



Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Unidade Acadêmica de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Curso de Mestrado em Física

Dissertação de Mestrado

**Sobre a Consistência da Violação da Invariância de Lorentz
na Eletrodinâmica Quântica**

Priscila Valdênia dos Santos

Campina Grande, 2011

Priscila Valdênia dos Santos

Dissertação de Mestrado

**Sobre a Consistência da Violação da Invariância de Lorentz
na Eletrodinâmica Quântica**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Campina Grande,
sob orientação do professor Dr. Eduardo Marcos
Rodrigues dos Passos, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Física.

Campina Grande, fevereiro de 2011

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Física
Programa de Pós-Graduação em Física
Curso de Mestrado em Física

**Sobre a Consistência da Violação da Invariância de Lorentz
na Eletrodinâmica Quântica**

Priscila Valdênia dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Área de concentração: Física de Partículas e Campos

Campina Grande

2011





FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCC

S237s

Santos, Priscila Valdênia dos.

Sobre a Consistência da Violação da invariância de Lorentz na Eletrodinâmica Quântica / Priscila Valdênia dos Santos — Campina Grande, 2011.

45 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos.

1. Modelo de Chern-Simons. 2. Simetria de Lorentz. 3. Eletrodinâmica Quântica Estendida. I. Título.

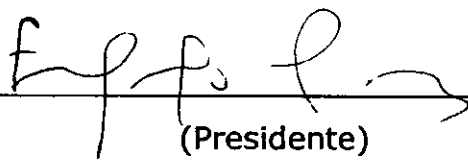
CDU 537.8(043)

PRISCILA VALDÊNIA DOS SANTOS

**SOBRE A CONSISTÊNCIA DA VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

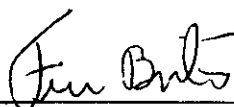
Dissertação aprovada em 04/02/2011

BANCA EXAMINADORA



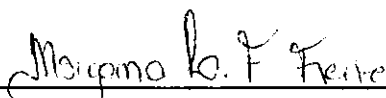
(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof.^a D.^{ra}. Morgana Lígia de Farias Freire
DF - UEPB

A Deus e à minha família.

"A ciência humana de maneira nenhuma
nega a existência de Deus. Quando
considero quantas e quão maravilhosas
coisas o homem compreende, pesquisa
e consegue realizar, então reconheço
claramente que o espírito humano
é obra de Deus, e a mais notável."

Galileu Galilei.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me dado forças e motivação, mesmo nos momentos mais difíceis, permitindo que eu conseguisse concretizar mais esse sonho.

Ao Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, não apenas pela orientação, mas pela compreensão e o incentivo, por ter me ajudado de todas as maneiras possíveis e por não ter me permitido desistir de realizar este trabalho.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela atenção e dedicação a mim dispensados em diversos momentos, desde a minha graduação, e por sua preciosa contribuição para a minha formação.

À Profa. Dra. Morgana Lígia, por seu incentivo e interesse e por suas contribuições para o melhoramento deste trabalho.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física (UAF) e da Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística (UAME) da Universidade Federal de Campina Grande que contribuíram para a minha formação, em especial à Daisy Martins, Fábio Leal de Melo Dahia, Rômulo Rodrigues, Aécio Lima e Antônio Carlos Buriti (UAF) e José Luiz Neto e Luiz Mendes (UAME).

Aos funcionários e colegas da UAF, especialmente a Wellington Serafim, Waldson Marcelo, Kélder Cavalcanti, Emanuel Cunha, Fernando Gama, Elialdo Andriola, Renato Pereira, Jardel Lucena, José de Arimatéia, Márcio Siqueira, José Jacinto, Fábio Alves, Eugênio Bastos e Aubery Vital pela grata convivência durante minha permanência nesta Pós-Graduação.

À minha família, especialmente à minha mãe, por ter me tornado tudo o que sou hoje e ao meu noivo Joel Rodrigues, por ter me acompanhado e incentivado em mais essa etapa da minha vida.

A todos os que contribuíram de maneira direta ou indireta, mesmo que simplesmente torcendo para que eu concluísse este trabalho com êxito.

Resumo

Nesta dissertação, direcionamos nossa atenção para os impactos realizados pelo termo tipo Chern-Simons CPT-ímpar ou modelo CFJ na extensão da eletrodinâmica clássica e quântica (QED) em (3+1) dimensões. Do ponto de vista clássico, fizemos um levantamento das características da teoria de Maxwell quando o termo de Chern-Simons está presente. Na QED investigamos a consistência da possibilidade de se induzir o modelo CFJ via correções radiativas usando o método de expansão derivativa de determinantes para férmions sem massa e férmions massivos. No caso sem massa, racionalizamos o propagador da teoria e mostramos que o coeficiente do modelo CFJ pode ser encontrado com valor finito e não nulo através de dois esquemas de regularização. No caso massivo, usamos uma aproximação perturbativa até a primeira ordem em b_μ , e mostramos que o valor do coeficiente do modelo CFJ não se altera quando são aplicados dois esquemas de regularização. Finalizamos nossa dissertação abordando o problema da divisão de um fóton polarizado no vácuo. No contexto da violação da simetria de Lorentz, mostramos que é possível se induzir uma ação efetiva semelhante ao modelo CFJ com coeficiente não nulo.

Palavras-Chave: Modelo de Chern-Simons, Simetria de Lorentz, Eletrodinâmica Quântica Estendida.

Abstract

In this work we fix our attention to the impact of a term such as CPT - odd Chern - Simons or CFJ model in classical and quantum electrodynamics (QED) in (3+1) dimensions. From the classical point of view, we conducted a survey of the characteristics of Maxwell's theory, when this term is present. In QED we investigate the consistency of the possibility of inducing the CFJ model through radiative corrections. We used the method of derivative expansion of determinants, for massless and massive fermions. In the massless case, we rationalize the propagator of theory and show that the coefficient of the CFJ model can be found with finite and nonzero value through two different regularization schemes. In the massive case, we use an perturbative approximation up to first order in b_μ , and we also show that the coefficient of the CFJ model does not change when applied two different regularization schemes. We conclude our work discussing the problem of a polarized photon while splitted in the vacuum. In the context of Lorentz symmetry violation, we show that it is possible to induce an effective action similar to CFJ model with non-zero coefficient.

Keywords: Chern-Simons model, Lorentz Symmetry, Extended Quantum Electrodynamics.

Notações e Convenções

Nesta dissertação, serão adotadas as unidades fundamentais, em que $\hbar = c = 1$. Nesse sistema temos:

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{massa}]^{-1} = [\text{energia}]^{-1}.$$

Usamos também a seguinte notação para o tensor métrico:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As letras gregas indicam 0, 1, 2, 3 (t, x, y, z), os índices romanos (i, j, ...) indicam 1, 2, 3 (x, y, z) e os índices repetidos indicam soma. Para os quadri-vetores escrevemos as seguintes relações:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p_0 p^0 + p_i p^i, \quad x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad e \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Sumário

1	Introdução	11
2	A eletrodinâmica clássica modificada	15
2.1	A invariância de calibre e as equações de movimento	16
2.2	A relação de dispersão	17
2.3	O tensor energia-momento	18
3	Ação efetiva induzida em um loop	20
3.1	Ação efetiva	20
3.2	Tensor de polarização do vácuo: férmions sem massa $m = 0$	23
3.2.1	Aplicando o método de regularização dimensional	25
3.2.2	Aplicando o método de regularização via cut-off- Λ	26
3.3	Tensor de polarização do vácuo: férmions com massa $m \neq 0$	27
3.3.1	Aplicando o método de regularização dimensional	28
3.3.2	Aplicando o método de regularização via cut-off- Λ	29
4	Ação efetiva induzida via divisão do fóton no vácuo	30
4.1	Ação efetiva modificada	31
4.2	Tensor de polarização do vácuo: férmions com massa $m \neq 0$	32
4.3	Tensor de polarização do vácuo: férmions sem massa $m = 0$	33
5	Considerações finais e Perspectivas	36

Referências Bibliográficas	38
Apêndice	43
A Fórmulas da regularização dimensional das integrais de Feynman	43

Capítulo 1

Introdução

Atualmente é observada uma série de pressupostos através dos quais considera-se que simetrias como a de Lorentz e CPT sejam apenas leis aproximadas da natureza. A moderna teoria quântica de campos já admite a possibilidade da quebra da invariância de Lorentz pelo mecanismo de quebra espontânea de simetria. A base dessa possibilidade surge em razão do seguinte argumento: mesmo que o entendimento das leis da natureza obedeça à simetria de Lorentz, a solução do vácuo da teoria pode violar espontaneamente essa simetria.

A invariância de Lorentz é composta por dois tipos de transformações: rotações e boosts. Enquanto que a invariância por CPT é composta pelas transformações discretas: conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T). Estas duas simetrias (de Lorentz e CPT) são consideradas leis fundamentais da Física, em que suas ocorrências têm sido confirmadas através de experimentos de alta precisão [1].

O modelo padrão da física das partículas fundamentais, por si só, não possui dinâmica necessária para causar violação espontânea da simetria de Lorentz. Neste caso, a idéia básica é que essa violação pode ocorrer em teorias mais fundamentais, tais como Teoria de Cordas, Geometria Não-Comutativa, etc., e a teoria resultante

pode ser efetivamente descrita na estrutura da extensão do modelo padrão [2, 3].

O mecanismo da extensão do modelo padrão consiste em adicionar termos fenomenológicos a alguns setores da lagrangeana do modelo padrão usual, mantendo todas as propriedades físicas desejáveis, tais como a invariância de calibre, processos de renormalização, conservação do tensor energia-momento etc. Como exemplo, escrevemos abaixo a extensão geral da eletrodinâmica quântica para um simples campo de Dirac ψ de massa m , para o qual a Lagrangeana \mathcal{L} é [4]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{QED} = & \frac{1}{2} i \bar{\psi} \Gamma^\nu \overleftrightarrow{D}_\nu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{4} k_\alpha \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} A_\lambda F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} k^{\alpha\lambda\mu\nu} F_{\alpha\lambda} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $D_\nu = \partial_\nu + ieA_\nu$ é a derivada covariante usual e

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu = & \gamma^\nu + c^{\mu\nu} \gamma_\mu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu + e^\nu + i f^\nu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\mu}, \\ M = & m + \gamma_5 \not{b} + \not{d} + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.2)$$

No setor dos férmions, os coeficientes $a_\mu, b_\mu, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}, e_\mu, f_\mu, g_{\lambda\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ são responsáveis pela quebra de simetria de Lorentz. A quebra de simetria CPT se dá devido aos termos $a_\mu, b_\mu, e_\mu, f_\mu, e$ e $g_{\lambda\mu\nu}$. No setor dos fótons, $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo eletromagnético usual, e o coeficiente $k^{\alpha\lambda\mu\nu}$ é real e adimensional com propriedades do tensor de Riemann, já o coeficiente k_α é real com dimensão de massa.

Paralelo ao estudo teórico da extensão do modelo padrão, existem estudos experimentais que analisam quais os possíveis valores dos parâmetros que podem realmente determinar sinais de violação das simetrias de Lorentz e CPT. Até agora, tais testes experimentais têm incluído estudos referentes a espectroscopia de hidrogênio e anti-hidrogênio [5], observações do comportamento do pêndulo de torção de um spin polarizado [6], medidas cosmológicas sobre a polarização da luz proveniente de galáxias distantes [7], entre outros.

Esta dissertação aborda aspectos teóricos da violação da simetria de Lorentz via extensão do modelo padrão. Mais especificamente, estudaremos diferentes questões relacionadas à primeira extensão da Lagrangeana (1.1).

Conhecida na literatura como termo tipo Chern–Simons CPT-ímpar¹ ou modelo CFJ, pois foi desenvolvida inicialmente por Carroll, Field e Jackiw [8], essa extensão tem como propriedade de preservar a invariância de calibre na ação, porém modifica a relação de dispersão prevendo um efeito peculiar birrefringente² da luz no vácuo advindo de galáxias distantes. Recentemente, possíveis ocorrências de tal efeito estão sendo investigadas através de dados cosmológicos [9]. Contudo, efeitos desse tipo ainda não foram observados na natureza. Isto indica que a intensidade de k_μ pode ser muito pequena a ponto de desaparecer efetivamente. Como ponto de partida, estudamos as principais características do modelo CFJ quando adicionado a teoria eletromagnética de Maxwell.

A natureza CPT-ímpar da ação do tipo Chern-Simons sugere que esse termo deve ser, de alguma forma, gerado via cálculos quânticos no nível de um loop. A relevante densidade de lagrangeana proposta para o estudo dessa questão é descrita pelo setor fermiônico da QED (eletrodinâmica quântica) usual adicionado pelo termo $\bar{\psi}\gamma_5\not{b}\psi$. Essa teoria possui a importante propriedade de induzir o termo do tipo Chern-Simons de CPT-ímpar via correções radiativas obtendo a relação $k_\mu = Cb_\mu$. Contudo, o coeficiente de proporcionalidade C depende do esquema de regularização utilizado, isto é, diferentes métodos de regularização podem oferecer diferentes valores para a constante de proporcionalidade C [10]. Este é um tipo de indeterminação que recentemente foi bastante investigada por diversos trabalhos na literatura [11]. Ao abordarmos esta questão, mostramos que é possível gerar o termo tipo Chern-Simons com um valor definido e diferente de zero para a constante C através de dois

¹Este termo, além de violar a invariância de Lorentz, também viola a simetria CPT.

²Os materiais ou meios chamados birrefringentes apresentam diferentes velocidades de propagação da luz (ou índices de refração) para diferentes direções de polarização.

distintos esquemas de regularização bem conhecidos na literatura. Nossos cálculos abordam os regimes de férmions sem massa e com massa, respectivamente. Depois, estendemos os cálculos de correções radiativas para investigar a possibilidade de se isolar uma ação efetiva através do processo de divisão de um fóton na polarização do vácuo, sendo este o principal objetivo dessa dissertação.

Dessa forma, a presente dissertação foi organizada em capítulos: No capítulo 2, estudamos os impactos realizados na eletrodinâmica clássica quando o termo tipo Chern-Simons CPT-ímpar está presente na teoria. Neste caso, analisamos a invariância de calibre, a relação de dispersão e o tensor energia-momento. No capítulo 3, estudamos a possibilidade de gerar o termo tipo Chern-Simons CPT-ímpar através de correções radiativas na eletrodinâmica quântica. Neste problema, investigamos possíveis ambiguidades presentes na abordagem das integrais infinitas no regime de férmions massivos e sem massa. Usando dois métodos de regularização diferentes: regularização dimensional e cut-off, mostramos que para ambos os casos, os valores para a constante de proporcionalidade C são finitos, não nulos e determinados. No capítulo 4, abordamos o problema da divisão de um fóton em multifótons no processo de polarização do vácuo da eletrodinâmica quântica. Observamos que a presença da violação da simetria de Lorentz induz uma ação efetiva não nula. Utilizamos o método de expansão derivativa de operadores fermiônicos associado ao esquema de regularização dimensional. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos nossos resultados e algumas perspectivas para trabalhos futuros que envolvam este tema.

Capítulo 2

A eletrodinâmica clássica modificada

Neste capítulo, fizemos um levantamento sobre as principais características do termo do tipo Chern–Simons de paridade ímpar modificando a eletrodinâmica clássica [12]. Analisamos a invariância de calibre do modelo, as equações de movimento, a relação de dispersão eletromagnética e o tensor de energia-momento. A eletrodinâmica modificada é dada pela seguinte teoria:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}A_\nu - J_\mu A^\mu \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o tensor de intensidade de campo eletromagnético e seu dual, respectivamente. O parâmetro η_μ é um quadri-vetor constante que determina uma direção privilegiada no espaço-tempo violando a simetria de Lorentz e também a simetria CPT.

2.1 A invariância de calibre e as equações de movimento

A Lagrangeana (2.1) nos conduz às equações de movimento para os potenciais $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ representadas por:

$$(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\rho\partial_\sigma)A_\nu = j^\mu. \quad (2.2)$$

Como na eletrodinâmica convencional, a conservação da corrente $\partial_\mu j^\mu = 0$ segue como uma relação de consistência.

As equações de Maxwell modificadas são dadas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \eta_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.3)$$

Verificando a invariância de calibre da teoria, devemos considerar apenas o termo do tipo Chern-Simons, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= \frac{1}{2}\eta_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu = \frac{1}{4}\eta_\mu \varepsilon^{\mu\sigma\rho\nu} F_{\sigma\rho} A_\nu \\ &= \frac{1}{2}\eta_\mu \varepsilon^{\mu\sigma\rho\nu} \partial_\sigma A_\rho A_\nu \end{aligned} \quad (2.4)$$

e aplicando a seguinte variação: $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, então sobre essa transformação de calibre do campo eletromagnético, temos que a Lagrangeana \mathcal{L}_{CS} varia apenas por uma divergência:

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = \Lambda \tilde{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \eta_\nu - \partial_\nu \eta_\mu), \quad (2.5)$$

Portanto, a invariância de calibre para a função arbitrária Λ necessita que $\partial_\mu \eta_\nu = 0$. Contudo, $\Delta\mathcal{L}_{CS}$ pode sumir com um termo de superfície.

Considerando a Eq. (2.3), podemos escrever as leis de Gauss e de Ampère modificadas em termos das componentes do tensor $F^{\mu\nu}$, da corrente e do quadri-vetor constante, definidos como

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \{\vec{E}, \vec{B}\}, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad F^{0i} = -E^i, \\ F^{i0} &= E^i, \quad F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad \eta_\mu = (m, \vec{\eta}) \end{aligned}$$

e

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Assim,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \vec{\eta} \cdot \vec{B} = \rho \quad (2.7)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} - m\vec{B} - \vec{\eta} \times \vec{B} = \vec{j}. \quad (2.8)$$

As equações de Maxwell sem fontes permanecem inalteradas, pois a correspondência campo-potencial é a convencional.

2.2 A relação de dispersão

Agora por intermédio do ansatz¹:

$$A_\beta = A_\beta(p) e^{ip_\mu x^\mu} \text{ com } x^\mu = (t, \vec{x}), \quad p_\mu = (\omega, \vec{p}) \quad (2.9)$$

e pela equação de movimento (2.2) para $j^\mu = 0$, obtemos a seguinte relação de dispersão modificada:

$$(p_\alpha p^\alpha)^2 + (\eta_\mu \eta^\mu)(p_\alpha p^\alpha) = (\eta_\alpha p^\alpha). \quad (2.10)$$

A expressão (2.10) determina uma frequência angular ω associada ao tri-vetor momento \vec{p} . Para um caso particular em que o quadri-vetor constante é do tipo-tempo $\eta_\mu = (m, \vec{0})$, obtemos:

$$\omega^2 = |\vec{p}|^2 \pm m|\vec{p}|. \quad (2.11)$$

¹Ansatz é um termo proveniente do alemão, utilizado no sentido de se fazer uma tentativa.

Então, temos os possíveis modos de frequência para $m \ll |\vec{p}|$:

$$\begin{aligned}\omega_{\pm} &= \pm |\vec{p}| \sqrt{1 \pm \frac{m}{|\vec{p}|}} \\ &\approx \pm \left(|\vec{p}| \pm \frac{m}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Através da análise da velocidade de grupo determinada via Eq(2.12), observa-se que esta quantidade pode exceder a velocidade da luz c numa certa direção privilegiada, violando a simetria de Lorentz (as transformações dos boosts e das rotações). Também existe a violação da simetria de CPT quebrando explicitamente a transformação de paridade (P), na qual as transformações de conjugação de carga (C) e reversão temporal (T) não são capazes de se restaurar.

2.3 O tensor energia-momento

Podemos calcular o tensor energia-momento escrevendo [13, 14]:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} A_{\sigma})} \partial^{\nu} A_{\sigma} - g^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Para o caso usual, podemos usar a identidade $\frac{\partial[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]}{\partial(\partial_{\mu} A_{\sigma})} = 4F^{\mu\sigma}$ e obtemos a forma explícita:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\sigma} \partial^{\nu} A_{\sigma} + g^{\mu\nu} j_{\sigma} A^{\sigma}. \quad (2.14)$$

Considerando o fato de que o tensor intensidade de campo eletromagnético é anti-simétrico, a quadri-divergência do tensor energia-momento se reduzirá a seguinte quantidade:

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} = (\partial^{\nu} j_{\sigma}) A^{\sigma}. \quad (2.15)$$

Sendo assim, a quebra da conservação da energia e momento é consequência do tratamento inicial da corrente externa. Como o tensor energia-momento possui

invariância por uma transformação de calibre, podemos expressá-lo na forma:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\sigma(F^{\mu\sigma} A^\nu) \quad (2.16)$$

ou ainda,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\sigma}F_\sigma^\nu g^{\mu\nu} j_\sigma A^\sigma - J^\mu A^\nu. \quad (2.17)$$

Então percebemos a invariância de calibre pelo fato de a expressão $T^{\mu\nu}$ depender somente do tensor de intensidade do campo eletromagnético.

De maneira análoga, para o caso da inclusão do termo tipo Chern–Simons CPT ímpar, o tensor energia-momento adquire a seguinte forma:

$$\Theta_{MCS}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\sigma}\partial^\nu A_\sigma - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\eta_\alpha\tilde{F}^{\alpha\beta}A_\beta. \quad (2.18)$$

Assim, com a presença de fontes externas, ocorrem modificações no tensor energia-momento, implicando que a adição do termo do tipo Chern–Simons contribui com sua modificação para uma contribuição anti-simétrica, ou seja, $\Theta_{MCS}^{\mu\nu} \neq \Theta_{MCS}^{\nu\mu}$, caracterizando a quebra da simetria de Lorentz. Portanto, o novo tensor energia-momento é reescrito na forma

$$T_{MCS}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\sigma}F_\sigma^\nu g^{\mu\nu} - \eta^\nu\tilde{F}^{\mu\alpha}A_\alpha. \quad (2.19)$$

Na ausência de fontes externas $J^\mu = 0$, este tensor é conservado: $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0$. Note que o procedimento de simetrização usual é inaplicável, pois a simetria de Lorentz é violada. Note também que $T_{MCS}^{\mu\nu}$ é dependente de uma transformação de calibre. Porém o termo adicional

$$-\eta^\nu\tilde{F}^{\mu\alpha}\partial_\alpha\Lambda = \partial_\alpha\eta^\nu\tilde{F}^{\mu\alpha}\Lambda$$

gerado por uma transformação de calibre $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha\Lambda$ é um termo de superfície que não afeta a conservação do quadri-momento:

$$P^\nu \equiv \int d^3x T^{0\nu}. \quad (2.20)$$

Capítulo 3

Ação efetiva induzida em um loop

Neste capítulo, estudamos a possibilidade de se induzir um termo tipo Chern-Simons CPT - ímpar via cálculos quânticos no nível de um loop na QED, na ausência ou na presença da massa. Usaremos o método de expansão derivativa do determinante fermiônico associado à regularização dimensional e à regularização via um cut-off.

3.1 Ação efetiva

O modelo que tem o potencial de investigar a indução do termo tipo Chern-Simons CPT -ímpar é descrito pela seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \bar{\psi}\gamma_5\not{b}\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi. \quad (3.1)$$

A correspondente funcional geratriz é dada por [13, 14]:

$$Z[b, A] = \int D\bar{\psi}(x)D\psi(x) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]. \quad (3.2)$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1) e integrando sobre os campos fermiônicos, obtemos

$$Z[b, A] = i \det[\cancel{D} - m - \gamma_5\not{b} - e\not{A}]. \quad (3.3)$$

Portanto, podemos escrever a expressão para a ação efetiva como:

$$\begin{aligned} S_{eff}[b, A] &= -i \ln \det[\not{p} - m - \gamma_5 \not{b} - e \not{A}] \\ &= -i \text{Tr} \ln[\not{p} - m - \gamma_5 \not{b} - e \not{A}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com o auxílio das seguintes propriedades da função logarítmica:

$$\begin{aligned} \ln(A \cdot B) &= \ln(A) + \ln(B) \\ \ln(1 - X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

podemos reescrever a Eq. (3.4) da seguinte forma:

$$S_{eff}[b, A] = S_{eff}[b] + S_{eff}[b, A] \quad (3.6)$$

onde

$$S_{eff}[b] = -i \text{Tr}[\not{p} - m - \gamma_5 \not{b}] \quad (3.7)$$

e

$$S_{eff}[b, A^n] = i \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[-ie S_b(p) \not{A} \right]^n \quad (3.8)$$

sendo $S_b(p)$ o propagador exato do campo fermiônico, dado por:

$$S_b(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \gamma_5 \not{b}}. \quad (3.9)$$

Note que $S_{eff}[b]$ independe do campo de gauge $A_\mu(x)$, e assim não contribui para a geração do termo do tipo Chern-Simons. Então, o termo da série na Eq.(3.8) associado a $n = 2$ é escrito como segue

$$S_{eff}[b, A^2] = \frac{-ie^2}{2} \text{Tr} \left[S_b(p) \not{A}(x) S_b(p) \not{A}(x) \right]. \quad (3.10)$$

O traço Tr que aparece nas expressões anteriores, atua sobre as matrizes gamas e nos espaços internos. Neste sentido, a expressão para a ação efetiva em geral não pode ser escrita na forma

$$S_{eff}[b_\mu, A_\mu^2] = \int d^4x \mathcal{L} \quad (3.11)$$

pois os campos de calibre $A_\mu(x)$ são variáveis dependentes das coordenadas, as quais não comutam com funções explicitamente escritas nos espaços dos momentos. Dessa forma não é trivial separar quantidades escritas em diferentes espaços de configurações, e em seguida efetuar integrações independentes nos respectivos espaços formalmente indicados pelo traço. Para contornar esse problema, podemos usar a principal relação do método de expansão derivativa [15, 16, 17, 18, 19, 20]:

$$\begin{aligned} A_\mu(x)S_b(p) &= S_b(p - i\partial)A_\mu(x) \\ &= S_b(p)A_\mu(x) + S_b(p)\gamma^\lambda S_b(p)(\partial_\lambda A_\mu(x)) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

e reecrevar a ação efetiva (3.10) como:

$$\begin{aligned} S_{eff}[b_\mu, A_\mu^2] &= \frac{-ie^2}{2} \text{Tr} \left[S_b(p)\gamma^\mu (S_b(p - i\partial)A_\mu(x))\mathcal{A}(x) \right] \\ &= \int d^4x \Pi^{\mu\nu} (\partial_\lambda A_\mu) A_\nu \end{aligned} \quad (3.13)$$

Onde $\Pi^{\mu\rho\nu}$ é o tensor de polarização do vácuo no nível de um-loop, dado por:

$$\Pi^{\mu\lambda\nu} = \frac{-ie^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [S_b(p)\gamma^\mu S_b(p)\gamma^\lambda S_b(p)\gamma^\nu]. \quad (3.14)$$

Na Eq.(3.14) a abreviação tr , significa que o traço atua apenas na matrizes gamas.

3.2 Tensor de polarização do vácuo: férmions sem massa $m = 0$

Nesta seção tratamos de uma teoria com férmions sem massa. O argumento principal dessa idéia foi que a teoria de Chern-Simons em (2+1) dimensões pode ser originada do termo tipo Chern-Simons em (3+1) dimensões por redução dimensional. Isto também se estende para o setor fermiônico que relaciona a QED estendida sem massa em (3+1) dimensões com o setor fermiônico massivo em (2+1) dimensões. A vantagem desse método é que o termo tipo Chern-Simons pode ser induzido através da QED sem massa com o coeficiente C definido e finito na QED em (2+1) dimensões [11, 21]. O propagador sem massa é escrito como:

$$S_b(p) \xrightarrow{m=0} \frac{i}{\not{p} - \gamma_5 \not{b}}. \quad (3.15)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, o propagador acima pode ser representado como:

$$S_b(p) = W_1 P_L + W_2 P_R, \quad (3.16)$$

onde

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad (3.17)$$

e

$$W_1 = \frac{i(p+b)^2(\not{p} - \not{b})}{(p^2 - b^2)^2}, \quad W_2 = \frac{i(p-b)^2(\not{p} + \not{b})}{(p^2 - b^2)^2}. \quad (3.18)$$

Neste caso, a expressão do tensor de auto-energia (3.14) pode ser reescrito na forma:

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} T^{\mu\nu}(p), \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\lambda\nu}(p) = & \text{tr}[W_1 P_R \gamma^\mu W_1 P_R \gamma^\lambda W_1 P_R \gamma^\nu + W_1 P_R \gamma^\mu W_1 P_R \gamma^\lambda W_2 P_L \gamma^\nu + \\
 & W_1 P_R \gamma^\mu W_2 P_L \gamma^\lambda W_1 P_R \gamma^\nu + W_1 P_R \gamma^\mu W_2 P_L \gamma^\lambda W_2 P_L \gamma^\nu + \\
 & W_2 P_L \gamma^\mu W_2 P_L \gamma^\lambda W_2 P_L \gamma^\nu + W_2 P_L \gamma^\mu W_2 P_L \gamma^\lambda W_1 P_R \gamma^\nu + \\
 & W_2 P_L \gamma^\mu W_1 P_R \gamma^\lambda W_2 P_L \gamma^\nu + W_2 P_L \gamma^\mu W_1 P_R \gamma^\lambda W_1 P_R \gamma^\nu]. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Usando as relações $(\gamma_5)^2 = 1$ e $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = \gamma^\mu \gamma_5 - \gamma_5 \gamma^\mu = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 P_R \times P_R \times P_R &= P_R, & P_R \times P_R \times P_L &= 0, & P_R \times P_L \times P_R &= 0, \\
 P_R \times P_L \times P_L &= 0 & P_L \times P_L \times P_L &= P_L, & P_L \times P_L \times P_R &= 0, \\
 P_L \times P_R \times P_L &= 0, & P_L \times P_R \times P_R &= 0. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Assim, a Eq. (3.20) se reduz a

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\lambda\nu}(p) &= \text{tr}[W_1 \gamma^\mu W_1 \gamma^\lambda W_1 P_R \gamma^\nu + W_2 \gamma^\mu W_2 \gamma^\lambda W_2 P_L \gamma^\nu] \\
 &= \frac{-i}{2\Delta^6} \text{tr}[(p+b)^6 \text{tr}[(\not{p}-\not{b})\gamma^\mu(\not{p}-\not{b})\gamma^\lambda(\not{p}-\not{b})\gamma_5\gamma^\nu] + \\
 & \quad (p-b)^6 \text{tr}[(\not{p}+\not{b})\gamma^\mu(\not{p}+\not{b})\gamma^\lambda(\not{p}+\not{b})\gamma_5\gamma^\nu]] \\
 &= \frac{-2}{\Delta^2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} [(p+b)^4 (b_\rho - p_\rho) + (p-b)^4 (b_\rho + p_\rho)], \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

com $\Delta = (p^2 - b^2)$.

Usamos a seguinte relação para o traço das matrizes gamas:

$$\text{tr}(\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5) = 4i \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}. \quad (3.23)$$

para simplificar a estrutura do numerador da expressão (3.19). Assim, podemos escrever uma simples expressão para o tensor de polarização do vácuo dada por:

$$\Pi^{\mu\lambda\nu} = ie^2 \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{b_\rho ((p+b)^4 + (p-b)^4) - p_\rho ((p+b)^4 - (p-b)^4)}{(p^2 - b^2)^4}. \quad (3.24)$$

Agora a ação efetiva possui a forma

$$S_{eff}^{m=0}[b, A_\mu^2] = \frac{1}{2} \int d^4 x \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} k_\rho F_{\lambda\mu} A_\nu \quad (3.25)$$

Onde o parâmetro k_ρ pode ser expresso como:

$$k_\rho^{m=0} = 2ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \left[\frac{(p^2 - b^2)b_\rho - 4(b \cdot p)p_\rho}{(p^2 - b^2)^3} + \frac{4[(p^2 b^2 + (b \cdot p)^2)b_\rho - 2b^2(b \cdot p)p_\rho]}{(p^2 - b^2)^4} \right]. \quad (3.26)$$

Note que por contagem de potências, as integrais nos momentos na expressão (3.26) possuem termos finitos e termos com divergência do tipo logarítmica. Calcularemos essas integrais usando dois métodos de regularização:

- i) Método de regularização dimensional;
- ii) Método de regularização através de um momento cut-off- Λ .

3.2.1 Aplicando o método de regularização dimensional

A essência desse método é alterar o número de dimensões para uma dimensão arbitrária D de modo que tenhamos,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}. \quad (3.27)$$

Portanto, a Eq. (3.26) pode ser reescrita como segue:

$$k_\rho^{m=0} = 2ie^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \times \left[\frac{(p^2 - b^2)b_\rho - 4(b \cdot p)p_\rho}{(p^2 - b^2)^3} + \frac{4[(p^2 b^2 + (b \cdot p)^2)b_\rho - 2b^2(b \cdot p)p_\rho]}{(p^2 - b^2)^4} \right]. \quad (3.28)$$

Agora com auxílio das relações (A.2), (A.6), (A.8) e (A.9), que constam no apêndice, obtemos

$$k_\rho^{m=0} = \frac{e^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{2(D-1)}{3} \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{(b^2)^{\epsilon/2}} \xrightarrow{D=4} \frac{e^2}{8\pi^2} b_\rho. \quad (3.29)$$

3.2.2 Aplicando o método de regularização via cut-off- Λ

Para desenvolver os cálculos pelo método de momento cut-off, consideramos a Eq. (3.26) e mudamos do espaço-tempo de Minkowski (3+1) para o espaço Euclidiano quadri-dimensional fazendo a seguinte rotação de Wick: $x_0 \rightarrow -ix_0$, $p_0 \rightarrow ip_0$, $b_0 \rightarrow ib_0$, $d^4x \rightarrow -id^4x$ e $d^4p \rightarrow id^4p$. Assim,

$$k_\rho^{m=0} = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \left[\frac{(p^2 - b^2)b_\rho - 4(b \cdot p)p_\rho}{(p^2 - b^2)^3} + \frac{4[(p^2 b^2 + (b \cdot p)^2)b_\rho - 2b^2(b \cdot p)p_\rho]}{(p^2 - b^2)^4} \right]. \quad (3.30)$$

Por simplicidade, na Eq. (3.30) escolhemos somente a componente do tipo tempo do parâmetro que controla a violação da simetria de Lorentz, tal que $b_\rho = (b_0, 0)$, onde b_0 é uma componente não nula. Essa simplificação não deve afetar o coeficiente quadri-vetorial do termo do tipo Chern-Simons induzido. Isto facilita nossos cálculos sem qualquer perda de generalidade.

De acordo com as considerações acima, podemos reescrever a Eq. (3.30) em função das coordenadas esféricas na forma:

$$k_0^{m=0} = -\frac{ie^2 b_0}{2\pi^3} \int_0^\infty d\vec{p} \vec{p}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \times \left[\frac{\vec{p}^2 - 3p_0^2 - b_0^2}{(\vec{p}^2 + p_0^2 - b_0^2)^3} + \frac{4b_0^2 \vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + p_0^2 - b_0^2)^4} \right]. \quad (3.31)$$

As integrais sobre p_0 são finitas e podem ser diretamente calculadas. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} k_0^{m=0} &= -\frac{5i e^2 b_0}{8 \pi^2} \int_0^\infty d\vec{p} \frac{b_0^2 p^4}{(\vec{p}^2 - b_0^2)^{7/2}}, \\ &= -\frac{5i e^2 b_0}{8 \pi^2} \int_0^{u=\Lambda/b_0} du \frac{u^4}{(u^2 - 1)^{7/2}}, \\ &= \frac{ie^2 b_0}{8\pi^2} \frac{1}{(1 - \frac{b_0^2}{\Lambda^2})^{7/2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Portanto, tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$, encontramos o seguinte resultado em coordenadas euclidianas:

$$k_0^{m=0} \rightarrow \frac{ie^2}{8\pi^2} b_0. \quad (3.33)$$

Este resultado coincide com o coeficiente da Eq. (3.29), previamente obtido com o procedimento de regularização dimensional.

3.3 Tensor de polarização do vácuo: férmions com massa $m \neq 0$

Considerando um método perturbativo para o propagador exato fermiônico, expandimos $S_b(p)$ na seguinte série no parâmetro b_μ :

$$S_b(p) = S(p) + S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p) + \dots \quad (3.34)$$

onde usamos a seguinte expansão de operadores $\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots$. Assim, temos que $S(p)$ é o propagador fermiônico, dado por:

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (3.35)$$

Logo, o tensor de polarização na Eq. (3.14) adquire a nova estrutura:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\lambda S(p)\gamma^\nu + \\ &S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\gamma^\lambda S(p)\gamma^\nu + S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\lambda S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\gamma^\nu] \\ &= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu\nu}}{(p^2 - m^2)^4}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

com o numerador $N^{\mu\nu}$ dado por:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= \text{tr}[(\not{p} + m)\gamma_5 \not{b} (\not{p} + m)\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\lambda (\not{p} + m)\gamma^\nu + \\ &(\not{p} + m)\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma_5 \not{b} (\not{p} + m)\gamma^\lambda (\not{p} + m)\gamma^\nu + \\ &(\not{p} + m)\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\lambda (\not{p} + m)\gamma_5 \not{b} (\not{p} + m)\gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando as expressões do tipo:

$$\begin{aligned}
 p_\alpha p_\beta p_\omega p_\sigma b_\rho \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\omega \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma_5] &= -4ip^2 (2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma p^\lambda - \\
 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_\sigma (b \cdot p) + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\rho p^2), \\
 m^2 p_\alpha p_\beta b_\rho \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_5] &= 4im^2 (\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\rho p^2 - 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_\sigma (b \cdot p)) e \\
 m^4 b_\rho \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma_5] &= -4im^4 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\rho,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

obtemos a seguinte ação efetiva

$$S_{eff}^{m \neq 0}[b, A_\mu^2] = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} k_\rho F_{\lambda\mu} A_\nu. \tag{3.39}$$

Onde k_ρ é dado por

$$k_\rho^{m \neq 0} = 2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{b_\rho(p^2 + 3m^2) - 4p_\rho(b \cdot p)}{(p^2 - m^2)^3}. \tag{3.40}$$

Semelhante ao caso sem massa, aqui também por contagem de potência, a integral nos momentos na Eq. (3.40) apresenta termos finitos e termos com divergência do tipo logarítmica. Então, usamos também os métodos de regularização dimensional e de regularização através de um momento cut-off- Λ .

3.3.1 Aplicando o método de regularização dimensional

De acordo com a relação da Eq. (3.27), a Eq.(3.40) pode ser reescrita na forma

$$k_\rho^{m \neq 0} = 2ie^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{b_\rho(p^2 + 3m^2) - 4p_\rho(b \cdot p)}{(p^2 - m^2)^3}. \tag{3.41}$$

Agora com auxílio das relações (A.3), (A.5) e (A.8), do apêndice, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 k_\rho^{m \neq 0} &= \frac{4e^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{(m^2)^{\epsilon/2}} b_\rho \\
 &\xrightarrow{D=4} \frac{e^2}{4\pi^2} b_\rho.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

3.3.2 Aplicando o método de regularização via cut-off- Λ

A Eq. (3.40) reescrita no espaço euclidiano possui a seguinte forma:

$$k_{\rho}^{m \neq 0} = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{p} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \left[\frac{b_{\rho}(p^2 - 3m^2) - 4p_{\rho}(b \cdot p)}{(p^2 + m^2)^3} \right]. \quad (3.43)$$

Considerando apenas a componente do tipo tempo de b_{ρ} na Eq. (3.43), podemos reescrevê-la em função das coordenadas esféricas:

$$k_0^{m \neq 0} = -\frac{ie^2 b_0}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \vec{p}^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \left[\frac{\vec{p}^2 - 3p_0^2 - 3m^2}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^3} \right]. \quad (3.44)$$

As integrais sobre p_0 são finitas e podem ser diretamente calculadas. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} k_0^{m \neq 0} &= \frac{3i e^2 b_0}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \frac{m^2 \vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + m^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3i e^2 b_0}{4 \pi^2} \int_0^{v=\Lambda/m} dv \frac{v^2}{(v^2 + 1)^{5/2}} \\ &= \frac{ie^2 b_0}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + \frac{m^2}{\Lambda^2})^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$, encontramos o seguinte resultado em coordenadas euclidianas:

$$k_0^{m=0} \rightarrow \frac{ie^2}{4\pi^2} b_0. \quad (3.46)$$

Este resultado coincide com o coeficiente da Eq. (3.42), previamente obtido com o procedimento de regularização dimensional.

Capítulo 4

Ação efetiva induzida via divisão do fóton no vácuo

A QED usual admite que um fóton se polarize no vácuo e se divida em multifótons. Contudo, Schwinger através do método do tempo-próprio mostrou que esse processo apresenta uma amplitude identicamente nula [22]. Neste resultado, foi mantida a invariância de Lorentz e de Calibre. Entretanto, do ponto de vista da extensão do modelo padrão, admite-se que a invariância de Lorentz pode ser quebrada na escala de Planck. Então, espera-se que efeitos antes suprimidos possam aparecer nesse regime de energia. Este é o argumento em que Kostelecký e Pickering retomaram o problema de divisão da fótons no vácuo no contexto da quebra da simetria de Lorentz, e encontraram amplitudes de probabilidade diferentes de zero [23]. Porém, pelo método adotado por estes autores, não foi possível isolar uma ação efetiva. Este foi o objeto de estudo do presente capítulo.

4.1 Ação efetiva modificada

Nesta seção estamos interessados na possibilidade de induzir radiativamente um termo do tipo Chern-Simons modificado, escrito pela seguinte combinação:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = \int d^4x k_\lambda \epsilon^{\mu\rho\nu\lambda} (\partial_\rho A_\mu) A_\nu f(A^2(x)) \quad (4.1)$$

com,

$$k_\lambda = C b_\lambda, \quad f(A^2(x)) = \lambda A_\alpha A^\alpha \quad (4.2)$$

Onde C é a constante de proporcionalidade, que deveremos determinar nesse estudo.

À ação efetiva (4.1) está associado um processo no qual um fóton se polariza no vácuo e, em um loop, se divide em três fótons. Considerando o termo da série da Eq. (3.8) para $n = 4$, podemos escrever a contribuição em um loop para a referida divisão de fótons:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = -\frac{ie^4}{4} \text{Tr} \left[S_b(p) \not{A}(x) S_b(p) \not{A}(x) S_b(p) \not{A}(x) S_b(p) \not{A}(x) \right]. \quad (4.3)$$

Agora, podemos aplicar a principal relação do método de expansão derivativa da Eq. (3.12), e assim, reescrever a ação efetiva (4.3) na forma

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = -\frac{ie^4}{4} \text{Tr} \left[S_b(p) \gamma^\mu (S_b(p)(p - i\partial) A_\mu) \gamma^\nu \times \right. \\ \left. (S_b(p)(p - i\partial) A_\nu) \gamma^\beta (S_b(p)(p - i\partial) A_\beta) \not{A} \right]. \quad (4.4)$$

ou ainda,

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = -\frac{3ie^4}{4} \int d^4x (\partial_\rho A_\mu) \times \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[S_b(p) \gamma^\mu S_b(p) \gamma^\rho S_b(p) \not{A} S_b(p) \not{A} S_b(p) \not{A} \right]. \quad (4.5)$$

Para obtermos a estrutura da Eq. (4.5), usamos a propriedade cíclica do traço do produto de matrizes, em que o símbolo tr corresponde ao traço do produto das matrizes gamas.

4.2 Tensor de polarização do vácuo: férmions com massa $m \neq 0$

Para calcular o tensor de polarização associado à ação efetiva (4.5), consideramos primeiro o propagador exato dos férmions na sua versão perturbativa (3.34) até a primeira ordem no parâmetro b_μ . Neste caso, a ação efetiva pode ser dada na forma:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = -\frac{3ie^4}{4} \int d^4x (\partial_\rho A_\mu) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \times$$

$$\left[S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\rho S(p)\not{A}S(p)\not{A}S(p) + \right.$$

$$S(p)\gamma^\mu S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p)\gamma^\rho S(p)\not{A}S(p)\not{A}S(p) +$$

$$S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\rho S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p)\not{A}S(p)\not{A}S(p) +$$

$$S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\rho S(p)\not{A}S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p)\not{A}S(p) +$$

$$\left. S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma^\rho S(p)\not{A}S(p)\not{A}S(p)(-i\gamma_5 \not{b})S(p)\not{A} \right]. \quad (4.6)$$

Depois de calcularmos o traço sobre as matrizes gamas, isolamos a ação efetiva, ou seja:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = 3 \int d^4x [\Pi_a^{\mu\rho\nu\alpha\beta} + \Pi_b^{\mu\rho\nu\alpha\beta} + \Pi_c^{\mu\rho\nu\alpha\beta} + \Pi_d^{\mu\rho\nu\alpha\beta}] (\partial_\rho A_\mu) A_\nu A_\alpha A_\beta \quad (4.7)$$

onde $\Pi_a^{\mu\lambda\nu\alpha\beta}$, $\Pi_b^{\mu\lambda\nu\alpha\beta}$, $\Pi_c^{\mu\lambda\nu\alpha\beta}$ and $\Pi_d^{\mu\lambda\nu\alpha\beta}$ são os tensores de polarização dados por:

$$\Pi_a^{\mu\rho\nu\alpha\beta} = -5ie^4 b_\lambda \epsilon^{\mu\rho\nu\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - m^2)\eta^{\alpha\beta} - 4p^\alpha p^\beta}{(p^2 - m^2)^4},$$

$$\Pi_b^{\mu\rho\nu\alpha\beta} = 2ie^4 b_\lambda \epsilon^{\mu\rho\sigma\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{7(p^2 - m^2)p_\sigma p^\nu \eta^{\alpha\beta} - 16p_\sigma p^\nu p^\alpha p^\beta}{(p^2 - m^2)^5},$$

$$\Pi_c^{\mu\rho\nu\alpha\beta} = 2ie^4 b_\lambda \epsilon^{\rho\nu\sigma\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{3(p^2 - m^2)p_\sigma p^\mu \eta^{\alpha\beta} - 16p_\sigma p^\mu p^\alpha p^\beta}{(p^2 - m^2)^5},$$

$$\Pi_d^{\mu\rho\nu\alpha\beta} = -2ie^4 b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{3(p^2 - m^2)p_\sigma p^\rho \eta^{\alpha\beta} - 16p_\sigma p^\rho p^\alpha p^\beta}{(p^2 - m^2)^5}. \quad (4.8)$$

Por contagem de potências no momento de integração, notamos que todas as integrais acima são convergentes. Entretanto, para manter a invariância de calibre

da teoria, podemos calcular tais integrais através das fórmulas de regularização dimensional contidas no Apêndice (A). Os resultados são escritos por:

$$\begin{aligned}\Pi_a^{\mu\rho\nu\alpha\beta} &= \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{5}{6m^2} b_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta}, & \Pi_b^{\mu\rho\nu\alpha\beta} &= \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{6m^2} b_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta}, \\ \Pi_c^{\mu\rho\nu\alpha\beta} &= -\frac{e^4}{16\pi^2} \frac{3}{6m^2} b_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta}, & \Pi_d^{\mu\rho\nu\alpha\beta} &= -\frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{6m^2} b_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Portanto, a ação efetiva da Eq. (4.7) adquire a forma:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = \frac{1}{2} \int d^4x k_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} (\partial_\rho A_\mu) A_\nu f(A^2(x)) \quad (4.10)$$

onde

$$k_\lambda = \frac{e^2}{8\pi^2} b_\lambda \quad \text{e} \quad f(A(x)) = \frac{e^2}{m^2} A_\alpha A^\alpha. \quad (4.11)$$

4.3 Tensor de polarização do vácuo: férmions sem massa $m = 0$

Para o caso sem massa, temos que a álgebra se simplifica no cálculo da ação efetiva, revelando o caráter quiral da teoria. A vantagem disto é que a ação tipo Chern–Simons pode ser induzida na QED estendida não-massiva, com coeficiente bem definido e finito (referencia). O propagador exato dos férmions é facilmente racionalizado e expresso na forma:

$$S_b(p) \xrightarrow{m=0} \frac{i}{\not{p} - \gamma_5 \not{b}}. \quad (4.12)$$

Ou, após algumas manipulações algébricas:

$$S_b(p) = W_1 P_L + W_2 P_R. \quad (4.13)$$

Aqui novamente temos:

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad (4.14)$$

e

$$W_1 = \frac{i(p+b)^2(\not{p}-\not{b})}{(p^2-b^2)^2}, \quad W_2 = \frac{i(p-b)^2(\not{p}+\not{b})}{(p^2-b^2)^2}. \quad (4.15)$$

Substituindo na Eq. (4.5) e usando as identidades: $P_R \times P_L = P_L \times P_R = 0$, $P_L \times P_L \times P_L \times P_L \times P_L \times P_L = P_L$ e $P_R \times P_R \times P_R \times P_R \times P_R \times P_R = P_R$, ficamos com:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = -\frac{3ie^4}{8} \int d^4x (\partial_\rho A_\mu) \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[W_1(p) \gamma^\mu W_1(p) \gamma^\rho W_1(p) \not{A} W_1(p) \not{A} W_1(p) \not{A} \gamma_5 - W_2(p) \gamma^\mu W_2(p) \gamma^\rho \times W_2(p) \not{A} W_2(p) \not{A} W_2(p) \not{A} \gamma_5 \right] \quad (4.16)$$

Aqui inicialmente calculamos o traço das matrizes gama e depois passamos a expressão para a ação efetiva do espaço de Minkowski em (3+1) dimensões para o espaço euclidiano, realizando uma rotação de Wick $x_0 \rightarrow -ix_0$, $p_0 \rightarrow ip_0$, $b_0 \rightarrow ib_0$, $d^4x \rightarrow -id^4x_E$, $b \rightarrow ib_E$ and $d^4p \rightarrow id^4p$. Então isolamos a ação efetiva (4.16) na forma:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = \int d^4x_E b_\lambda \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\rho A_\mu) A_\nu A_\alpha A_\beta C_1(b_E), \quad (4.17)$$

onde:

$$C_1(b_E) = \frac{-3e^4}{2b_E^2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 - b_E^2)^8} \left[(b_E^2 + 2(b_E \cdot p_E)^2) \times \left((p_E^2 + 2(b_E \cdot p_E) + b_E^2)^4 + (p_E^2 - 2(b_E \cdot p_E) + b_E^2)^4 \right) - 3b_E^2 (b_E \cdot p_E) \left((p_E^2 + 2(b_E \cdot p_E) + b_E^2)^4 - (p_E^2 - 2(b_E \cdot p_E) + b_E^2)^4 \right) \right] \quad (4.18)$$

Neste caso, o produto escalar é euclidiano e as integrais na Eq. (4.18) são finitas, por contagem de potências e dependentes do esquema de regularização. Entretanto, calculamos essa integrais via momento de cut-off. Em coordenadas esféricas, a Eq.

(4.18) fica:

$$\begin{aligned}
 C_1(b_E) &= \frac{-3e^4}{16\pi^3} \int_0^\infty dp_E \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{|p_E|^3}{(|p_E|^2 - b_E^2)^8} \left[(b_E^2 + 2|p_E|^2 \cos^2 \theta) (|p_E|^2 + 2b_E |p_E| \cos \theta + b_E^2)^4 + (|p_E|^2 - 2b_E |p_E| \cos \theta + b_E^2)^4 - 3b_E |p_E| \cos \theta \times \right. \\
 &\quad \left. (|p_E|^2 + 2b_E |p_E| \cos \theta + b_E^2)^4 - (|p_E|^2 - 2b_E |p_E| \cos \theta + b_E^2)^4 \right] \\
 &= \frac{-3e^4}{16b_E^2 \pi^3} \int_0^{\Lambda/b_E} du \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{u^3}{(u^2 - 1)^8} \left[(1 + 2u^2 \cos^2 \theta) \times \right. \\
 &\quad \left. ((u^2 + 2u \cos \theta + 1)^4 + (u^2 - 2u \cos \theta + 1)^4) - 3u \cos \theta ((u^2 + 2u \cos \theta + 1)^4 - (u^2 - 2u \cos \theta + 1)^4) \right]. \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Integrando primeiro no ângulo θ e depois no momento $|p_E|$, encontramos

$$C_1(b_E) = \frac{e^4}{16 \times 140b_E^2 \pi^2} \left[\frac{2 + \Lambda_b^2 + 4\Lambda_b^4 - 245\Lambda_b^6 + 140\Lambda_b^8 + 105\Lambda_b^{10}}{(1 - \Lambda_b^2)^7} \right]. \quad (4.20)$$

Com $\Lambda_b = \frac{b_E}{\Lambda}$. No limite para $\Lambda \rightarrow \infty$, ficamos com:

$$S_{eff}[b, A_\mu^4] = \int d^4x \tilde{k}_\lambda e^{\rho\mu\nu\lambda} (\partial_\rho A_\mu) A_\nu \tilde{f}(A, b_E) \quad (4.21)$$

em que:

$$\tilde{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{70} \quad \text{and} \quad \tilde{f}(A(x)) = \frac{e^2}{b_E^2} A_\alpha A^\alpha. \quad (4.22)$$

Capítulo 5

Considerações finais e Perspectivas

Nesta dissertação, abordamos essencialmente a consistência da geração do modelo CFJ como ação efetiva da QED estendida. Nos regimes da QED estendida com ou sem massa, mostramos que o coeficiente do modelo CFJ é finito e determinado na estrutura de dois esquemas de regularização conhecidos na literatura: i) a regularização dimensional, ii) regularização por um cut-off de momento.

Análises similares sobre a determinação do modelo CFJ na QED sem massa são encontrados nas referências [11, 24], porém com argumentos distintos entre elas.

Optamos por desenvolver nossa análise pelo argumento da referência [11], no qual se pode relacionar uma QED estendida sem massa em (3+1) dimensões com uma QED massiva em (2+1) dimensões que oferece um termo do tipo Chern-Simons finito e determinado.

Embora a QED estendida e massiva se mostre ambígua na determinação do modelo CFJ, nesta dissertação foi mostrado que, pelo menos para a componente temporal do quadri-vetor constante b_μ , não existe ambiguidade. Isso pode ser justificado pelo fato de que pelo menos uma componente desse parâmetro seja consistentemente determinada via redução dimensional.

Mostramos também que é possível gerar uma ação efetiva via processo de divisão de um fóton em três na QED estendida. Embora mantemos a invariância de calibre da teoria, a violação da simetria de Lorentz se encarregou de nos fornecer esse efeito. Nas referências [2, 25, 26] encontramos análogos de atividades óticas efetivas no vácuo que são provocadas pela violação da invariância de Lorentz.

Seguem alguns comentários sobre as perspectivas desta dissertação:

i) O problema da decomposição de um fóton no vácuo em multi-fótons pode ser retomado para a QED estendida não-abeliana [27] para mostrar se é possível determinar uma ação efetiva não-nula nesse contexto;

ii) Uma outra investigação seria a de se induzir, via correções radiativas, termos efetivos que compõem o setor de Higgs na extensão do modelo padrão [2].

Referências Bibliográficas

- [1] HAGIWARA, K. , HIKASA, K., NAKAMURA, K., TANABASHI, M., AGUILAR-BENITEZ, M. , AMSLER, C., BARNETT, R. M. , BURCHAT, P. R., CARONE, C. D., CASO, C., CONFORTO, G., DAHL, O. , DOSER, M., EIDELMAN, S., FENG, J. L., GIBBONS, L., GOODMAN, M., GRAB, C., GROOM, D. E., GURTU, A., HAYES, K. G., HERNANDEZ-REY, J. J., HONSCHEID, K., KOLDA, C., MANGANO, M. L., MANLEY, D. M., MANOHAR A. V., MARCH-RUSSELL, J., MASONI, A., MIQUEL, R., MÖNIG, K., MURAYAMA, H., NAVAS, S., OLIVE, K. A., PAPE, L., PATRIGNANI, C., PIEPKE, A., ROOS, M., TERNING, J., TÖRNQVIST, N. A., TRIPPE, T. G., VOGEL, P., WOHL, C. G., WORKMAN, R. L., YAO, W.M., ARMSTRONG, B., GEE, P. S., LUGOVSKY, K. S., LUGOVSKY, S. B., LUGOVSKY, V. S., ARTUSO, M., ASNER, D., BABU, K. S., BARBERIO, E., BATTAGLIA, M., BICHSEL, H., BIEBEL, O., BLOCH ,P., CAHN, R. N., CATTAL, A., CHIVUKULA, R. S., COUSINS, R. D., COWAN, G., DAMOUR, T., DESLER, K., DONAHUE, R. J., EDWARDS, D. A., ELVIRA, V. D., ERLER, J., EZHELA, V. V., FASSO, A., FETSCHER, W., FIELDS, B. D., FOSTER, B., FROIDEVAUX, D., FUKUGITA, M., GRAISSER, T. K., GARREN, L., GERBER, H. J., GILMAN, F. J., HABER, H. E., HAGMANN, C., HEWETT, J., HINCHLIFFE, I. , HOGAN, C. J., HÖHLER, G., IGO-KEMENES, P., JACKSON, J. D., JOHNSON, K. F., KARLEN, D., KAY-

- SER, B., KLEIN, S. R., KLEINKNECHT, K., KNOWLES, I. G., KREITZ, P., KUYANOV, Y. V., LANDUA, R., LANGACKER, P., LITTENBERG, L., MARTIN, A. D., NAKADA, T., NARAIN, M., NASON, P., PEACOCK, J. A., QUINN, H. R., RABY, S., RAFFELT, G., RAZUVAEV, E. A., RENK, B., ROLANDI, L., RONAN, M. T., ROSENBERG, L. J., SACHRAJDA, C. T., SANDA, A. I., SARKAR, S., SCHIMITT, M., SCHNEIDER, O., SCOTT, D., SELIGMAN, W. G., SHAEVITZ, M. H., SJÖSTRAND, T., SMOOT, G. F., SPANIER, S., SPIELER, H., SPOONER, N. J. C., SREDNICKI, M., STAHL, A., STANEV, T., SUZUKI, M., TKACHENKO, N. P., VALENCIA, G., VAN BIBBER, K., VINCTER, M. G., WARD, D. R., WEBBER, B. R., WHALLEY, M., WOLFENSTEIN, L., WOMERSLEY, J., WOODY, C. L. e ZENIN, O. V., *Review of particle properties*, Physical Review D **66**, 010001 (2002).
- [2] COLLADAY, D. e KOSTELECKÝ, V. A., *CPT violation and the standard model*, Physical Review D **55**, 6760-6774 (1997); *Lorentz-violating extension of the standard model*, Physical Review D **58**, 116002 (1998).
- [3] COLEMAN, S. e GLASHOW, S.L., *High-energy tests of Lorentz invariance*, Physical Review D **59**, 116008 (1999).
- [4] KOSTELECKÝ, V. A., LANE, C.D. e PICKERING, A.G.M., *One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics*, Physical Review D **65**, 056006 (2002).
- [5] BLUHM, R., KOSTELECKÝ, V. A. e RUSSEL, N., *Physical Review Letters*, *CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen*, **82** 2254-2257 (1999); PHILLIPS, D. F., HUMPHREY, M.A., MATTISON, E. M., STONER, R. E., VESSOT, R. F. C. e WALSWORTH, R. L., *Limit on Lorentz and CPT violation of the proton using a hydrogen maser*, Physical Review D, **63** 111101 (2001).

- [6] BLUHM, R. e KOSTELECKÝ, V. A., *Lorentz and CPT Tests with Spin-Polarized Solids*, Physical Review Letters, **84**, 1381-1384 (2000).
- [7] JACKIW, R. e KOSTELECKÝ, V. A., *Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*, Physical Review Letters, **82**, 3572-3575 (1999); JACKIW, R. e TEMPLETON, S., *How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences*, Physical Review D **23**, 2291-2304 (1981).
- [8] CARROL, S., FIELD, G. e JACKIW, R., *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Physical Review D **41**, 1231-1240 (1990).
- [9] GOLDHABER, M., TRIMBLE, V., *Limits on the Chirality of Interstellar and Intergalactic Space*, Journal of Astrophysics and Astronomy, **17**, 17-21 (1996); JACOBSON, T., LIBERATI, S., MATTINGLY, D. e STECKER, F., *New Limits on Planck Scale Lorentz Violation in QED*, Physical Review Letters, **93**, 021101 (2004).
- [10] CHUNG, J. M., *Radiatively-induced Lorentz and CPT Violating Chern-Simons term in QED*, Physics Letters B, **461**, 138 (1999); ANDRIANOV, A. A., GIACCONI, P. e SOLDATI, R., *Lorentz and CPT Violations from Chern-Simons Modifications of QED*, Journal of High Energy Physics, **02**, 030 (2002); BRITO, F. A., MARIZ, T., NASCIMENTO, J. R., PASSOS, E. e RIBEIRO, R. F., *A Remark on Lorentz Violation at Finite Temperature*, Journal of High Energy Physics, **10**, 019 (2005); BRITO, F. A., NASCIMENTO, J. R., PASSOS, E. e PETROV, A. Y., *The ambiguity-free four-dimensional Lorentz-breaking Chern-Simons action*, Journal of High Energy Physics, **06**, 112-115 (2007).
- [11] BRITO, F. A., GRIGORIO, L. S., GUIMARÃES, M. S., PASSOS, E. e WOTZASEK, C., *Induced Chern-Simons-like action in Lorentz-violating massless QED*, Physical Review D, **78**, 125023 (2008).

- [12] HARITON, A. J. e LEHNERT, R., *Spacetime symmetries of the Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons model*, Physics Letters A, **367**, 11-15 (2007).
- [13] RYDER, L. H., *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, (1995).
- [14] PIERRE, R., *Field Theory. A modern Primer*. The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., (1983).
- [15] AITCHISON, I. J. R. e FRASER, C. M., *Fermion loop contribution to skyrmion stability*, Physics Letters B **146**, 63-66 (1984); *Derivative expansions of fermion determinants: Anomaly-induced vertices, Goldstone-Wilczek currents, and Skyrme terms*, Physical Review D **31**, 2605 (1985).
- [16] FRASER, C. M., *Calculation of higher derivative terms in the one-loop effective Lagrangian*, Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields **28**, 101-106 (1985).
- [17] VAINSHTEIN, A. I., ZAKHAROV, V. I., NOVIKOV, V. A. e SHIFMAN, M. A., *Yadernaya Fizika (Soviet Journal of Nuclear Physics)* **39**, 77 (1984).
- [18] ZUK, J. A., *Functional approach to derivative expansion of the effective Lagrangian*, Physical Review D **32**, 2653-2658 (1985).
- [19] GAILLARD, M. K., *The effective one-loop scalar lagrangian with derivative couplings*, Nuclear Physics B **268**, 669-692 (1986).
- [20] DAS, A. e KAREV, A., *Derivative expansion and the chiral anomaly at finite temperature*, Physical Review D **36**, 623-626 (1987); BABU, K. S., DAS, A. e PANIGRAHI, P., *Derivative expansion and the induced Chern-Simons term at finite temperature in 2+1 dimensions*, Physical Review D **36**, 3725-3730 (1987).
- [21] BRITO, F. A., GRIGORIO, L. S., GUIMARÃES, M. S., PASSOS, E. e WOTZASEK, C., *Lorentz-violating Chern-Simons action under high temperature in massless QED*, Physics Letters B **681**, 495-499 (2009).

- [22] SCHWINGER, J., *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Physical Review, **82**, 664-679 (1951).
- [23] KOSTELECKÝ, V. A. e PICKERING, A. G.M., *Vacuum Photon Splitting in Lorentz-Violating Quantum Electrodynamics*, Physical Review Letters **91**, 031801 (2003).
- [24] PEREZ-VICTORIA, M., *Exact Calculation of the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in QED*, Physical Review Letters **83**, 2518-2521 (1999).
- [25] KOSTELECKÝ, V. A. e POTTING, R., *CPT, strings, and meson factories*, Physical Review D **51**, 3923-3935 (1995).
- [26] KOSTELECKÝ, V. A. e MEWES, M., *Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*, Physical Review Letters **87**, 251304 (2001); *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*, Physical Review D **66**, 056005 (2002).
- [27] GOMES, M., NASCIMENTO, J. R., PASSOS, E., PETROV, A. Y. e DA SILVA, A. J., *Induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action*, Physical Review D **76**, 047701 (2007).
- [28] T'HOOFT, G. e VELTMAN, M. J. G., *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nuclear Physics **44** 189-213 (1972).

Apêndice A

Fórmulas da regularização dimensional das integrais de Feynman

Neste apêndice foram apresentadas algumas relações das integrais de Feynman desenvolvidas no esquema de regularização dimensional [28]. No espaço de Minkowski, tais integrais são escritas na forma

$$\begin{aligned} I_0(n, D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - \Delta)^n} \\ &= \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-D/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

- para $n = 2$:

$$I_0(2, D) = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Delta^{\epsilon/2}} \quad (\text{A.2})$$

- para $n = 3$:

$$I_0(3, D) = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{2} \frac{1}{\Delta^{1+\epsilon/2}} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
I_1(n, D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - \Delta)^n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1} i D \Gamma(n - D/2 - 1)}{(4\pi)^{D/2} 2 \Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-D/2-1}}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

• para $n = 3$:

$$I_1(3, D) = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D \Gamma(\epsilon/2)}{4 \Delta^{\epsilon/2}} \tag{A.5}$$

• para $n = 4$:

$$I_1(4, D) = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D \Gamma(1 + \epsilon/2)}{12 \Delta^{1+\epsilon/2}} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
I_2(n, D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - \Delta)^n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1} i \eta_{\mu\nu} \Gamma(n - D/2 - 1)}{(4\pi)^{D/2} 2 \Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-D/2-1}}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

• para $n = 3$:

$$I_2(3, D) = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\eta_{\mu\nu} \Gamma(\epsilon/2)}{4 \Delta^{\epsilon/2}} \tag{A.8}$$

• para $n = 4$:

$$I_2(4, D) = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\eta_{\mu\nu} \Gamma(1 + \epsilon/2)}{12 \Delta^{1+\epsilon/2}} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
I_3(n, D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - \Delta)^n} \\
&= \frac{(-1)^n i D(D+2) \Gamma(n - D/2 - 2)}{(4\pi)^{D/2} 4 \Gamma(n)} \frac{1}{\Delta^{n-D/2-2}}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

• para $n = 5$:

$$I_3(5, D) = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D(D+2) \Gamma(1 + \epsilon/2)}{96 \Delta^{1+\epsilon/2}} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(n, D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\beta p_\theta}{(p^2 - \Delta)^n} \\
 &= \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(\eta_{\mu\nu}\eta_{\beta\theta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\theta} + \eta_{\mu\theta}\eta_{\nu\beta})}{4} \frac{\Gamma(n - D/2 - 2)}{\Gamma(n)} \\
 &\quad \times \frac{1}{\Delta^{n-D/2-2}}.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

• para $n = 5$:

$$I_4(5, D) = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(\eta_{\mu\nu}\eta_{\beta\theta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\theta} + \eta_{\mu\theta}\eta_{\nu\beta})}{96} \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{\Delta^{1+\epsilon/2}} \tag{A.13}$$

Em todas as expressões acima, consideramos $\epsilon = D - 4$.