

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Soluções escalares em cosmologia de branas

Jardél Lucena da Silva

CAMPINA GRANDE

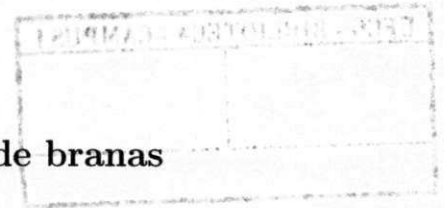
2011

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Soluções escalares em cosmologia de branas**



**Jardél Lucena da Silva**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

2011



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCCG

S586s Silva, Jardél Lucena da.  
Soluções escalares em cosmologia de branas. / Jardél Lucena da Silva.  
– Campina Grande, 2011.  
62 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".  
Referências.

1. Cosmologia de Branas. 2. Formalismo de Primeira Ordem.  
3. Campos Escalares. I. Brito, Francisco de Assis de II. Título.

CDU 53:524.8(043)

**JARDEL LUCENA DA SILVA**

**SOLUÇÕES ESCALARES EM COSMOLOGIA DE BRANAS**

Dissertação aprovada em 30/06/2011

**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

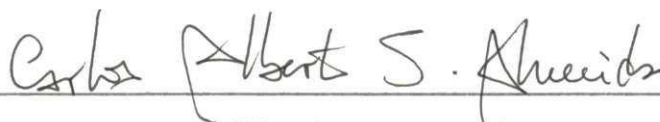
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro interno)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
Departamento de Física - UFC



*Aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Dr. Francisco de Assis Brito, pela orientação, sugestões, estímulos, competência na condução deste trabalho e principalmente paciência.

- Aos Professores da Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação.

- A Coordenação da Pós-graduação.

- Aos professores e os funcionários do Departamento de Física da Universidade Estadual da Paraíba pela importante contribuição e incentivo na minha formação na graduação.

- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.

- Aos colegas de Pós-graduação, e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

- À CAPES pelo suporte financeiro.

- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho utilizamos o formalismo de primeira ordem para obter soluções cosmológicas em um cenário de mundo brana no qual nosso Universo quadridimensional é considerado como uma 3-brana imersa em um *bulk* penta-dimensional. Consideramos o caso em que a cosmologia é regida por um campo escalar real. Mostramos como podemos utilizar uma continuação analítica para estabelecer uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios, que nos permite obter soluções que podem descrever paredes de domínios de uma maneira simples e direta. Finalmente, destacamos o papel do correspondente ao parâmetro de desaceleração obtido através da continuação analítica.

## ABSTRACT

In this work we use the first-order framework to get cosmological solutions in a braneworld scenario in which our quadridimensional Universe is considered like a 3-brane embedded in a five-dimensional bulk. We consider the case in which the cosmology is governed by a real scalar field. We show how we can use an analytic continuation to establish a correspondence between brane-cosmology and domain-wall, which allow us to get solutions that can describe domain-wall in a simple and direct way. Finally, we contrast the corresponding desacceleration parameter role gotten by analytic continuation.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>4</b>
2.1	Pressupostos Básicos da Cosmologia . . . . .	4
2.2	A métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	6
2.3	A Dinâmica do Universo . . . . .	6
2.4	Consequências Observacionais . . . . .	14
2.4.1	Parâmetros observáveis . . . . .	14
2.4.2	O redshift e a lei de Hubble . . . . .	15
2.4.3	Radiação Cós mica de Fundo . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Inflação</b>	<b>22</b>
3.1	Inflação . . . . .	22
3.1.1	Problemas previstos pelo Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	23
3.1.2	Soluções dos problemas a partir de um mecanismo de inflação . . . . .	26
3.1.3	Inflação devido a um campo escalar . . . . .	29
3.2	Outros problemas em Cosmologia . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Cosmologia de branas e o formalismo de primeira ordem</b>	<b>35</b>
4.1	Formalismo de Primeira ordem . . . . .	35
4.2	Formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas . . . . .	39
4.2.1	Cenário inflacionário na brana devido a um campo escalar . . . . .	41
4.2.2	Exemplos de soluções cosmológicas . . . . .	45

4.3	Correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínio . . . . .	47
4.3.1	Exemplos de paredes de domínios . . . . .	51
5	Conclusões	54
A	A métrica de Friedmann-Robertson-Walker	56

# Lista de Figuras

2.1	Hipersuperfícies espaciais em diferentes instantes . . . . .	5
2.2	Geodésicas das “partículas” do sustrato perpendiculares a uma família de hipersuperfícies espaciais . . . . .	5
2.3	Espaço hiperbólico . . . . .	7
2.4	Espaço plano . . . . .	7
2.5	Espaço esférico . . . . .	7
2.6	Comportamento da densidade de energia de cada uma das fontes de acordo com a evolução do fator de escala . . . . .	11
2.7	Sinal luminoso proveniente de um emissor $P$ e recebido por um observador $O$	16
2.8	Sinais luminosos sucessivos provenientes de um emissor $P$ e recebidos por um observador $O$ . . . . .	16
2.9	Dados obtidos por Hubble que lhe permitiram concluir que o universo estava em expansão . . . . .	19
2.10	Concordância entre a distribuição do espectro da radiação de um corpo negro e a radiação cósmica de fundo obtida pelo satélite COBE. . . . .	20
3.1	Representação de uma era inflacionária que teria ocasionado a planaridade do Universo . . . . .	28
3.2	Curvas de Rotação de Galaxias Espirais . . . . .	33
4.1	O fator de escala $a_0$ para $\sigma = 1/5$ (linha vermelha) e para $\sigma = 30$ (linha verde). Valores de $\sigma$ altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o fim da inflação é estabelecido em $t_0 = 10$ . . . . .	46

4.2	O parâmetro de desaceleração $q$ para $\sigma = 1/5000000$ (linha vermelha) e para $\sigma = 3000000$ (linha verde), onde valores de $\sigma$ altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva) e o fim da inflação é estabelecido em $t_0 = 10$ . . .	46
4.3	O fator de escala $a_{0-}$ para $\sigma = 1/30$ (linha verde) e para $\sigma = 3/5$ (linha vermelha). Valores de $\sigma$ altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o início da inflação é estabelecido em $t_0 = 10$ . . . .	47
4.4	O fator de escala $a_{0+}$ para $\sigma = 1/30$ (linha verde) e para $\sigma = 3/5$ (linha vermelha). Valores de $\sigma$ altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o fim da inflação é estabelecido em $t_0 = 10$ . . . . .	47
4.5	O parâmetro de desaceleração $q$ para $\sigma = 3/5$ (linha vermelha) e para $\sigma = 1/15$ (linha verde). . . . .	47
4.6	Fator de empenamento para $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$ e $\sigma = 1$ . . . . .	52
4.7	Parâmetro de desaceleração para o caso em que $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$ e $\sigma = 1$ .	52
4.8	Fator de empenamento para $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \tanh \phi$ e $\sigma = 1$ . . . . .	53
4.9	Parâmetro de desaceleração para $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \tanh \phi$ e $\sigma = 1$ . . . . .	53



# Capítulo 1

## Introdução

A Cosmologia foi consolidada com o advento da Teoria da Relatividade Geral, elaborada por Albert Einstein. Baseada nesta teoria e apoiando-se em outros postulados como o princípio cosmológico e o postulado de Weyl, foi possível se estabelecer modelos que ficaram conhecidos como modelos do tipo *Big Bang*, nos quais o Universo teria surgido de uma singularidade e em seus primórdios se encontrava com uma densidade de energia e temperatura extremamente elevadas [1, 2, 3].

Tais soluções são obtidas a partir das chamadas equações de Friedmann, que descrevem a dinâmica do Universo como um todo.

Embora o modelo tipo *Big Bang* tenha se estabelecido como o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) devido a enorme concordância em descrever boa parte do que conhecemos sobre o Universo hoje, juntamente com algumas confirmações de predições teóricas verificadas observacionalmente, sabe-se que o referido modelo possui alguns problemas.

Uma das principais propostas existentes na literatura utilizadas para solucionar vários problemas do MCP trata-se de considerar um cenário onde o Universo passa por uma fase inflacionária, onde sofre uma expansão extremamente rápida. Um possível agente causador da inflação pode ser a presença de um campo escalar.

Outros problemas investigados em Cosmologia se tratam da recente descoberta de que o Universo se encontra em uma fase de expansão acelerada, o que requer a existência de um novo componente que responda por cerca de 3/4 do conteúdo total de energia do

Universo, conhecido como energia escura [2, 3, 4].

Uma das formas de se considerar propriedades da energia escura consiste em admitir um cenário onde a dinâmica do Universo seja dominada também por um campo escalar (com propriedades semelhantes ao campo escalar responsável pela inflação). Uma importante dificuldade relacionada a descrição de tais propriedades se deve a um fato intrínseco da própria cosmologia, que por ser governada pelas equações de Einstein, resultam-se equações diferenciais não-lineares em geral de difíceis resoluções.

Além disso, ao se considerar campos escalares no modelo, outras equações devem ser acrescentadas, aumentando ainda mais tal dificuldade. Por este motivo, investigações acerca da identificação das propriedades gerais nas equações de movimento na presença de campos escalares constitui um tema relevante.

Neste trabalho nos focalizamos no estudo da cosmologia de branas [5, 6] na qual se considera o nosso Universo quadridimensional como a uma 3-brana imersa em cinco dimensões. Como veremos, as equações de Friedmann são modificadas devido à existência de uma dimensão extra. Mais especificamente, a densidade de energia contribui com a porção linear padrão e uma outra quadrática típica de cosmologia de branas.

Dentro deste contexto, vamos nesta dissertação explorar um método conhecido como formalismo de primeira ordem, que permite intercambiar as equações de movimento com as quais temos que lidar para descrever a dinâmica do sistema, usualmente de segunda ordem, por equações diferenciais de primeira ordem [7, 8].

A partir de tal método podemos determinar soluções cosmológicas de uma maneira alternativa simples e bastante direta. Além disto, consideramos como tal formalismo pode ser utilizado para determinar soluções também num contexto de cosmologia de branas e de paredes de domínio, estabelencendo assim uma correspondência entre estes.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2, fazemos uma breve revisão sobre o Modelo Cosmológico Padrão, no qual utilizando a métrica de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) e as equações de campo de Einstein, determinamos as equações de Friedmann, que fornecem a dinâmica do Universo em larga escala; onde abordamos

ainda alguns aspectos relacionados às consequências observacionais do modelo. No capítulo 3, abordamos alguns problemas do MCP e introduzimos um cenário inflacionário regido por um campo escalar, e mencionamos brevemente problemas recentes discutidos em Cosmologia. No capítulo 4, mostramos como podemos utilizar o formalismo de primeira ordem para intercambiar as equações de movimento para equações diferenciais de primeira ordem, e assim, obter soluções mais facilmente. Mostramos também aplicações de tal formalismo em Cosmologia de Branas, e como através de uma continuação analítica, podemos estabelecer uma correspondência entre estas últimas soluções e paredes de domínios.

# Capítulo 2

## Cosmologia

Neste capítulo abordamos a cosmologia em seus aspectos mais básicos. Discutimos os pressupostos teóricos nos quais ela está baseada, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e como obter as equações de Friedmann, com as quais podemos determinar a dinâmica do Universo. Expomos algumas soluções de tais equações, que são conhecidas como modelos FRW, e discutimos um pouco sobre as bases observacionais da cosmologia.

### 2.1 Pressupostos Básicos da Cosmologia

A Cosmologia Moderna está baseada em três pressupostos teóricos, a saber, a Teoria da Relatividade Geral, o princípio cosmológico e o postulado de Weyl.

Pelo fato da cosmologia se tratar do estudo da dinâmica da estrutura do Universo como um todo, torna-se conveniente, a priori, considerar o estudo da estrutura de tal sistema em larga escala. Nesta escala apenas a interação gravitacional se mostra relevante, e por isso, justifica-se a utilização da teoria da relatividade geral.

O segundo postulado no qual a cosmologia moderna se baseia é conhecido como princípio cosmológico, o qual admite que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala<sup>1</sup>.

Não obstante, ao se afirmar que o Universo é homogêneo e isotrópico, poder-se-ia pensar que estamos afirmando que o espaço-tempo possui tais propriedades. No entanto,

---

<sup>1</sup>Afirmar que o Universo é homogêneo significa dizer que ele é o mesmo em qualquer lugar; já afirmar que ele é isotrópico significa dizer que ele parece o mesmo independentemente da direção em que se olhe.

o que se verifica observacionalmente é que o Universo é homogêneo e isotrópico apenas espacialmente, e evolui no tempo [4].

A partir disto, podemos enunciar o princípio cosmológico de uma maneira mais precisa: Existe um tempo cósmico<sup>2</sup>  $t$ , no qual ao se tomar  $t = cte$ , o espaço se apresenta como hipersuperfícies homogêneas e isotrópicas.

Desta forma, o princípio cosmológico requer que o espaço-tempo possa ser “fatiado” ou “folheado” em hipersuperfícies espaciais que são esfericamente simétricas sobre qualquer ponto destas [9] (veja a figura [2.1]).

O terceiro pressuposto da Cosmologia Moderna é conhecido como postulado de Weyl. Em essência, este postulado considera que um fluido permeia o espaço-tempo e que as galáxias se movem nele como “partículas fundamentais”. Tal postulado requer que as geodésicas<sup>3</sup> destas “partículas” sejam ortogonais a uma família de hipersuperfícies espaciais [9] (veja a figura [2.2]). Isto permite que tal substrato possa ser descrito como um fluido

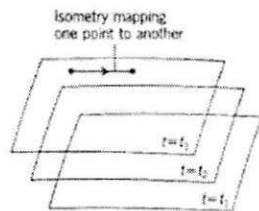


Figura 2.1: Hipersuperfícies espaciais em diferentes instantes

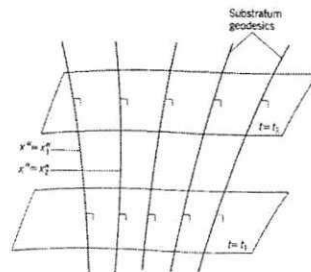


Figura 2.2: Geodésicas das “partículas” do substrato perpendiculares a uma família de hipersuperfícies espaciais

perfeito.

Apesar do movimento das galáxias não seguirem este movimento exatamente, o postulado de Weyl reflete aproximadamente a situação atual do nosso universo.

<sup>2</sup>O tempo cósmico pode ser entendido como o tempo próprio de observadores que vêem o Universo homogêneo e isotrópico.

<sup>3</sup>Grosso modo, podemos entender geodésica como sendo a curva de menor comprimento que une dois pontos.

## 2.2 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

De acordo com a teoria da relatividade geral o espaço-tempo pode ser entendido como uma variedade Riemanniana<sup>4</sup>, quadridimensional, com curvatura e localmente lorentziana<sup>5</sup> [10].

O objeto geométrico central da variedade Riemanniana é o tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , que é função do ponto na variedade. Todas as propriedades geométricas de uma Variedade são determinadas a partir dele: norma, paralelismo e curvatura [10]; com isto se justifica a importância de se conhecer a métrica de um espaço.

Apoiando-se nos três pressupostos básicos mencionados no item anterior, pode-se mostrar que a métrica<sup>6</sup> que descreve o espaço-tempo em larga escala é dada por<sup>7</sup>:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (2.2.1)$$

onde  $k$  é a constante de curvatura, que pode assumir os valores  $-1$ ,  $0$  ou  $+1$ , e  $a(t)$  é uma função do tempo que age como coeficiente da parte espacial da métrica, que é chamada de *fator de escala*. Tal métrica é chamada de métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

Para cada valor específico da constante de curvatura a geometria do espaço assume uma forma:

$$k = \begin{cases} -1 & \Rightarrow \text{geometria hiperbólica} \\ 0 & \Rightarrow \text{geometria plana} \\ +1 & \Rightarrow \text{geometria esférica} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Como está ilustrado nas figuras [2.3], [2.4] e [2.5].

## 2.3 A Dinâmica do Universo

Uma vez conhecida a métrica FRW podemos perceber claramente que, independentemente da curvatura  $k$ , existe apenas uma função do tempo (fator de escala) que determina

---

<sup>4</sup>Uma noção de variedade abrange a idéia de um espaço que pode ser curvo e ter uma topologia complicada, mas que em regiões locais ele se assemelha a um espaço euclidiano, onde são válidas as noções básicas usadas neste espaço na análise de conjuntos, funções e coordenadas [11].

<sup>5</sup>Que localmente obedece as transformações de Lorentz.

<sup>6</sup>Ressaltamos aqui que o termo descrito pela equação (2.2.1) é, na verdade, o elemento de linha. No entanto, por abuso de linguagem, tal termo as vezes é referido como sendo a própria métrica, isto pode ser justificado pelo fato de que o elemento de linha é escrito em termo dos elementos da métrica.

<sup>7</sup>Para uma dedução desta métrica consulte o apêndice A.

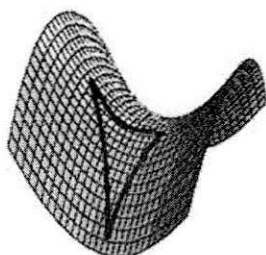


Figura 2.3: Espaço hiperbólico

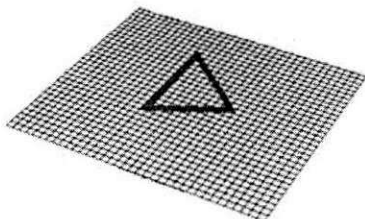


Figura 2.4: Espaço plano

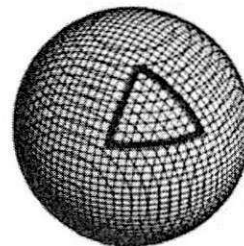


Figura 2.5: Espaço esférico

a evolução dos modelos, agindo como coeficiente da parte espacial da métrica [12].

Devido a relevância desta função, procuraremos agora estabelecer equações que nos permitam determinar sua evolução, e conseqüentemente, a evolução dos modelos. Para isso, além da própria métrica FRW, nos utilizaremos das equações de campo de Einstein em sua forma mais geral, isto é, com o termo cosmológico ( $\Lambda g_{\mu\nu}$ )<sup>8</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.3.3)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente (os quais estão associados ao tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$  que descreve a curvatura do espaço),  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum, que descreve a distribuição de energia do Universo,  $G$  é a constante gravitacional Newtoniana e  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

Podemos ainda reescrever tal equação simulando o termo cosmológico por meio de um tensor energia-momentum de um fluido perfeito. Com isto temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}) \quad (2.3.4)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} = -\rho_{\Lambda}g_{\mu\nu}$ , sendo  $\rho_{\Lambda}$  a densidade de energia da constante cosmológica.

A partir de agora escreveremos então a equação de Einstein da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.3.5)$$

admitindo que o tensor energia-momentum  $T_{\mu\nu}$  inclui o termo cosmológico.

<sup>8</sup>Este termo foi inicialmente introduzido por Einstein em sua equação para que ele pudesse obter uma solução que descrevesse um universo estacionário.

Do mesmo modo que as equações de Maxwell revelam como os campos elétrico e magnético respondem às cargas e correntes, a equação de campo de Einstein nos mostra como a métrica responde à distribuição de energia e momentum. Tal equação foi uma enorme contribuição de Einstein, uma vez que ela possui um tensor  $T_{\mu\nu}$  que cumpre um papel de fonte da energia [12]. Quanto aos tipos de fontes, destacam-se três como principais: Matéria, Radiação (ou matéria ultra-relativística) e Constante Cosmológica.

Tais fontes podem ser descritas como fluidos perfeitos. O tensor energia-momentum que descreve um fluido perfeito pode ser escrito na seguinte forma covariante

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (2.3.6)$$

onde  $U_\mu$  é o campo de quadri-velocidade do fluido,  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  a pressão do fluido.

Sabemos que num sistema de coordenadas co-móveis<sup>9</sup>, as componentes da quadri-velocidade assumem os seguintes valores

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.3.7)$$

ou  $U_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . Com isto, o tensor energia-momentum torna-se

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 à 3, e cuja correspondente traço dado por

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p \quad (2.3.9)$$

Por outro lado, ao multiplicarmos a equação de Einstein (2.3.5) pela métrica inversa,  $g^{\mu\nu}$ , obtemos o seguinte resultado

$$R = -8\pi GT \quad (2.3.10)$$

Substituindo-o na própria equação de Einstein, obtemos uma equação para o tensor de Ricci em termos do tensor energia-momentum e seu traço

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (2.3.11)$$

---

<sup>9</sup>Ver apêndice A.



Por outro lado, pode-se determinar as componentes do tensor de Ricci utilizando a métrica FRW para calcular o tensor de Riemann (através da equação (A.7)) e tomar a contração neste último em relação ao primeiro e terceiro índices. A partir de tal procedimento se obtém as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.3.12a)$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (2.3.12b)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ .

Comparando agora a equação (2.3.11) com os respectivos índices  $00$  e  $ii$  com as equações (2.3.12), obtemos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \quad (2.3.13a)$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) = 8\pi G \left( T_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}T \right) \quad (2.3.13b)$$

Sstituindo os devidos valores das componentes do tensor energia-momentum e seu traço, obtemos respectivamente as equações

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (2.3.14a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G (\rho + p) \quad (2.3.14b)$$

Agora, das equações (2.3.14), obtemos finalmente a chamada equação de Friedmann

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.3.15)$$

Com isto, determinamos uma equação que nos permite obter a história completa da evolução do fator escala, e conseqüentemente, determinar a dinâmica do universo.

Para resolvermos tal equação precisamos conhecer o comportamento da densidade de energia em relação ao fator de escala. Para isso, consideramos a componente zero da equação da conservação da energia, dada pela derivada covariante do tensor energia-

momentum

$$\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = 0 \quad (2.3.16a)$$

$$\partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (2.3.16b)$$

$$-\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad (2.3.16c)$$

Além disso, sabemos que as fontes de energia consideradas podem ser tratadas como fluidos ideais. Os fluidos, por sua vez, se diferenciam por suas equações de estado. Mas no caso de tais fontes, as equações de estado se reduzem a seguinte forma:

$$p = \omega \rho \quad (2.3.17)$$

onde  $\omega$  é uma constante para cada tipo de fluido:

(a) Para a matéria:  $\omega = 0 \Rightarrow p = 0$

(b) Para a radiação eletromagnética (matéria ultra-relativística):  $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3} \rho$

(c) Para a constante cosmológica:  $\omega = -1 \Rightarrow p = -\rho$

Temos assim uma equação de estado para cada tipo de fluido.

Substituindo então a eq. (2.3.17) na eq. (2.3.16) obtemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (1 + \omega) \quad (2.3.18)$$

e finalmente integrando-a, temos:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (2.3.19)$$

onde admitimos  $a_0 = 1$  em  $t_0$ .

Desta forma, podemos conceber o comportamento da densidade de energia de cada tipo de fonte de acordo com o fator de escala:

(a) Para a matéria:  $\omega = 0 \Rightarrow \rho_M = \rho_{0M} a^{-3}$

(b) Para a radiação eletromagnética (matéria ultra-relativística):  $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_R = \rho_{0R} a^{-4}$

(c) Para a constante cosmológica:  $\omega = -1 \Rightarrow \rho_{\Lambda} = \rho_{0\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

Com as funções acima podemos obter o gráfico exposto na figura 2.6, o qual nos

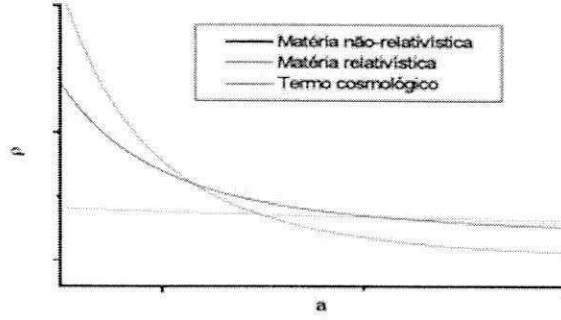


Figura 2.6: Comportamento da densidade de energia de cada uma das fontes de acordo com a evolução do fator de escala

permite concluir que a evolução do universo pode ser dividida em três eras distintas

- (a) A era dominada pela radiação;
- (b) A era dominada pela matéria;
- (c) A era dominada pela constante cosmológica;

Agora que conhecemos o comportamento das densidades de energia das diferentes fontes, podemos reescrever a equação de Friedmann como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.3.20)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \quad (2.3.21)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{0M}a^{-3} + \rho_{0R}a^{-4} + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) - \frac{k}{a^2} \quad (2.3.22)$$

Podemos ainda reescrever esta última equação simulando a curvatura  $k$  como sendo também uma densidade de energia de modo que tal equação se torna:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{0M}a^{-3} + \rho_{0R}a^{-4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{3k}{8\pi G a^2}\right) \quad (2.3.23)$$

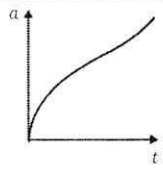
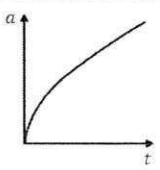
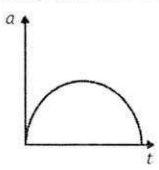
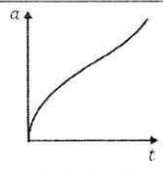
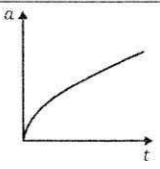
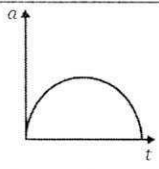
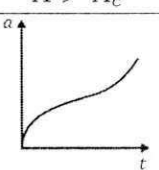
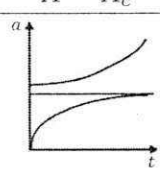
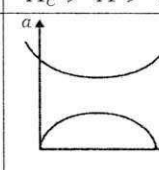
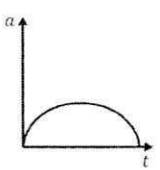
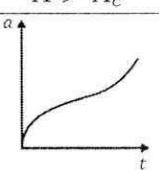
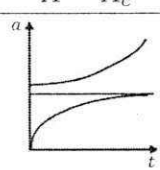
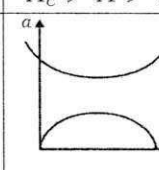
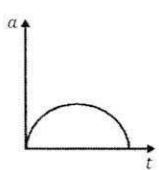
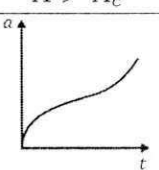
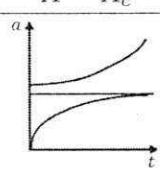
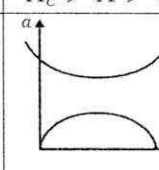
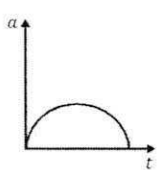
ou ainda

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_{0M}}{a^3} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_{0R}}{a^4} \quad (2.3.24)$$

Podemos então perceber que as soluções dadas pela equação de Friedmann dependerão do valor assumido pela constante de curvatura  $k$  ( $-1$  ou  $0$  ou  $1$ ) e do sinal da constante Cosmológica  $\Lambda$ .

Segue-se na tabela (2.1) uma coleção de gráficos referentes as soluções da equação (2.3.24) que mostram todas as possibilidades.

Tabela 2.1: Modelos de Friedmann

	$\Lambda > 0$	$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$	
$k = -1$				
$k = 0$				
$k = +1$	$\Lambda > \Lambda_c$ 	$\Lambda = \Lambda_c$ 	$\Lambda_c > \Lambda > 0$ 	
				
				

Eles estão divididos em três classes maiores, de acordo com os valores assumidos pela constante de curvatura,  $k = -1, 0, +1$ , e subdivididos em 3, 3, e 8 sub-casos, respectivamente, dependendo do sinal ou valor de  $\Lambda$ .

Segue-se então uma breve descrição sobre cada um dos modelos.

(1)  $k = -1, \Lambda > 0$ . Este é um modelo que se expande indefinidamente, mas que possui 'um kink' onde a taxa de expansão diminui por um período e volta a subir posteriormente aproximando-se assintoticamente da função exponencial  $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ . Inicialmente a taxa de expansão varia com  $t^{2/3}$ .

(2)  $k = -1, \Lambda = 0$ . Este é um modelo que se expande indefinidamente sem kink e varia assintoticamente com  $t$ .

(3)  $k = -1, \Lambda < 0$ . Neste caso a constante cosmológica produz um efeito atrativo e eventualmente pára a expansão e força o modelo a colapsar, levando-o a um evento chamado *big crunch*. Este modelo é as vezes chamado de modelo oscilante devido ao fato de existir a possibilidade de que ele oscile indefinidamente com um ciclo seguido de outro.

(4)  $k = 0, \Lambda > 0$ . Este modelo possui características idênticas ao modelo (1).

(5)  $k = 0, \Lambda = 0$ . Este modelo é chamado de Einstein-de Sitter onde  $a \propto t^{2/3}$ .

(6)  $k = 0, \Lambda < 0$ . Este é um modelo oscilante.

Para os casos em que  $k > 0$ , há mais possibilidades devido a existência de um valor crítico positivo da constante cosmológica  $\Lambda_c$  e um valor crítico associado ao fator de escala  $a_c$ . Temos então:

(7)  $k > 0, \Lambda > \Lambda_c$ . Este é o modelo de Lemaître e é semelhante aos modelos (1) e (4).

No entanto, quando  $\Lambda$  assume valores próximos à  $\Lambda_c$  um kink mais pronunciado surge, o que descreve uma espécie de descanso da expansão nesse período.

(8)  $k > 0, \Lambda = \Lambda_c$ . Há três possibilidades neste sub-caso, que dependerão do valor da constante de integração.

(8-a) Este é o modelo Estático de Einstein no qual a atração gravitacional é exatamente contrabalanceada pela repulsão cósmica ocasionada pela constante cosmológica, sendo portanto o fator de escala constante.

(8-b) Este é um modelo que assintoticamente se aproxima do universo estático de Einstein.

(8-c) Este é o modelo de Eddington-Lemaître no qual ao se regressar de volta no tempo o modelo se aproxima assintoticamente do universo estático de Einstein. É um modelo que se expande assintoticamente se aproximando de função  $\exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$ .

(9)  $k > 0, \Lambda_c > \Lambda > 0$ . Neste caso há duas possibilidades que dependerão da constante de integração.

(9-a) Um modelo oscilante.

(9-b) Este modelo possui uma fase inicial de contração seguido por uma fase de expansão na qual o fator de escala permanece sempre positivo. É simétrico em relação a seu ponto de mínimo com  $R \propto \exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$  para  $t \rightarrow \infty$  e  $R \propto \exp[(\Lambda/3)^{1/2}(-t)]$  para  $t \rightarrow -\infty$ .

(10)  $k > 0, \Lambda = 0$ . Um modelo oscilante.

(11)  $k > 0, \Lambda < 0$ . Um modelo oscilante.

Um fator importante que deve ser notado na maioria dos modelos acima é que o fator

de escala se comporta de modo que quando  $t \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow 0$ . Para um fator de escala nulo, a métrica não é bem definida. Com isto, podemos dizer que em tais modelos o Universo surgiu de uma singularidade. Modelos com essa característica são chamados de modelos do tipo *Big Bang*.

Concluimos então que a equação de Friedmann não conduz a apenas uma solução, mas a várias soluções. Devemos então, confrontar predições específicas de fenômenos de cada modelo com os dados observacionais obtidos a partir de experimentos/observações confiáveis. Baseado no resultado das observações é que se sabe se determinado modelo deve ser abandonado, revisado ou estendido para acomodar os dados.

## 2.4 Consequências Observacionais

As evidências observacionais das propriedades do Universo em que vivemos provém de alguns parâmetros cosmológicos. Deste modo é necessário conhecê-los para se ajustar quantitativamente o modelo ao mundo real, ou eventualmente para evitar discrepâncias entre estes dois.

### 2.4.1 Parâmetros observáveis

Define-se o parâmetro de Hubble como

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.4.25)$$

onde  $H^{-1}$  tem dimensão de tempo. Este é um parâmetro observável cujo valor atual  $H_0$  pode ser medido a partir da lei de Hubble (que será mostrada no item a seguir). Segundo dados atuais do WMAP<sup>10</sup> pode-se afirmar que

$$H_0^{-1} = (13,73 \pm 0,12) \times 10^9 \quad (2.4.26)$$

em números de anos.

---

<sup>10</sup>A Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) é uma sonda da NASA feita com o propósito de estudar o espaço profundo e medir as diferenças de temperatura que se observam na radiação cósmica de fundo em microondas.

Define-se densidade crítica como sendo a densidade que o universo teria se fosse espacialmente plano, tomando  $k = 0$  na equação de Friedmann, obtemos

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.4.27)$$

Com isto vemos que se conhecemos o parâmetro de Hubble podemos determinar a densidade crítica atual, que é dada por

$$\rho_c \approx 0,95 \times 10^{-29} g/cm^3 \quad (2.4.28)$$

valor este equivalente a 6 prótons por metro cúbico.

Uma vez definida a densidade crítica, podemos definir o parâmetro de densidade

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (2.4.29)$$

Disto temos que

$$\begin{aligned} \rho > \rho_0 &\Rightarrow \Omega > 1 \Rightarrow k = +1 \\ \rho = \rho_0 &\Rightarrow \Omega = 1 \Rightarrow k = 0 \\ \rho < \rho_0 &\Rightarrow \Omega < 1 \Rightarrow k = -1 \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Um outro parâmetro de muita importância é o chamado parâmetro de desaceleração, definido por

$$q = -\frac{\ddot{a}/a}{H^2} \quad (2.4.31)$$

onde para  $q > 0$  temos uma aceleração negativa, ou seja, o universo se encontra em expansão desacelerada, e para  $q < 0$  o universo se encontra numa expansão acelerada[3, 10, 12].

## 2.4.2 O redshift e a lei de Hubble

O redshift corresponde a uma alteração na forma como a frequência das ondas de luz é observada em função da velocidade relativa entre a fonte emissora e o receptor.

Devido à invariância da velocidade da luz no vácuo e admitindo um emissor e um receptor em repouso relativo, um raio de luz é captado como uma cor padrão em função de sua frequência. Se houver uma aproximação relativa entre o emissor (fonte de luz)

e o receptor, este último observa um desvio para frequências mais elevadas (desvio para o azul). Já se houver um afastamento relativo, o receptor observador perceberá um desvio para frequências mais baixas (desvio para o vermelho ou redshit). No contexto cosmológico, o redshift ocorre devido à expansão do Universo [2, 4, 9, 12].

Podemos utilizar o redshift para determinar o valor do fator de escala. Para isso, consideremos um sinal luminoso radial emitido por um observador  $P$  e recebido por um observador  $O$  (ver figura 2.7).

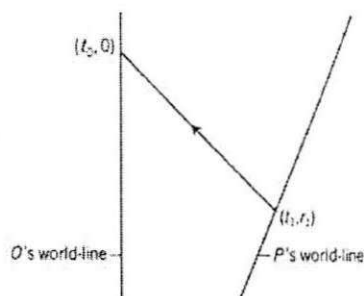


Figura 2.7: Sinal luminoso proveniente de um emissor  $P$  e recebido por um observador  $O$

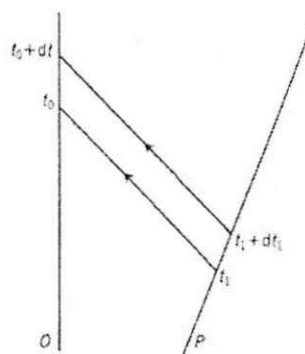


Figura 2.8: Sinais luminosos sucessivos provenientes de um emissor  $P$  e recebidos por um observador  $O$

Consideremos também que o raio luminoso segue uma geodésica nula e que é radial; com isto temos que

$$ds^2 = d\theta = d\phi = 0 \quad (2.4.32)$$

Substituindo estes valores na métrica FRW obtemos

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \quad (2.4.33)$$

que integrando, nos dá

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = f(r_1) \quad (2.4.34)$$

onde adotamos o sinal negativo por convenção e onde ainda

$$f(r_1) = \begin{cases} \arcsin(r_1), & k = +1 \\ r_1, & k = 0 \\ \operatorname{arcsinh}(r_1), & k = -1 \end{cases} \quad (2.4.35)$$



é a distância co-móvel entre o emissor e o receptor.

Consideremos agora dois raios luminosos sucessivos emitidos de  $P$  nos instantes  $t_1$  e  $t_1 + \delta t_1$ , e recebidos por  $O$  em  $t_0$  e  $t_0 + \delta t_0$ , respectivamente (ver figura 2.8).

Admitindo que  $O$  e  $P$  continuam sendo co-móveis e que o fator de escala  $a(t)$  não sofre uma variação apreciável nos intervalos  $\delta t_0$  e  $\delta t_1$ , podemos deduzir que

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.4.36)$$

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.4.37)$$

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \quad (2.4.38)$$

Agora, suponhamos que  $\delta t_1$  é o período de oscilação de um pulso medido pelo observador  $P$  e  $\delta t_0$  é o período de oscilação de um pulso medido pelo observador  $O$ . Com isto temos

$$\nu_0 a(t_0) = \nu_1 a(t_1) \Rightarrow \nu_0 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \nu_1 \quad (2.4.39)$$

onde  $\nu_0$  é a frequência do pulso observado e  $\nu_1$  é a frequência do pulso emitido.

Notemos que para um Universo em expansão  $a(t_0) > a(t_1)$ , e portanto se deve observar  $\nu_0 < \nu_1$ , ou seja, um desvio espectral para o vermelho (por isso o nome redshift).

Define-se então o fator de Redshift como

$$z = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (2.4.40)$$

Tomando  $a(t_0) = 1$  como sendo o fator de escala nos dias de hoje e  $a(t_1) = a(t)$  como sendo o fator de escala em um instante qualquer do Universo, podemos escrever

$$a = \frac{1}{1 + z} \quad (2.4.41)$$

Através desta equação podemos determinar o fator de escala do Universo, bastando para isso conhecer o valor do redshift correspondente a radiação emitida em uma determinada época.

Para o caso em que os observadores  $P$  e  $O$  podem ser considerados ‘próximos’, pode-se dizer que o intervalo entre o instante de emissão e o instante de recepção  $\delta t$  é bem pequeno, de modo que temos  $t_0 = t_1 + \delta t$ . A partir disto podemos reescrever a equação (2.4.40) como

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_0 - \delta t)} \cong \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}(t_0)\delta t} \cong \left(1 - \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\delta t\right)^{-1} \quad (2.4.42)$$

onde expandimos o denominador em série de Taylor até o termo de primeira ordem.

Expandindo agora o último membro da equação anterior e considerando novamente até o termo de primeira ordem, obtemos

$$1 + z \cong 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\delta t \quad (2.4.43)$$

que nos leva à

$$z \cong H(t_0)\delta t \quad (2.4.44)$$

onde  $H(t_0) = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$  é o parâmetro de Hubble.

Da equação (2.4.34) temos que

$$\int_{t_0-\delta t}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_0) \Rightarrow \frac{\delta t}{a(t_0)} = f(r_0) \quad (2.4.45)$$

o que nos permite reescrever a equação (2.4.44) como se segue

$$z \cong H(t_0)a(t)f(r) \quad (2.4.46)$$

ou ainda

$$z \cong H(t_0)d_p \quad (2.4.47)$$

onde  $d_p = a(t)f(r)$  é chamada de distância própria, que nada mais é que a distância co-móvel corrigida pelo fator de escala.

Pode-se interpretar  $z$  como uma velocidade de recessão (devido ao resultado do efeito Doppler). Ao se fazer isto obtemos uma relação similar a lei de Hubble, dada por

$$v = H_0 d_p \quad (2.4.48)$$

que nos diz que a velocidade de recessão observada é diretamente proporcional às distâncias.

Hubble descobriu esta relação estudando a luz emitida pelas galáxias mais próximas, o que lhe permitiu estabelecer o diagrama (2.9).

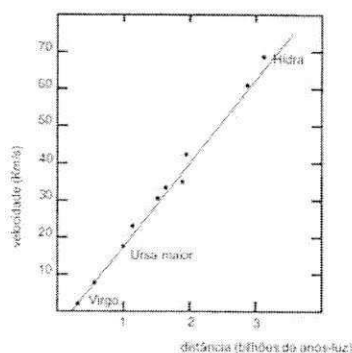


Figura 2.9: Dados obtidos por Hubble que lhe permitiram concluir que o universo estava em expansão

No entanto, a lei de Hubble é satisfeita apenas para galáxias que não estão muito distantes, ou seja, apenas para ‘distâncias pequenas’. Quando o redshift não é muito pequeno, nós temos que repensar cuidadosamente o que entendemos por ‘distância’ em cosmologia, pois a distância física instantânea (distância própria) é uma construção conveniente, mas não em si observável, já que observações sempre se referem a eventos sobre nosso cone de luz passado, e não em nossa hipersuperfície espacial atual [4].

### 2.4.3 Radiação Cósmica de Fundo

Uma previsão importante obtida com base em modelos do tipo Big Bang é a existência de uma radiação eletromagnética distribuída homogênea e isotropicamente. Esta radiação, usualmente chamada de Radiação Cósmica de Fundo (CMB - *Cosmic Microwave background*) foi prevista em 1948 por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman e confirmada por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson em 1965 [3].

Medidas obtidas pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) em 1989 indicam que a relação entre a intensidade da radiação cósmica de fundo com respeito à frequência, apresentam uma incrível concordância com a distribuição de um corpo negro, que é dada

por

$$u(\omega)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_\beta T} - 1} d\omega \quad (2.4.49)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $\omega$  é a frequência,  $c$  a velocidade da luz,  $k_\beta$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura.

O melhor ajuste da curva da distribuição do corpo negro com relação a distribuição da CBM se dá para uma temperatura igual à  $2,725K$  (veja a figura [2.10]).

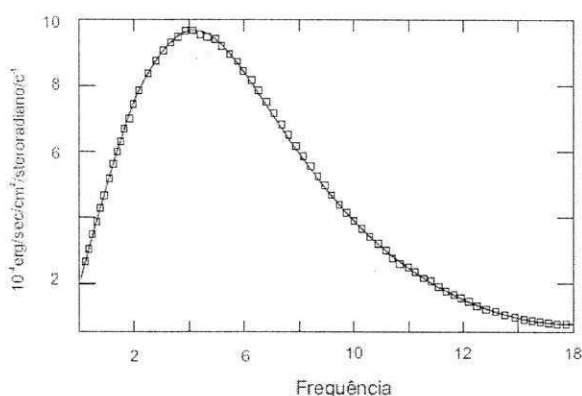


Figura 2.10: Concordância entre a distribuição do espectro da radiação de um corpo negro e a radiação cósmica de fundo obtida pelo satélite COBE.

Sabendo que a densidade total de energia da radiação é dada por

$$\rho_R = \int_0^\infty u(\omega)d\omega = \frac{\pi k_\beta}{15c^3 \hbar^3} T^4 \quad (2.4.50)$$

e que por outro lado  $\rho_R = \rho_{R0}(a_0/a)^4$  concluímos que

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (2.4.51)$$

o que nos permite concluir que quando  $a \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow \infty$ .

A partir disto podemos estabelecer uma idéia de como era o Universo primordial. Daí a justificativa do modelo ser chamado de *hot Big Bang*. Este cenário satisfaz as condições necessárias para o processo de formação de elementos (chamado nucleossíntese) prevista pela física nuclear.

Pode-se então estabelecer o quadro de que o Universo primordial é constituído de uma mistura de partículas elementares ultra-relativísticas que a medida que o Universo

se expande, diminuindo sua temperatura, podem formar estados ligados. Neste cenário, temos que o universo será inicialmente dominado pela radiação e posteriormente pela matéria.

Considerando a razão entre as densidades de radiação e matéria, obtemos:

$$\frac{\rho_R}{\rho_M} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} \left( \frac{a_0}{a} \right) = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} (1 + z) \quad (2.4.52)$$

Para o momento em que as densidades de matéria e radiação contribuem igualmente para a densidade de energia do universo, temos

$$1 + z_{igualdade} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{R0}} \quad (2.4.53)$$

Utilizando os valores atualmente observados da densidade de radiação e de matéria (incluindo matéria escura) obtemos o valor  $z_{igualdade} \cong 3600$ . A partir de estudos da termodinâmica do Universo primordial se pode mostrar que a temperatura do universo em expansão está relacionado ao fator de escala por [1]

$$T = T_0 (1 + z) \quad (2.4.54)$$

onde  $T_0 = 2,75K$ .

Com isto, para um *redshift* da ordem de 3600 temos  $T \cong 9800K$ . Esta é então a temperatura na qual ocorre a transição da era da radiação para a era da matéria. No entanto, a esta temperatura fótons e elétrons continuam interagindo via espalhamento Thomson. Mas com a diminuição da temperatura ocorre o processo de captura dos elétrons livres pelos núcleos ionizados (processo chamado de recombinação) e com isto os fótons não são mais espalhados e desacoplam definitivamente da matéria.

Este último espalhamento ocorreu em  $z \cong 1100$  quando a temperatura do universo era de  $3000K$ , e é usualmente referido como superfície do último espalhamento. Esta radiação primitiva é justamente a radiação cósmica de fundo.

# Capítulo 3

## Inflação

Neste capítulo abordaremos alguns problemas característicos do Modelo Cosmológico Padrão e mostraremos como uma inserção de um mecanismo inflacionário pode resolver tais problemas. Abordaremos principalmente um cenário inflacionário causado devido a predominância da energia potencial de um campo escalar e desenvolveremos sua dinâmica.

### 3.1 Inflação

Devido as confirmações das previsões teóricas estabelecidas pelo modelo do *Big Bang*, desenvolvido a partir de soluções encontradas da equação de Friedmann, tal modelo ganhou credibilidade de modo que passou a ser considerado como o Modelo Cosmológico Padrão (MCP). Apesar da concordância de tais previsões com as evidências observacionais, o referido modelo encontra dificuldades em explicar algumas características do Universo.

Tais dificuldades são usualmente referidas como problemas do modelo. A título de ilustração, abordaremos dois destes problemas, a saber, o problema do horizonte e o problema da planaridade.

### 3.1.1 Problemas previstos pelo Modelo Cosmológico Padrão

Considere um evento  $P$  que acontece em um determinado ponto do espaço-tempo. Define-se horizonte de partículas em relação ao ponto  $P$  como a região que contém eventos que podem ter influenciado o evento  $P$ . Afim de calcular a distância de tal horizonte (raio) considere um raio de luz que se propaga radialmente. De acordo com a equação (2.2.1) temos que a distância co-móvel de um fóton que viaja entre os instantes  $t_1 = 0$  e  $t_2 = t_P$  de uma posição  $O$  à uma posição  $P$  será dada por<sup>1</sup>

$$\Delta\chi_{OP} = \int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.1.1)$$

Para obtermos a distância física em um instante  $t$  qualquer simplesmente multiplicamos por  $a(t)$ , de modo que, para nosso caso, temos

$$d_{hor}(t) = a(t_P) \int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.1.2)$$

Sendo  $a(t)$  uma função monotônica, temos que

$$da = \frac{da}{dt} dt \Rightarrow da = \dot{a} dt \Rightarrow da = \frac{\dot{a}}{a} a dt \Rightarrow da = H a dt \Rightarrow dt = \frac{1}{aH} da \quad (3.1.3)$$

e com isto

$$d_{hor}(t_P) = a(t_P) \int_0^{a(t_P)} \frac{1}{a^2 H} da \quad (3.1.4)$$

Calculemos então o horizonte de partículas num universo dominado pela matéria. Neste caso temos que

$$H = H_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \quad (3.1.5)$$

o que nos leva à

$$d_{hor}(t_P) = 2H_0^{-1} \left( \frac{a_P}{a_0} \right)^{3/2} = 2H_0^{-1} (1 + z_P)^{-3/2} \quad (3.1.6)$$

Este é então o raio de um horizonte de partículas num universo dominado pela matéria. Pode-se mostrar que o horizonte de partículas num universo dominado pela radiação é

---

<sup>1</sup>Onde aqui  $\chi$  denota uma nova coordenada radial que pode ser obtida de modo que  $d\chi = dr/\sqrt{1 - kr^2}$ .

menor; e com isto, podemos estabelecer um limite superior para o horizonte de partículas em qualquer época. Para a época da recombinação, quando  $t = t^*$ ,  $a = a(t^*)$  e  $z^* \cong 1200$ , temos que

$$d_{hor}(t^*) < 2H_0^{-1} \left( \frac{a_P}{a} \right)^{3/2} = 2H_0^{-1} (1 + z_P)^{-3/2} \quad (3.1.7)$$

De forma análoga, podemos estimar o raio da Superfície do Último Espalhamento (*Last Scattering Surface* - LSS). Para isto, tomamos  $t_P = t^*$ . Segue-se então

$$L = a(t^*) \Delta_{XOP} = a(t^*) \int_{t^*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = a^* \int_{a^*}^{a_0} \frac{da}{Ha^2} \quad (3.1.8)$$

Como a partir de  $t^*$  a expansão é dominada pela matéria, temos que

$$H = H_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \quad (3.1.9)$$

Substituindo tal expressão na equação (3.1.8) e efetuando-se a integral, obtém-se

$$L = 2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-1} [1 - (1 + z^*)^{-1}] \quad (3.1.10)$$

$$L \cong 2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-1} \quad (3.1.11)$$

onde usamos o fato de que  $z^* = 1200$ .

Pode-se mostrar que ao se levar em conta a constante cosmológica  $\Lambda$ , obtém-se

$$L > 2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-1} \quad (3.1.12)$$

e com isto se pode estabelecer um limite inferior para o raio da LSS.

Deste modo, pode-se estabelecer uma estimativa da razão entre o horizonte de partículas na época da recombinação e o raio da superfície do último espalhamento, que é dada por

$$\frac{d_{hor}(t^*)}{L} < \frac{2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-3/2}}{2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-1}} \quad (3.1.13)$$

que nos dá

$$\frac{d_{hor}(t^*)}{L} < (1 + z^*)^{-1/2} \quad (3.1.14)$$



lembrando que  $z^* = 1200$ , podemos estimar que

$$\frac{L}{d_{hor}(t^*)} > \frac{1}{3} \times 10^2 \quad (3.1.15)$$

Tomando o cubo desta inequação, obtemos finalmente

$$\left(\frac{L}{d_{hor}(t^*)}\right)^3 > \left(\frac{1}{3} \times 10^2\right)^3 \cong 4 \times 10^4 \quad (3.1.16)$$

que nos diz que num volume interior a superfície do último espalhamento há aproximadamente  $4 \times 10^4$  regiões sem relação causal.

A partir desta constatação prevista pelo modelo surge o seguinte problema: Como podem fótons provenientes de regiões sem conexão causal se encontrarem à mesma temperatura (fato este, observado através da radiação cósmica de fundo)? Este é o chamado problema do horizonte.

Outro problema que surge no modelo é o chamado problema da planaridade. Para entendê-lo considere a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.1.17)$$

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{H^2a^2} \quad (3.1.18)$$

$$1 = \Omega - \frac{k}{H^2a^2} \quad (3.1.19)$$

$$\Omega_k = \Omega - 1 = \frac{k}{H^2a^2} \quad (3.1.20)$$

Do estudo da termodinâmica do Universo primordial, pode-se mostrar que [1] a temperatura do universo em expansão está relacionado ao fator de escala por  $T = T_0(1+z) = T_0/a$ , que implica que  $a \propto T^{-1}$ . Por outro lado, sabe-se que do instante em que a temperatura caiu de  $10^4 K$  até aproximadamente ao que se encontra hoje,  $H$  tem evoluído com  $H = H_0(a_0/a)^{3/2}$ , e portanto,  $\Omega_k \propto a \Rightarrow \Omega_k \propto T^{-1}$  [2].

Deste modo, numa temperatura de  $10^4 K$ , por exemplo, o parâmetro de curvatura  $\Omega_k$  não poderia ter sido maior que  $10^{-4}$ . Pode-se mostrar que na era da radiação, onde a taxa de expansão é  $H = H_0(a_0/a)^2$ , temos que  $\Omega_k \propto T^{-2}$ . Isto nos diz que para temperaturas maiores que  $10^4 K$  o parâmetro de curvatura assumirá valores ainda mais próximos de

zero, o que indica que a curvatura no início do universo deveria ser muito pequena, e portanto, o espaço aproximadamente plano.

De fato, não há razão que impeça que a curvatura tenha sido muito pequena no universo primordial; no entanto, o valor do parâmetro de curvatura  $\Omega_k = 0$  é um ponto instável no Universo primordial dominado por radiação/matéria, de modo que se tal valor sofresse algum desvio, este teria que aumentar com o tempo [13, 14]. Por que então se observa  $\Omega_k \cong 0$  hoje? Este é o chamado problema da planaridade.

Na tentativa de resolver estes e outros problemas, passou-se a considerar um modelo no qual o Universo teria passado por uma era inflacionária, onde teria aumentado de tamanho rapidamente. Tais idéias foram inicialmente incitadas por A. Guth, que percebeu que a inflação poderia solucionar problemas do Modelo Cosmológico Padrão [15].

### 3.1.2 Soluções dos problemas a partir de um mecanismo de inflação

Vejamos inicialmente como a introdução de um mecanismo de inflação pode resolver os problemas citados na seção anterior. Abordamos inicialmente a solução do problema da planaridade.

Considere que o Universo tenha começado com um período de inflação durante o qual  $a(t)$  cresce exponencialmente de acordo com um grande fator  $e^{\mathcal{N}}$ , e posteriormente passa pelo período de domínio de radiação, matéria e energia de vácuo. Se  $|k|/a^2 H^2$  tinha o valor da ordem da unidade no começo da inflação, e no instante  $t_I$  no fim da inflação  $|k|/a_I^2 H_I^2$  tinha o valor da ordem de  $e^{-2\mathcal{N}}$ , onde  $a_I$  e  $H_I$  são o fator escala e a taxa de expansão no instante  $t_I$ , então hoje se deve ter

$$|\Omega_k| = |k|/a_0^2 H_0^2 = e^{-2\mathcal{N}} \left( \frac{a_I^2 H_I^2}{a_0^2 H_0^2} \right) \quad (3.1.21)$$

Deste modo, o problema da planaridade é evitado se a expansão durante a inflação tem um limite inferior dado por

$$e^{\mathcal{N}} > \left( \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right) \quad (3.1.22)$$

Para avaliar isto suponhamos que  $a_I H_I \cong a_1 H_1$ , onde  $a_1$  e  $H_1$  são, respectivamente, o fator de escala e a taxa de expansão no início da era dominada pela radiação-matéria. Pode-se expressar a taxa de expansão para tal era como

$$H = \frac{H_{EQ}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a_{EQ}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{EQ}}{a}\right)^4} \quad (3.1.23)$$

onde  $a_{EQ} = a_0 \Omega_R / \Omega_M$  e  $H_{EQ} = \sqrt{2\Omega_M} H_0 (a/a_{EQ})^{3/2}$  são o fator de escala e a taxa de expansão quando a distribuição de energia da radiação e da matéria são iguais. Admitindo que  $a = a_1 \ll a_{EQ}$ , temos

$$H = \frac{H_{EQ}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{EQ}}{a_1}\right)^2 \quad (3.1.24)$$

Usando a equação acima para eliminar  $a_1$  na equação (3.1.22), obtem-se tal inequação em termos de parâmetros que podem ser estimados. Com, isto temos

$$e^{\mathcal{N}} > \left(\frac{\Omega_M a_{EQ}}{a_0}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \Omega_M^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_{0,crit}}\right)^{1/4} = \frac{[\rho_1]^4}{0,037 h eV} \quad (3.1.25)$$

onde  $\rho_1$  é a densidade de energia no início da era da radiação e  $\rho_{0,crit}$  é a densidade crítica atual, estimada no valor de  $[3,00 \times 10^{-3} eV]^4 h^2$ .

Para sabermos o quanto o Universo pode ter se expandido no período inflacionário precisamos ter alguma idéia da densidade de energia no fim da inflação. O sucesso da teoria da nucleossíntese cosmológica exige que  $\rho_1$  não pode ser menor que  $[1 MeV]^4$ . Neste caso, a equação acima, considerando  $h = 0,7$ , requer que o universo tenha se expandido durante a inflação por um fator onde  $\mathcal{N} = 17$ . Por outro lado, espera-se que  $\rho_1$  não seja maior que a densidade de energia de Planck, dada por  $[1,22 \times 10^{19} eV]^4$ . De acordo com a eq. (3.1.25). Isto requer que o universo tenha se expandido durante a inflação por um fator onde  $\mathcal{N} = 68$ . Assim temos

$$\rho_1 \cong [1 MeV]^4 \Rightarrow a(t_I) > e^{17} a(t_i) \quad (3.1.26)$$

$$\rho_1 \cong [1,22 \times 10^{19} eV]^4 \Rightarrow a(t_I) > e^{68} a(t_i) \quad (3.1.27)$$

Deste modo, se considerarmos que a era da radiação foi precedida por um período suficiente de inflação, este último poderia ser responsável por uma expansão exponencial

que teria deixado a geometria do universo praticamente plana, como se é constatado hoje (ver figura 3.1).

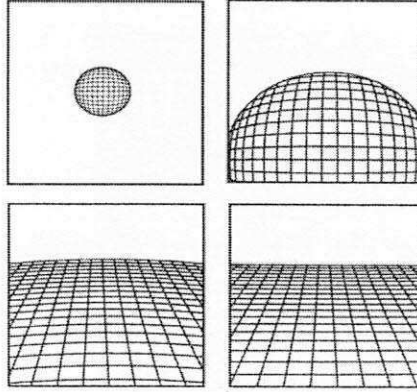


Figura 3.1: Representação de uma era inflacionária que teria ocasionado a planaridade do Universo

Consideremos agora a solução do problema do horizonte. Vimos então que a distância própria do horizonte de partículas na superfície do último espalhamento é dada por

$$d_H(t_L) \equiv a(t_L) \int_{t_i}^{t_L} \frac{dt}{a(t)} = a_L \int_{a_i}^{a_L} \frac{da}{a^2 H} \quad (3.1.28)$$

onde  $t_i$  é o instante inicial da era inflacionária.

Vimos que o limite superior para um horizonte de partículas é alcançado quando consideramos um Universo dominado pela matéria, e que mesmo assim tal distância é bem menor que o raio da Última Superfície de Espalhamento.

Consideremos então que a integral acima seja dominada por uma era de inflação de modo que durante tal inflação o fator de escala  $a(t)$  cresce exponencialmente à uma taxa  $H_I$  dada por

$$a(t) = a(t_i) e^{[H_I(t-t_i)]} = a_I e^{[H_I(t-t_I)]} \quad (3.1.29)$$

onde  $t_i$  é o instante inicial da inflação,  $t_I$  é o instante final da inflação e  $a_i = a(t_i)$ . Sendo  $\mathcal{N} \equiv H_I(t_I - t_i)$  o número de dobras da expansão durante a inflação.

Com isto, a eq. (3.1.28) passa a ser dada por

$$d_H(t_L) = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} [e^{\mathcal{N}} - 1] \quad (3.1.30)$$

Para que o problema do horizonte seja resolvido, temos que considerar que  $e^{\mathcal{N}} \gg 1$ , de modo que o termo  $-1$  possa ser desprezado na equação acima. Uma outra consideração que se tem que fazer para que o problema do horizonte seja resolvido é admitir que  $d_H(t_L) > L$ , onde  $L$  é a distância da superfície do último espalhamento, que de acordo com a equação (3.1.11) é

$$L \approx \frac{a(t_L)}{H_0 a_0} \quad (3.1.31)$$

Deste modo, a condição necessária para que o problema seja resolvido é dada por

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \quad (3.1.32)$$

Se supormos novamente que  $H_I a_I = a_1 H_1$  e repetirmos as considerações mencionadas no problema da planaridade, obtemos que a condição necessária para que o problema do horizonte seja resolvido requer que, se

$$\rho_1 \cong [1 \text{ MeV}]^4 \Rightarrow a(t_I) > e^{17} a(t_i) \quad (3.1.33)$$

$$\rho_1 \cong [1, 22 \times 10^{19} \text{ eV}]^4 \Rightarrow a(t_I) > e^{68} a(t_i) \quad (3.1.34)$$

Deste modo, admitindo-se que o universo passou por uma era de inflação, podemos justificar a homogeneidade da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo argumentando que no período inflacionário a parte do universo que nós observamos estava confinada numa região pequena e que houve tempo suficiente para que qualquer coisa neste espaço fosse homogeneizada.

### 3.1.3 Inflação devido a um campo escalar

De acordo com a seção anterior vemos como a introdução de uma era inflacionária pode solucionar problemas característicos do Modelo Cosmológico Padrão. No entanto, nada foi mencionado a respeito da causa da suposta inflação do Universo.

Desde que se foram verificadas as vantagens da introdução de um mecanismo inflacionário no Modelo Cosmológico, diversos tipos de cenários (inflacionários) tem sido propostos. Uma das formas de se obter tal cenário é considerar que o universo teria sido

dominado por uma energia que diminuía lentamente em relação à taxa de expansão do universo. Pode-se então mostrar que a energia potencial de um campo escalar é capaz de satisfazer esta característica.

Vamos então assumir que tal campo tenha existido no Universo primordial e investigar sua dinâmica.

Sabe-se que a dinâmica de um campo pode ser determinada a partir de uma densidade lagrangeana, que para este caso, será dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (3.1.35)$$

O tensor energia-momentum para tal campo escalar é dado por

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (3.1.36)$$

Com isto, podemos calcular as componentes  $T_0^0$  e  $T_1^1$  que estão relacionadas à densidade e a pressão respectivamente. Desta forma obtemos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (3.1.37)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \quad (3.1.38)$$

De acordo com a equação da conservação da energia (2.3.16), temos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.1.39)$$

e  $V'$  denota  $dV/d\phi$  e  $H$  é a taxa de expansão durante o período no qual a energia do campo escalar domina, dado por<sup>2</sup>

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) \quad (3.1.40)$$

Derivando a equação acima e usando a equação (3.1.39) encontramos uma relação bastante útil para  $\dot{H}$ , dada por

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2 \quad (3.1.41)$$

<sup>2</sup>Aqui devemos lembrar que o termo de curvatura é desprezível diante do termo de densidade de energia do campo.

Por outro lado, para que a inflação ocorra é necessário que  $H$  seja aproximadamente constante<sup>3</sup> durante um certo período de tempo. Com isto, temos que ter

$$|\delta H| \ll H \quad (3.1.42)$$

sendo  $\delta H = \dot{H}\delta t$  e  $\delta t = 1/H$ , podemos reescrever tal condição como

$$|\dot{H}| \ll H^2 \quad (3.1.43)$$

Usando as equações (3.1.40) e (3.1.41) obtemos que  $\dot{\phi}^2 \ll H^2$  e ainda que

$$H^2 \cong \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (3.1.44)$$

Com isto, podemos reescrever tal condição como segue

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.1.45)$$

que nos diz que a energia potencial do campo escalar é muito maior que a sua energia cinética.

Outra característica que o campo deve assumir para uma expansão exponencial é a de que a aceleração  $\ddot{\phi}$  deve ser pequena durante o tempo característico da expansão. Para isso, temos que ter

$$|\delta\dot{\phi}| \ll |\dot{\phi}| \quad (3.1.46)$$

sendo  $\delta\dot{\phi} = \ddot{\phi}\delta t = \ddot{\phi}/H$ , podemos reescrever tal condição como:

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}| \quad (3.1.47)$$

com isto, podemos desprezar o termo  $\ddot{\phi}$  na equação (3.1.39) de modo que obtemos:

$$\dot{\phi} \cong -\frac{V'(\phi)}{3H} = -\frac{V'(\phi)}{\sqrt{24\pi G V(\phi)}} \quad (3.1.48)$$

Desta forma, pode-se exprimir a condição (3.1.43) em termos do potencial do campo.

Para isso, calculemos a razão  $|\dot{H}|/H^2$ :

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{4\pi G \left[ \frac{V'(\phi)}{\sqrt{24\pi G V(\phi)}} \right]^2}{\frac{8\pi G}{3} V(\phi)} = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (3.1.49)$$

<sup>3</sup>Isso é necessário para que a solução do fator de escala  $a(t)$  seja do tipo exponencial.



Definindo o parâmetro  $\epsilon \equiv |\dot{H}|/H^2$  obtemos que a condição (3.1.43) é equivalente à:

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \ll 1 \quad (3.1.50)$$

Por outro lado, temos que tomando a derivada da equação (3.1.48) obtemos

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H} + \frac{V'(\phi)}{3} \left( \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \quad (3.1.51)$$

Através da desigualdade  $\epsilon \equiv |\dot{H}|/H^2 \ll 1$  podemos perceber que o último termo do segundo membro pode ser desprezado em relação ao primeiro, de modo que

$$\ddot{\phi} \cong \frac{V''(\phi)}{9H^2} V'(\phi) \quad (3.1.52)$$

Por outro lado, da condição  $|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}| \Rightarrow |\ddot{\phi}| \ll |V'(\phi)/3|$  obtemos que

$$\frac{V''(\phi)}{9H^2} \ll 1 \quad (3.1.53)$$

ou ainda

$$\frac{V''(\phi)}{9 \left( \frac{8\pi G}{3} \right) V(\phi)} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{24\pi G} \left| \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll 1 \quad (3.1.54)$$

Com isto chegamos a conclusão de que para que haja uma inflação, é necessário que os parâmetros

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \ll 1 \quad (3.1.55)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{24\pi G} \left| \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll 1 \quad (3.1.56)$$

sejam simultaneamente satisfeitos. Isto, por sua vez, exige que exista um potencial que satisfaça as condições acima.

Alem dos méritos relacionados a explicação de alguns problemas do Modelo Cosmológico Padrão, a inflação tem se destacado também por apresentar um mecanismo para explicar a existência de perturbações de densidade que dariam origem a estruturas em grande escala [16].



## 3.2 Outros problemas em Cosmologia

Outros problemas que se tem explorado recentemente em cosmologia são os problemas relacionados à matéria e energia escura.

O problema da matéria escura está relacionado a observações estranhas obtidas a partir do estudo de curvas de rotação de galáxias espirais desde a década de 80 [16]. Pode-se mostrar que a curva de rotação de uma galáxia espiral deve variar em função da posição do elemento de massa com a distância até o centro. De acordo com a segunda lei de Newton, a relação entre a energia potencial gravitacional e a energia cinética de um elemento de matéria a uma distância  $r$  do centro da galáxia, é dada por

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.2.57)$$

Através desta expressão, podemos determinar a relação entre a massa  $M$  de um objeto e a velocidade  $v$  do corpo de massa  $m$  que o circunda

$$M = \frac{v^2 r}{G} \quad (3.2.58)$$

Esta equação indica que a velocidade deve aumentar proporcionalmente à massa e cair rapidamente à zero fora dos limites do objeto, como indica a curva  $A$  na figura [3.2].

No entanto, o que se observa na realidade é que tal velocidade não cai rapidamente, mas sim, tende a velocidade de toda a galáxia a medida que o raio cresce, como se observa na curva  $B$  na figura [3.2].

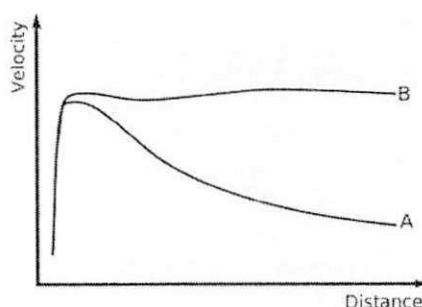


Figura 3.2: Curvas de Rotação de Galáxias Espirais

Para se justificar tal resultado supõe-se que existe uma quantidade muito maior de

matéria que somente sofre a ação da gravidade e não emite nenhum tipo de radiação eletromagnética. Justifica-se a partir disto o nome de matéria escura.

Os limites observacionais indicam o seguinte resultado para a matéria bariônica (matéria ordinária que encontramos no nosso dia-a-dia) em conjunto com a matéria escura

$$\Omega_{M0} = 0,29 \pm 0,04 \quad (3.2.59)$$

Por outro lado, resultados do WMAP indicam que  $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$ , que indica que vivemos num universo plano com uma densidade próxima ao valor da densidade crítica. Como vemos, o resultado obtido pela matéria (levando-se em conta a matéria escura) difere enormemente do valor esperado para  $\Omega_0$ .

Para se resolver este outro problema é necessário que haja algum tipo de energia escura que domine a dinâmica atual do universo, ou seja, um novo componente cósmico. Além disto, outra descoberta recente indica que o universo está sofrendo uma expansão acelerada.

Com isto, a partir das equações de Friedmann, vemos que para que a aceleração do fator de escala seja positivo, o componente cósmico dever ser caracterizado por exercer uma pressão negativa. Ou seja

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) > 0 \Rightarrow p < -\frac{1}{3}\rho \quad (3.2.60)$$

Deste modo, podemos concluir que a constante cosmológica pode ser considerada a uma candidata a energia escura, já que sua equação de estado satisfaz a condição acima. Outro candidato a energia escura pode ser a energia potencial de um campo escalar dinâmico, com características semelhantes ao campo escalar abordado no modelo inflacionário.

Matéria e energia escuras representam hoje um dos maiores desafios científicos para a Física. A solução para esses enigmas deve passar por um grande esforço experimental, observacional e também teórico [16].

## Capítulo 4

# Cosmologia de branas e o formalismo de primeira ordem

Neste capítulo introduzimos um procedimento para resolver equações de movimento para modelos cosmológicos conduzidos por campos escalares reais através de equações diferenciais de primeira ordem. Para ilustrar o poder do método, resolvemos o caso de um modelo cosmológico com geometria plana. Comentamos também sobre possíveis generalizações do formalismo, e mostramos como utilizá-lo para um caso de cosmologia de branas. Além disto, mostramos como utilizar um outro procedimento, conhecido como continuação analítica, para obter soluções que descrevem paredes de domínios a partir das soluções cosmológicas obtidas com o uso do formalismo de primeira ordem, estabelecendo assim, uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínio.

### 4.1 Formalismo de Primeira ordem

Uma abordagem bastante utilizada para descrever cenários cosmológicos consiste em considerar modelos do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) descritos por campos escalares reais regidos por uma dinâmica padrão e que preencham o universo como um fluido globalmente isotrópico, como em modelos de quintessência [7, 8].

Modelos deste tipo são descritos pela ação padrão

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \quad (4.1.1)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica,  $R$  é o escalar de curvatura,  $\phi$  descreve um campo real escalar e onde usamos ainda  $4\pi G = 1$ . Usando o elemento de linha dado pela equação (2.2.1) e o tensor energia-momentum dado por  $T_\nu^\mu = (-\rho, p, p, p)$ , juntamente com a equação de Einstein (2.3.5), obtemos as seguintes equações

$$H^2 = 2\rho/3 - k/a^2 \quad (4.1.2a)$$

$$\ddot{a}/a = -(\rho + 3p)/3 \quad (4.1.2b)$$

que nada mais são que as equações de Friedmann obtidas no capítulo 2.

Por outro lado, a equação de movimento do campo escalar pode ser obtida através da lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ , cuja forma padrão é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (4.1.3)$$

Sendo o tensor energia-momentum do campo escalar descrito pela lagrangiana acima dado por [17]

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (4.1.4)$$

temos que

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \quad (4.1.5)$$

que por sua vez, nos permite determinar a densidade de energia e pressão do Universo como

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \quad (4.1.6a)$$

$$p = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \quad (4.1.6b)$$

Uma vez que estas grandezas são determinadas, podemos utilizar a equação da conservação da energia (2.3.16c) para determinar a equação de movimento do campo

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (4.1.7)$$

onde  $V_\phi$  denota  $dV/d\phi$ .

Utilizando esta última equação podemos reescrever a equação de Friedmann e sua respectiva derivada como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2} \quad (4.1.8a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2} \quad (4.1.8b)$$

O conjunto de equações (4.1.7) e (4.1.8) constituem as equações com as quais temos que lidar para resolver o problema especificado por um potencial  $V$ . Tal potencial pode ser escrito como

$$V = \frac{3}{2} H^2 + \frac{1}{2} \dot{H} + \frac{k}{a^2} \quad (4.1.9)$$

Deste ponto de vista, desde que  $a = a(t)$  e  $\phi = \phi(t)$ , temos que  $H = H(t)$ . Com isto, a partir da equação acima devemos admitir que o potencial é uma função do tempo.

Uma importante dificuldade relacionada a descrição das propriedades da energia escura neste cenário se deve a um fato intrínseco da própria cosmologia, que por ser governada pelas equações de Einstein, mesmo utilizando postulados importantes tal como o princípio cosmológico, do qual se obtém as equações de Friedmann, resultam-se ainda equações diferenciais não-lineares em geral de difíceis resoluções.

Além disto, ao se considerar campos escalares presentes no modelo, outras equações devem ser acrescentadas, as equações de movimento para os diversos graus de liberdade introduzidos pelos campos escalares, aumentando ainda mais a referida dificuldade. Por tais motivos, investigações acerca da identificação das propriedades gerais nas equações de movimento na presença de campos escalares constitui um tema de bastante relevância.

Têm-se considerado recentemente investigações [7, 8, 18] que apresentam um método que permite intercambiar as equações de movimento de modelos cosmológicos do tipo FRW conduzidos por campos escalares com dinâmica padrão para equações diferenciais de primeira ordem.

O ponto chave deste método consiste em considerar o potencial  $V$  não como uma função do tempo  $t$ , como é esboçado no procedimento padrão e visto pela equação (4.1.9), mas sim como uma função do campo  $\phi$ , como pode ser constatado a partir da equação de

movimento do campo (4.1.7). Esta consideração nos permite postular que a evolução do Universo regida por um campo escalar real pode ser determinada por uma função explícita do campo  $\phi$ .

Deste modo, para manter uma equivalência entre este ponto de vista e o anterior, temos que considerar o parâmetro de Hubble como uma função do campo escalar. Para isso, introduzimos uma nova função  $W = W(\phi)$ , da qual se pode entender a dependência temporal do parâmetro de Hubble com o tempo como uma função de  $W[\phi(t)]$ , e então escrevemos

$$H = W(\phi) \quad (4.1.10)$$

Para ilustrar tal metodologia, consideremos por simplicidade o caso de um Universo geometricamente plano, isto é, onde  $k = 0$ . Neste caso, as equações (4.1.8) passam a ser dadas por

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V \quad (4.1.11a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 \quad (4.1.11b)$$

Derivando a equação (4.1.10) em relação ao tempo, obtemos  $\dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$ , e usando a equação (4.1.11b) podemos escrever

$$\dot{\phi} = -W_\phi \quad (4.1.12)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem; a qual fundamenta o formalismo.

Deste modo, as equações (4.1.10) e (4.1.12) nos permitem escrever o potencial como

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (4.1.13)$$

Pode-se notar que para o potencial acima, as soluções das equações de primeira ordem (4.1.10) e (4.1.12) também resolvem o conjunto de equações (4.1.7) e (4.1.8), e deste modo, podemos escolher lidar com as equações de primeira ordem para resolver o problema especificado por um potencial  $V(\phi)$ .

Podemos ainda escrever o parâmetro de desaceleração, definido por

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (4.1.14)$$

na seguinte forma

$$q = -1 + \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2 \quad (4.1.15)$$

que nos permite obter tal parâmetro de forma bastante simples e direta.

O procedimento esboçado acima nos permite obter a evolução do parâmetro de Hubble resolvendo um conjunto de equações a partir de uma função  $W$ . Generalizações deste procedimento para o caso em que  $k \neq 0$  podem ser encontradas nas referências [7, 8, 18].

## 4.2 Formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas

O formalismo de primeira ordem tem se mostrado bastante satisfatório, pois generalizações bem sucedidas tem se apresentado em diversos aspectos. Além de generalizar tal formalismo de modo a abranger casos mais gerais de geometrias não-planas em uma cosmologia regida por campos escalares, pode-se extendê-lo para uma dinâmica taquiônica, assim como também para modelos de  $N$  campos [7, 8].

Além disso, pode-se utilizar tal formalismo de modo que ele comporte outros possíveis componentes do Universo além da energia escura, como a matéria não-relativística, que pode ser do tipo bariônica ou de natureza escura [18].

Investigações recentes têm mostrado também a possibilidade de utilizar o formalismo de primeira ordem no cenário de mundo brana [19]. Neste contexto, pode-se utilizar tal formalismo de forma análoga à seção anterior com a equação de Friedmann modificada que aparece no estudo de cosmologia de branas [5, 6].

Vamos nesta seção, abordar este último caso com o intuito de obter possíveis soluções a partir do uso do formalismo de primeira ordem.

A referida equação de Friedmann modificada possibilita o estudo da evolução cosmológica de uma 3-brana regida por um campo escalar real, imersa num espaço ambiente (*bulk*) 5-dimensional com constante cosmológica  $\Lambda_5$ . Tal equação é dada por

$$H^2 = \frac{\kappa_5^2}{6} \rho_B + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2} \quad (4.2.16)$$

onde  $\rho_B$  é a densidade de energia do *bulk*,  $\rho_b$  é a densidade de energia na brana,  $k$  é a constante de curvatura e  $\mathcal{C}$  é uma constante. Note que densidade de energia agora contribui quadraticamente, o que difere da cosmologia formulada em quatro dimensões. Isto se deve ao fato das condições de junções impostas na posição da brana imersa em cinco dimensões [5].

Para o caso em que a brana possui uma densidade de energia dada por  $\rho_b = \rho + \sigma$  onde  $\rho$  é a densidade de energia proveniente da matéria ordinária e  $\sigma$  a tensão na brana; sendo ainda a única contribuição para a densidade de energia do *bulk* proveniente da constante cosmológica de modo que  $\rho_B = \Lambda_5/\kappa_5^4$ , temos que a equação (4.2.16) pode ser reescrita como

$$H^2 = \left( \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{\kappa_5^4}{36} \sigma^2 \right) + \frac{\kappa_5^4}{18} \sigma \rho + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{\mathcal{C}}{a^4} - \frac{k}{a_0^2} \quad (4.2.17)$$

Tal equação é válida para um cenário Randall-Sundrum II com uma brana com tensão positiva imersa em um espaço-tempo *AdS* 5-dimensional.

Neste referido cenário se assume que o chamado *ajuste fino* ocorre entre a tensão da brana e a constante cosmológica, de modo que o termo quadrático na tensão se cancela com o termo cosmológico do *bulk*, tornando assim o termo entre parênteses da equação (4.2.17) nulo. Com isto, se considerarmos o parâmetro livre  $\mathcal{C}$  também nulo, podemos escrever a equação de Friedmann como

$$H^2 = \frac{2}{3} \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\sigma} \right) - \frac{k}{a_0^2} \quad (4.2.18)$$

onde  $\kappa_4^2 = 8\pi G \cong \kappa_5^4 \sigma / 6 = 2$  e  $\Lambda_5 = -\sigma^2 \kappa_5^2 / 6$ .

Podemos perceber que a equação anterior é bastante semelhante a equação de Friedmann (2.3.20), diferindo por um termo quadrático na densidade, que surge devido a efeitos induzidos sobre a brana pela presença da constante cosmológica no *bulk*. Tal termo se mostra relevante num regime onde a densidade de energia é muito maior que a tensão brana de modo que  $\rho^2/\sigma \gg 1$ ; onde por outro lado, num regime em que  $\rho^2/\sigma \ll 1$  se recupera o modelo cosmológico quadridimensional.

Deste modo, de forma análoga ao que foi abordado no capítulo 2, temos diversos cenários que dependerão dos valores assumidos pela constante cosmológica  $\Lambda$  na brana



( $\Lambda < 0$ ,  $\Lambda = 0$  ou  $\Lambda > 0$ ) e da sua constante de curvatura  $k$  ( $-1$ ,  $0$  ou  $1$ ); mas que estarão relacionados agora aos possíveis valores assumidos pela tensão  $\sigma$  na brana.

Um exemplo de cenário interessante que pode surgir neste contexto é quando consideramos um regime em que a densidade de energia é dominada pela constante cosmológica de modo que  $\rho = -|\Lambda|$  sendo ainda  $|\Lambda|/2\sigma \gg 1$ . Neste regime pode-se ver que mesmo em um cenário em que a constante cosmológica seja negativa e o valor assumido pela constante de curvatura  $k$  seja nulo, obtém-se ainda um regime inflacionário. Por outro lado, para o caso em que  $|\Lambda|/2\sigma \ll 1$  recaímos novamente no modelo cosmológico quadridimensional. Neste caso, ao considerarmos um cenário com uma constante cosmológica negativa ( $\Lambda < 0$ ), podemos obter um regime inflacionário apenas se restringirmos o valor da constante de curvatura a um valor negativo ( $k = -1$ ). Como veremos na próxima seção, numa cosmologia regida por campos escalares, esses cenários cosmológicos se tornam mais evidentes.

#### 4.2.1 Cenário inflacionário na brana devido a um campo escalar

Vamos admitir que a cosmologia na brana é conduzida por um campo escalar com uma densidade lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (4.2.19)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . A partir desta equação juntamente com a do tensor energia-momentum dado por (4.1.5) obtém-se a densidade de energia e a pressão do campo escalar na forma padrão

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (4.2.20a)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \quad (4.2.20b)$$

Utilizando as equações (4.2.20) e a equação da conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (4.2.21)$$

obtém-se a equação que governa a dinâmica do campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (4.2.22)$$

Afim de encontrarmos uma equação de primeira ordem cuja solução satisfaça a equação anterior, notemos que a partir das equações (4.2.20) e (4.2.21) podemos escrever

$$\dot{\rho} = -3H\dot{\phi}^2 \quad (4.2.23)$$

Agora, fazendo a consideração de que  $\rho \equiv \rho(\phi)$ , de modo que  $\dot{\rho} = \rho'(\phi)\dot{\phi}$ , onde  $\rho' = d\rho/d\phi$ , e usando (4.2.23) obtém-se

$$\dot{\phi} = -\frac{\rho'(\phi)}{3H} \quad (4.2.24)$$

Utilizando o mesmo procedimento da seção anterior, introduzimos uma função  $W = W(\phi)$  tal que  $H = W(\phi)$ . Isto nos permite reescrever a equação (4.2.18) na forma

$$\rho^2 + 2\sigma\rho - 3\sigma W^2 = 0 \quad (4.2.25)$$

Esta é uma equação algébrica de 2º grau, cuja solução é dada por

$$\rho_{\pm} = -\sigma \pm \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} \quad (4.2.26)$$

onde adotaremos o sinal '+' de modo que a condição de positividade da energia seja satisfeita.

Derivando a equação anterior em relação a  $\phi$  obtemos

$$\rho'(\phi) = \frac{3WW_\phi}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}} \quad (4.2.27)$$

Com isto, podemos reescrever a equação (4.2.23) como uma equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{\phi} = -\frac{W_\phi}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}} \quad (4.2.28)$$

Por outro lado, sabemos que

$$H = W(\phi) = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (4.2.29)$$

é também uma equação de primeira ordem.

Podemos então verificar que tais equações (4.2.28) e (4.2.29) satisfazem as equações (4.2.16) e (4.2.22). Com isto, podemos utilizá-las para resolver o problema especificado por um potencial  $V(\phi)$ .

O potencial referido pode ser determinado substituindo-se as equações (4.2.28) e (4.2.25) na equação (4.2.20a), resultando em

$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} \quad (4.2.30)$$

enquanto isso, o parâmetro de desaceleração se apresenta como

$$q = -1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 3W^2/\sigma}} \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2 \quad (4.2.31)$$

Para uma elevada tensão na brana  $\sigma$ , de modo que  $W^2/\sigma \ll 1$ , podemos expandir a expressão (4.2.30) numa série de potências de tal forma que obtemos

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{3}{2}W_\phi^2 \frac{W^2}{\sigma} + \dots \quad (4.2.32)$$

A partir da equação acima podemos ver que o potencial para o caso de uma cosmologia plana obtida na seção anterior é recuperada se considerarmos apenas os termos quadráticos, de modo que obtemos

$$V(\phi) \cong \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (4.2.33)$$

O mesmo se aplica ao parâmetro de desaceleração, isto é, no regime  $W^2/\sigma \ll 1$ , ao expandirmos a expressão (4.2.31) recobramos o parâmetro obtido para uma cosmologia plana

$$q = -1 + \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{3W^2}{\sigma} + \dots \right) \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2 \quad (4.2.34)$$

$$q \cong -1 + \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2 \quad (4.2.35)$$

Por outro lado, para o caso em que a tensão da brana  $\sigma$  é pequena, de modo que  $W^2/\sigma \gg 1$ , o potencial assume a forma

$$V(\phi) \cong \sigma \sqrt{\frac{3}{\sigma}} |W| \quad (4.2.36)$$

enquanto a equação de primeira ordem do campo escalar pode ser escrita como

$$\dot{\phi} \cong -\sqrt{\frac{\sigma}{3}} \frac{W_\phi}{|W|} \quad (4.2.37)$$

e o parâmetro de desaceleração é dado por

$$q \cong -1 + \sqrt{\frac{\sigma}{3}} \frac{W_\phi^2}{W^2|W|} \quad (4.2.38)$$

Um resultado interessante pode ser obtido ao substituirmos as equações (4.2.36) e (4.2.37) na equação de segunda ordem (4.2.22). Ao fazê-lo, obtemos diretamente que  $\ddot{\phi} \cong 0$ . Isto reproduz justamente o regime *slow roll* para um campo *inflaton* mencionado no capítulo 2.

Uma vez que  $\ddot{\phi} \cong 0$ , temos que ter  $\dot{\phi} \cong \text{constante}$ . Isto por sua vez, nos permite determinar a função  $W(\phi)$ , o campo escalar  $\phi(t)$ , o fator de escala  $a_0(t)$  e o parâmetro de desaceleração, respectivamente dados por

$$W(\phi) = V_0 \exp(\alpha\phi) \quad (4.2.39)$$

$$\phi(t) = -\sqrt{\frac{\sigma}{3}}\alpha(t - t_0) \quad (4.2.40)$$

$$a_0(t) = a_0 \exp\left[-\frac{V_0}{\alpha^2} \sqrt{\frac{3}{\sigma}} \exp(-\alpha^2 \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0))\right] \quad (4.2.41)$$

$$q = -1 + \frac{\alpha^2}{V_0} \sqrt{\frac{\sigma}{3}} \exp(\alpha^2 \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0)) \quad (4.2.42)$$

onde  $\alpha$  e  $V_0$  são constantes, de modo que  $V_0^2/\sigma \gg 1$  é consistente com o regime  $W^2/\sigma \gg 1$ .

Com isto, vemos que  $V_0^2/\sigma$  conecta os regimes assintóticos do potencial dado por

$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} \exp(2\alpha\phi)} - \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \alpha^2 \exp(2\alpha\phi)}{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} \exp(2\alpha\phi)} \quad (4.2.43)$$

de modo que quando  $V_0^2/\sigma$  cresce, o potencial escalar dado pela expressão acima se aproxima da forma dada por (4.2.36) e quando  $V_0^2/\sigma$  diminui, o potencial escalar se aproxima da forma (4.2.33).

O cenário cosmológico apresentado acima se mostra interessante pelo fato de que  $V_0^2/\sigma$  pode variar de acordo com a inflação da brana, de modo que da equação (4.2.43) podemos obter os limites assintóticos de um mesmo potencial escalar que governa a evolução da brana em ambos os regimes de alta e baixa energia.

## 4.2.2 Exemplos de soluções cosmológicas

Diante do procedimento desenvolvido na seção anterior, vamos agora, considerar alguns exemplos de soluções exatas que se aplicam ao regime geral, isto é, de baixas e altas energias.

Para isto, consideremos como primeiro exemplo o caso em que a função  $W(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \sinh \phi$ . Deste modo, a equação (4.2.28) pode ser facilmente integrada, fornecendo a solução

$$\phi = -\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0) \quad (4.2.44)$$

Usando a equação anterior juntamente com (4.2.29), podemos determinar o fator de escala  $a_0(t)$  na brana

$$a_0 = \exp \left[ -\cosh \left( \sqrt{\sigma/3}(t - t_0) \right) \right] \quad (4.2.45)$$

enquanto que o parâmetro de desaceleração (4.2.31) passa a ser dado por

$$q = -1 + \frac{1}{|\cosh \phi|} \left( \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} \right)^2 \quad (4.2.46)$$

A partir gráfico obtido da equação (4.2.45) podemos verificar que quando a tensão é elevada (i.e., no regime da cosmologia padrão), a inflação ocorre apenas tardiamente. Por outro lado, quando a tensão é pequena, a inflação ocorre nos instantes primordiais do Universo, estabelecendo assim um regime não-convencional, como se pode perceber pela figura [4.1] Devemos notar que o fim da inflação ocorre no instante  $t_0$ , e que o universo desacelera para  $t > t_0$ .

Um comportamento semelhante é percebido no gráfico obtido pela expressão (4.2.46), onde o parâmetro de desaceleração sofre um rápido crescimento/descrescimento no período de inflação/desaceleração do universo, como se pode perceber da figura [4.2]<sup>1</sup>.

Consideremos agora o exemplo em que  $W(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \tan(\phi)$ . Neste caso, as soluções das equações (4.2.28), (4.2.29) e (4.2.31) são dadas por

$$\phi = \mp \arcsin \left( \sqrt{\sigma/3}(t - t_0) \right) \quad (4.2.47)$$

---

<sup>1</sup>Pode-se perceber nesta figura que os valores escolhidos para a tensão  $\sigma$  na brana são diferentes dos valores escolhidos para figura anterior; tal escolha foi motivada com intuito de se obter um gráfico com uma melhor visualização.

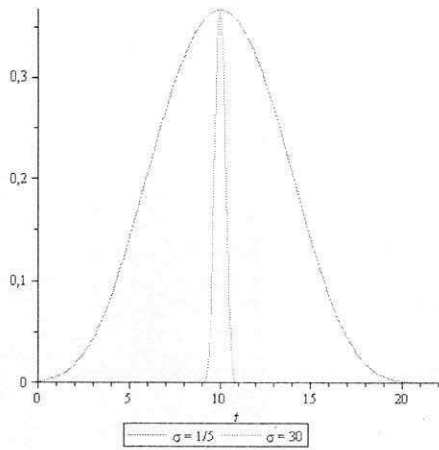


Figura 4.1: O fator de escala  $a_0$  para  $\sigma = 1/5$  (linha vermelha) e para  $\sigma = 30$  (linha verde). Valores de  $\sigma$  altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o fim da inflação é estabelecido em  $t_0 = 10$

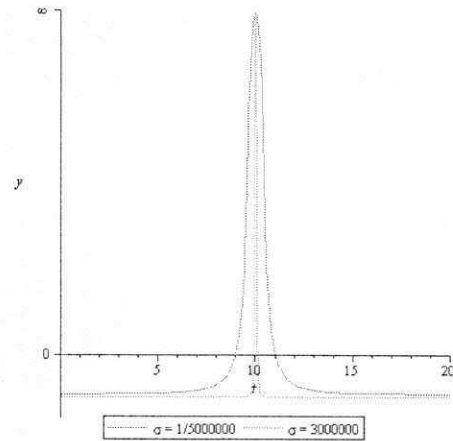


Figura 4.2: O parâmetro de desaceleração  $q$  para  $\sigma = 1/5000000$  (linha vermelha) e para  $\sigma = 3000000$  (linha verde), onde valores de  $\sigma$  altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva) e o fim da inflação é estabelecido em  $t_0 = 10$ .

e

$$a_{0\pm} = \exp \left[ \pm \sqrt{-\frac{\sigma}{3}(t + t_0)^2 + 1} \right] \quad (4.2.48)$$

e

$$q = -1 + \frac{1}{|\sec \phi|} \left( \frac{\sec^2 \phi}{\tan \phi} \right)^2 \quad (4.2.49)$$

respectivamente.

A partir da equação (4.2.47) vemos que o campo possui um comportamento singular. Para o fator de escala se tem agora dois cenários possíveis de expansão ‘limitada’  $a_{0+}(t)$  e  $a_{0-}(t)$ , onde temos uma inflação iniciando ( $a_{0-}$ ) ou terminando ( $a_{0+}$ ) em  $t_0 = 10$ , como se vê nas figuras [4.3] e [4.4].

Apesar dos dois possíveis cenários para o fator de escala, vemos pelo gráfico da expressão (4.2.49) que há uma única possibilidade para o parâmetro de desaceleração – ver figura [4.5].



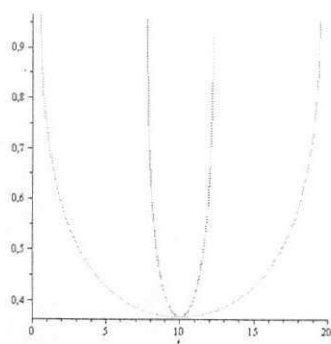


Figura 4.3: O fator de escala  $a_{0-}$  para  $\sigma = 1/30$  (linha verde) e para  $\sigma = 3/5$  (linha vermelha). Valores de  $\sigma$  altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o início da inflação é estabelecido em  $t_0 = 10$

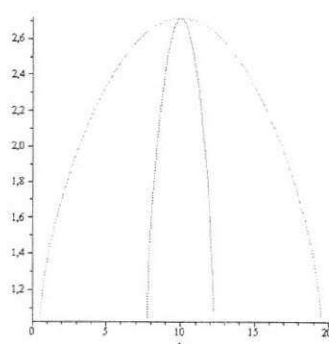


Figura 4.4: O fator de escala  $a_{0+}$  para  $\sigma = 1/30$  (linha verde) e para  $\sigma = 3/5$  (linha vermelha). Valores de  $\sigma$  altos (baixos) favorecem uma inflação tardia (primitiva). Note que o fim da inflação é estabelecido em  $t_0 = 10$

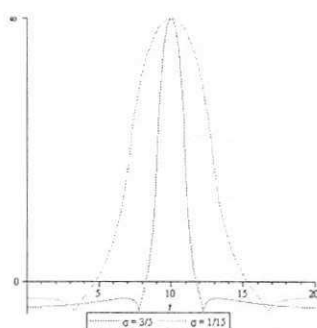


Figura 4.5: O parâmetro de desaceleção  $q$  para  $\sigma = 3/5$  (linha vermelha) e para  $\sigma = 1/15$  (linha verde).

### 4.3 Correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínio

Do ponto de vista do modelo cosmológico vigente, o Universo surgiu de uma singularidade e em sua fase primordial sua densidade e temperatura se encontravam em valores extremamente elevados. Este modelo suporta a idéia básica das Teorias de Grande Unificação (*Great Unification Theories* - GUTs), cujo propósito consiste em integrar em um único modelo as interações fraca, eletromagnética e forte.

Nestas teorias, tais interações estão relacionadas entre si através de simetrias. O esfriamento do Universo, devido à expansão, promove condições para que algumas destas simetrias sejam quebradas, dando origem assim ao que é chamado de defeitos topológicos. De acordo com os tipos de simetrias que são quebradas podem se formar vários tipos destes defeitos, os quais são a corda cósmica, parede de domínio, monopólo e textura [3].

Dentre estes defeitos topológicos estamos interessados particularmente em paredes de domínio. Este tipo de defeito é formado a partir de uma quebra espontânea de uma simetria discreta. Pode-se entender paredes de domínio como superfícies que interpolam regiões separadas, tendo cada uma destas regiões diferentes valores esperados do vácuo de algum campo escalar [20].

Tais paredes de domínio induzem uma métrica no espaço-tempo. Esta métrica, por sua vez, pode ser determinada resolvendo-se as equações de campo de Einstein usando algumas restrições simétricas consistentes com as propriedades do espaço-tempo induzido pelas paredes.

O elemento de linha num espaço-tempo descrito por esta métrica é dado por

$$ds^2 = A(w) \{ -dt^2 + dw^2 + S^2(t) [(1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2] \} \quad (4.3.50)$$

onde as funções  $A(w)$  e  $S(t)$  podem ser calculadas a partir das equações de Einstein.

Neste trabalho, estamos particularmente interessados em paredes de domínio planas ( $k = 0$ ) e estáticas. Neste caso, a métrica (4.3.50) se reduz a forma

$$ds^2 = A(w) \{ -dt^2 + dw^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \} \quad (4.3.51)$$

ou ainda, em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = A(w) \{ -dt^2 + dw^2 + dx^2 + dz^2 \} \quad (4.3.52)$$

Podemos ainda reescrever a métrica acima através da seguinte mudança de coordenadas

$$y = \int A(w)^{1/2} dw \quad (4.3.53)$$



de modo que sendo  $y = y(w)$  e  $w = w(y)$ , e então reescrevemos  $A^{1/2}(w) = a(y)$ . Desta forma, em termos destas novas coordenadas, obtemos a métrica que descreve uma parede de domínio plana em uma forma ligeiramente diferente

$$ds^2 = dy^2 + a^2(y) (-dt^2 + dx^2 + dz^2) \quad (4.3.54)$$

Comparando-se esta última expressão com a métrica que descreve um espaço-tempo de um Universo em expansão, dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dy^2 + dx^2 + dz^2) \quad (4.3.55)$$

podemos ver que é possível estabelecer uma correspondência entre elas, de forma bastante direta, fazendo uma simples substituição nas coordenadas, de modo que  $t \rightarrow iy$  e  $y \rightarrow it$ .

Uma vez que é possível partir de uma métrica bem estabelecida num modelo cosmológico e obtermos uma métrica que descreve um espaço-tempo induzido por uma parede de domínios mediante uma simples substituição de coordenadas, poderíamos nos questionar se é possível obter soluções que descrevam paredes de domínios a partir de soluções cosmológicas, e vice-versa, mediante um processo de substituição de coordenadas semelhante.

A resposta para tal indagação é positiva, e o referido processo que permite estabelecer tal correspondência é conhecido como continuação analítica [20, 21].

Deste modo, podemos através deste processo, utilizar todo o desenvolvimento estabelecido na seção anterior para obter soluções que descrevam paredes de domínios que vivem numa 3-brana, e assim, consolidar uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios.

Para isso, consideramos a seguinte correspondência

$$W \rightarrow i\tilde{W}, \quad (4.3.56)$$

$$H \rightarrow i\tilde{H}, \quad (4.3.57)$$

$$t \rightarrow iy, \quad (4.3.58)$$

$$y \rightarrow it, \quad (4.3.59)$$

onde  $\tilde{H} = a_0'/a_0 = -\tilde{W}$ .

Sendo assim, aplicando a continuação analítica nas equações de primeira ordem (4.2.28) e (4.2.29) obtemos

$$\phi' = \frac{\tilde{W}_\phi}{\sqrt{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}}} \quad (4.3.60)$$

e

$$\frac{a_0'}{a_0} = -\tilde{W} \quad (4.3.61)$$

Estas são equações diferenciais de primeira ordem com as quais podemos ter soluções do tipo parede de domínio.

Temos ainda que o potencial escalar é dado por

$$\tilde{V}(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{W}_\phi^2}{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}} \quad (4.3.62)$$

e o parâmetro de desaceleração é

$$\tilde{q} = -1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}}} \left( \frac{\tilde{W}_\phi}{\tilde{W}} \right)^2 \quad (4.3.63)$$

Num regime de baixas energias, onde  $\tilde{W}^2/\sigma \ll 1$ , expandindo o potencial (4.3.62) numa série de potências obtemos

$$\tilde{V} \cong \frac{1}{2} \tilde{W}_\phi^2 - \frac{3}{2} \tilde{W}^2 \quad (4.3.64)$$

e o parâmetro de desaceleração se torna

$$\tilde{q} \cong -1 - \left( \frac{\tilde{W}_\phi}{\tilde{W}} \right)^2 \quad (4.3.65)$$

Ao se comparar as soluções obtidas através do processo de continuação analítica com as soluções cosmológicas na brana, percebe-se que numa correspondência deste tipo, as funções  $W$  e  $\tilde{W}$  estão relacionadas por  $W^2 \longleftrightarrow -\tilde{W}^2$  e  $W_\phi^2 \longleftrightarrow -\tilde{W}_\phi^2$ . Além disto, no regime de baixas energias, onde  $W^2/\sigma \ll 1$  ou  $\tilde{W}^2/\sigma \ll 1$ , os potenciais dados por (4.2.33) e (4.3.64) estão relacionados por  $V(\phi) \longleftrightarrow -\tilde{V}(\phi)$  na brana.

No entanto, isto não se verifica no regime geral, conforme pode ser visto a partir das equações (4.2.30) e (4.3.62). Para que uma tal correspondência seja satisfeita, além da continuação analítica, seria necessário também fazer a identificação  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , que

requereria uma outra brana. Com isto, tal correspondência se mostra possível apenas considerando branas com tensões opostas.

Diante disto, como temos um potencial que abrange ambos os regimes de baixas e altas energias, temos que lançar mão de argumentos para considerar a aplicabilidade de tal potencial no regime geral. Deste modo, vamos considerar o seguinte raciocínio: num regime de altas energias, uma grande quantidade de branas ( $\sigma$ ) e anti-branas ( $-\sigma$ ) é favorecida, de modo que a correspondência para um par  $(-\sigma, \sigma)$  deve ser dada para um potencial exato  $V(\phi)$  em uma brana e  $-\tilde{V}(\phi)$  em outra.

À medida que o regime de altas energias passa para um regime de baixas energias, devido a tendência das branas e anti-branas se aniquilarem, pode ocorrer uma assimetria no número destas de modo que a correspondência é favorecida em uma única brana  $\sigma$  (ou  $-\sigma$ ), passando tal correspondência a ser dada conforme a identificação do potencial não-exato no regime de baixas energias através das equações (4.2.33) e (4.3.64).

Por outro lado, para paredes de domínio, pode-se ver a partir da equação (4.3.62) que  $|\tilde{W}| \leq \sqrt{\sigma/3}$ . Deste modo, temos que em um vácuo  $\tilde{W}_\phi = 0$ , o potencial deve assumir valores  $\tilde{V}(\phi_{vac}) < 0$  (espaço-tempo  $AdS_4$ ) ou  $\tilde{V}(\phi_{vac}) = 0$  (espaço-tempo  $M_4$ ) [6]. Com esta restrição, podemos reduzir a possibilidade de escolhas de  $\tilde{W}$  para um menor conjunto de funções. Na próxima seção, abordaremos alguns exemplos onde as funções escolhidas são funções que podem ser integradas analiticamente.

Tal restrição sobre a escolha de  $\tilde{W}$  pode ainda ser utilizada como guia na obtenção de uma restrição que permita reduzir também o conjunto de funções a serem utilizados para se obter soluções cosmológicas.

### 4.3.1 Exemplos de paredes de domínios

Vejamos agora alguns exemplos de como obter soluções do tipo paredes de domínio utilizando o formalismo de primeira ordem juntamente com o processo de continuação analítica.

Consideremos agora uma mesma função utilizada para obter soluções cosmológicas

de modo que  $\tilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$ . Substituindo tal função nas equações diferenciais de primeira ordem (4.3.60) e (4.3.61) e integrando-as, obtemos facilmente as soluções:

$$\phi = \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \quad (4.3.66)$$

e fator de empenamento (“*warp factor*”) para a parede de domínios

$$a_0(y) = \exp \left[ \cos \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right] \quad (4.3.67)$$

Além disto, temos que o correspondente ao “parâmetro de desaceleração” é dado por

$$\tilde{q} = -1 - \frac{\cot^2 \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right)}{\left| \cos \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right) \right|} \quad (4.3.68)$$

Os gráficos das soluções (4.3.67) e (4.3.68) podem ser visualizados nas figuras [4.6] e [4.7].

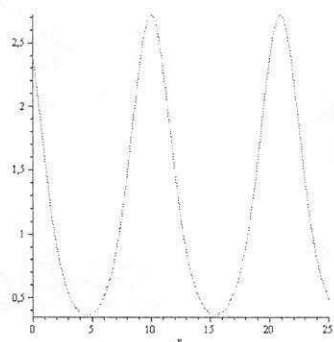


Figura 4.6: Fator de empenamento para  $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$  e  $\sigma = 1$

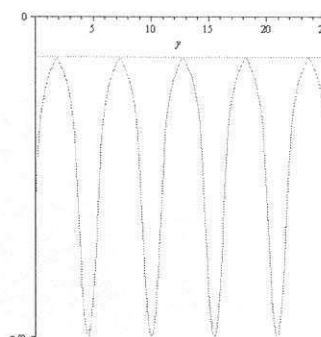


Figura 4.7: Parâmetro de desaceleração para o caso em que  $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$  e  $\sigma = 1$

Devemos notar da figura [4.6] que tal solução representa um grupo de paredes de domínio aproximadamente centradas em torno de  $y_0 = 10, 20, \dots$ . Desta forma, vemos como a geometria do espaço-tempo se comporta na presença do grupo de paredes de domínios.

Por outro lado, da figura [4.7], temos o comportamento do parâmetro de desaceleração  $\tilde{q}$ , a partir do qual podemos obter uma estimativa do afastamento do regime *AdS*.

Consideremos agora o exemplo em que  $\tilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \tanh(\phi)$ . Neste caso, as soluções das equações (4.3.60) e (4.3.61) são dadas por

$$\phi = \pm \operatorname{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right), \quad (4.3.69)$$

e

$$a_{0\pm} = \exp \left[ \pm \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0)^2 + 1 \right], \quad (4.3.70)$$

enquanto o parâmetro de desaceleração passa a ser dado como

$$\tilde{q}_{\pm} = -1 - 2\operatorname{sech}^3 \left( \pm \operatorname{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0) \right) \right) \quad (4.3.71)$$

Na equação (4.3.69) as soluções kink-anti-kink aparecem de forma que ambas conectam o mesmo vácuo. No entanto, a geometria das soluções descritas pela equação (4.3.70) possuem diferentes comportamentos assintóticos. Nela, temos que a solução  $a_{0+}$  diverge enquanto que a solução  $a_{0-}$  não diverge.

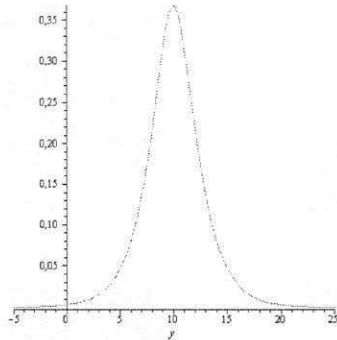


Figura 4.8: Fator de empenamento para  $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \tanh \phi$  e  $\sigma = 1$

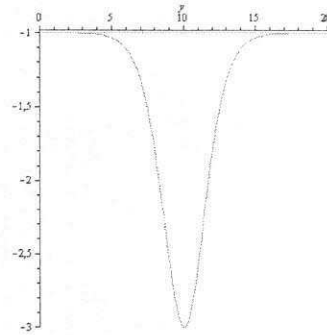


Figura 4.9: Parâmetro de desaceleração para  $\tilde{W} = \sqrt{\sigma/3} \tanh \phi$  e  $\sigma = 1$

Deste modo, segue nas figuras [4.8] e [4.9] a exposição gráfica das soluções não divergentes, ou seja, para  $a_{0-}$  e  $q_{-}$ .

## Capítulo 5

### Conclusões

Neste trabalho mostramos como o formalismo de primeira ordem pode ser utilizado de modo que possibilite o intercâmbio de equações com as quais temos que lidar para obter soluções de um sistema, que em geral são equações diferenciais de segunda ordem, por equações diferenciais de primeira ordem.

Utilizamos tal procedimento para obter soluções cosmológicas para o caso de uma 3-brana imersa num espaço ambiente 5-dimensional num caso particular em que a constante de curvatura  $k$  é nula através da equação de Friedmann modificada. Tais soluções foram obtidas especificando-se uma função  $W(\phi)$ .

Mostramos que as soluções obtidas no cenário de uma cosmologia de branas recai numa forma convencional descrita por modelos do tipo FRW para um regime de baixas energias, onde  $W^2/\sigma \ll 1$ .

Obtivemos então soluções que podem descrever um regime inflacionário tanto nos primórdios do Universo, como em tempos atuais, de acordo com a tensão na brana. Mostramos como podemos obter soluções que descrevem paredes de domínio que ‘vivem’ em uma 3-brana de um modo simples e direto utilizando o processo de continuação analítica, estabelecendo assim, uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios.

Nas soluções de paredes de domínios destacamos o papel do correspondente ao parâmetro de desaceleração obtido através da continuação analítica, o qual nos permite obter

uma estimativa direta do afastamento de um regime  $AdS$ . Quando estamos localizados sobre uma das paredes não sentimos seus efeitos gravitacionais e a geometria do espaço-tempo induzida pela parede é do tipo Minkowski; e a medida que nos afastamos da parede passamos a experimentar um vácuo do tipo  $AdS$ .

Como perspectivas futuras, temos como meta estudar com mais profundidade as implicações cosmológicas das nossas soluções aqui obtidas, bem como explorar o fenômeno da correspondência entre paredes de domínios e soluções cosmológicas.

## Apêndice A

### A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Para obtermos a métrica de Robertson-Walker, considera-se um dado deslocamento infinitesimal (também chamado de elemento de linha) na variedade,  $dx^\mu$ , define-se então o intervalo de espaço-tempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.1})$$

que nada mais é que a norma daquele vetor deslocamento.

Por outro lado, o postulado de Weyl requer que as geodésicas do substrato sejam ortogonais a uma família de hipersuperfícies espaciais. Com isto, podemos introduzir coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$  tais que estas hipersuperfícies espaciais são dadas por  $t = \text{constante}$  e as coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$  são constantes ao longo das geodésicas. Tais coordenadas são chamadas de *co-móveis* [9].

A condição de ortogonalidade significa que  $t$  pode ser escolhido de modo que o elemento de linha possa ser escrito da seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{A.2})$$

onde os índices  $a$  e  $b$  variam de 1 à 3 e

$$h_{ab} = h_{ab}(t, x^a) \quad (\text{A.3})$$

De acordo com o princípio cosmológico, sabemos que nenhum ponto ou direção devem ser privilegiados, de modo que a homogeneidade e a isotropia do espaço sejam preservadas



enquanto este evolui. A partir disto podemos concluir que a dependência temporal do termo  $h_{ab} = h_{ab}(t, x)$  deve se dar através de um fator comum, de modo que as distâncias correspondentes à pequenos deslocamentos possam ser as mesmas em todos os instantes. Portanto, podemos reescrever  $h_{ab}$  como

$$h_{ab}(t, x) = [S(t)]^2 \gamma_{ab}(x^a) \quad (\text{A.4})$$

Sendo assim, apoiados no postulado de Weyl, no princípio cosmológico, e na teoria da relatividade geral, podemos reescrever a métrica do espaço-tempo como

$$ds^2 = -dt^2 + [S(t)]^2 \gamma_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{A.5})$$

ou

$$ds^2 = -dt^2 + [S(t)]^2 dl^2 \quad (\text{A.6})$$

onde  $dl^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b$ .

Como se pode perceber do item anterior, para conhecermos a métrica do espaço-tempo precisamos determinar a métrica do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Para isso, temos que fazer uso do que já conhecemos acerca de tal espaço. E o que sabemos a respeito deste é que ele é homogêneo e isotrópico e possui curvatura.

A curvatura é uma propriedade geométrica do espaço, e como tal, pode ser determinada a partir da métrica. A curvatura de um espaço é quantificada através de um tensor chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann, dado por

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} + \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.8})$$

são os coeficientes da conexão de Christoffel (que estão associados a noção de paralelismo numa variedade).

Contraindo-se o tensor de Riemann nos índices  $\rho$  e  $\mu$ , obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado, ao admitirmos que o espaço é homogêneo e isotrópico, podemos escolher um ponto qualquer  $O$  para servir de origem para um sistema de coordenadas; e em consequência da isotropia, sabemos que a métrica possui simetria esférica em torno de tal ponto  $O$ . Com isto, pode-se mostrar que existe um sistema de coordenadas adaptado a simetria no qual a métrica do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico pode ser escrita da seguinte forma

$$dl^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{A.10})$$

Deste modo, precisamos apenas determinar  $e^{\lambda(r)}$  para conhecermos completamente a métrica.

Então, substituindo esta métrica na equação (A.8) (com os índices variando de 1 à 3) e seu resultado na equação (A.7) e tomando a contração do primeiro e terceiro índices, obtemos as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} \quad (\text{A.11a})$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \partial_r \lambda - e^{-\lambda} \quad (\text{A.11b})$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (\text{A.11c})$$

Por outro lado, uma das utilidades da homogeneidade e isotropia é que eles implicam que o espaço é maximamente simétrico. Entendemos que um espaço é maximamente simétrico quando ele possui seu número máximo possível de vetores de Killing<sup>1</sup> linearmente independentes. Pode-se provar então, que em um espaço maximamente simétrico, o tensor de Riemann pode ser escrito como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = C(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (\text{A.12})$$

onde,  $C = R/[n(n-1)]$  é chamado de constante de curvatura; sendo  $n$  o número da dimensão do espaço em questão e  $R$  o escalar de curvatura (obtido a partir da contração do tensor de Ricci).

---

<sup>1</sup>Podemos entender um Vetor de Killing como sendo um tipo de vetor ao longo do qual a métrica não muda.

Reescrevendo o tensor de Riemann para o espaço tridimensional homogêneo e isotrópico, temos

$$R_{ijkl} = C(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (\text{A.13})$$

onde os respectivos índices variam de 1 a 3.

Multiplicando pela métrica inversa  $\gamma^{ik}$ :

$$\gamma^{ik}R_{ijkl} = C(\underbrace{\gamma^{ik}\gamma_{ik}}_{=3}\gamma_{jl} - \underbrace{\gamma^{ik}\gamma_{il}}_{=\delta_l^k}\gamma_{jk}) \quad (\text{A.14a})$$

$$R_{jkl}^k = R_{jl} = C(3\gamma_{jl} - \gamma_{jl}) \quad (\text{A.14b})$$

$$R_{jl} = 2C\gamma_{jl} \quad (\text{A.14c})$$

Agora, calculando as componentes  $R_{11}$  e  $R_{22}$ :

$$R_{11} = 2C \exp^{\lambda(r)} \quad (\text{A.15a})$$

$$R_{22} = 2Cr^2 \quad (\text{A.15b})$$

Podemos formar o seguinte sistema de equações:

$$2Ce^{\lambda(r)} = \frac{\partial_r \lambda}{r} \quad (\text{A.16a})$$

$$2Cr^2 = \left(1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\partial_r \lambda - e^{-\lambda}\right) \quad (\text{A.16b})$$

Resolvendo-o obtemos:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - Cr^2} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo tal resultado na eq. (A.10) obtemos métrica do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Cr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.18})$$

Podemos ainda reescrever tal métrica em outro sistema de coordenadas através da seguinte transformação:

$$r' = |C|^{1/2} r \quad (\text{A.19})$$

$$dr' = |C|^{1/2} dr \quad (\text{A.20})$$

e com isto temos:

$$dl^2 = \frac{1}{|C|} \left( \frac{dr'^2}{1 - kdr'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (\text{A.21})$$

onde

$$k = \frac{C}{|C|} = \begin{cases} +1, & C > 0 \\ -1, & C < 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Desta forma, fazendo novamente a mudança de notação  $r' \rightarrow r$ , podemos escrever:

$$dl^2 = \begin{cases} \frac{1}{|C|} \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), & \text{para } C \neq 0 \\ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{para } C = 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Uma vez determinada esta métrica do espaço tridimensional, podemos utilizá-la para escrever a própria métrica do espaço-tempo. Assim temos

$$ds^2 = -dt^2 + [S(t)]^2 \begin{cases} \frac{1}{|C|} \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), & \text{para } C \neq 0 \\ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{para } C = 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Definindo

$$a(t) = \begin{cases} S(t)/|C|^{1/2}, & \text{para } C \neq 0 \\ S(t), & \text{para } C = 0 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

podemos escrever:

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)]^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (\text{A.26})$$

que é a chamada métrica de Friedmann-Robertson-Walker, sendo  $k$  a constante de curvatura, cujos valores assumidos são  $-1$  ou  $0$  ou  $+1$ , e  $a(t)$  é o fator de escala.

# Bibliografia

- [1] Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1990).
- [2] Weinberg, S. *Cosmology*. Oxford University Press: 2008.
- [3] Ronaldo E. de Souza, *Introdução à Cosmologia*, Editora da Universidade de São Paulo(2004).
- [4] Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*. University of Chicago: Addison Wesley, 2004.
- [5] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477** (2000) 285 [arXiv:hep-th/9910219].
- [6] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, *Phys. Lett. B* **661**, 179 (2008) [arXiv:0707.0680 [hep-th]].
- [7] D. Bazeia, C. B. Gomes, L. Losano and R. Menezes, *Phys. Lett. B* **633**, 415 (2006) [arXiv:astro-ph/0512197].
- [8] D. Bazeia, L. Losano and J. J. Rodrigues, [arXiv:hep-th/0610028].
- [9] D’Inverno, Ray. *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press).
- [10] Lima, M. C. *Anotações de Cosmologia. II Escola de Ciências do Espaço PPGF/UFPA*, 2008.
- [11] Carroll, S. M. *Lectures Notes on General Relativity* (Institute for Theoretical Physics, California, 1997).

- [12] Horvath, J. E. Et al. *Cosmologia Física*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- [13] A. Albrecht, arXiv:astro-ph/0007247.
- [14] Figueiró, M. F. *Cosmologia Inflacionária em Modelos de Branas Tipo RS-I*. Dissertação de Mestrado - USP, São Paulo: 2005.
- [15] A. Guth, *Phys. Rev. Lett.* D **23**, 347 (1981)
- [16] Villela, T. et al. *Cosmologia Observacional*. V Escola do CBPF - Rio de Janeiro, de 5-16 de julho 2004.
- [17] Kaku, M. *Quantum Field Theory: A modern introduction*. Oxford University Press.
- [18] D. Bazeia, L. Losano, J. J. Rodrigues and R. Rosenfeld, *Eur. Phys. J. C* **55**, 113 (2008) [arXiv:astro-ph/0611770].
- [19] V. I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, *Phys. Lett. B* **634**, 526 (2006) [arXiv:hep-th/0601069].
- [20] M. Cvetič, S. Griffies and H. H. Soleng, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 2613 [arXiv:gr-qc/9306005].
- [21] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 046008 [arXiv:hep-th/9909134].