetor  $x^0$  como aproximação inicial do mínimo de  $f(x)$ , e determina-se a matriz  $H^0=I$ . Calcula-se o gradiente e o valor de  $f(x)$  no ponto  $x^0$ :  $g^0 = \nabla f(x^0)$  e  $f^0 = f(x^0)$ ;

2. Determina-se um  $\alpha^i > 0$ , tal que  $f(x^i + \alpha r^i)$  seja um mínimo de  $f(x)$  relativamente a uma direção  $x^i + \lambda r^i$ , com  $r^i = -H^i g^i$ . Considerar  $\lambda=0$  para  $H$  positivamente definida;

3. Faz-se  $s^i = \alpha^i r^i = -\alpha^i H^i g^i$

$$x^{i+1} = x^i + s^i \quad (2.9a)$$

e calcula-se  $f^{i+1}$  e  $g^{i+1}$ . Observar que os vetores  $g^{i+1}$  e  $s^i$  são ortogonais, isto é,

$$(s^i)^t g^{i+1} = 0 \quad (2.9b)$$

4. faz-se  $\Delta g^i = g^{i+1} - g^i$  (2.9c)

5. A nova aproximação da matriz  $H$  é dada por

$$H^{i+1} = H^i + M_1^i + M_2^i \quad (2.9d)$$

onde

$$M_1^i = \frac{\Delta x^i (\Delta x^i)^t}{(\Delta x^i)^t \Delta g^i}$$



$$M_2^i = \frac{-H^i \Delta g^i (\Delta g^i)^t H^i}{(\Delta g^i)^t H^i \Delta g^i}$$

6. faz-se  $i = i+1$  e repete-se, a partir do passo 2.

O processo termina quando certa precisão  $\epsilon > 0$  é alcançada, de tal modo que cada componente de  $s^i = x^{i+1} - x^i \leq \epsilon$ , ao término da  $n$ -ésima iteração. Ou então, quando  $(s^i)^t s^i$  decresce abaixo de níveis preestabelecidos.

Para obter  $\alpha^i$  conforme proposto por W.C. Davidson, precisa-se de um ponto  $y_i$  sobre a reta  $x^{i+1} = x^i + \lambda \eta^i, \lambda > 0$ , porque serão necessários valores de  $f(x)$  e  $g(x)$  calculados nos pontos  $x$  e  $y$ :  $f_x, f_y, g_x$  e  $g_y$ . Um modo de escolha do ponto  $y_i$  é tomá-lo como a aproximação

$$y_i = x^i + \eta s^i$$

com

$$\eta = \min \left[ 1, \frac{2(f_0 - f_x)}{g_x s^i} \right]$$

e  $f_0$  sendo um valor mínimo de  $f(x)$  estimado ( $f_0 = f_{est}$ ). Por fim realiza-se a interpolação cúbica (8,16) para obtenção de  $\alpha^i$ :

$$\alpha^i = \lambda \left[ 1 - \frac{g_y s^i + w - z}{g_y s^i - g_x s^i + 2w} \right]$$

onde

$$z = \frac{3}{\lambda} (f_x - f_y) + g_x s^i + g_y s^i$$

$$w = (z^2 - g_x s^i g_y s^i)^{1/2}$$

Testa-se  $f(x^i + \alpha s^i)$  com ambos os valores de  $f_x$  e  $f_y$ . Se maior que qualquer desses valores, repete-se a interpolação para um menor valor de  $\lambda$ .

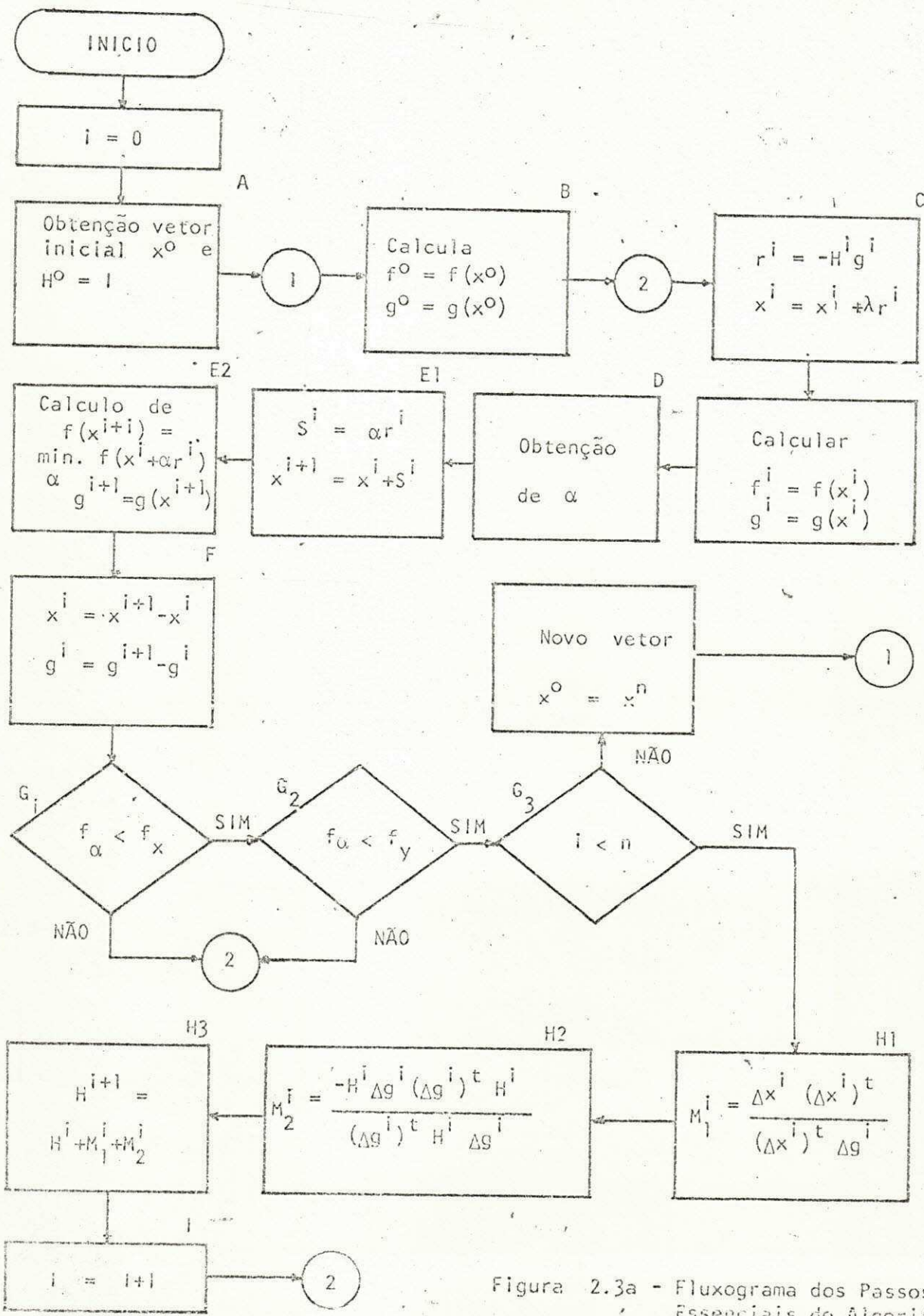
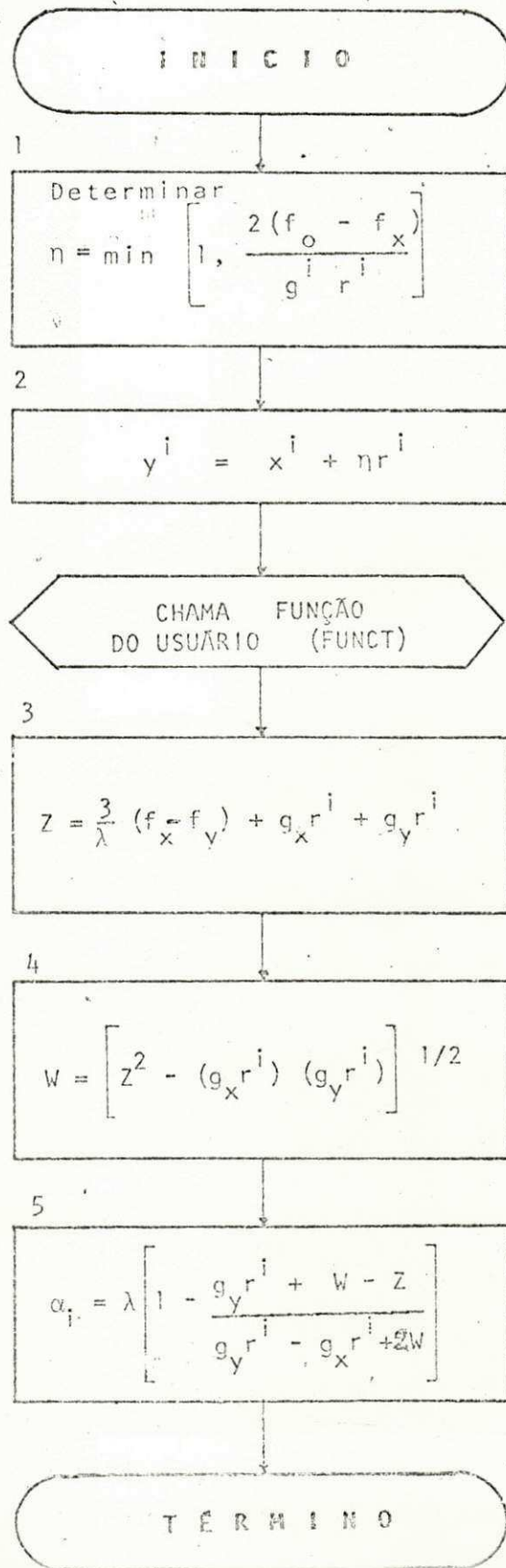


Figura 2.3a - Fluxograma dos Passos Essenciais do Algoritmo do Fletcher-Powell



Figura 2.3b - Fluxograma de Interpolação Cúbica - Obtenção de  $\alpha$



O algoritmo de Fletcher-Powell poderia resumir-se nos seguintes passos (17):

1. obter um vetor inicial;
2. determinar a direção de máxima declividade (steepest descent);
3. realizar pesquisa unidimensional na direção determinada em 2;
4. se a função convergir, o algoritmo termina; caso contrário, retorna ao passo 2, e repete.

Entretanto, o fluxograma da figura 2.3a e b se baseia nas etapas descritas na seção 2.2.1. Ver descrição completa no Apêndice II.

### 2.3 - Métodos de Funções de Penalidade

Em qualquer área de atividades, para se estabelecerem critérios de desempenho coerentes para obtenção de configuração ótima do sistema envolvido, sempre se deverá considerar também as limitações sobre as variáveis que o compõem. O equacionamento correto desses fatores constituirá o conjunto de restrições, da função-objetivo do problema a ser resolvido. Os métodos das funções de penalidade transformam o problema da minimização com restrições em uma série de outros, sem restrições e cuja solução obtida satisfará também as restrições do problema original.

Basicamente, os métodos das funções de penalidade (1,3,7,10,11,12) pesquisam o mínimo de um problema de programação não-linear sujeito a restrições de igualdade, desigualdade, ou a ambas, simultaneamente. A nova função-objetivo

penalizada é uma função à qual foi aumentada a soma de todas as restrições, cada uma pesada com um coeficiente  $r$  tal que

$$P(x,R) = f(x) + R \sum_{i=1}^m p_i(x), \quad i=1, \dots, m \quad (2.10)$$

O fator  $p_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m$ , deriva das condições de igualdade e/ou desigualdade existentes no problema original. Ao se pesquisar o mínimo de  $P(x,R)$ , toma-se  $R$  sempre positivo ( $R > 0$ ). É necessário precisar o peso inicial  $R$ , as condições sob as quais deve ser alterado e os critérios de parada dessas alterações.

Na reformulação de um problema de programação não-linear usando funções de penalidade, devem-se considerar dois casos distintos. O primeiro, proposto por Courant (1943), focaliza os métodos de funções de penalização exteriores, os quais não permitem que os pontos  $x_i$  se distanciem da região de pontos viáveis. O segundo envolve métodos de função penalizada interior. Da combinação desses dois métodos, surge o método de função de penalidade misto.

### 2.3.1 - Função de Penalidade Exterior

Um método de função de penalidade exterior considera inicialmente o caso especial da função penalizada (1,7):

$$p(x) = \sum_{i=1}^m \{\min[0, g_i(x)]\}^2 \quad (2.11)$$

onde  $p(x) = 0$  se e só se  $x$  estiver contido na região de soluções viáveis. Para um certo coeficiente  $R > 0$ , a função  $(1/R)p(x)$  fornece uma aproximação de  $P(x,R)$ , à medida que  $R \rightarrow 0$  (fig.2.4). A função  $p(x)$ , como definida pela equação (2.11), se chama de função das perdas quadráticas. De modo geral,

$$P[x(R),R] = f(x) + (1/R)p(x) \quad (2.12)$$

e

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(x) + (1/R)p(x) \rightarrow f(x^*)$$

Uma vantagem dos métodos de funções de penalidade exterior é que o ponto inicial escolhido, mesmo fora do espaço de soluções viáveis, converge para  $x^*$ . Não só transformam um problema com restrições em outro, sem restrições, como eliminam restrições inaceitáveis por determinados algoritmos (10). A razão do nome exterior deve-se ao fato de os movimentos de  $x^*$  partirem

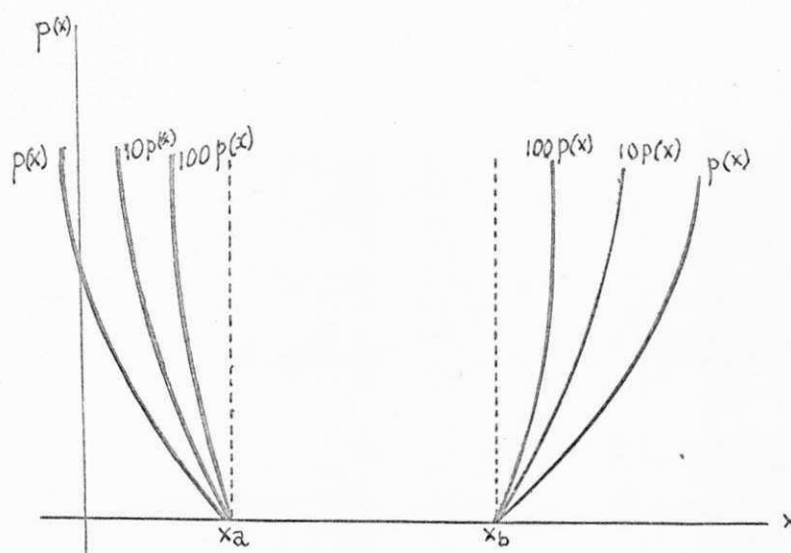


Figura 2.4 - Função de penalidade exterior  
 $P(x,R) = f(x) + (1/R)p(x)$ .

de fora da região de soluções viáveis para um ponto interior ou sobre o contorno dessa região.

### 2.3.2 - Função de Penalidade Interior

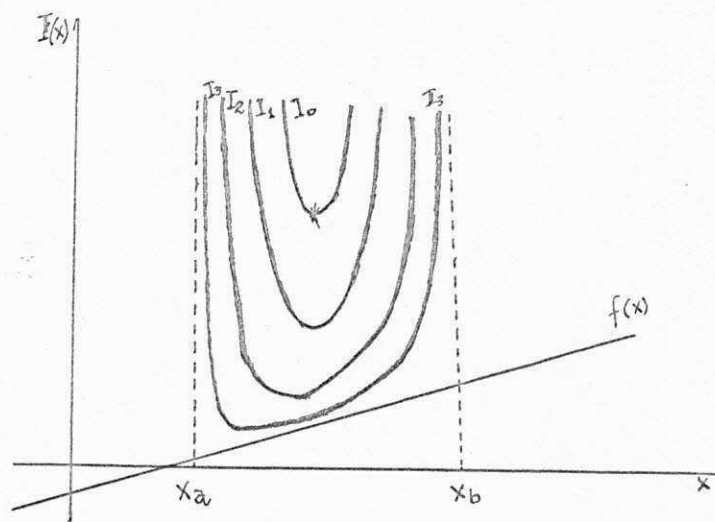
Os métodos de função de penalidade se aplicam a funções sujeitas a restrições de desigualdade (eq.1.2). Aproximam a função por uma sequência de funções  $RI(x)$ , na qual o fator  $R$  impede a violação das restrições, forçando  $f(x)$  a permanecer dentro da região viável. O fator  $I(x)$  é tal que



$$I(x) = \sum_i 1/g_i(x), \quad i=1, \dots, m \quad (2.13)$$

e  $x$  é um ponto para o qual  $g_i(x)$  é sempre positiva -  $g_i(x) > 0$ .

Figura 2.5 - Função de penalidade interior. As curvas  $I_i(x)$  denotam a aproximação de  $x$  de um ponto mínimo:  $x \rightarrow x_a$ .



Pela equação (2.13), quando  $g_i(x) \rightarrow 0$ ,  $I(x) \rightarrow \infty$ .  $I(x)$  se torna muito grande quando  $x$  se aproxima do contorno da região viável (fig. 2.5).

Considere-se a função

$$P[x(R), R] = f(x) + R_j^2 I(x), \quad j=1, 2, \dots \quad (2.14)$$

em que  $I(x)$  é dada pela equação (2.13). O problema de determinar um mínimo local, sem restrições, para  $P(x(R), R)$ , dentro de uma região viável, em que as restrições são estritamente satisfeitas ( $g_i(x) > 0$ ), é realizado visto que quando  $R \rightarrow 0$  a expressão

$$f(x) + R_j^2 I(x) \rightarrow f(x^*)$$

ou seja

$$\min_x f(x) = \lim_{R \rightarrow 0} [f(x) + R_j^2 I(x)] = f(x^*) \quad (2.15)$$

em que  $x^*$  é o ponto ótimo procurado e  $R_j$  é uma sequência de valores de  $R$ ,  $R > 0$ , estritamente decrescente. Nesse tipo de pes

quiza, o vetor inicial deverá partir de algum ponto dentro da região das soluções viáveis de  $f(x)$ .

### 2.3.3 - Métodos Mistos de Funções de Penalidade

Para problemas com restrições de igualdade, os métodos de funções de penalidade interiores não são aplicáveis, porque não há um interior para a região de soluções viáveis (10). Quando as condições do problema impõem que certas restrições sejam satisfeitas continuamente, a utilização de um método misto garante melhor convergência. Algumas restrições são satisfeitas ao longo dos cálculos do valor de  $f(x)$ . Outras serão apenas quando a solução ótima for alcançada (3). A função de penalidade mista se define a partir das anteriores, como

$$P(x(R_j), R_j) = f(x) + R_j I(x^j) + (1/R_j) p(x^j) \quad (2.16)$$

Quando  $j \rightarrow \infty$ , pelas condições de convergência,  $R \rightarrow 0$  e, pelas equações (2.12 e 2.15), conclui-se que

$$\begin{aligned} R_j I(x) &\rightarrow 0 \\ (1/R_j) p(x^j) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$P(x(R_j), R_j) \rightarrow f(x^*)$$

Utilizando-se tanto fatores de penalidade internos como externos, pode-se obter a função penalizada

$$F[x(R, S), R, S] = f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{(g_i(x) + S_i)^2}{R_i} \quad (2.17)$$

Os termos  $R_i$  e  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são constantes em cada etapa da minimização sequencial.  $x^j(R^j, S^j)$ , sendo um ponto de míni-

mo de  $f(x(R,S),R,S)$ , minimiza  $f(x)$  sujeita a  $g_i(x) = g_i(x^j(R^j, S^j))$ , cobrindo todas as restrições de igualdade e as de desigualdade violadas. Na figura 2.6, apresenta-se um esquema de aplicação do algoritmo composto.

#### 2.3.4 - Verificação Prática do Algoritmo

O problema-teste usado para verificar o algoritmo apresentado na secção 2.3.3, acha-se definido no Apêndice III. A escolha desse problema como problema de teste se deveu ao fato de já se lhe conhecer a solução ótima obtida em computador IBM 360/65, por aplicação do algoritmo composto. Os resultados foram obtidos variando-se os fatores de penalidade  $R_i$  e  $S_i$ , no decurso de processo de minimização (ver gráficos, fig. 2.9a,b,c,d e 4.3a,b,c,d).

Os fatores de penalidade  $R_i$  e  $S_i$  atuam sobre uma soma de variáveis, em vez de sobre cada variável individual, forçando os valores dessas variáveis a se conservarem dentro dos limites ou a oscilarem em torno de um desses limites. As modificações sobre  $R_i$  e  $S_i$  são tais que, após um ciclo de iterações para minimizar  $f(x)$ , as restrições  $g_i(x)$  ficam mais satisfeitas. As variações de  $S_i$ , de uma iteração  $j$  para outra  $j+1$ , ocorrem segundo a expressão

$$S_i^{j+1} = S_i^j + g_i \quad (2.18)$$

com  $g_i = \max_i |g_i|$ . Acompanhando-se o fluxograma (fig. 2.7a,b,c) percebe-se que o objetivo é levar os termos  $g_i[x^j(R^j, S^j)]$  a zero, com certo grau de precisão, utilizando a equação (2.18). O processo de minimização é iniciado com os termos  $S_i$  iguais a zero. Os termos  $R_i$  são tais que, de início,  $g_i/R_i$  têm a mesma ordem de grandeza. Quando termina um ciclo iterativo de minimização de  $f(x)$ , o programa pesquisa o valor absoluto de cada

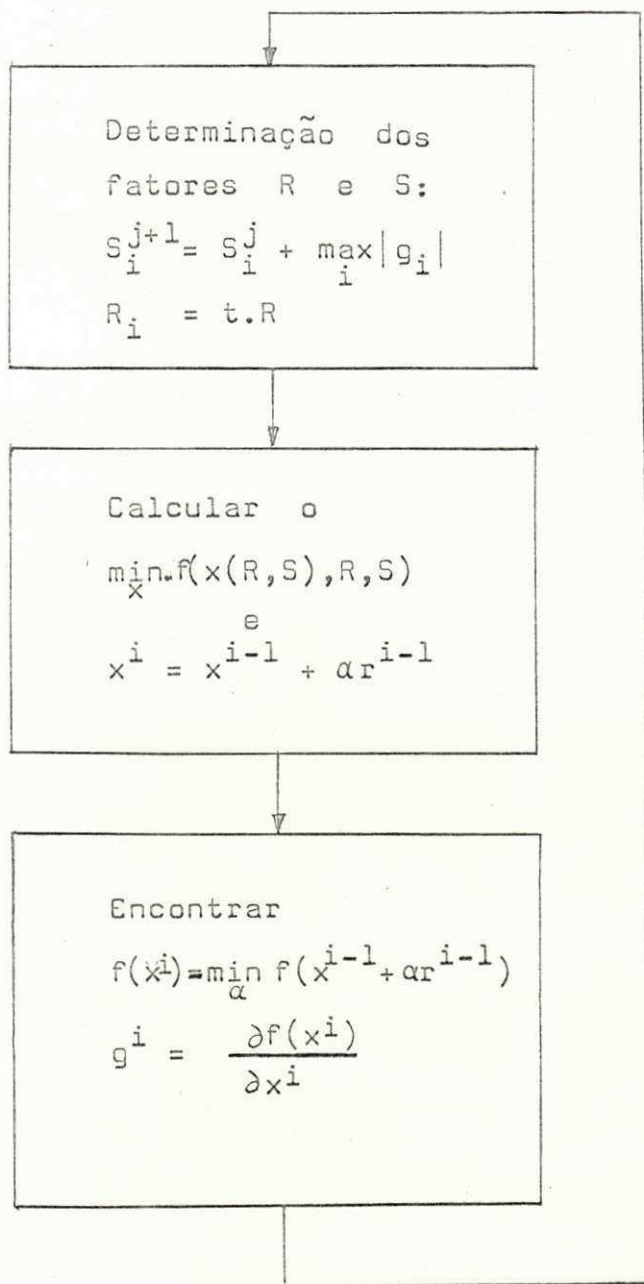


Figura 2.6 - Algoritmo composto, usado na determinação do mínimo sem restrições de uma função  $f(x)$ , com restrições.



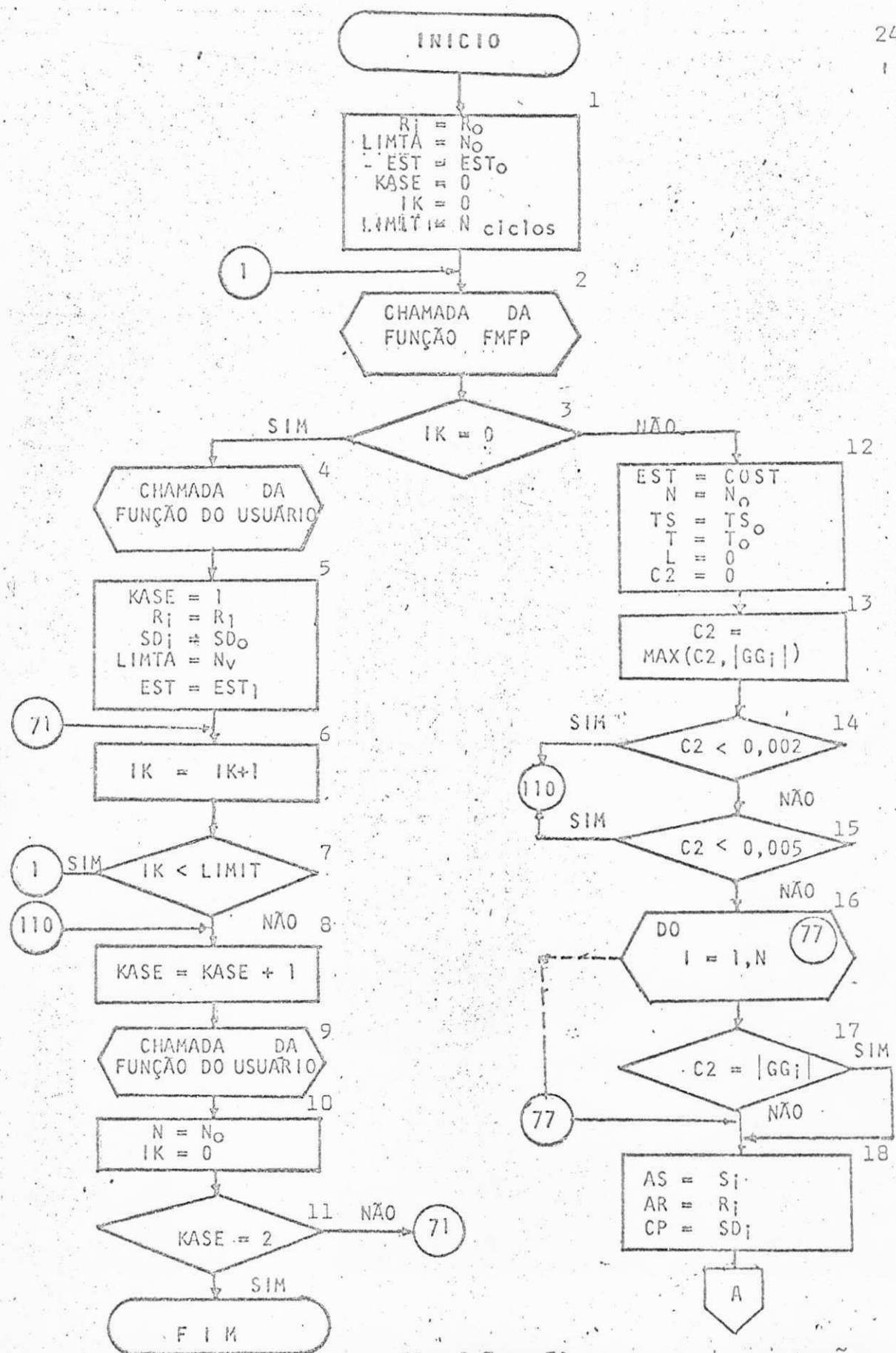


Fig.2.7 a - Fluxograma de variação, das constantes de penalidade

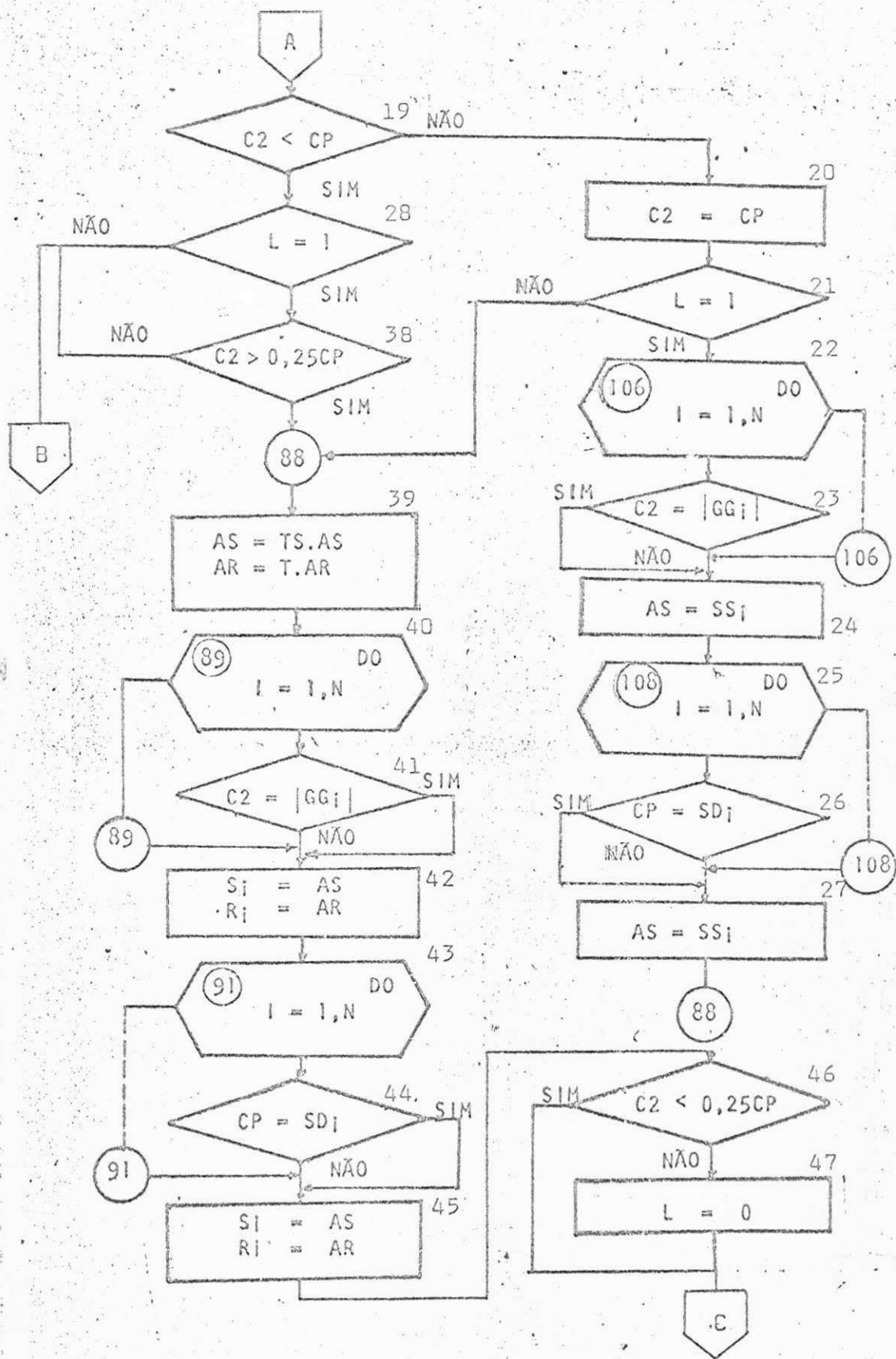


Fig. 2.7b - Fluxograma de variação das constantes de penalidade

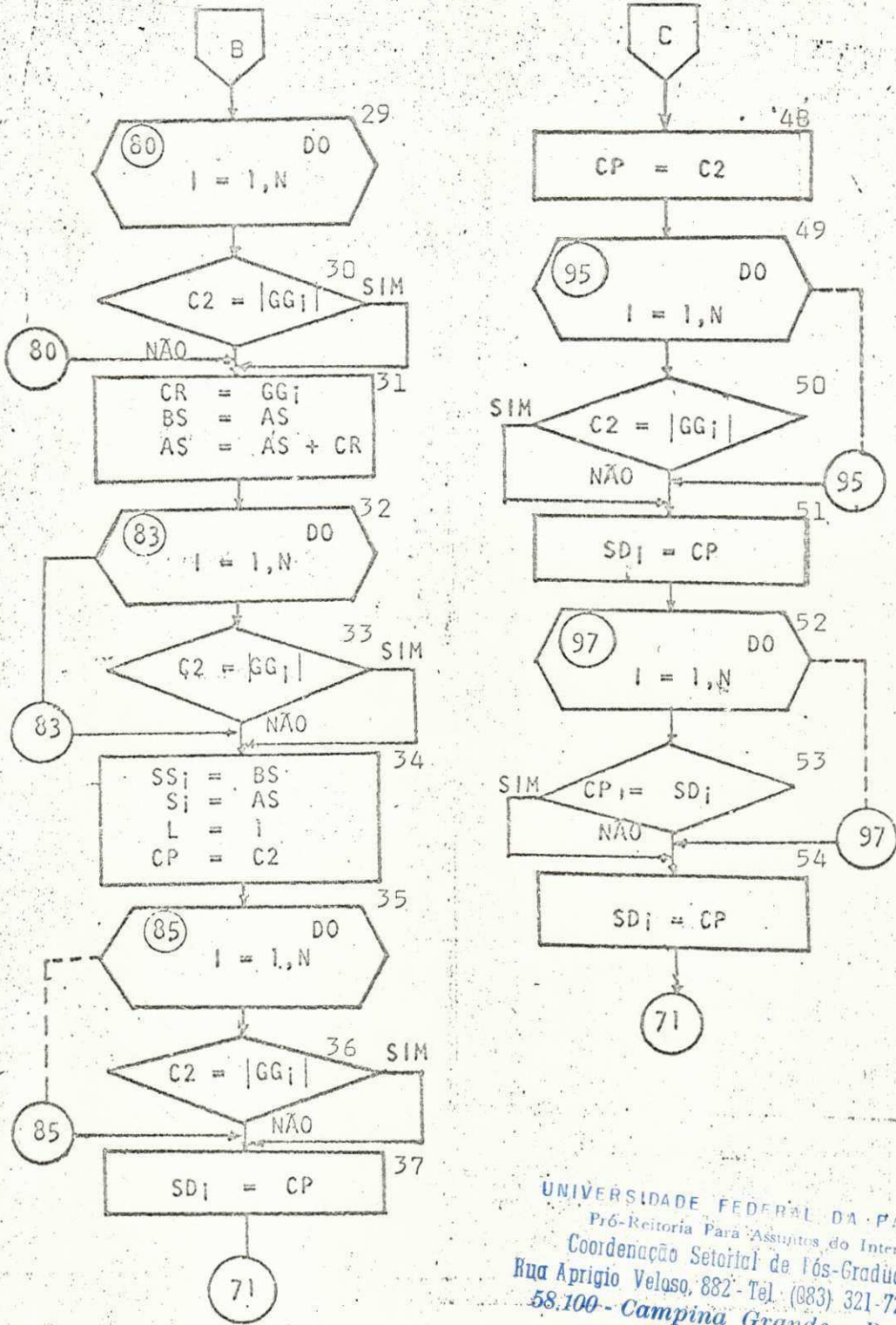


Fig. 2.7c - Fluxograma de variação das constantes de penalidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel. (083) 321-7222-R 355  
 58.100 - Campina Grande - Paraíba



cada componente  $g_i[x^j(R^j, S^j)]$  e toma o máximo desses valores para obter novas constantes  $R^j$  e  $S^j$ . Nas iterações que seguem, os termos  $S_i$  serão alterados (eq. 2.18) ou pela equação

$$S_i = t.S_i$$

na qual  $t$  é uma constante escolhida em função do problema que se está resolvendo. Também os termos  $R_i$  são alterados, conforme a equação

$$R_i = t.R_i \quad (2.19)$$

Os resultados que seguem, demonstram o uso dos fatores de penalidade  $R_i$  e  $S_i$ .

a) Para valores de  $R_i$  iniciais no intervalo  $(10^{-5}, 10^{-7})$ , dependendo da solução viável, os resultados obtidos na minimização de  $f(x)$ , em três ciclos sucessivos de iteração, foram (tab. 2.1):

Tabela 2.1

Ciclo	$f(x)$
1	725,83
2	725,99
3	727,76

Os resultados da tabela 2.1 mostram que o ótimo  $f(x)$  após cada minimização sequencial aumentou. Isto se deve ao fato de a equação (2.17) minimizar seqüências de funções nas quais

$$\text{Min}_x F[x(R, S), R, S] \triangleq \text{Min}_x \left[ f(x) + \frac{(g_i(x) + S_i)^2}{R_i} \right] \quad (2.20)$$



$$\text{Min.}_x F[x(R,S), R, S] \stackrel{A}{=} \text{Min.}_x \left[ f(x) + \frac{|g_1(x) + S_1|}{R_1} + \dots + \frac{|g_m(x) + S_m|^2}{R_m} \right] \quad (2.21)$$

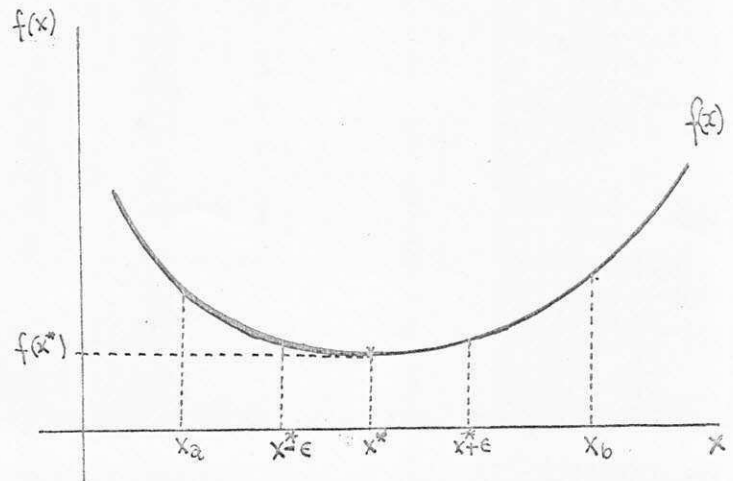
$$\begin{aligned} &= \text{Min.}_x \left[ f(x) + f_1(x, R, S) + \dots + f_m(x, R, S) \right] \\ &= f(x^*) + \lim_{R \rightarrow 0} [f_1(x, R, S) + \dots] \\ &= f(x^*) + 0 \quad (2.22) \end{aligned}$$

Entretanto, o que se estabelece pela equação (2.17) é que o mínimo  $f(x^*)$ , de  $f(x)$ , ocorre no mesmo espaço de soluções, porém a função transformada e a função original não serão necessariamente iguais. Portanto, conclui-se que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ f(x) + \frac{|g_i(x) + S_i|^2}{R_i} \right\} \rightarrow f(x^*) \pm \epsilon \quad (2.23)$$

também é uma solução ótima de  $f(x^*)$ , para diferente tolerância. A figura 2.8 mostra como se comporta essa função, quando se pesquisa o ponto mínimo por minimização sequencial, usando funções penalizadas (eq. 2.20 a 2.23).

Figura 2.8 - Gráfico de uma função  $f(x)$  mostrando a região de soluções viáveis - intervalo  $(x_a, x_b)$  e o ponto mínimo  $x^*$ . O ponto  $x^*$  é solução ótima de  $f(x)$ , como também o são  $x^* \pm \epsilon$ , nas vizinhanças de  $x^*$ .



Durante o primeiro ciclo de iterações,  $S_i = 0$ . Antes de iniciar o segundo ciclo, o programa percorre o vetor  $g_i(x)$  a fim de localizar o  $g_i(x)$  máximo. Na posição  $i = 25$ ,  $g_{25} = 0,03534$ . Então, pela equação (2.18), o valor retornado para o vetor  $S_i$  será:

$$S_{25}^1 = S_{25}^0 + g_{25} = 0 + 0,03534 = 0,03534$$

Ao final do segundo ciclo,  $g_i(x)$  máximo é calculado de maneira idêntica. Novamente,  $g_i(x)$  máximo é  $g_{25}$  e, portanto,

$$S_{25}^2 = S_{25}^1 + g_{25} = 0,03534 + 0,03052 = 0,06586$$

As variações de  $R_i$  em todas as minimizações obedecem à equação (2.19), com o valor da constante  $t = 10^{-2}$ .

Tabela 2.2

Ciclo	$f(x^*)$
1	717,90
2	705,23
3	705,71

b) Utilizando novos fatores iniciais  $R_i$ , no intervalo  $(10^{-3}, 10^{-5})$ , obtem-se como resultado os dados constantes da tabela 2.2. O valor de  $S_i$  inicial foi zero. No segundo ciclo, obteve-se  $S_{25}^1 = 0,02747$ ; e para o terceiro ciclo,  $S_{19}^2 = 0,02134$  e  $S_{25}^2 = 0,02747$ .

c) Mudando o objetivo de minimização e usando outra função  $f(x)$ , para os mesmos dados de entrada e fatores  $R_i$  no intervalo  $(10^{-3}, 10^{-7})$  os resultados obtidos foram (Tab.2.3):

Ciclo	$f(x^*)$
1	19,53
2	19,37
3	19,41

Novamente  $S_i = 0$ , no primeiro ciclo; no segundo, tem-se, para  $i = 25$ ,  $S_{25}^1 = S_{25}^0 + \max_i |g_i| = 0 + 0,05128 = 0,05128$ . No terceiro,  $S_i^2 = S_{25}^2 = S_{25}^1 + g_{25} = 0,05128 + 0,03742 = 0,08870$ . Para melhor observar como varia  $S_i$  em determinada iteração  $j$ , vejam-se os resultados obtidos para outro conjunto de dados de entrada, no mesmo intervalo de variação de  $R_i$  (Tab. 2.4). Após o segundo ciclo, a variação de  $S_i$  (eq. 2.18) foi  $S_{25}^1 = 0,04846$  e, no terceiro,  $S_{25}^2 = 0,04846 + 0,04459 = 0,09305$ .

Os resultados constantes das tabelas 2.1 a 2.4 ilustram os ciclos de convergência para dois tipos de função-objetivo não-linear, sujeitos às mesmas restrições. É importante a análise dos parâmetros  $R$  e  $S$ , e de sua influência sobre a convergência. O resultado ótimo pode ser afetado pela tolerância, como na tabela 2.1. Observa-se que o ponto de ótimo da função aumentou, com relação ao ótimo encontrado no primeiro ciclo da minimização sequencial. A discussão analítica do fato mostra que a solução durante os dois primeiros ciclos não é completa, por causa da tolerância demasiado grande. Os ciclos iterativos resolveram apenas as equações. A tabela 2.2 apresenta três ciclos subsequentes de convergência, os quais conduzem à solução do problema de otimização. No caso das tabelas 2.3 e 2.4, a convergência é alcançada dentro dos limi-

tes de tolerância desejados. Uma vez que a função-objetivo é numericamente pequena, comparada às restrições penalizadas, encontram-se algumas dificuldades na convergência.

Tabela 2.4

Ciclo	$f(x^*)$
1	19,73
2	19,68
3	19,64

O algoritmo de Fletcher-Powell garante a convergência de uma função  $f(x)$  quadrática em  $n$  passos. Os resultados da minimização de  $f(x)$ , apresentados para diferentes conjuntos de valores de  $R_i$  e  $S_i$ , foram obtidos sequencialmente. A variação dos termos  $R_i$ , passando estes do intervalo  $(10^{-5}, 10^{-7})$  para o intervalo  $(10^{-3}, 10^{-7})$  provocou um ligeiro decréscimo no ponto ótimo calculado. Observa-se, então, que esse aumento de  $10^2$  nos termos  $R_i$  causou um decréscimo em  $f(x^*)$  da ordem de 1,09% no primeiro ciclo iterativo e de 3,03%, no terceiro. Essa oscilação do mínimo de  $f(x)$  denota um processo estável, praticamente. O mesmo conjunto de dados iniciais, para uma nova função-objetivo leva essa nova função a uma convergência estável (Tabelas 2.3 e 2.4). Daí a conclusão de que, para os intervalos de  $R_i$  considerados, o processo de minimização de  $f(x)$  é estável. Os gráficos (fig. 2.9a,b,c,d) mostram a convergência de  $f(x)$  para vários fatores de penalidade.

No estudo da minimização de  $f(x)$  o programa u sou cerca de 11.494 palavras da memória do computador (IBM - 1130). Procedendo à minimização de nova função, foram aloca-



Fig.2.9 (c) Mesmas condições de (b)

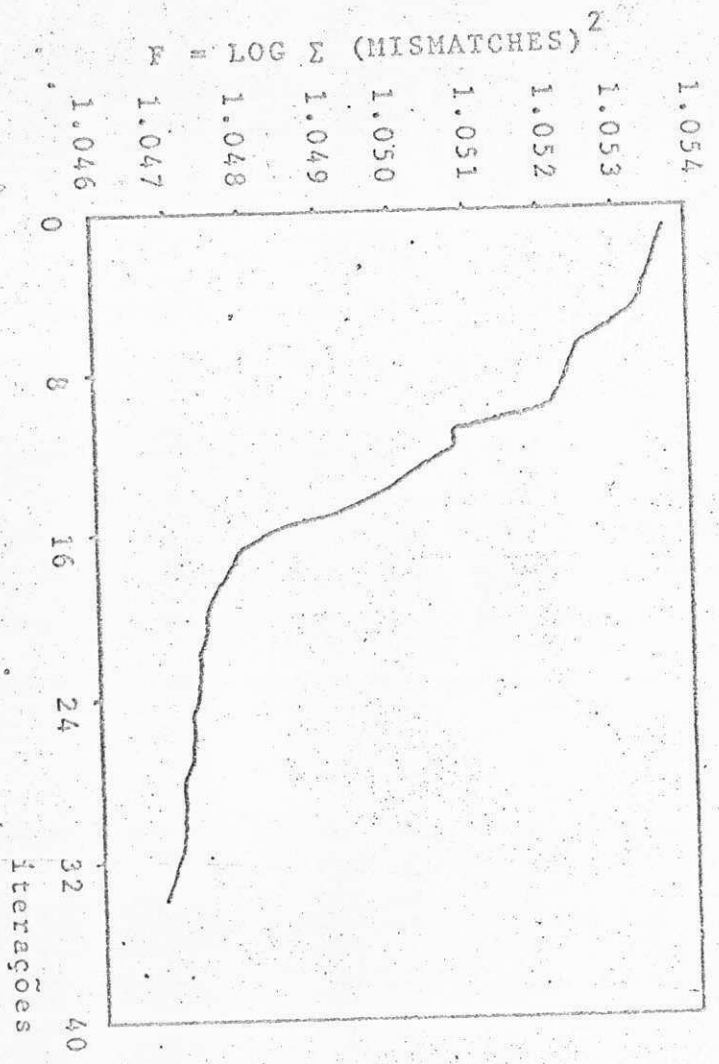
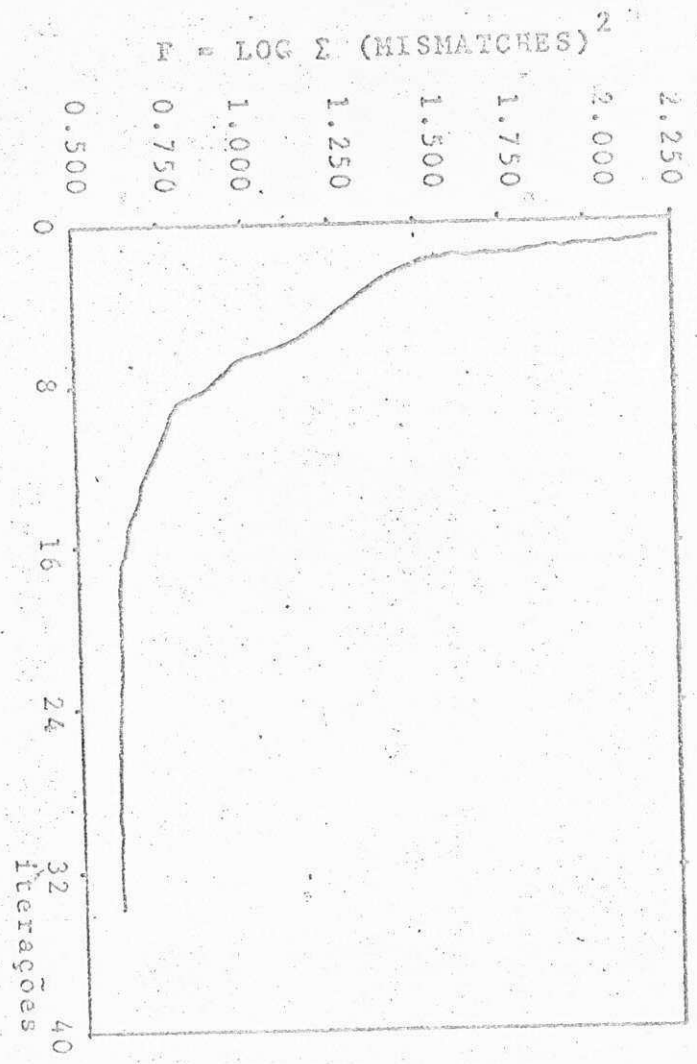


Fig.2.9 (d) Fator de penalidade inicial de  $10^{-3}$  a  $10^{-7}$

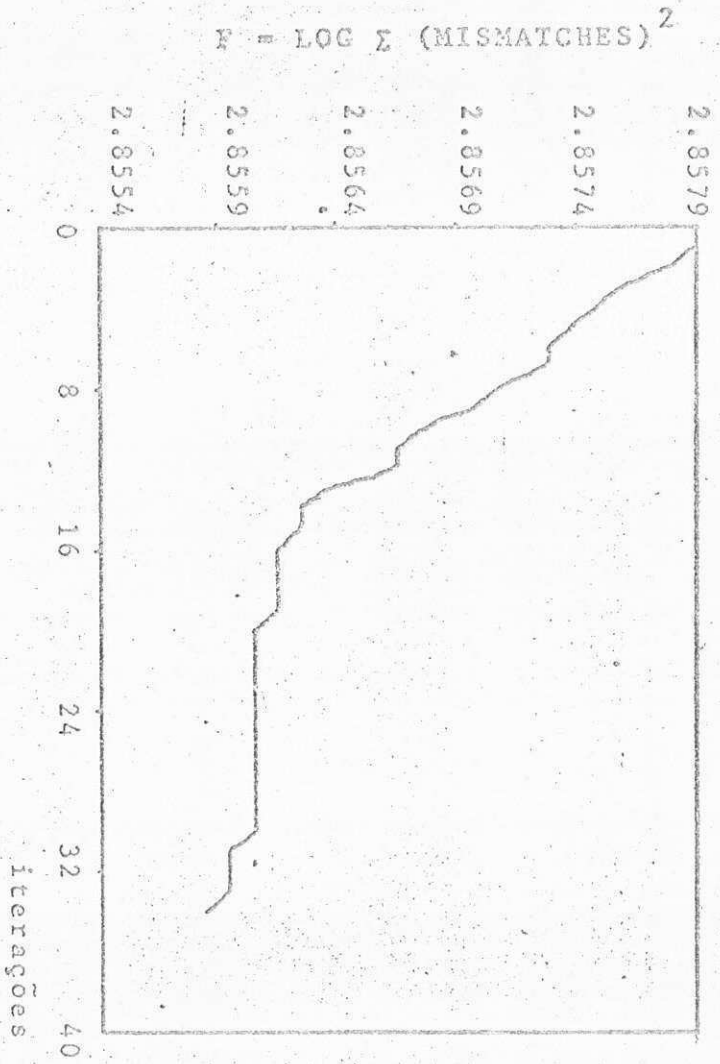


Fig.2.9 (a) Fator de penalidade inicial no intervalo  $10^{-3}$  -  $10^{-5}$ .

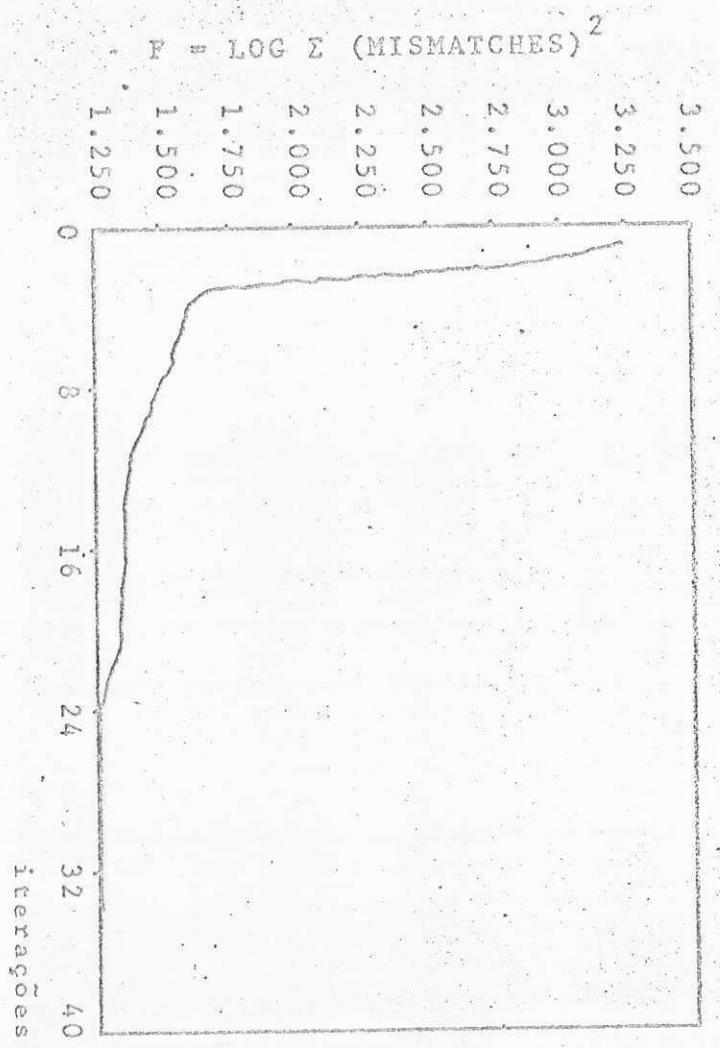


Fig.2.9 (b) Fator de penalidade inicial no intervalo  $10^{-3}$  a  $10^{-7}$ .

das 10.822 palavras. Esse espaço poderá ainda ser reduzido com um redimensionamento dos arrays para um tamanho mínimo.

O tempo médio de convergência registrado foi de cerca de 10 minutos por ciclo iterativo, ou 20 segundos por iteração. O programa, para o problema proposto, com 34 variáveis, demora aproximadamente 62 minutos em processamento.

Nesse capítulo, discutiu-se em detalhes o algoritmo de otimização direta, após diferenciá-la das técnicas indiretas de otimização. A otimização da função sem restrições utilizando uma combinação de fatores de penalidade interiores e exteriores, conduz a melhores resultados. Pode-se concluir que, em vez de alterar um só fator de penalidade, após cada ciclo iterativo, uma mudança de vetor em  $R$  e  $S$  pode conduzir a um algoritmo eficiente. Demonstra-se a influência do fator de penalidade sobre a convergência e recomenda-se medida corretiva para determinação do valor ótimo do fator de penalidade em função do vetor inicial e da solução viável.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

### 3 - ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO

No início deste capítulo aborda-se a disponibilidade de memória do computador IBM 1130 e os recursos que o sistema operacional oferece para solução de grandes problemas de otimização. Discute-se ainda o aumento do tempo de processamento e introduz-se o algoritmo de decomposição, como técnica eficiente de solução de problemas que demandam grande espaço de memória.

#### 3.1 - Conversão de Algoritmo para o IBM-1130 (2,19,20)

A memória do computador IBM-1130 utilizado tem configuração de 16K ou 16.384 palavras de 16 bits cada. Além disso, o usuário pode dispor de parte do disco, cuja capacidade total é de 512.000. A armazenagem em disco é feita de modo aleatório, os dados e/ou instruções sendo gravados nas duas faces. Os recursos do disco possibilitam a execução de programas extensos considerados quanto ao número de declarações.

No disco reside também o sistema Monitor, ocupando cerca de 25% da área total. Trata-se de uma coleção de programas fornecidos pelo fabricante, para controlar as tarefas de compilação, montagem, armazenagem, recuperação de dados



supridos pelo usuário, e execução de programas. Divide a superfície do disco em (i) área do sistema, onde se situam os programas fornecidos pelo fabricante; (ii) área fixa (FX), para programas e dados alocados com endereçamento fixo, para maior proteção; (iii) área do usuário (UA), para dados e/ou programas sem endereçamento fixo e (iv) área de trabalho (WS), para montagem de programas a serem executados. A área do sistema contém o supervisor, cuja função é processar os registros de controle do Monitor e efetuar a gerência geral das chamadas do compilador, do DUP e do loader; o programa de utilidade do disco (DUP), que armazena e recupera programas definidos ou destrói áreas de armazenagem de dados; os compiladores (FORTRAN, RPG, COBOL); o montador (ASM); a biblioteca de subprogramas fornecidos pelo fabricante; o loader e as macro-facilidades. O loader carrega o programa principal na memória interna, já compilado, juntamente com os subprogramas do sistema necessários para execução e os do usuário, previamente armazenados na área do usuário.

A maior ou menor quantidade de programas / subprogramas na área do usuário reduz ou aumenta na mesma proporção a área de trabalho. Essa redução poderá chegar ao ponto de, durante uma operação de compilação ou na execução de uma operação do loader, não ser possível continuar por falta de espaço; uma mensagem específica é emitida e a compilação é interrompida. O mesmo acontece quando o espaço de memória requerido pelo programa-objeto e subprogramas é superior à capacidade da memória. Consequentemente, não se deve fazer referência à memória disponível do computador, em termos absolutos. Essa disponibilidade dependerá dos subprogramas carregados na memória juntamente com o programa-objeto.

O programa-fonte usado nesta tese, composto de programa principal e duas subrotinas, achava-se estruturado co

mo na figura 3.1 abaixo.

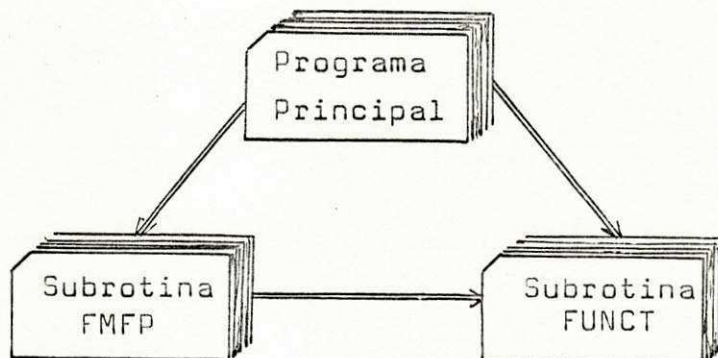


Figura 3.1 - Interligação do Programa Principal e Subrotinas.

As áreas dos vetores e matrizes dimensionados somaram 3050 posições, representando 6100 palavras da memória. Destas, 6 foram alocadas em área **COMMON**, partilhada pelo programa principal e subprogramas. Após a execução, os resultados obtidos foram os constantes da tabela 3.1 abaixo.

Tabela 3.1

	COMMON	VARIABLES	PROGRAM	TOTAL
FUNCT	-	3.598	4.712	8.310
FMFP	-	1.450	1.562	3.012
PP (1)	-	1.282	960	2.242
	6	-	-	6
TOTAL	6	6.330	7.234	13.570

(1) Programa Principal

Pela mensagem emitida (R 40 0426(HEX) ADDITIONAL CORE REQUIRD), provavelmente o programa teria sido executado se na memória existissem mais 1.062 palavras disponíveis. O programa requereu



13.570 das 16.384 palavras da memória, cerca de 83% da memória total. Para execução são necessários 52 subprogramas, entre as subrotinas do usuário e as do fabricante. Desse modo, após carregados na memória esses 52 subprogramas, poder-se-ia dizer que a disponibilidade de memória, nesse momento, era de 12.508 palavras.

A capacidade de armazenagem em disco torna o 1130 bastante flexível, para execução de programas demasiado extensos para serem carregados na memória interna de uma só vez. O usuário poderá optar pela modulação em  $n$  pequenos blocos, ligando-os um ao outro através da declaração CALL LINK (NOME), e armazenando-os separadamente na área de usuário do disco. NOME identifica o programa que está sendo chamado da área do usuário ou da área fixa. Na fase de execução, o primeiro programa é carregado e processado. Ao atingir a declaração CALL LINK, outro programa é carregado, destruindo o anterior. Os dados são transmitidos via área COMMON. O sistema operacional do 1130 também dispõe de overlays especiais - **SOCALS** (system-overlays-to-be-loaded-on-call) - que realizam automaticamente a superposição de algumas funções e subprogramas da biblioteca do sistema, no caso de grandes programas. Se, ainda assim, o programa não pode ser processado, o usuário poderá usar o **LOCAL**. Este registro identifica subprogramas e/ou subrotinas que deverão ser carregados na memória interna somente quando chamados pelo programa principal. O **LOCAL** (load-on-call) é um registro de controle do supervisor e os programas nele especificados deverão estar armazenados no disco. O formato geral do LOCAL é:

LOCALMAIN, SUB1, SUB2, ..., SUBn

ou

LOCAL, SUB1, SUB2, ..., SUBn

e segue-se imediatamente ao // XEQ. MAIN identifica o programa principal e poderá ser omitido, quando este estiver armazenado na área de trabalho (WS), substituindo-o uma vírgula. Detalhes sobre a utilização correta dos controles LINK e LOCAL nas referências 2 e 20.

A interligação da figura (3.1) não permite a utilização da declaração CALL LINK. O programa principal chama a subrotina FMFP, a qual, antes de retornar os resultados, chama várias vezes a subrotina FUNCT. Nesse caso, o processamento não iria além da primeira chamada da subrotina FUNCT. A prática de *overlay*, a partir da estrutura apresentada, dispendo as subrotinas em LOCAL, violaria a primeira regra de utilização do controle LOCAL. Assim, partiu-se a subrotina FUNCT em dois blocos (fig. 3.2), considerando que o número de palavras de memória (8.310), excluída a área COMMON, representava ocupação de 66,5% da memória então disponível.

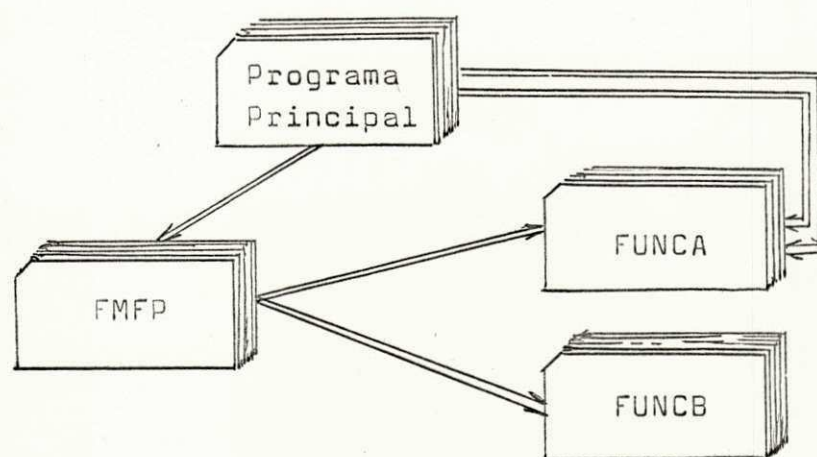


Figura 3.2 - Esquema de ligação do Programa, após partição da subrotina FUNCT em dois blocos A e B, para uso de *overlay*.



Após a compilação, obtivemos o resultado abaixo (tabela 3.2).

Tabela 3.2

FUNCT	VARIABLES	PROGRAM	TOTAL
FUNCA	1.086	2.532	3.618
FUNCB	94	2.892	2.986

Os blocos FUNCA e FUNCB foram colocados em LOCAL ( LOCAL, FUNCA, FUNCB). O programa foi rearranjado e a alocação de memória, para execução, reduzida para 10.828 palavras (tabela 3.3).

Tabela 3.3

	COMMON	VARIABLES	PROGRAM	TOTAL
FUNCA	-	1.086	2.538	3.618
FMFP	-	1.452	1.454	2.906
PP	-	28	1.060	1.088
	3.216	-	-	3.216
TOTAL	3.216	2.566	5.046	10.828

Ainda assim, não se obteve resultado. Programas em LOCAL são referidos ao programa principal (Main Line), ao passo que no exemplo citado (fig. 3.2) programas em LOCAL estão sendo chamados também via subrotina. Diante disso, a estrutura do programa original (fig. 3.3a) foi alterada, incluindo a subrotina FMFP no programa principal, mantendo a FUNCT dividida e conservando as partes em LOCAL (fig. 3.3b). Após compilar o programa na nova estruturação (fig. 3.3b), obteve-se a demanda de memória constante da tabela 3.4 abaixo.

Tabela 3.4

	COMMON	VARIABLES	PROGRAM	TOTAL
FUNCA	-	1.116	2.480	3.596
PP	-	2.262	2.464	4.726
	2.430	-	-	2.430
TOTAL	2.430	3.378	4.944	10.752

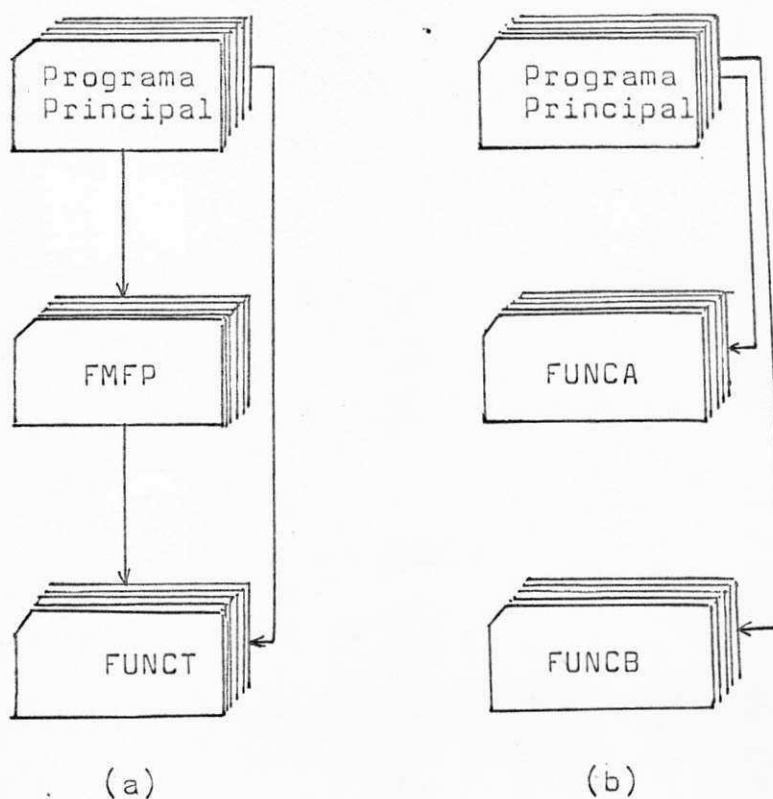


Figura 3.3 - (a) Estrutura original do programa; (b) Estrutura atual, com a subrotina FMFP incluída no Programa Principal e as subrotinas FUNCA e FUNCB em LOCAL (LOCAL, FUNCA, FUNCB).

O programa foi processado de acordo com o esquema proposto na figura 3.3b e os resultados obtidos foram ótimos. O tempo total de processamento foi 62 minutos, dos quais 3 para compilar a subrotina FUNCA, 4 para FUNCB e cerca de 4,5 minutos para o programa principal; a listagem do programa acresce em mais uns 5 minutos o tempo total de compilação (cerca de 17 minutos). O problema, da maneira estruturada (fig. 3.3b) realiza quatro ciclos iterativos, o primeiro com 26 variáveis e os demais com 34. Tempo médio por iteração: 20 segundos.

O programa focalizado, em sua versão original, foi processado em computador IBM-360/65, com compilador WATFIV, versão 1, nível 2. A tabela 3.5 mostra os dados estatísticos sobre utilização de memória e tempo de execução.

Tabela 3.5

Utilização de Memória	Bytes
Memória Utilizada	65.656
área de código-objeto	32.576
área de arrays	33.080
Área Disponível	74.846

Tempo de Processamento	Segundos
compilação	17,08
execução	495,21
Tempo Total	513 (+)

(+) 8 min 33 seg.

### 3.2 - Tempo de Processamento

O tempo é uma preocupação constante do usuário de computador. Durante a execução de um programa, deverá levar sempre em conta que os recursos citados na seção 3.1 possibilitam a execução de programa porém aumentam o tempo de processamento. Programas ligados por LINK são montados cada vez que se atinge uma declaração CALL LINK(NOME), e o tempo das operações de montagem é adicionado ao tempo total. A utilização de LOCAL acarreta um acréscimo de tempo de processamento cada vez que ocorre a chamada de um subprograma especificado em LOCAL, cuja conexão com o programa principal é feita pelo subprograma FLIPPER. A utilização de certas técnicas elementares de programação concorre para reduzir o tempo de processamento. Dentre elas, recomenda-se sempre multiplicar por 0.2, em vez de dividir por 5; efetuar produto, em lugar de elevar ao quadrado; evitar o cálculo de expressões dentro do domínio de uma declaração DO, quando não requerido pela lógica do programa. Para o caso particular da minimização do custo de operação de sistema de potência, a ser estudado no capítulo 4, o tempo de processamento aumenta rapidamente com o aumento do número de variáveis. Desse modo, para 26 variáveis, foram realizadas 23 iterações, registrando-se 17 seg. por iteração. Para 34 variáveis, o tempo médio por iteração foi de 27 segundos. Com 40 variáveis, foi registrado o tempo médio de cerca de 42 segundos por iteração. O gráfico (fig. 3.4) mostra o comportamento do tempo/iteração quando aumenta o número de variáveis.

### 3.3 - Algoritmo de Decomposição

No estudo de problemas práticos de minimização pelo método de Fletcher-Powell, observa-se que com o aumento do número de variáveis tem-se, como consequência (1):



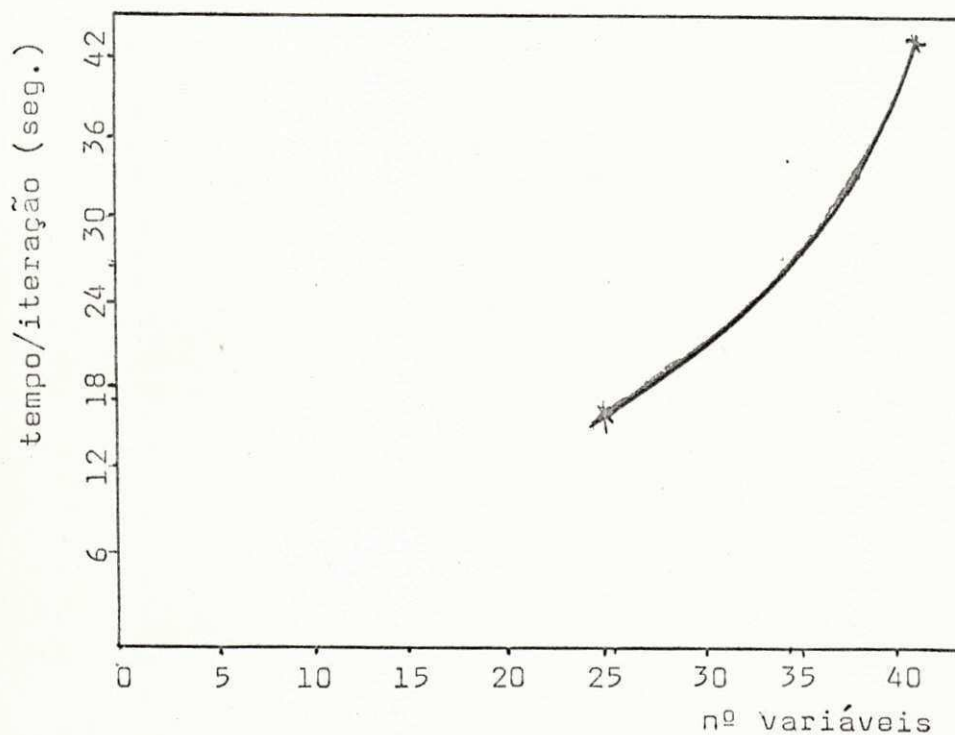


Figura 3.4 - Curva mostrando o aumento do tempo de processamento com relação ao número de variáveis.

- a) necessidade de mais memória disponível, pelo fato de a matriz H requerer  $n_V(n_V+7)/2$  posições de armazenagem de dados ( $n_V$ , número de variáveis);
- b) aumento do tempo de processamento;
- c) aumento considerável do esforço computacional, sempre que qualquer das variáveis do problema sem restrições viola qualquer das restrições iniciais; e, finalmente,
- d) para  $n = 100$ , o método não oferece vantagens (8).

O método de Fletcher-Powell é apropriado para fornecer a solução de funções sem restrições, com número de variáveis inferior a 100. Daí, a decomposição da função-objetivo do problema proposto transformá-lo em uma sequência de subproblemas, com as mesmas características do problema original, de modo que a solução obtida por partes conduz à solução procurada. Com essa transformação, realiza-se o cálculo parcial e sequencial do valor da função e do gradiente para cada variável ou combinação de variáveis. Matematicamente, tem-se uma função penalizada  $F(X,R,S)$  (eq. 2.17), na qual  $X$  é um vetor de  $p$  componentes  $(X^1, X^2, \dots, X^p)$ .

$$X = \begin{bmatrix} X^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \\ \vdots \\ X^p \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.1)$$

Assume-se que cada componente de  $X$  é um vetor  $n$ -dimensional. Nesse caso, cada termo  $X^k$  é completamente definido por um subvetor de  $n$  componentes:

$$\begin{bmatrix} X^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} X^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^k \end{bmatrix}, \quad k=1, \dots, p; \quad i=1, \dots, n$$

Deseja-se determinar o mínimo da função relativamente a um des-

ses subvetores componentes de  $X^k$ . Seja, pois,  $x_i^k$ ,  $k = 1, \dots, p$  e  $i = 1, \dots, n$ . Então

$$F_{\min}(X, R, S) = \text{Min}_X \sum_{k=1}^p F_k(X, R, S) \quad (3.3)$$

Aquí,  $X$  é uma ordenação  $p$ -dimensional, i.é., é o número de vetores componentes de  $X$ . Designando o  $k$ -ésimo vetor da ordenação  $X$ , por  $X^k$ , o número de subproblemas a considerar será dado por

$$F_{\min}(X, R, S) = \text{Min}_X \sum_{k=1}^p F_k(X, R, S) \\ = \sum_{k=1}^p \left| \text{Min}_{X^k} F_k(X^k, Y, R, S) \right| \quad (3.4)$$

Assim, se  $k$  é um subproblema e  $1 \leq k \leq p$ , a equação (3.4) dá o mínimo de  $F(X, R, S)$  através da minimização sequencial de no máximo  $p$  subproblemas. Para isso, procede-se à minimização de cada subproblema, obtendo-se separadamente o mínimo com relação a  $X^k$ ,  $1 \leq k \leq p$ , conservando-se constantes os demais componentes de  $X$ .  $Y$  é um subvetor cujos componentes são os termos de  $X$  que se mantêm constantes. Consequentemente, pela equação (3.1), tem-se

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \\ \vdots \\ X^p \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^k \\ Y^k \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} Y^k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{k-1} \\ X^{k+1} \\ \vdots \\ X^p \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Esse número de subproblemas aumenta consideravelmente quando se tomam as combinações dos componentes  $X^k$ , de  $X$ , formando subvetores com relação aos quais se deseja obter o mínimo de

$F(X,R,S)$ . A solução geral do problema é da forma:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{X^k} F(X,R,S) = & \text{Min}_{X^1} F_1(X^1, Y^1, R, S) + \\ & \text{Min}_{X^2} F_2(X^2, Y^2, R, S) + \dots + \\ & \text{Min}_{X^k} F_k(X^k, Y^k, R, S) + \dots + \\ & \text{Min}_{X^p} F_p(X^p, Y^p, R, S) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$1 \leq k \leq p$$

Uma vez que cada vetor-componente de  $X$  tem  $n$  variáveis (equação 3.2), cada subproblema (eq. 3.6) se reduz a um problema de minimização de  $n_s$  subvariáveis, cuja dimensão máxima é dada por  $n_s(n_s + 7)/2$ . A minimização de cada subproblema é um processo iterativo e, utilizando-se o método de Fletcher-Powell, o mínimo referente a cada variável  $X^k$  é obtido em no máximo  $n_s$  iterações, respectivamente. A decomposição reduz consideravelmente a demanda de memória e o tempo de processamento. A figura (3.5) mostra as etapas principais do algoritmo da decomposição.

O uso do algoritmo proposto (fig.3.5) permite obter o ótimo a partir da decomposição da função-objetivo. No caso específico da minimização de sistema de potência, a ser estudado no capítulo 4, procede-se à minimização da função-objetivo decomposta em subfunções, relativamente às variáveis  $P, Q, V, \theta$ , individualmente, ou a combinações dessas variáveis. A escolha da variável a ser otimizada é arbitrária. Entretanto, convencionou-se estabelecer uma chave cujas variações (1,2,3,4, por exemplo) indicarão com relação a que variável do sistema se está procedendo à otimização. A técnica oferece a vantagem de reduzir o esforço computacional no cômputo dos gradientes e



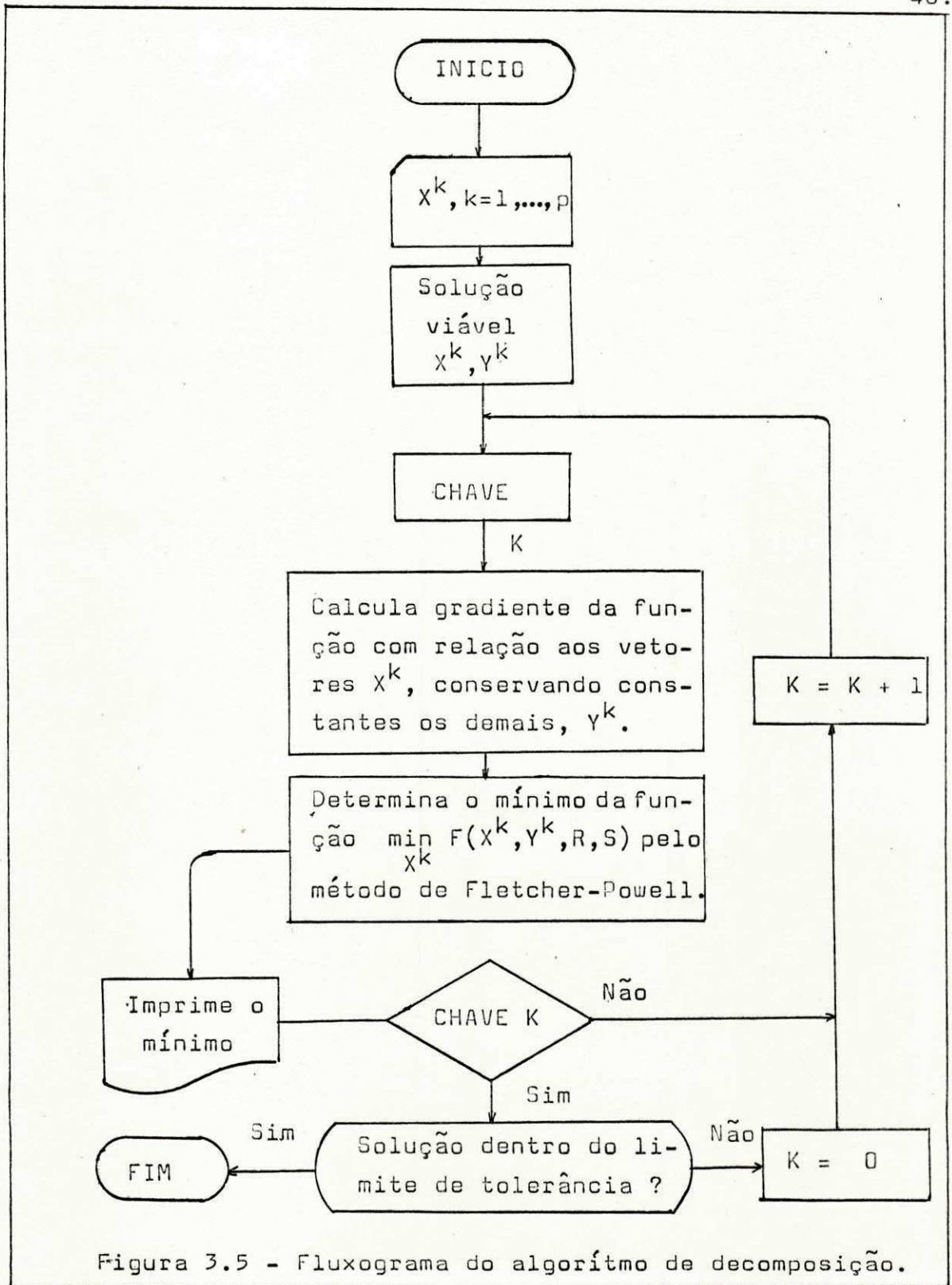


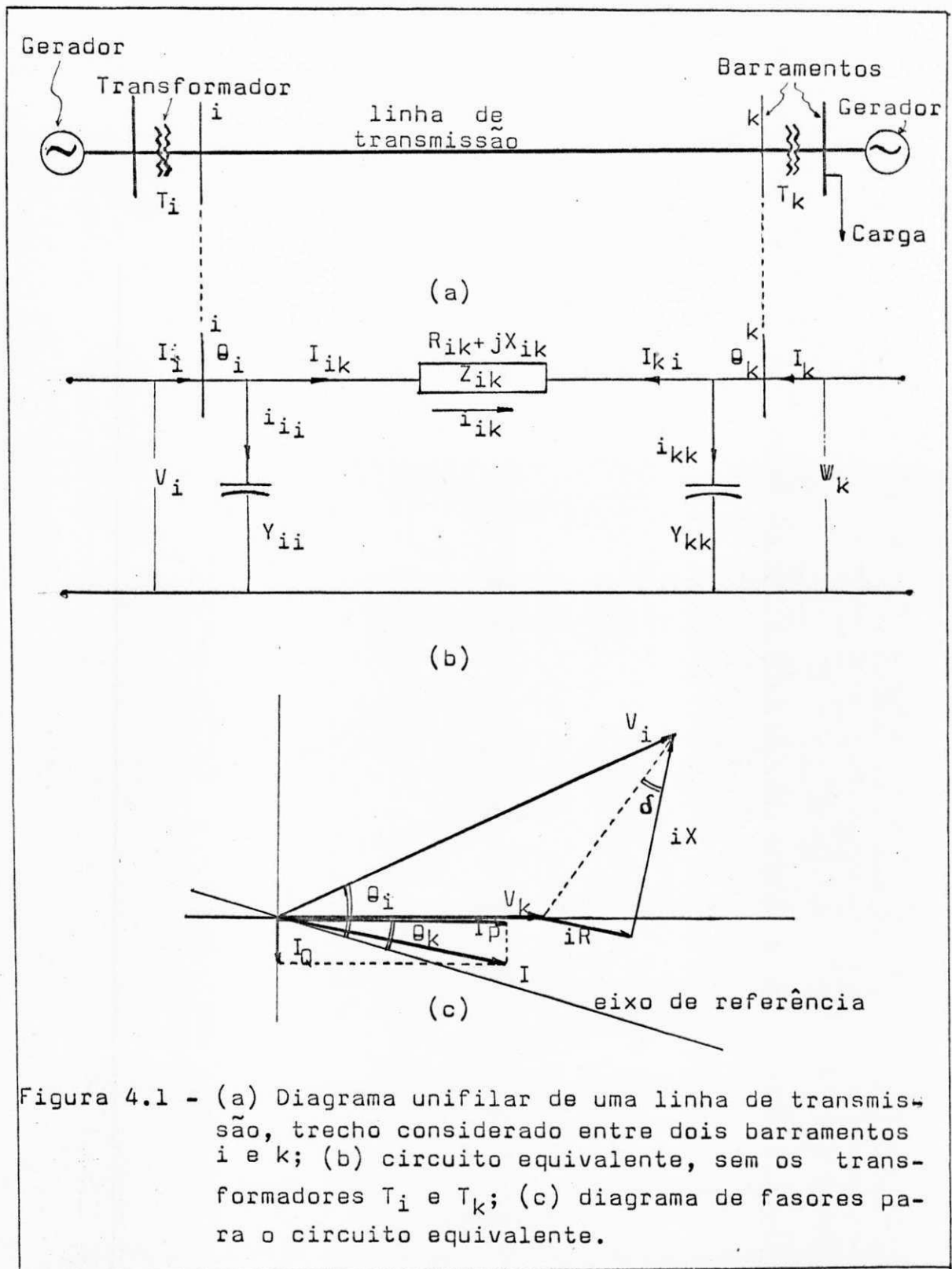
Figura 3.5 - Fluxograma do algoritmo de decomposição.

do valor da função. Testes realizados indicam também considerável redução do tempo de processamento.

As limitações de memória do computador IBM - 1130 e os recursos ao alcance do programador foram discutidos brevemente nesse capítulo. O algoritmo de decomposição foi, todavia, o principal objetivo, como técnica afim, para a solução de grandes problemas, utilizando computadores de pequeno porte.

#### 4 - APLICAÇÃO EM SISTEMA DE POTÊNCIA

As técnicas discutidas têm aplicação na otimização de alguns sistemas práticos não-lineares. Um aspecto importante são os sistemas físicos e sua representação por um modelo matemático conveniente para realização da otimização. As abordagens apresentadas nos capítulos anteriores são utilizadas na solução de problemas de operação ótima de sistema de potência. Dentre os objetivos visados pelo analista de sistema de potência, destaca-se o suprimento de cargas para atender a determinado nível de demanda. Pela escolha de uma configuração particular do sistema, ele prevê a demanda seja satisfeita de maneira econômica, e dentro de níveis ótimos. A otimização provê ferramentas poderosas, através das técnicas desenvolvidas nos capítulos 2 e 3. Este capítulo trata da otimização de um sistema de potência. De início, apresenta-se a configuração física do sistema, com as equações básicas, seguidas da construção da função-objetivo do problema proposto. Deseja-se minimizar o custo operacional, em função das potências real e reativa geradas, e as perdas em função da voltagem e do ângulo de fase. No primeiro enfoque, apresentam-se os resultados obtidos na verificação do problema-teste (Apêndice III). A de-





terminação das perdas mínimas é feita tanto para o problema-teste como para o modelo do sistema de alta tensão das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. (CEMIG). Finaliza-se com a análise dos resultados obtidos.

#### 4.1 - Configuração Física do Sistema e Equações Básicas

A geração e a transmissão de energia são em geral realizadas em bases trifásicas. Todavia, para se chegar a uma solução, é suficiente a representação de uma única fase equivalente. Considere-se um trecho de linha de transmissão (21), de uma rede de  $n$  barramentos, situado entre dois barramentos genéricos  $i$ , de geração ou de despacho de potência, e  $k$ , de recepção ou de consumo, ou de consumo e geração conjuntamente (fig.4.1a). O barramento de geração  $i$  é alimentado pelo gerador  $G$ , que produz uma potência  $P_i$ . Nele é também injetada uma potência reativa  $Q_i$  pelo gerador, sendo a potência gerada total  $P_i + jQ_i$  (fig. 4.1b). O barramento de recepção  $k$  é também barramento de consumo. Acha-se ligado ao de geração pela linha de transmissão, cujas características são resistência ( $R$ ), reatância ( $X$ ), em série, as quais dão origem à impedância ( $Z$ ) e às admitâncias ( $Y$ ). A admitância  $Y$  poderá ser capacitiva ou indutiva. As voltagens nos dois barramentos são  $V_i$  e  $V_k$ , respectivamente. O fluxo de potência líquida entre os barramentos  $ik$ , desprezadas as perdas na linha, é definido como a diferença entre a potência gerada em  $i$  e a potência consumida em  $k$ . Quando em regime de operação, o sistema deve manter o equilíbrio entre a potência real gerada e a potência real consumida mais as perdas. Também se espera que haja equilíbrio entre as potências reativas geradas e as cargas e perdas reativas. A linha de transmissão serve de transporte para que a potência gerada no barramento  $i$  chegue ao barramento  $k$ , para o consumo.

Os parâmetros de um barramento genérico  $i$  são (22):

$P_i$  - potência real gerada;

$Q_i$  - potência reativa gerada;

$C_i$  - consumo de potência real local;

$D_i$  - consumo de potência reativa local;

$I_i = P_i - C_i$  - potência ativa líquida injetada na linha;

$K_i = Q_i - D_i$  - potência reativa líquida injetada na linha;

$\delta_{ik}$  - complemento do ângulo de impedância da linha,  $\text{tang}^{-1}(R/X)$ ;

$\theta_i$  - ângulo de fase, definido pela tensão  $V_i$  e o barramento de referência;

$V_i$  - tensão do barramento  $i$ ;

$m_t$  - derivação de transformador (tap);

$Y_{ii}$  - admitância shunt (indutiva/capacitiva);

$\mathcal{T}$  - compensador da rede

$R_{ik}$  - resistência na linha, no trecho  $ik$ ;

$X_{ik}$  - reatância: componente reativa da impedância no trecho  $ik$ ;

$Z_{ik}$  - impedância da linha,  $Z_{ik} = R_{ik} + jX_{ik}$ ;

Quando não há consumo local no barramento  $i$ ,  $C_i = D_i = 0$ , e as potências ativa e reativa líquidas injetadas na linha serão respectivamente,  $I_i = P_i$  e  $K_i = Q_i$ . Procura-se estabelecer uma função que, satisfeita a demanda do consu-

midor, conduza aos custos mínimos de operação. Para formulação das equações básicas, consideram-se os parâmetros dos barramentos e os da linha. Em geral, o fluxo de potência líquida na linha, determinado pelas potências do gerador menos as cargas consumidas, é definido para um barramento genérico  $i$ .

$$\begin{aligned} I_i + jK_i &= (P_i + jQ_i) - (C_i + jD_i) \\ &= (P_i - C_i) + j(Q_i - D_i) \end{aligned} \quad (4.1)$$

A corrente nesse barramento  $i$  é dada pela soma das correntes na admitância ( $Y_{ii}$ ) e na impedância ( $Z_{ik}$ ). Então, de acordo com a figura 4.1b, as correntes totais a considerar-se serão dadas para os barramentos  $i$  e  $k$ , respectivamente (21).

$$\begin{aligned} i_i &= V_i Y_{ii} + \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}} \\ i_k &= V_k Y_{kk} + \frac{V_k - V_i}{Z_{ik}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pela figura 4.1b, também se obtém a corrente total na linha, de um barramento para outro.

$$i_{ik} = \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}} \quad (4.3)$$

$$i_{ki} = -i_{ik}$$

Os transformadores de regulação de voltagem, quando presentes na linha, alteram as equações (4.2) em função da razão de suas derivações controláveis.

De um modo geral, o fluxo de carga é calculado como função da voltagem e do ângulo de fase. Os componentes da voltagem são quantidades complexas e se caracterizam por terem

grandeza e ângulo de fase.

$$V_i = |V_i| \cos \theta_i + j |V_i| \operatorname{sen} \theta_i \quad (4.4)$$

$$V_k = |V_k| \cos \theta_k + j |V_k| \operatorname{sen} \theta_k$$

O fluxo de carga ativa injetado na linha é dado por  $I_i = P_i - C_i$ . Da definição de potência complexa para um barramento  $i$ , e pela equação (4.2), determina-se a equação (4.5) abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{(I_i + jK_i)^*}{V_i^*} &= i_i \\ &= V_i Y_{ii} + \sum_{k=1}^J \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Levando a equação (4.4) em (4.5), obtêm-se as equações abaixo para o barramento  $i$ .

$$\begin{aligned} I_i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^J \left\{ \frac{|V_i|^2}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ik} - \frac{|V_i||V_k|}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} [\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)] \right\} \\ K_i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^J \left\{ \frac{|V_i|^2}{|Z_{ik}|} \cos \delta_{ik} - \frac{|V_i||V_k|}{|Z_{ik}|} \cos [\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)] - |V_i|^2 Y_{ii} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$J$  indica o número de linhas que partem de  $i$ . Quando há geração também no  $k$ -ésimo barramento, tem-se igualmente as equações que seguem.

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^J \left\{ \frac{|V_k|^2}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ki} - \frac{|V_k||V_i|}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} [\delta_{ki} - (\theta_k - \theta_i)] \right\} \\ K_k &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^J \left\{ \frac{|V_k|^2}{|Z_{ik}|} \cos \delta_{ki} - \frac{|V_k||V_i|}{|Z_{ik}|} \cos [\delta_{ki} - (\theta_k - \theta_i)] \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

De um modo geral, para um barramento  $i$ , valem as equações se -



guintes.

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{|V_i|^2}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ik} - \frac{|V_i||V_k|}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} [\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)] \right\} - P_i + C_i = 0 \quad (4.8)$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left\{ \frac{|V_i|^2}{|Z_{ik}|} \cos \delta_{ik} - \frac{|V_i||V_k|}{|Z_{ik}|} \cos [\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)] - |V_i|^2 Y_{ii} \right\} - Q_i + D_i = 0$$

Essas são as equações gerais do fluxo de carga estático, as quais se simplificam (1,23 a 25), para fornecer as equações (4.9).

$$\begin{aligned} I_i(V, \theta) - P_i + C_i &= 0, \quad i=1, 2, \dots, n \\ K_i(V, \theta) - Q_i + D_i &= 0, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.9)$$

As equações (4.6 a 4.9) são não lineares e relacionam potências, voltagens e ângulos de fase. As equações (4.9), em particular, fornecem as restrições de igualdade do problema em estudo.

Na determinação da equação das perdas ocorridas no sistema, procede-se ao equilíbrio das potências reais e relativas em um barramento, ou seja, somam-se as potências que entram nos dois terminais da linha. As perdas serão a diferença entre potências geradas e potências consumidas. Pelas equações (4.6) e (4.7), determinam-se as perdas relativas às potências reais na linha ik.

$$\begin{aligned} L_{ik}(V, \theta) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left\{ \frac{|V_i|^2}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ik} - 2 \frac{|V_i||V_k|}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + \frac{|V_k|^2}{|Z_{ik}|} \operatorname{sen} \delta_{ik} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\operatorname{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} (\Delta V_{ik}^2 + |V_i||V_k| \Delta \theta_{ik}^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) fornece as perdas totais no sistema. Se se consideram as perdas relativamente pequenas,  $\delta_{ik} \leq 1$ ; se, porém,  $\delta_{ik} \approx 0$ , então  $L_{ik}(V, \theta) = 0$ . Isto significaria que as cargas geradas seriam totalmente consumidas. Teoricamente, esta seria uma situação ideal, em que  $P_i = C_i$ , o que não ocorre na prática, de vez que os parâmetros da linha sempre exercem certa influência no consumo total da energia gerada. A equação (4.10) indica que as perdas são função das voltagens e dos ângulos de fase. Nas equações (4.8),  $V$  e  $\theta$  são variáveis dependentes do sistema, também chamadas variáveis de estado. Trata-se de variáveis controláveis, cujos valores se tenta conservar dentro de limitações predeterminadas.

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Variações de  $V_i$  fora dessas limitações poderão implicar em não convergência da função para o ponto ótimo, ou em convergência retardada. O ângulo de fase, nesse estudo, não está sujeito a restrições; as variações de  $\theta_i$  são controladas indiretamente pelos limites da potência real (23).

A capacidade de geração das fontes geradoras acha-se sujeita a restrições de natureza econômica, ditadas, em parte, pelas características incontrolláveis da demanda, e considerando-se também as perdas que ocorrem desde a fonte geradora até os pontos de consumo. Existe, porém, um nível ótimo de geração que controla o fornecimento de energia, em determinado gerador. Esse nível se restringe a limites de geração permissíveis, consideradas as características do gerador e das cargas. As potências  $P_i$  e  $Q_i$ , também chamadas de variáveis de controle (21) -  $|V_i|$  também é variável de controle - quando  $i$  é barramento de geração, obedecerão às seguintes restrições (1,23).

$$\begin{aligned}
 p_i^{\min} &\leq p_i \leq p_i^{\max} \\
 q_i^{\min} &\leq q_i \leq q_i^{\max}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Inúmeros são os estados em que os vários barramentos de um sistema podem ser operados, a fim de se satisfazer a certa demanda. A tarefa do analista de sistemas de potência é encontrar o que melhor satisfaça à demanda, através do estudo do fluxo de carga, por qualquer dos meios a seu alcance, e comparando os resultados obtidos. Conhecido um estado viável otimizado dos vários barramentos do sistema, espera-se determinar um meio de operá-lo economicamente. No estudo que segue, pretende-se estabelecer e analisar uma função-objetivo das várias variáveis que compõem o sistema, observando sempre as restrições impostas a cada uma delas.

#### 4.2 - O Problema de Otimização

Em otimização de operação de sistema de potência, os objetivos visados são minimização do custo operacional ou das perdas do sistema. No primeiro caso, o custo operacional é função das potências reais geradas (1,23).

$$F = f(p_i), \quad i = 1, \dots, n \tag{4.13}$$

As perdas mínimas são calculadas em função das voltagens e dos ângulos de fase do sistema (eq. 4.10) num trecho de linha de transmissão  $ik$ .

$$L = L_{ik}(V, \theta) \tag{4.14}$$

Em ambos os casos, os níveis de operação ótima do sistema impõem que as variáveis se mantenham dentro de certas limitações.

Essas limitações compreendem as restrições de igualdade (equação 4.9) e de desigualdade do sistema (equações 4.11 e 4.12). As restrições de desigualdade forçam as variáveis do sistema - P, Q, V,  $\theta$ ,  $m_t$ ,  $\tau$  - a se manterem dentro de limites preestabelecidos,

$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad (4.15)$$

onde  $X_i$  é um vetor que armazena sequencialmente as variáveis componentes do sistema (P, Q, V,  $\theta$ ,  $m_t$ ,  $\tau$ );

$x_i^{\min}$ , vetor dos limites inferiores das variáveis  $X_i$ ;

$x_i^{\max}$ , vetor dos limites superiores dos componentes de  $X_i$ .

As limitações sobre os componentes do sistema dão origem a um problema de minimização com restrições. Neste trabalho, transforma-se esse problema e outro, de minimização sem restrições. A técnica proposta utiliza as constantes de penalidade R e S (cap.2, seções 2.3.3 e 2.3.4) para converter a função dada pela equação (4.13) em uma função sem restrições, pelos métodos de funções de penalidade. Na reformulação geral, minimiza-se  $f(P, Q, V, \theta, R, S) = f(X, R, S)$ , em que X é o vetor dos vários componentes do sistema, com as variáveis  $m_t$  e mantidas constantes, ao longo deste trabalho.

$$F = \sum_{i=1}^{n_G} f(P_i) + \sum_{i=1}^n [(I_i - P_i + C_i + S_i)^2 / R_i + (K_{n+i} - Q_{n+i} + D_{n+i} + S_{n+i})^2 / R_{n+i}] + \sum_{i=1}^{4n} [(x_i^{\min} - x_i + S_{2n+i})^2 / R_{2n+i} + (x_i - x_i^{\max} + S_{2n+i})^2 / R_{2n+i}] \quad (4.16)$$



$n_G$  é o número de barramentos de geração;  $n$ , número de barramentos do sistema. Na determinação das perdas mínimas,  $f(P_i) = 0$ . Sempre que os valores de  $X$  satisfazem as restrições de desigualdade do problema, o terceiro termo da equação (4.16) não é considerado e  $f(R,S) = 0$  (fig. 4.2). No caso contrário, a função é acrescida das equações (4.17) envolvendo restrições de desigualdade (21,26).

$$F(X,R,S) = 1/R_i (X_i^{\min} - X_i + S_i)^2 \quad (4.17)$$

ou

$$F(X,R,S) = 1/R_i (X_i - X_i^{\max} + S_i)^2$$

nos intervalos  $(X_i^{\min} - X_i)$  ou  $(X_i - X_i^{\max})$  (fig. 4.2).

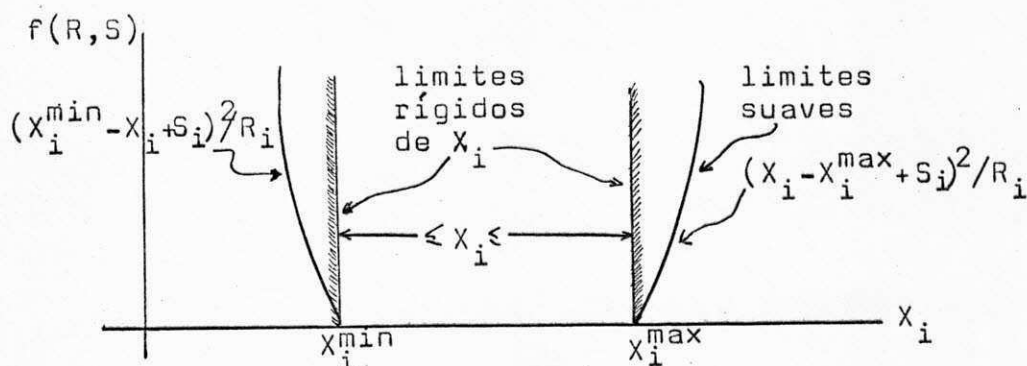


Figura 4.2 - Função de penalidade. As retas  $X_i = X_i^{\min}$  e  $X_i = X_i^{\max}$  são os limites rígidos das soluções de  $X_i$ , os quais não deverão ser violados no cálculo da função. As constantes  $R_i$  e  $S_i$  são introduzidas sempre que ocorrer violação das restrições:  $X_i < X_i^{\min}$  ou  $X_i > X_i^{\max}$ .

O método apresenta a vantagem de, ao contrário das técnicas indiretas, dispensar o estabelecimento prévio das condições de ótimo. As etapas principais do processo são, basicamente<sup>(1)</sup>:

- A - determinar as constantes R e S com as quais serão penalizadas as limitações das variáveis  $X_i$  que forem violadas;
- B - encontrar o mínimo da função sem restrições; calcular o vetor argumento  $X_i$ ;
- C - calcular o valor da função sujeita a restrições de igualdade e de desigualdade, e os gradientes para o vetor-argumento encontrado em B.

Essas etapas A,B,e C interligam-se como indicado nas fig. 2.6 e 3.1.

### 4.3 - Operação Ótima com as Perdas Mínimas

a. O Sistema SPC. O sistema testado nesse estudo encontra-se na referência 23 (ver também Apêndice III). Compõe-se de duas usinas de geração hidráulica (barras 1 e 6) e de duas de geração térmica (barras 5 e 10). Consta de 13 barras e 15 linhas de transmissão, com 4 transformadores reguladores, cujas derivações foram mantidas fixas, na realização deste trabalho. As cargas reativas (MVARs) na linha representam aproximadamente a metade da carga total. A geração hidrelétrica abastece apenas a 1/3 da demanda total, em vista das limitações de água disponível. Os 2/3 restantes ficam a cargo das geradoras térmicas. O custo de administração do reservatório não é considerado na obtenção dos resultados ótimos, a curto prazo, cuja tendência é estreitar as limitações da potência real. As limitações das voltagens se situam 5% acima e 10% abaixo do valor nominal. As variações dos ângulos de fase são controladas indiretamente pelos limites de geração restritos da potência real. Sob condições de operação estacionárias, o sistema de potência estudado é definido pelas variáveis  $P, Q, V, \theta$  de todos os barramentos. O número dessas variáveis é, em geral, determinado por  $4n + m$ , para um sistema de  $n$  barramentos, presentes ou não as variáveis  $P, Q, V, \theta$  em cada barramento, e  $m$  autotransformadores. O número de barramentos de geração sendo  $n_G$ , o total de variáveis do problema é dado por  $2n + 2n_G + m$ , quando se procede à otimização completa de potências reais e reativas.

A operação ótima do sistema de potência é obtida com a minimização da função-objetivo de custo (eq.4.16) aumentada sob restrições de igualdade introduzidas pelas equações (4.9) do fluxo de carga, e de desigualdade (eq.4.15). Na obtenção do resultado otimizado, todas as variáveis do sistema são consideradas, exceto a voltagem do barramento de geração 1, conservada constante a fim de controlar a potência reativa

nesse barramento, e do ângulo de fase referente ao barramento 5, de folga. A tabela 4.1 apresenta resultados obtidos com 32 variáveis do sistema analisado. Esses resultados mostram que as hidrelétricas estão operando a nível máximo, ao passo que as termelétricas se acham bem próximas dos níveis operacionais mínimos. As curvas (fig.4.3a,b,c,d) mostram a convergência da função-custo do problema-teste.

Nem sempre as unidades geradoras de energia se localizam na área que abastecem. Algumas podem estar instaladas em locais estrategicamente favoráveis ao consumo; outras, cujas linhas tenham de vencer longas distâncias, se acham localizadas em áreas de baixo custo de geração; e toda a energia gerada é transportada para áreas de custo de produção elevado, como acontece na maioria das vezes com as hidrelétricas. A configuração geral do sistema poderá indicar ao analista de sistema de potência a conveniência da operação ótima pela minimização das perdas. A equação 4.10 fornece as perdas totais do sistema em função das voltagens e dos ângulos de fase. Vários resultados indicam que as perdas totais do sistema se situam em torno de 19,76MW (tabela 4.2). Para os mesmos fatores de penalidade iniciais  $R_i$ , no intervalo  $10^{-5}$  a  $10^{-7}$ , os resultados alcançados apresentam, na minimização das perdas, muito boa aproximação, em relação aos obtidos na minimização do custo operacional. Entretanto, esses fatores de penalidade  $R_i$  usados não permitem um bom condicionamento da função penalizada das perdas. Variações posteriores indicaram que os melhores valores de  $R_i$  se situam no intervalo  $10^{-3}$  a  $10^{-7}$ . O estudo das perdas mínimas mais uma vez comprova que, na condição ótima de operação, pela minimização das potências real e reativa, quer minimizando custos operacionais quer minimizando perdas do sistema, as unidades geradoras hidrelétricas tendem a permanecer no nível mínimo de produção. Também aí se pode observar, verificando a conclusão ao deduzir a equação das perdas (eq.II.11), que os ângulos de fase



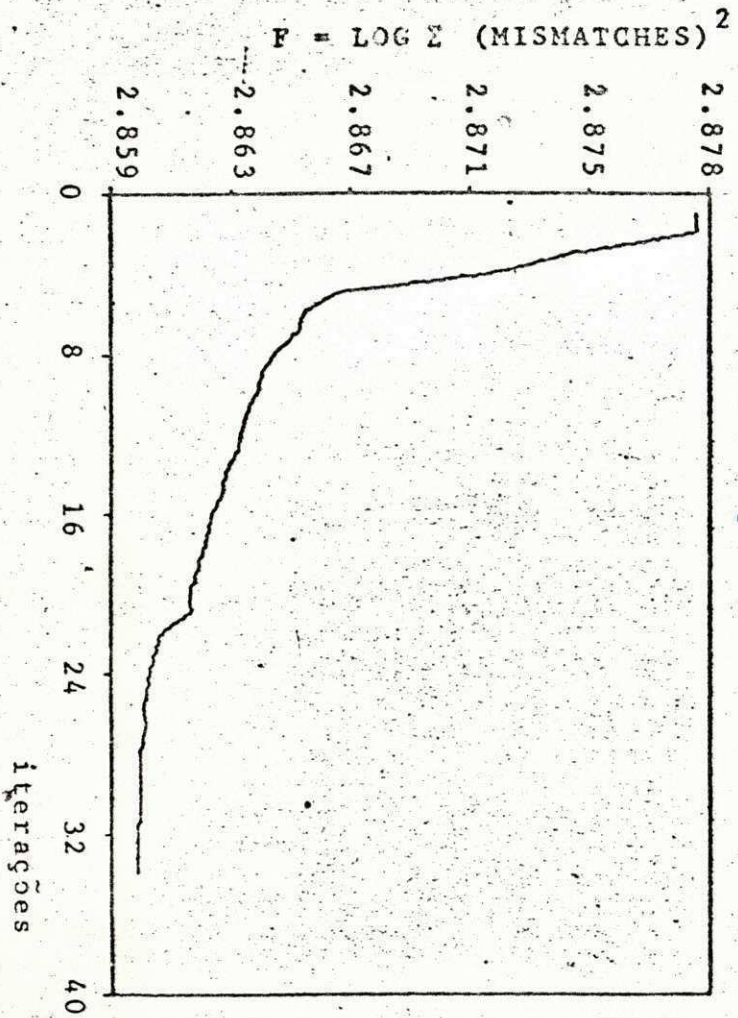


Fig.4.3 (c) Convergência de  $f(x)$  para um fator de penalidade inicial no intervalo  $10^{-3} - 10^{-7}$ .

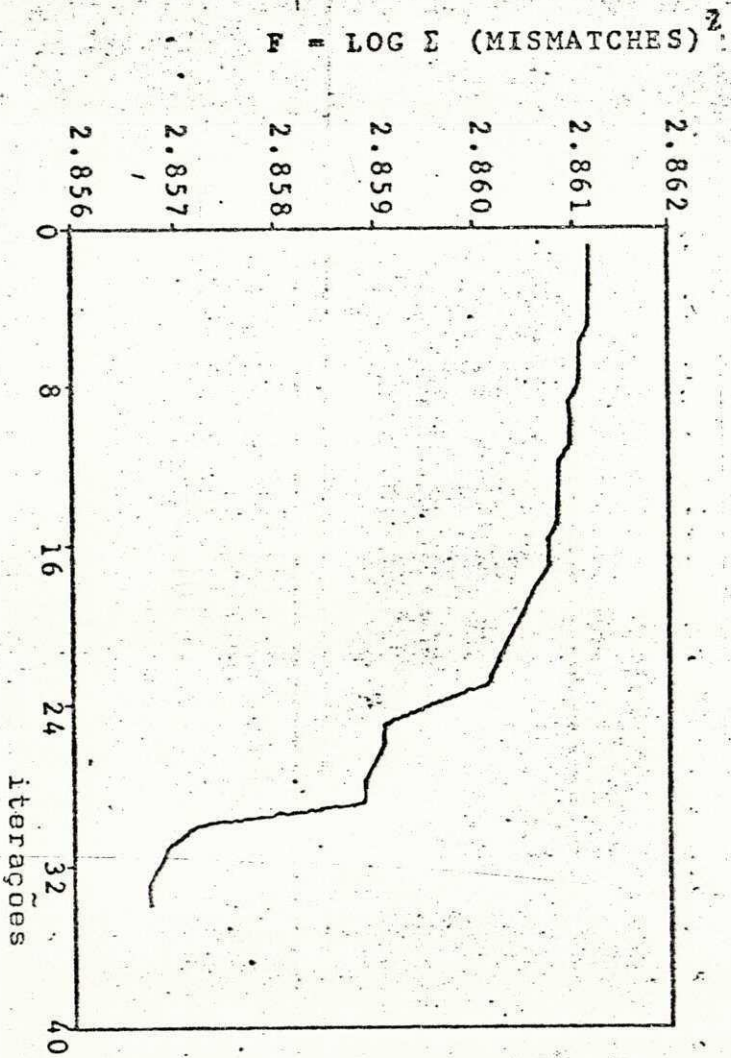


Fig.4.3 (d) Convergência de  $f(x)$  nas mesmas condições de (e).

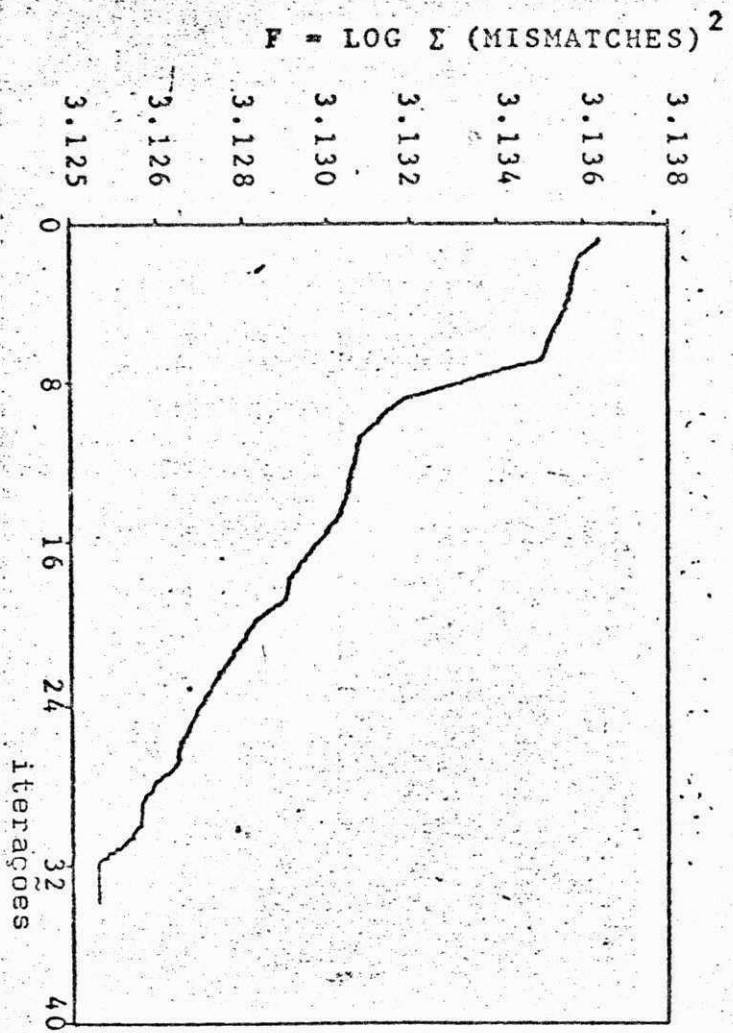


Fig.4.3 (a) Mínimo de  $f(x)$  após 34 iterações

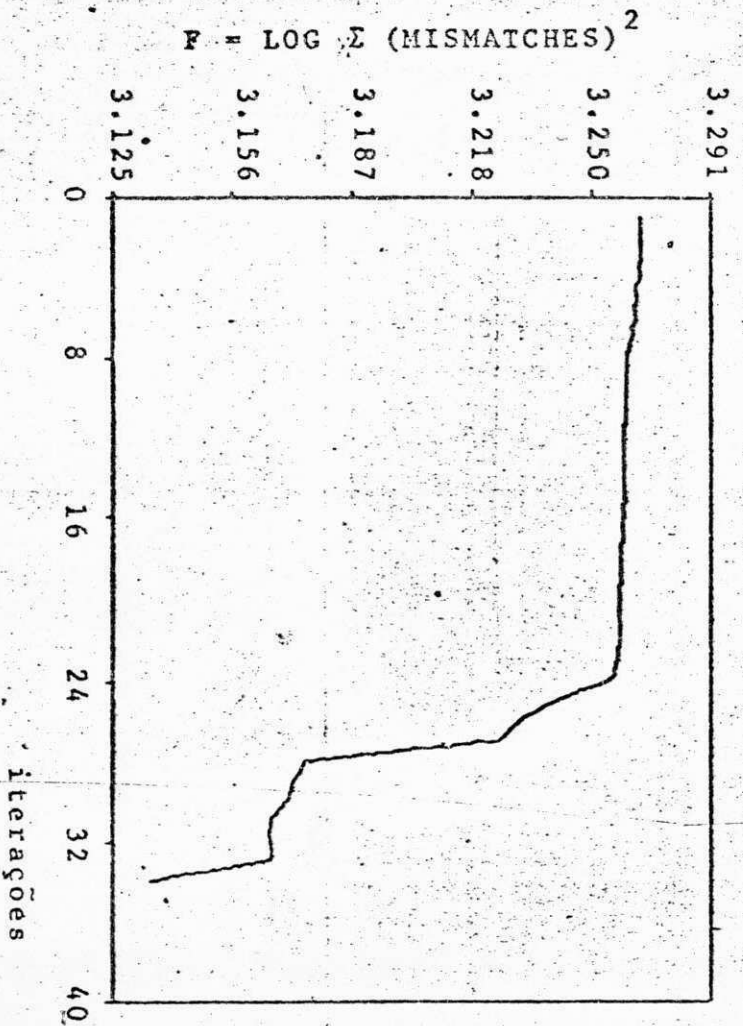


Fig. 4.3 (b) Mínimo de  $f(x)$  após 34 iterações

Tabela 4.1

Resultados da otimização das potências real e reativa usando restrições de igualdade e de desigualdade penalizadas

V (p.u.)	$\theta$ (rad.)	P (p.u.)	Q (p.u.)
1,0500	0,1588	1,7002	-0,0823
1,0310	0,0646		
0,9737	0,0395		
1,0035	0,0124		
0,9703	-	0,5902	0,1374
0,9366	0,0970	0,6984	-0,5161
0,9516	0,0621		
0,9687	0,1232		
1,0193	0,1615		
1,0621	0,2794	3,8228	0,2774
1,0042	0,2310		
0,8977	-0,0966		
0,9307	-0,0793		

Potência real gerada: 6,8116 p.u.

Custo minimizado: R\$ 725,99/hora

oscilam dentro de uma amplitude muito pequena, a maior variação cabendo às voltagens.

b. O Modelo Ótimo do Sistema da CEMIG. Outra aplicação do algoritmo composto foi feita utilizando-se os dados extraídos do sistema de alta tensão (EHV) das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. - CEMIG, Minas Gerais, Brasil.



Tabela 4.2

Otimização de potências real e reativa pela minimização das perdas.

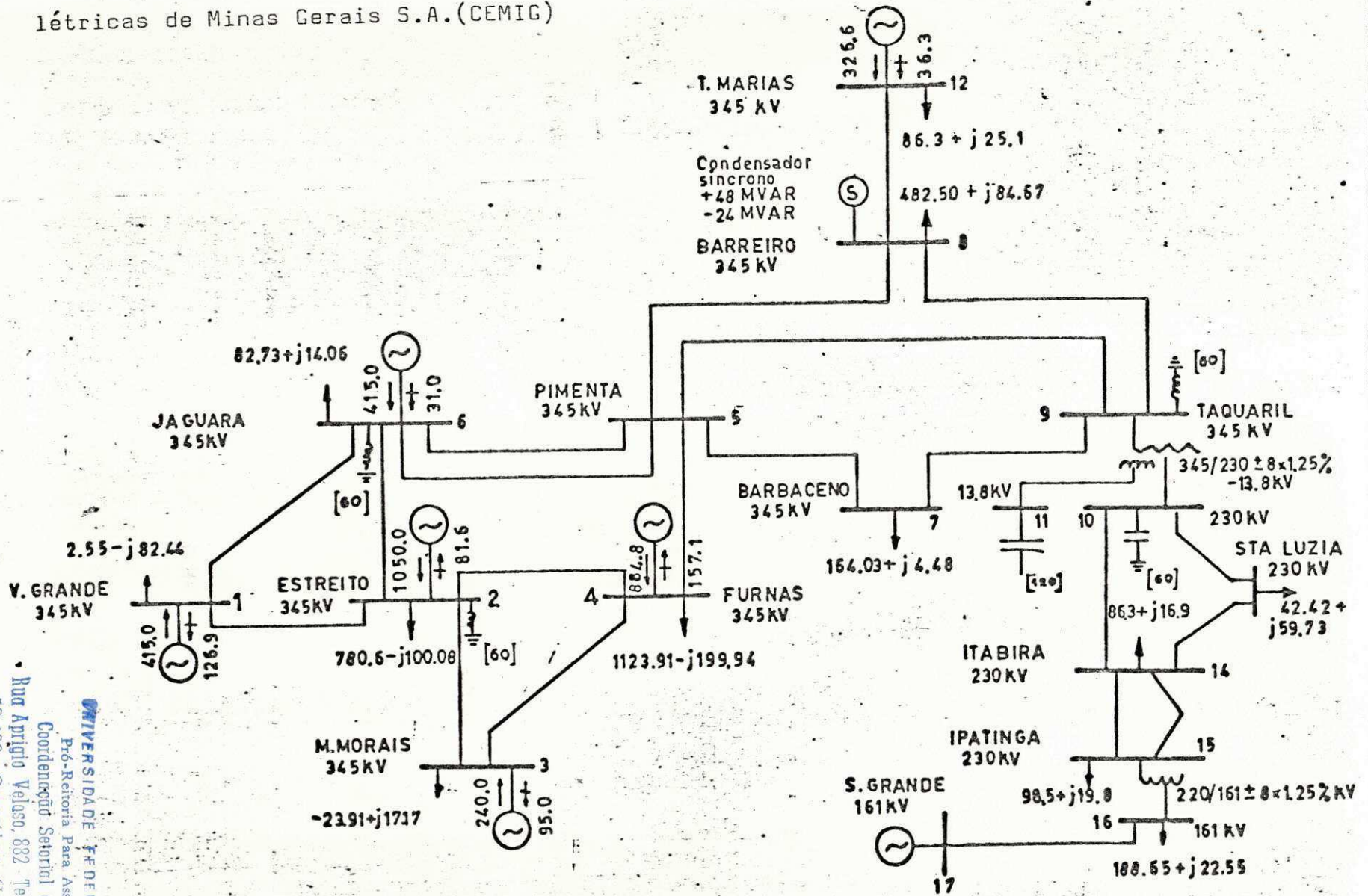
V (p.u.)	$\theta$ (rad.)	P (p.u.)	Q (p.u.)
1,0500	0,1594	1,7004	-0,0769
1,0305	0,0651		
0,9731	0,0402		
1,0024	0,0125		
0,9692	-	0,6504	0,1356
0,9364	0,0991	0,6998	-0,5048
0,9508	0,0676		
0,9681	0,1305		
1,0188	0,1691		
1,0626	0,2879	3,8506	0,3114
1,0044	0,2393		
0,8975	-0,0910		
0,9299	-0,0778		

Potência real gerada: 6,8112 p.u.

Perdas mínimas obtidas: 19,76 MW

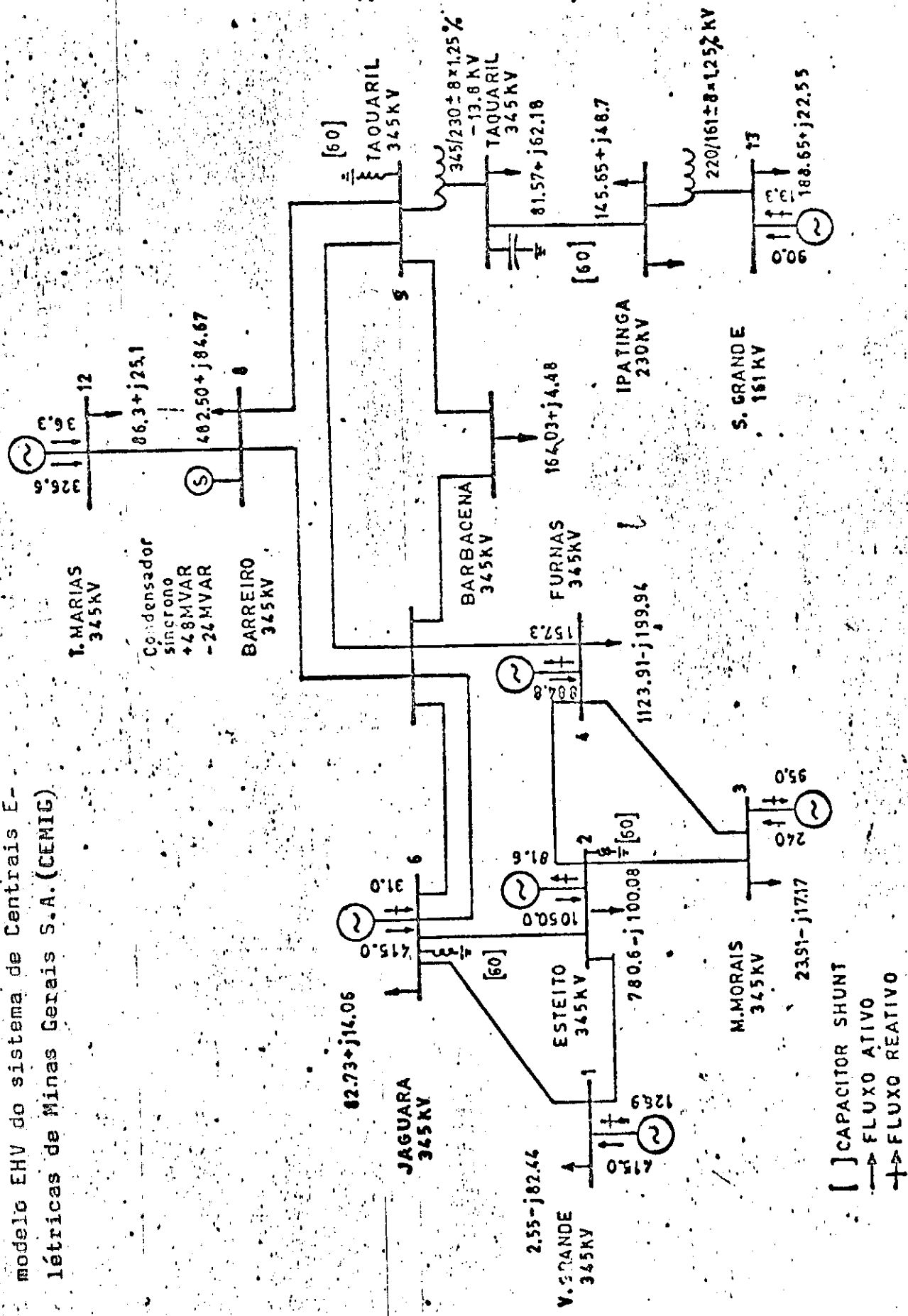
O sistema original conta com 17 barramentos e 21 linhas de transmissão, com 7 barramentos de geração (fig. 4.4a). Ligados à linha, dois transformadores reguladores de tensão; cinco compensadores, quatro de 60MVARs e um de 120MVARs; um condensador síncrono, de especificação +48MVAR, -24MVAR. Os dois transformadores têm especificação de 345/230<sub>±</sub> 8 x 1,25%-13,8kV e de 220/161<sub>±</sub> 8 x 1,25% kV. O sistema é todo abastecido por unidades geradoras hidrelétricas. No exemplo apresentado, porém, acha-se adaptado para funcionar como um subsistema de 13 barramentos, com 7 barramentos de geração e 16 linhas de trans-





(a) Configuração de 17 barramentos do sistema

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARANÁ  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Arigui Veloso, 882 - Tel. (083) 221.777  
 58.100 - Campana Grande - Paraná



( b ) CONFIGURAÇÃO REDUZIDA DE 13 BARRAMENTOS

missão (fig. 4.4b). Nas tabelas 4.3 e 4.4 encontram-se os dados da linha de transmissão e dos barramentos do sistema, respectivamente. Os limites das variáveis, para o modelo considerado (fig. 4.4b), estão na tabela 4.5. O número de variáveis do problema,  $2n + 2n_G + m$ , foi reduzido para 40 na otimização das potências real e reativa pela minimização das perdas. No processo de minimização, os transformadores e compensadores são conservados constantes. De acordo com as previsões do sistema e a demanda real, as limitações das cargas geradas são bastante flexíveis para a realidade atual. Entretanto, mais importante é considerar a voltagem, na otimização do sistema pela minimização das perdas (eq. 4.10). As limitações mínimas das voltagens estão 2% abaixo e as máximas, 5% acima do valor nominal. Os ângulos de fase não sofrem restrições nesse estudo, em particular, e apresentam uma variação relativamente às limitações impostas às potências reais (tabela 4.7). As variáveis do sistema são  $P, Q, V, \theta$  nos barramentos de geração (1, 2, 3, 4, 6, 12, 13) e  $V$  e  $\theta$  nos demais barramentos. A configuração ótima é obtida quando as voltagens e as potências geradas se encontrarem dentro de limites preestabelecidos. O sistema de alta tensão da CEMIG abrange área extensa, com longas linhas e unidades geradoras localizadas em pontos de baixo custo de geração.

A solução é obtida com um transformador e três compensadores ligados à rede (tabelas 4.3 e 4.6), porém todos fixos. Na obtenção do vetor inicial, foram utilizados os métodos de Gauss-Seidel de determinação de fluxo de carga e o de minimização de  $f(x)$ , que fornece um cálculo padrão do fluxo de carga (tabela 4.6) antes de iniciado o problema de otimização propriamente dito. A tabela 4.7 mostra os resultados obtidos na otimização de potências real e reativa pela minimização da função-objetivo das perdas. Foram consideradas todas as variáveis  $P, Q, V, \theta$  do sistema, inclusive o ângulo do barra-

Tabela 4.3

Parâmetros da linha do sistema de alta tensão das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A.- CEMIG, à base de 100 MVA.

Barramentos		R	X	Y	TAP
I	J	(p.u.)	(p.u.)	(p.u.)	(p.u.)
1	6	0,00244	0,02742	0,22291	
6	5	0,00252	0,02847	0,93537	
1	2	0,00308	0,03463	0,28202	
2	3	0,00085	0,00947	0,07680	
2	4	0,00336	0,03775	0,30775	
3	4	0,00351	0,03471	0,25570	
4	5	0,00201	0,01988	0,14597	
5	8	0,00674	0,06721	0,50133	
5	7	0,00707	0,08063	0,67161	
5	9	0,00593	0,06724	0,55534	
7	9	0,00391	0,04398	0,30920	
8	12	0,00800	0,07775	0,62303	
8	9	0,00050	0,00568	0,04404	
6	2	0,00068	0,00758	0,06143	
9	10		0,02850		
10	11	0,01388	0,07960	0,27743	
13	11		0,03400		1,000

mento de referência. O total das potências reais geradas é de 3.387,47 MW; e as perdas mínimas calculadas somam 40,21 MW. Os fatores de penalidade  $R_i$  iniciais utilizados situam-se entre  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$ . Comparação entre as tabelas 4.6 e 4.7 demonstra que as potências reais se mantêm praticamente constantes, e



Tabela 4.4

Dados dos barramentos do sistema de alta tensão das  
Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. - CEMIG  
à base de 100 MVA

Barra	Potências Geradas	Votagem	Fase	Cargas Consumidas	zR	Comp. Taps
I	P Q	V	$\theta$	PL QL		$m_t$ $\tau$
1	4,1499 -1,1429	1,0400	0,2020	0,0255 -0,8244		
2	10,4999 -0,9430	1,0337	0,1427	9,0060 -1,0000		-0,62 1,00
3	2,3999 -0,0829	1,0339	0,1388	-0,2391 0,1717		
4	8,8399 -3,5129	1,0258	0,0407	12,4317 -1,9994		
5		1,0467	-0,0015			
6	4,1499 -1,3140	1,0326	0,1434	0,8273 0,1400		-0,62 1,00
7		1,0585	-0,1524	1,6402 0,0448		
8		1,0295	-0,1687	4,8250 0,8467		
9		1,0306	-0,1692			-0,64 1,00
10		1,0205	-0,2577	0,8157 0,6218		
11		1,0138	-0,4476	1,4565 0,4870		
12(1)	3,0063 -0,3870	1,0301		0,8630 0,2510		
13	0,9000 1,0568	1,0401	-0,4750	1,8865 0,2255		

(1) Barramento de referência ou barra infinita.

Tabela 4.5

Restrições sobre as variáveis do sistema

Barra I	$p^{\min}$	$p^{\max}$	$q^{\min}$	$q^{\max}$	$v^{\min}$	$v^{\max}$	$\tau^{\min}$	$\tau^{\max}$	$m_t^{\min}$	$m_t^{\max}$
1	3,00	4,15	-1,20	0,80	1,00	1,05				
2	8,75	10,50	-5,20	3,20	1,00	1,05		2,00		
3	1,80	2,40	-0,75	0,40	1,00	1,05				
4	8,00	12,00	-8,00	3,80	1,00	1,05				
5					1,00	1,05				
6	3,30	4,40	-1,60	1,50	1,00	1,05		2,00		
7					0,98	1,03				
8			-0,24	0,48	0,98	1,03				
9					0,98	1,03		2,00		
10					1,00	1,05		2,00		
11					0,98	1,03				
12	2,60	3,30	-2,40	1,50	1,00	1,05				
13	0,60	0,90	-0,43	0,39	0,98	1,05			0,90	1,05

que os valores das tensões tendem para o limite máximo, alguns chegando a ultrapassá-lo. O mismatch da potência reativa correspondente ao barramento 13 é elevado (21,035MW), conforme a potência reativa disponível do estado particular do sistema considerado seja insuficiente para manter a tensão do sistema dentro dos limites desejados.

O objetivo desse capítulo foi verificar o modo de otimização apresentado, aplicando-o na otimização de um sistema prático. O sistema escolhido é o sistema de alta tensão das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. (CEMIG). Procedeu-se à otimização das potências real e reativa, minimizando uma função-objetivo  $f(x)$ , com a utilização do método de funções de penalidade mistas para eliminação das restrições de

Tabela 4.6

Vetor inicial utilizado na determinação das perdas mínimas do sistema EHV das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A.(CEMIG). Base de 100 MVA.

Barra Nº	V (p.u.)	$\theta$ (rad.)	P (p.u.)	Q (p.u.)	$\tau$ (p.u.)	$m_t$ (p.u.)
1	1,0400	0,2045	4,1499	-1,1419		
2	1,0337	0,1466	10,4999	-0,9426	-0,62	1,0
3	1,0339	0,1427	2,3999	-0,0826		
4	1,0258	0,0446	8,8399	-3,5133		
5	1,0457	0,0021				
6	1,0326	0,1472	4,1499	-1,3136	-0,62	1,0
7	1,0535	-0,1520				
8	1,0266	-0,1622				
9	1,0277	-0,1666			-0,64	1,0
10	1,0185	-0,2518				
11	1,0138	-0,4346				
12	1,0301		3,0071	-0,3872		
13	1,0401	-0,4634	0,9000	1,0566		

Tabela 4.7

Resultados ótimos obtidos pela minimização das perdas do sistema das Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. (CEMIG). Base de 100 MVA.

Barra Nº	V (p.u.)	$\theta$ (rad.)	P (p.u.)	Q (p.u.)	$\tau$ (p.u.)	$m_t$ (p.u.)
1	1,0525	0,0431	4,1339	-1,1386		
2	1,0454	-0,0142	10,4826	-0,9388	-0,62	1,0
3	1,0458	-0,0179	2,3832	-0,0787		
4	1,0376	-0,1152	8,8258	-3,5094		
5	1,0552	-0,1587				
6	1,0440	-0,0138	4,1333	-1,3098	-0,62	1,0
7	1,0582	-0,3141				
8	1,0313	-0,3306				
9	1,0309	-0,3309			-0,62	1,0
10	1,0105	-0,4210				
11	0,9692	-0,6192				
12	1,0447	-0,1751	3,0135	-0,3874		
13	0,9817	-0,6535	0,9024	0,3915		

Potência real gerada: 3.387,47 MW

Perdas mínimas obtidas: 40,21 MW.



igualdade e de desigualdade. Referido estudo foi realizado (i) pela obtenção do custo operacional mínimo (problema-teste) em função das potências reais geradas e (ii) pela minimização das perdas nas linhas de transmissão, em função das voltagens dos barramentos do sistema. Outro exemplo de estudo de perdas mínimas aborda o sistema de alta tensão da CEMIG, para o qual foi obtida a solução ótima cujos resultados se encontram na tabela 4.7.

## 5. CONCLUSÃO

O objetivo principal desse trabalho foi a representação de um método direto de otimização em computador IBM-1130, para resolver o problema geral de programação não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade. Os métodos diretos de minimização prevêm a transformação do problema geral em problema de minimização sem restrições. Inicialmente, abordam-se técnicas diretas de minimização de  $f(x)$  sem restrições, dando-se ênfase ao algoritmo de Fletcher-Powell; depois, os métodos de funções de penalidade, e a eliminação das restrições do problema geral, utilizando constantes de penalidade R e S (capítulo 2), para pesquisa do ótimo. Isso constitui o que se denominou de algoritmo composto. Se o problema resulta demasiado grande, como no caso de determinação de estado ótimo de um sistema de potência prático usando computador IBM-1130, faz-se a reestruturação do problema, em face dos recursos do sistema operacional existente. Paralelamente, foi feita a minimização parcial de  $f(x)$  desenvolvendo-se um algoritmo de decomposição (capítulo 3). Pelos testes com esse algoritmo, a função-objetivo relativa a cada componente (P, Q, V ou  $\theta$ ), convergiu rapidamente, conforme o número de va-

riáveis de cada um desses componentes no ciclo iterativo correspondente. Os resultados a que se chega pelo algoritmo composto, como pelo decomposto, são aproximadamente os mesmos. Essa conclusão é feita com base em comparação das soluções obtidas para o problema testado, definido no Apêndice III, aplicando-se o algoritmo composto (referência 23 e Apêndice III) e do algoritmo decomposto apresentado na seção 3.3. Este último oferece a vantagem da redução do esforço computacional e do tempo de processamento, quando do cálculo dos gradientes e do valor de  $f(x)$ .

Como aplicação prática foi estudado o desempenho ótimo de um sistema de potência de 13 barramentos, com 4 barramentos de geração, sendo dois de geração hidráulica e dois de geração térmica. A determinação da solução ótima foi processada em duas etapas. Procedeu-se à otimização das potências real e reativa, primeiro minimizando o custo operacional do sistema; e depois, minimizando as perdas. Essa última abordagem foi aplicada também ao sistema de alta tensão da CEMIG. Trat-se de um sistema prático de 17 barramentos, com 7 barramentos de geração hidráulica. Para determinação do estado ótimo, pela minimização das perdas, fez-se a redução para um subsistema de 13 barramentos, com 7 barramentos de geração. Isso em função da programação desenvolvida. Na configuração particular escolhida, em ambos os sistemas estudados, capacitores e compensadores da rede, bem como derivações dos transformadores (taps), permaneceram constantes. Na determinação do ótimo, fez-se amplo uso dos métodos de função de penalidade, a fim de testar também a estabilidade da convergência para diferentes fatores de penalidade e mesmo vetor inicial; e mesmo fator de penalidade e diferentes vetores iniciais, com o objetivo de obter um mismatch mínimo.

No capítulo 2 acha-se registrada a experiência computacional com os fatores de penalidade R e S. Estudos anteriores fixam os valores de R entre  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$ , para a potência real e  $10^{-3}$  e  $10^{-5}$ , para a potência reativa. Quando se procede à minimização das perdas, se observa um aumento dos

valores dos fatores de penalidade  $R$ , situando-se estes no intervalo de  $10^{-2}$  a  $10^{-4}$ , para as potências real e reativa. A constante  $R_i$ , para as restrições de desigualdade, conserva-se dentro do intervalo de  $10^{-4}$  a  $10^{-8}$ , em todos os casos estudados. Fatores  $R_i$  muito pequenos, para vetor inicial afastado do ponto de mínimo, poderão provocar uma convergência muito lenta (mais de  $n$  iterações por ciclo iterativo) ou mesmo uma não convergência. Quando demasiado grandes poderão causar resultados imprevisíveis, tanto da função-custo como das perdas do sistema. As constantes  $S_i$  são inicialmente zeradas. Entretanto, os valores de  $R$  e  $S$  são alterados a cada novo ciclo iterativo (Eqs. 2.18 e 2.19). A convergência se verifica dentro do mínimo previsto de  $n$  iterações. Mesmo assim, no problema particular de sistema de potência, registra-se esforço computacional considerável, por causa dos cálculos sucessivos do gradiente e do valor de  $f(x)$ , de uma iteração a outra. Na computação do deslocamento do ponto, na direção do mínimo, calcula-se inicialmente um valor  $\alpha_i$  por interpolação cúbica. Se este  $\alpha_i$  não satisfaz, a interpolação é repetida. Verificou-se que, para um só valor de  $f(x)$ , de uma iteração a outra, foram realizadas sete interpolações, envolvendo sucessivos cálculos do gradiente e do valor de  $f(x)$ . Evidentemente, não se trata de regra geral, porque a maior ou menor rapidez de convergência depende da função dada pelo usuário. Talvez aí esteja a principal desvantagem dos métodos diretos.

No decorrer desse trabalho, os testes com fatores de penalidade demonstraram que a minimização da função sem restrições, por meio de funções penalizadas, apresenta limitações. Assim, a função minimizada só converge quando os fatores  $R_i$  se mantêm dentro de certa faixa de variação. Quando isso não ocorre, poderá resultar um mau condicionamento da função penalizada e, em consequência,  $f(x)$  não convergirá ou convergirá muito lentamente. O mesmo ocorrerá, também, quando existirem variáveis flutuando fora dos limites impostos pelas



restrições. Não se discute aqui a eficiência do método de obtenção das constantes  $S_i$ , porque todo método tem seus méritos e suas limitações. Entretanto, fica a sugestão para nova abordagem do cálculo de  $S_i$  e análise das implicações sobre o comportamento de  $f(x)$ . É possível que, em vez de obter uma constante  $S_i$  por ciclo iterativo, correspondente ao maior mismatch das restrições penalizadas, dever-se-ia calcular constantes  $S_i$  relativas a cada mismatch acima de certa tolerância preestabelecida, conforme os fins previstos. Esse novo método de escolha das constantes  $S_i$ , na função penalizada, deveria inclusive acelerar a convergência da função minimizada. Essa abordagem, a ser estudada posteriormente, poderá resultar em melhoramento da técnica atual. O estudo deverá atender também para o aumento do esforço computacional e a demanda de memória decorrentes, em função do problema estudado e do número de variáveis envolvidas.

### BIBLIOGRAFIA

1. Sachdeva, S.S., Otimização de Operação de Sistema de Potência, Campina Grande, Paraíba, C.C.T.-UFPb, 1972, 176p.
2. Pacitti, T., FORTRAN-Monitor, Princípios, 2ª edição, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1969, 612p.
3. Pierre, D.A., Optimization Theory with Applications, N.York John Willey & Sons, 1969, 612p.
4. Hadley, G., Nonlinear and Dynamic Programming, 2<sup>nd</sup> edition Singapura, Addison-Wesley Publishing Co., 1972, 464p.
5. Mangasarian, O.L., Nonlinear Programming, N.York, McGraw-Hill Inc., 1969, 220p.
6. Tabak, D. & Benjamin C.Kuo, Optimal Control by Mathematical Programming, Englewood Cliffs, N.Jersey, Prentice-Hall, 1971, 237p.
7. Zangwill, W.I., Nonlinear Programming, A Unified Approach, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1971, 356p.
8. Fletcher, R. & M.J.D.Powell, A rapidly convergent descent method for minimization, Computer J., vol.6, pp:163-168, junho de 1963.

9. Sasson, A.M., Combined Use of the Powell and Fletcher - Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flows IEEE Transactions, vol.PAS-88,nº 10, Out.1969,pp:1530/37.
10. Fiacco, A.V. & G.P.McCormick, Nonlinear Programming Sequential Unconstrained Minimization Techniques, N.York, John Willey & Sons Inc., 1968, 210 p.
11. Martensson, K., A new approach to constrained function optimization, Journal of Optim. Theory and Applic., vol. 2 nº 6, pp:531-554, Dez. 1973.
12. Polak, E., Computational Methods in Optimization, a Unified Approach, N.York, Academic Press, 1971.
13. Powell, M.J.D., An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculation of derivatives, Computer J., vol.7(2): 155-162, 1964.
14. Zangwill, W.I., On minimizing a function without calculating derivatives, Working Paper 210, Center for Research Management Science, Univ. of California, Berkeley, March / 1965.
15. Fletcher, R. & C.M. Reeves, Function Minimizing by Conjugate Gradients, Computer J., vol.7:149-154, 1964
16. Huang, H.Y., e J.P.Chambliss, Quadratically convergent Algorithms and one-dimensional search schemes, JOTA, vol. 2 nº 2, pp:175-189, Fev. 1973.
17. Kuester, J.L., & J.H.Mize, Optimization Techniques with FORTRAN, N.York, McGraw-Hill Inc., 1973.
18. Powell, M.J.D., A method for nonlinear constraints in minimization problems, Conferência sobre Otimização, University College of North Staffordshire, Keele, England, março de 1968.
19. Loudon, R.K., Programming the IBM 1130 and 1800, Englewood

- Cliffs, N.Jersey, Prentice-Hall, 1967, 434p.
20. IBM 1130 Disk Monitor System, Version 2, Programming and Operator's Guide, 8<sup>th</sup> ed., IBM Systems Reference Library, File number 1130-36, Oct.1970.
  21. Elgerd, Olle I., Electric Energy Systems Theory: an Introduction, N.York, McGraw-Hill, 1971, 564p.
  22. Carpentier, M.J., Contribution à l'étude du dispatching économique, Bull. de la Société Française des Eléctriciens, 3(32), pp: 431-447, agosto de 1962.
  23. Billington, R. e S.S.Sachdeva, Real and Reactive Power Operation in a Hydrothermal System, Paper nº 71 TP 577-PWR University of Saskatchewan, Electrical Dept., Saskatoon, Canada, agosto de 1971.
  24. Sachdeva, S.S., Short Range Optimal Control Operation Planning in Radial System, C. Grande, C.C.T.-UFPb, 1974, 18p.
  25. Billington, R. e S.S.Sachdeva, Real and Reactive Power Optimization by Suboptimum Techniques, Paper nº 71, CP 596-PWR, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, Canada, junho 1971, 7p.
  26. Brameller, A., Power System Optimization, University of Southampton, England, 1972, 32p.
  27. Weedy, B.M., Electric Power Systems, London, John Willey & Sons, 1970, 307p.
  28. Listagem do Programa utilizado nesse trabalho, à disposição no Departamento de Engenharia Elétrica do CCT-UFPb, em Campina Grande (Pb).



APÊNDICE IEstabilidade no Método de Fletcher-Powell<sup>(8)</sup>

No algoritmo de Fletcher-Powell, a pesquisa do mínimo se dá na direção  $r = -Hg$ . Daí poder-se escolher  $\alpha^i > 0$ . A expressão  $-Hg$  diz simplesmente que a taxa de variação do gradiente terá sentido decrescente, o que será verdadeiro se e só se  $-(s^i)^t g^i = (g^i)^t H g^i > 0$ .  $H$  é uma matriz positivamente definida; e de início  $H^0 = I$  assegura uma direção inicial descendente, no sentido da inclinação máxima. Deseja-se mostrar a seguir que a matriz  $H^i$  é positivamente definida e que  $\alpha^i > 0$ . Demonstra-se<sup>(8)</sup> que, qualquer que seja o vetor  $x$ ,  $x^t H^{i+1} x > 0$ . Supõe-se a existência de raiz quadrada para a matriz positiva definida  $H$  e que essa raiz seja definida por  $p = (H^i)^{1/2} x$  e  $q = (H^i)^{1/2} \Delta g^i$ . Então, transformando  $H^{i+1}$  (eq. 2.9d) em uma forma positivamente definida, obtém-se

$$x^t H^{i+1} x = \frac{p^2 q^2 - (pq)^2}{q^2} + \frac{(x s^i)^2}{s^i g^i}$$

Como  $x^t H^i x > 0$ , e  $p^2 q^2 = (pq)^2$ , conclui-se que

$x^t H^i x \geq (xs^i)^2 / s^i \Delta g^i$ , pela desigualdade de Schwartz. Pelas equações (2.8) e (2.9a,b),  $s^i \Delta g^i > 0$ . Consequentemente,  $x^t H^i x > 0$ , para todo  $x \neq 0$ , ficando assim demonstrado que  $H^{i+1}$  é positivamente definida e o processo é estável.

### Convergência

O método de Fletcher-Powell é quadrático-convergente, admitindo-se que a função é quadrática (eq. 2.5) e que tem um mínimo. Demonstra-se<sup>(8)</sup> que, quando o processo converge,  $H = G^{-1}$ , calculada no ponto mínimo. Para isso, é necessário mostrar que os vetores  $s^i$ ,  $i=0,1,\dots,k$ , e  $H^{k-1}G$  são linearmente independentes. Recordando que as formas quadráticas (eqs. 2.5 e 2.6) dão

$$g = a_1 + Gx \quad (I-1)$$

então, pela equação (2.9c)

$$g^i = Gs^i \quad (I-2)$$

Usando de indução matemática, pode-se afirmar que

$$H^{i+1}Gs^i = H^{i+1}g^i$$

Substituindo, no lado direito dessa equação,  $H^{i+1}$  pela expressão equivalente (eq. 2.9d), conclui-se que

$$H^{i+1}Gs^i = s^i \quad (I-3)$$

Sejam, agora, as equações

$$(s^i)^t Gs^i = 0, \quad 0 \leq i < j < k \quad (I-4)$$

$$H^i Gs^i = s^i, \quad 0 \leq i < k \quad (I-5)$$

A equação (I-2) permite afirmar que (I-4) e (I-5) são válidas para  $k=1$ . Para  $k+1$ , tem-se:

$$g^k = a + Gx^k$$

$$\begin{aligned} g^k &= a + G(x^{i+1} + s^{i+1} + s^{i+2} + \dots + s^{k-1}) \\ &= g^{i+1} + G(s^{i+1} + s^{i+2} + \dots + s^{k-1}) \end{aligned}$$

Fazendo uso da equação (2.9b), de (I-4) e (I-5),

$$\begin{aligned} s^i g^k &= s^i g^{i+1} + s^i G(s^{i+1} + s^{i+2} + \dots + s^{k-1}) \\ &= 0, \quad 0 \leq i < k \end{aligned} \quad (I-6)$$

Isto prova que o mínimo da função é obtido em  $n$  iterações, posto que  $s^i g^i = 0$ , somente se  $g^n = 0$ . De (I-5),

$$(s^i)^t G H^k \Delta g^k = 0$$

e de (2.8) e (2.9a),

$$-\alpha^i (s^i)^t G s^k = 0$$

Conseqüentemente, usando novamente de indução matemática,

$$(s^i)^t G s^k = 0, \quad 0 \leq i < k \quad (I-7)$$

Pelas equações (I-2), (I-5) e (I-7),

$$\begin{aligned} (\Delta g^k)^t H^k G s^i &= (\Delta g^k)^t s^i \\ &= s^k G s^i \\ &= 0, \quad 0 \leq i < k \end{aligned}$$

Finalmente, os resultados acima e as equações (2.9d), (I-5) e (I-7) fornecem, por indução:

$$\begin{aligned} H^{k+1} G s^i &= H^k G s^i \\ &= s^i, \quad 0 \leq i < k \end{aligned} \quad (I-8)$$

A equação (I-4) afirma que os vetores  $s^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , são linearmente independentes, donde

$$H^i = G^{-1}$$

. . .

## Descrição do Fluxograma do Algoritmo de Fletcher-Powell

Bloco A. Entrada de dados iniciais. A determinação do vetor  $x^0$ , no exemplo estudado, é feita mediante obtenção do fluxo de carga mínimo, o que se pode conseguir por métodos iterativos de Gauss-Seidel ou de Newton-Raphson. A matriz  $H^0 = I$  é armazenada linearmente e requer área de dimensão  $n(n+7)/2$ , onde  $n$  é o número de variáveis.

Bloco B. Cálculo do gradiente e do valor de  $f(x)$ , no ponto  $x^0$ . Poderá ocorrer que a aproximação inicial de  $x^0$  seja muito boa, a ponto de o gradiente se anular:  $g^0 = g(x^0) = 0$ . Em tal caso, o ponto fornece o valor mínimo de  $f(x)$  e o processo termina.

Bloco C1. Determina-se a direção da pesquisa  $r^i = -H^i g^i$  assume o papel de vetor direção para o cálculo de um ponto  $x$  sobre a reta  $x^{i+1} = x^i + \lambda r^i$ . Quando a função minimizada é uma forma quadrática,  $(H^i g^i)^t G H^j g^j = 0$ , para todo  $i \neq j$ , e  $H$  tende para a inversa de  $G$ ; após  $n$  iterações,  $H^n = G^{-1}$ . Evidentemente, quando isso ocorre,  $g^n = 0$ , ou, quando não,  $g^n (g^n)^t < \epsilon$ , em que  $\epsilon$  é uma tolerância preestabelecida. O coeficiente  $\lambda$  determina aqui tamanho de passo e, para início de cálculos, estima-se  $\lambda = 1$ .

Bloco C2. Calcula-se novo valor de  $f(x)$  e de gradiente de  $f(x)$ , no ponto  $x^{i+1}$ , determinado em C1.

Bloco D. A obtenção de  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) é feita em algoritmo à parte, pela interpolação cúbica dos valores de  $f(x)$  e do gradiente de  $f(x)$ , calculados em dois pontos  $x^i$  e  $x^{i+1}$ .

Bloco E1. Com o valor de  $\alpha$ , determina-se nova direção de pesquisa de  $f(x)$  ao longo da reta  $x^{i+1} = x^i - \alpha H^i g^i$ , pelo mesmo processo utilizado em C1, e novo ponto  $x^{i+1}$ .



Bloco E2. Nesse ponto, calcula-se o valor de  $f(x)$ , como o mínimo relativamente a  $\alpha$ , para o valor de  $x$  obtido em E. Calcula-se também o gradiente em  $x^{i+1}$ . O valor de  $f(x) = \min_{\alpha} f(x^i - \alpha H^i g^i)$ ; e mesmo  $f(x)$  não sendo quadrática,  $H^i$  permanece positivamente definida e, portanto, a pesquisa unidimensional basta ser realizada sobre  $\alpha > 0$ .

Bloco F. As diferenças  $\Delta x^i = x^{i+1} - x^i$  e  $\Delta g^i = g^{i+1} - g^i$  são calculadas, visando-se à atualização da matriz H.

Blocos Gi. Comparações são necessárias entre o valor de  $f(x)$ , calculado no ponto  $x^{i+1}$ , e os valores de  $f(x)$  e  $f(y)$ , calculados nos pontos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Se  $f(x^{i+1})$  não é um mínimo, retorna-se ao bloco E, para nova estimativa do coeficiente  $\alpha$ . Se já foram feitas  $n$  iterações ( $i \geq n$ ), pode-se parar o processo ou reiniciar novo ciclo iterativo, cujo vetor inicial  $x^0$  será o último vetor do ciclo iterativo recém-terminado. Se não foram atingidas ainda as  $n$  iterações, o processo continua e calculam-se os valores de  $M_1^i$  e  $M_2^i$ .

Blocos Hi. Os valores  $\Delta x^i$  e  $\Delta g^i$  são utilizados no cômputo de  $M_1^i$  e  $M_2^i$ . Os numeradores de  $M_1^i$  e  $M_2^i$  são matrizes  $n \times n$ , enquanto os denominadores são escalares. Com esses valores, calcula-se uma nova matriz

$$H^{i+1} = H^i + M_1^i + M_2^i$$

Bloco I. Incrementa-se o contador de iterações e repete-se todo o ciclo, pelo menos  $n$  vezes, a fim de determinar a matriz  $H^n = G^{-1}$ , no caso de termos uma função quadrática.

### Descrição do fluxograma da Interpolação Cúbica

O algoritmo (secção 2.2.1) fornece um ponto

$x^i$ ; porém deve-se tomar também um ponto  $y^i$ , sobre a reta  $x^i + \lambda s^i$ ,  $\lambda > 0$ , porque são necessários valores de  $f(x)$  e do gradiente de  $f(x)$  calculados nesses pontos.

Bloco 1. Faz-se estimativa de  $\eta$ . Deseja-se que seja um número entre 1 e o valor fornecido por  $-2(f_x - f_0)/g_x s^i$ , onde  $f_0$  é um valor estimado de  $f(x)$ .

Bloco 2. Cálculo do ponto  $y^i$ . Segundo Davidson<sup>(8)</sup>, a melhor aproximação para  $y^i$  é dada por  $y^i = x^i + \eta r^i$ .

Bloco 3. De posse dos valores  $y^i$ , calculam-se  $f_y$  e  $g_y$ , que serão utilizados no cálculo de  $z$ . Aqui,  $\lambda$  é o tamanho do passo; estima-se inicialmente  $\lambda = 1$ ; nos casos em que  $\alpha_i$  não satisfaz ao mínimo de  $x^i$ , a interpolação é repetida com um menor valor de  $\lambda$  como passo.

Bloco 4. O valor  $w$  é computado como função de  $z$ , dos gradientes calculados nos pontos  $x^i$  e  $y^i$  das direções  $r^i$ , nesses pontos.

Bloco 5. Finalmente, os resultados dos passos anteriores são utilizados na interpolação cúbica, para determinação de  $\alpha_i$  e retorna-se ao algoritmo de Fletcher-Powell.

Descrição da Subrotina FMFP<sup>(17)</sup> (fig. I-1)

(Na referência 17, página 355, detalhes completos da subrotina FMFP, extraída do Manual H20-0205-3-IBM, Conjunto de Subrotinas Científicas do Sistema /360, pp:251-255). A finalidade da Subrotina FMFP é encontrar um mínimo local de uma função de várias variáveis, através do método de Fletcher-Powell. Da maneira como está construída, no programa principal é chamada via argumentos:

CALL FMFP(FUNCT,N,X,F,G,EST,EPS,LIMIT,IER,H)





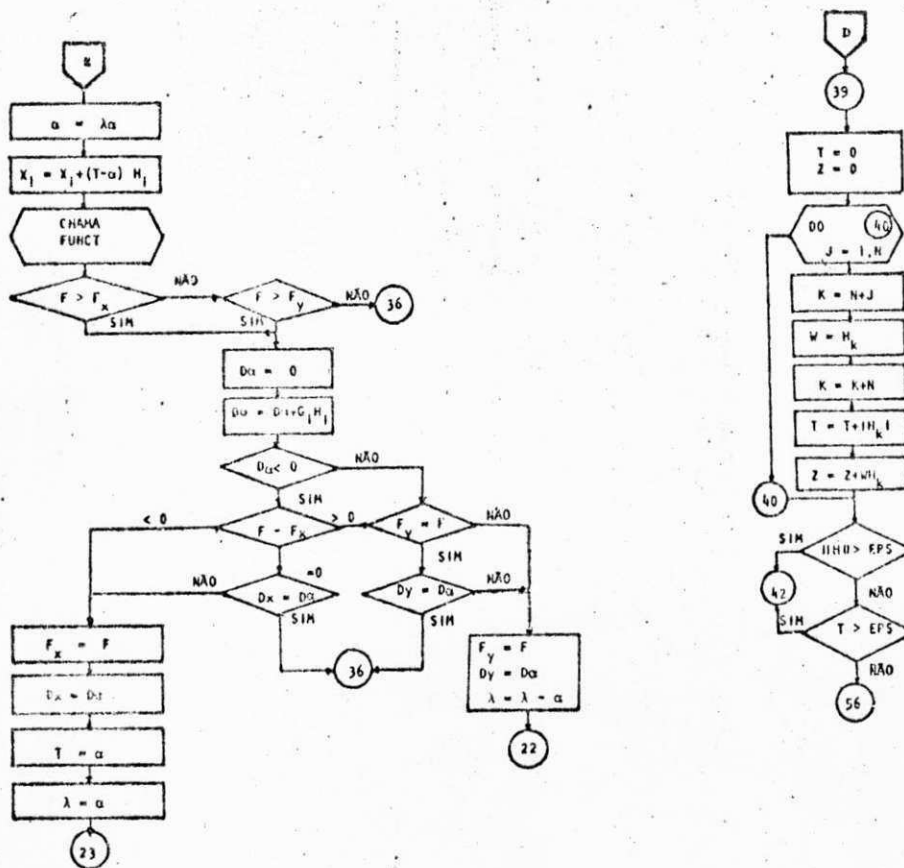


Figura 1.1 (b) Fluxograma detalhado da subrotina FMFP (continuação).



onde:

FUNCT é uma subrotina construída pelo usuário, referente à função minimizada, cuja forma geral é

SUBROUTINE FUNCT(N,ARG,VAL,GRAD)

na qual, para cada vetor-argumento (ARG), calculam-se o valor da função (VAL) e o vetor gradiente (GRAD), os quais são armazenados em variáveis com essas denominações (ARG,VAL e GRAD) ou outras quaisquer, a critério do usuário, correspondentes às variáveis X,F,e G, da FMFP.

N é o número de variáveis do problema.

X, o vetor n-dimensional que contém o argumento inicial ( $x^0$ ), quando é começado um ciclo iterativo. Ao retornar, X guarda o argumento correspondente ao valor mínimo calculado da função.

F, variável simples que retorna o valor mínimo da função ( $F = F(X)$ ).

G, vetor n-dimensional que retorna o vetor gradiente correspondente ao mínimo -  $G = G(X)$ .

EST é uma variável fixa, igual ao valor mínimo estimado para a função  $f(x)$ .

EPS, tolerância para testar o erro absoluto esperado. Uma escolha razoável de EPS é  $10^{-6}$ .

LIMIT, número máximo de ciclos iterativos.

IER, parâmetro de erros. IER = 0, a função convergiu em n iterações; IER = 1, não houve convergência em n iterações; IER = -1, houve erro no cálculo dos gradientes; IER = 2, a pesquisa linear indica que é provável que não exista mínimo para a função.

H, área de armazenagem de dimensão  $n(n+7)/2$ .

Na descrição acima (i) FUNCT é argumento fictício na FMFP. Se assim for usada, deverá aparecer a declaração EXTERNAL FUNCT no programa principal; (ii) IER = 2 se, caminhando numa das direções calculadas, a função nunca cresce dentro de certa faixa de tolerância do argumento X; ou então, quando o intervalo no qual  $F(X)$  aumenta é pequeno e o argumento inicial se situava relativamente distante do ponto de mínimo, de tal modo que o mínimo foi saltado - isto se deve ao fato de a técnica de pesquisa duplicar o tamanho do passo, até que se encontre um ponto para o qual o valor da função cresça; (iii) nesta programação, em particular, a subrotina FMFP foi incluída no programa principal; a subrotina FUNCT, do usuário, em vista do grande espaço requerido, foi dividida em duas partes - FUNCA e FUNCB e os argumentos de ambas foram postos em área COMMON; e a chamada pelo program principal é feita em sequência:

```
CALL FUNCA(N,F,COST,KASE)
```

```
CALL FUNCB(N,F,COST,KASE)
```

. . .

#### Descrição do Fluxograma de Variação das Constantes de Penalidade

Caixa 1. O primeiro ciclo iterativo de otimização da potência real fornece o fluxo de carga, pelo que apenas restrições de igualdade são utilizadas. Assim, não se usam constantes de penalidade, já que não se necessita de ajustar nenhum valor de  $x$ .  $R_i^0$  tomará em geral o valor 1, ou em torno de 1, o qual não influenciará no tipo de mismatch resultante, apenas alterando a ordem de grandeza do valor da função de um valor conhecido. LIMTA é uma constante inteira.

Limita o número de iterações do problema, tornando-o igual a  $n$  (número de variáveis). EST é uma estimativa do valor inicial da função. KASE determina os casos considerados: KASE = 0, fluxo de carga; KASE = 1, minimização da função penalizada. N indica o número de posições de cada vetor, utilizadas na obtenção do mínimo da função. IK conta o número de ciclos iterativos. O primeiro inicia com IK = 0. Esse número dependerá do programador, o qual deve estabelecer critérios de parada como, por exemplo, que as componentes de  $x^i$  atinjam uma precisão desejada. Nesse programa, particularmente, o número de ciclos é terminado quando IK é igual ou maior do que LIMIT.

Caixa 2. A chamada da subrotina FMFP marca o início de uma ciclo iterativo, o qual é controlado pelo contador IK, ou pelos casos estudados: KASE = 0 ou KASE = 1.

Caixa 3. IK sendo igual a zero, indica que terminou o primeiro ciclo iterativo e, a seguir (caixa 4) é chamada a subrotina FUNCT para imprimir os resultados do fluxo de carga calculado.

Caixa 5. Inicia-se o segundo caso (KASE = 1) da minimização da função-objetivo. Introduzem-se novos fatores de penalidade iniciais os quais se situam nos intervalos  $10^{-4}$  -  $10^{-6}$ , para a potência real,  $10^{-3}$  -  $10^{-5}$ , para a potência reativa; para as restrições de desigualdade, entre  $10^{-5}$  e  $10^{-8}$ . Também se atribuem novos valores a LIMTA, e para o valor estimado (EST) da função. O vetor  $SD_i$  é utilizado na determinação de uma nova constante de penalidade ( $S_i$ ) para pesar a variável cujo mismatch é muito grande.

Caixa 6. O incremento de IK significa o começo de um novo ciclo iterativo, sempre que for menor que LIMTA (caixa 7).

Caixa 8. Incrementa-se o contador KASE e chama-se a função FUNCT (caixa 9), obtendo como resultado o flu-



xo de carga final. Se  $KASE = 2$ , termina (caixa 11).

Caixa 10. Sempre que a  $FUNCT$  é chamada, o valor de  $n$  retornado é igual ao número de variáveis. Daí, a necessidade de se restaurar o valor de  $n = n_0$  (caixa 1). Na caixa 5, quando  $IK \neq 0$ , guarda-se o valor atual do custo (se se está minimizando custos) (caixa 12) e restaura-se o valor de  $n = n_0$ , para determinação da constante de penalidade ( $S_i$ ).

Caixa 13. Toma-se o módulo de cada componente do vetor  $GG_i$ , dos mismatches (em se tratando de problema de sistema de potência) ou das diferenças, e faz-se  $C2$  igual ao maior desses valores. O maior valor absoluto de  $GG_i$  representa um maior desequilíbrio em uma das equações  $X_i^{min} - X_i$  ou  $X_i - X_i^{max}$ . Com isso, determina-se uma constante  $S_i$  para reduzir o mismatch, de tal modo a trazer o valor de  $x_i$  para dentro da região viável (eq. 4.17). Testa-se  $C2$  com 0,002 e/ou com 0,005. Se menor que qualquer desses valores (caixas 14 e 15), significa que a função converge e o processo caminha para o fim; caso contrário, testa-se  $C2$  com o valor absoluto de cada componente de  $GG_i$  (caixas 16 e 17); caso haja algum  $i$  para o qual  $C2 = GG_i$ , faz-se  $AS = S_i$ ,  $AR = R_i$  e  $CP = SD_i$ , para esse ponto  $i$  (caixa 18). Se  $C2$  for menor do que  $CP$  (caixa 19), testa-se o valor de  $L$  com 1 (caixa 28). A finalidade desses testes é determinar uma constante  $SD_i$ , a partir do valor de  $SD_i^0$ , a qual fornecerá o valor da nova constante de penalidade  $S_i$ . Assim, se  $L \neq 1$ , pelas caixas 29 a 37 retorna-se a novo ciclo iterativo, com novo valor de  $S_i$  (caixa 34), enquanto as variáveis  $SS_i$ ,  $L$ ,  $CP$  e  $SD_i$  são alteradas para o próximo cálculo de  $S_i$ . Quando  $L = 1$ , testa-se o valor de  $C2$  com  $0,25CP$ ; se  $C2$  for menor ou igual, retorna-se pelas caixas 29 a 37, novamente; de outro modo, segue-se pelas caixas 39 a 54, e outro valor de  $S_i$  (caixas 42, 45) é retornado, modificando-se os valores de  $R_i$  (caixa 45),  $L$  (caixa 47) e  $SD_i$  (caixa 54) e  $CP$  (caixa 53). Quando  $C2 = CP$  (caixa 20), novamente se testa  $L$



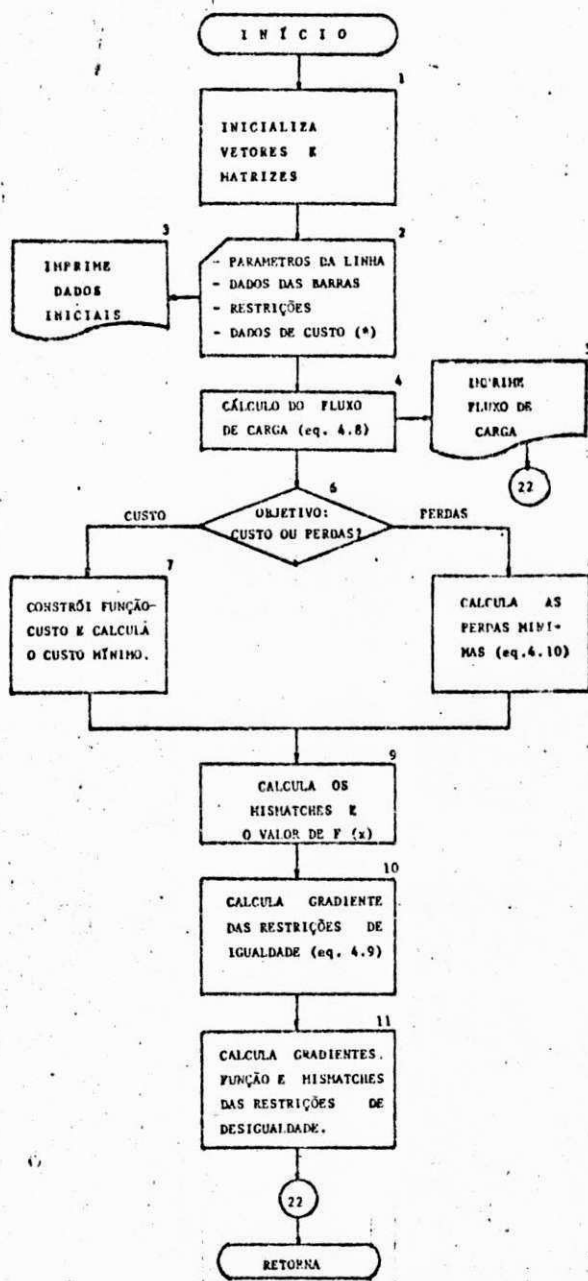


FIGURA 1-2 - PASSOS ESSENCIAIS DA FUNÇÃO DO USUÁRIO (FUNCT)

(caixa 21).  $L \neq 1$ , calcula-se novo  $S_i$  seguindo as caixas 39 - 54; se  $L = 1$ , vai-se para as caixas 39 - 54 levando novos valores de AS (caixa 27), de CP (caixas 25,26) e de C2 (caixas 22,23).

. . .

#### Passos Principais da Subrotina FUNCT (fig. I-2)

A Subrotina FUNCT, construída pelo usuário, terá configuração particular a cada problema que está sendo estudado. No caso de sistemas de potência, tem-se:

Bloco 1. Inicialização dos vetores e matrizes que são usados na conversão do problema. Não é uma medida obrigatória, porém conveniente. Consiste em zerar todas as áreas reservadas, antes de utilizá-las.

Bloco 2. Entrada de dados. Para este problema em particular, a entrada dos dados foi feita em quatro conjuntos: (i) parâmetros da linha; (ii) dados dos barramentos e cargas; (iii) restrições e (iv) dados de custo. Os dados relativos aos barramentos são armazenados em um vetor único  $X$ :  $X^0 = (P^0, Q^0, V^0, \theta^0, m_t^0, \tau^0)$ . Procedeu-se de maneira semelhante com os limites superiores e inferiores das variáveis, armazenando-os nos vetores  $XM_i$  e  $XL_i$ , respectivamente. O sistema estudado tem 13 barramentos; considerando para cada barra  $i$  o conjunto de dados  $(P^i, Q^i, V^i, \theta^i, m_t^i, \tau^i)$ , serão necessárias 78 posições, em cada vetor, para armazenar o conjunto de dados relativos às 13 barras. Ainda assim, essa armazenagem é feita de modo compacto, em que se excluem os zeros, o que torna possível reduzir o espaço de memória requerido. Com relação à entrada de variáveis complexas, foi necessária a criação de dois campos de duas palavras cada, um para a parte real, outro pa-

ra a parte imaginária. Os dados de custo se relacionam àqueles barramentos em que há geração de potência, já que a minimização do custo operacional é feita em função das potências geradas. Finalmente, a listagem dos dados de entrada (bloco 3) possibilita a conferência posterior e a introdução de correções e/ou alterações que se fizerem necessárias.

Bloco 4. O cálculo do fluxo de carga é computado através das equações (4.2 a 4.4), nas quais  $V_i$  e  $V_k$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_k$  são voltagens e ângulos de fase nos terminais de despacho e de recepção, respectivamente. Daí, obtém-se a expressão complexa do fluxo de carga  $I_{ik} + jK_{ik} = i^* V_i e^{j\theta_i}$ , na qual  $I$  e  $K$  são funções de  $V$  e  $\theta$ . O programador deverá levar em conta, também, transformadores reguladores de voltagem (eq. II.13), se existirem. Quando tal acontece, considerar (i) casos em que não estão ligados à linha; (ii) casos em que se acham ligados. Aqui, considerar também a direção do fluxo, da  $i$ -ésima para a  $k$ -ésima barra e vice-versa (Na fase de programação, deve-se ter o cuidado de desmembrar as equações do fluxo de carga em seus componentes reais e imaginários, antes de imprimir os resultados - bloco 5).

Bloco 6. Se o objetivo do analista é obter a minimização de custos, deverá construir a função-custo (bloco 7) para obter o custo mínimo; se o problema focaliza a minimização das perdas, calculam-se as perdas mínimas (bloco 8). Após isso, calculará os mismatches e o valor de  $f(x)$  (bloco 9). Esse valor de  $f(x)$  é fornecido pela equação

$$f(x) = f(P_i) + \sum_{i=1}^n (I_i - P_i + C_i + S_i)^2 / R_i + \sum_{i=n+1}^{2n} (K_i - Q_i + D_i + S_i) / R_i$$

no estudo do fluxo de carga, ou das perdas mínimas. Neste último,  $f(P_i) = 0$ . Os mismatches das potências real e reativa são calculados pela expressão:  $GG_i = AI_i - X_i + C_i$ , em que  $AI_i$  é

um vetor que armazena os valores  $I_i$  e  $K_i$ , calculados;  $X_i$  armazena  $P_i$  e  $Q_i$ ;  $C_i$  é o vetor constante das cargas reais (PL) e reativas (QL).

Bloco 10. Os gradientes são parte essencial na obtenção de mínimos de funções, e são também responsáveis pela maior parte do tempo de processamento, em problemas específicos de sistema de potência, nos quais esse tempo aumenta com o aumento do número de barramentos do sistema.

(i) Da equação (4.16), o gradiente da potência real é definido, de modo geral, por

$$G_i = \frac{\partial}{\partial P_i} (f(P_i) + \sum_i (I_i - P_i + C_i + S_i)^2 / R_i) \quad (I-9)$$

em que  $f(P_i)$  é a função-objetivo de custo (eq.4.13), dependente apenas da potência real gerada  $P_i$ .

$$\begin{aligned} \therefore G_i &= \frac{\partial}{\partial P_i} f(P_i) - 2 \sum_i (I_i - P_i + C_i + S_i) / R_i \\ &= \frac{\partial}{\partial P_i} f(P_i) - \sum_i AG_i \end{aligned}$$

com  $AG_i = 2(I_i - P_i + C_i + S_i) / R_i$ , calculado quando da computação do valor da função (bloco 9). No cálculo das perdas mínimas,  $f(P_i) = 0$ , e

$$G_i = - \sum_i AG_i \quad (I-10)$$

(ii) O gradiente de  $Q_i$  é computado em função das restrições de igualdade relativas à potência reativa; consequentemente, pode ser definido como

$$\begin{aligned} G_{n+i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_i (K_i - Q_i + D_i + S_{n+i})^2 / R_{n+i} \\ &= -2 \sum_i (K_i - Q_i + D_i + S_{n+i}) / R_{n+i} \\ &= - \sum_{n+1}^{2n} AG_i \quad (I-11) \end{aligned}$$

(iii) Gradiente da voltagem. No  $i$ -ésimo barra



mento de um trecho de linha de transmissão  $ik$ , as restrições de igualdade conduzem à expressão

$$\sum_{i=1}^n (I_i - P_i + C_i + S_i)^2 / R_i + \sum_{i=n+1}^{2n} (K_i - Q_i + D_i + S_i)^2 / R_i$$

a qual pode ser substituída pela expressão equivalente

$$\sum_{i=1}^n (\varphi(I_i) + l_i)^2 / R_i + \sum_{i=n+1}^{2n} (\varphi(K_i) + l_i)^2 / R_i \quad (I-12)$$

com  $l_i$  constantes relativamente à voltagem e ao ângulo de fase. Analogamente, no  $k$ -ésimo barramento, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n (\varphi(I_k) + l_i)^2 / R_k + \sum_{i=n+1}^{2n} (\varphi(K_k) + l_i)^2 / R_k \quad (I-13)$$

No cálculo do gradiente de  $V$ , portanto, consideram-se as potências real e reativa fluindo de um barramento  $i$  para um barramento  $k$ , e vice-versa. Desse modo, os gradientes de  $V$ , pelas equações (I-12) e (I-13) acima, serão

$$\begin{aligned} G_{2n+i} &= \left( \frac{\partial \varphi(I_i)}{\partial V_i} + \frac{\partial \varphi(I_k)}{\partial V_i} \right) + j \left( \frac{\partial \varphi(K_i)}{\partial V_i} + \frac{\partial \varphi(K_k)}{\partial V_i} \right) \\ &= \sum_i (AG_i \sum_k \left( \frac{\partial I_i}{\partial V_i} + AG_k \frac{\partial I_k}{\partial V_i} \right)) + \\ &\quad j \sum_i (AG_i \sum_i \left( \frac{\partial K_i}{\partial V_i} - 2V_i Y_{ik} + VART \right) + AG_k \frac{\partial K_k}{\partial V_i}) \end{aligned}$$

onde, pelas equações (4.8),

$$\frac{\partial I_i}{\partial V_i} = \frac{2V_i}{Z_{ik}} \text{sen} \delta_{ik} - \frac{V_k}{Z_{ik}} \text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

$$\frac{\partial I_k}{\partial V_i} = -\frac{V_i}{Z_{ik}} \text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial V_i} &= \frac{2V_i}{Z_{ik}} \text{cos} \delta_{ik} - \frac{V_k}{Z_{ik}} \text{cos}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)) - \\ &\quad 2V_i (Y_{ik} - Y_{ii}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K_k}{\partial V_i} = - \frac{V_k}{Z_{ik}} \cos(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

(iv) Para calcular o gradiente do ângulo de fase, procede-se de maneira semelhante, usando as mesmas equações (I-12) e (I-13).

$$\begin{aligned} G_{3n+i} &= \left( \frac{\partial \varphi(I_i)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \varphi(I_k)}{\partial \theta_i} \right) + j \left( \frac{\partial \varphi(K_i)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \varphi(K_k)}{\partial \theta_i} \right) \\ &= \sum_i (AG_i \sum_k \left( \frac{\partial I_i}{\partial \theta_i} + AG_k \frac{\partial I_k}{\partial \theta_i} \right)) + \\ &\quad j \sum_i AG_i \left( \sum_k \left( \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} + AG_k \frac{\partial K_k}{\partial \theta_i} \right) \right) \end{aligned}$$

com

$$\frac{\partial I_i}{\partial \theta_i} = \frac{|V_i| |V_k|}{Z_{ik}} \cos(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

$$\frac{\partial I_k}{\partial \theta_i} = - \frac{|V_k| |V_i|}{Z_{ik}} \sin(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} = - \frac{|V_i| |V_k|}{Z_{ik}} \cos(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

$$\frac{\partial K_k}{\partial \theta_i} = \frac{|V_k| |V_i|}{Z_{ik}} \sin(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))$$

Os gradientes relativos aos compensadores da linha ou reatores, ou derivações de transformadores (taps) foram omitidos por não se fazerem necessários nesse estudo.

Bloco 11. O valor da função envolvendo as restrições de desigualdade (eq. 4.15 e 4.17) é computado pelas expressões:

$$F = F' + (X_i^{\min} - X_i + S_i)^2 / R_i \quad (I-14)$$

quando  $X_i < X_i^{\min}$

$$e \quad F = F' + (X_i - X_i^{\max} + S_i)^2/R_i \quad (I-15)$$

toda vez que  $X_i > X_i^{\max}$ .  $F'$  é um valor da função já calculado (bloco 9). O gradiente de  $f(x)$ , referido às restrições de desigualdade se soma aos gradientes calculados no bloco 10, for

$$\begin{aligned} G_i &= G_i' + \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i^{\min} - X_i + S_i)^2/R_i \quad (I-16) \\ &= G_i' + 2(X_i^{\min} - X_i + S_i)/R_i \end{aligned}$$

quando  $X_i < X_i^{\min}$ . Analogamente,

$$G_i = G_i' + 2(X_i - X_i^{\max} + S_i)/R_i \quad (I-17)$$

quando  $X_i > X_i^{\max}$ ; nessas expressões,  $G_i'$  é um valor do gradiente já computado (bloco 10). Os mismatches das variáveis são fornecidos pelas equações abaixo.

$$GG_i = X_i^{\min} - X_i, \quad \text{se } X_i < X_i^{\min}$$

ou

$$GG_i = X_i - X_i^{\max}, \quad \text{se } X_i > X_i^{\max}$$

. . .

APÊNDICE II

Determinação das equações do sistema (21,27)

Conceituação de potência complexa. Seja o circuito abaixo:

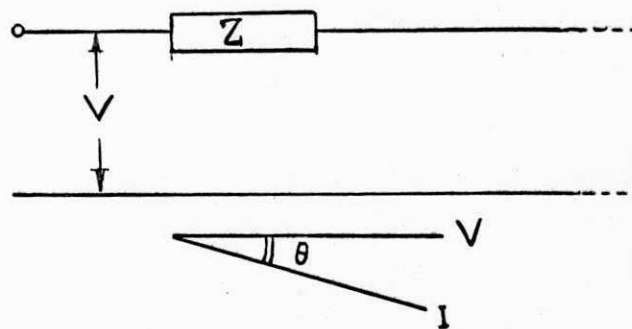


Figura II.1

Para esse circuito, a tensão  $V$  é determinada por

$$V = |V| e^{j\theta_V} \quad (\text{II-1})$$

e a corrente por

$$i = |I| e^{j\theta_I}$$

Aquí,  $\theta_V$  e  $\theta_I$  são os ângulos formados por  $V$  e  $i$ , respectivamente, com relação a algum referencial.



Define-se conjugado de  $i$  como  $i^*$ , tal que

$$i^* = |I| e^{-j\theta_I} \quad (\text{II-2})$$

Vetorialmente, a potência no circuito é dada por

$$\begin{aligned} P_C &= V i^* \quad (\text{II-3}) \\ &= |V| |I| e^{j(\theta_V - \theta_I)} \end{aligned}$$

$P_C$  é uma quantidade complexa e  $\theta_V - \theta_I$  é o ângulo entre  $V$  e  $I$ ; portanto,  $\theta_V - \theta_I = \theta$ , ângulo de fase. De (II-3),

$$\begin{aligned} P_C &= |V| |I| e^{j\theta} \\ &= |V| |I| (\cos\theta + j\text{sen}\theta) \\ &= P + jQ \quad (\text{II-4}) \end{aligned}$$

onde  $P = |V| |I| \cos\theta$  e  $Q = |V| |I| \text{sen}\theta$ . O fluxo de potências real e reativa líquidas na linha é dado pelas potências geradas menos as cargas consumidas; para o barramento  $i$  (fig.4.1b), desprezadas as perdas na linha,

$$\begin{aligned} I_i + jK_i &= (P_i + jQ_i) - (C_i + jD_i) \\ &= (P_i - C_i) + j(Q_i - D_i) \end{aligned}$$

Se, porém, no barramento  $i$  não se registra consumo local, então

$$I_i + jK_i = P_i + jQ_i$$

ou seja, teoricamente as potências geradas são totalmente entregues para consumo. A corrente que flui entre os pontos  $i$  e  $k$  (fig. 4.1b) é dada por

$$i_{ik} = \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}}$$

Todavia, de  $i$  também fluirá uma corrente pela admitância  $Y_{ii}$  de modo que a corrente total que passa pelo barramento, num determinado momento, é dada por

$$i_i = V_i Y_{ii} + \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}} \quad (\text{II-5})$$

Pela definição de potência complexa, tem-se para o  $i$ -ésimo barramento:

$$P_i + jQ_i = V_i i^* \quad \text{ou} \quad (II-6)$$

$$(P_i + jQ_i)^* = V_i^* i$$

Pela figura 4.1c,

$$\begin{aligned} Z &= R + jX \\ &= |Z|(\text{sen} \delta_{ik} + j \text{cos} \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (II-7)$$

onde  $R = |Z| \text{sen} \delta_{ik}$  e  $X = |Z| \text{cos} \delta_{ik}$  e  $\delta_{ik}$  é o ângulo-complemento do ângulo de impedância da linha ( $\text{tang}^{-1} R/X$ ). Portanto,

$$\begin{aligned} (P_i + jQ_i)^* &= V_i^* i \\ &= V_i^* (V_i Y_{ii} + \frac{V_i - V_k}{Z_{ik}}), \text{ da eq. (II-5)} \\ &= |V_i|^2 Y_{ii} + (|V_i|^2 - V_i^* V_k) / Z_{ik} \\ &= |V_i|^2 Y_{ii} + \frac{|V_i|^2 - |V_i||V_k| e^{-j(\theta_i - \theta_k)}}{|Z_{ik}|(\text{sen} \delta_{ik} + j \text{cos} \delta_{ik})} \end{aligned}$$

pelas equações (II-4) e (II-7). E desenvolvendo essas equações, obtém-se

$$\begin{aligned} (P_i + jQ_i)^* &= \frac{|V_i|^2 \text{sen} \delta_{ik} - |V_i||V_k| \text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|} - \\ &\quad j \left( \frac{|V_i|^2 \text{cos} \delta_{ik} - |V_i||V_k| \text{cos}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|} + |V_i|^2 Y_{ii} \right) \end{aligned}$$

Como  $(P_i + jQ_i)^* = P_i - jQ_i$ , conclui-se que

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{|V_i|^2 \text{sen} \delta_{ik} - |V_i||V_k| \text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|} \\ Q_i &= \frac{|V_i|^2 \text{cos} \delta_{ik} - |V_i||V_k| \text{cos}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|} - |V_i|^2 Y_{ii} \end{aligned}$$

A potência total gerada em  $n$  barramentos é finalmente obtida.

$$P_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{|V_i|^2 \operatorname{sen} \delta_{ik} - |V_i| |V_k| \operatorname{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|}$$

$$Q_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{|V_i|^2 \cos \delta_{ik} - |V_i| |V_k| \cos(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k))}{|Z_{ik}|} - |V_i|^2 Y_{ii}$$
(II-8)

A carga  $|V_i|^2 Y_{ii}$  é puramente reativa e depende apenas da reatância do circuito. Os casos a seguir são considerados.

(a) Reatância indutiva (desprezada a resistência  $R$ ), para a qual a corrente se acha  $90^\circ$  em atraso, com relação a  $V$ . Então,  $P = 0$  e  $Q > 0$ .

$$Z = jX$$

$$= j\omega L$$

Como  $Y = 1/Z$ , então

$$Y_{ii} = 1/j\omega L = -j1/\omega L = -1/X_L$$

$$\therefore |V_i|^2 Y_{ii} = -|V_i|^2 \frac{1}{X_L}$$

(b) Outro caso que pode ocorrer é aquele em a corrente  $i$  está  $90^\circ$  adiantada a  $V$ , o que acontece com circuitos puramente capacitivos.  $P=0$  e  $Q < 0$ . As cargas são também puramente reativas, e absorvem potências reativas negativas.

$$Z = jX$$

$$= j1/\omega C$$

Portanto,

$$Y = 1/Z = j\omega C$$

$$\therefore |V_i|^2 Y_{ii} = |V_i|^2 X_C$$

(c) Pode-se ter o caso mais geral, em linhas

de transmissão muito longas, em que a reatância é indutiva e capacitiva; daí, ora há absorção de potências reativas positivas, ora de negativas. Nesse caso,

$$|V_i|^2 Y_{ii} = |V_i|^2 \frac{\omega C}{\omega^2 LC - 1} = \frac{|V_i|^2}{X_{LC}}$$

onde  $X_{LC} = \omega L - 1/\omega C$ .

As equações (II-8) permitem deduzir, de maneira análoga, para o k-ésimo barramento, que

$$P_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{|V_k|^2 \operatorname{sen} \delta_{ki} - |V_k| |V_i| \operatorname{sen}(\delta_{ki} - (\theta_k - \theta_i))}{|Z_{ki}|}$$

$$Q_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{|V_k|^2 \cos \delta_{ki} - |V_k| |V_i| \cos(\delta_{ki} - (\theta_k - \theta_i))}{|Z_{ki}|} = |V_k|^2 Y_{kk} \quad (\text{II-9})$$

As equações (II-9) fornecem as potências real e reativa totais para o sistema de  $n$  barramentos.

#### Determinação das Perdas

O equilíbrio das potências reais geradas se define pela soma das cargas consumidas mais as perdas ocorridas na linha. Conseqüentemente, as perdas serão determinadas pelas potências reais geradas menos as cargas consumidas na linha.

$$L_{ik} = (P_i + P_k) - (C_i + C_k)$$

Das equações (II-8) e (II-9),

$$P_i + Q_k = \frac{(|V_i|^2 \operatorname{sen} \delta_{ik} - |V_i| |V_k| \operatorname{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)))}{|Z_{ik}|} + \frac{(|V_k|^2 \operatorname{sen} \delta_{ki} - |V_k| |V_i| \operatorname{sen}(\delta_{ki} - (\theta_k - \theta_i)))}{|Z_{ki}|}$$



$$\text{onde } |V_k| |V_i| = |V_i| |V_k|$$

$$\text{sen} \delta_{ik} = \text{sen} \delta_{ki}$$

$$|Z_{ki}| = |Z_{ik}|$$

$$\therefore P_i + P_k = \frac{(|V_i|^2 + |V_k|^2) \text{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} -$$

$$\frac{|V_i| |V_k| (\text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_i - \theta_k)) + \text{sen}(\delta_{ik} - (\theta_k - \theta_i)))}{|Z_{ik}|}$$

Desenvolvendo essa equação, tendo em conta que  $\cos(\theta_k - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_k)$  e  $\text{sen}(\theta_k - \theta_i) = -\text{sen}(\theta_i - \theta_k)$ , obtém-se:

$$P_i + P_k = \frac{\text{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} (|V_i|^2 + |V_k|^2 - 2|V_i| |V_k| \cos(\theta_i - \theta_k))$$

Desse modo, as perdas totais do sistema serão dadas por

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\text{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} (|V_i|^2 + |V_k|^2 - 2|V_i| |V_k| \cos(\theta_i - \theta_k)) - \quad (C_i + C_k) \quad (II-10)$$

O coeficiente 1/2 que aparece na expressão deve-se ao fato de na dedução das perdas considerar-se a soma das equações do fluxo de potência do barramento i para o barramento k e vice-versa. Agora, se se leva em conta que

$$\cos(\theta_i - \theta_k) = 1 - 2 \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_i - \theta_k}{2} \right)$$

então,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\text{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} (|V_i| - |V_k|)^2 + 4|V_i| |V_k| \text{sen}^2 \frac{\theta_i - \theta_k}{2}$$

A variação  $\theta_i - \theta_k$  sendo muito pequena, pode-se tomar a aproximação

$$4\text{sen}^2 \frac{\theta_i - \theta_k}{2} \approx 4\left(\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right)^2 = (\theta_i - \theta_k)^2$$

Tomando, também,

$$\Delta V_{ik} = |V_i| - |V_k|$$

$$\Delta \theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$$

obtem-se, por fim,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\text{sen} \delta_{ik}}{|Z_{ik}|} (V_{ik}^2 + |V_i| |V_k| \theta_{ik}^2) \quad (\text{II-11})$$

A equação (II-11) estabelece que as perdas na linha são função da voltagem e do ângulo de fase.

Quando se deduziu a corrente que flui na linha (II-5), não foi levado em consideração o transformador em cada terminal, como sempre ocorre na prática. Pelo diagrama unifilar (fig.4.1a), existe um transformador  $T_1$  no terminal de despacho, o qual se representa como no esquema abaixo.

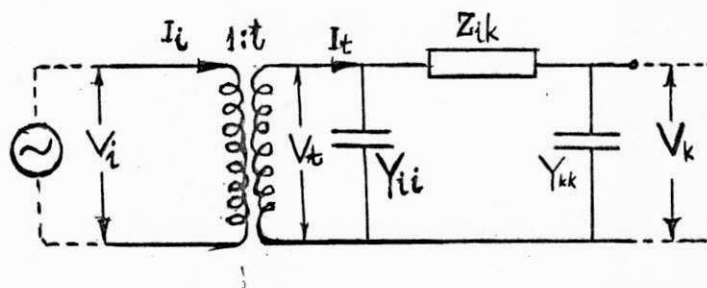


Figura II.2 - Representação de um transformador no circuito equivalente.

Supõe-se que a razão do transformador é 1:t, e que está ligado entre as barras  $ik$ . A corrente que chega a T, vinda do

gerador, é  $I_i$ ; e a que sai de T é  $I_t$ . A voltagem que chega,  $V_i$ ; e a que sai de T,  $V_t$ . Voltagem e corrente referidas à voltagem e à corrente que chegam são respectivamente:

$$\begin{aligned} I_t &= I_i/t \\ V_t &= t.V_i \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

A corrente que sai do transformador e a que chega ao terminal de recepção k são, respectivamente,

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{V_t - V_k}{|Z_{ik}|} + V_t Y_i \\ I_k &= \frac{V_k - V_t}{|Z_{ik}|} + V_k Y_k \end{aligned}$$

Pelas equações (II.13) e (II.14),

$$I_i = t.I_t$$

$$\therefore I_i = \frac{V_i - V_k/t}{(|Z_{ik}|/t^2)} + t^2 V_i Y_i$$

e

$$I_k = \frac{V_k - tV_i}{|Z_{ik}|} + V_k Y_k$$

(II-13)

APÊNDICE III

Problema-teste (ver referência 23)

Modelo matemático do sistema de Saskatchewan Power Corporation, Saskatoon, Canada. O custo operacional mínimo foi obtido usando-se a função-objetivo abaixo (eq. 4.16).

$$F = \sum_{i=1}^n f(p_i) + \sum_{i=1}^n [(I_i - p_i + C_i + S_i)^2 / R_i + (K_{n+i} - Q_{n+i} + D_{n+i} + S_{n+i})^2 / R_{n+i}] + \sum_{i=1}^n [(X_i^{\min} - X_i + S_{2n+i})^2 / R_{2n+i} + (X_i - X_i^{\max} + S_{2n+i})^2 / R_{2n+i}]$$

O problema está sujeito a restrições de igualdade: (III.1)

$$\begin{aligned} I_i(V, \theta) - p_i + C_i &= 0 \\ K_i(V, \theta) - Q_i + D_i &= 0 \end{aligned} \quad (III.2)$$

e de desigualdade:

$$\begin{aligned} p_i^{\min} &\leq p_i \leq p_i^{\max} \\ Q_i^{\min} &\leq Q_i \leq Q_i^{\max} \\ V_i^{\min} &\leq V_i \leq V_i^{\max} \\ \theta_i^{\min} &\leq \theta_i \leq \theta_i^{\max} \end{aligned} \quad (III.3)$$

A solução foi obtida em computador IBM 360/65, por aplicação do algoritmo composto. Os dados utilizados encontram-se nas tabelas que se seguem.



Tabela III-1

Parâmetros da linha (sistema da Saskatchewan Power Corporation, Saskatoon (Canada). Base de 100 MVA.

Barramentos		R	X	Y	TAP
I	J	(p.u.)	(p.u.)	(p.u.)	(p.u.)
1	2	0,00740	0,06070	0,25930	
2	4	0,00860	0,07060	0,30170	
2	3		0,03000		1,05000
4	5		0,01550		1,02500
5	6	0,03280	0,13250	0,03260	
5	13	0,11910	0,27040	0,03280	
5	7	0,54300	1,89000	0,07400	
6	7	0,05360	0,21500	0,04750	
7	8	0,01990	0,09330	0,03420	
9	8		0,01870		1,04000
9	10	0,01070	0,06170	0,44710	
10	11		0,03230		1,05000
11	12	0,07600	0,33300	0,17000	
12	13	0,13690	0,53040	0,07060	
13	3	0,14940	0,33920	0,04120	

Tabela III-2

Dados dos Barramentos, à base de 100 MVA.

Barra	Potências Geradas	Voltagem	Fase	Cargas Consumidas	Compens.	Taps		
I	P	Q	V	$\theta$	PL	QL	ZR	$m_t$
1	1,7052	-0,0550	1,0500	0,1644				
2			1,0290	0,0695				
3			0,9715	0,0452	0,5634	0,0390	3,3330	1,00
4			0,9993	0,0134				
5	0,5028	0,1413	0,9661		1,6998	0,0904	3,3330	1,00
6	0,6834	-0,4720	0,9337	0,0989				
7			0,9424	0,0714	0,7046	0,0866		
8			0,9555	0,1380	1,4847	0,4224	3,3330	0,1500 1,00
9			1,0075	0,1777				
10	3,8209	0,4080	1,0583	0,2974				
11			1,0008	0,2493	0,7475	0,1322		
12			0,8920	-0,0808	0,9025	0,0674	5,4000	1,00
13			0,9254	-0,0727	0,5332	0,0688		

Tabela III-3

Restrições sobre as variáveis do sistema

Barra I	$p^{\min}$	$p^{\max}$	$Q^{\min}$	$Q^{\max}$	$V^{\min}$	$V^{\max}$	$m_t^{\min}$	$m_t^{\max}$	$\tau^{\min}$	$\tau^{\max}$
1	1,50	1,70	-1,38	1,39	0,90	1,05				
2					0,90	1,05	0,90	1,05		
3					0,90	1,05				1,00
4					0,90	1,05	0,90	1,05		
5	0,30	0,59		0,98	0,90	1,05				1,00
6	0,50	0,70	-0,81	0,81	0,90	1,05				
7					0,90	1,05				
8					0,90	1,05				1,00
9					0,90	1,05	0,85	1,05		
10	3,80	4,00	-1,10	2,26	0,90	1,06	0,90	1,10		
11					0,90	1,05				
12					0,90	1,05				1,00
13					0,90	1,05				

Tabela III-4

Dados de Custo do sistema

Barra No	$a_1$ (\$)	$a_2$ (\$/MW)	$a_3$ (\$/MW <sup>2</sup> )	$a_4$ (\$/MW <sup>3</sup> )
1	0,00000	21,00000	0,00000	0,00000
5	44,00000	127,17990	55,00000	0,00000
6	0,00000	21,00000	0,00000	0,00000
10	144,42990	45,63999	14,94999	0,00000