



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Entropia Configuracional de Branas Bimétricas

Ângelo Fernandes da Silva França

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Campina Grande - PB

- Fevereiro, 2019 -



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Entropia Configuracional de Branas Bimétricas

Ângelo Fernandes da Silva França

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento à exigência parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Coorientador: Dr. Danilo César Moreira

Campina Grande - PB

- Fevereiro, 2019-

F814e França, Ângelo Fernandes da Silva.
Entropia configuracional de branas bimétricas / Ângelo Fernandes da
Silva França. – Campina Grande, 2019.
75 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, Prof. Dr. Danilo
César Moreira".
Referências.

1. Mundos-brana. 2. Teorias Bimétricas. 3. Entropia
Configuracional. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Moreira, Danilo
César. III. Título.

CDU 53:524.8(043)

Entropia Configuracional de Branas Bimétricas

Ângelo Fernandes da Silva França

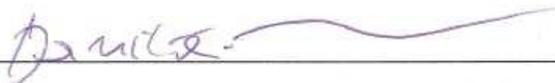
Aprovada em 21 de Fevereiro de 2019

Banca Examinadora



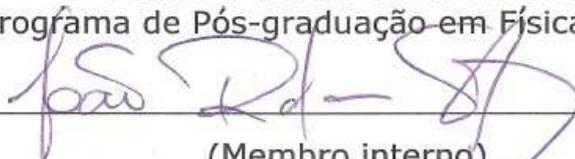
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



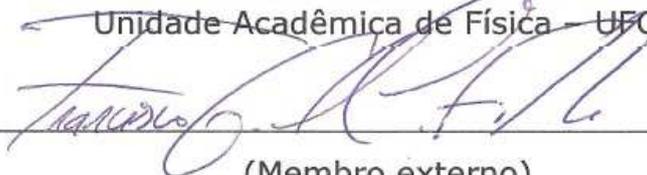
(Co-orientador)

Prof. Dr. Danilo Cesar Moreira
Programa de Pós-graduação em Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – CG

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem Ele eu nada seria, pela Sua bondade e pelas imerecidas bênçãos derramadas sobre minha vida .

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pelo exemplo de profissional e por toda dedicação ao longo desses dois anos.

Ao meu Coorientador, Dr. Danilo César Moreira, pelas sugestões e ideias que vieram tornar este trabalho possível.

À minha família, meus pais José Carlos e Aurilene e meus irmãos José Carlos Filho e Adrielly, por todo o apoio e incentivo durante esta etapa da minha vida. Amo vocês.

Em especial à minha noiva Thaise, por todo o apoio, confiança e incentivo durante esta jornada. Meu sincero Obrigado!

Aos meus avós, porque sempre me ajudaram em meus estudos e aos meus familiares, de um modo geral, por todo incentivo e por sempre torcerem por mim. Muito obrigado!

Aos meus amigos Almir Dantas, Ronaldo Felix e tantos outros, pelas tardes de estudos e pelos momentos divertidos que vivemos juntos.

Enfim à todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui. Muito Obrigado!

À CAPES pelo suporte financeiro.

Nesta dissertação discutimos os conceitos fundamentais de mundos-branas em que detalhamos alguns modelos fundamentais de mundos-brana os quais descrevem modelos de dimensões extras, mais especificamente modelos em $4+1D$, como o modelo Randall-Sundrum. Discutimos também construção de branas espessas através de um campo escalar minimamente acoplado à gravidade, estático e que depende exclusivamente da dimensão extra. Estudamos também como mundos-brana podem ser obtidos em cenário envolvendo teorias bimétricas, onde olhamos com mais atenção para o modelo sine-Gordon bimétrico proposto em uma das referências. Por fim discutimos o conceito de Entropia Configuracional, onde a calculamos para o modelo sine-Gordon Bimétrico.

Palavras-chave: Mundos-Brana, Teorias Bimétricas, Entropia Configuracional .

ABSTRACT

In this dissertation we discuss the fundamental concepts of braneworlds in which we detail some models of braneworlds with extra dimensions, more specifically models in $4 + 1D$, such as the Randall-Sundrum one. We also discuss the construction of thick branes through a scalar field minimally coupled to gravity, such a field is static and depend only on the extra dimension. We also study how braneworlds can be obtained in a scenario involving bimetric theories, where we look more closely at the bimetric sine-Gordon model proposed in one of our references. Finally we discuss the concept of Configurational Entropy, where we calculate it for the sine-Gordon Bimetric model.

Keywords: Braneworld, Bimetric Theories, Configurational Entropy.

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	x
1 Introdução e Organização da Dissertação	10
1.1 Introdução	10
1.2 Organização da Dissertação	12
2 Modelos de Branas em 4+1 Dimensões	14
2.1 Modelo Randall-Sundrum	14
2.1.0.a Gravidade no modelo RS	19
2.1.0.b Modos Gravitacionais	22
2.2 Branas Espessas	24
2.2.1 Modelos com um campo escalar	24
2.2.1.a Branas Planas	25
2.2.1.b Branas Curvas	32
3 Branas Bimétricas	37
3.1 Equações de Campo	37
3.2 Soluções de Branas Bimétricas	38
3.2.1 Soluções de Branas Bimétricas Planas	40
3.2.2 Solução com Dinâmica Não Usual Pura	46
4 Entropia Configuracional de Branas Bimétricas	49
4.1 Entropia Configuracional	49
4.2 Entropia Configuracional de Branas Bimétricas	54
5 Conclusões	61
Referências bibliográficas	67

A	Apêndices	68
A.1	Apêndice A: Equações de Einstein à partir do princípio variacional	68
A.2	Apêndice B: Equações de Movimento e Campo e Tensor Energia-Momento	71

LISTA DE FIGURAS

2.1	Potencial tipo Vulcão	21
2.2	Campo Escalar $\phi(y)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	28
2.3	Potencial $V(\phi)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	28
2.4	Densidade de Energia $\rho(y)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	28
2.5	Fator de Warp $e^{2A(y)}$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	29
2.6	Campo Escalar $\phi(y)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	30
2.7	Potencial $V(\phi)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	30
2.8	Densidade de Energia $\rho(y)$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	31
2.9	Fator de Warp $e^{2A(y)}$ para $a = b = 1$ (linha s30lida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).	31
2.10	Solu3030o do Campo $\phi(y)$ para $\Lambda_{AdS} < -ab/\alpha$ (linha s30lida azul) e para $\Lambda_{AdS} > ab/\alpha$ (linha tracejada vermelha), onde $\alpha = a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$	34
2.11	Fun3030o de Warp $A(y)$ para $\Lambda_{AdS} < -ab/\alpha$ (linha s30lida azul) e para $\Lambda_{AdS} > ab/\alpha$ (linha tracejada vermelha), onde $\alpha = a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$	34
2.12	Solu3030o do Campo $\phi(y)$ para $\alpha > 0$ correspondendo a uma brana dS_4 (linha s30lida azul) e para $\alpha < 0$ com branas AdS_4 ($-1/ \alpha < \Lambda < 0$) (linha tracejada vermelha) e branas dS_4 ($\Lambda > 0$) (Linha pontilhada preta), onde $\alpha = \pm 1$, $a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$	35
2.13	Fun3030o de Warp $A(y)$ para $\alpha > 0$ correspondendo a uma brana dS_4 (linha s30lida azul) e para $\alpha < 0$ com branas AdS_4 ($-1/ \alpha < \Lambda < 0$) (linha tracejada vermelha) e branas dS_4 ($\Lambda > 0$) (Linha pontilhada preta), onde $\alpha = \pm 1$, $a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$	36
3.1	Solu3030o do Campo $\phi(y)$ para $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$ (linha s30lida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 < 2ab/B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/2\sqrt{2}$ e $B = 1$	43
3.2	Fato de Warp $e^{2A(y)}$ para $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$ (linha s30lida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 < 2ab/B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/2\sqrt{2}$ e $B = 1$	43

3.3	Solução do Campo $\phi(y)$ para $\tilde{\Lambda}_5 < 3ab/2B$ (linha sólida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 > 3ab/2B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/3$, $b = 1$ e $B = 1$	45
3.4	Solução do Campo $\phi(y)$ para $\Lambda < 0$ (linha sólida azul) e $\Lambda > 0$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/3$, $b = 1$ e $B = 1$	45
4.1	Potencial $V(\phi)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).	52
4.2	Campo Escalar $\phi(x)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).	52
4.3	Densidade de Energia $\rho(x)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).	52
4.4	Fração Modal $f(k)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).	53
4.5	Campo Escalar $\phi(y)$ para alguns valores de γ	55
4.6	Fator de Warp para alguns valores de γ	55
4.7	Densidade de Energia para alguns valores de γ	56
4.8	Frações modais para valores de γ	58
4.9	Densidade de Entropia Configuracional para valores de γ	59
4.10	Entropia Configuracional em função de γ	60
4.11	Reta de ajuste da Entropia Configuracional em função de γ	60

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

1.1 Introdução

A ideia de dimensões extras foi primeiramente introduzida por Theodor Kaluza (1921) e Oskar Klein (1926). Kaluza em seu trabalho *On the Unification Problem in Physics* [1], estendeu a Relatividade Geral para um espaço-tempo com 5 dimensões na tentativa de uma unificação entre o Eletromagnetismo Clássico e a Gravitação. Tal unificação consistia em considerar os campos eletromagnéticos e gravitacionais como componentes de um campo com dimensões de ordens mais altas. Teorias de unificação são de grande interesse da comunidade científica e têm como principal objetivo a elaboração de uma teoria que seja capaz de unir a gravitação às interações eletromagnéticas, nuclear forte e nuclear fraca em uma única interação mais geral. Mais tarde, Oscar Klein [2, 3] fez um link entre as ideias de Kaluza e a Mecânica Quântica, além disso, introduziu a ideia da compactificação da dimensão extra. O espaço-tempo abordado nos trabalhos de Kaluza-Klein é plano e penta-dimensional com uma dimensão temporal e quatro dimensões espaciais (3 dimensões usuais e uma dimensão extra) [4]. Diferente das dimensões usuais, que se estendem até o infinito, a dimensão extra de KK (Kaluza-Klein) teria uma topologia circular de raio da ordem do comprimento de Planck ($10^{-35}m$), que ficou conhecida com dimensão extra compactada. Tal argumento foi usado para justificar a falta de observações experimentais dessas dimensões extras, pois, com o raio da compactificação dessa ordem, os efeitos dessas

dimensões tornam-se indetectáveis dentro da escala de energia disponível atualmente.

Modelos de dimensões extras deram origem a objetos que hoje chamamos de branas. Uma brana é uma hipersuperfície semelhante a uma membrana (daí o termo brana) em um espaço de dimensões superiores desta forma, podemos entender uma brana como um defeito topológico tipo parede de domínio. Mundos-brana são configurações em que toda a distribuição de matéria e energia estariam limitadas à brana, assim, todos os campos e interações do Modelo Padrão existiriam apenas na brana.

Em 1999 os trabalhos de Lisa Randall e Raman Sundrum [5, 6], com a proposta de localizar a gravidade na vizinhança de uma brana em um espaço anti-de Sitter (AdS), trouxeram novamente uma enorme atenção para a temática de mundos-brana, principalmente na Física de Altas Energias, introduzindo o que chamamos localização dos campos, bem como nas áreas Física de Partículas, Cosmologia e Astrofísica [7–9]. Os modelos de mundos-brana nos permitem adicionar campos escalares com dinâmicas e acoplados minimamente à gravidade. A presença desses campos funcionam como fontes gravitacionais modelando como a gravidade está distribuída nas proximidades da brana, além de suavizarem o caráter das soluções das equações de movimento, em especial a solução do fator de warp, fazendo com que a brana tenha uma certa "espessura" e sem as descontinuidades referentes à presença da delta de Dirac no caso de branas finas, gerando o que chamamos de branas espessas.

Teorias Bimétricas foram inicialmente propostas por Clayton e Moffat [10, 11] como teorias de Velocidade Variável da Luz, VSL (do inglês: Varying Speed of Light), visando solucionar problemas em Cosmologia, em especial problemas envolvendo valores iniciais no modelo Big Bang Padrão (em inglês Standard Big Bang (SSB) Model). O modelo proposto em [10] consiste na ideia que a variedade do espaço-tempo é descrita por duas métricas (por isso o termo "bimétrica"): uma métrica $g_{\mu\nu}$ associada ao graviton, chamada "métrica gravitacional", utilizada para construir a ação de Einstein-Hilbert; e a segunda métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, chamada "métrica de matéria", associada com uma geometria em que os campos de matéria se propagam e interagem. Tais métricas podem ser relacionadas através de um campo bi-escalar ou de um campo bi-vetorial [11, 12].

Em 1948 o matemático americano Claude Shannon, em seu trabalho *A Mathematical Theory of Communication* [13], introduziu a ideia de comunicação como um problema de Mecânica Estatística, dando origem ao que chamamos hoje de Teoria da Informação.

Nesta teoria, temos um tratamento qualitativo e quantitativo da informação, uma vez que, esta está diretamente relacionada com o conceito de Entropia.

Baseados nas ideias de Shannon, Gleiser e Stamatopoulos, em seu trabalho *Entropic measure for localized energy configurations: Kinks, bounces and bubbles* [14], apresentam um novo conceito que denominaram de *Entropia Configuracional*. Esta quantidade, calculada no espaço funcional através das Transformadas de Fourier, relaciona informação e dinâmica e é entendida como uma forma de mensurar, através de uma medida entrópica, o conteúdo informacional de sistemas físicos com configurações de energia espacialmente localizadas dada suas específicas restrições (condições iniciais e de contorno). Além disso, a Entropia Configuracional pode ser usada para resolver situações onde as configurações apresentam degenerescência nas energias. A Entropia Configuracional permite um grande número de possibilidades de aplicações em Física como em Física de Altas Energias, Cosmologia e Matéria Condensada, vide referências [15–22].

Com base nas ideias apresentadas acima, este trabalho tem por objetivo calcular a Entropia Configuracional de Branas-Bimétricas, em particular um modelo tipo sine-Gordon bimétrico proposto em [23] para diferentes valores de um parâmetro γ , parâmetro este que será detalhado no Capítulo 3. O modelo de brana sine-Gordon foi proposto por Greem em [24] e descreve um cenário de brana espessa gerado por um campo escalar que admite soluções topológicas tipo parede de domínio, além disso, a simplicidade do modelo nos possibilita obter soluções analiticamente. O modelo sine-Gordon bimétrico proposto por Bazeia et al em [23], alvo da nossa investigação, pode então ser entendido como uma extensão do modelo proposto por Greem.

1.2 Organização da Dissertação

Após a introdução, onde apresentamos e discutimos de forma sucinta as ideias relevantes que embasam este trabalho, a organização da dissertação dar-se-á como:

- No Capítulo 2 apresentamos e discutimos as algumas ideias relacionadas com mundos-brana, em particular, os modelos de dimensão extras proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum, onde reproduzimos os cálculos para a constante cosmológica, modos gravitacionais e a localização da gravidade do mesmo modelo, bem como uma rápida análise das soluções encontradas. Após isto, introduzimos o método usual-

mente utilizado para obtenção de branas espessas modeladas por campos escalares, imersas em geometrias Planas (Branas Planas) ou em geometrias Anti de-Sitter ou de-Sitter (Branas Curvas).

- No Capítulo 3 estudamos as principais características das teorias bimétricas. Logo após, discutimos como mundos-branas com campo escalar acoplado podem ser construídos à partir de tais teorias. Também encontramos as soluções das equações de movimento para alguns modelos, em particular, o modelo tipo sine-Gordon, que será o modelo utilizado para o desenvolvimento do Capítulo 4.
- No Capítulo 4, Iniciamos apresentando os conceitos base e ferramentais matemáticos para o cálculo da Entropia Configuracional. Logo após, utilizando as soluções para o modelo de brana bimétrica tipo sine-Gordon, calculamos analiticamente a densidade de energia, Transformada de Fourier e fração modal. por fim, calculamos a Entropia Configuracional para diferentes valores de um parâmetro γ , relacionado com a constante cosmológica da teoria bimétrica.
- No Capítulo 5 concluímos o trabalho, comentando os resultados obtidos e as perspectivas para outras aplicações.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE BRANAS EM 4+1 DIMENSÕES

Neste Capítulo estudamos alguns modelos de mundo-branas em 4+1 Dimensões. Iniciaremos com os modelos propostos por Randall e Sundrum em [5,6]. Após isto, iremos abordar modelos de branas com campo escalar acoplado à gravidade de forma mínima em geometrias planas (Espaço de Minkowski $\Lambda = 0$) e em geometrias dS ($\Lambda > 0$) ou AdS ($\Lambda < 0$), modelos estes, trabalhados por Bazeia et al. em [25].

2.1 Modelo Randall-Sundrum

Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram em 1999 dois modelos de solução para o problema da Hierarquia [5,6], problema este que trata da discrepância entre as escalas de massa eletrofraca onde encontra-se o Modelo Padrão (MP) e a escala de Planck gravitacional, massas estas da ordem de $M_{EF} = 10^3 GeV$ e $M_{Pl} = 10^{19} GeV$ respectivamente. [4]. O espaço-tempo do primeiro modelo proposto por Randall-Sundrum (RS-I), seguindo a ideia de Theodor Kaluza e Oskar Klein, é construído em 5 dimensões, onde temos 4 dimensões espaciais, 3 dimensões usuais e 1 dimensão extra, e 1 dimensão temporal. Tal dimensão extra está compactada entre duas hipersuperfícies quadridimensionais chamadas 3-branas, localizadas nos pontos $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ do orbifold¹ S^1/\mathbb{Z}_2 , onde S^1 é uma

¹São espaços resultantes do quociente entre um espaço localmente Euclidiano por um grupo de espaços discreto

esfera unidimensional (círculo) e \mathbb{Z}_2 é um grupo de simetria $\{-1, 1\}$, desta forma, esta dimensão estará definida no intervalo $0 < y < \pi r_c$, onde r_c é chamado raio de compactificação. Ainda em 1999, Randall e Sundrum propuseram seu segundo modelo (RS-2), este, trata-se de um caso limite do modelo RS-1 quando levamos a localização da brana reguladora para o infinito. Assim, efetivamente temos agora apenas uma brana fazendo com que a dimensão extra não esteja mais compactada. Neste trabalho vamos detalhar os passos desenvolvidos no modelo RS-2.

A ação do sistema proposto por Randall-Sundrum é dada por:

$$S = S_{bulk} + S_{brana} , \quad (2.1)$$

onde S_{bulk} é a ação referente à gravidade, S_{brana} a ação referente à brana na qual encontramos nosso universo e são dadas respectivamente por:

$$S_{bulk} = - \int d^4x dy \sqrt{-g_{(5)}} (M_5^3 R + \Lambda) ; \quad (2.2a)$$

$$S_{brana} = - \int d^4x \sqrt{-g_{(4)}} V_{brana} , \quad (2.2b)$$

onde R é o escalar de Ricci, M_5^3 a massa de Planck em 5 dimensões, Λ é a constante cosmológica e V_{brana} é a tensão na brana.

Fazendo a variação na ação total dada por (2.1) com relação à métrica e utilizando as definições acima, encontramos as equações de Einstein dadas por (Ver Apêndice A):

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{2} k^2 \Lambda g_{MN} + k^2 T_{MN} , \quad (2.3)$$

onde $k^2 = 1/2M_5^3$ e o Tensor Energia-Momento definido como:

$$T_{MN} = \frac{2}{\sqrt{|g_5|}} \frac{\delta S_{brana}}{\delta g^{MN}} . \quad (2.4)$$

O ansatz proposto por Randall-Sundrum que soluciona as equações (2.3) é dado por

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 . \quad (2.5)$$

A métrica (2.5) é não fatorizável, ou seja, não existem transformações que possam reescrever os fatores das componentes 4-dimensionais da métrica de forma a não depender da dimensão extra. A métrica 4-dimensional $\eta_{\mu\nu}$ (métrica de Minkowski) é multiplicada por $e^{-2A(y)}$, chamado fator de dobra (warp) e $A(y)$ chamado função de warp, dependente da dimensão extra. A métrica (2.5) também preserva a invariância de Poincaré 4-dimensional sobre as branas.

Visando tornar mais fácil os nossos cálculos vamos realizar uma mudança de coordenadas do tipo $z = z(y)$ escrevendo assim (2.5), como uma métrica conformalmente plana [7, 26]. Para isso, vamos realizar a seguinte transformações de variáveis na métrica (2.5):

$$dy = e^{-A(z)} dz . \quad (2.6)$$

Ficamos então, com a seguinte métrica:

$$ds^2 = e^{-2A(z)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2) , \quad (2.7)$$

ou ainda, de forma mais geral:

$$ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N \quad (2.8)$$

De forma que $g_{MN} = e^{-2A(z)}\tilde{g}_{MN}$, onde $\tilde{g}_{MN} = \eta_{MN}$ ⁵, sendo $\eta_{MN} = \text{diag}(\eta_{\mu\nu}, -1)$.

Uma expressão bastante útil que relaciona os tensores de Einstein do tipo $g_{MN} = \Omega^2\tilde{g}_{MN}$ em n dimensões [27] é dada por:

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + (n-2) \left[\tilde{\nabla}_M \ln \Omega \tilde{\nabla}_N \ln \Omega - \tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_N \ln \Omega \right] + \\ - (n-2)g_{MN} \left[-\tilde{\nabla}^D \tilde{\nabla}_D \ln \Omega - \left(\frac{n-3}{2} \right) \tilde{\nabla}^D \ln \Omega \tilde{\nabla}_D \ln \Omega \right] . \quad (2.9)$$

No nosso caso, observando o elemento de linha (??), temos que $\Omega = e^{-A(z)}$ e $\tilde{g}_{MN} = \eta_{MN}$, assim, $\tilde{\nabla} \rightarrow \tilde{\partial}$, onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante e $\tilde{\partial}$ é a derivada usual, ambas com

⁵Estamos utilizando a assinatura (+, -, -, -, -)

relação à métrica \tilde{g}_{MN} . Ficamos então com:

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + (n-2) \left\{ \tilde{\partial}_M A \tilde{\partial}_N A + \tilde{\partial}_M \tilde{\partial}_N A - \eta_{MN} \left[\tilde{\partial}^D \tilde{\partial}_D A - \left(\frac{n-3}{2} \right) \tilde{\partial}^D A \tilde{\partial}_D A \right] \right\}. \quad (2.10)$$

Mas, temos que $\tilde{G}_{MN} = 0$, $n = 5$ e $A = A(z)$, assim, da expressão (2.10) obtemos as seguintes equações:

$$G_{55} = 6A'; \quad (2.11a)$$

$$G_{5\mu} = 0; \quad (2.11b)$$

$$G_{\mu\nu} = 3\eta_{\mu\nu}(A'' - A'^2). \quad (2.11c)$$

Da definição do Tensor Energia Momento (2.4), temos que $T_{55} = 0$, logo a componente "55" das equações de Einstein é:

$$6A'^2 = \frac{1}{2}k^2\Lambda g_{55}. \quad (2.12)$$

Considerando que $g_{55} = -e^{-2A}$, podemos observar que a solução apenas existirá se a constante cosmológica for negativa ($\Lambda < 0$), desta forma estaremos considerando um espaço Anti-de-Sitter(AdS). Obtemos então, que:

$$e^A A' = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_5^3}}, \quad (2.13)$$

onde a linha (') representa a derivada com relação à z . A Equação (2.13) pode ser ainda reescrita como:

$$\frac{d}{dz}(e^A) = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_5^3}}. \quad (2.14)$$

Integrando (2.14) temos:

$$e^A = \kappa z + const., \quad (2.15)$$

onde

$$\kappa = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_5^3}}. \quad (2.16)$$

O valor da constante em (2.15) é encontrada ao fixarmos o valor da métrica em um ponto (reescalonamento de unidades) [7, 26], vamos escolher então $e^{A(0)} = 1$, obtendo assim o valor da constante igual a 1. Além disso, para que o fator de warp (e^{2A}) tenha o mesmo comportamento quando $z \rightarrow \pm\infty$ consideramos o módulo em (2.15), preservando desta forma também a simetria $z \rightarrow -z$. Temos então:

$$e^A = \kappa|z| + 1. \quad (2.17)$$

Assim, a função de warp toma a seguinte forma:

$$A = \ln(\kappa|z| + 1). \quad (2.18)$$

Deste modo, temos que a primeira e segunda derivadas da função de warp são:

$$A' = \frac{\kappa \operatorname{sgn}(z)}{\kappa|z| + 1}; \quad (2.19a)$$

$$A'' = \frac{2\kappa\delta(z)}{\kappa|z| + 1} - \frac{\kappa^2}{(\kappa|z| + 1)^2}. \quad (2.19b)$$

A simetria $z \rightarrow -z$ exigida, ocasionou o aparecimento de uma delta de Dirac em (2.19b), assim, para compensar tal fato, precisamos reescrever o tensor energia momento, que será dado por:

$$T_{MN} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{55}}} g_{\mu\nu} V \delta(y) \delta_M^\mu \delta_N^\nu. \quad (2.20)$$

As deltas de Kronecker garantem que a matéria e a energia estejam situadas no espaço quadridimensional e a delta de Dirac localiza a brana em $z = 0$. Utilizando e substituindo (2.19a) e (2.19b) em (2.11c), podemos escrever a componente $\mu\nu$ das equações de Einstein como

$$3\eta_{\mu\nu} \left[\frac{2\kappa\delta(z)}{\kappa|z| + 1} - \frac{2\kappa^2}{(\kappa|z| + 1)^2} \right] = \frac{1}{2} k^2 \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{k^2}{2\sqrt{-g_{55}}} g_{\mu\nu} V \delta(z). \quad (2.21)$$

Usando o fato que $g_{\mu\nu} = e^{-2A}\eta_{\mu\nu}$ e $g_{55} = -e^{-2A}$ e também que $k^2 = 1/2M_5^3$, ficamos com:

$$\eta_{\mu\nu} \left[\frac{6\kappa\delta(z)}{\kappa|z|+1} - \frac{6\kappa^2}{(\kappa|z|+1)^2} \right] = \frac{1}{4M_5^3}\Lambda\eta_{\mu\nu}e^{-2A} + \frac{1}{4M_5^3}\eta_{\mu\nu}e^{-A}V\delta(z). \quad (2.22)$$

Substituindo as relações (2.16) e (2.17) em (2.22), temos:

$$\eta_{\mu\nu} \left[\frac{6\kappa\delta(z)}{\kappa|z|+1} + \frac{6\Lambda}{24M_5^3(\kappa|z|+1)^2} \right] = \frac{1}{4M_5^3} \left[\Lambda\eta_{\mu\nu} \frac{1}{(\kappa|z|+1)^2} + \eta_{\mu\nu} \frac{1}{(\kappa|z|+1)} V\delta(z) \right]. \quad (2.23)$$

Assim obtemos a tensão na brana, dada por:

$$V = 24\kappa M_5^3. \quad (2.24)$$

2.1.0.a Gravidade no modelo RS

Vamos agora localizar a gravidade no background do modelo Randall-Sundrum, para isto, utilizando ainda a métrica na forma conformalmente plana $g_{MN} = e^{-2A(z)}\tilde{g}_{MN}$, vamos considerar pequenas flutuações na métrica, ou seja, $\tilde{g}_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$. Desta forma teremos então o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = e^{-2A(z)}[(\eta_{MN} + h_{MN})dx^M dx^N], \quad (2.25)$$

Recorrendo novamente à expressão (2.10), temos que o Tensor de Einstein linearizado será dado por:

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + \left\{ \tilde{\partial}_M A \tilde{\partial}_N A + \tilde{\partial}_M \tilde{\partial}_N A - \tilde{\Gamma}_{MN}^R \partial_N A + \right. \\ \left. - \tilde{g}_{MN} \left[\tilde{\partial}^D \tilde{\partial}_D A - \tilde{\Gamma}_{DR}^D \partial^R A - \tilde{\partial}^D A \tilde{\partial}_D A \right] \right\}. \quad (2.26)$$

Na equação acima, iremos considerar apenas os termos lineares nas flutuações. Além disso, consideraremos também que as flutuações não têm qualquer componente na dimensão entra, bem como transversa e traço nulos. Ou seja:

$$h_{M5} = 0 \quad ; \quad \partial_\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad h_\mu^\mu = 0. \quad (2.27)$$

Assim, utilizando o gauge acima, temos:

$$\tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{MN} \quad , \quad \tilde{\Gamma}_{MN}^5 = -\frac{1}{2}\partial^5 h_{MN} \quad , \quad \tilde{\Gamma}_{DR}^D = 0 . \quad (2.28)$$

A componente $\mu\nu$ do tensor de Einstein linearizado será então:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + 3 \left[\frac{1}{2}A'h'_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(A'' - A'^2) \right] . \quad (2.29)$$

Já do lado direito das equações de Einstein, temos:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}k^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})e^{-2A} \left[\Lambda + \frac{1}{\sqrt{-g_{55}}}V_{vis}\delta(y) \right] . \quad (2.30)$$

Utilizando as relações (2.12) e (2.20) podemos reescrever (2.30) como:

$$G_{\mu\nu} = 3(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(A'' - A'^2) . \quad (2.31)$$

Igualando (2.29) e (2.31) obtemos a seguinte relação:

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2}A'h'_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.32)$$

Uma forma de resolver (2.32) é escrevê-la como uma equação tipo Schrödinger unidimensional através da seguinte transformação:

$$h_{\mu\nu} = e^{\frac{n-2}{2}A}\tilde{h}_{\mu\nu} , \quad (2.33)$$

onde n é o número de dimensões. Fazendo essa substituição e também usando as expressões das derivadas da função de warp (2.19a) e (2.19b), ficamos com:

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R + \frac{15\kappa^2}{8(\kappa|z|+1)^2} - \frac{3\kappa}{2}\delta(z) \right] \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.34)$$

na qual a segunda derivada $\partial_R\partial^R = -\square_x - \partial_5\partial^5$. Podemos então fazer uma separação de variáveis da forma: $\tilde{h}_{\mu\nu}(x, z) = \hat{h}_{\mu\nu}(x)\Psi(z)$, levando em conta também que $\square_x\hat{h}_{\mu\nu} = m^2\hat{h}_{\mu\nu}$ onde m^2 é a massa quadridimensional de Kaluza-Klein para as flutuações

da métrica. Desta forma ficamos com a seguinte equação diferencial:

$$[-\partial_z^2 + V(z)] \Psi(z) = m^2 \Psi(z). \quad (2.35)$$

Com potencial $V(z)$ dado por:

$$V(z) = \frac{15\kappa^2}{4(\kappa|z| + 1)^2} - \frac{3\kappa\delta(z)}{\kappa|z| + 1}. \quad (2.36)$$

Quando $m^2 = 0$ em (2.35), e resolvendo a equação diferencial podemos encontrar o modo zero da função de onda Ψ , resolução esta que será realizada na próxima seção. O potencial expresso por (2.36) é do tipo vulcão (Figura 2.1).

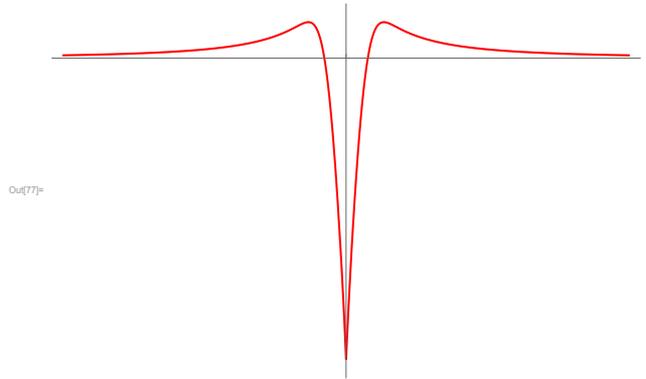


Figura 2.1: Potencial tipo Vulcão

A função delta de Dirac presente no potencial (2.36) suporta apenas um único estado ligado normalizável (modo zero), os demais estados são modos contínuos (modos KK) que serão melhor trabalhados na próxima seção. De forma geral, o potencial (2.36) pode ainda ser escrito como:

$$V(z) = \frac{9}{4}A'^2 - \frac{3}{2}A'' . \quad (2.37)$$

Ao escrever o potencial dessa forma (2.37), podemos sempre escrever a equação (2.35) como uma equação tipo Schrödinger para qualquer função de warp $A(z)$, como veremos a seguir.

2.1.0.b Modos Gravitacionais

Para encontrarmos os modos gravitacionais da equação tipo Schrödinger (2.35), vamos reescrevê-la em termos de operadores Q e Q^\dagger que são dados por:

$$Q = \partial_z + \frac{3}{2}A' \quad e \quad Q^\dagger = -\partial_z + \frac{3}{2}A' . \quad (2.38)$$

Reescrevendo (2.35) temos:

$$Q^\dagger Q \Psi = m^2 \Psi . \quad (2.39)$$

A equação acima, representa uma equação de Schrödinger para um problema em Mecânica Quântica Supersimétrica e indica que não se tem modos negativos, uma vez que, operadores do tipo $S^\dagger S$ é positivo definido. [28, 29]

No caso do modo zero, $m^2 = 0$, temos a seguinte equação:

$$Q^\dagger Q \Psi_0 = 0 , \quad (2.40)$$

ou seja,

$$Q \Psi_0 = 0 \Rightarrow \partial_z \Psi_0 = -\frac{3}{2}A' \Psi_0 . \quad (2.41)$$

A solução da equação (2.41) pode ser facilmente encontrada através de uma integração direta. Desta forma temos que:

$$\Psi_0 = e^{-\frac{3}{2}A} \Rightarrow \psi_0 = \frac{1}{(\kappa|z| + 1)^{\frac{3}{2}}} . \quad (2.42)$$

Podemos perceber que o modo zero será normalizável, pois $\int e^{-3A(z)/2} dz < \infty$. A presença desse modo zero normalizável representa a existência de um gráviton 4-dimensional sem massa. Para os casos em que $m^2 > 0$ temos modos contínuos, chamados estados KK, cuja solução da equação (2.35) é dada como uma combinação linear de funções de Bessel, ou

seja,

$$\Psi_n = (|z| + 1/\kappa)^{\frac{1}{2}} [a_n Y_2(m(|z| + 1/\kappa)) + b_n J_2(m(|z| + 1/\kappa))] , \quad (2.43)$$

com a_m e b_n sendo coeficientes reais. Para entendermos melhor os estados KK, vamos tratar de casos em que o argumentos das funções de Bessel são pequenos ou grandes [6]. Para o caso em que $m_n(|z| + 1)$ é pequeno [30], temos:

$$J_2(m(|z| + 1/\kappa)) \sim \frac{(m(|z| + 1/\kappa))^2}{8} ; \quad (2.44a)$$

$$Y_2(m(|z| + 1/\kappa)) \sim -\frac{4}{\pi(m(|z| + 1/\kappa))^2} - \frac{1}{\pi} . \quad (2.44b)$$

Levando em conta a equação (2.41), podemos escrever uma relação entre os coeficientes a_n e b_n , dada por $b_n = \frac{4\kappa^2}{m_n^2\pi} a_n$. Assim temos que a solução será dada por:

$$\Psi_n \sim N_n(|z| + 1/\kappa) \left[Y_2(m(|z| + 1/\kappa)) + \frac{4\kappa^2}{m^2\pi} J_2(m(|z| + 1/\kappa)) \right] , \quad (2.45)$$

onde fizemos $N_n = a_n$ e sendo N_n uma constante de normalização. Agora, para o caso em que $(m_n(|z| + 1/\kappa))$ é grande, temos que:

$$(|z| + 1/\kappa)^{\frac{1}{2}} J_2(m(|z| + 1/\kappa)) \sim \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \cos(m(|z| - \frac{5}{4}\pi)) ; \quad (2.46a)$$

$$(|z| + 1/\kappa)^{\frac{1}{2}} Y_2(m(|z| + 1/\kappa)) \sim \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \sin(m(|z| - \frac{5}{4}\pi)) . \quad (2.46b)$$

Obtemos então a seguinte solução:

$$\Psi_n \sim \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \left[a_n \sin(m(|z| - \frac{5}{4}\pi)) + b_n \cos(m(|z| - \frac{5}{4}\pi)) \right] . \quad (2.47)$$

As flutuações no background do modelo RS, possibilitam observar que o modo zero (2.42) é normalizável, como mencionado anteriormente, tal modo remete a um gráviton 4-dimensional sem massa localizado sobre a brana, o que implica na localização da gravidade sobre a brana. Os estados para $m^2 > 0$ da solução (2.47) representam uma torre de modos massivos para o graviton, chamados Modos de Kaluza-Klein. Nas proximidades da brana, os modos KK são suprimidos pelo modo zero, enquanto à medida que z cresce tornam-se mais relevantes e suas soluções tem comportamento de ondas planas. Tal com-

portamento implica que, embora exista uma correção para o potencial Newtoniano ela é muito pequena nas proximidades da Brana.

2.2 Branas Espessas

Os modelos Randall-Sundrum estudados na seção anterior nos permitem adicionar campos escalares dinâmicos, auto-interagentes e com mínimo acoplamento com a gravidade. Tais campos escalares funcionam como fontes gravitacionais modelando a distribuição da gravidade em torno da brana e também suavizando a forma do fator de warp, deixando-os mais largos, resultando no que chamamos de branas espessas. Seguindo o trabalho elaborado de Bazeia et al. [25], iremos agora abordar modelos que descrevem uma gravidade penta-dimensional na presença de campos escalares dinâmicos no bulk, além de geometrias Anti-de Sitter(AdS)/ de Sitter (dS) ou geometria de Minkowski.

De forma geral, as equações de Einstein e equações de movimento são equações de segunda ordem, não-lineares acopladas, o que torna difícil resolvê-las. Visando contornar tal dificuldade iremos utilizar o formalismo de primeira ordem, escrevendo o potencial e a função de warp em termos de duas novas funções auxiliares $W = W(\phi)$ e $Z = Z(\phi)$. [31, 32]. Essa abordagem visa a simplificação de nossos cálculos, uma vez que, podemos reduzir a ordem das equações de movimento [33–35].

2.2.1 Modelos com um campo escalar

A ação que governa modelos gravitacionais penta-dimensionais com um campo escalar acoplado é dada por:

$$S = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi) \right] , \quad (2.48)$$

onde R é o escalar de Ricci, $g = \det(g_{ab})$ e $\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi)$ é a densidade Lagrangiana, Sendo ϕ o campo escalar a ser adicionado no sistema.

O elemento de linha em cinco dimensões que estaremos usando é escrito como:

$$ds_5^2 = g_{ij}dx^i dx^j = e^{2A}ds_4^2 - dy^2, \quad (2.49)$$

onde $i, j = 0 \dots 4$. $A(y)$ e $e^{2A(y)}$ são chamados, respectivamente, função de warp e fator de warp. O elemento quadridimensional ds_4^2 pode ser escrito ainda como:

$$ds_4^2 = dt^2 - e^{-2\sqrt{\Lambda}t}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2); \quad (2.50a)$$

$$ds_4^2 = e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3}(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2) - dx_3^2. \quad (2.50b)$$

Λ é a constante cosmológica do espaço quadridimensional para geometrias dS e AdS, respectivamente. Podemos obter o espaço plano ao tomarmos o limite em que $\Lambda \rightarrow 0$. Desta maneira o elemento de linha (2.49) toma a forma:

$$ds_5^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (2.51)$$

A dinâmica do campo escalar, representada pela densidade Lagrangiana \mathcal{L} , é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{mn}\partial^m\phi\partial^n\phi - V(\phi). \quad (2.52)$$

onde $g_{mn}\partial^m\phi\partial^n\phi/2$ é um termo cinético e $V(\phi)$ sendo o potencial específico de cada modelo.

2.2.1.a Branas Planas

Vamos agora analisar modelos com geometria de Minkowski ($\Lambda = 0$). Além disto, iremos considerar que a função de warp A e o campo escalar ϕ são estáticos e dependem apenas da dimensão extra, ou seja, $A = A(y)$ e $\phi = \phi(y)$.

Tomando a variação da ação (2.48) com relação ao campo escalar (ver Apêndice B), obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\phi'' + 4A'\phi' = V_\phi, \quad (2.53)$$

onde as "linhas" representam as derivadas com relação à dimensão extra y , e o subíndice

ϕ representa a derivada com relação ao campo escalar.

Tomando a variação da mesma ação (2.48) com relação à métrica, obtemos as equações de Einstein (ver Apêndice B), escritas como:

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2; \quad (2.54a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (2.54b)$$

Vamos agora introduzir uma nova função $W = W(\phi)$ chamada de função auxiliar [25, 28]. Podemos assim escrever a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$A' = -\frac{1}{3}W. \quad (2.55)$$

Derivando (2.55) e utilizando a regra da cadeia, temos então que:

$$A'' = -\frac{1}{3}W_\phi\phi'. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.56) em (2.54a), ficamos com:

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi. \quad (2.57)$$

A implementação da função auxiliar $W(\phi)$ nos permite reduzir a ordem das equações de movimento do sistema, nos possibilitando escrever a função de warp em função do campo escalar.

Substituindo (2.57) e (2.56) em (2.54b), obtemos a seguinte forma para o potencial V em termos da função auxiliar W e de sua derivada.

$$V = \frac{1}{8}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2. \quad (2.58)$$

Seguindo o trabalho de Bazeia e colaboradores [25], iremos agora considerar dois exemplos. O primeiro, dado pela função auxiliar abaixo.

$$W = 2a \arctan[\sinh(b\phi)]. \quad (2.59)$$

Derivando com respeito à ϕ temos:

$$W_\phi = 2ab \operatorname{sech}(b\phi) . \quad (2.60)$$

Assim, substituindo (2.59) e (2.60) em (2.58), temos que o potencial toma a seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}a^2b^2 \operatorname{sech}^2(b\phi) - \frac{4}{3}a^2 \arctan^2[\sinh(b\phi)] . \quad (2.61)$$

Substituindo agora (2.60) em (2.57), obtemos a seguinte equação de primeira ordem.

$$\frac{d\phi}{dy} = ab \frac{1}{\cosh(b\phi)} . \quad (2.62)$$

A equação diferencial (2.62) é facilmente integrável e tem como solução:

$$\phi = \pm \frac{1}{b} \operatorname{arcsinh}(ab^2y) . \quad (2.63)$$

Além disso, substituindo (2.59) em (2.55) e utilizando solução para o campo escalar (2.63), temos:

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}a \arctan(ab^2y) , \quad (2.64)$$

cuja solução é:

$$A = \frac{1}{3b^2} \ln(1 + ab^2y) - \frac{2}{3}ay \arctan(ab^2y) . \quad (2.65)$$

Seguem abaixo os gráficos para o campo escalar $\phi(y)$, fator de warp $e^{2A(y)}$ e densidade de energia $\rho(y)$, obtida através da componente 00 do Tensor Energia Momento (Ver Apêndice B).

A solução tipo kink do campo escalar (Figura 2.2) conecta vácuos no infinito. Podemos também observar que o fator de warp (Figura 2.5) têm sua largura aumentada para pequenos valores de b . Além disso, a brana gerada possui energia finita, uma vez que, sua densidade de energia é localizada (Figura 2.4).

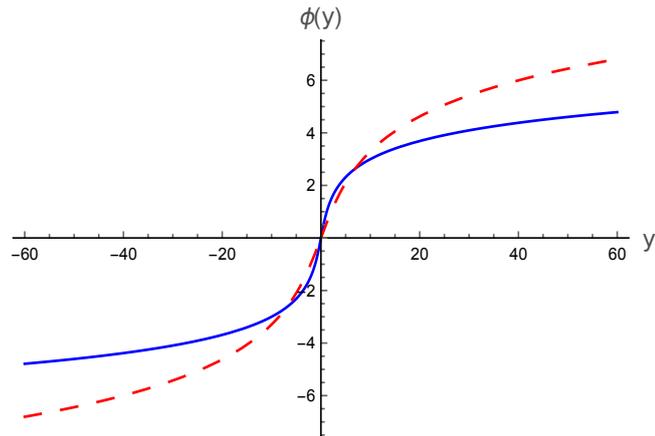


Figura 2.2: Campo Escalar $\phi(y)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

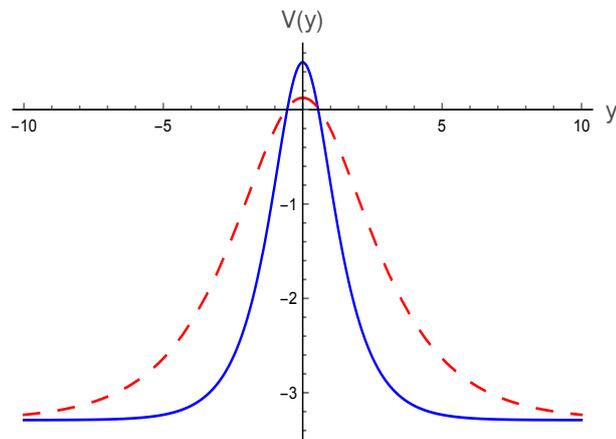


Figura 2.3: Potencial $V(\phi)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

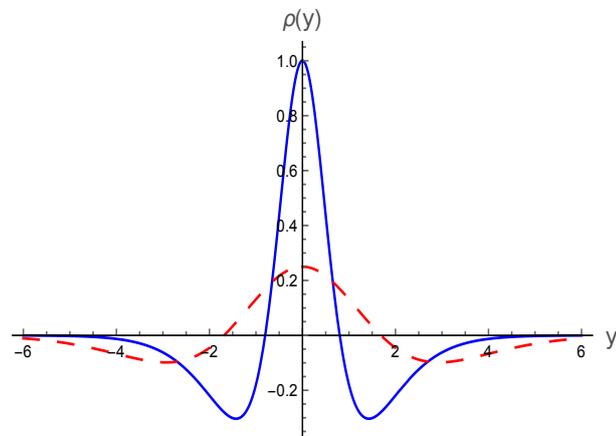


Figura 2.4: Densidade de Energia $\rho(y)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

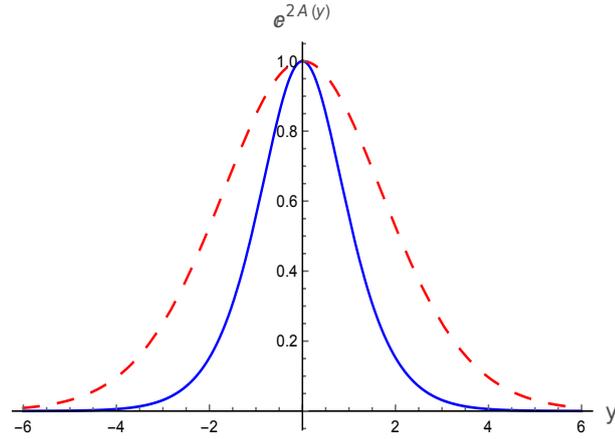


Figura 2.5: Fator de Warp $e^{2A(y)}$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

Continuando nossa análise, vamos abordar as características de branas geradas através do modelo:

$$W = 2ab \left(\phi - \frac{b^2 \phi^3}{3} \right). \quad (2.66)$$

Derivando temos:

$$W_\phi = 2ab(1 - b^2 \phi^2). \quad (2.67)$$

Temos então o seguinte potencial:

$$V = \frac{1}{2}(1 - b^2 \phi^2)^2 - \frac{4}{3}a^2 b^2 \phi^2 \left(1 - \frac{b^2 \phi^2}{3} \right)^2. \quad (2.68)$$

Podemos assim, escrever a seguinte equação de primeira ordem para o campo escalar ϕ :

$$\frac{d\phi}{dy} = ab(1 - b^2 \phi^2), \quad (2.69)$$

que possui como solução:

$$\phi = \frac{1}{b} \tanh(ab^2 y). \quad (2.70)$$

Para o função de warp temos a seguinte equação:

$$\frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}ab \left(\phi - \frac{b^2\phi^3}{3} \right). \quad (2.71)$$

Utilizando a solução encontrada para ϕ e resolvendo a equação diferencial acima, obtemos a seguinte relação para a função de warp:

$$A = \frac{4}{9b^2} \ln[\text{sech}(ab^2y)] - \frac{1}{9b^2} \tanh^2(ab^2y). \quad (2.72)$$

Seguem abaixo os gráficos para o campo escalar $\phi(y)$ (Figura 2.6), do potencial $V(y)$ (Figura 2.7), da densidade de energia $\rho(y)$ (Figura 2.8) e do fator de warp $e^{2A(y)}$ (Figura 2.9).

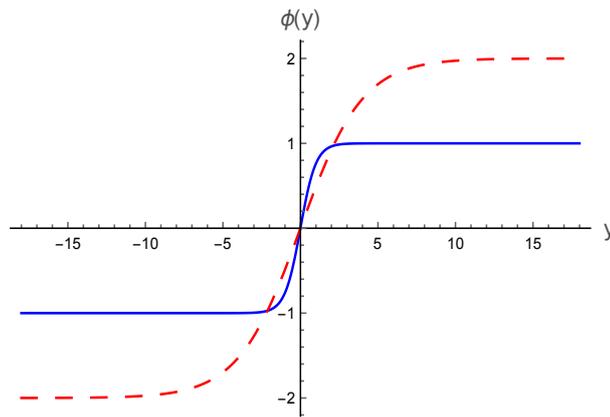


Figura 2.6: Campo Escalar $\phi(y)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

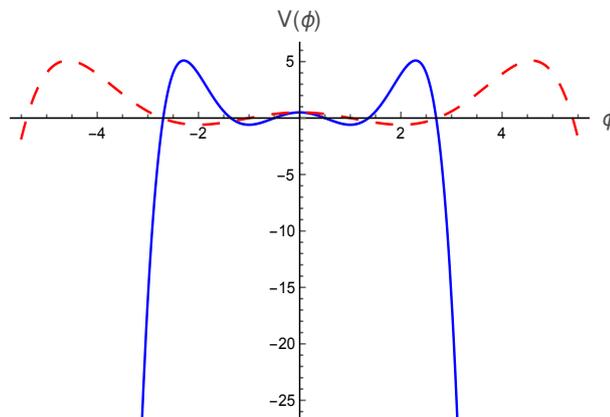


Figura 2.7: Potencial $V(\phi)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

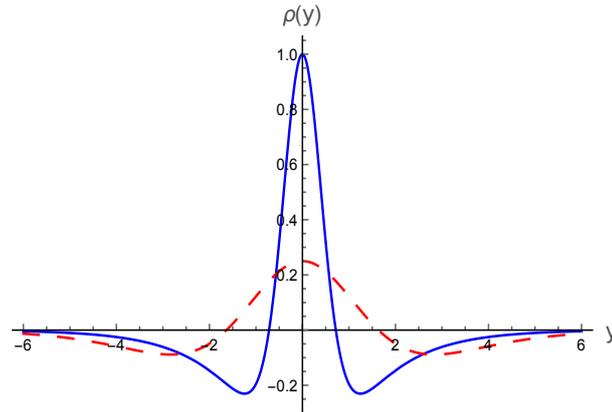


Figura 2.8: Densidade de Energia $\rho(y)$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

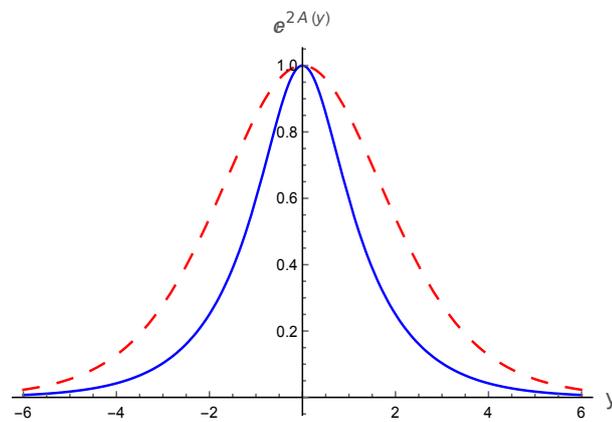


Figura 2.9: Fator de Warp $e^{2A(y)}$ para $a = b = 1$ (linha sólida azul) e para $a = 1$ e $b = 0.5$ (linha tracejada vermelha).

Semelhante ao modelo anterior, a brana gerada neste segundo caso também possui densidade de energia localizada (Figura 2.8) e seu fator de warp (Figura 2.9) também torna-se mais largo à medida que o valor de b diminui. Contudo, diferentemente do primeiro exemplo, a solução tipo kink do campo escalar neste caso, conecta dois vácuos em $\phi_{vac} = \pm 1/b$.

Nos cenários dos modelos propostos acima, a energia total é nula [29]. Podemos observar isso considerando que a densidade de energia ρ pode ser obtida através da componente 00 do tensor Energia-Momento, que para a densidade Lagrangeana (2.52) é:

$$T_{00} = e^{2A} \left(\frac{\phi'^2}{2} + V \right) = \rho. \quad (2.73)$$

Utilizando as equações (2.57) e (2.58) temos que:

$$\rho = \frac{e^{2A}}{2} \left(\frac{1}{2} W_\phi^2 - \frac{2}{3} W^2 \right) = \frac{e^{2A}}{2} (W_\phi \phi' + 2W A') . \quad (2.74)$$

A equação (2.74) pode ainda ser escrita como:

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (W e^{2A}) . \quad (2.75)$$

Integrando a densidade de energia (2.75) temos a energia total do sistema, dada por

$$E = \frac{1}{2} e^{2A(y)} W , \quad (2.76)$$

mas, observando as expressões da função de warp (2.65) e (2.72) para cada modelo, temos que $e^{2A} \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \pm\infty$, desta forma $E \rightarrow 0$.

2.2.1.b Branas Curvas

Iremos agora trabalhar com modelos com geometrias AdS ($\Lambda < 0$) ou dS ($\Lambda > 0$). Assim, as equações de Einstein para tais modelos são (Ver Apêndice B):

$$A'' + \Lambda e^{-2A} = -\frac{2}{3} \phi'^2 ; \quad (2.77a)$$

$$A'^2 - \Lambda e^{-2A} = \frac{1}{6} \phi'^2 - \frac{1}{3} V(\phi) . \quad (2.77b)$$

Uma vez que, a presença da constante cosmológica Λ torna os problemas muito mais difíceis, faz-se necessário escrever novas equações através da adição de uma nova função $Z = Z(\phi)$. Os trabalhos [25, 32], sugerem que:

$$A' = -\left(\frac{1}{3} W + \frac{1}{3} \Lambda \gamma Z\right) ; \quad (2.78a)$$

$$\phi' = \frac{1}{2} (W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma) Z_\phi) , \quad (2.78b)$$

onde α e γ são constantes. Substituindo (2.78a) e (2.78b) em (2.77b), podemos escrever

o potencial V como:

$$V(\phi) = \frac{1}{8}(W_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi)(W_\phi + \Lambda(\gamma - 3\alpha)Z_\phi) - \frac{1}{3}(W + \Lambda\gamma Z)^2. \quad (2.79)$$

Além disto, podemos incluir a seguinte restrição:

$$W_{\phi\phi}Z_\phi + W_\phi Z_{\phi\phi} + 2\Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi Z_{\phi\phi} - \frac{4}{3}Z_\phi(W + \Lambda\gamma Z) = 0. \quad (2.80)$$

Essa restrição nos possibilita obter o formalismo de primeira ordem com constante cosmológica não nula. Desta forma, utilizando as relações (2.78a) e (2.78b), obtemos a seguinte equação geral para o fator de warp $A(y)$:

$$A(y) = -\frac{1}{2}\ln \left[\mp \frac{\alpha}{6}(W_\phi Z_\phi + \Lambda(\alpha + \gamma)Z_\phi^2) \right]. \quad (2.81)$$

Como exemplo, iremos escolher os superpotenciais W e Z dados respectivamente por:

$$W = a\sinh(b\phi) - \Lambda\gamma\phi \quad e \quad Z = \phi, \quad (2.82)$$

assim,

$$W_\phi = abc\cosh(b\phi) - \Lambda\gamma \quad e \quad Z_\phi = 1. \quad (2.83)$$

Temos então o seguinte potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{8}[(ab \cosh(b\phi) + \Lambda\alpha)(ab \cosh(b\phi) - 3\Lambda\alpha)] - \frac{1}{3}a^2\sinh^2(b\phi). \quad (2.84)$$

De (2.78b) temos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{1}{2}(ab \cosh(b\phi) + \Lambda\alpha), \quad (2.85)$$

cuja solução é:

$$\phi = \pm \frac{2}{b} \operatorname{arctanh} \left[\sqrt{\frac{ab + \Lambda\alpha}{ab - \Lambda\alpha}} \tan \left(\frac{b}{4} \sqrt{a^2b^2 - \alpha^2\Lambda^2y} \right) \right]. \quad (2.86)$$

A função de warp, que pode ser gerada a partir de (2.81) é:

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\alpha}{6} \frac{a^2b^2 - \Lambda^2\alpha^2}{ab + \Lambda\alpha - 2ab \cos^2(b\sqrt{a^2b^2 - \Lambda^2\alpha^2}y/4)} \right]. \quad (2.87)$$

Podemos observar que se considerarmos $\Lambda < -ab/\alpha$ a geometria da brana será AdS, enquanto, se tomarmos $\Lambda > ab/\alpha$, a geometria será dS e o kink terá uma descontinuidade (Ver Figura 2.11), uma vez que, diverge em torno de $y^* = \pm 4\operatorname{arctanh}[(ab - \Lambda\alpha)/\sqrt{\Lambda^2\alpha^2 - a^2b^2}]/b\sqrt{\Lambda^2\alpha^2 - a^2b^2}$, onde consideramos $ab > 0$ e $\alpha > 0$.

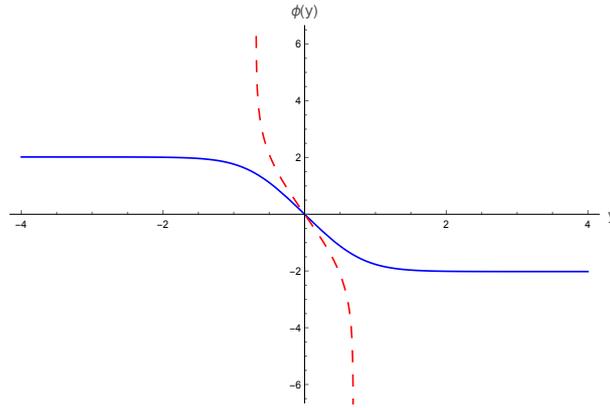


Figura 2.10: Solução do Campo $\phi(y)$ para $\Lambda_{AdS} < -ab/\alpha$ (linha sólida azul) e para $\Lambda_{dS} > ab/\alpha$ (linha tracejada vermelha), onde $\alpha = a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$.

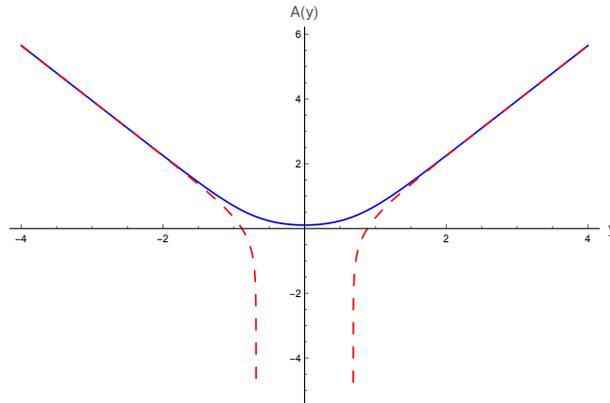


Figura 2.11: Função de Warp $A(y)$ para $\Lambda_{AdS} < -ab/\alpha$ (linha sólida azul) e para $\Lambda_{dS} > ab/\alpha$ (linha tracejada vermelha), onde $\alpha = a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$.

Como um segundo exemplo, vamos analisar o caso em que as funções W e Z tomam agora a seguinte forma:

$$W = a \sinh(b\phi) \quad e \quad Z = W . \quad (2.88)$$

Derivando temos:

$$W_\phi = Z_\phi = ab \cosh[(b\phi)] , \quad (2.89)$$

logo, o potencial será dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{12}(1 - \Lambda\alpha)(1 + \Lambda(\gamma - 3\alpha))a^2 \cosh^2(b\phi) - \frac{1}{3}a^2(1 + \Lambda\gamma)^2 \sinh^2(b\phi) . \quad (2.90)$$

As soluções para o campo e para a função de warp para este modelo dadas respectivamente por:

$$\phi(y) = \pm \frac{1}{b} \operatorname{arcsinh} \left[\tan \left(\frac{1}{3} a (1 - \Lambda\alpha) y \right) \right] ; \quad (2.91a)$$

$$A(y) = -\frac{1}{2} \ln \left[-\frac{1}{9} a^2 \alpha (1 - \Lambda\alpha) \sec^2 \left(\frac{1}{3} a (1 - \Lambda\alpha) y \right) \right] . \quad (2.91b)$$

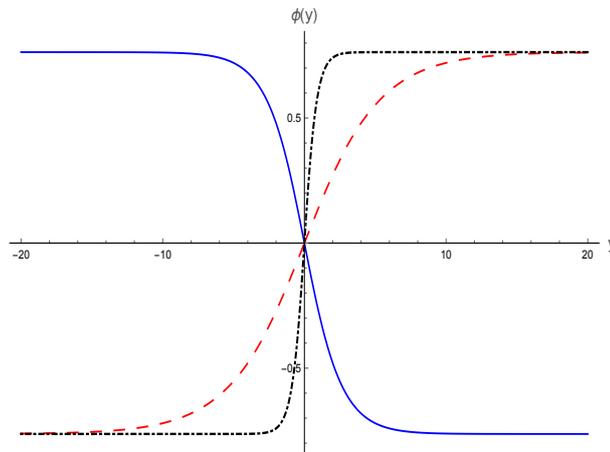


Figura 2.12: Solução do Campo $\phi(y)$ para $\alpha > 0$ correspondendo a uma brana dS_4 (linha sólida azul) e para $\alpha < 0$ com branas AdS_4 ($-1/|\alpha| < \Lambda < 0$) (linha tracejada vermelha) e branas dS_4 ($\Lambda > 0$) (Linha pontilhada preta), onde $\alpha = \pm 1$, $a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$.

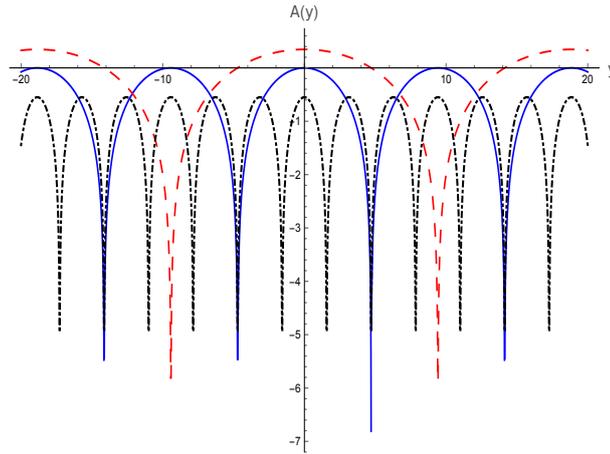


Figura 2.13: Função de Warp $A(y)$ para $\alpha > 0$ correspondendo a uma brana dS_4 (linha sólida azul) e para $\alpha < 0$ com branas AdS_4 ($-1/|\alpha| < \Lambda < 0$) (linha tracejada vermelha) e branas dS_4 ($\Lambda > 0$) (Linha pontilhada preta), onde $\alpha = \pm 1$, $a = 1$ e $b = 2/\sqrt{3}$.

Para este segundo modelo, temos que a solução tipo-kink do campo escalar, possui descontinuidade em $y^* = \pm 3\pi/2a(1 - \Lambda\alpha)$ independente do valor da constante cosmológica. Para $\alpha > 0$, a geometria será dS, tendo em vista que apenas constante cosmológica positiva é permitida neste caso. Já para $\alpha < 0$, podemos ter geometrias AdS ou dS, uma vez que a constante cosmológica pode assumir os valores $-1/|\alpha| < \Lambda < 0$ ou $\Lambda > 0$.

Neste capítulo inicialmente iremos encontrar as equações de campo para modelos em teorias bimétricas, após isso, seguiremos o trabalho proposto por Bazeia et al. [23] e estudaremos após isto, alguns cenários de mundos-brana considerando tais teorias.

3.1 Equações de Campo

Em modelos de teorias bimétricas, usualmente se assume que os gravitons e os campos bi-escalares ou bi-vetoriais se propagam na geometria descrita pela "métrica gravitacional" $g^{\mu\nu}$, enquanto todos os outros campos de matéria se propagam na geometria descrita pela "Métrica de matéria" $\hat{g}_{\mu\nu}$ [36].

Podemos relacionar as métricas $g_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$ utilizando um campo bi-escalar ϕ minimamente acoplado ao campo gravitacional [12]. A métrica de matéria é construída através de uma transformação disforme, tais transformações consistem em uma relação conforme, $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, entre as métricas e a adição de derivadas do campo bi-escalar. Embora termos com derivadas de ordem superior possam aparecer, eles nos levam a instabilidades tipo fantasmas. Desta forma, iremos considerar, por simplicidade, apenas termos de primeira ordem nas derivadas de ϕ [37–39]. Podemos construir a métrica de matéria como:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (3.1)$$

por simplicidade, vamos considerar $A = 1$, uma vez que, considerando $B = 0$ recuperaremos o caso usual. B é uma constante adimensional positiva definida.

Determinada a relação entre as métricas de matéria e gravitacional, a ação total ¹ será dada por:

$$S = S_g[g] + S_\phi[\phi, \partial_a \phi, g] + \hat{S}_M[\psi, \partial_a \psi, \hat{g}] , \quad (3.2)$$

onde S_g é a ação de Einstein-Hilbert, S_ϕ a ação para o campo escalar e $\hat{S}_M[\phi, \hat{g}]$ é a ação de matéria, com ψ representando todos os campos de matéria e \hat{g} referente à geometria em que tais campos interagem.

Fazendo a variação da ação² acima obtemos as seguintes equações de campo [36,40,41]:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T[\phi]_{\mu\nu} + \kappa \frac{\sqrt{-\hat{g}}}{\sqrt{-g}} \hat{T}_{\mu\nu} , \quad (3.3)$$

onde

$$T[\phi]_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} ; \quad (3.4a)$$

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta \hat{S}_M}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}} . \quad (3.4b)$$

3.2 Soluções de Branas Bimétricas

Seguindo as ideias propostas em [23], iremos estudar cenários de mundos-brana descritos pelo acoplamento de uma gravidade pentadimensional com campos escalares reais e outros campos de matéria. As ações de Einstein-Hilbert, do campo escalar e dos campos de matéria utilizadas são respectivamente:

$$S_g = -\frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{|g|} R; \quad (3.5a)$$

$$S_\phi = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[\eta \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right]; \quad (3.5b)$$

$$\hat{S}_M[\phi, \hat{g}] = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|} \tilde{\Lambda}_5, \quad (3.5c)$$

¹A notação é a mesma utilizada no trabalho elaborado por Bazeia et al. Vide referência [23]

²Ver Apendice A.1

onde $g = \det(g_{ab})$ e $\hat{g} = \det(\hat{g}_{ab})$, sendo g_{ab} a métrica gravitacional e \hat{g}_{ab} a métrica de matéria. Assim, a ação total dada por (3.2) é reescrita como:

$$S = -\frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{|g|} R + \int d^5x \sqrt{|g|} \left[\eta \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right] + \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|} \tilde{\Lambda}_5 . \quad (3.6)$$

Para $\eta = 1$ ou $\eta = -1$ e $\tilde{\Lambda}_5 = 0$ temos a teoria usual do campo escalar acoplado minimamente à gravidade, já para $\eta = 0$ e $\tilde{\Lambda}_5 \neq 0$ temos um modelo tipo-Cuscuton [42] puro em uma teoria bimétrica. Modelos tipo-Cuscuton tratam de modelos cujas equações de movimento não possuem derivadas de segunda ordem temporais, assim, o campo escalar se torna um campo auxiliar não dinâmico, que apenas segue a dinâmica dos campos à ele acoplados.

As métricas gravitacional e de matéria, para o cenário de mundos-branas, serão relacionadas através de um campo bi-escalar da seguinte maneira:

$$\hat{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon B^2 \partial_a \phi \partial_b \phi + C u_a u_b , \quad (3.7)$$

onde $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$, x_4 representando a dimensão extra y e $u^a = (0, 0, 0, 0, 1)$ sendo um vetor normal à superfície da brana. O termo bi-escalar serve para distinguir o campo escalar que relaciona as duas métricas com os demais campos escalares que podem aparecer na parte de matéria do modelo. Como ϕ tem dimensão $M^{3/2}$, B é escolhido para ter dimensão $M^{-5/2}$, enquanto ϵ e C são constantes adimensionais reais.

A métrica e o elemento de linha relacionados à gravidade serão, respectivamente:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^{A(y)} \eta_{\mu\nu} & \\ & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.8a)$$

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 . \quad (3.8b)$$

Assim, utilizando a métrica (3.8a) em (3.7), podemos escrever o seguinte elemento de linha referente à métrica de matéria \hat{g}_{ab} :

$$d\hat{s}^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - [(1 - C) - \epsilon B^2 \phi'^2] dy^2 , \quad (3.9)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ representa o espaço de Minkowski, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e as "linhas"(') representam a derivada com relação à dimensão extra. Também foi considerado

que o campos escalar ϕ e a função de warp A são estáticos e dependem apenas da dimensão extra y . Desta forma, utilizando as relações (3.7), (3.8b) e (3.9) e fazendo $\kappa_5^2 = 2$, podemos rescrever a ação total apenas em termos da métrica gravitacional g_{ab} (3.6) como:

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} - \frac{\eta}{2} \phi'^2 - V(\phi) + \tilde{\Lambda}_5 \sqrt{(1-C) - \epsilon B^2 \phi'^2} \right]. \quad (3.10)$$

Fazendo $C = 1$ e $\epsilon = -1$, temos:

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} - \frac{\eta}{2} \phi'^2 - V(\phi) + \tilde{\Lambda}_5 B \phi' \right], \quad (3.11)$$

ou ainda

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} + \mathcal{L}_\phi \right], \quad (3.12)$$

onde

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{\eta}{2} \phi'^2 - V(\phi) + \tilde{\Lambda}_5 B \phi'. \quad (3.13)$$

A densidade Lagrangeana efetiva (3.13) possui um termo de derivada de primeira ordem do campo escalar não quadrático, sendo assim, um termo cinético não usual. A Lagrangeana pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$L_\phi = F(X, \phi) - V(\phi), \quad (3.14)$$

com sendo $F(X, \phi) = \frac{1}{2} X + \tilde{\Lambda}_5 B \sqrt{|X|}$ com $X = g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi$.

Ao escrevermos a Lagrangeana como (3.14), podemos trabalhar teorias com dinâmicas generalizadas através do termo $F(X)$. Modelos Cosmológicos tipo-Cuscuton com Lagrangeana similar à apresentada, podem ser estudados nas referências [42, 43].

3.2.1 Soluções de Branas Bimétricas Planas

Tomando $\epsilon = -1$ e $\eta = C = 1$ em (3.10), ficamos com:

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) + \tilde{\Lambda}_5 \sqrt{B^2 \phi'^2} \right], \quad (3.15)$$

fazendo a variação da ação com relação à métrica gravitacional, obtemos as seguintes equações:

$$A'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V ; \quad (3.16)$$

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2 + \frac{2}{3}\tilde{\Lambda}_5 B \phi' , \quad (3.17)$$

Para obtermos o formalismo de primeira ordem, iremos novamente introduzir uma função $W = W(\phi)$ podendo assim escrever a função de warp como função do campo escalar através da seguinte equação:

$$A' = -\frac{1}{3}W . \quad (3.18)$$

Derivando (3.18) e comparando com (3.17), obtemos:

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi + \tilde{\Lambda}_5 B . \quad (3.19)$$

Substituindo (3.18) e (3.19) em (3.16), temos a seguinte forma para o potencial V:

$$V = -\frac{1}{3}W^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}W_\phi + \tilde{\Lambda}_5 B \right]^2 . \quad (3.20)$$

Podemos observar que se $\tilde{\Lambda}_5 = 0$ recuperamos a forma do potencial (2.58) em termos da função auxiliar W apresentada no capítulo anterior.

Como primeiro exemplo, vamos utilizar um modelo $\lambda\phi^4$ obtido através da função auxiliar W dada por:

$$W = 2ab \left(\phi - \frac{b^2\phi^3}{3} \right) , \quad (3.21)$$

cuja derivada com relação ao campo escalar é:

$$W_\phi = 2ab (1 - b^2\phi^2) . \quad (3.22)$$

Assim, substituindo (3.22) em (3.19) e (3.21) em (3.18) e resolvendo as equações diferenciais, obtemos respectivamente as seguintes soluções para o campo escalar e para a função

de warp:

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} \tanh \left(\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} ab^3 y \right) ; \quad (3.23)$$

$$A = \frac{1}{9} \left(\frac{2\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} - \frac{4}{b^2} \right) \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} ab^3 y \right) \right] + \\ - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} \right) \tanh^2 \left(\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} ab^3 y \right). \quad (3.24)$$

Analisando o comportamento assintótico no limite em que $y = \pm\infty$, temos que:

$$\phi(\pm\infty) = \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}}, \quad (3.25)$$

$$\phi'(\pm\infty) = 0. \quad (3.26)$$

Assim:

$$W(\phi(\pm\infty)) = 2ab \left[\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} - \frac{b^2}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.27)$$

Utilizando (3.21) e (3.22) para o comportamento assintótico do campo(3.25), obtemos a seguinte expressão para o potencial:

$$V(\phi(\pm\infty)) \equiv \Lambda_5 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} \right) \left(\frac{4ab}{3} - \frac{2\tilde{\Lambda}_5 B}{3} \right)^2, \quad (3.28)$$

onde $W(\phi(\pm\infty))$ representa a energia mínima de estabilidade dos estados de vácuo do modelo, enquanto $V(\phi(\pm\infty))$ determina Λ_5 que é a constante cosmológica efetiva do bulk. Podemos observar que se $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$, temos $\Lambda_5 = 0$ que corresponde a um vácuo de Minkowsky. Enquanto para $\tilde{\Lambda}_5 \neq 2ab/B$ temos que $\Lambda_5 < 0$, correspondendo assim a um vácuo AdS. Além disso, para que a função de warp (3.24) não exploda, devemos ter $\tilde{\Lambda}_5 < 2ab/B$. Seguem abaixo os gráficos do campo escalar (Figura 3.1) e do fator de warp (Figura 3.2).

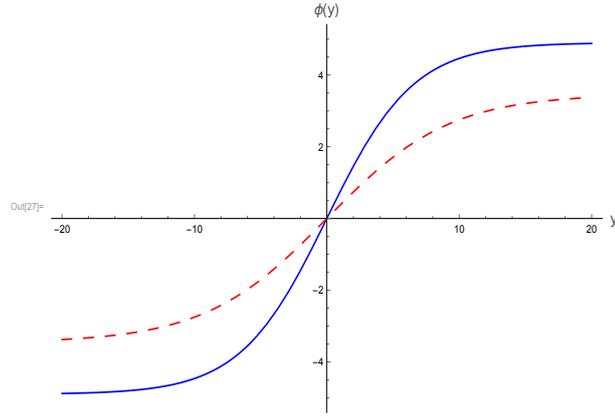


Figura 3.1: Solução do Campo $\phi(y)$ para $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$ (linha sólida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 < 2ab/B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/2\sqrt{2}$ e $B = 1$.

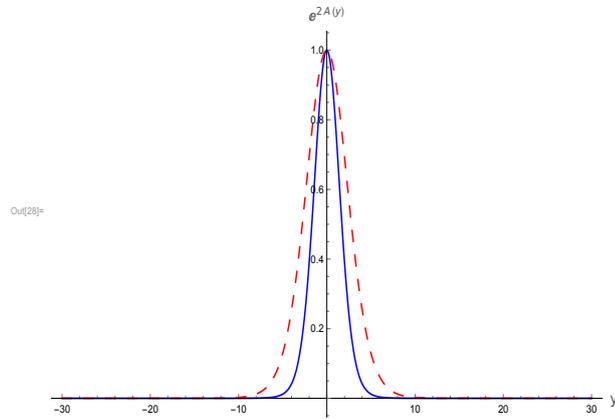


Figura 3.2: Fato de Warp $e^{2A(y)}$ para $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$ (linha sólida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 < 2ab/B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/2\sqrt{2}$ e $B = 1$.

Vamos agora escolher um outro exemplo, onde a função auxiliar W é dada por

$$W = 3a \sin(b\phi) . \tag{3.29}$$

Desta forma temos que:

$$W_\phi = 3ab \cos(b\phi) . \tag{3.30}$$

Substituindo (3.30) em (3.19) e resolvendo a equação diferencial, obtemos a seguinte solução para o campo:

$$\phi = \frac{2}{b} \arctan \left[\sqrt{\frac{2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab}{2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab}} \tan \left(\frac{b}{4} \sqrt{4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2 y} \right) \right] , \tag{3.31}$$

e agora, substituindo (3.29) em (3.18) e também resolvendo a equação diferencial, obtemos a seguinte solução para a função de warp ⁶:

$$A = -\frac{2}{3b^2} \ln \left[2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab - 6ab \cos^2 \left(\frac{b}{4} \sqrt{4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2 y} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Assumindo que $\tilde{\Lambda}_5 > 3ab/2B$, no limite $y \rightarrow \pm y^* = 2\pi/(b\sqrt{4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2})$, teremos:

$$\phi(\pm y^*) = \pm \frac{\pi}{b}; \quad (3.33a)$$

$$\phi'(\pm y) = \frac{1}{2}(2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab). \quad (3.33b)$$

Desta forma ficamos com:

$$W(\pm y^*) = A'(\pm y^*) = 0, \quad (3.34)$$

e o comportamento assintótico do potencial V dado por:

$$V(\pm y^*) \equiv \Lambda_5 = \frac{1}{8}(2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab)^2. \quad (3.35)$$

Podemos observar que se $\tilde{\Lambda}_5 = 3ab/2B$, temos $\Lambda_5 = 0$ o que representaria um vácuo de Minkowsky, contudo, a solução para o campo escalar acabaria divergindo mediante tal escolha, impossibilitando a mesma. Entretanto, se $\tilde{\Lambda}_5 \neq 3ab/2B$, temos $\Lambda > 0$ representando um vácuo dS, correspondendo então à kinks periódicos e com singularidade em $\pm y^*$, acarretando assim em uma família de mundo-branas (Figura 3.3).

Assumindo agora que $\tilde{\Lambda}_5 < 3ab/2B$, teremos as seguintes soluções para o campo e para a função de warp:

$$\phi = \frac{2}{b} \arctan \left[\sqrt{\frac{2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab}{|2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab|}} \tanh \left(\frac{b}{4} \sqrt{|4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2|} y \right) \right], \quad (3.36a)$$

$$A = -\frac{2}{3b^2} \ln \left[2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab - 6ab \cosh^2 \left(\frac{b}{4} \sqrt{|4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2|} y \right) \right]. \quad (3.36b)$$

Tomando o limite quando $y \rightarrow \pm\infty$ temos o seguinte comportamento para o potencial:

$$V(\pm\infty) \equiv \Lambda_5 = -\frac{1}{3b^2}(3ab - 2\tilde{\Lambda}_5 B)(3ab + 2\tilde{\Lambda}_5 B). \quad (3.37)$$

⁶Adotando a constante de integração como sendo $C = \frac{2}{3b^2} \ln[2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab]$

Se fizermos $\tilde{\Lambda}_5 = 3ab/2B$ na equação (3.37), temos que $\Lambda_5 = 0$, contudo, tal escolha não é possível, pois a solução do campo diverge para esses valores. Se $\tilde{\Lambda}_5 \neq 3ab/2B$ na mesma equação, temos que $\Lambda_5 < 0$ o que representa um vácuo AdS. Assim, obtemos uma solução para uma brana plana com geometria AdS representada pelo kink (3.36a) (Figura 3.3).

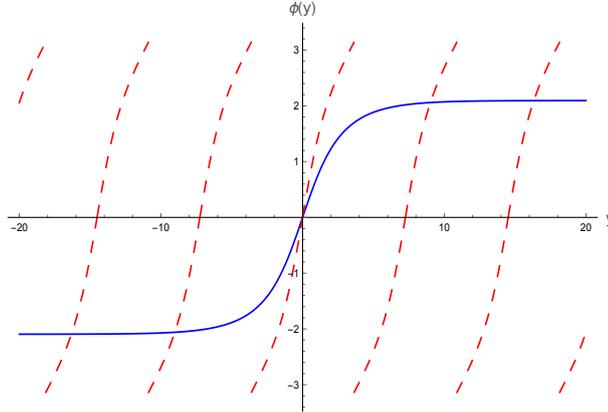


Figura 3.3: Solução do Campo $\phi(y)$ para $\tilde{\Lambda}_5 < 3ab/2B$ (linha sólida azul) e $\tilde{\Lambda}_5 > 3ab/2B$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/3$, $b = 1$ e $B = 1$.

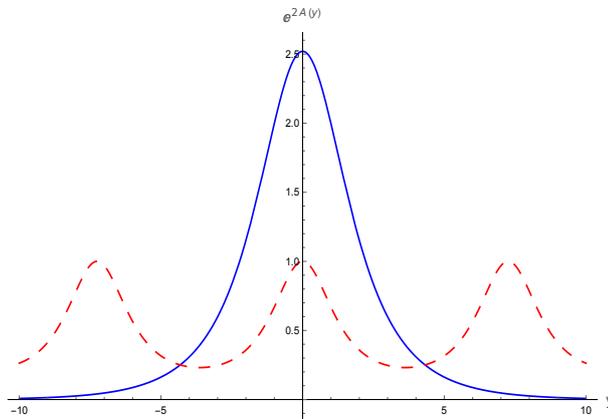


Figura 3.4: Solução do Campo $\phi(y)$ para $\Lambda < 0$ (linha sólida azul) e $\Lambda > 0$ (linha tracejada vermelha), onde $a = 1/3$, $b = 1$ e $B = 1$.

Podemos observar que em ambos os modelos (3.21) e (3.29) que o termo relacionado com $\tilde{\Lambda}_5 B$, representando o Cuscuton, induz uma transmissão da dinâmica gravitacional para o setor escalar [23], uma vez que, tal termo é responsável por definir a geometria em que o modelo está imerso, regendo assim os setores do campo escalar para cada tipo de geometria.

Iremos agora obter a energia total dos modelos de branas bimétricas acima. Temos

que a densidade de energia, dada pela componente 00 do tensor energia momento é:

$$\rho(y) = e^{2A} \left(\frac{\phi'^2}{2} + V - B\tilde{\Lambda}_5\phi' \right). \quad (3.38)$$

De (3.16), temos que $V = \phi'^2/2 - 3A'^2$, substituindo em (3.38), temos:

$$\rho(y) = e^{2A}[\phi'(\phi' - B\tilde{\Lambda}_5) - 3A'^2]. \quad (3.39)$$

Utilizando as relações (3.18) e (3.19), podemos reescrever (3.39) como:

$$\rho(y) = e^{2A} \left[\phi' \left(\frac{W_\phi}{2} \right) - 3A' \left(-\frac{W}{3} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Após algumas manipulações matemáticas e simplificações, lembrando que $\phi = \phi(y)$, $W = W(\phi)$ e $A = (A(y))$, obtemos:

$$\rho(y) = \frac{e^{2A}}{2} \left(\frac{dW}{dy} + 2\frac{dA}{dy}W \right). \quad (3.41)$$

É possível observar que (3.41) pode ser escrita como uma diferencial total, deste modo, ficamos com:

$$\rho(y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dy}(e^{2A}W). \quad (3.42)$$

Integrando (3.42), obtemos a energia total do sistema, cuja forma explícita é:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y)dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}(e^{2A}W)dy = \frac{e^{2A}W}{2}. \quad (3.43)$$

Semelhante ao caso de mundos-brana usual, abordado no capítulo anterior, o termo exponencial é dominante, $e^{2A} \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \pm\infty$. Desta forma, $E = 0$ pelos mesmos motivos apresentados no capítulo anterior.

3.2.2 Solução com Dinâmica Não Usual Pura

Tomando $\eta = 0$ em (3.6), eliminaremos o termo cinético usual, nos restando apenas o

termo Cuscuton e a ação total será então dada por:

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} - V(\phi) + \tilde{\Lambda}_5 \sqrt{(1-C) - \epsilon B^2 \phi'^2} \right] .. \quad (3.44)$$

Adotando mais uma vez $C = 1$ e $\epsilon = -1$ e variando a ação, obtemos às seguintes equações:

$$4\tilde{\Lambda}_5 B'' = -V_\phi ; \quad (3.45a)$$

$$A'^2 = -\frac{\kappa_5^2}{6} V ; \quad (3.45b)$$

$$A'' = \frac{\kappa_5^2}{3} \tilde{\Lambda}_5 B \phi' . \quad (3.45c)$$

Integrando (3.45c) e substituindo em (3.45b), determinamos a seguinte forma para o potencial:

$$V = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5^2 B^2 \phi^2 . \quad (3.46)$$

Vamos considerar agora uma solução tipo Kink dada por:

$$\phi = b \tanh(ay) . \quad (3.47)$$

Através da relação (3.45c) encontramos a seguinte solução para a função de warp:

$$A = -\frac{\kappa_5^2}{3a} \tilde{\Lambda}_5^2 B^2 b \ln[\cosh(ay)] . \quad (3.48)$$

Tomando o limite quando $y \rightarrow \pm\infty$ temos o comportamento do potencial dado por:

$$V(\pm\infty) \equiv \Lambda_5 = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5^2 B^2 b^2 . \quad (3.49)$$

Averiguamos na equação acima que $\Lambda_5 < 0$ é negativo, indicando um bulk com geometria AdS_5 . Utilizando o resultado anterior, podemos construir um limite de branas finas ($\phi \rightarrow 0$) partindo da solução (3.47), para isso, vamos tomar o caso particular em que $a \rightarrow \infty$ e $b \rightarrow 0$ de forma que o produto ab torna-se um valor finito. Derivando (3.47) temos:

$$\phi' = ab \operatorname{sech}^2(ay) . \quad (3.50)$$

Considerando o limite de branas finas, temos que quando $a \rightarrow \infty$, $\text{sech}^2(ay) \rightarrow \delta(y)$.

Assim:

$$\phi' = ab \delta(y) . \quad (3.51)$$

Sabemos que para $\eta = 0$ o tensor energia momento é dado por:

$$T_{ab} = g_{ab}V - g_{ab}\tilde{\Lambda}_5 B\phi' - \frac{\tilde{\Lambda}_5 B^2 \partial_a \phi \partial_b \phi}{\phi' B} , \quad (3.52)$$

então, componente 00 do Tensor Energia-Momento é:

$$T_{00} = -\kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5 B ab \delta(y) . \quad (3.53)$$

De (3.47) temos que $\phi \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$, logo, $V \rightarrow 0$. Desta forma, a componente 00 do tensor Energia-Momento nos leva a seguinte tensão efetiva da brana, dada por:

$$\sigma = -\kappa_5^2 B ab . \quad (3.54)$$

Por fim, temos que a solução para a função de warp (3.48), no limite de brana fina, torna-se:

$$A(y) = -\frac{\kappa_5^2}{3} \tilde{\Lambda}_5 B b |y| . \quad (3.55)$$

CAPÍTULO 4

ENTROPIA CONFIGURACIONAL DE BRANAS BIMÉTRICAS

4.1 Entropia Configuracional

Baseados na Teoria de Informação de Shannon, Marcelo Gleiser e Nikitas Stamatopoulos introduziram o conceito da chamada Entropia Configuracional (EC) [14]. Tal conceito, estabelece uma relação entre dinâmica e informação, propondo uma medida entrópica em um espaço funcional que quantifica o conteúdo informacional de modelos físicos com configurações de energia espacialmente localizadas através das equações de movimento dada as restrições de tais modelos (ex. condições iniciais e de contorno) [17].

A Entropia Configuracional torna-se uma ferramenta bastante útil, uma vez que, pode ser aplicada em diversas áreas da Física. Em muitos casos a EC é uma quantidade Física fundamental que pode nos fornecer informações importantes sobre restrições e limites das soluções. Uma das muitas utilidades da EC, trata-se quando modos de sistemas físicos possuem energias degeneradas, assim, a medida o conteúdo informacional calculado através da EC nos aponta as configurações mais prováveis que o sistema poderá adotar, uma vez que, quanto maior for a EC de estados físicos, maior é a energia será necessária para produzi-los, sendo assim, menos provável de serem observados ou detectados [17,21].

Sabendo que estamos interessados em estruturas com energia espacialmente localiza-

das, consideraremos um conjunto de funções quadrado integráveis $f(x) \in L^2(\mathbb{R})^1$, cuja transformada de Fourier é dada por

$$F(k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^D} \int e^{ikx} f(x) dx^D . \quad (4.1)$$

onde D é o número de dimensões espaciais. Como estamos trabalhando com funções quadrado integráveis, podemos utilizar Teorema de Plancherel [44] que estabeleça a equivalência de normalizações, definido como:

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |F(k)|^2 dk . \quad (4.2)$$

Definimos então uma fração modal $f(k)$, dada por

$$f(k) = \frac{|F(k)|^2}{\int |F(k)|^2 d^d k} , \quad (4.3)$$

na qual a integração é feita sobre todos os k 's onde a transformada de Fourier $F(k)$ é definida. De forma geral, as frações modais representam o peso relativo de cada modo k e podem ser entendidas como uma distribuição de probabilidade que indica quanto um dado modo k contribui para o espectro associado com a densidade de energia [18].

Vamos agora considerar uma nova função $\tilde{f}(k)$, chamada fração modal normalizada, dada por

$$\tilde{f}(k) = \frac{f(k)}{f(k)_{max}} , \quad (4.4)$$

onde $f(k)_{max}$ é o máximo da fração modal. Tal normalização garante que $\tilde{f}(k) \leq 1$ para todos os k 's. Depois dessas considerações a Entropia Configuracional pode ser definida como:

$$S_c[f(k)] = - \int \tilde{f}(k) \ln[\tilde{f}(k)] d^d k , \quad (4.5)$$

onde o integrando $\tilde{f}(k) \ln[\tilde{f}(k)]$ é chamado densidade de Entropia Configuracional.

Se as funções $f(x)$ são periódicas, podem então ser escritas como a seguinte série de

¹Espaço de funções quadrado integráveis, tais que, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Fourier

$$f(k) \rightarrow f_n = \frac{|P_n|^2}{\sum |P_n|^2}, \quad (4.6)$$

onde P_n é o n ésimo coeficiente dos modos de Fourier. Assim, a versão discreta da Entropia Configuracional será dada por

$$S_c[f] = - \sum f_n \ln(f_n). \quad (4.7)$$

A relação (4.7) é análoga à entropia de Shannon, que representa o limite para a melhor forma de compactar informação sem perdas, enquanto a EC representa a compactação de informação nos modos de um dado sistema físico.

Como exemplo, iremos estudar um dos modelos de campo escalar em 1+1 dimensões trabalhado na referência [14]. A densidade de energia de modelos de campo escalar em 1+1 dimensões é dada por

$$\rho(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (4.8)$$

Consideraremos o seguinte potencial

$$V(\phi) = (\lambda/4)(\phi^2 - m^2/\lambda^2)^2. \quad (4.9)$$

O potencial (4.9) é conhecido na literatura como potencial $\lambda\phi^4$. Na Figura 4.1 está o gráfico do potencial para valores específicos de m e λ .

Além disso, iremos considerar que o campo escalar é estático, de modo que $\dot{\phi} = 0$. A solução tipo kink (ou antikink) do potencial anteriormente citado, é da forma:

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.10)$$

que são ilustradas na Figura 4.2

Substituindo a solução (4.10) no potencial (4.9) e substituindo o potencial em (4.8), obtemos a seguinte expressão para a densidade de energia:

$$\rho(x) = \frac{m^4}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}^4\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.11)$$

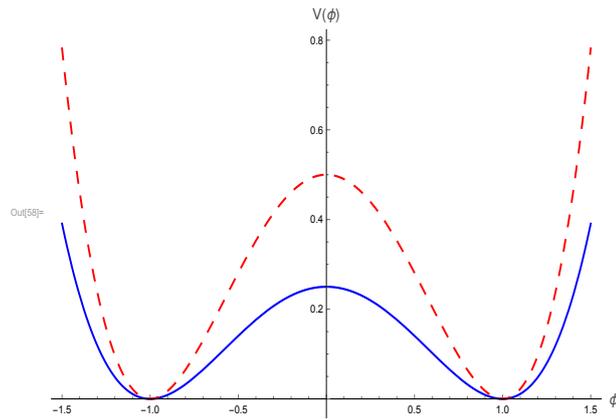


Figura 4.1: Potencial $V(\phi)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).

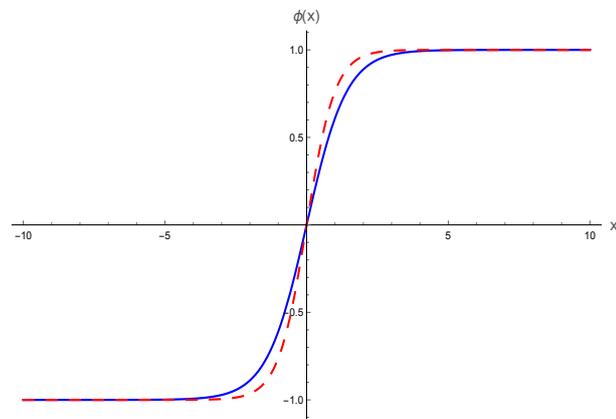


Figura 4.2: Campo Escalar $\phi(x)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).

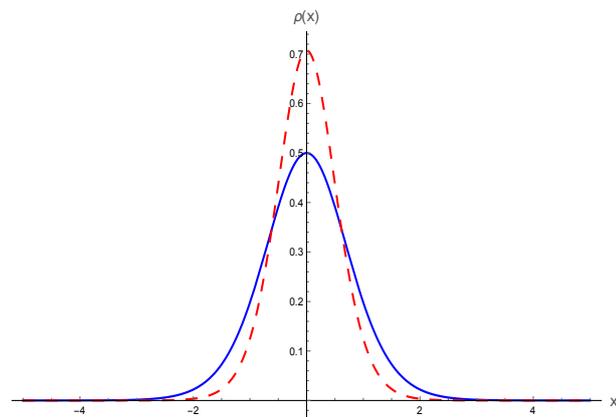


Figura 4.3: Densidade de Energia $\rho(x)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).

cuja Transformada de Fourier é:

$$F(k) = \frac{m^2 k \sqrt{\pi}}{6\alpha^2 \sqrt{2\lambda}} (k^2 + 4\alpha^2) \operatorname{Csch} \left(\frac{k\pi}{2\alpha} \right), \quad (4.12)$$

onde $\alpha \equiv m/\sqrt{2}$. Podemos agora, utilizando a relação (4.3), construir a fração modal relativa à essa teoria, cuja forma é:

$$f(k) = \frac{35\pi k^2 (k^2 + 4\alpha^2)^2}{2304\alpha^7} \operatorname{Csch} \left(\frac{k\pi}{2\alpha} \right). \quad (4.13)$$

Para esta fração modal, temos um máximo em $k = 0$ (Figura 4.4), desta forma temos que $\tilde{f}(k) = f(k)/f(0)$. Finalmente podemos calcular a Entropia Configuracional do modelo proposto, vale salientar que, no modelo acima, temos que definir valores para os parâmetros m e λ .

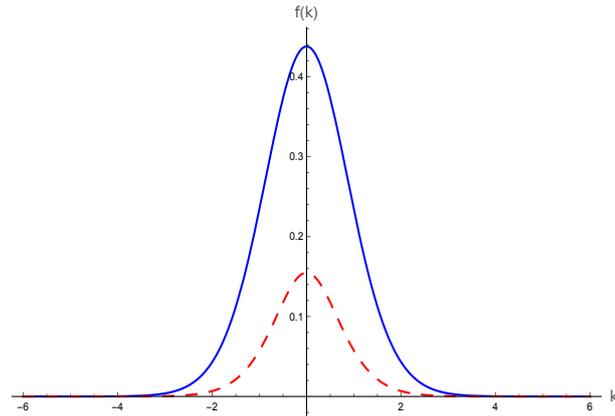


Figura 4.4: Fração Modal $f(k)$ para $m = \lambda = 1$ (linha sólida azul) e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ (linha tracejada vermelha).

As Entropias Configuracionais para os casos em que $m = \lambda = 1$ e para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ são respectivamente:

$$S_c[\phi_k] = 1.2167, \quad (4.14)$$

$$S_c[\phi_k] = 1.06527. \quad (4.15)$$

Como a Entropia Configuracional para $m = \sqrt{2}$ e $\lambda = 2$ é menor, temos que está será a configuração mais provável que o sistema adotará.

No trabalho original [14], os autores calculam a EC de outras funções teste, comparando a EC delas com a EC da solução das equações de movimento (trabalhada acima),

funções estas que não serão tratadas neste trabalho.

4.2 Entropia Configuracional de Branas Bimétricas

Uma vez introduzido o ferramental matemático, buscaremos agora, calcular a Entropia Configuracional do modelo bimétrico tipo sine-Gordon trabalhado no capítulo anterior. Partindo do modelo de função auxiliar $W = 3ab \sin(b\phi)$, descrito por (3.29), teremos as soluções expressas por

$$\phi = \frac{2}{b} \arctan \left[\sqrt{\frac{2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab}{2\tilde{\Lambda}_5 B - 3ab}} \tan \left(\frac{b}{4} \sqrt{4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2 y} \right) \right], \quad (4.16)$$

$$A = -\frac{2}{3b^2} \ln \left[2\tilde{\Lambda}_5 B + 3ab - 6ab \cos^2 \left(\frac{b}{4} \sqrt{4\tilde{\Lambda}_5^2 B^2 - 9a^2 b^2 y} \right) \right]. \quad (4.17)$$

Adotando $b = 1$, $a = 1/3$ e redefinido $\tilde{\Lambda}_5 \equiv 1/2L$ temos

$$\phi = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{B/L + 1}{B/L - 1}} \tan \left(\frac{1}{4} \sqrt{B^2/L^2 - 1y} \right) \right]; \quad (4.18a)$$

$$A = -\frac{2}{3} \ln \left[B/L + 1 - 2 \cos^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{B^2/L^2 - 1y} \right) \right]. \quad (4.18b)$$

Usando o fato que $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, podemos simplificar ainda mais a função de warp, obtendo assim a seguinte expressão:

$$A = -\frac{2}{3} \ln \left[B/L - \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{B^2/L^2 - 1y} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Redefinindo $B/L \equiv \gamma$, e considerando que $L > B$, temos que $\gamma < 1$. Desta forma as soluções para o campo (ver Figura 4.5) e para o fator de warp tomam às seguintes formas.

$$\phi = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \tanh \left(\frac{1}{4} \sqrt{1-\gamma^2 y} \right) \right]; \quad (4.20a)$$

$$A = -\frac{2}{3} \ln \left[\gamma - \cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\gamma^2 y} \right) \right]. \quad (4.20b)$$

Como visto no capítulo anterior, sabemos que a densidade de energia é a componente

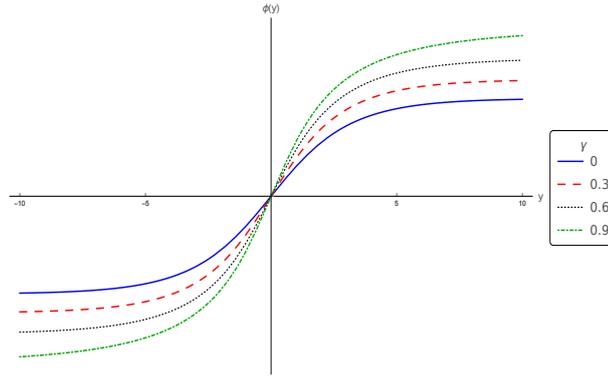


Figura 4.5: Campo Escalar $\phi(y)$ para alguns valores de γ

00 do tensor Energia-Momento. Para o caso de Branas bimétricas temos que:

$$\rho = T_{00} = e^{2A} \left[\frac{1}{2}(W_\phi + \gamma)W_\phi - \frac{1}{3}W^2 \right], \quad (4.21)$$

onde foram utilizadas as relações (3.18), (3.19) e (3.20). Assim, a densidade de energia, após algumas manipulações matemáticas, toma a seguinte forma:

$$\rho = -\frac{(1-\gamma^2)}{12[\gamma - \cosh(\beta y)]^{10/3}} [2 \cosh(2\beta y) + 3\gamma \cosh(\beta y) - 5], \quad (4.22)$$

onde $\beta = \sqrt{1-\gamma^2}/2$.

Utilizando o software *Wolfram Mathematica*², plotamos os gráficos para o fator de warp e^{2A} e para a densidade de energia ρ considerando alguns valores específicos de γ , como podem ser vistos nas Figura 4.6 e Figura 4.7.

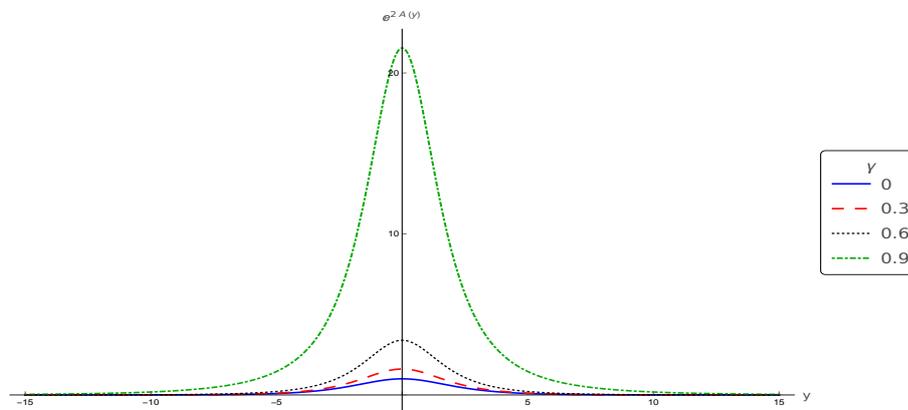


Figura 4.6: Fator de Warp para alguns valores de γ

²O software *Wolfram Mathematica* será utilizado para realizar todas as ilustrações gráficas e cálculos matemáticos de difíceis resoluções

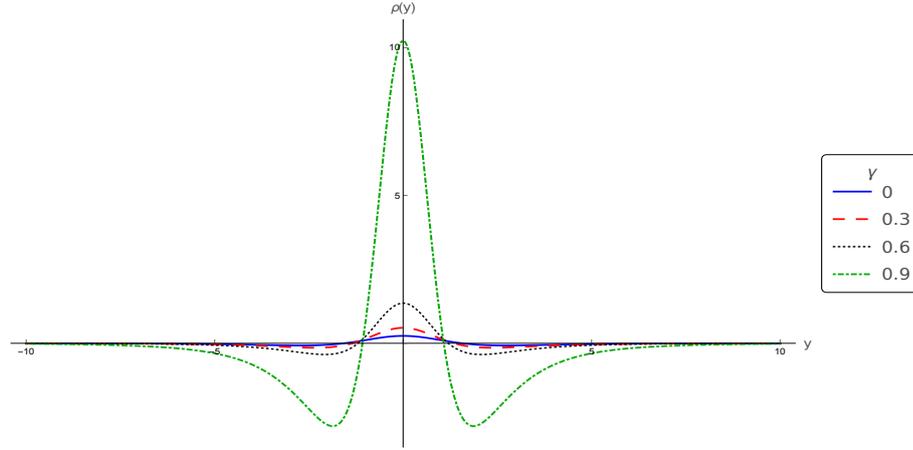


Figura 4.7: Densidade de Energia para alguns valores de γ

Do gráfico da Densidade de Energia (Figura 4.7), podemos observar que seu formato condiz com o que foi provado no capítulo anterior. A parte do contorno que encontra-se na abaixo do eixo y , garante que ao integrarmos sob todo o espaço, a energia total do sistema seja nula.

Precisamos agora calcular a Transformada de Fourier da densidade de energia (4.21), ou seja, precisamos resolver a integral:

$$F(\omega) = -\frac{(1-\gamma^2)}{12\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} \frac{(2 \cosh(2\beta y) + 3\gamma \cosh(\beta y) - 5)}{(\gamma - \cosh(\beta y))^{10/3}} dy . \quad (4.23)$$

Vamos redefinir uma nova coordenada tal que, $r \equiv \beta y$. Assim podemos reescrever (4.23) como:

$$F(\omega) = -\frac{(1-\gamma^2)}{12\sqrt{2\pi}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega r}{\beta}} \frac{[2 \cosh(2r) + 3\gamma \cosh(r) - 5]}{[\gamma - \cosh(r)]^{10/3}} dr . \quad (4.24)$$

A integral acima é de difícil resolução, o que a torna desafiadora, assim, para simplificá-la e tornar um pouco mais fácil sua solução, vamos escrever o $\cosh(2r)$ e $\cosh(r)$ em termos de exponenciais. Feito isto, poderemos escrever a Transformada de Fourier na forma de um somatório da seguinte maneira:

$$F(\omega) = I = \sum_{n=0}^2 c_n \mathcal{I}_n , \quad (4.25)$$

onde os \mathcal{I}'_n s são

$$\mathcal{I}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a_n r} + e^{-\bar{a}_n r}}{[\gamma - \cosh(\beta y)]^\lambda} dr, \quad (4.26)$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = n + \frac{i\omega}{\beta} \quad (4.27)$$

e

$$c_0 = \frac{5}{24\sqrt{2\pi}\beta}(1 - \gamma^2), \quad (4.28a)$$

$$c_1 = -\frac{1}{8\sqrt{2\pi}\beta}(1 - \gamma^2), \quad (4.28b)$$

$$c_2 = -\frac{1}{12\sqrt{2\pi}\beta}(1 - \gamma^2). \quad (4.28c)$$

A solução da equação (4.26) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n = & (-1)^{-\lambda} 2^\lambda \left\{ (\lambda + a_n) F_1[\lambda + a_n; \lambda; \lambda; \lambda + 1 + a_n; \gamma + i\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}] + \right. \\ & + (\lambda - a_n) F_1[\lambda - a_n; \lambda; \lambda; \lambda + 1 - a_n; \gamma + i\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}] + \\ & + (\lambda + \bar{a}_n) F_1[\lambda + \bar{a}_n; \lambda; \lambda; \lambda + 1 + \bar{a}_n; \gamma + i\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}] + \\ & \left. + (\lambda - \bar{a}_n) F_1[\lambda - \bar{a}_n; \lambda; \lambda; \lambda + 1 - \bar{a}_n; \gamma + i\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}] \right\}, \quad (4.29) \end{aligned}$$

Os $F_1[a; b_1, b_2; c; x, y]$ são chamadas funções hipergeométricas de Appell de duas variáveis, cuja forma geral é:

$$F_1[a, b_1, b_2; c; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \quad (4.30)$$

onde os termos $(q)_l$ são os símbolos de Pochhammer, dados por:

$$(q)_l = q(q+1)\dots(q+l-1) = \frac{\Gamma(q+l)}{\Gamma(q)}, \quad (4.31)$$

e $\Gamma(q)$ é chamada função especial *gamma*.

Podemos ainda reescrever \mathcal{I}_n como:

$$\mathcal{I}_n = \sum_{l=+,-} F_n^l, \quad (4.32)$$

com

$$\begin{aligned} F_n^\pm = & (-1)^{-\lambda} 2^\lambda (\lambda \pm a_n) F_1[\lambda \pm a_n; \lambda, \lambda; \lambda + 1 \pm a_n; \mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}] + \\ & + (-1)^{-\lambda} 2^\lambda (\lambda \pm \bar{a}_n) F_1[\lambda \pm \bar{a}_n; \lambda, \lambda; \lambda + 1 \pm \bar{a}_n; \mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}], \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde $\mathcal{Z} = \gamma + i\sqrt{1-\gamma^2}$. Então, podemos reescrever (4.25)

$$I = \sum_{n=0}^2 \sum_{l=+,-} c_n F_n^l. \quad (4.34)$$

Desta forma, temos que a fração modal será dada por:

$$f(\omega) = \frac{\sum_{m,n=0}^2 \sum_{k,l=+,-} c_n c_m^* F_n^l F_m^{(k)*}}{\sum_{m,n=0}^2 \sum_{k,l=+,-} \int c_n c_m^* F_n^l F_m^{(k)*} d\omega}. \quad (4.35)$$

Abaixo na Figura 4.8 temos o gráfico da fração modal para alguns valores de γ .

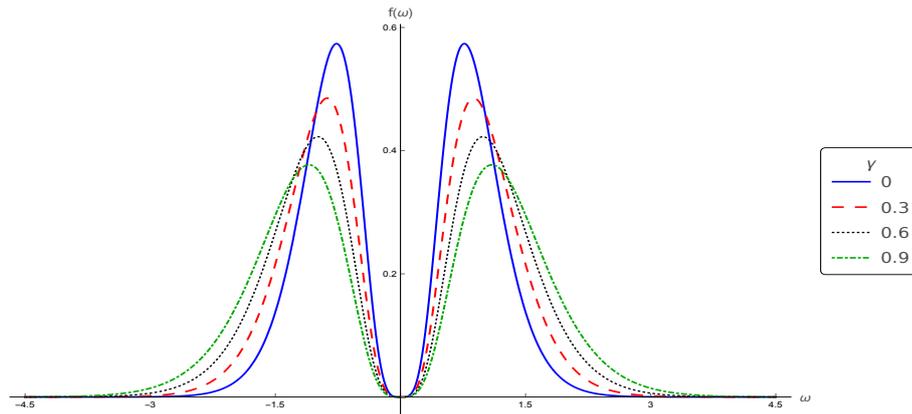


Figura 4.8: Frações modais para valores de γ

Precisamos agora calcular $f(\omega)_{max}$, mas, como podemos ver na figura acima, os valores de ω que maximizam as frações modais, são diferentes para cada valor de γ . Para encontrar tais valores, calculamos a derivada das frações modais e igualamos a 0, determinando assim, os valores de ω que maximizam as frações modais para cada valor de γ (ver Tabela

4.1).

Tabela 4.1: Valores de ω que maximizam as frações modais para cada valor de γ

γ	0	0.3	0.6	0.9
ω_γ	± 0.760000	± 0.878567	± 0.988346	± 1.096300

De posse desses valores, podemos calcular as frações modais normalizadas e consequentemente a densidade de Entropia Configuracional. Na Figura 4.9 temos o gráfico da Densidade de Entropia Configuracional para os mesmo valores de γ utilizados anteriormente.

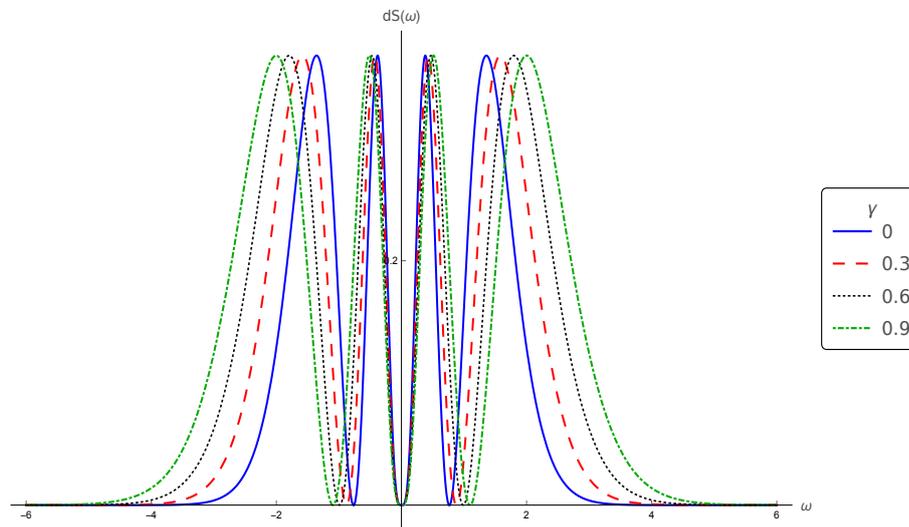


Figura 4.9: Densidade de Entropia Configuracional para valores de γ

Finalmente, podemos calcular a Entropia Configuracional (4.5) para o modelo de Brana Bimétrica proposto. Devido a complexidade das expressões das frações modais, tal cálculo apenas pode ser feito numericamente. Além disso, fizemos o procedimento para encontrar os modos máximos (ω) para outros valores de γ . Assim, segue abaixo o gráfico da Entropia Configuracional do nosso modelo como função de γ , Figura 4.10.

Podemos observar que a Entropia Configuracional cresce quase que linearmente, assim, podemos encontrar a equação da reta que represente de forma bem aproximada o comportamento da EC em função de γ . Após alguns cálculos, encontramos a seguinte

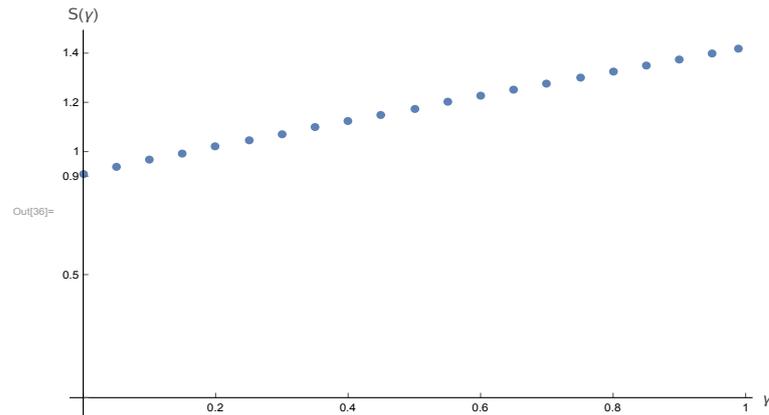


Figura 4.10: Entropia Configuracional em função de γ

equação para a Entropia Configuracional $S_c(\gamma)$:

$$S_c[\gamma] = 0,5189\gamma + 0,910528 \quad (4.36)$$

Na Figura 4.11 podemos visualizar que de fato, a equação da reta (4.36) representa com grande precisão, o comportamento da Entropia Configuracional.

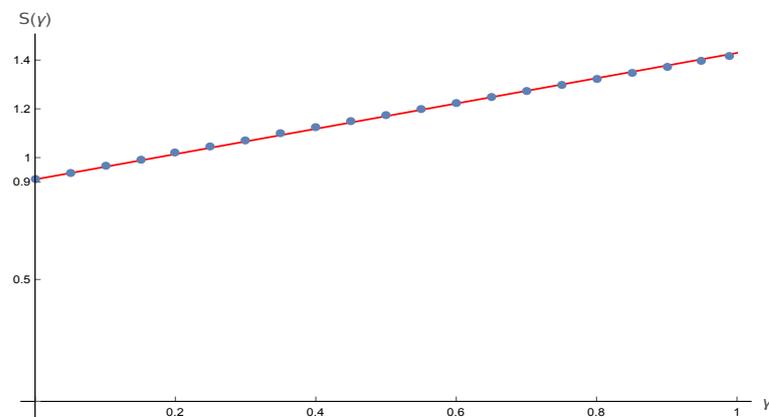


Figura 4.11: Reta de ajuste da Entropia Configuracional em função de γ

A Entropia Configuracional pode ser utilizada para "selecionar a melhor" configuração para o sistema, levando em conta que quanto menor a EC mais provável será do sistema assumir uma determinada configuração. Podemos então entender à partir da figura 4.11 que a configuração mais provável é a do caso $\gamma = 0$.

Neste trabalho exploraremos as ideias de mundos-brana e de sua importância como um caminho para a solução de alguns problemas na física. Em especial, detalhamos modelos de mundos-brana em $4+1D$, como o Modelo de Randall-Sundrum, modelo este que deu "novos ares" à temática de dimensões extras, com uma proposta de solução para o problema da Hierarquia através de um ansatz de métrica não-fatorizável, além da localização do modo fundamental para o gráviton na brana e uma torre de modos massivos não localizados.

Ainda no Capítulo 2, baseado nos trabalhos citados no mesmo capítulo, apresentamos como podemos acoplar um campo escalar com a gravidade e como o mesmo pode ser entendido como uma fonte gravitacional, modelando a gravidade ao redor da brana, através da suavização do fator de warp, o que usualmente chamamos de branas espessas. Além disto, estudamos os modelos de branas espessas com geometria planas e curvas (Ads ou Ds), propostos na referência [25]

No Capítulo 3 abordamos os conceitos base das teorias bimétricas, mais especificamente como mundos-branas podem ser trabalhados à luz de tais teorias. Para tal, estudamos os modelos propostos na referência [23], que serviram de embasamento para o desenvolvimento desta dissertação.

No capítulo seguinte, estudamos um novo conceito físico proposto por Gleiser e Stamatopoulos chamado Entropia Configuracional. Baseado na Teoria da Informação, o conceito de Entropia Configuracional é considerar que a mensagem enviada por um dado

sistema físico será sua configuração, que deve ser representada por uma função espacialmente localizada ou periódica. Enquanto na Teoria da Informação a mensagem é enviada através de letras, no caso da EC, corresponde aos modos, obtidos através da Transformada de Fourier das soluções do sistema. Tais modos são responsáveis por "carregar" a configuração do sistema e sua complexidade. Assim, podemos concluir que a EC mede a relativa complexidade da função que descreve o sistema físico em termos dos modos no espaço dos momentos.

Uma vez apresentado o conceito de EC e o ferramental matemático necessário, procuramos calcular a EC do modelo de brana sine-Gordon bimétrico, detalhado no Capítulo 2. Para isso, buscamos simplificar as soluções para o campo e para o fator de warp, em seguida definimos um parâmetro γ que podemos observar na Figura 4.1, ser responsável, junto com o campo escalar, por modelar o fator de warp. Vale salientar que utilizamos soluções em que os valores de γ são limitados, tal que $\gamma < 1$.

De posse da solução para o campo escalar e para a função de warp, construímos a densidade de energia, que observamos através da Figura 4.2. Com isto, após algumas manipulações matemáticas, calculamos analiticamente a Transformada de Fourier e em seguida a fração modal.

Por fim calculamos a EC para o modelo citado acima, onde pudemos observar que embora não haja linearidade na Transformada de Fourier e na fração modal, a EC cresce quase que linearmente à medida que o parâmetro γ aumenta, Figura 4.5. Desta forma, pudemos encontrar a equação da reta que descreve de uma forma bem aproximada o comportamento quase linear da Entropia Configuracional do modelo estudado.

Como perspectivas futuras temos a extensão das análises e discussões para o caso em que $\gamma > 1$. Outras possibilidades podem ser a aplicação da EC para outros modelos de branas como por exemplo: Aumentar o número de campos escalares acoplados, Branas Bimétricas Curvas, Branas Híbridas entre outros modelos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Th Kaluza. On the unification problem in physics. *arXiv preprint arXiv:1803.08616*, 2018.
- [2] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.
- [3] Oskar Klein. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118(2971):516, 1926.
- [4] Philip D Mannheim. *Brane-localized gravity*. World Scientific, 2005.
- [5] Lisa Randall and Raman Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370, 1999.
- [6] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690, 1999.
- [7] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Timothy J Hollowood, and Yuri Shirman. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nuclear Physics B*, 581(1-2):309–338, 2000.
- [8] Yoonbai Kim, Chong Oh Lee, Ilbong Lee, and JungJai Lee. Brane world of warp geometry: An introductory review. *arXiv preprint hep-th/0307023*, 2003.
- [9] O DeWolfe, DZ Freedman, SS Gubser, and A Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Physical Review D*, 62(4):046008, 2000.

- [10] MA Clayton and JW Moffat. Dynamical mechanism for varying light velocity as a solution to cosmological problems. *Physics Letters B*, 460(3-4):263–270, 1999.
- [11] MA Clayton and JW Moffat. Scalar-tensor gravity theory for dynamical light velocity. *Physics Letters B*, 477(1-3):269–275, 2000.
- [12] MA Clayton and JW Moffat. A scalar-tensor cosmological model with dynamical light velocity. *Physics Letters B*, 506(1-2):177–186, 2001.
- [13] Claude Elwood Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [14] Marcelo Gleiser and Nikitas Stamatopoulos. Entropic measure for localized energy configurations: Kinks, bounces, and bubbles. *Physics Letters B*, 713(3):304–307, 2012.
- [15] N Barbosa-Cendejas, R Cartas-Fuentevilla, A Herrera-Aguilar, RR Mora-Luna, and R da Rocha. Dynamical tachyonic ads/qcd and information entropy. *Physics Letters B*, 2018.
- [16] Marcelo Gleiser and Nikitas Stamatopoulos. Information content of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D*, 86(4):045004, 2012.
- [17] M Chinaglia, WT Cruz, RAC Correa, W de Paula, and PHRS Moraes. Configurational entropy as a tool to select a physical thick brane model. *Physics Letters B*, 779:16–23, 2018.
- [18] AE Bernardini and R da Rocha. Informational entropic regge trajectories of meson families in ads/qcd. *Physical Review D*, 98(12):126011, 2018.
- [19] D Bazeia, DC Moreira, and EIB Rodrigues. Configurational entropy for skyrmion-like magnetic structures. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 475:734–740, 2019.
- [20] RAC Correa and Roldão Da Rocha. Configurational entropy in brane-world models. *The European Physical Journal C*, 75(11):522, 2015.
- [21] Nelson RF Braga and Roldão da Rocha. Ads/qcd duality and the quarkonia holographic information entropy. *Physics Letters B*, 776:78–83, 2018.

- [22] RAC Correa, A de Souza Dutra, and M Gleiser. Information-entropic measure of energy-degenerate kinks in two-field models. *Physics Letters B*, 737:388–394, 2014.
- [23] D Bazeia, FA Brito, and FG Costa. Braneworld solutions from scalar field in bimetric theory. *Physical Review D*, 87(6):065007, 2013.
- [24] Martin Gremm. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Physics Letters B*, 478(4):434–438, 2000.
- [25] Dionisio Bazeia, Francisco A Brito, and Laercio Losano. Scalar fields, bent branes, and rg flow. *Journal of High Energy Physics*, 2006(11):064, 2006.
- [26] Csaba Csaki. Extra dimensions and branes. In *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection (In 3 Volumes)*, pages 967–1060. World Scientific, 2005.
- [27] M Robert. Wald, general relativity. 1984.
- [28] R Menezes and DC Moreira. New models for asymmetric kinks and branes. *Annals of Physics*, 383:662–679, 2017.
- [29] D Bazeia and DC Moreira. How to build a compact brane. *Physics Letters B*, 748:79–85, 2015.
- [30] Mary L Boas. *Mathematical methods in the physical sciences*. Wiley, 2006.
- [31] Dionisio Bazeia, CB Gomes, L Losano, and R Menezes. First-order formalism and dark energy. *Physics Letters B*, 633(4-5):415–419, 2006.
- [32] VI Afonso, D Bazeia, and L Losano. First-order formalism for bent brane. *Physics Letters B*, 634(5-6):526–530, 2006.
- [33] D Bazeia, AR Gomes, L Losano, and R Menezes. Braneworld models of scalar fields with generalized dynamics. *Physics Letters B*, 671(3):402–410, 2009.
- [34] D Bazeia, MA Marques, R Menezes, and DC Moreira. New braneworld models in the presence of auxiliary fields. *Annals of Physics*, 361:574–584, 2015.
- [35] D Bazeia, C Furtado, and AR Gomes. Brane structure from a scalar field in warped spacetime. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2004(02):002, 2004.

- [36] Donam Youm. Scalar-tensor bimetric brane world cosmology. *Physical Review D*, 65(2):025008, 2001.
- [37] Khamphée Karwan and Phongpichit Channuie. Preheating in an inflationary model with disformal coupling. *Physical Review D*, 96(2):023524, 2017.
- [38] Hassan Firouzjahi, Mohammad Ali Gorji, Seyed Ali Hosseini Mansoori, Asieh Karami, and Tahereh Rostami. Two-field disformal transformation and mimetic cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(11):046, 2018.
- [39] Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the horndeski lagrangian. *Physical Review D*, 89(6):064046, 2014.
- [40] Joao Magueijo. Bimetric varying speed of light theories and primordial fluctuations. *Physical Review D*, 79(4):043525, 2009.
- [41] MA Clayton and JW Moffat. Vector field mediated models of dynamical light velocity. *International Journal of Modern Physics D*, 11(02):187–205, 2002.
- [42] Niayesh Afshordi, Daniel JH Chung, Michael Doran, and Ghazal Geshnizjani. Cuscuton cosmology: dark energy meets modified gravity. *Physical Review D*, 75(12):123509, 2007.
- [43] Niayesh Afshordi, Daniel JH Chung, and Ghazal Geshnizjani. Causal field theory with an infinite speed of sound. *Physical Review D*, 75(8):083513, 2007.
- [44] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [45] Rafael Ferraro. *Einstein's space-time: an introduction to special and general relativity*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [46] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Teoria dei campi*. Riuniti, 1996.
- [47] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [48] Moshe Carmeli. *Classical fields: general relativity and gauge theory*. World Scientific Publishing Company, 2001.

-
- [49] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.

A.1 Apêndice A: Equações de Einstein à partir do princípio variacional

A demonstração formal que leva às equações de Einstein pode ser feita através do princípio variacional [45–47]. Para obtermos as equações de campo que descrevem a dinâmica de tal teoria vamos considerar a ação como funcional. Assim, vamos assumir a ação dada por:

$$S = S_{EH} + S_M , \quad (\text{A.1})$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert e S_M é a ação referente à matéria. Temos, considerando uma região limitada Ω , que a ação de Einstein-Hilbert e a ação da matéria são dadas respectivamente por:

$$S_{EH} = -\frac{1}{2k} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d^n x \quad (\text{A.2})$$

e

$$S_M = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^n x , \quad (\text{A.3})$$

onde R é o escalar de Ricci, \mathcal{L} a densidade Lagrangeana, $k = 8\pi$ e $g = \det(g_{ab})$.

Pelo princípio variacional temos que $\delta S = 0$, então, fazendo a variação da ação com relação à métrica, temos:

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{2k} [\delta(\sqrt{-g})(R - 2k\mathcal{L}_M) + \delta(g^{ab}R_{ab} - 2k\mathcal{L}_M)\sqrt{-g}] d^n x = 0, \quad (\text{A.4})$$

mas,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}g_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab}; \quad (\text{A.5a})$$

$$\delta(g^{ab}R_{ab}) = R_{ab}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta R_{ab}; \quad (\text{A.5b})$$

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}}\delta g^{ab}, \quad (\text{A.5c})$$

com

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_b(\delta\Gamma_{ca}^c). \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.5a), (A.5b), (A.6) e (A.5c) em (A.4) ficamos com:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\frac{1}{2k} \left[\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \right) - k \left(-g_{ab}\mathcal{L}_M + 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^n x + \\ + \int_{\Omega} [\nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_b(\delta\Gamma_{ca}^c)] \sqrt{-g} g^{ab} d^n x = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O segundo termo do lado esquerdo em (A.7) pode ser reescrito através do Teorema de Gauss covariante como:

$$\int_{\Omega} [\nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_b(\delta\Gamma_{ca}^c)] \sqrt{-g} g^{ab} d^n x = \int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g}V^c)}{\partial x^c} d^n x, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$V^c = g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - g^{ac}\delta\Gamma_{ab}^b. \quad (\text{A.9})$$

A integral do lado direito em (A.8) se anula pelo Teorema de Gauss, pois, no contorno de

integração os símbolos de Christoffel desaparecem [48, 49]. Ficamos então com:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2k} \left[\left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) - k \left(-g_{ab} \mathcal{L}_M + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^n x = 0 . \quad (\text{A.10})$$

Definimos então o Tensor Energia-Momento como:

$$T_{ab} = -g_{ab} \mathcal{L}_M + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} . \quad (\text{A.11})$$

Assim, como as variações δg^{ab} são arbitrárias, temos:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = k T_{ab} , \quad (\text{A.12})$$

onde G_{ab} é chamado de Tensor de Einstein. As equações dadas por (A.12) são conhecidas como Equações de Einstein.

As equações de Einstein podem ainda ser escritas da seguinte forma:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = k T_{ab} , \quad (\text{A.13})$$

onde Λ chamada constante cosmológica. Este termo extra foi adicionado por Einsten de modo a fazer com que as equações de campo fossem aplicáveis à problemas em Cosmologia.

A.2 Apêndice B: Equações de Movimento e Campo e Tensor Energia-Momento

Equações de Movimento

Para obtermos as equações de movimentos vamos variar a ação (2.48) com relação ao campo escalar ϕ . Desta forma temos que:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^5x \sqrt{|g|} \delta \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_a \phi) \right). \quad (\text{A.14})$$

Sabendo que R depende apenas da métrica e que $\delta S = 0$, nós obtemos as equações de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Utilizando a densidade Lagrangeana dada por (2.52), ficamos com:

$$\nabla_a \nabla^a \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{A.16})$$

A derivada covariante de um tensor é definida como:

$$\nabla_a A^a = \partial_a A^a + \Gamma_{cb}^c A^b. \quad (\text{A.17})$$

Da definição de conexão afim [48], temos que:

$$\Gamma_{cb}^c = \partial_b (\ln \sqrt{|g|}). \quad (\text{A.18})$$

Considerando que no nosso caso ϕ é um campo escalar, a primeira derivada covariante torna-se uma derivada usual ($\nabla^a \rightarrow \partial^a$) e que $A^a = \partial^a \phi$, podemos então reescrever (A.16) como:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a (\sqrt{|g|} g^{ab} \partial_b \phi) + V_\phi = 0. \quad (\text{A.19})$$

A métrica utilizada é dada por:

$$g_{ab} = \text{diag}[e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, -1] , \quad (\text{A.20})$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica e Minkowsky, $a, b = 0, 1, 2, 3, 5$ e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, assim $g = \det(g_{ab}) = e^{8A}$. Além disto, iremos considerar que o campo depende apenas da dimensão extra. Desta forma ficamos com:

$$\frac{1}{e^{4A}}\partial_a(-e^{4A}\phi') + V_\phi = 0 . \quad (\text{A.21})$$

Finalmente temos que:

$$\phi'' + 4A'\phi' = V_\phi , \quad (\text{A.22})$$

onde as "linhas"(') representam a derivada com relação à dimensão extra e o subíndice ϕ a derivada com relação ao campo.

Equações de Campo

O elemento de linha em cinco dimensões que estaremos usando é escrito como:

$$ds_5^2 = g_{ij}dx^i dx^j = e^{2A}ds_4^2 - dy^2 , \quad (\text{A.23})$$

onde $i, j = 0...4$ e A é chamado fator de warp. O elemento quadridimensional ds_4^2 pode ser escrito ainda como:

$$ds_4^2 = dt^2 - e^{-2\sqrt{\Lambda}t}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2); \quad (\text{A.24a})$$

$$ds_4^2 = e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3}(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2) - dx_3^2 , \quad (\text{A.24b})$$

para geometrias dS e AdS respectivamente. Λ representa a constante cosmológica do espaço quadridimensional.

O símbolos de Christoffell são obtidos através da seguinte equação:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d} \right) . \quad (\text{A.25})$$

O Tensor Ricci é definido como:

$$R_{ab} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^c}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ac}^c}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c . \quad (\text{A.26})$$

Cujas componentes não nulas são:

$$R_{\mu\nu} = (4A'^2 + A'' - 3e^{-2A}\Lambda)g_{\mu\nu}; \quad (\text{A.27a})$$

$$R_{55} = -4(A'' + A'^2) . \quad (\text{A.27b})$$

O escalar de Ricci é definido como:

$$R = R_a^a = g^{ab} R_{ab} , \quad (\text{A.28})$$

e é dado por:

$$R = 20A'^2 + 8A'' - 12\Lambda e^{-2A} \quad (\text{A.29})$$

Podemos agora montar o tensor de Einstein (A.12), onde suas componentes não nulas são:

$$G_{\mu\nu} = (-6A'^2 - 3A'' + 3\Lambda e^{-2A})g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu}; \quad (\text{A.30a})$$

$$G_{55} = 6A'^2 - 6\Lambda e^{-2A} = k^2 T_{55} . \quad (\text{A.30b})$$

Para o caso de Branas Espessas curvas, tomando $K^2 = 2$, temos:

$$G_{\mu\nu} = -6A'^2 - 3A'' + 3\Lambda e^{-2A} = \phi'^2 + 2V ; \quad (\text{A.31a})$$

$$G_{55} = 6A'^2 - 6\Lambda e^{-2A} = \phi'^2 - 2V . \quad (\text{A.31b})$$

Obtemos então:

$$A'^2 - \Lambda e^{-2A} = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V; \quad (\text{A.32a})$$

$$A'' + \Lambda e^{2A} = -\frac{2}{3}\phi'^2. \quad (\text{A.32b})$$

Para obtermos as equações para modelos de Branas Espessas planas, basta tomar $\Lambda = 0$.

Para os modelos de Branas Bimétricas planas temos:

$$G_{\mu\nu} = -3A'' - 6A'^2 = \phi'^2 + 2V + 2\tilde{\Lambda}_5 B\phi'; \quad (\text{A.33a})$$

$$G_{55} = 6A'^2 = \phi'^2 - 2V. \quad (\text{A.33b})$$

Somando (A.33b) e (A.33a), temos o seguinte conjunto de equações:

$$A'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V; \quad (\text{A.34a})$$

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2 - \frac{2}{3}\tilde{\Lambda}_5 B\phi'. \quad (\text{A.34b})$$

Tensor Energia-Momento

Para calcular os tensores energia-momento de cada modelo, iremos utilizar a expressão (A.11), onde ficamos apenas com a necessidade de escolher uma densidade lagrangeana para o modelo.

Para os Modelos de Branas espessas, temos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - V(\phi), \quad (\text{A.35})$$

assim, o tensor Energia é:

$$T_{ab} = -\frac{1}{2}g_{ab}\partial_c\phi\partial^c\phi + g_{ab}V + \partial_a\phi\partial_b\phi. \quad (\text{A.36})$$

Para o caso de Branas Bimétricas, temos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi - V + \tilde{\Lambda}_5\sqrt{(1-C) + \epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi}. \quad (\text{A.37})$$

Adotando $C = 1$ temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi - V + \tilde{\Lambda}_5\sqrt{\epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi}. \quad (\text{A.38})$$

Utilizando a Lagrangeana acima em (A.11), ficamos com

$$T_{ab} = 2 \left(\frac{1}{2}\delta^{ac}\delta^{bd}\partial_c\phi\partial_d\phi + \frac{\tilde{\Lambda}_5}{2} \frac{\epsilon B^2\delta^{ac}\delta^{bd}\partial_c\phi\partial_d\phi}{\sqrt{\epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi}} \right) - g_{ab} \left(\frac{1}{2}g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi - V + \tilde{\Lambda}_5\sqrt{\epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi} \right). \quad (\text{A.39})$$

Considerando que o campo ϕ depende exclusivamente da dimensão extra e que $g^{55} = -1$, devemos adotar $\epsilon = -1$. O que nos leva a seguinte forma para o tensor Energia Momento:

$$T_{ab} = -\frac{1}{2}g_{ab}\partial^c\phi\partial_c\phi + g_{ab}V - g_{ab}\tilde{\Lambda}_5\sqrt{\epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi} + \frac{\epsilon\tilde{\Lambda}_5B^2\partial_a\phi\partial_b\phi}{\sqrt{\epsilon B^2g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi}}, \quad (\text{A.40})$$

ou ainda,

$$T_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}\phi'^2 + g_{ab}V - g_{ab}\tilde{\Lambda}_5B\phi' - \frac{\tilde{\Lambda}_5B^2\partial_a\phi\partial_b\phi}{\phi'B}. \quad (\text{A.41})$$