

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

**POTENCIAIS PRODUZIDOS POR DISPERSÃO DE
CORRENTE EM SOLOS DE DUAS CAMADAS:
UMA ROTINA BASEADA NO MÉTODO DO
SOMATÓRIO MODIFICADO**

Eduardo Vidal Negreiros de Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Engenharia Elétrica, da Universidade
Federal da Paraíba, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de mestre.

Campina Grande - Dezembro de 1996

EDUARDO VIDAL NEGREIROS DE SOUZA

**POTENCIAIS PRODUZIDOS POR DISPERSÃO DE
CORRENTE EM SOLOS DE DUAS CAMADAS:
UMA ROTINA BASEADA NO MÉTODO DO
SOMATÓRIO MODIFICADO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre.

Área de Concentração: Processamento da Energia
orientador: Benemar Alencar de Souza

Campina Grande - Dezembro de 1996

**POTENCIAIS PRODUZIDOS POR DISPERSÃO DE
CORRENTE EM SOLOS DE DUAS CAMADAS: UMA ROTINA
BASEADA NO MÉTODO DO SOMATÓRIO MODIFICADO**



S729p Souza, Eduardo Vidal Negreiros de
Potenciais produzidos por dispersao de corrente em solos de duas camadas : uma rotina baseada no metodo do somatorio modificado / Eduardo Vidal Negreiros de Souza. - Campina Grande, 1996.
77 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) - Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Sistemas de Aterramento 2. Malhas de Aterramento 3. Subestacoes Compativeis - 4. Processamento de Energia 5. Dissertacao I. Souza, Benemar Alencar de, Dr. II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB) III. Titulo

CDU 621.316.9(043)

**POTENCIAIS PRODUZIDOS POR DISPERSÃO DE
CORRENTE EM SOLOS DE DUAS CAMADAS: UMA ROTINA
BASEADA NO MÉTODO DO SOMATÓRIO MODIFICADO**

Eduardo Vidal Negreiros de Souza

Dissertação aprovada em , , 1996.

Benemar Alencar de Souza, D. Sc. UFPB

Orientador

José Tavares de Oliveira, D. Sc. UFRN

Componente da Banca

Drumond Xavier Cavalcanti Lima, Doutor, UFPB

Componente da Banca

Campina Grande, PB - Dezembro de 1996

Agradecimentos

Ao professor Benemar Alencar de Souza, pela constante orientação;

A meus pais, exemplos de vida, por quem tento me espelhar;

A meus irmãos, pelo constante incentivo à realização deste trabalho;

A minha noiva, pelo carinho e compreensão;

A Deus, por iluminar os meus caminhos;

sou a todos eternamente grato

Sumário

AGRADECIMENTOS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiv
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
Capítulo I. INTRODUÇÃO	18
1.1. Modelos de solo	19
1.2. Modelos de eletrodo	20
Capítulo II. METODOLOGIA BÁSICA	22
2.1. Fundamentos	22
2.2. O método das imagens	24
2.3. Análise de convergência do método das imagens	27
2.4. O método do somatório	29
Exemplo 2.1	30
2.4.1. Algoritmo do Método	33
Capítulo III. UMA METODOLOGIA MAIS EFICIENTE	34
3.1. O método da integral	34

Exemplo 3.1	38
3.2. Uma comparação dos métodos	40
3.3. O método do somatório modificado	41
3.3.1. Algoritmo do método	42
Capítulo IV. INFLUÊNCIA DE CONDUTORES LINEARES NÃO - HORIZONTAIS	44
4.1. Método do Somatório	45
Exemplo 4.1	46
4.1.1. Algoritmo do método	49
4.2. Método da Integral	51
Exemplo 4.2	55
4.2.1. Algoritmo do método	57
Capítulo V. SIMULAÇÕES DE ELETRODOS	59
5.1. Condutor retilíneo	59
5.2. Anel quadrado	61
5.3. Malhas de aterramento	62
5.3.1. Malha simétrica e uniforme	63
5.3.2. Malha assimétrica	66
5.4. Cálculo da elevação de potencial do aterramento	69
5.5. Malhas com hastes verticais	70
CONCLUSÕES	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

Lista de Símbolos

ρ_1	Resistividade da primeira camada (ohms.m)
ρ_2	Resistividade da segunda camada (ohms.m)
ρ_{ap}	Resistividade aparente (ohms.m)
σ	Condutividade do solo (siemens.m)
τ	Valor da tolerância usada na análise de convergência pelo método das imagens
γ	Ângulo entre o eixo u (que contém o eletrodo) de um referencial UVW e o eixo x do referencial genérico XYZ.
ϵ	Permissividade do solo (F/m)
ω	Frequência angular (rad/s)
E	Campo elétrico na superfície do eletrodo de aterramento (N/C)
h	Espessura da primeira camada do solo (m)
H	Profundidade de aterramento do eletrodo (m)
I	Corrente total injetada no eletrodo (A)
I_j	Corrente injetada no solo pela parte j do eletrodo
I_C	Componente capacitiva da corrente dissipada no solo por um segmento de eletrodo (A)

I_G	Componente de condução da corrente dissipada no solo por um segmento de eletrodo (A)
J	Densidade de corrente na superfície do eletrodo (A/m)
J	Ponto correspondente às coordenadas do eletrodo no solo
j	Índice relativo ao segmento j de um eletrodo
K	Fator de reflexão: $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$
L_j	Comprimento do segmento j de um eletrodo retilíneo (m)
L	Comprimento total do eletrodo (m)
m	Número de partes em que um eletrodo é dividido para efeito de cálculo
m_1	Número de divisões da parte de uma haste imersa na primeira camada do solo
m_2	Número de divisões da parte de uma haste imersa na segunda camada do solo
n	Número de reflexões do eletrodo puntiforme
n_C	Número de condutores retilíneos horizontais
r	Distância entre um ponto no eletrodo e um ponto no solo (m)
x	Distância, na direção horizontal x , do ponto onde o potencial é de interesse até a origem dos eixos, na superfície do solo (m)
x,y,z	Coordenadas de um ponto no solo

x_j, y_j, z_j	Coordenadas do segmento j do eletrodo
x_0, y_0, z_0	Coordenadas da extremidade inicial de um condutor retilíneo do eletrodo
x_1, y_1, z_1	Coordenadas da extremidade final de um condutor retilíneo do eletrodo
XYZ	Sistema de coordenadas genérico de eixos X, Y e Z
u, v, w	Coordenadas, relativas ao sistema referencial UVW, de um ponto no solo
u_1	Coordenada u da extremidade final do condutor retilíneo horizontal situado no eixo U de um sistema de coordenadas UVW
UVW	Sistema de coordenadas alternativo de eixos U, V e W.

Lista de Figuras

1.1.	a) Segmento de um eletrodo, b) Circuito equivalente	20
2.1.	Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse	23
2.2.	Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade h e seu eletrodo imagem	24
2.3.	Eletrodo puntiforme na primeira camada de solo de duas camadas	25
2.4.	Método das imagens	26
2.5.	Convergência do método das imagens para diferentes fatores de reflexão	27
2.6.	Convergência do método das imagens para diferentes distâncias entre o eletrodo e o ponto de interesse	28
2.7.	a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos, b) Modelo matemático do elemento	29
3.1.	Eletrodo horizontal linear no eixo u de um sistema de coordenadas UVW e visto de cima	35
3.2.	Eletrodo Retilíneo Horizontal na primeira camada do solo e um ponto de interesse P na origem do referencial de eixos	39

4.1.	Haste em solo de duas camadas	44
4.2.	a) O eletrodo não-horizantal e b) seu modelo.....	47
4.3.	Haste vertical de comprimento L e profundidade H em solo de duas camadas	51
4.4.	Exemplo 4.1: Haste vertical de comprimento L , profundidade H e posição (x_j, y_j) em solo de duas camadas.....	55
5.1.	Potenciais na superfície do solo gerados por dispersão de corrente através de um condutor retilíneo horizontal de 3 m. (a) A superfície de potencial, (b) Equipotenciais, (c) Perfis longitudinal e transversal centrais; (d) Gradiente de potencial na direção transversal central.....	60
5.2.	(a) Eletrodo quadrado; (b) Potencial na superfície do solo; (c) potencial nas direções longitudinal e transversal centrais.....	61
5.3.	Eletrodo da fig. 5.2a. Gradientes de potencial na superfície do solo: (a) na direção longitudinal central L e (b) nesta mesma região extrapolando da região ocupada pelo eletrodo	62
5.4.	Malha da subestação de Barra do Peixe	63
5.5.	Referencial e área de mapeamento escolhidos para a malha da subestação de Barra do Peixe.....	65
5.6.	(a) Potencial na superfície do solo (modelo ótimo) da subestação de Barra do Peixe; (b) Tensão de toque.....	65

5.7. Malha assimétrica de dez condutores horizontais	67
5.8. Malha assimétrica de dez condutores horizontais. Potencial na superfície do solo em curva de superfície.....	67
5.9. Perfis de potencial na superfície do solo da malha da fig. 5.7: (a) nas direções transversal 1 ($x=-6$ m) e 2 ($x = -2$ m); (b) na direção transversal 3 ($x = 2$ m).....	68
5.10. Conductor horizontal de 3 m com 3 hastes. Potencial na superfície do solo: (a) em curva de superfície; (b) perfis nas direções L e T indicadas; (c) curvas de equipotenciais; (d) gradiente de potencial na direção T indicada	71

Lista de Tabelas

2.1	Resolução do exemplo 3.1. numa sequência que evidencia o efeito do número de reflexões, n	32
2.2	Solução do exemplo 3.1, considerando-se as 10 primeiras reflexões e diferentes reflexões do eletrodo.....	32
3.1	Potencial na origem do referencial de eixos, devido a um condutor retilíneo horizontal, para vários números de reflexões - método da integral	40
3.2	Influência do número de subdivisões sobre o potencial na superfície do solo em função do tempo de execução e do erro relativo ao método da integral.....	41
4.1	Exemplo 4.1 : cálculos intermediários.....	48
4.2	Solução do exemplo 4.1 (método da integral) para alguns valores de números de subdivisão e reflexão	49
4.3	Soluções do exemplo 4.2 (método da integral) para alguns números de reflexão	57
5.1.	Parâmetros de eletrodo e solo.....	60
5.2.	Dados relativos à malha da subestação de Barra do Peixe	64
5.3.	Dados de solo da subestação de Barra do Peixe.....	64

5.4. Valores calculados para a subestação de Barra do Peixe	66
5.5. Dados relativos à malha da fig. 5.5.....	67

Resumo

Este trabalho tem dois objetivos. O primeiro é estudar detalhadamente, modelos e métodos computacionais de sistemas de aterramento encontrados na literatura. O segundo objetivo é implementar uma rotina computacional eficiente para assistir o projeto de malhas de aterramento de subestações compatíveis com as necessidades industriais. O modelo de solo de duas camadas, preferido universalmente, e que é adequado para a grande maioria dos solos do Nordeste brasileiro é empregado. O modelo de eletrodo densidade-de-corrente constante é adotado. A rotina implementada é aplicada no estudo da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe. Os resultados obtidos concordam com o trabalho anterior.

Abstract

This project is aimed at two goals. The first one is to evaluate carefully some substation grounding design computational methods.

The second goal is to develop an efficient computational routine to assist on the design of substation grounding mesh compatible with industrial needs. The universally preferred two layer soil, which is suitable to the majority of the Brazilian northeast soil will be used.

The routine was implemented the electrode current density to be constant and the Barra do Peixe substation grounding was used a case study. The calculated results are in agreement with previous works.

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Os sistemas elétricos necessitam ser ligados à terra em pontos estratégicos, para efeito de dissipação de correntes de defeito e de impulso geradas por chaveamentos ou descargas atmosféricas. Tais conexões se fazem através de eletrodos ou conjunto de eletrodos enterrados, em contato direto com o solo, formando, assim, o que se denomina de *sistema de aterramento*, ou simplesmente de *aterramento*.

O conhecimento do comportamento do sistema de aterramento é um problema difícil. O solo é um meio extremamente complexo, cujas propriedades mudam com o tempo e no espaço. Mas não é só por isso. Há outros fatores que concorrem para a dificuldade do problema:

- i. O aterramento é um sistema multifuncional. Isto é, ele deve desempenhar uma variedade de funções, algumas até conflitantes. Deve servir ao sistema de alimentação (subestação), com o objetivo principal de oferecer segurança às pessoas contra os efeitos da corrente de curto-circuito. Deve prover um caminho de baixa impedância para a corrente de descarga na sua direção preferencial para o solo (aterramento da proteção contra descargas atmosféricas). Deve minimizar os efeitos de interferências, associados à irradiação, na faixa de alta frequência, como aqueles oriundos de sistemas de comunicação.
- ii. O desempenho do aterramento depende das próprias condições impostas pelos fenômenos que solicitam sua intervenção.
- iii. O comportamento do sistema de aterramento precisa ser conhecido com antecedência, já na fase de projeto.

A solução do problema está relacionada com a disponibilidade de modelos apropriados, capazes de representar os aspectos fundamentais do comportamento que se quer conhecer.

1.1 Modelos de solo

O mais simples dos modelos de solo é o *modelo uniforme*, que supõe o solo homogêneo e isotrópico¹. Embora um modelo assim seja completamente irreal, sua aplicabilidade é alta, por conta da facilidade que oferece à formulação matemática dos problemas. Ainda hoje muitos sistemas de aterramento são projetados seguindo procedimentos que adotam esse modelo (IEEE-80, 1986). Para não se manter tão distante da realidade, se utiliza o conceito de *resistividade aparente* (ENDRENY, 1963 ; TAKAHASHI & KAWASE, 1990).

Os solos reais, não-uniformes, são classificados em *regulares* e *irregulares*. Os primeiros são maioria e se caracterizam por apresentarem pouca ou quase nenhuma variação da resistividade na direção horizontal em comparação ao que acontece na direção vertical.

Os modelos mais sofisticados de solos regulares aproximam a resistividade por uma função contínua (exponencial) da profundidade (SUNDE, 1968). Entretanto, os modelos mais usuais consideram que o solo é constituído de um certo número de camadas horizontais homogêneas, isto é, com resistividades constantes, de espessuras finitas, exceto a mais profunda, que é infinita. Dos modelos em camadas, o mais empregado é o de duas camadas (DAWALIBI & MUKHEDKAR, 1975; KOSTIC & SHIRKOOHI, 1993). A preferência por esse modelo se deve à simplicidade, ímpar depois de descartado o modelo uniforme. Os métodos de cálculo não se complicam muito ao se adotar o modelo de duas camadas. Apesar disso, os resultados obtidos, em geral, são bastante razoáveis (SATO & ZAENGL, 1988; SALAMA et. al. 1995). CAVALCANTI (1991) estudou o solo do Nordeste e concluiu que 75% dele pode ser modelado em duas camadas.

Em alguns solos a resistividade não pode ser considerada função exclusiva da profundidade. Esses são classificados como *solos irregulares* e não têm recebido muita atenção. Entre os poucos trabalhos encontrados na literatura, que tratam da irregularidade, cita-se MA *et al.* (1993), no qual um modelo em camadas hemisféricas para representar

¹ Um solo homogêneo e isotrópico apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções, portanto tem resistividade constante em toda sua extensão (SALAMA et al, 1995).

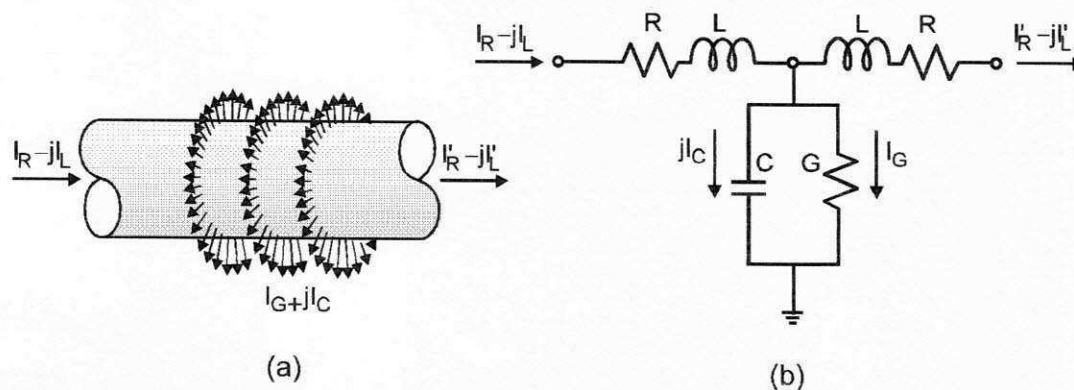


Figura 1.1 (a) Segmento de um eletrodo. (b) Circuito equivalente.

solos com irregularidades em região finita é apresentado. Tais irregularidades ocorrem em solos regulares que tenham recebido cortes ou aterros.

1.2. Modelos de eletrodo

O modo como a corrente se dispersa no solo é uma consideração física fundamental para compreender o comportamento do sistema de aterramento. Um segmento de eletrodo é mostrado na fig. 1.1a, onde são indicadas três correntes. $I_G + jI_C$ é a corrente dissipada no solo pelo segmento considerado. As outras são correntes que vêm ou vão para segmentos adjacentes ao considerado. O campo elétrico no solo determina as correntes de condução e capacitiva, que compõem a corrente total dispersa no solo. A relação entre tais correntes não depende da geometria do eletrodo, mas sim exclusivamente da relação $\sigma/\omega\epsilon$, sendo σ e ϵ , respectivamente, a condutividade e a permissividade do solo e ω a frequência angular. Sendo assim, pode-se tomar o circuito da fig. 1.1b como equivalente do segmento de eletrodo. Os efeitos mútuos, em termos de indutância, capacitância e condutância, entre cada um dos segmentos do eletrodo, devem ser considerados. A determinação de cada elemento, próprio ou mútuo, é apresentada por VISACRO & PORTELA (1993).

Em condições de baixa frequência, como aquelas que são próprias de fenômenos lentos², a impedância longitudinal e também a corrente capacitiva³, no solo, são

² Fenômenos lentos dos mais comuns são aqueles associados a curtos-circuitos e a desbalanceamentos de carga em circuitos trifásicos.

³ O valor da corrente capacitiva é proporcional à frequência.

desprezíveis. Nestes casos, o aterramento pode ser representado por uma condutância ou por uma resistência equivalente.

Nos projetos de sistemas de aterramento são supostas, usualmente, condições de regime permanente. De fato, em certas circunstâncias, é muito aproximadamente isso o que ocorre. Os métodos mais usuais de cálculo do potencial, devido à dispersão de corrente no solo, consideram constante a densidade de corrente, J , na superfície dos condutores que constituem o sistema de aterramento. Essa hipótese é muito simplificativa, porém inconsistente, pois, segundo ela, o campo elétrico, E , ao longo de toda a superfície de um eletrodo, é constante⁴. Sabe-se que isso não é verdade; o valor do campo elétrico no extremo do eletrodo é muito diferente daquele no entremeio.

Uma alternativa para a hipótese de que a densidade de corrente seja constante, é supor que esta densidade seja tal, que o potencial da superfície do eletrodo seja constante em toda a sua extensão. Aceitar esta hipótese, significa pressupor que a impedância longitudinal dos eletrodos⁵ tenha valor tão reduzido, que a queda de tensão ao longo deles possa ser desprezada.

A elevada condutividade do material empregado na formação do eletrodo⁶ permite desprezar a componente real da impedância longitudinal, mesmo no caso de malhas de aterramento de subestações convencionais, cujas dimensões são realmente grandes. Por outro lado, pensando-se nos casos em que o sistema de aterramento deva atender a solicitações elétricas associadas a fenômenos lentos⁷, a reatância longitudinal também pode ser desprezada.

A hipótese da densidade de corrente constante é sustentada, na prática, pela simplificação que empresta aos cálculos de potencial. Os métodos que a empregam corrigem, *a posteriori*, os valores calculados, por meio de fórmulas empíricas (IEEE-80, 1986).

⁴ Segundo a lei de Ohm, o campo elétrico na superfície do eletrodo é $E = \rho J$, onde ρ é a resistividade, suposta constante, do meio envolvente do eletrodo. Logo, a densidade de corrente, J , constante implica em campo elétrico constante.

⁵ À qual correspondem às impedâncias $R + j\omega L$ no circuito equivalente da fig. 1.1b.

⁶ Os eletrodos de aterramento são constituídos de cobre, como são os cabos empregados na construção de malhas de aterramento de subestações, ou de aço com revestimento de cobre, ou de ferro zincado, como são as hastes de aterramento.

⁷ Nesses casos a frequência não é muito diferente da frequência industrial.

Capítulo II

METODOLOGIA BÁSICA

Um sistema de aterramento, conectado ao neutro de um sistema de potência, entra em atividade quando ocorre um curto-circuito. Em consequência, o potencial do sistema de aterramento se torna diferente de zero. Este valor não-nulo de potencial, se denomina de *potencial do sistema de aterramento*, ou *PSA*. Concomitante ao *PSA*, surge uma corrente da superfície dos elementos do sistema de aterramento que se dispersa na terra. Esta corrente na terra é de frequência industrial, adicionada de uma componente c.c. de decaimento rápido. Deste modo, a atenção deve ser concentrada na corrente de baixa frequência que se estabelece na terra. Considerando os valores comuns de resistividade do solo (50 a 1000 Ω .m) e de dimensões de sistemas de aterramento típicos (de poucos metros a 200 m), MELIPOULOS (1988) demonstra que a análise c.c. é suficiente na maioria dos estudos práticos de sistemas de aterramento.

Neste trabalho, a análise c.c. será aplicada a sistemas de aterramento. O procedimento de cálculo será desenvolvido passo a passo, começando pelo problema mais simples e estendendo os resultados a casos progressivamente mais complexos.

2.1. Fundamentos

Antes de se considerar o modelo de duas camadas, que é o que efetivamente se empregará neste estudo, se considerará nessa fase introdutória o modelo uniforme.

A figura 2.1 mostra um eletrodo puntiforme imerso em solo uniforme. Uma esfera diminuta assim, não tem, evidentemente, aplicação prática direta, embora seja de grande utilidade na simulação de qualquer eletrodo real.

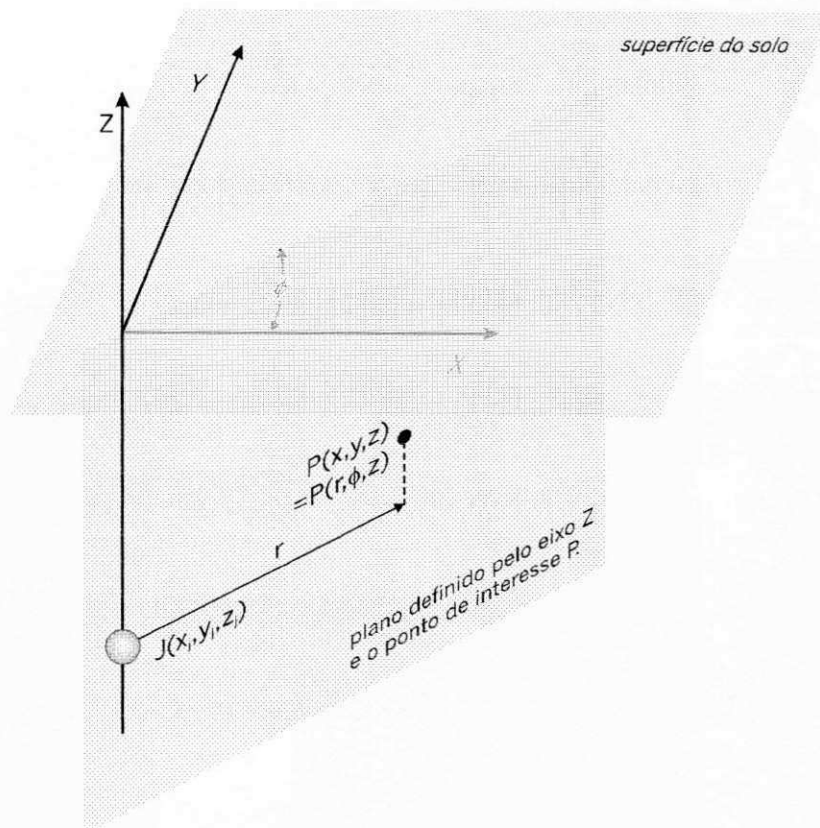


Figura 2.1 Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse.

A esfera, localizada no ponto J do solo, é uma fonte puntiforme de corrente. Dela emana para a terra uma corrente total I_j , que faz surgir um potencial V num ponto genérico P do solo. Este potencial V satisfaz à equação de Laplace: $\nabla^2 V = 0$. Neste caso, é conveniente expressar a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, \phi, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V(r, \phi, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

onde r, ϕ, z são as coordenadas do ponto P. Por causa da simetria, o potencial é independente da coordenada ϕ , isto é, $V(r, \phi, z) = V(r, z)$. Logo a eq. (2.1) se reduz a:

$$\nabla^2 V(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

A solução geral desta equação é dada em termos de funções de Bessel de ordem zero, J_0 (KRAUS & CARVER, 1986):

$$V(r, z) = \frac{\rho I_j}{4\pi} \int_0^\infty \theta(k) J_0(kr) e^{\pm kz} dk \quad (2.3)$$

onde $\theta(k)$ é uma função arbitrária da variável de integração k , determinada pelas condições de contorno. Estas condições de contorno são as de que, na interface dos dois meios (solo e ar), o potencial e a corrente devam ser funções contínuas. O resultado final é que o potencial em um ponto genérico do solo de coordenadas cartesianas x, y e z se expressa do seguinte modo:

$$V(x, y, z) = \frac{\rho I_j}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z+z_j)^2}} \right\} \quad (2.4)$$

2.2. O método das imagens

A interpretação da equação (2.4) é a seguinte: O potencial em qualquer ponto do solo, nas circunstâncias que é descrita pela fig. 2.1, é idêntico ao potencial produzido por duas fontes pontuais de corrente I_j , localizadas nos pontos (x_j, y_j, z_j) e $(x_j, y_j, -z_j)$ em uma região infinita de resistividade ρ . Em outras palavras, a interface entre os meios solo e ar tem o efeito de criar uma imagem da fonte puntiforme com relação ao plano de interface. Desta interpretação, que é ilustrada na fig. 2.2, surge uma alternativa de solução do problema de cálculo do potencial produzido por dispersão de corrente no solo: o *método das imagens*. Essa alternativa é mais prática que resolver a equação de Laplace.

De fato, a equação (2.4) é apenas um caso particular da eq. (2.3), conseqüente da condição de contorno que se impõe na interface dos dois meios semi-infinitos, solo e ar.

Se em vez de ar, cuja resistividade considera-se infinita, o meio fosse outro, de

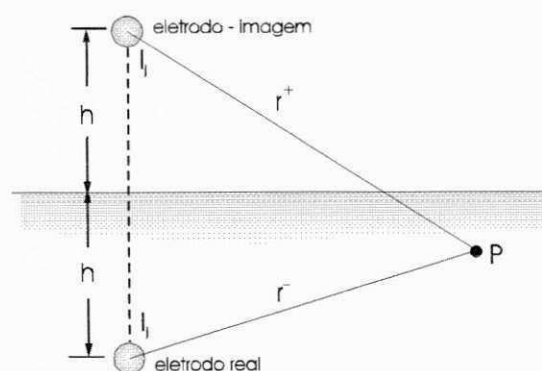


Figura 2.2 Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade h e seu eletrodo-imagem.

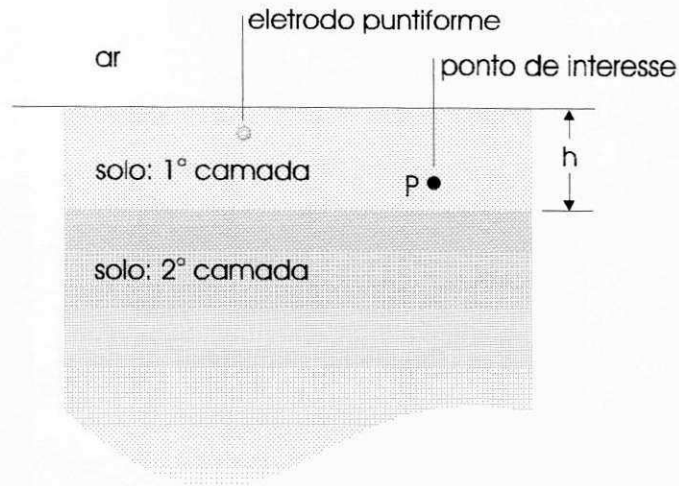


Figura 2.3 Eletrodo puntiforme na primeira camada de solo de duas camadas.

resistividade finita, a eq. (2.4) passaria a ser:

$$V(x, y, z) = \frac{\rho_1 I_j}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}} + K \frac{1}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z + z_j)^2}} \right\} \quad (2.5)$$

onde $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ é o *fator de reflexão* entre os meios 1 e 2 de resistividades ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, sendo o meio 1 aquele que contém o eletrodo.

Quando os meios são apenas dois, ocorre uma só reflexão e por conseguinte, o eletrodo imagem é único. Para um eletrodo puntiforme, imerso na primeira camada de um solo de duas camadas (fig. 2.3), o número de reflexões é infinito, conforme é esquematizado na fig. 2.4.

O potencial no ponto P na primeira camada do solo, de coordenadas x, y, z se expressa do seguinte modo:

$$V_P = \frac{\rho_1 I_j}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_0^+} + \frac{1}{r_0^-} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} \right) \right\} \quad (2.6)$$

onde:

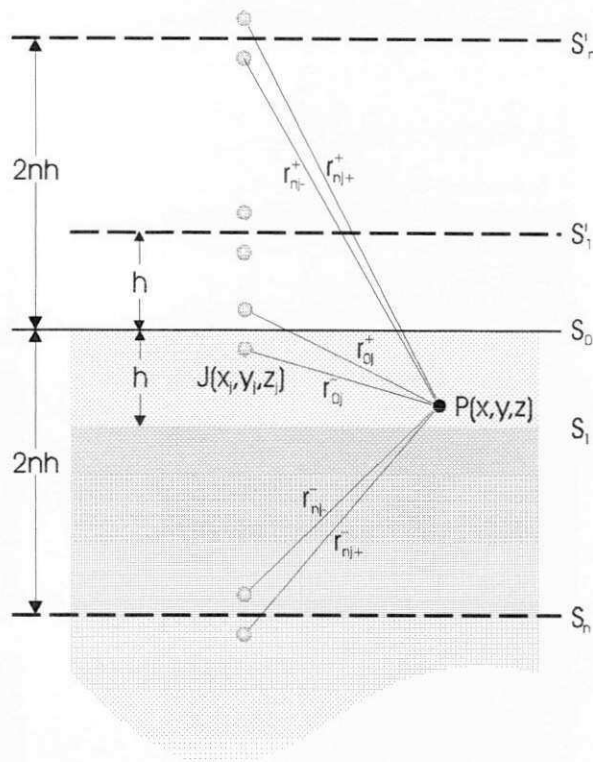


Figura 2.4 Método das imagens.

$$r_0^\pm = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j \pm z)^2} \quad (2.7a)$$

$$r_{nj}^\pm = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + [2nh \pm (z_j \pm z)]^2} \quad (2.7b)$$

Para pontos na superfície do solo, onde $z = 0$,

$$r_0^+ = r_0^- = r_0 = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j)^2} \quad (2.8a)$$

$$r_{nj}^+ = r_{nj}^- = r_{nj} = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (2nh \pm z_j)^2} \quad (2.8b)$$

Portanto, neste caso, a equação geral (2.6) fica assim:

$$V_P = \frac{\rho_l I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} \right) \right\} \quad (2.9)$$

2.3. Análise de convergência do método das imagens

Para todos os valores possíveis de parâmetros do modelo do solo, a série infinita na eq. (2.6) converge assintoticamente, uma vez que o valor absoluto do fator de reflexão K é menor que a unidade e as distâncias r são positivas. A velocidade de convergência está relacionada diretamente com o valor absoluto do fator de reflexão e com a distância entre o eletrodo e o ponto onde o potencial é de interesse. Isto é, a convergência é mais rápida quando o fator de reflexão e o afastamento do ponto de interesse ao eletrodo são menores. As figs. 2.5 e 2.6 expressam isso graficamente.

Para chegar a essas conclusões se definiu a seguinte função:

$$F(n, K, h, x, z, z_j) = \frac{K^n \left(\frac{1}{r_{nj+}} + \frac{1}{r_{nj-}} \right)}{1/r_0} \quad (2.10)$$

que expressa muito bem a convergência do método. Por simplicidade, se considera o ponto de interesse na superfície do solo, isto é, $z = 0$. Pela mesma razão, se normalizam as variáveis x e z_j , tomando-se por base a espessura da primeira camada do solo, h :

$$\bar{x} = \frac{x}{h} \quad (2.11a)$$

e

$$\bar{z}_j = \frac{z_j}{h}. \quad (2.11b)$$

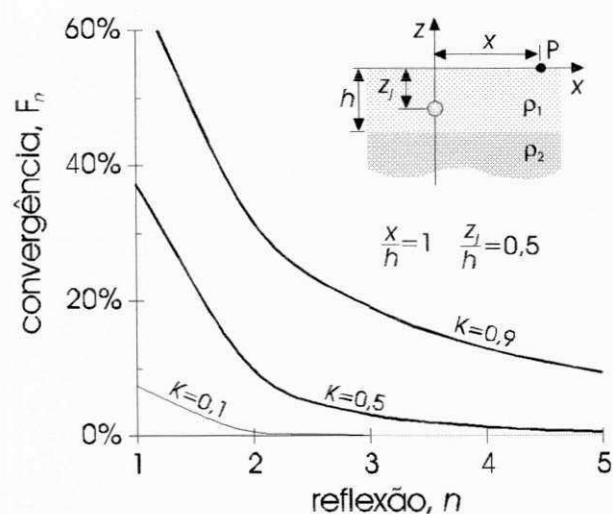


Figura 2.5 Convergência do método das imagens para diferentes fatores de reflexão.

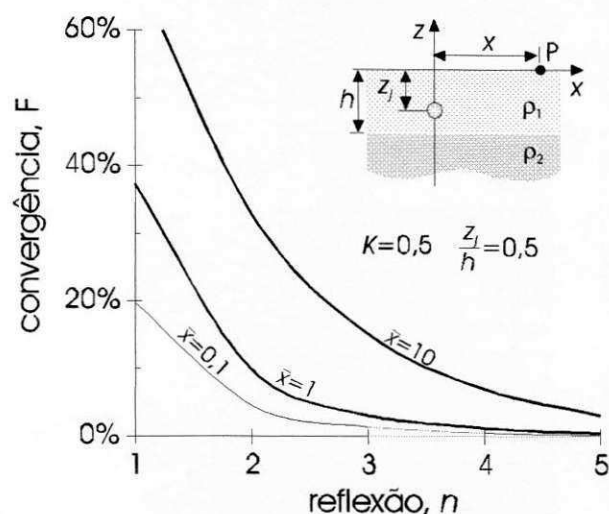


Figura 2.6 Convergência do método das imagens para diferentes distâncias entre o eletrodo e o ponto de interesse.

Com isso, e usando-se as eqs. (2.8), se transforma a eq. (2.10) em:

$$F(n, K, \bar{x}, \bar{z}_j) = K^n \sqrt{\frac{1 + (\bar{z}_j)^2}{1 + \left(\frac{2n + \bar{z}_j}{\bar{x}}\right)^2} + \frac{1 + (\bar{z}_j)^2}{1 + \left(\frac{2n - \bar{z}_j}{\bar{x}}\right)^2}} \quad (2.12)$$

Na rotina computacional, desenvolvida com base no método das imagens, o número de reflexões consideradas é auto-ajustado, a partir de uma tolerância, τ , especificada pelo usuário. Isto é, em vez da eq. (2.6) o que efetivamente se usa é

$$V_P \cong \frac{\rho_1 I_j}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_{0j}^-} + \frac{1}{r_{0j}^+} + \sum_{n=1}^{\eta} M_{nj} \right\}, \quad (2.13)$$

onde

$$M_{nj} = K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} \right), \quad (2.14)$$

e η é o menor número natural para o qual

$$\left| \frac{M_{\eta}}{M_{\eta-1}} - 1 \right| \leq \tau \quad (2.15)$$

Por segurança, um limite de termos da série truncada é também especificado. É uma mera prevenção contra uma eventual escolha imprópria de τ , que provocasse uma execução por tempo indeterminado.

2.4. O método do somatório

A equação (2.6) só é válida para eletrodos puntiformes. Se o eletrodo é grande e tem forma geométrica complexa, como é o caso de malhas de aterramento de subestação, essa equação não pode ser usada diretamente. Entretanto, seu emprego indireto pode ser feito de diferentes maneiras. A idéia básica é dividir o sistema de aterramento em pequenos segmentos e substituí-los hipoteticamente por fontes puntiformes de corrente localizadas em seus respectivos centros. Em tese, quanto menores forem esses segmentos, melhor é a aproximação. Uma parte de um sistema de aterramento genérico é mostrado na fig. 2.7a. O modelo do segmento j é mostrado na fig. 2.7b. O potencial em um ponto P do solo, de coordenadas (x, y, z) é determinado por superposição dos efeitos de cada um dos m segmentos em que tenha sido subdividido o sistema de aterramento:

$$V_P = \frac{\rho_1}{4\pi} \sum_{j=1}^m I_j \left\{ \frac{1}{r_{0j}^-} + \frac{1}{r_{0j}^+} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} \right) \right\} \quad (2.16)$$

Para que a equação (2.16) possa ser efetivamente utilizada é preciso informação a respeito da distribuição de corrente no sistema de aterramento, antes de irradiar para o solo. O modelo densidade-de-corrente-constante pressupõe que a corrente total, I , do sistema de aterramento, se distribui uniformemente em toda sua extensão. Ou seja, $I_j = \frac{I}{m}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Portanto, a eq. (2.16) particularizada para esse modelo é:

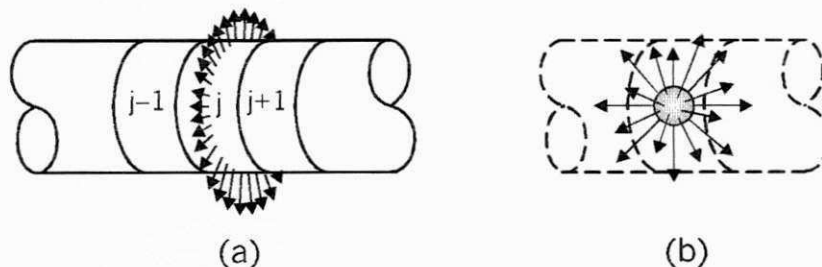


Figura 2.7 (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos. (b) Modelo matemático do elemento.

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{4\pi m} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{r_{0j}^-} + \frac{1}{r_{0j}^+} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} \right) \right\} \quad (2.17)$$

O método de cálculo do potencial baseado nas equações gerais (2.6) e (2.17), é referenciado como *método do somatório*. Esta denominação é uma alusão ao fato de que o princípio do método é o somatório das contribuições dos segmentos em que foi subdividido o sistema de aterramento.

Na implementação da equação (2.17) há algumas considerações importantes. A primeira relaciona-se com o método das imagens, que está representado na eq. (2.17) pelo que está contido entre chaves. Isto foi tratado na seção anterior. Outra questão igualmente importante é justamente como dividir o eletrodo. As subdivisões devem ser feitas em número suficiente para que os resultados tenham precisão razoável. Um valor muito grande de m pode não ter repercussão positiva no resultado, e, no entanto, pode aumentar demasiadamente o tempo de processamento. O exemplo numérico a seguir ajuda muito a se formar uma idéia dessa questão.

Exemplo 2.1

Um condutor retilíneo horizontal de 3 metros de comprimento, e enterrado a uma profundidade de 50 centímetros, dispersa no solo uma corrente de 2 ampéres. O solo é modelado em duas camadas. A primeira com resistividade de 100 $\Omega \cdot m$ e espessura de 1 metro. A segunda de 600 $\Omega \cdot m$. Calcular o potencial na origem do referencial, o qual foi escolhido de modo que o eletrodo esteja completamente no plano XZ e seja cortado exatamente ao meio pelo plano YZ. Além disso, o plano XY coincide com a superfície do solo, como é usual. Empregar o método do somatório.

Como o potencial que se quer calcular localiza-se num ponto da superfície do solo, as eqs. (2.8) e (2.9) se aplicam. Isso significa que, em vez da equação geral (2.13), pode-se empregar a seguinte:

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi m} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{r_{0j}} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} \right) \right\} \quad (2.18)$$

Do modo como o referencial foi escolhido, o problema é bidimensional, ou seja, a dimensão y não precisa ser levada em conta e os pontos se definem por (x, z) . Além disso, $x = 0$; $z_j = 0,5$ e $h = 1$. Levando isso em conta, as eqs. (2.8) se reduzem a:

$$r_{0j} = \sqrt{x_j^2 + 0,25}$$

$$r_{nj\pm} = \sqrt{x_j^2 + (2n \pm 0,5)^2}$$

O eletrodo é arbitrariamente subdividido em 6 partes. O coeficiente de reflexão e a constante externa a ambos os somatórios têm os seguintes valores:

$$K = \frac{600 - 100}{600 + 100} = 0,714$$

e

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi m} = \frac{100 \cdot 2}{2\pi \cdot 6} = 5,31 \text{ V} \cdot \text{m}.$$

A simplicidade deste problema oferece a oportunidade de se visualizar os cálculos por completo, inclusive os intermediários. Portanto eles serão levados a efeito de duas maneiras.

Primeiro a eq. (2.18) é reorganizada da seguinte forma:

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{r_{0j}} + \frac{\rho_1 I}{2\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m K^n \left(\frac{1}{r_{nj-}} + \frac{1}{r_{nj+}} \right) \quad (2.19)$$

Ou seja,

$$V_P = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta V_{Pn},$$

onde

$$\Delta V_{Pn} = \frac{\rho_1 I}{2\pi m} \sum_{j=1}^m \Delta V_{Pnj}.$$

Sendo que,

$$\Delta V_{P0j} = \frac{1}{r_{0j}}$$

e

$$\Delta V_{Pnj} = \frac{1}{r_{nj+}} + \frac{1}{r_{nj-}}; \quad n = 1, 2, \dots$$

A resolução do problema, mediante o emprego da eq. (2.19), dá uma idéia muito clara do efeito do número de reflexões consideradas. Os resultados obtidos se apresentam na tabela 2.1. Para as primeiras reflexões os resultados são mostrados por completo.

A outra resolução possível é através da aplicação direta da eq. (2.18). Fixando o número de reflexões considerado em $n = 5$, se obtêm os resultados mostrados na tabela 2.2, dependendo do número de subdivisões do eletrodo.

Tabela 2.1 Resolução do exemplo 2.1 numa sequência que evidencia o efeito do número de reflexões, n .

n	K^n	j x_j	1	2	3	4	5	6	ΔV_{pn}	V_p
0	1	r_{nj^+}	1,35	0,90	0,56	0,56	0,90	1,35		
		r_{nj^-}	1,35	0,90	0,56	0,56	0,90	1,35		
		ΔV_{pnj}	3,94	5,89	9,49	9,49	5,89	3,94	38,6	38,6
1	0,71	r_{nj^+}	2,80	2,61	2,51	2,51	2,61	2,80		
		r_{nj^-}	1,95	1,68	1,52	1,52	1,68	1,95		
		ΔV_{pnj}	3,30	3,71	4,00	4,00	3,71	3,30	22,0	60,6
2	0,51	r_{nj^+}	4,67	4,56	4,51	4,51	4,56	4,67		
		r_{nj^-}	3,72	3,58	3,51	3,51	3,58	3,72		
		ΔV_{pnj}	1,31	1,35	1,37	1,37	1,35	1,31	8,1	68,7
3	0,36	ΔV_{pnj}	0,635	0,644	0,648	0,648	0,644	0,635	3,854	72,6
4	0,26		0,342	0,345	0,346	0,346	0,345	0,342	2,068	74,6
5	0,19		0,196	0,197	0,198	0,198	0,197	0,196	1,182	75,8
6	0,13		0,117	0,117	0,118	0,118	0,117	0,117	0,704	76,5
7	0,095		0,072	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072	0,431	76,9
8	0,068		0,045	0,045	0,045	0,045	0,045	0,045	0,269	77,2
9	0,048		0,028	0,029	0,029	0,029	0,029	0,028	0,171	77,4
10	0,035		0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,110	77,5

Tabela 2.2 Solução do exemplo 2.1, considerando-se as 10 primeiras reflexões e diferentes subdivisões do eletrodo.

m	1	2	3	4	5	6
V_p	105	74,5	79,2	77,3	77,7	77,5

$$\begin{aligned}
\int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w) du &= \frac{\rho_1 I_j}{4\pi L_j} \left\{ \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + w^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right] + \right. \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh + w)^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + (2nh + w)^2}} \right] + \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh - w)^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + (2nh - w)^2}} \right] \right\} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

e a segunda integral da soma da eq. (3.6) é obtida da primeira, apenas substituindo-se w por $w + 2z_0$:

$$\begin{aligned}
\int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w + 2z_0) du &= \frac{\rho_1 I_j}{4\pi L_j} \left\{ \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (w + 2z_0)^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right] + \right. \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + [2nh + (w + 2z_0)]^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + [2nh + (w + 2z_0)]^2}} \right] + \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + [2nh - (w + 2z_0)]^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + [2nh - (w + 2z_0)]^2}} \right] \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

O potencial, portanto, em um ponto P qualquer da primeira camada do solo será, pela eq. (3.6), a soma das equações (3.7) e (3.8), onde u_1 , u , v e w são expressas, no sistema referencial XYZ, pelas equações :

$$u_1 = (x_1 - x_0) \cos \gamma + (y_1 - y_0) \operatorname{sen} \gamma \quad (3.9a)$$

$$u = (x - x_0) \cos \gamma + (y - y_0) \operatorname{sen} \gamma \quad (3.9b)$$

$$v = (y - y_0) \cos \gamma - (x - x_0) \operatorname{sen} \gamma \quad (3.9c)$$

$$w = z - z_0 \quad (3.9d)$$

onde x_1 e y_1 são as coordenadas x e y da extremidade final do eletrodo no referencial XYZ.

Para pontos na superfície do solo, onde $z = 0$., o potencial em um ponto P da primeira camada do solo se simplifica, ao se usar as eqs. (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9d), pelo fato de se considerar $z = 0$:

$$V_P = \frac{\rho_l I_j}{2\pi L_j} \left\{ \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + z_0^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2}} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + [2nh + z_0]^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + [2nh + z_0]^2}} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + [2nh - z_0]^2}}{-u + \sqrt{u^2 + v^2 + [2nh - z_0]^2}} \right] \right\} \quad (3.10)$$

O exemplo 3.1 a seguir mostra, com clareza, um emprego do método da integral na determinação do potencial em um ponto situado na primeira camada.

Exemplo 3.1

Um condutor retilíneo horizontal de 3 m de comprimento e enterrado a uma profundidade de 50 cm, dispersa no solo uma corrente de 2 A. O solo é modelado em duas camadas, sendo a primeira de resistividade $100 \Omega \cdot m$ e espessura 1 metro, e a segunda camada de resistividade $600 \Omega \cdot m$. Calcular o potencial na origem do referencial, o qual foi escolhido de modo que o eletrodo esteja completamente no plano XZ e seja cortado ao meio pelo plano YZ. Além disso, o plano XY coincide com a superfície do solo, como é usual (fig.3.2). Empregar o modelo de eletrodo densidade-de-corrente-constante e o método da integral.

Este problema é o mesmo do exemplo 2.1. O que muda é apenas o método de solução. A determinação do potencial no ponto P, devido ao eletrodo como um todo, se consegue integrando as contribuições de cada elemento infinitesimal du do eletrodo, segundo a eq. (3.6), até o comprimento total do eletrodo, de 3 m, ou seja:

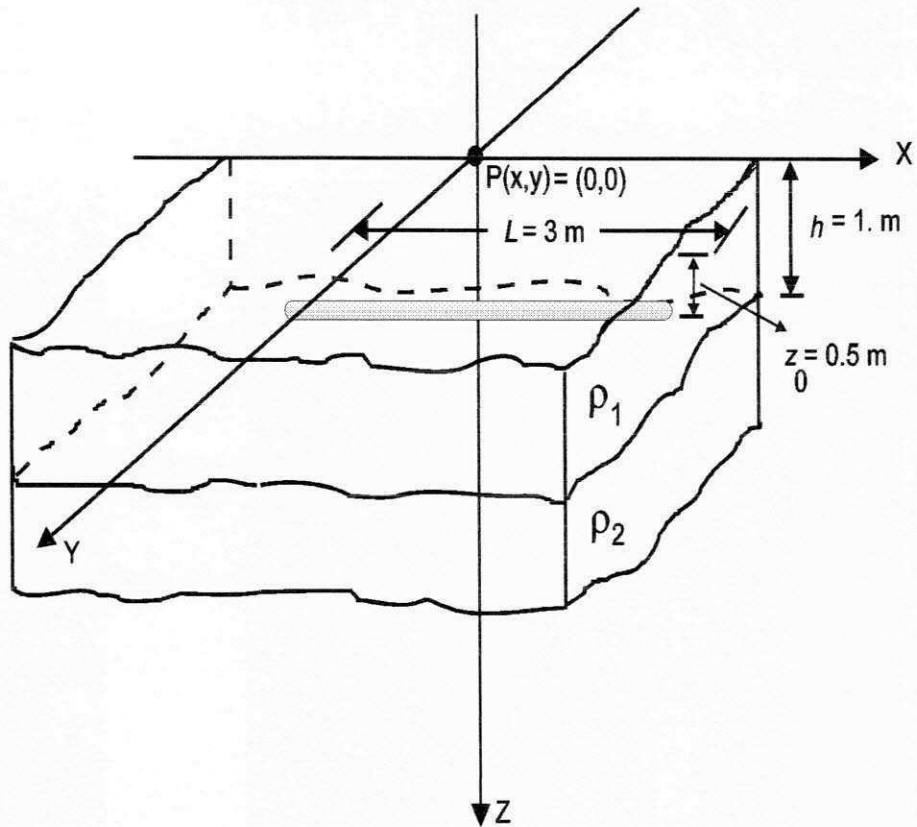


Figura 3.2 Eletrodo Retilíneo Horizontal na primeira camada e um ponto de interesse P na origem do referencial de eixos.

$$V_P = \int_{u_0=0}^{u_1=3} \Theta(w) du + \int_{u_0=0}^{u_1=3} \Theta(w + 2z_0) du. \quad (3.11)$$

Como o problema trata de determinar o potencial na superfície do solo, sendo $z = 0$, então, a resolução da soma de integrais da eq. (3.11) se resume à solução da eq. (3.10), observando-se que:

$$\frac{\rho_1 \bullet I_j}{2\pi L_j} = \frac{100 \times 2}{2\pi \times 3} = 10,61 \text{ V.m}$$

e que os parâmetros do modelo de eletrodo e do modelo de solo empregados são :

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{600 - 100}{600 + 100} = 0,714 ;$$

$\gamma = 0^\circ$, pois o eletrodo situa-se no plano XZ e é paralelo ao eixo X ;

Do modo como o referencial foi escolhido, o problema é bidimensional, ou seja, a dimensão y não precisa ser levada em conta e os pontos se definem por (x, z) . Além disso, $x = 0$; $z_0 = 0,5$; $x_0 = -1,5$ e $h = 1$.

Com o propósito de se ter como realizar, a posteriori, uma comparação com o potencial V_p , calculado via método do somatório, conforme mostrado na tab. 2.1 do exemplo 2.1, se calcula V_p , aqui, para variações finitas e pequenas do número de reflexões. A tabela 3.1 representa a sensibilidade do potencial a estas variações.

Tabela 3.1 Potencial na origem do referencial pelo método integral para vários números de reflexões.: condutor horizontal

número de reflexões	potencial (volts)
1	60,570
2	68,624
3	72,477
4	74,544
5	75,727
6	76,431

3.2. Uma comparação dos métodos

A simplicidade do método do somatório é evidente. Contudo, para que as fontes pontuais de corrente possam representar fielmente o eletrodo, faz-se necessário que ele seja subdividido em trechos bem pequenos. Para sistemas de aterramento de grandes dimensões isso aumenta demasiadamente o tempo de processamento.

Uma comparação expressiva dos métodos só se torna possível com sistemas de aterramento de configuração e dimensões realistas. Contudo, podem-se dispor dos resultados dos exemplos 2.1 (em que se emprega o método do somatório) e 3.1 (método da integral), para se ter uma noção comparativa prévia. Para isso, toma-se um número de reflexões finito fixado em 10 e se supõe o resultado do método da integral como exato, confrontando-o, ao mesmo tempo, com os resultados obtidos pelo método do somatório, para diferentes valores do número de subdivisões. Avaliam-se, então, o tempo de processamento requerido, bem como o erro relativo percentual, face ao método da integral, expressando-os conforme está na tab. 3.2 .

Tabela 3.2 Influência do nº de subdivisões sobre o potencial na superfície do solo em função do tempo de execução e do erro relativo ao método integral.

MÉTODO	Número de subdivisões	Tempo de Execução (p.u.)	Potencial (volts)	Erro (%)
Integral	—	1	77,412	—
Somatório	6	3	77,497	0,11
Somatório	50	26	77,414	0,003
Somatório	200	103	77,412	0,0

Da maneira como está descrito na seção 3.1, o método da integral apresenta-se como inviável, tendo em vista o aspecto prático. Verifica-se que, para certas configurações de eletrodo, pode não existir uma equação que descreva, no espaço o eletrodo, como o faz a eq. (3.11). Ou ainda, a equação pode ser bastante complicada a ponto de se tornar impraticável uma integração analítica. Isto ocorre freqüentemente em malhas de aterramento de grandes dimensões, constituídas de condutores lineares. Nestes casos, a malha em si não apresenta continuidade, já que é composta por vários condutores lineares nas direções distintas, do eixo X e do eixo Y, impossibilitando, desta forma, se obter uma função unicamente integrável para o eletrodo. A falta, portanto, de um modelo matemático que represente, de uma forma genérica, para qualquer configuração de eletrodo, inclusive as mais complexas, o potencial por dispersão de corrente no solo, afasta por completo a possibilidade de implementação via computador, do método da integral.

3.3. O método do somatório modificado

Afim de completar a lacuna deixada pelo método da integral, em função de sua inviabilidade face ao cálculo do potencial no solo quando se usa eletrodos de grandes dimensões, comuns em sistemas de aterramento de subestações, opta-se por uma outra metodologia fundamentada, em parte, na concepção básica de segmentação do eletrodo, como é feito no método do somatório.

O método do somatório terá melhor desempenho se o modelo de eletrodo for modificado. Ao invés de aproximá-lo por esferas puntiformes situadas no centro dos segmentos finitos, empregam-se segmentos de reta com densidade de corrente constante, e que representam, em conjunto, o eletrodo como um todo. A diferença, face ao método da

integral é notada quando tomam-se segmentos infinitesimais do eletrodo. No limite, o potencial é calculado pela integral ao longo de todo o eletrodo. No método do somatório modificado, tomam-se os próprios condutores retilíneos que compõem o eletrodo e não mais pequenos segmentos de reta, finitos. O potencial em um ponto P de coordenadas (x,y,z) da primeira camada do solo, portanto, deve-se à contribuição de cada condutor retilíneo localizado no eixo U de um sistema de coordenadas UVW. A posição de cada condutor horizontal do eletrodo, seja na direção do eixo X ou na direção do eixo Y, é determinada, como mostra a fig. 3.1, segundo um certo ângulo que o condutor faz em relação ao eixo X do referencial genérico XYZ. A expressão do potencial deriva da eq. (3.6) do método da integral, a esta acrescentando-se o somatório devido à superposição dos efeitos de cada condutor retilíneo :

$$V_P = \sum_{j=1}^{n_C} \left[\int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_j(w) du + \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_j(w + 2z_0) du \right]. \quad (3.12)$$

onde, n_C é o número total de condutores retilíneos e $j = 1, 2, \dots, n_C$ representa cada condutor retilíneo. As demais variáveis da eq. (3.12) já estão definidas na seção 3.1.

3.3.1. Algoritmo do método

Tendo em vista o que foi desenvolvido até agora para o método do somatório modificado, em função dos aspectos que o diferem do método do somatório, bem como em relação às suas equações, conforme está demonstrado nas seções deste capítulo, surge o seguinte algoritmo para mapeamento do potencial na superfície do solo :

1. Ler os dados :

1.1. Gerais :

- área e quantidade de pontos de mapeamento
- corrente total dispersa no solo

1.2. do solo :

- resistividade da primeira camada
- resistividade da segunda camada
- profundidade do aterramento
- espessura da primeira camada
- número de reflexões

1.3. do eletrodo :

- número de condutores constituintes do eletrodo
- comprimento de cada condutor do eletrodo

- direção de localização de cada condutor do eletrodo -seja nas direções do eixo X ou do eixo Y.
- posição no solo, do centro de cada condutor, em função das suas coordenadas x_j , y_j e z_j

2. Definir os parâmetros :

- o fator de reflexão
- a(s) coordenada(s) z dos pontos em que o potencial é de interesse
- as coordenadas x,y e z inicial e final de cada condutor do eletrodo
- a coordenada u final de cada condutor do eletrodo
- comprimento total do eletrodo
- coordenadas u, v e w , no sistema alternativo UVW, de cada ponto em que o potencial é calculado.

3. Determinar :

- os potenciais na área de mapeamento de pontos situados na superfície do solo, logo acima do eletrodo, segundo a eq. (3.12), para levantamento :
 - da superfície de potencial
 - do perfil de potencial na direção longitudinal central
 - do perfil de potencial na direção transversal central ao eletrodo
 - do perfil de potencial em outras direções paralelas ao eixo Y

Capítulo IV

INFLUÊNCIA DOS CONDUTORES LINEARES NÃO-HORIZONTAIS

No que foi desenvolvido até agora, esteve intrínseco que o eletrodo era completamente contido na primeira camada do solo. Essa hipótese quase sempre se confirma para a malha de aterramento¹. No entanto, as hastes de aterramento usuais costumam ocupar ambas as camadas do solo, conforme é esquematizado na fig. 4.1.

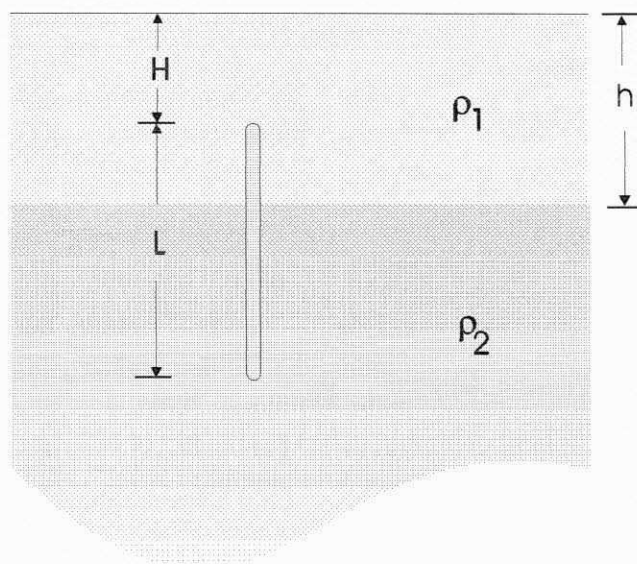


Figura 4.1 Haste em solo de duas camadas

¹ A profundidade usual de malhas de aterramento situa-se na faixa de 40 a 80 cm.

As equações (2.6) e (2.9) são válidas para o eletrodo puntiforme situado na primeira camada. HEPPE (1979) demonstra que o potencial num ponto P de coordenadas x, y, z da primeira camada, produzido por uma fonte puntual de corrente localizada num ponto Q da segunda camada, de coordenadas x_j, y_j, z_j é

$$V_P = \frac{\rho_1 I_j}{4\pi} (1+K) \sum_{n=0}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj+}} + \frac{1}{r_{nj-}} \right) \quad (4.1)$$

onde

$$r_{nj\pm} = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (2nh + z_j \pm z)^2} \quad (4.2)$$

Se P é um ponto da superfície do solo, $z = 0$, e

$$V_P = \frac{\rho_1 I_j}{2\pi} (1+K) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n}{r_{nj+}} \quad (4.3)$$

4.1 Método do Somatório

Para se aplicar o método do somatório ao eletrodo da fig. 4.1, ele é simulado por m_1 fontes puntuais de corrente na primeira camada, mais m_2 na segunda camada. Deste modo, a expressão do potencial num ponto P da superfície é

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi(m_1 + m_2)} \sum_{j=1}^{m_1} \left\{ \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj-}} + \frac{1}{r_{nj+}} \right) \right\} + \frac{\rho_1 I(1+K)}{2\pi(m_1 + m_2)} \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \left\{ \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{r_{nj+}} \right\} \quad (4.4)$$

A equação (4.4), que é uma mera combinação das eqs. (2.17) e (4.3), pode ser reescrita da seguinte forma :

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi(m_1 + m_2)} \left\{ \sum_{j=1}^{m_1} \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K^n}{r_{nj-}} + \frac{K^n}{r_{nj+}} \right) + (1+K) \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{1}{r_{0j+}} + (1+K) \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{r_{nj+}} \right\}$$

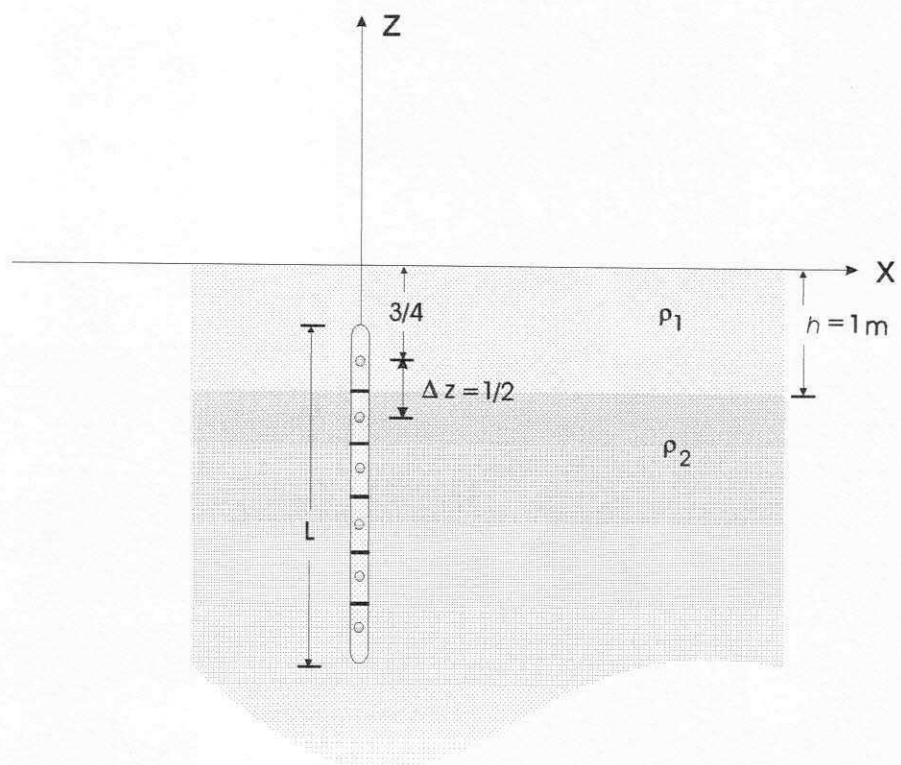
ou

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi(m_1 + m_2)} \left\{ \sum_{j=1}^{m_1} \frac{1}{r_{0j+}} + (1+K) \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\sum_{j=1}^{m_1} \left(\frac{1}{r_{nj-}} + \frac{1}{r_{nj+}} \right) + (1+K) \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{1}{r_{nj+}} \right] \right\} \quad (4.5)$$

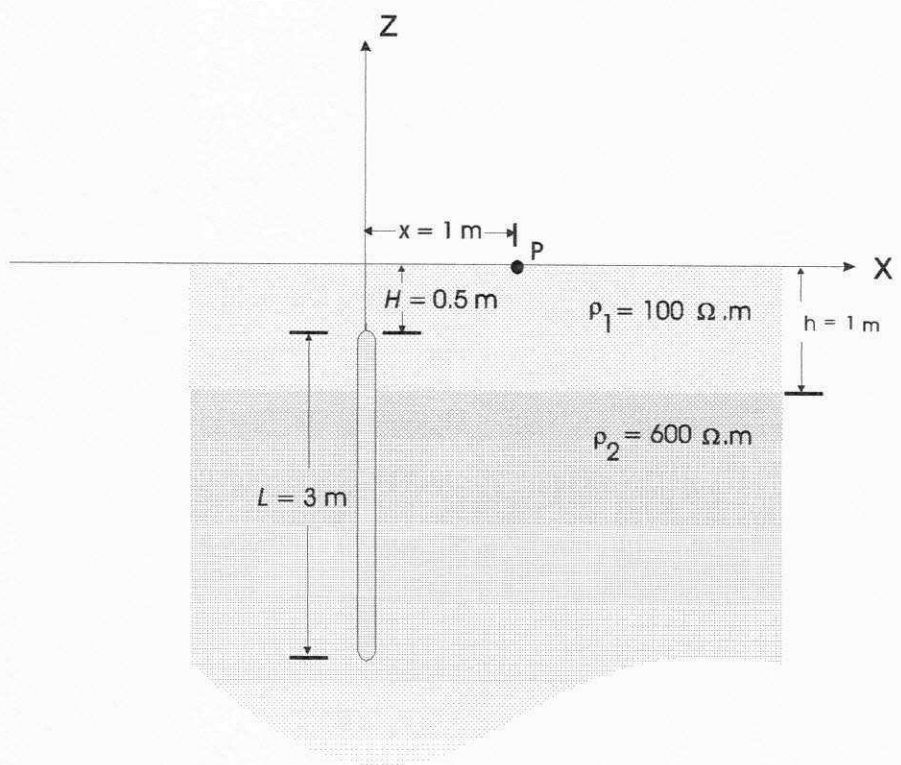
Exemplo 4.1

Uma haste vertical de 3 metros de comprimento e 50 cm de profundidade dispersa no solo uma corrente de 2 ampères. O solo é modelado em duas camadas. A primeira de resistividade de 100 $\Omega \cdot m$ e espessura de 1 metro. A segunda de 600 $\Omega \cdot m$. Calcular o potencial na superfície do solo num ponto, localizado a 1 metro da projeção da haste. Empregar o método do somatório.

O referencial é escolhido de modo que o eletrodo esteja no eixo Z e ponto de interesse no eixo X. O plano XY coincide com a superfície do solo, como é usual. Deste modo, o problema é bidimensional, ou seja, a dimensão y não precisa ser levada em conta e os pontos se definem por (x, z). A fig. 4.2 esquematiza o problema, o qual se resolverá mediante o emprego da eq. (4.5).



(a)



(b)

Figura 4.2 Exemplo 4.1. (a) O eletrodo não-horizantal e (b) seu modelo

Como $x = 1$, $x_j = 0$, $h = 1$ e $H = 0,5$; as equações (2.8) se reduzem a

$$r_{0j+} = \sqrt{1+z_j^2}$$

$$r_{nj+} = \sqrt{1+(2n \pm z_j)^2}$$

O eletrodo é arbitrariamente subdividido em 6 partes iguais. De acordo com a fig 4.2a, $m_1 = 1$ e $m_2 = 5$. Assim, a constante na eq. (4.5) é

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi(m_1 + m_2)} = \frac{100 \times 2}{2\pi \times 6} = 2,65 \text{ V.m} = \frac{50}{3\pi} \text{ V.m}$$

O fator de reflexão é :

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{600 - 100}{600 + 100} = 0,714$$

$$1 + K = 1,714$$

Tabela 4.1 Exemplo 4.1 : Cálculos intermediários

$j \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
z_j	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
r_{0j+}	1,25	1,60	2,02	2,46	2,93	3,40
r_{1j+}	1,71	3,40	3,88	4,37	4,85	5,34
r_{1j-}	1,60	1,25	1,03	1,03	1,25	1,60
r_{2j+}	4,85	5,34	5,84	6,33	6,82	7,32
r_{2j-}	3,40	2,93	2,46	2,01	1,60	1,25
r_{3j+}	6,82	7,32	7,81	8,31	8,81	9,30
r_{3j-}	5,34	4,85	4,37	3,88	3,40	2,93

$$V_P = \frac{50}{3\pi} \left\{ \frac{1}{r_{01+}} + 1,714 \times \sum_{j=2}^6 \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} (0,714)^n \left[\frac{1}{r_{n1-}} + \frac{1}{r_{n1+}} + 1,714 \times \sum_{j=2}^6 \frac{1}{r_{nj+}} \right] \right\}$$

Para a obtenção do valor de V_P anterior, foi tomado, propositadamente, números pequenos de subdivisão e reflexão. A tabela 4.2 fornece, em volts, uma amostra da sensibilidade do potencial a variações do número de subdivisões e reflexões.

Tabela 4.2 Solução do exemplo 4.1 para alguns valores de números de subdivisão e reflexão.

$m \rightarrow$	6	12	30
$n \downarrow$			
3	42,919	42,979	42,995
4	44,420	44,480	44,496
5	45,307	45,367	45,384
10	46,626	46,686	46,702
20	46,796	46,856	46,873

4.1.1. Algoritmo do método

Tendo em vista as equações que foram desenvolvidas até aqui, e com a finalidade de se criar uma rotina, implementável por computador, que torne possível calcular o potencial em pontos na superfície do solo devido à dispersão de corrente, quando se usa uma haste disposta verticalmente, com uma parte na primeira camada e outra parte na segunda camada, surge o seguinte algoritmo :

1. Ler os dados :

1.1. Gerais :

- quantidade de pontos de mapeamento do potencial na superfície do solo
- coordenadas x, y e z dos pontos de mapeamento do potencial na superfície do solo
- corrente total em ampéres
- profundidade do aterramento
- número de reflexões,

1.2. do solo :

- resistividade da primeira camada, ρ_1
- resistividade da segunda camada, ρ_2
- espessura da primeira camada, h

1.3. do eletrodo :

- comprimento do condutor não-horizontal
- posição no solo, em função das coordenadas x,y e z , do centro de cada condutor não-horizontal
- número de condutores não-horizontais
- número total de divisões do eletrodo
- coordenadas x,y e z do centro de cada condutor não-horizontal
- número de divisões da parte de cada condutor não-horizontal que se situa na primeira camada do solo
- número de divisões da parte de cada condutor não-horizontal que se situa na segunda camada do solo

2. Definir os parâmetros :

- fator de reflexão, K
- posição, em função das coordenadas x,y e z , de cada fonte puntual em que o(s) condutor(es) não-horizontal(is) é (são) dividido(s)
- todas as distâncias r até o ponto ou região de pontos em que o potencial é de interesse.

3. Determinar :

- os potenciais na área de mapeamento, definida no item 1.1, e na superfície do solo logo acima do eletrodo, empregando a eq. (4.5) para levantamento :
 - da superfície de potencial
 - do perfil de potencial na direção longitudinal central
 - do perfil de potencial na direção transversal central ao eletrodo

4.2 Método da integral

A exemplo do que foi feito na seção 3.1 para o condutor retilíneo horizontal, se desenvolverá, a seguir, com base em equações mostradas por HEPPE (1979), uma expressão do potencial produzido na superfície do solo por uma haste vertical, de eficiência maior que as equações (4.4) ou (4.5).

O referencial cartesiano é escolhido por conveniência, de modo que o eixo Z contenha a haste e o eixo X o ponto onde o potencial é de interesse (fig. 4.3). O plano XY coincide com a superfície do solo, como é usual. A generalidade se estabelecerá mais tarde por mera translação da origem.

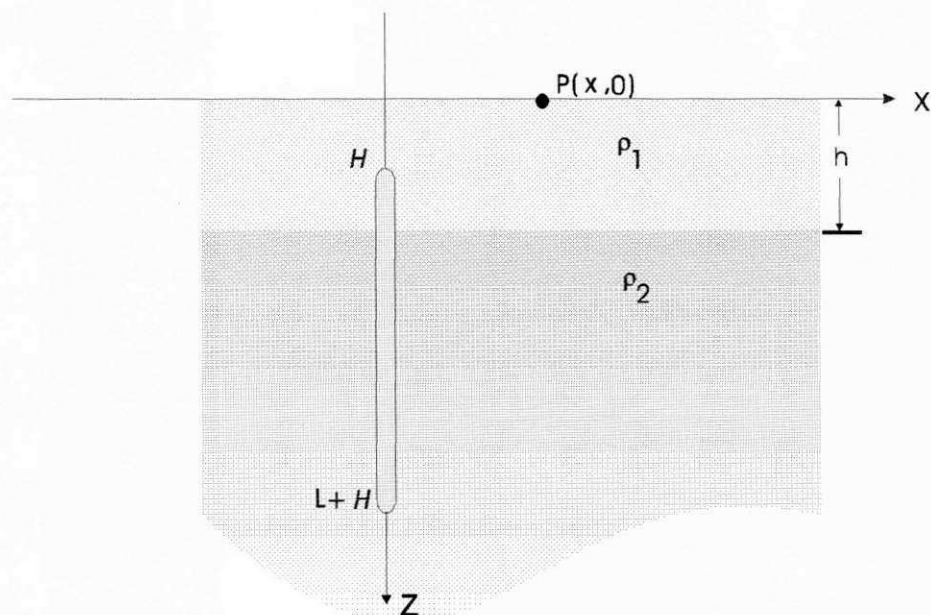


Figura 4.3 Haste vertical de comprimento L e profundidade H em solo de duas camadas.

A corrente dispersa no solo pela parte infinitesimal do eletrodo, contribui diferentemente para o potencial na superfície do solo, conforme a camada em que esta parte esteja imersa. Isto é,

$$dV_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj-}} + \frac{1}{r_{nj+}} \right) \right\} dZ_j, \text{ se } H \leq Z_j < h, \quad (4.6)$$

e

$$dV_P = \frac{\rho_1 I (1+K)}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{r_{nj+}} \right\} dZ_j, \text{ se } h \leq Z_j < L+H, \quad (4.7)$$

De modo que

$$V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} \left\{ \int_H^h \left[\frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{nj-}} + \frac{1}{r_{nj+}} \right) \right] dZ_j + \right. \\ \left. + (1+K) \int_h^{L+H} \left[\frac{1}{r_{0j+}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{r_{nj+}} \right] dZ_j \right\} \quad (4.8)$$

A equação (4.8) pode ser combinada com as equações (2.8) e reorganizada :

$$\frac{2\pi L}{\rho_1 I} V_P = \int_H^h \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_j^2}} dZ_j + (1+K) \int_h^{L+H} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_j^2}} dZ_j + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\int_H^h \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2nh + z_j)^2}} dZ_j + \int_H^h \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2nh - z_j)^2}} dZ_j \right] \\ + (1+K) \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[\int_h^{L+H} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2nh + z_j)^2}} dZ_j \right] \quad (4.9)$$

Para se efetuarem as integrações indicadas na eq. (4.9) se recorre à conhecida fórmula de integração :

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) \quad (4.10)$$

que se aplica diretamente às primeiras integrações na eq. (4.9) :

$$\int_H^h \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_j^2}} dZ_j = \ln \left(z_j + \sqrt{x^2 + z_j^2} \right) \Big|_{z_j=H}^{z_j=h}$$

ou seja,

$$\int \frac{h}{H\sqrt{x^2 + z_j^2}} dZ_j = \ln \left(\frac{h + \sqrt{x^2 + h^2}}{H + \sqrt{x^2 + H^2}} \right)$$

Para que a eq. (4.10) se aplique às demais integrações na eq. (4.9), se faz a seguinte transformação :

$$u = 2nh \pm z_j;$$

de onde,

$$du = \pm dZ_j$$

Logo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2nh \pm z_j)^2}} dZ_j = \pm \int \frac{1}{x^2 + u^2} du$$

ou

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2nh \pm z_j)^2}} dZ_j = \pm \ln \left[(2nh \pm z_j) + \sqrt{x^2 + (2nh \pm z_j)^2} \right]$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} \left\{ \ln \left[\frac{h + \sqrt{x^2 + h^2}}{H + \sqrt{x^2 + H^2}} + (1+K) \ln \left(\frac{L + H + \sqrt{x^2 + (L+H)^2}}{h + \sqrt{x^2 + h^2}} \right) \right] + \right. \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} K^n \cdot \ln \left[\frac{(2n+1)h + \sqrt{x^2 + [(2n+1)h]^2}}{2nh + H + \sqrt{x^2 + [2nh + H]^2}} \right] \\
- \sum_{n=1}^{\infty} K^n \cdot \ln \left[\frac{(2n-1)h + \sqrt{x^2 + [(2n-1)h]^2}}{2nh - H + \sqrt{x^2 + (2nh - H)^2}} \right] \\
\left. + (1+K) \sum_{n=1}^{\infty} K^n \ln \left[\frac{2nh + L + H + \sqrt{x^2 + (2nh + L + H)^2}}{(2n+1)h + \sqrt{x^2 + [(2n+1)h]^2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para condensar a eq. (4.11) se define a seguinte função :

$$f(x^2, a, b) = \ln \left(\frac{b + \sqrt{x^2 + b^2}}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} \right) \tag{4.12}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} \left\{ f(x^2, H, h) + (1+K) \cdot f(x^2, h, L+H) + \right. \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[f(x^2, 2nh + H, (2n+1)h) - f(x^2, 2nh - H, (2n-1)h) + \right. \\
\left. \left. + (1+K) f(x^2, (2n+1)h, 2nh + L + H) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

A equação (4.13) expressa o potencial, em um ponto da superfície do solo, produzido por dispersão de corrente em um solo de duas camadas (ρ_1, K, h) através de uma haste de comprimento L e profundidade H .

Reportando-se à fig. 4.3, pode-se perceber que x é o afastamento horizontal do ponto, a que se refere o potencial, em relação à haste. Sendo assim, é possível generalizar a equação (4.13) :

$$\begin{aligned}
 V_P = \frac{\rho_1 I}{2\pi L} & \left\{ f(r^2, H, h) + (1+K) \cdot f(r^2, h, L+H) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[f(r^2, 2nh+H, (2n+1)h) - f(r^2, 2nh-H, (2n-1)h) + \right. \\
 & \left. \left. + (1+K) f(r^2, (2n+1)h, 2nh+L+H) \right] \right\} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

onde

$$r^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 \quad (4.15)$$

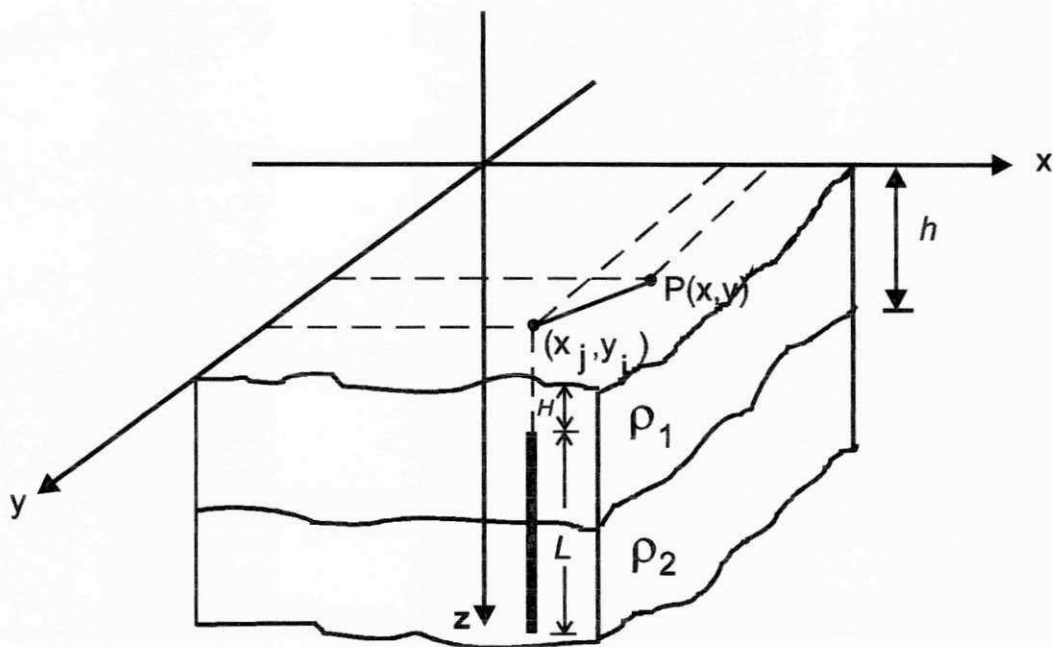


Figura 4.4 Exemplo 4.1: Haste vertical de comprimento L , profundidade H e posição (x_j, y_j) em solo de duas camadas.

Exemplo 4.2

Resolver o exemplo 4.1 pelo método da integral.

Observa-se pela fig. 4.4, e da mesma forma que no exemplo 4.1, que o ponto onde se quer calcular o potencial situa-se na superfície do solo, o eletrodo situa-se no eixo Z e o plano XY coincide com a superfície do solo, de forma que o ponto P de interesse

situa-se no eixo X. O ponto P na fig. 4.4, tem coordenadas $x = 1$ e $y = 0$. Como o eletrodo encontra-se enterrado na direção do eixo Z, e logo abaixo da origem do referencial de eixos (fig. 4.4), então suas coordenadas x_j e y_j na superfície do solo (fig. 4.4) têm respectivamente os valores 0 (zero) e 0 (zero). Observando-se a fig. 4.2, tem-se ainda, $h = 1$ m, $H = 0,5$ m e $L = 3$ m. Emprega-se a eq. (4.11), na qual, $x^2 = 1^2 = 1$, pois o ponto situa-se na superfície do solo.

A constante na eq. (4.11) é

$$\frac{\rho_1 I}{2\pi L} = \frac{100 \times 2}{2\pi \times 3} = 5,31 \text{ V.m} = \frac{100}{3\pi} \text{ V.m}$$

O fator de reflexão é :

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{600 - 100}{600 + 100} = 0,714$$

$$1 + K = 1,714$$

Pela equação (4.11), então, o potencial no ponto P é :

$$V_P = \frac{100}{3\pi} \left\{ \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1+1^2}}{0,5 + \sqrt{1+(0,5)^2}} + 1,714 \times \ln \left[\frac{3 + 0,5 + \sqrt{1 + [(2n+1) \times 1]^2}}{1 + \sqrt{1+1^2}} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{nref} (0,714)^n \times \ln \left[\frac{(2n+1) \times 1 + \sqrt{1 + [(2n+1) \times 1]^2}}{2n \times 1 + 0,5 + \sqrt{1 + (2n \times 1 + 0,5)^2}} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{nref} (0,714)^n \times \ln \left[\frac{(2n-1) \times 1 + \sqrt{1 + [(2n-1) \times 1]^2}}{2n \times 1 - 0,5 + \sqrt{1 + (2n \times 1 - 0,5)^2}} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + 1,714 \times \sum_{n=1}^{nref} (0,714)^n \times \ln \left[\frac{2n \times 1 + 3 + 0,5 + \sqrt{1 + (2n \times 1 + 3 + 0,5)^2}}{(2n+1) \times 1 + \sqrt{1 + [(2n+1) \times 1]^2}} \right] \right\}$$

Para a obtenção do valor do potencial V_P , conforme a equação anterior, foram tomados também números de reflexão $nref$ finitos e pequenos, afim de comparar com os valores de potencial obtidos e mostrados na tab. 4.2, em que se usou o método do somatório. Os resultados são mostrados na tab. 4.3.

Tabela 4.3. Solução do exemplo 4.2
(método da integral) para alguns números de reflexão.

número de reflexões	potencial (volts)
3	42,998
4	44,499
5	45,387
10	46,705
20	46,876

4.2.1. Algoritmo do método

De forma análoga ao que foi feito no método do somatório, desenvolve-se, neste momento, o algoritmo que se presta como base para a implementação, via rotina computacional, do método da integral de forma a tornar possível calcular o(s) potencial(is) em um ou mais pontos na superfície do solo :

1. Ler os dados :

1.1. Gerais :

- quantidade de pontos para mapeamento do potencial na superfície do solo
- coordenadas x , y e z dos pontos de mapeamento do potencial na superfície do solo
- corrente total dispersa no solo
- número de reflexões
- profundidade do aterramento

1.2. do solo :

- resistividade da primeira camada
- resistividade da segunda camada
- espessura da primeira camada

1.3. do eletrodo :

- comprimento de cada condutor do eletrodo

- direção de localização do(s) condutor(es) não-horizontais do eletrodo: eixo Z.
- coordenadas x , y e z no solo, do centro de cada condutor, em função das suas coordenadas x_j , y_j e z_j
- número de hastes (condutores não-horizontais) constituintes do eletrodo

2. Definir os parâmetros :

- o fator de reflexão
- a(s) coordenada(s) z dos pontos em que o potencial é de interesse
- comprimento total do eletrodo
- distâncias r até o ponto ou região de pontos em que o potencial é de interesse

3. Determinar :

- os potenciais na área de mapeamento de pontos situados na superfície do solo logo acima do eletrodo, segundo as eqs. (4.13) e (4.14) para levantamento :
 - da superfície de potencial
 - do perfil de potencial na direção longitudinal central ao eletrodo
 - do perfil de potencial na direção transversal central ao eletrodo

Capítulo V

SIMULAÇÕES DE ELETRODOS

Uma rotina de cálculo dos potenciais produzidos na superfície do solo, pela dispersão de corrente no mesmo, foi desenvolvida em linguagem FORTRAN 77 e implementada em microcomputador. A rotina é baseada no método do somatório modificado, ou seja, emprega o modelo de eletrodo densidade-de-corrente-constante. O modelo de solo adotado é o de duas camadas. Além do potencial, a rotina de cálculo inclui também o gradiente de potencial.

Eletrodos de aterramento constituídos de configurações variadas foram simulados, aplicando-se a rotina computacional implementada. Os resultados desses estudos se apresentarão a seguir, na forma de gráficos, e serão estes analisados.

5.1. Condutor retilíneo

Para a análise que se pretende fazer inicialmente, eletrodos de configurações simples são satisfatórios. Deste modo, considera-se que uma corrente se dispersa, no solo, por meio de um condutor retilíneo horizontal de comprimento finito. O referencial cartesiano é escolhido de modo que o centro e os extremos do condutor tenham, respectivamente, as coordenadas $(0, 0, -H)$, $(-L/2, 0, -H)$ e $(L/2, 0, H)$, onde H é a profundidade do condutor e L o seu comprimento. Tomando-se os dados da tab. 5.1, foram obtidos os resultados que se apresentam na fig. 5.1.

Tabela 5.1. Parâmetros de eletrodo e solo

parâmetro	valor
Comprimento do condutor	3 m
Profundidade do condutor	0,5 m
Corrente total de dispersão	2 A
Resistividade da 1ª camada	100 Ω .m
Resistividade da 2ª camada	600 Ω .m
Espessura da 1ª camada	1 m

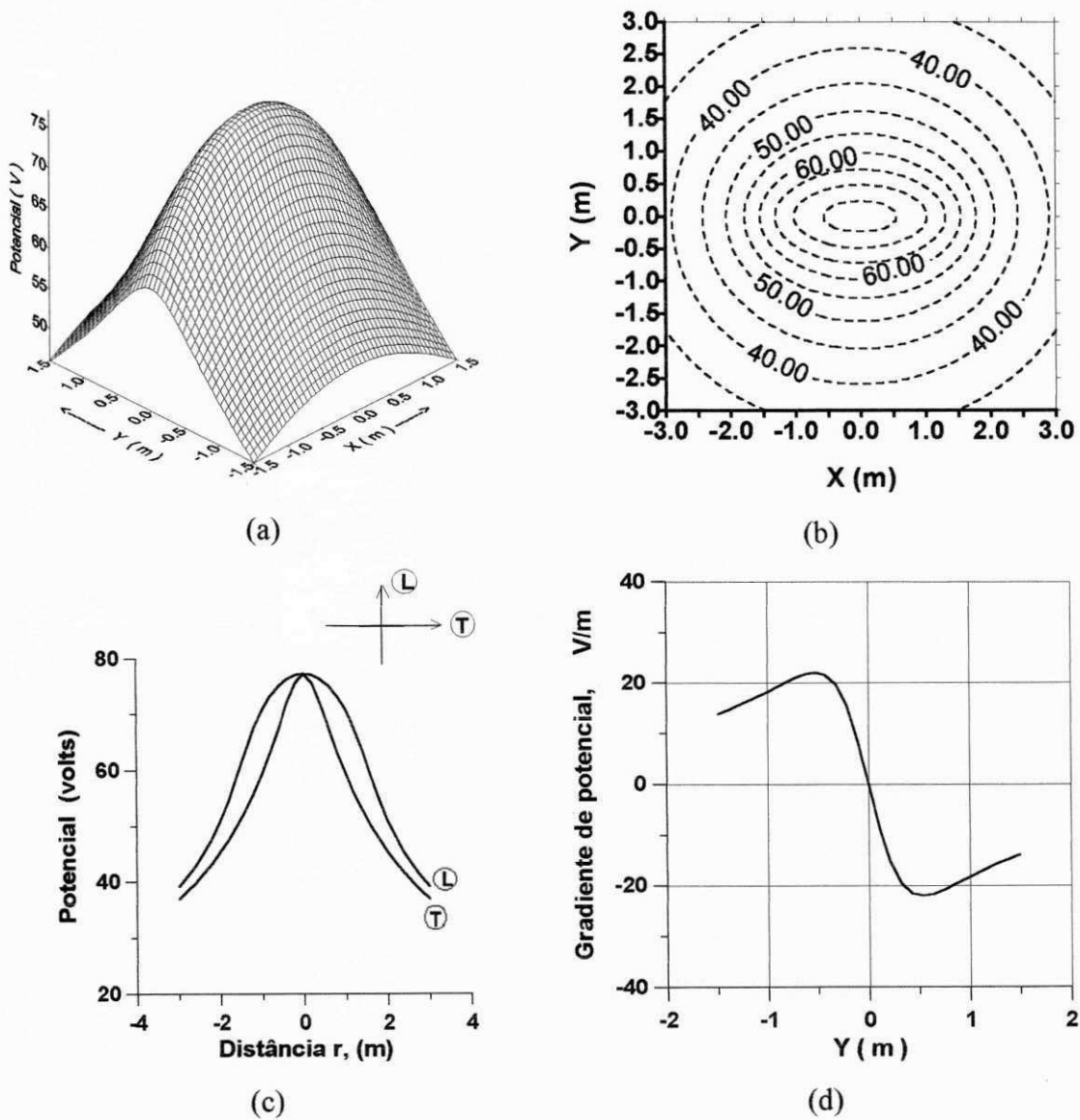


Figura 5.1 Potenciais na superfície do solo gerados por dispersão de corrente através de um condutor retilíneo horizontal. (a) A superfície de potencial; (b) Equipotenciais; (c) Perfis longitudinal e transversal centrais; (d) Gradiente de potencial na direção transversal central.

Como se pode ver, o potencial máximo ocorre exatamente acima do centro do condutor. Para os dados utilizados, esse valor é 77,4 V. O gradiente de potencial é maior na direção transversal do que na longitudinal. O gradiente máximo é 21,64 V/m.

5.2. Anel quadrado

Outra configuração simples é o anel quadrado de lado L . Um eletrodo assim foi também simulado, tomando-se os dados da tab. 5.1. Os resultados são apresentados nas figuras 5.2 e 5.3. O referencial foi escolhido de modo que o centro do anel tenha coordenadas $(0; 0; -H)$ e os vértices $(\pm \frac{L}{2}, \pm \frac{L}{2}, -H)$. O potencial máximo na superfície do solo (52,2 V) ocorre justamente nesses vértices.

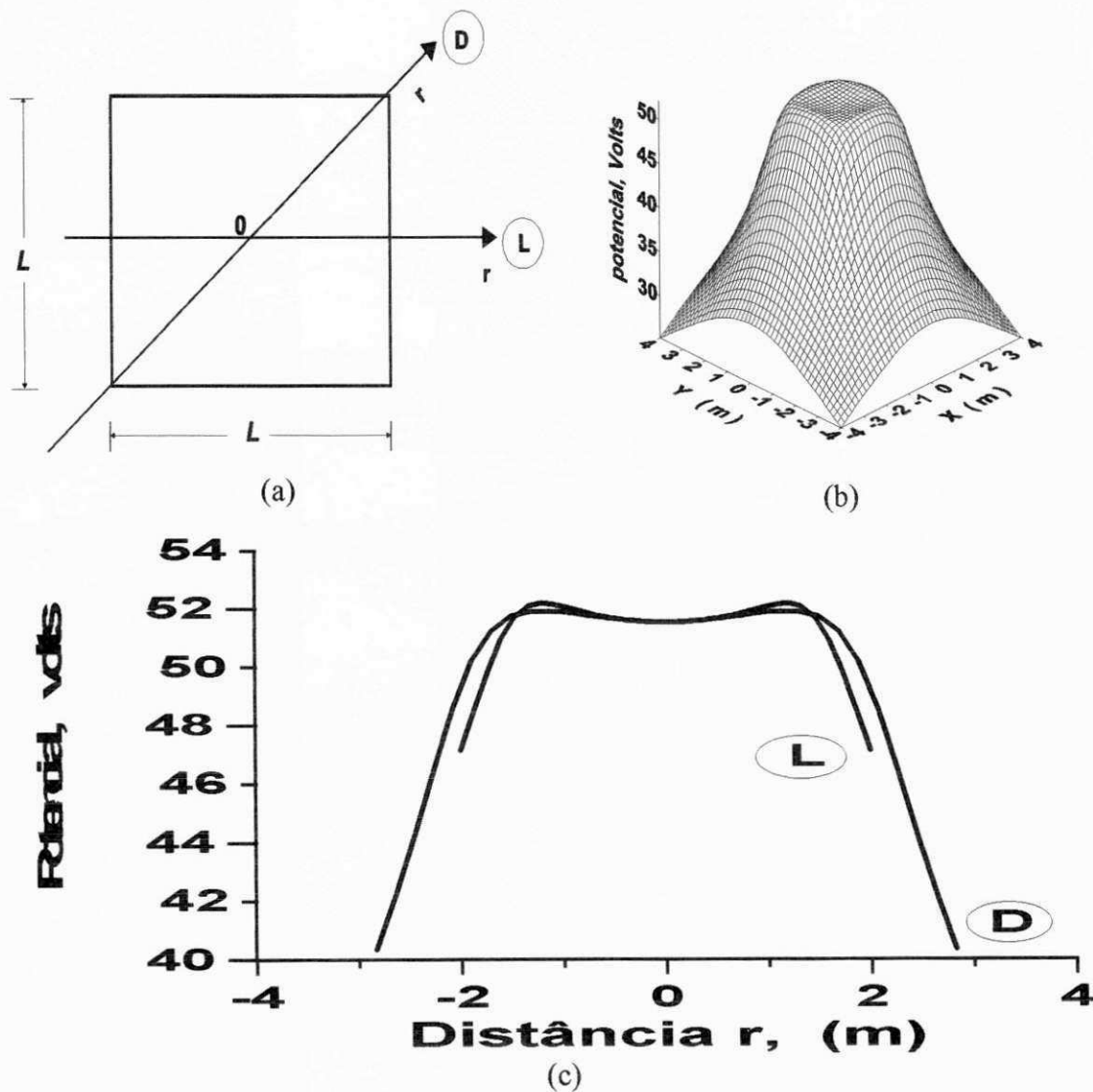
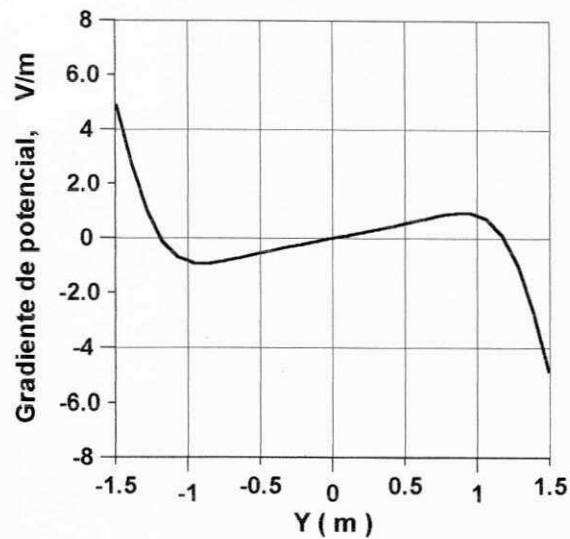
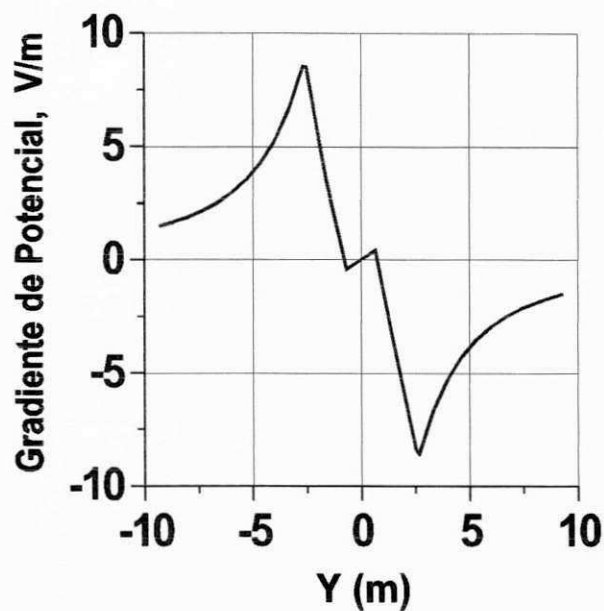


Figura 5.2. (a) Eletrodo quadrado; (b) Potencial na superfície do solo; (c) Potencial nas direções longitudinal e diagonal centrais.



(a)



(b)

Figura 5.3 Eletrodo da fig. 5.2a. Gradientes de potencial na superfície do solo: (a) na direção longitudinal central L e (b) nesta mesma direção extrapolando da região ocupada pelo eletrodo.

5.3. Malhas de aterramento

O sistema de aterramento de subestações é, invariavelmente, constituído de uma malha de condutores horizontais, interconectados por solda exotérmica ou por conectores pré-formados. Dependendo das tensões e capacidade nominal da subestação, sua malha de aterramento precisa ser muito extensa e suficientemente fechada para

garantir o funcionamento adequado do sistema de proteção, e sobretudo, a segurança das pessoas.

O projeto de uma malha de aterramento consiste, essencialmente, em se escolher, dentre as configurações que preencham todos os requisitos de segurança, aquela que é mais econômica. Isso não é uma tarefa fácil, principalmente devido à complexidade, que é própria do solo. O projetista de sistemas de aterramento precisa ser experiente e ter conhecimentos técnicos especializados. De qualquer modo, uma rotina computacional, como a que foi implementada como parte deste trabalho, pode ser muito útil ao projetista, uma vez que permite a simulação fácil e rápida das diferentes alternativas cogitadas.

A rotina computacional desenvolvida foi aplicada a malhas de aterramento, reportando-se a dois casos encontrados na literatura. Em ambos, os resultados encontrados coincidem com os originais, o que faz validar a rotina.

5.3.1. Malha simétrica e uniforme

Como uma primeira aplicação da rotina, implementada a sistemas de aterramento de configuração realista, Tomou-se a malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe (VILIAS et al, 1986). Se trata de uma malha quadrada $240 \times 240 \text{ m}^2$, formada por 50 condutores uniformemente espaçados conforme a fig. 5.4 e a tab. 5.2.

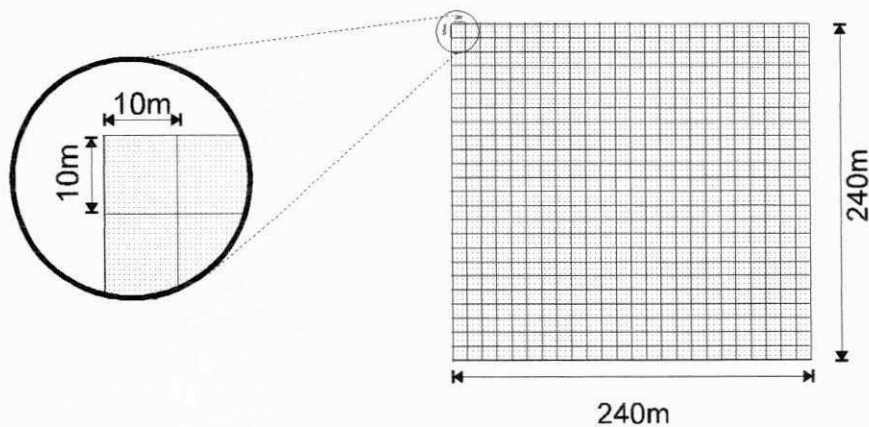


Figura 5.4. Malha da Subestação de Barra do Peixe.

Tabela 5.2. Dados relativos a malha da subestação de Barra do Peixe

Comprimento dos condutores	240.m
Diâmetro dos condutores	0,0126 m
Profundidade da malha	0,6 m
Corrente de dispersão	6000 A

Há dois modelos de solo de duas camadas: o modelo reduzido e o modelo ótimo, conforme explica CAVALCANTI (1991). O primeiro é o “equivalente” de duas camadas, de um modelo de três ou mais camadas. A redução do modelo é feita através da fórmula de Hummel, a qual considera que o campo elétrico em cada camada é uniforme e completamente horizontal. O modelo de várias camadas é obtido interpolando-se sua curva característica pelos pontos do plano resistividade versus profundidade correspondentes à média dos valores medidos válidos. Essa interpolação é geralmente feita por método gráfico.

O modelo ótimo é obtido ajustando-se a curva característica do modelo de duas camadas pelos pontos do plano $\rho \times h$ correspondentes à média dos valores medidos válidos. Esse ajuste é, de fato, um problema de otimização que pode ser resolvido por diferentes métodos. CAVALCANTI (1991) emprega o método dos mínimos quadrados. SILVA et al (1996) utiliza o método de Newton.

Os dois modelos de duas camadas do solo de Barra do Peixe são dados na tab. 5.3, conforme VILIAS et al (1986).

Tabela 5.3. Dados de solo da subestação de Barra do Peixe

modelo	reduzido	ótimo
resistividade da 1ª camada, $\Omega.m$	3.181	3400
resistividade da 2ª camada, $\Omega.m$	600	553,5
espessura da 1ª camada, m	3,2	3,5

Para efeito de levantamento do potencial na superfície do solo, foi tomada uma área de mapeamento de $300 \times 300 \text{ m}^2$ que se sobrepõe por completo à malha (fig. 5.5). O referencial foi escolhido de modo que o centro da malha tem coordenadas (130, 130, -0,6). O resultado da simulação é mostrado na fig. 5.6.

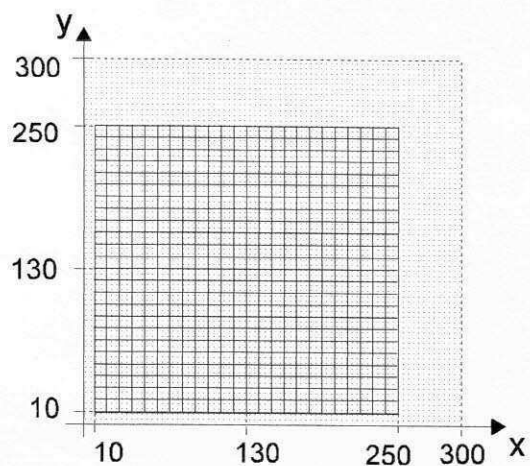
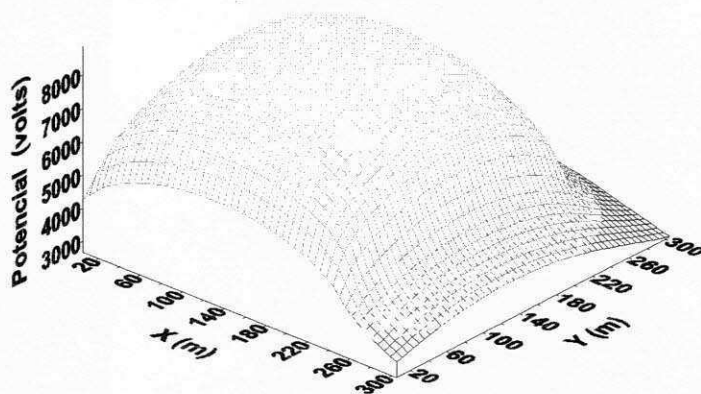
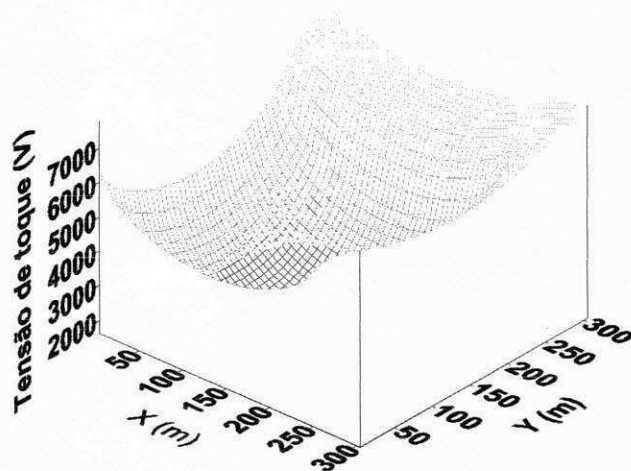


Figura 5.5. Referencial e área de mapeamento escolhidos para a malha da subestação de Barra do Peixe.



(a)



(b)

Figura 5.6. (a) Potencial na superfície do solo (modelo ótimo) da subestação de Barra do Peixe; (b) Tensão de toque.

Valores particulares resultantes da simulação são comparados com os obtidos, originalmente, por VILIAS et al (1986). Na tab. 5.4, onde isso é feito, esses valores são denominados respectivamente de *calculados* e de *referência*. Esta comparação serve como validação da rotina implementada, uma vez que os valores concordam razoavelmente. Em nenhum caso o erro atinge 5%.

Tabela 5.4. Valores calculados para a subestação de Barra do Peixe.

modelo	grandeza	valor	
		de referência*	calculado
reduzido	Resistência da malha, Ω	1,78	1,72
	Potencial de malha, V	4873	4945
	Elevação de potencial do aterramento, kV	10,56	10,33
ótimo	Resistência de malha, Ω	1,74	1,75
	Potencial de malha, V	5039	5108
	Elevação de potencial do aterramento, kV	10,44	10,48

(*) VILIAS et al (1986)

5.3.2. Malha assimétrica

Como uma segunda aplicação, uma simulação dos perfis de potencial na superfície do solo, produzidos por dispersão de corrente, foram realizados para uma malha, agora de forma assimétrica, como a da fig. 5.7 (DAWALIBI & MUKHEDKAR, 1975). Os dados relativos a essa malha são os da tab. 5.5. Com a rotina empregada neste trabalho, foram calculados os potenciais em três direções transversais à malha, as quais são mostradas na fig.5.7. Confirmando o que fora afirmado na seção 5.3, estes potenciais, de fato, mostraram-se concordantes com os originais conseguidos por DAWALIBI & MUKHEDKAR (1975), mais uma vez validando a rotina. A curva de superfície de potencial na superfície do solo, na região de pontos coberta pela malha, é mostrada na fig. 5.8. Nas figuras 5.9a e 5.9b são mostrados os perfis de potencial nas três direções especificadas.

Tabela 5.5. Dados relativos à malha da fig. 5.5

Resistividade ρ_1	200 Ω .m
Resistividade ρ_2	800 Ω .m
espessura h	4 m
Profundidade do aterramento	0,2 m
Corrente de dispersão	100 A

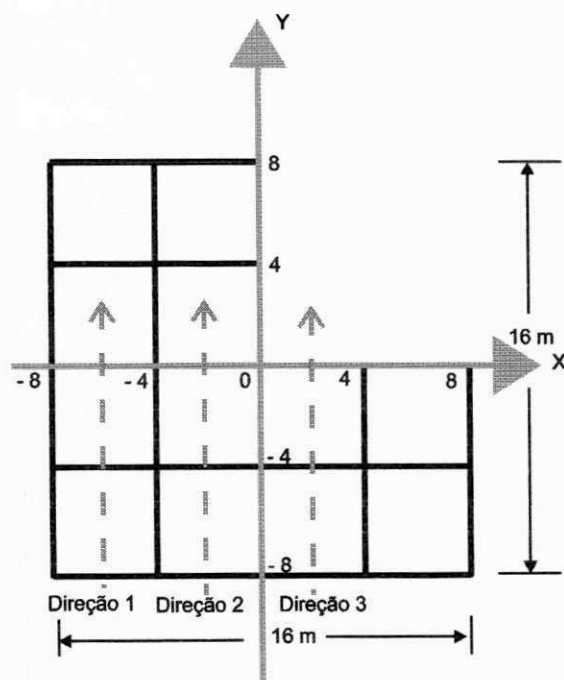


Figura 5.7. Malha assimétrica de dez condutores horizontais.

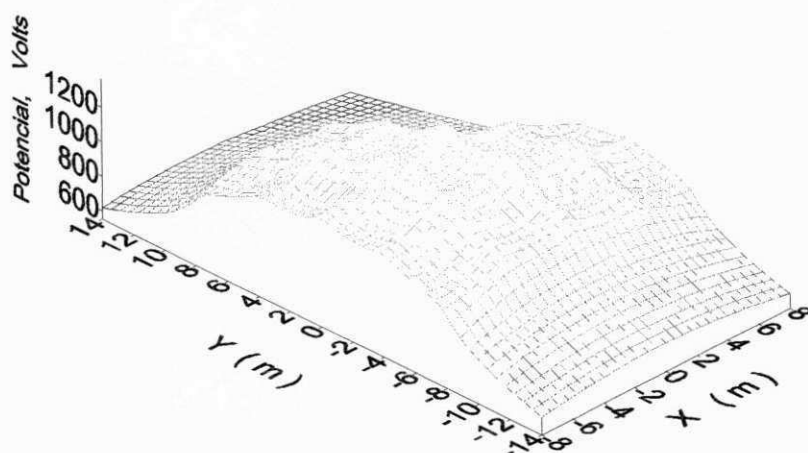
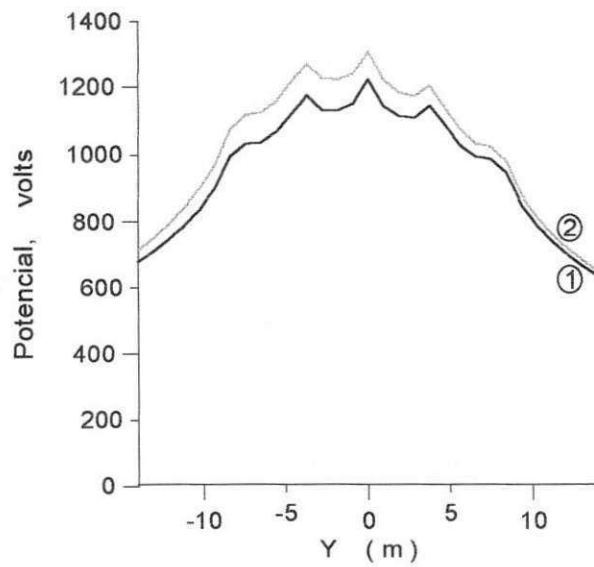
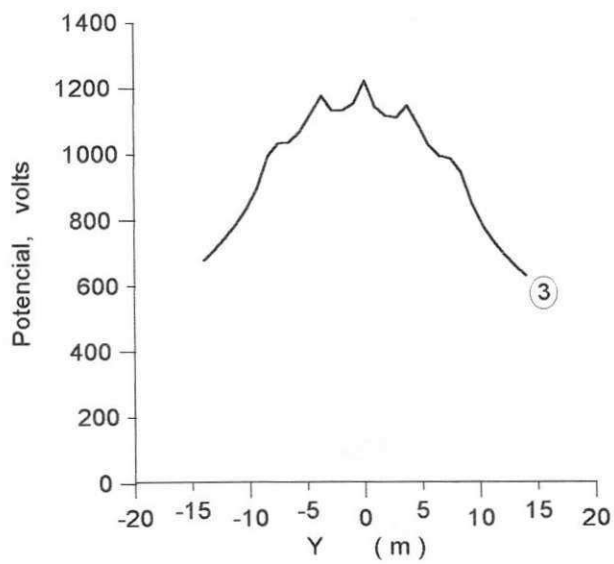


Figura 5.8. Malha assimétrica de dez condutores horizontais. Potencial na superfície do solo em curva de superfície.



(a)



(b)

Figura 5.9. Perfis de Potencial na superfície do solo da malha da fig. 5.7: (a) nas direções transversal 1 ($x = -6$ m) e 2 ($x = -2$ m); (b) na direção transversal 3 ($x = 2$ m).

5.4. Cálculo da elevação de potencial do aterramento

Como o modelo de eletrodo empregado neste trabalho é o densidade-de-corrente-constante, o potencial na superfície dos condutores não é constante em toda a sua extensão. A elevação de potencial do aterramento, PSA , é aproximada, na rotina implementada, pela média dos valores de potencial calculado em n_p pontos da superfície dos condutores da malha. Isto é,

$$PSA = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} V_i \quad (5.1)$$

onde V_i é o potencial no ponto de solo de coordenadas $(x_i, y_i, \frac{d}{2} - H)$, sendo d o diâmetro do condutor e H a profundidade da malha. Essa aproximação do PSA é sugerida por DAWALIBI & MUKHEDKAR (1975).

A aproximação da elevação de potencial do aterramento, do modo como é dado pela equação (5.1) é função de n_p . A série que ela representa é convergente para um valor finito (que a rigor é o PSA) quando $n_p \rightarrow \infty$. Isto é,

$$PSA = \lim_{n_p \rightarrow \infty} \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} V_i \quad (5.2)$$

O valor de n_p deve ser escolhido suficientemente grande, mas de forma a que não implique em tempo de processamento impraticável. Os valores do PSA que se apresentam na tab. 5.4 foram calculados tomando-se 250 pontos uniformemente distribuídos ($n_p = 250$).

Uma vez calculada a elevação de potencial do aterramento, determina-se a resistência do aterramento, R_T :

$$R_T = \frac{PSA}{I} \quad (5.3)$$

Onde I é a corrente total dispersa no solo através da malha.

5.5. Malhas com hastes verticais

Até agora, as configurações de eletrodo estudadas foram todas constituídas de elementos horizontais. Entretanto, é sabido que as configurações reais incluem sempre hastes verticais, as quais melhoram sobremaneira o desempenho dos sistemas de aterramento. Além do mais, as hastes têm custo de instalação muito baixo e seu uso é fundamental na melhoria da estabilidade mecânica da malha, após a sua construção, principalmente para a sua acomodação na fase de enchimento com terra, das valas onde são fixados os condutores horizontais.

Neste ponto, torna-se imprescindível realizar uma análise dos potenciais produzidos na superfície do solo, considerando-se eletrodos que incluam não só elementos horizontais, mas também hastes verticais. Como o conhecimento dos potenciais na superfície do solo, por si só, não é suficiente para a determinação das tensões de segurança¹, serão calculados também os gradientes de potencial.

A configuração de eletrodo apresentada na seção 5.1 (um condutor horizontal retilíneo enterrado no solo), cujos parâmetros são os da tab. 5.1, será empregada novamente. A simulação será realizada, agora, acrescentando-se três hastes de 3 m de comprimento, colocadas, respectivamente, nas extremidades do eletrodo e no seu centro. As hastes são enterradas de forma que uma parte delas ocupe a segunda camada. Os parâmetros do modelo de solo empregado são ainda os mesmos apresentados na tab. 5.1. A figura 5.10a apresenta, em perspectiva, a curva de superfície de potencial na superfície do solo. A fig. 5.10b representa cortes da superfície de potencial nas direções longitudinal e transversal centrais ao eletrodo. Na figura 5.10c são mostradas as curvas equipotenciais. Por último, tem-se a curva de gradiente de potencial na direção transversal central ao eletrodo (fig. 5.10d).

¹ As tensões de segurança correspondem às tensões de passo e de toque.

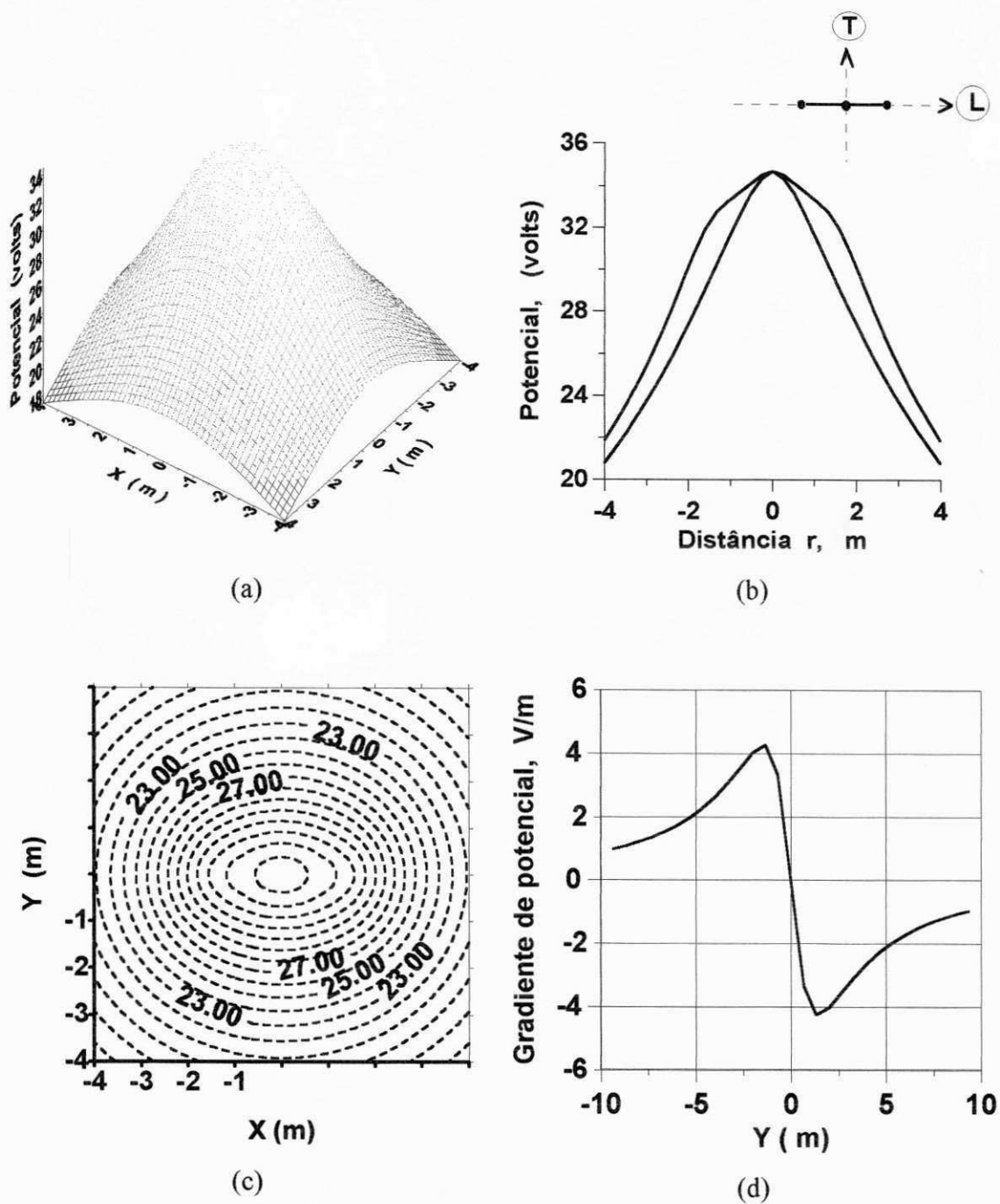


Figura 5.10. Condutor horizontal de 3 m com três hastes. Potenciais na superfície do solo: (a) em curva de superfície; (b) perfis nas direções L e T indicadas; (c) curvas de equipotenciais; (d) gradiente de potencial na direção T indicada.

O sistema de aterramento da fig. 5.10 pode ser entendido como uma extensão do sistema simples constituído apenas de um condutor horizontal (fig. 5.1). De fato, ao condutor horizontal de 3 m foram acrescentadas três hastes verticais também de 3 m. O resultado dessa extensão se vê nas figuras 5.10a e 5.10b. Como era de se esperar, a

simetria do perfil de potencial se manteve, uma vez que as hastes foram instaladas no centro e em ambos os extremos do condutor horizontal. O efeito das hastes é notável: o potencial máximo, que antes era de 77,4 V foi reduzido para 34,7 V, o que significa uma redução de 55%. As hastes não têm efeito positivo apenas sobre o potencial máximo. Como pode-se perceber ao se compararem as figuras 5.1 e 5.10, o perfil de potencial por completo é rebaixado. Em média, o potencial é reduzido 48,3 % na direção longitudinal e 49,8 % na direção transversal.


Outro efeito das hastes, muito favorável à segurança, é o fato de tornar o perfil de potencial muito mais plano. Isso repercute diretamente na tensão de passo, que, como é sabido, é crítica nos extremos do sistema de aterramento. É exatamente nos extremos do sistema de aterramento onde a ação das hastes é mais significativa.

A análise feita acima constata a eficácia do emprego de hastes verticais na melhoria do perfil de potencial na superfície do solo, no qual se dispersa corrente elétrica. A validade dessa análise pode ser questionada por conta de a mesma contemplar apenas os aspectos técnicos do problema. De fato, o sistema da fig. 5.10 é quatro vezes mais extenso que o da fig. 5.1. São 3 m de condutor do primeiro, contra 12 m do segundo. Logo, a relação de custo não é desprezível, embora fique evidente que os ganhos em segurança sejam muito mais expressivos que os custos adicionais.

Para reforçar a tese de que as hastes são eficientes, e não apenas eficazes, basta confrontar os resultados das figuras 5.2 e 5.10. Ambas as configurações, agora, totalizam 12 m.

As hastes são fincadas diretamente no solo batendo-se em suas cabeças com uma marreta. Para que se possam instalar os condutores horizontais, é necessário a abertura (e posterior fechamento) de valas. A diferença na mão-de-obra requerida pesa substancialmente no custo final.

Além de mais econômica, a configuração com hastes apresenta melhor resultado: potencial máximo de 34,7 V contra os 52,2 V da concorrente. Quando se comparam os gradientes de potencial, os resultados apresentados pela configuração com hastes também são melhores: o valor máximo do gradiente é 4,4 V/m (fig. 5.10d) contra 4,9 V/m que ocorre com a configuração alternativa (fig. 5.3a). Estas vantagens, aparentemente modestas, devem ser expressivas para configurações de dimensões realistas.



Comparando-se ainda as figuras 5.2c e 5.10b, pode-se constatar outro resultado *interessante*: As *hastes* tornam o perfil de potencial na superfície do solo, na direção transversal central, mais plano. Este resultado, conforme já visto, implica diretamente em uma melhor segurança, no que diz respeito às tensões de passo, principalmente nos extremos do eletrodo. O gradiente de potencial, por sua vez, se mantém controlado para distâncias maiores que o comprimento de qualquer dos condutores do eletrodo (fig. 5.10d). O mesmo não se pode afirmar do gradiente de potencial da configuração alternativa (figuras 5.3a e 5.3b).

Nas simulações feitas acima, cujos resultados serviram de base para a análise de eficiência de *hastes*, foi empregado um *solo negativo*². Neste tipo de solo, a eficiência da haste é menor, uma vez que a maior parte dela está num meio de maior resistividade, ao contrário dos condutores horizontais, os quais são completamente contidos num outro meio de menor resistividade.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizada uma revisão, razoavelmente vasta, de questões relativas a aterramento de sistemas elétricos. Modelos de eletrodo foram comparados qualitativamente. Também foram estudados modelos de solo mediante revisão bibliográfica.

O método das imagens e outros dele derivados (método do somatório e do somatório modificado) foram cuidadosamente estudados e suas convergências analisadas.

Uma rotina de cálculo do potencial e do gradiente de potencial, gerados por dispersão de corrente no solo, foi implementada em microcomputador, utilizando-se FORTRAN 77. A rotina baseou-se no método do somatório modificado. A densidade de corrente no eletrodo (ou conjunto de eletrodos) de aterramento foi considerada constante. O modelo de solo de duas camadas foi adotado, por ser o preferido em geral, e em particular, adequado para solos do Nordeste.

Simulações de configurações simples de eletrodos de aterramento foram realizadas. Dois casos reais foram estudados, com o auxílio da rotina computacional implementada. Os resultados obtidos concordaram com aqueles que haviam sido encontrados originalmente.

O efeito da influência de hastes no desempenho global do sistema de aterramento foi analisado. Não só aspectos técnicos, mas também econômicos, foram levados em conta nessa análise. Foi constatado que as hastes são eficientes na melhoria do desempenho do sistema, fazendo o potencial na superfície do solo e o gradiente de potencial assumirem valores mais reduzidos.

Algumas deficiências na rotina implementada foram constatadas. Primeiro, há dificuldades no cálculo da elevação de potencial do aterramento, uma vez que seu valor

aproximado só se estabiliza tomando-se muitos pontos, o que eleva muito o tempo de processamento. A elevação de potencial do aterramento é muito importante, uma vez que dela dependem a resistência de aterramento e a própria tensão de toque; portanto, qualquer dificuldade com seu cálculo é séria.

O trabalho que ora se conclui poderá ter dois desdobramentos no futuro: Primeiro, o modelo densidade-de-corrente-constante poderá ser substituído pelo modelo potencial-constante. Embora o esforço computacional com esse modelo deva ser muito maior, acredita-se que se possa obter resultados bem melhores.

Uma segunda sugestão para um trabalho futuro, seria, aplicar a rotina implementada para otimização da distribuição do potencial na superfície do solo de duas camadas, a exemplo do que fez MIGUEL (1981) com respeito a solos uniformes.

Por último, poderá ser objeto de pesquisa o erro que se comete, mesmo com o modelo potencial-constante, ao se considerar o eletrodo como sendo capilar. Ou seja, quando se substitui o eletrodo por uma linha de cargas em seu eixo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANSI, IEEE. ANSI/IEEE Standard 80, IEEE guide for safety in AC substation grounding. New York: ANSI/IEEE, 1986.
- CAVALCANTI, C. V. A. Uma rotina computacional para estratificação: desenvolvimento e aplicação a solos do Nordeste. Dissertação de mestrado. Campina Grande: UFPb. 1991.
- DAWALIBI, F. P., MUKHEDKAR, D. Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure, part I - analytical study. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-94, p. 252-257, mar./abr. 1975.
- ENDRENYI, J. Evaluation of resistivity Tests for design of Station Grounds in non-uniform soil. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems v. PAS-84, n. 12, pp. 966-970, dez. 1963.
- HEPPE, R. J. Step potentials and body currents near grounds in two-layers earth. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. v. PAS-98, p. 45-59, jan./fev. 1979.
- IEEE, IEEE brown book, IEEE standard 399-1980, power system analysis. New York: 1980.
- KRAUS, J. D., CARVER, K. R., Eletromagnetismo, 2^a. ed., Rio de Janeiro: Guanabara, 1986.
- KOSTIC, M. B., SHIRKOOHI, G. H., Numerical analysis of a class of foundation grounding systems surrounded by two-layers soil. IEEE Trans. on Power Delivery, v. 8, n. 3, p. 1080-1087, jul. 1993.

- MA, J., DAWALIBI, F.P. Analysis of Grounding systems in soils with hemispherical layering. IEEE Transactions on Power Delivery, v. 8, n. 4, p. 1773-1781, october 1993.
- MELIOPOULOS, A. P. S. Power system grounding and transients: an introduction. New York: Marcel Dekker. 1988. 450p.
- MIGUEL, P. M. Projeto de malha de terra em subestações - Otimização da distribuição de potencial na superfície do solo. Dissertação de mestado. Rio de Janeiro, RJ. COPPE - UFRJ. 1981
- SALAMA, M.M.A., El S., M.M., CHOW, Y. L. A formula for resistance of substation grounding grid in two layer soil. IEEE Transactions on Power Delivery, v. 10, n. 3, p. 1255-1262. Jul. 1995.
- SILVA, E.G.L., JUNIOR, M. F. M., OLIVEIRA, J.T. Estratificação do solo em duas camadas utilizando o método de Newton como técnica de otimização. Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática, vol. 2. São Paulo-SP. 2 a 6 de setembro de 1996.
- SATO, S., ZAENGL, W.S. Effective Grounding Mesh Calculation Technique, IEEE Trans. on Power Delivery v.3, n.1, pp. 744 - 747, 1988.
- SUNDE, E. D. Earth conduction effects in transmission systems. New York: Dover Publications. 1968.
- TAKAHASHI, T., KAWASE T. Analysis of apparent resistivity in a multi-layer earth structure. IEEE Trans. on Power Delivery. v. 5, n. 2, p. 604-610, 1990.
- VILIAS, J. E. T., MAIA, F. C., COSTA, V. S. Grupo VIII - Subestações, Equipamentos Elétricos e Materiais (GSE). Dimensionamentos de malhas de terra de S.E'S em solos não-homogêneos. Anais do VIII SNPTEE. São Paulo, 4 a 8 de maio de 1986
- VISACRO, F. S., PORTELA, C. M. Modelagem de aterramentos elétricos para fenômenos rápidos. Anais do XII SNPTEE. Recife, outubro de 1993.