

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

**AVALIAÇÃO DO POTENCIAL EM SOLO DE DUAS CAMADAS
BASEADA NO MODELO DO POTENCIAL CONSTANTE.**

Helton do Nascimento Alves

1136

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento parcial das exigências para obtenção do título de mestre.

Campina Grande - Março de 1998

Helton do Nascimento Alves

**AVALIAÇÃO DO POTENCIAL EM SOLO DE DUAS CAMADAS
BASEADA NO MODELO DO POTENCIAL CONSTANTE.**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento parcial das exigências para obtenção do título de mestre.

Área de concentração : Processamento da Energia

Orientador : Prof. Benemar Alencar de Souza, D. Sc., UFPB

Campina Grande - Março de 1998



A474a

Alves, Helton do Nascimento

Avaliacao do potencial em solo de duas camadas baseada no modelo do potencial constante / Helton do Nascimento Alves. - Campina Grande, 1998.
98 f.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) - Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Eletrodos de Aterramento - 2. Solo - 3. Dissertacao I. Souza, Benemar Alencar de, Dr. II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB)

CDU 621.316.99(043)

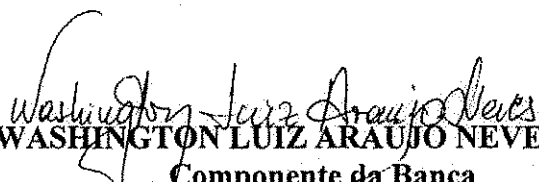
**MÉTODOS COMPUTACIONAIS DO POTENCIAL EM SOLOS DE DUAS CAMADAS
BASEADAS NO MODELO DO POTENCIAL CONSTANTE**

HELTON DO NASCIMENTO ALVES

Dissertação Aprovada em 14.05.1998


PROF. BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D.Sc., UFPB
Orientador


PROF^a. FRANCISCA APARECIDA DE CAMARGO PIRES, Dr., UNICAMP
Componente da Banca


PROF. WASHINGTON LUIZ ARAUJO NEVES, Ph.D., UFPB
Componente da Banca


DAGOBERTO LOURENÇO RIBEIRO, D.Sc., UFPB
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Maio - 1998

AGRADECIMENTOS

A DEUS que durante todos os dias da minha vida tem iluminado os meus caminhos;

A minha família que me apoiou desde o início da minha trajetória acadêmica, me valorizando e dando forças para alcançar as metas desejadas;

A minha noiva, pelo cuidado e amor demonstrado em todos os momentos;

Aos meus amigos e colegas que trilharam comigo os caminhos do saber;

Ao professor Benemar que me orientou neste projeto;

À Universidade Federal da Paraíba e ao CNPQ pelo apoio financeiro;

sou a todos eternamente grato.

SUMÁRIO

Agradecimentos	V
Lista de figuras	VIII
Lista de tabelas	X
Lista de símbolos	XI
Resumo	XIV
Abstract.....	XV
1. Introdução.....	16
1.1 Modelos de solo	17
1.2 Modelos de eletrodo	18
1.3 Organização do trabalho	20
2. Fundamentos Teóricos	21
2.1 Introdução	21
2.2 Modelo de solo de duas camadas	24
2.3 Métodos computacionais	26
2.3.1 Método do somatório	27
2.3.2 Método matricial	28
2.3.3 Método matricial modificado	29

3. O Método da Integral	32
3.1 Método da integral para eletrodos retilíneos horizontais	32
3.2 Método da integral para hastes (eletrodos não-horizontais)	37
3.3 Descrição do método	46
4. O Método da Integral com Parâmetros Concentrados	50
4.1 Descrição do método	60
5. Simulação de Malhas de Aterramento	63
5.1 Simulação da malha de aterramento da subestação de Barra do Peixe	64
5.2 Simulação de uma malha assimétrica	69
5.3 Simulação de uma malha com hastes	73
5.4 Simulação de uma malha com rotina obtida com outros modelos de eletrodo e solo	77
Conclusão.....	79
Referências Bibliográficas	82
Apêndice	86

LISTA DE FIGURAS

1.1 (a) Segmento de um eletrodo	19
2.1 Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse	22
2.2 Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade h e seu eletrodo-imagem	23
2.3 Dois meios com resistividades diferentes com um eletrodo puntiforme na primeira camada.	24
2.4 Método das imagens onde ocorre infinita reflexões	25
2.5 (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos ; (b) Modelo matemático do elemento	26
2.6 (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos ; (b) Representação da curva densidade de corrente por uma função-escada	30
3.1 Eletrodo linear no eixo u de um sistema de coordenadas UVW	33
3.2 Haste em solo de duas camadas	37
3.3 Interface entre dielétricos: (a) interface original representando meio 1 e 2; (b) aplicação do método das imagens no meio 1; (c) aplicação do método das imagens no meio 2; (d) aplicação do método das imagens no meio 1 - interface; (e) aplicação do método das imagens no meio 2 - interface	38
3.4 Haste num solo de duas camadas, com os eixos XYZ e $X'Y'Z'$ representados ..	42

4.1 segmento de eletrodos de comprimento $2L_1$ e $2L_2$	51
5.1. Malha da Subestação de Barra do Peixe	64
5.2. Referencial e área de mapeamento escolhidos para a malha da Subestação de Barra do Peixe	66
5.3. Potencial na superfície do solo (modelo ótimo) da subestação de barra do peixe : (a) Rotina método da integral ; (b) Rotina método da integral com parâmetros concentrados	68
5.4. Referencial e direções de mapeamento escolhidas para a malha assimétrica de 10 condutores	69
5.5. Potencial na superfície do solo da malha assimétrica (a) Rotina método da integral ; (b) Rotina método da integral com parâmetros concentrados	70
5.6. Potencial em três direções na superfície do solo (MI e MIPC) : (a) $x = -6.0$ m; (b) $x = -2.0$ m ; (c) $x = 2.0$ m	71
5.7. Potencial em três direções da superfície do solo (DAWALIBI & MUKHEDKAR) : (a) $x = -6.0$ m; (b) $x = -2.0$ m ; (c) $x = 2.0$ m	72
5.8. Configuração das malhas de aterramento : (a) malha com 8 condutores ; (b) malha com 6 condutores e 4 hastes	74
5.9. Potencial na superfície do solo : (a) direção 1 ; (b) direção 2 ; (c) direção 3	75
5.10. Potencial na superfície do solo : (a) malha com 8 condutores ; (b) malha com 6 condutores e 4 hastes	76
5.11. Potencial na superfície do solo da malha com 8 condutores. Modelo densidade de corrente constante e solo homogêneo	77
A.1. Segmento de um eletrodo representado por uma fonte linear de densidade de corrente constante	87
B.1 segmento de eletrodos de comprimento $2L_1$ e $2L_2$	89
C.1. Segmentos de eletrodos nas direções x e z respectivamente com o eletrodo na direção z contido na 1ª camada	92
D.1. Segmentos de eletrodos nas direções x e z respectivamente com o	

eletrodo na direção z contido na 2ª camada	94
E.1. Superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de eletrodo localizado em (x, y, z)	97

LISTA DE TABELAS

3.1. Posicionamento da fonte puntiforme e do ponto $P(x,y,z)$	37
4.1. Equações para os fatores de distribuição de potencial VDF	52
4.2. Equação para o fator de distribuição de potencial entre um segmento de eletrodo e um ponto na 1ª camada do solo (resistência transferida)	54
4.3. Equação para o fator de distribuição de potencial entre dois segmentos de eletrodo (resistência mútua)	55
4.4. Equação para o fator de distribuição de potencial próprio	59
5.1. Dados relativos a malha da subestação de Barra do Peixe	64
5.2. Dados do solo da subestação de Barra do Peixe	65
5.3. Valores calculados para a subestação de Barra do Peixe	67
5.4. Dados relativos a malha da figura 5.4	69
5.5. Dados relativos as malhas simuladas na seção 5.3	73

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ_1	Resistividade da primeira camada (ohms.m)
ρ_2	Resistividade da segunda camada (ohms.m)
σ	Condutividade do solo (siemens.m)
τ	Valor da tolerância usada na análise de convergência pelo método das imagens
γ	Ângulo entre o eixo u (que contém o eletrodo) de um referencial UVW e o eixo x do referencial genérico XYZ
ϵ	Permissividade do solo (F/m)
ω	Frequência angular (rad/s)
E	Campo elétrico na superfície do eletrodo de aterramento (N/C)
h	Espessura da 1ª camada do solo (m)
H	Profundidade de aterramento do eletrodo (m)
I	Corrente total injetada no eletrodo (m)
I_j	Corrente injetada no solo pela parte j do eletrodo
I_C	Componente capacitiva da corrente dissipada no solo por um segmento de eletrodo (A)
I_G	Componente de condução da corrente dissipada no solo por um segmento de eletrodo (A)
I_R	Componente resistivo da corrente que circula os segmentos adjacentes da malha de aterramento (A)

I_L	Componente indutivo da corrente que circula os segmentos adjacentes da malha de aterramento (A)
I_R	Componente resistivo da corrente que circula os segmentos adjacentes da malha de aterramento (A)
V	Potencial num ponto genérico do solo
V_P	Potencial num ponto P do solo produzido por uma fonte puntiforme
V_T	Potencial num ponto P do solo produzido pelo somatório de fontes puntiformes
∇	Operador diferencial vetorial del
J_0	Função de Bessel de ordem zero
J	Densidade de corrente na superfície do eletrodo (A/m)
j	Índice relativo ao segmento j de um eletrodo
K	Fator de reflexão : $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$
L_j	Comprimento do segmento j de um eletrodo retilíneo (m)
L	Comprimento total do eletrodo
m	Número de partes em que um eletrodo é dividido para efeito de cálculo
n	Número de reflexões do eletrodo puntiforme
n_c	Número de condutores retilíneos horizontais
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas de um ponto no solo
(x, ϕ, z)	Coordenadas cilíndricas de um ponto no solo
(x_j, y_j, z_j)	Coordenadas do segmento j do eletrodo
(x_0, y_0, z_0)	Coordenadas da extremidade inicial de um condutor retilíneo do eletrodo
(x_1, y_1, z_1)	Coordenadas da extremidade final de um condutor retilíneo do eletrodo
XYZ	Sistema de coordenadas genérico de eixos X, Y e Z

(u, v, w)	Coordenadas, relativas ao sistema referencial UVW, de um ponto no solo
u_f	Coordenada u da extremidade final do condutor retilíneo horizontal situado no eixo U de um sistema de coordenadas UVW
UVW	Sistema de coordenadas alternativo de eixos U, V e W
a	Raio do eletrodo
GPR	Elevação do potencial de terra
$[F]$	Matriz dos fatores de distribuição de potencial
$[1]$	Matriz-coluna de elementos unitários
$[I]$	Matriz das correntes dos segmentos do eletrodo

RESUMO

Modelos de eletrodos de aterramento e de solo são estudados e dois deles são implementados: o de potencial constante e o de solo de duas camadas. O primeiro considera a não-uniformidade da corrente nos eletrodos, e o segundo é adotado por sua relativa simplicidade e adequabilidade à grande maioria dos solos do nordeste brasileiro. Dois algoritmos de cálculo de potenciais na superfície do solo produzido por dispersão de corrente são implementados, podendo assim, assistir o projeto de malhas de aterramento de subestações compatíveis com as necessidades industriais. Simulações de malhas de aterramento são feitas com as rotinas desenvolvidas e os resultados obtidos coincidem com trabalhos anteriores.

ABSTRACT

Grounding electrodes and soil models are studied and two of them presented : the constant potential electrode model and the two-layer soil model.

The first consider the current in the soil to be non uniform, and the second has a relative simple and is appropriate to the majority of the Brazilian northeast soil.

Two routines are implemented. They may be used to assist on the design of substation grounding meshes compatible with industrial needs. Simulations of the grounding systems are performed and the results are in agreement with previous works.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas elétricos necessitam ser ligados à terra em pontos estratégicos, para efeito de dissipação de energia durante desequilíbrios. Essas ligações se fazem através de eletrodos ou conjunto de eletrodos enterrados, em contato direto com o solo, que é denominado de sistema de aterramento, ou simplesmente de aterramento.

O conhecimento do comportamento do sistema de aterramento é um problema difícil pois o solo é um meio muito complexo, com propriedades que mudam com o tempo e no espaço. Outro fator de dificuldade é que o desempenho do aterramento depende das próprias condições impostas pelos fenômenos que solicitam sua intervenção.

O aterramento de um sistema elétrico é considerado adequado quando atinge, cumulativamente, os seguintes objetivos:

- a) Viabiliza adequado escoamento de sobrecorrentes indesejáveis, limitando as tensões transferidas ao longo da rede, em consequência da descarga de surtos;
- b) Garante a segurança dos usuários do sistema através da limitação das diferenças de potencial entre o condutor neutro e a terra, resultantes das correntes de desequilíbrio.

- c) Garante a efetividade do aterramento do sistema , limitando em valores adequados os deslocamentos do neutro, por ocasião da ocorrência de defeitos à terra;
- d) Assegura a operação rápida e efetiva dos dispositivos de proteção de sobrecorrente, na ocorrência de faltas à terra, limitando a valores não perigosos as tensões de passo resultantes da passagem das correntes de curto-circuito.

Diante de tais objetivos, fundamentais ao bom funcionamento dos sistemas elétricos, surge a necessidade de analisar com bastante critério o projeto de sistemas de aterramento.

A solução deste problema está relacionada com a disponibilidade de modelos apropriados, capazes de representar os aspectos fundamentais dos fenômenos que ocorrem no sistema de aterramento.

1.1 Modelos de solo

Os solos reais compostos de diversos elementos heterogêneos são classificados de duas formas : regulares, que tem a sua resistividade variando só verticalmente, e irregulares que possuem resistividade variando vertical e horizontalmente. Os solos regulares são a maioria e por isso serão aqui tratados.

O mais simples dos modelos de solo regular é o uniforme, que supõe o solo homogêneo e isotrópico¹. Embora um modelo distante da realidade, sua aplicabilidade é grande (CAVALCANTI, 1996) devido a facilidade que oferece na formulação

¹ Um solo homogêneo e isotrópico apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções, portanto tem resistividade constante em toda sua extensão.

matemática dos problemas. Tentando uma melhor aproximação com a realidade, se utiliza o conceito de resistividade aparente (ENDRENY, 1963; TAKAHASHI & KAWASE, 1990).

Os modelos mais sofisticados de solos regulares aproximam a resistividade por uma função contínua (exponencial) da profundidade (SUNDE, 1968). Entretanto, os modelos mais usuais, consideram que o solo é constituído de um certo número de camadas horizontais homogêneas, isto é, com resistividades constantes, de espessuras finitas, exceto a mais profunda, que é infinita. O modelo de solo de duas camadas, que é o preferido universalmente (DAWALIBI & MUKHEDKAR, 1975; KOSTIC & SHIRKOOHI, 1993), será empregado neste trabalho, visto que as equações encontradas não são tão complexas e mesmo assim proporciona bons resultados (SATO & ZAENGL, 1988; SALAMA *et al.*, 1995). CAVALCANTI (1991) estudando o solo do Nordeste concluiu que 75% dele pode ser modelado em duas camadas. Novos métodos computacionais estão sendo estudados para estimação dos parâmetros dos solos de duas camadas, como exemplo pode-se citar SEEDHER & ARORA (1992) que utilizou expressões de resistividades finitas de WENNER.

1.2 Modelos de eletrodo

A forma pela qual a corrente se dispersa do eletrodo para o solo é uma consideração física fundamental para se compreender o comportamento do sistema de aterramento. A figura (1.1) representa um segmento de eletrodo, onde três correntes são indicadas. A corrente dissipada no solo pelo segmento considerado é $I_g + jI_c$. As outras são correntes que passam pelos segmentos adjacentes ao considerado. O campo elétrico no solo determina as correntes de condução (I_g) e capacitiva (I_c) que compõem a

corrente total que se dispersa no solo. A relação entre tais correntes não dependem da geometria do eletrodo, mas sim exclusivamente da relação $\sigma/\omega\varepsilon$, sendo σ e ε respectivamente a condutividade e a permissividade do solo e ω a frequência angular.

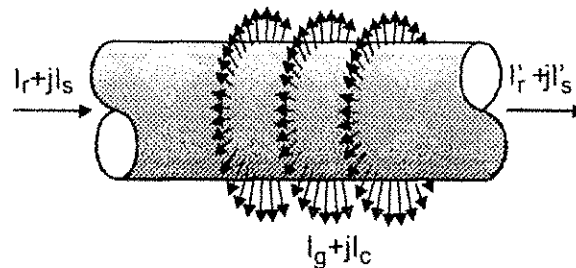


Figura 1.1 Segmento de um eletrodo.

Os métodos mais usuais de cálculo de potencial devido à dispersão de corrente no solo consideram constantes a densidade de corrente (J), na superfície dos condutores que constituem o sistema de aterramento. Se por um lado a adoção desta hipótese simplifica consideravelmente o modelo, por outro torna-o bastante impreciso por não levar em conta a variação do campo elétrico (E) ao longo de toda superfície do eletrodo². A hipótese da densidade de corrente constante é sustentada na prática pela simplificação que empresta aos cálculos de potencial (SOUZA, 1996). Os métodos que a empregam corrigem *ad posteriori*, os valores calculados, por meio de fórmulas empíricas (IEEE-80, 1986).

Segundo SVERAK (1989), “a densidade de corrente elétrica não pode ser igual para diferentes pontos da superfície do eletrodo” e ainda segundo DAWALIBI & SOUTHEY (1994) e DAWALIBI & MUKHEDKAR (1979), “a distribuição de corrente elétrica é mais ou menos uniforme ao longo dos eletrodos, exceto nos finais ou em cruzamentos”. Em vista disto desenvolveu-se outros métodos para melhor

representar o eletrodo. Neste trabalho será visto o método do potencial constante, onde não mais se considera a densidade de corrente constante, mas impõe-se que a superfície do eletrodo estará submetida a um mesmo potencial. Esta condição é razoável visto que o eletrodo possui uma elevada condutividade, podendo as perdas internas serem desprezadas. Desta forma a distribuição de corrente no eletrodo torna-se não uniforme.

1.3 Organização do trabalho

Uma fundamentação teórica foi inicialmente realizada, objetivando encontrar expressões do potencial em função do modelo de eletrodo do potencial, do solo de duas camadas e do método matricial modificado. Utilizando este método foram construídas duas rotinas computacionais para obtenção do potencial em um ponto qualquer de um solo de duas camadas produzido por um sistema de aterramento. Os resultados obtidos em cada rotina foram comparados entre si e também com publicações anteriores e serviram para validação do trabalho.

² Segundo a lei de Ohm, o campo elétrico na superfície do eletrodo é $E=\rho J$, onde ρ é a resistividade, suposta constante, do meio envolvente do eletrodo. Logo, a densidade de corrente, J , constante implica em campo elétrico constante.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Quando um sistema de aterramento entra em atividade, o seu potencial se torna diferente de zero. Este valor não-nulo de potencial se denomina de potencial do sistema de aterramento. Neste processo também surge uma corrente na superfície dos elementos do sistema que se dispersa na terra. Considerando os valores comuns de resistividade do solo (50 a 1000 Ωm) e as dimensões do sistemas de aterramento típicos (de poucos metros a 200 m), MELIOPOULOS (1988) demonstra que a análise c.c. é suficiente na maioria dos estudos práticos de sistemas de aterramento. Neste trabalho a análise c.c. será aplicada a sistemas de aterramento.

2.1 Introdução

A figura 2.1 mostra um eletrodo puntiforme imerso em solo uniforme (caso mais simples). Uma esfera nestas proporções não possui aplicação prática direta, mas serve como base na simulação de qualquer eletrodo real, ao utilizar-se processos de somatório ou integral. A esfera, localizada no ponto j do solo é uma fonte puntiforme de corrente de onde emana para a terra uma corrente I_j . Desta forma surge um potencial V num ponto genérico do solo. Este potencial V satisfaz a equação de Laplace : $\nabla^2 V = 0$. Pode-se expressar esta equação em coordenadas cilíndricas da seguinte forma :

$$\nabla^2 V(r, \Phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, \Phi, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \Phi, z)}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 V(r, \Phi, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

onde r , ϕ e z são as coordenadas do ponto P . Por causa da simetria, o potencial é independente da coordenada ϕ , isto é, $V(r, \phi, z) = V(r, z)$. Logo a equação (2.1) se reduz a:

$$\nabla^2 V(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

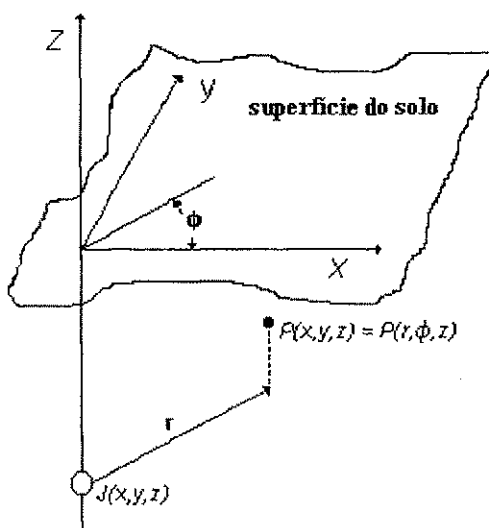


Figura 2.1 Eletrodo puntiforme em solo uniforme e um ponto em que o potencial é de interesse.

A solução geral desta equação é dada em termos de função de Bessel de ordem zero, J_0 (KRAUS & CARVER, 1986):

$$V(r, z) = \frac{\rho I_e}{4\pi} \int_0^\infty \theta(k) J_0(kr) e^{-kz} dk \quad (2.3)$$

$\theta(k)$ é uma função arbitrária da variável de integração k , determinada pelas condições de contorno. Estas condições estabelecem na interface dos dois meios, solo e ar, o potencial e a corrente devam ser funções contínuas. A expressão final do potencial em um ponto genérico do solo de coordenadas cartesianas x , y e z é:

$$V(x, y, z) = \frac{\rho I_j}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z+z_j)^2}} \right) \quad (2.4)$$

A equação (2.4) sugere que o potencial em qualquer ponto do solo, nas circunstâncias descritas na figura (2.1), é o mesmo que o produzido por duas fontes pontuais de corrente I_j localizadas nos pontos (x_j, y_j, z_j) e $(x_j, y_j, -z_j)$ em uma região infinita de resistividade ρ . Em outras palavras, a interface entre os meios solo e ar, tem o efeito de criar uma imagem da fonte puntiforme com relação ao plano da interface. Desta interpretação, que é ilustrada na figura (2.2), surge uma alternativa para solução do problema de cálculo de potencial produzido por dispersão de corrente no solo: o *método das imagens*. Este método surge como uma alternativa para resolver a equação de Laplace. Novos trabalhos (CHOW *et al.*, 1995) mostram um método de imagem equivalente, avançando na discussão desta ferramenta de cálculo.

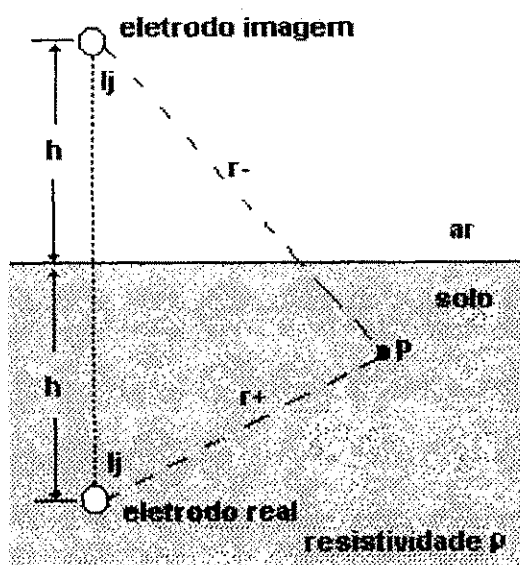


Figura 2.2 Eletrodo puntiforme em solo homogêneo a profundidade h e seu eletrodo-imagem.

2.2 Modelo de solo de duas camadas

Se for considerado ao invés do ar, cuja resistividade considera-se infinita, outro meio de resistividade finita, conforme a figura (2.3), a equação (2.4) passaria a ser :

$$V(x, y, z) = \frac{\rho_1 I_j}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}} + k \frac{1}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z+z_j)^2}} \right) \quad (2.5a)$$

$$\text{onde } k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (2.5b)$$

A constante k é o fator de reflexão entre os meios 1 e 2 de resistividade ρ_1 e ρ_2 respectivamente, sendo o meio 1 aquele que contém o eletrodo.

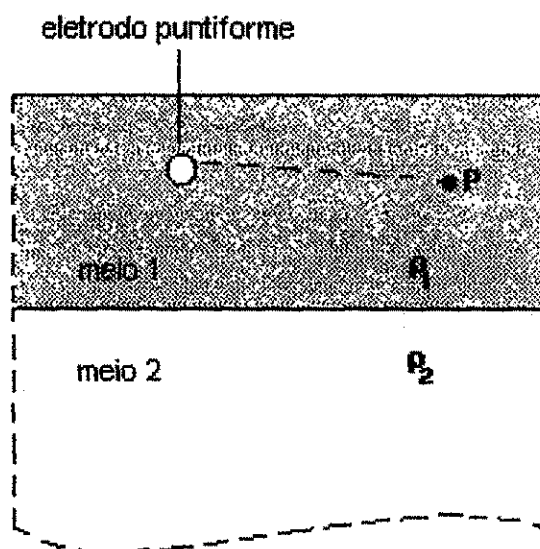


Figura 2.3 Dois meios com resistividades diferentes com um eletrodo puntiforme na 1ª camada.

Quando os meios são apenas dois, ocorre uma só reflexão e por conseguinte, o eletrodo imagem é único. Para um eletrodo imerso na primeira camada de um solo de duas camadas o número de reflexões é infinito, conforme é mostrado na figura (2.4).

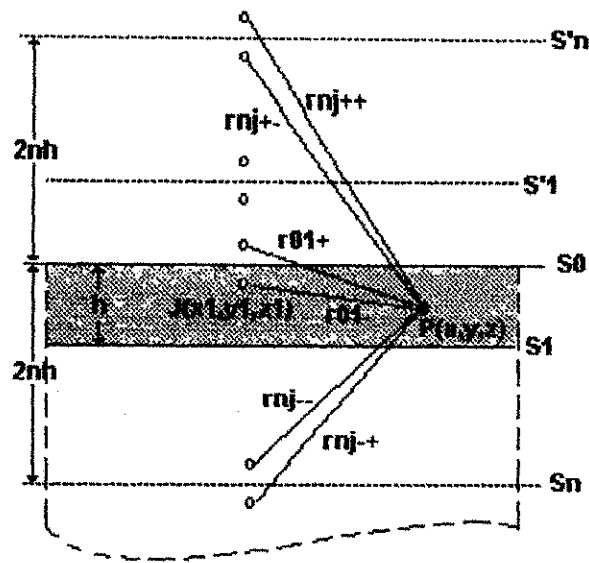


Figura 2.4 Método das imagens onde ocorre infinita reflexões.

O potencial no ponto $P(x, y, z)$, localizado na primeira camada do solo, produzido por um eletrodo puntiforme, se expressa da seguinte forma :

$$V_p = \frac{\rho_l I_j}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{0j}^-} + \frac{1}{r_{0j}^+} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (2.6a)$$

onde

$$r_{0j}^{\pm} = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j \pm z)^2} \quad (2.6b)$$

$$r_{nj\pm}^+ = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + [2nh + (z_j \pm z)]^2} \quad (2.6c)$$

$$r_{nj\pm}^- = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + [2nh - (z_j \pm z)]^2} \quad (2.6d)$$

n é o número de reflexões ;

h é a altura da primeira camada.

2.3 Métodos computacionais

As equações (2.6) só são válidas para eletrodos puntiformes. Para aplicação em eletrodos extensos, como os encontrados em malhas de aterramentos, é necessário recorrer-se a um artifício. A idéia básica é dividir o sistema de aterramento em pequenos segmentos e substituí-los hipoteticamente por fontes puntiformes de correntes localizadas em seus respectivos centros como se vê na figura (2.5). Uma parte de um sistema de aterramento genérico é mostrado na figura 2.5a e o modelo do segmento j é mostrado na figura 2.5b. Se o eletrodo genérico é dividido em m segmentos, então o potencial num ponto qualquer da 1ª camada do solo é aproximadamente :

$$V_T = \frac{\rho_1}{4\pi} \sum_{j=1}^m I_j \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (2.7)$$

onde m é o número de segmentos e as funções r_{0j}^{\pm} , $r_{nj\pm}^+$, $r_{nj\pm}^-$ são dadas respectivamente pelas equações (2.6b), (2.6c) e (2.6d).

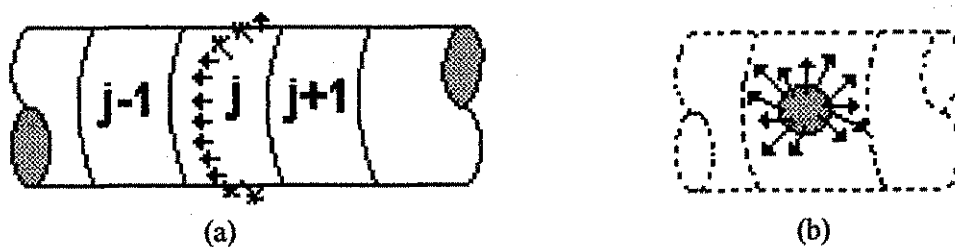


Figura 2.5 (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos ;
(b) Modelo matemático do elemento.

Quanto menores forem esses segmentos, melhor é a aproximação. SOUZA (1996) mostra que para todos os valores possíveis de parâmetros do modelo de solo, a série infinita na equação (2.7) converge assintoticamente. Nas rotinas computacionais

desenvolvidas com base no método das imagens, o número de reflexões consideradas é auto-ajustado a partir de uma tolerância, τ , especificada pelo usuário.

Para que a equação (2.7) possa ser efetivamente utilizada é preciso informação a respeito da distribuição de corrente no sistema de aterramento antes de dispersar para o solo. É necessário escolher o modelo de eletrodo, que dará a informação necessária sobre a distribuição de corrente. Agora serão visto dois métodos computacionais usando dois modelos de eletrodo.

2.3.1 Método do somatório

O *modelo de eletrodo densidade de corrente constante* admite que a corrente total no sistema de aterramento, I , se distribui uniformemente em toda sua extensão.

Para um eletrodo dividido em m partes, tem-se então :

$$I_j = \frac{I}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

Portanto a equação (2.7) particularizada para esse modelo é :

$$V_p = \frac{\rho_l I}{4\pi m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} \right) \right) \quad (2.9)$$

O método de cálculo do potencial baseado nas equações gerais (2.6) e (2.9) é referenciado como *método do somatório*.

2.3.2 Método matricial

Outro modelo de eletrodo é o *modelo de potencial constante*, segundo o qual todos os m elementos do eletrodo estão no mesmo potencial. Este potencial comum a todo o eletrodo é conhecido como elevação de potencial de terra ou simplesmente *GPR*³. Deste modo, m equações do tipo (2.6a), uma para cada segmento do eletrodo, podem ser escritas. Na forma matricial, essas equações são :

$$\frac{4\pi V}{\rho} [1] = [F][I] \quad (2.10a)$$

onde

$$[1] = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (2.10b)$$

$$[I] = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots \ I_m]^T \quad (2.10c)$$

$$[F] = [F_j] \quad (2.10d)$$

$$F_j = \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (2.10e)$$

F_j é a *matriz dos fatores de distribuição de potencial*.

As correntes nos vários segmentos podem ser determinadas pela equação (2.11).

$$[I] = \frac{4\pi V}{\rho} [F]^{-1} [1] \quad (2.11)$$

Para determinar o valor de *GPR* tem-se que a corrente total I_T , dispersada no solo através do eletrodo, será :

³ Do inglês, Ground Potential Rise.

$$I_T = \sum_{j=1}^m I_j = [1]^T [I] \quad (2.12)$$

Da combinação das equações (2.11) e (2.12), é estabelecida uma relação direta entre a corrente total I_T e a tensão V (GPR) :

$$V = \frac{\rho}{4\pi} \{ [1]^T [F]^{-1} [1] \}^{-1} I_T \quad (2.13)$$

O método de cálculo baseado nas equações (2.6), (2.11) e (2.13) é referenciado como *método matricial*. É denominado desta forma por utilizar a matriz dos fatores de distribuição de potencial $[F]$.

2.3.3 Método matricial modificado

O método matricial é bastante simples, porém, segundo MELIOPOULOS & JOY (1981), MELIOPOULOS (1988) e SVERAK (1989), “torna-se impraticável sua aplicação à medida que o número de subdivisões do eletrodo aumenta”. Cada vez que o eletrodo é subdividido, a matriz dos fatores de distribuição de potencial $[F]$ torna-se maior. Tem-se então uma inversão de matrizes de ordem mais elevada, acarretando um esforço computacional maior.

De acordo com DAWALIBI & SOUTHEY (1994) e DAWALIBI & MUKHEDKAR (1979), próximo aos extremos do eletrodo, a densidade de corrente é bastante variada, fato esse que não ocorre com tanta intensidade no entremeio do eletrodo. É possível então simular o eletrodo, por segmentos de comprimento finito e considerar constante a densidade de corrente em cada um. Dessa forma, a curva da

densidade de corrente pode ser representada por uma *função-escada*⁴ (figura 2.6b). Essa premissa leva ao desenvolvimento do método matricial modificado que se desenvolve da seguinte forma:

De início, o eletrodo é dividido em um número finito de segmentos (figura 2.6a) e a densidade de corrente, ao longo de cada segmento do eletrodo, é considerada constante, mas desconhecida *a priori*. Utiliza-se o método matricial para encontrar os valores desconhecidos da corrente elétrica em cada segmento. Depois disto pode-se calcular o potencial na superfície do solo.

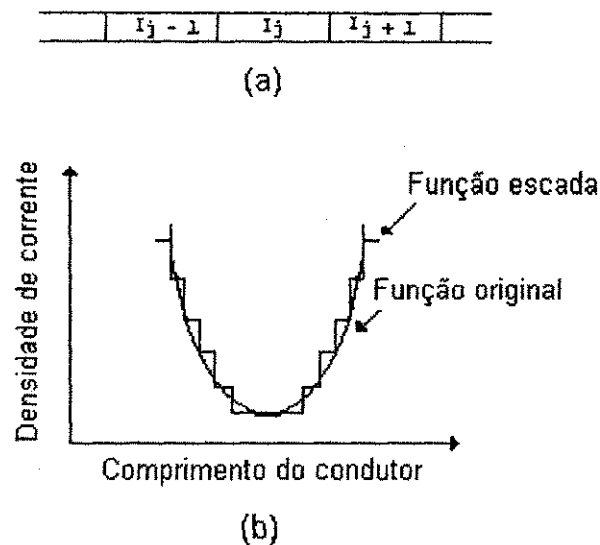


Figura 2.6 (a) Trecho de um eletrodo subdividido em elementos finitos;

(b) Curva densidade de corrente e sua aproximação por uma função-escada.

Uma aplicação apropriada desse método requer um compromisso entre precisão e eficiência, ou seja, se o eletrodo for dividido em poucas seções, os resultados para os potenciais na superfície do solo não retratam a realidade, visto que a função-escada não se aproxima da distribuição verdadeira da corrente ao longo do eletrodo. Caso o

⁴ Representação da curva densidade de corrente através de segmentos de retas.

eletrodo seja segmentado em um elevado número de subdivisões, a função-escada se aproximará bastante da distribuição não uniforme de corrente. Contudo, o esforço computacional é grande, de forma que às vezes pode não compensar tal procedimento. Esse método recebe o nome de *matricial modificado*, porque ao longo de cada segmento aplica-se o método do somatório, e o valor de cada corrente é obtido com a utilização do método matricial.

O método matricial modificado, pode ser implementado de várias maneiras. Neste trabalho dois métodos de cálculo de potencial no solo serão descritos e com base neles duas rotinas computacionais serão implementadas.

3.0 MÉTODO DA INTEGRAL

Inicialmente o sistema de aterramento tratado neste capítulo constará de apenas um eletrodo retilíneo, como mostra a figura (3.1), e depois será generalizado para malhas de aterramento com mais de um eletrodo retilíneo podendo também conter hastes.

O método matricial modificado, apresentado no capítulo anterior, utiliza o método do somatório. Se a equação (2.9) é aplicada a cada segmento do eletrodo, o tempo de processamento é muito elevado, visto a necessidade de se dividir o segmento em um grande número de partes para se conseguir uma boa precisão. O método da integral se apresenta como uma alternativa ao método do somatório para contornar essa dificuldade.

3.1 Método da integral para eletrodos lineares horizontais

No limite, quando o número de subdivisões do sistema de aterramento tende para infinito, o somatório na equação (2.9) transforma-se em uma integral. O cálculo analítico da integral nem sempre é viável, mas para um eletrodo retilíneo é uma tarefa relativamente fácil. Dessa forma surge a possibilidade de se estudar a maioria das malhas de aterramentos existentes, já que estas são compostas pela junção de vários

eletrodos retilíneos. Nesta seção será obtido o resultado da integral da função potencial produzido por um eletrodo retilíneo no solo.

Para efeito de simplificação, um sistema referencial UVW é escolhido de modo que o eletrodo fique por completo no eixo U, e que uma das suas extremidades coincida com a origem do referencial. Esta perda de generalidade é aparente pois se estabelece em qualquer tempo por transformação de coordenadas envolvendo rotação e translação. Observando a figura 3.1 se conclui que as coordenadas de um ponto num referencial XYZ são :

$$x = u \cos \gamma - v \sin \gamma + x_0 \quad (3.1a)$$

$$y = u \sin \gamma + v \cos \gamma + y_0 \quad (3.1b)$$

$$z = w + z_0 \quad (3.1c)$$

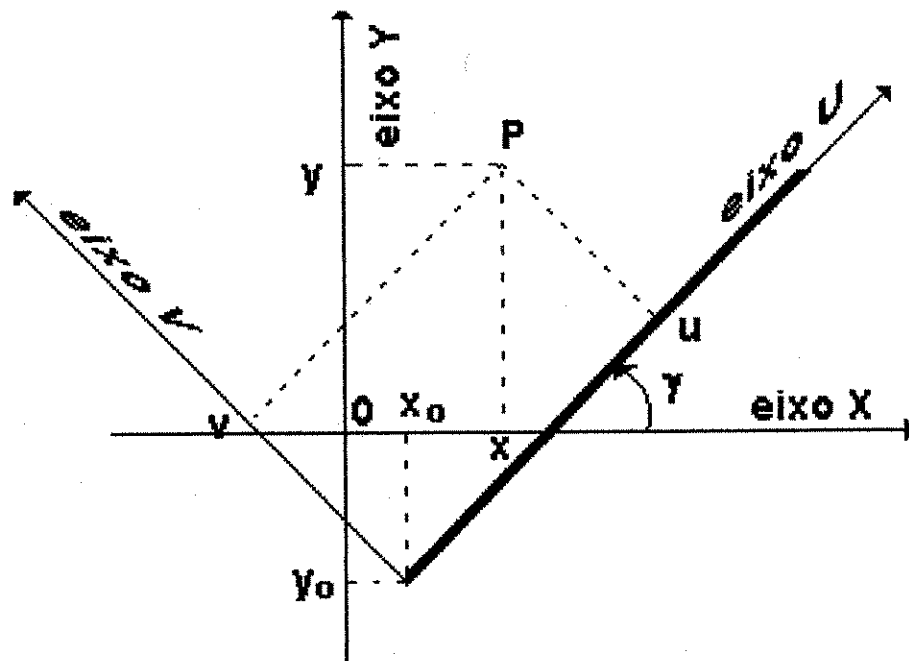


Figura 3.1. Eletrodo retilíneo no eixo u de um sistema de coordenadas UVW.

onde x_0 , y_0 e z_0 são as coordenadas da extremidade de origem do eletrodo no referencial XYZ e γ é o ângulo de rotação entre o eletrodo situado no eixo U e o eixo X do referencial XYZ.

Considerando o número de divisões do eletrodo tendendo a infinito a equação (2.6a) torna-se :

$$dV_p = \frac{\rho_l I_j}{4\pi L_j} du \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (3.2)$$

onde L_j é o comprimento do eletrodo ; I_j a corrente total dispersa por ele e du o comprimento de um elemento infinitesimal.

Para encontrar os afastamentos (r) nas coordenadas UVW combina-se as equações (2.6) e (3.1):

$$r_{0j}^- = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + w^2} = r_0(w) \quad (3.3a)$$

$$r_{0j}^+ = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + (w + 2z_0)^2} = r_0(w + 2z_0) \quad (3.3b)$$

$$r_{nj+}^- = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + (2nh + w)^2} = r_{nj}(w) \quad (3.3c)$$

$$r_{nj+}^+ = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + (2nh + w + 2z_0)^2} = r_{nj}(w + 2z_0) \quad (3.3d)$$

$$r_{nj-}^- = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + (2nh - w - 2z_0)^2} = r_{nj}(-w - 2z_0) \quad (3.3e)$$

$$r_{nj-}^+ = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2 + (2nh - w)^2} = r_{nj}(-w) \quad (3.3f)$$

A equação (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma :

$$dV_p = \Theta(w)du + \Theta(w + 2z_0)du \quad (3.4)$$

onde

$$\Theta(w) = \frac{\rho_l I_j}{4\pi L_j} \left(\frac{1}{r_{0j}(w)} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj}(w)} + \frac{1}{r_{nj}(-w)} \right) \right) \quad (3.5)$$

O potencial total no ponto P , devido ao eletrodo como um todo é :

$$V_p = \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w) du + \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w + 2z_0) du \quad (3.6)$$

onde u_1 é o valor da coordenada U da extremidade final do eletrodo.

Resolvendo-se a primeira integral da equação (3.6) :

$$\begin{aligned} \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w) du &= \frac{\rho_1 I_j}{4\pi L_j} \left\{ \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + w^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + w^2}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh + w)^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + (2nh + w)^2}} \right] + \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh - w)^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + (2nh - w)^2}} \right] \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

e a segunda integral da equação (3.6) é obtida da primeira substituindo w por $w + 2z_0$:

$$\begin{aligned} \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta(w + 2z_0) du &= \frac{\rho_1 I_j}{4\pi L_j} \left\{ \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (w + 2z_0)^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + (w + 2z_0)^2}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh + w + 2z_0)^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + (2nh + w + 2z_0)^2}} \right] + \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln \left[\frac{u_1 - u + \sqrt{(u_1 - u)^2 + v^2 + (2nh - (w + 2z_0))^2}}{-u + \sqrt{(u)^2 + v^2 + (2nh - (w + 2z_0))^2}} \right] \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

O potencial, portanto, em um ponto P qualquer da primeira camada do solo será, conforme a equação (3.6), a soma das equações (3.7) e (3.8), onde u_1 , u , v e w são expressas, em função das coordenadas do sistema referencial XYZ, pelas equações :

$$u_1 = (x_1 - x_0) \cos \gamma + (y_1 - y_0) \operatorname{sen} \gamma \quad (3.9a)$$

$$u = (x - x_0) \cos \gamma + (y - y_0) \operatorname{sen} \gamma \quad (3.9b)$$

$$v = (y - y_0) \cos \gamma - (x - x_0) \sin \gamma \quad (3.9c)$$

$$w = z - z_0 \quad (3.9d)$$

onde x_1 e y_1 são as coordenadas x e y da extremidade do eletrodo no referencial XYZ.

No método matricial modificado considera-se constante a densidade de corrente em cada um dos segmentos em que o eletrodo é dividido. Considera-se ainda, que o potencial sobre cada segmento é o mesmo. Logo se o eletrodo é dividido em m segmentos a equação (3.6) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$V_p = \sum_{i=1}^m \left(\int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_i(w) du + \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_i(w + 2z_0) du \right) \quad (3.10)$$

onde x_0 , y_0 e z_0 passam a ser as coordenadas da extremidade de origem de cada segmento do eletrodo no referencial genérico XYZ, x_1 e y_1 são as coordenadas x e y da extremidade final do segmento do eletrodo no referencial XYZ e u_1 passa a ser o valor da coordenada U da extremidade final de cada segmento do eletrodo.

Para finalizar esta seção, é necessário calcular o potencial no solo levando em conta a presença de mais de um eletrodo retilíneo no sistema de aterramento. O potencial produzido em um ponto P do solo por cada eletrodo que compõe a malha de aterramento é calculado conforme a equação (3.10) e o potencial total produzido pela malha de aterramento é a soma desses resultados. Logo a expressão final do potencial deriva-se da equação (3.10) acrescentando-se o somatório devido a superposição dos efeitos de cada eletrodo retilíneo:

$$V_p = \sum_{j=1}^{n_c} \left[\sum_{i=1}^m \left(\int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_{ij}(w) du + \int_{u_0=0}^{u_1} \Theta_{ij}(w + 2z_0) du \right) \right] \quad (3.11)$$

onde n_c é o número total de eletrodos retilíneos e $j = 1, \dots, n_c$ representa cada eletrodo.

3.2 Método da integral para hastes (eletrodos não-horizontais)

No que foi desenvolvido até agora esteve intrínseco que a fonte puntiforme e o ponto onde o potencial é desejado estavam completamente contido na primeira camada do solo. Essa hipótese quase sempre se confirma no caso de malhas de aterramento⁵. No entanto, as hastes de aterramento usuais costumam ocupar as duas camadas de solo conforme mostrado na figura 3.2.

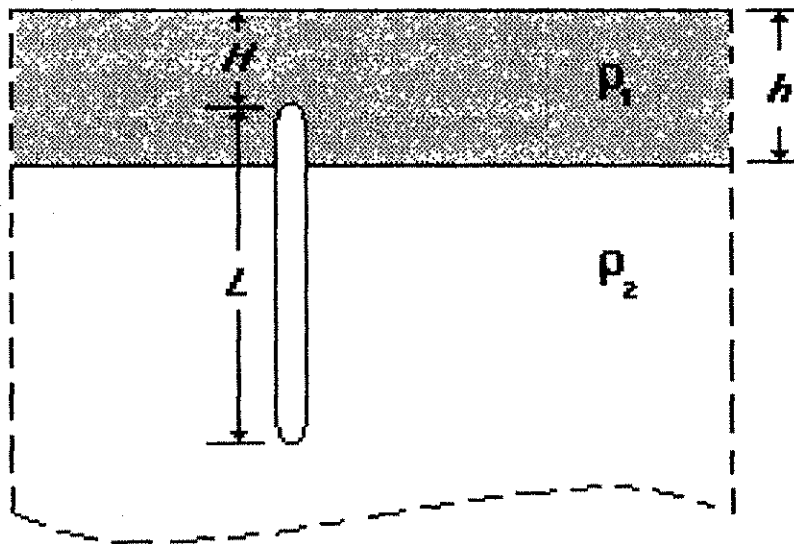


Figura 3.2 Haste em solo de duas camadas

A consequência desse fato é que poderão ocorrer as alternativas mostradas na tabela (3.1), com base no posicionamento da fonte puntiforme e do ponto onde é desejado o potencial.

Tabela 3.1 - Posicionamento da fonte puntiforme e do ponto $P(x,y,z)$

Disposição	Posicionamento em relação as camadas	
	Fonte puntiforme	ponto onde o potencial é desejado
1	1ª camada	1ª camada
2	1ª camada	2ª camada
3	2ª camada	1ª camada
4	2ª camada	2ª camada

⁵ A profundidade usual de malhas de aterramento situa-se na faixa de 40 a 80 cm.

O potencial em cada uma das quatro disposições será encontrado a seguir utilizando o método das imagens.

Considere duas camadas dielétricas separadas por uma superfície plana, e uma fonte puntiforme, localizada no meio 1, de onde emana a corrente i (figura 3.3a). Segundo HARRINGTON (1958) a aplicação do método das imagens para esta configuração é mostrada nas figuras (3.3b) e (3.3c) para um ponto qualquer e nas figuras (3.3d) e (3.3e) para pontos na interface dos meios.

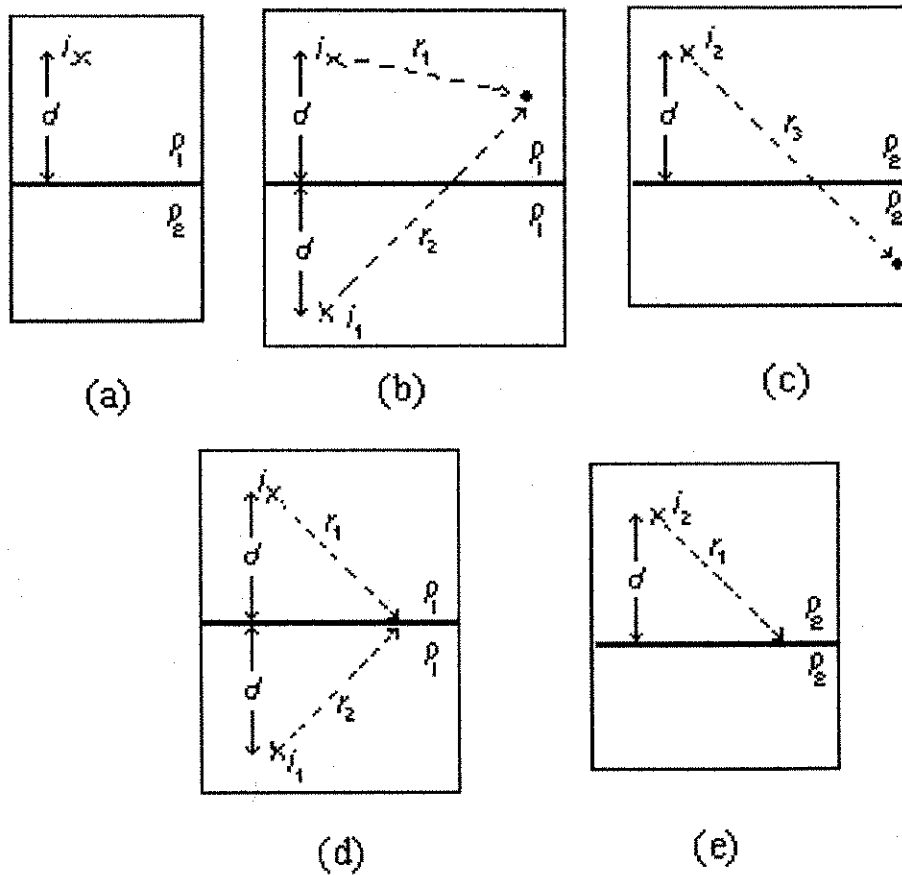


Figura 3.3 Interface entre dielétricos: (a) interface original representando meio 1 e 2;

(b) Aplicação do método das imagens no meio 1;

(c) Aplicação do método das imagens no meio 2;

(d) Aplicação do método das imagens no meio 1 - interface;

(e) Aplicação do método das imagens no meio 2 - interface;

Da figura (3.3b) tira-se que o potencial em um ponto qualquer da primeira camada é:

$$V_1 = \frac{c_1 i}{r_1} + \frac{c_1 i_1}{r_2} \quad (3.12)$$

onde $c_1 = \frac{\rho_1}{4\pi}$

ρ_1 - resistividade do primeiro meio;

i - corrente que emana da fonte puntiforme;

i_1 - corrente de valor desconhecido que será calculado;

r_1 - distância de um ponto no primeiro meio à fonte puntiforme.

r_2 - distância de um ponto no segundo meio à fonte puntiforme imagem 1.

Da figura (3.3c) tira-se que o potencial em um ponto qualquer da segundo meio é:

$$V_2 = \frac{c_2 i_2}{r_3} \quad (3.13)$$

onde i_2 é corrente de valor desconhecido que será calculado;

ρ_2 é a resistividade do segundo meio;

r_3 - distância de um ponto no segundo meio à fonte puntiforme imagem 2;

$$c_2 = \frac{\rho_2}{4\pi}$$

Tem-se na superfície de separação :

$$r_1 = r_2 = r_3 \quad (3.14)$$

$$\frac{dr_1}{dN} = -\frac{dr_2}{dN} \quad (3.15)$$

onde N representa a direção normal à superfície de separação.

Considerando $V_1 = V_2$ como condição de contorno entre os dois meios tem-se :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{dV_1}{dN} = \frac{1}{\rho_2} \frac{dV_2}{dN} \quad (3.16)$$

Igualando as equações (3.12) e (3.13) e usando a equação (3.14) obtém-se :

$$c_1 i + c_1 i_1 = c_2 i_2 \quad (3.17)$$

Usando (3.12), (3.13) e (3.15) em (3.16) obtém-se :

$$\frac{1}{\rho_1} (c_1 i - c_1 i_1) = \frac{1}{\rho_2} c_2 i_2 \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18) encontra-se :

$$i_1 = ki \quad (3.19)$$

$$i_2 = (1+k) \frac{c_1}{c_2} i \quad (3.20)$$

onde k é dado pela equação (2.5b). Finalmente tem-se:

$$V_1 = \frac{c_1 i}{r_1} + \frac{kc_1 i}{r_2} \quad (3.21)$$

$$V_2 = \frac{(1+k)c_1 i}{r_1} \quad (3.22)$$

onde as equações (3.21) e (3.22) referem-se respectivamente à 1° e 3° disposições.

Considerado agora a fonte puntiforme localizada no segundo meio e resolvendo de forma análoga ao mostrado acima tem-se os seguintes resultados :

$$i_1 = -ki \quad (3.23)$$

$$S(i_2) = (1+k)i \quad (3.24)$$

$$V_1 = \frac{(1+k)c_1 i}{r_2} \quad (3.25)$$

$$V_2 = \frac{c_2 i}{r_2} - \frac{kc_2 i}{r_1} \quad (3.26)$$

As equações (3.25) e (3.26) referem-se respectivamente à 2° e 4° disposições.

Ao considerar o ar como mais um meio, tem-se infinitas reflexões como é mostrado no capítulo II e em HEPPE (1979). Analisando as equações (3.22) e (3.25) vê-se que as expressões para a 2° e 3° disposições são semelhantes. As expressões finais para cada caso são as seguintes :

$$V_P = \frac{\rho_1 i}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (3.27)$$

$$V_P = \frac{\rho_1(1+k)i}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^+} \right) \right) \quad (3.28)$$

$$V_P = \frac{\rho_2 i}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) \quad (3.29)$$

onde as equações (3.27) e (3.29) referem-se respectivamente à 1ª e 4ª disposições e a equação (3.28) refere-se à 2ª e 3ª.

A seguir será encontrado uma expressão do potencial produzido em um ponto qualquer do solo por uma haste vertical. O referencial cartesiano é escolhido por conveniência de modo que o eixo Z contenha a haste e o plano XY coincida com a superfície do solo, como é usual. A generalidade se estabelecerá mais tarde por translação de origem para qualquer outro eixo (figura 3.4).

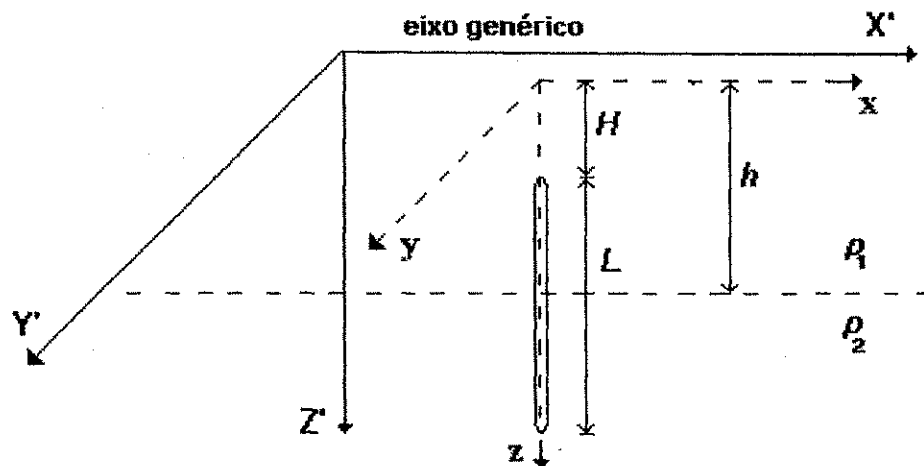


Figura 3.4 Haste num solo de duas camadas, com os eixos XYZ e X'Y'Z' representados.

A corrente dispersa no solo por uma parte infinitesimal da haste contribui diferentemente para o potencial em um ponto qualquer da 1ª camada, conforme a camada em que esteja imersa. Logo, serão usadas as equações (3.27) e (3.28) da seguinte forma :

$$dVp = \frac{\rho_1 I}{4\pi L} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) dz_j, \text{ se } H \leq z_j < h \quad (3.30)$$

$$dVp = \frac{\rho_1 I(1+k)}{4\pi L} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^+} \right) \right) dz_j, \text{ se } h \leq z_j < L+H \quad (3.31)$$

De modo que :

$$Vp = \frac{\rho_1 I}{4\pi L} \left\{ \int_H^h \left[\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right] dz_j + \right. \\ \left. + (1+k) \int_h^{L+H} \left[\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^+} \right) \right] dz_j \right\} \quad (3.32)$$

A equação (3.32) pode ser combinada com as equações (2.6) e reorganizada :

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi L}{\rho_1 l} V_p = & \int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (z_j - z)^2}} + \int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (z_j + z)^2}} + \\
& + (1+k) \left[\int_h^{H+L} \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (z_j - z)^2}} + \int_h^{H+L} \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (z_j + z)^2}} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh + z_j - z)^2}} + \int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh + z_j + z)^2}} + \right. \\
& \left. + \int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh - z_j - z)^2}} + \int_H^h \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh - z_j + z)^2}} \right] + \\
& (1+k) \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\int_h^{H+L} \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh + z_j - z)^2}} + \right. \\
& \left. + \int_h^{H+L} \frac{dz_j}{\sqrt{A_z^2 + (2nh + z_j + z)^2}} \right] \quad (3.33a)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } A_z^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 \quad (3.33b)$$

Para se efetuar as integrações indicadas na equação (3.33) recorre-se à seguinte integral indefinida :

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) = F_1(u, a) \quad (3.34)$$

Para se aplicar a equação (3.34) às primeiras quatro integrais da equação (3.33), respeitando os limites de integração de cada uma, faz-se a seguinte substituição :

$$u = z_j \pm z$$

resultando em $du = dz_j$, logo,

$$\int_{L_i \pm z}^{L_s \pm z} \frac{du}{\sqrt{A_z^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{A_z^2 + u^2}) \Big|_{u=L_i \pm z}^{u=L_s \pm z} = \ln \left(\frac{L_s \pm z + \sqrt{A_z^2 + (L_s \pm z)^2}}{L_i \pm z + \sqrt{A_z^2 + (L_i \pm z)^2}} \right) \quad (3.35)$$

onde L_s e L_i são os respectivos limites superior e inferior de cada integral.

Para se aplicar a equação (3.34) nas 5ª, 6ª, 9ª e 10ª integrais da equação (3.33), faz-se a seguinte substituição :

$$u = 2nh + z_j \pm z$$

resultando em $du = dz_j$, logo,

$$\begin{aligned} \int_{2nh+L_i \pm z}^{2nh+L_s \pm z} \frac{du}{\sqrt{A_z^2 + u^2}} &= \ln \left(u + \sqrt{A_z^2 + u^2} \right) \Big|_{u=2nh+L_i \pm z}^{u=2nh+L_s \pm z} \\ &= \ln \left(\frac{2nh + L_s \pm z + \sqrt{A_z^2 + (2nh + L_s \pm z)^2}}{2nh + L_i \pm z + \sqrt{A_z^2 + (2nh + L_i \pm z)^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para se aplicar a equação (3.34) na 7ª e 8ª integrais da equação (3.33), faz-se a seguinte substituição :

$$u = 2nh - z_j \pm z$$

resultando em $du = -dz_j$, logo,

$$\begin{aligned} - \int_{2nh-L_i \pm z}^{2nh-L_s \pm z} \frac{du}{\sqrt{A_z^2 + u^2}} &= \ln \left(u + \sqrt{A_z^2 + u^2} \right) \Big|_{u=2nh-L_i \pm z}^{u=2nh-L_s \pm z} \\ &= \ln \left(\frac{2nh - L_i \pm z + \sqrt{A_z^2 + (2nh - L_i \pm z)^2}}{2nh - L_s \pm z + \sqrt{A_z^2 + (2nh - L_s \pm z)^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
Vp = & \frac{\rho_1 I}{4\pi L} \{ f_1(h-z, H-z, A_z) + f_1(h+z, H+z, A_z) + \\
& + (1+k) [f_1(H+L-z, h-z, A_z) + f_1(H+L+z, h+z, A_z)] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [f_1(2nh+h-z, 2nh+H-z, A_z) + \\
& + f_1(2nh+h+z, 2nh+H+z, A_z) + \\
& + f_1(2nh-H-z, 2nh-h-z, A_z) + \\
& + f_1(2nh-H+z, 2nh-h+z, A_z)] + \\
& + (1+k) \sum_{n=1}^{\infty} k^n [f_1(2nh+H+L-z, 2nh+h-z, A_z) + \\
& + f_1(2nh+H+L+z, 2nh+h+z, A_z)] \} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } f_1(u_1, u_2, A) = \ln \left(\frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + A^2}}{u_2 + \sqrt{u_2^2 + A^2}} \right) = F_1(u_1, A) - F_1(u_2, A) \quad (3.39)$$

A equação (3.38) expressa o potencial em um ponto qualquer da 1ª camada do solo produzido por dispersão de corrente em um solo de duas camadas (ρ_1, ρ_2, h) através de uma haste de comprimento L e profundidade H .

Da mesma forma, a corrente dispersa no solo por uma parte infinitesimal da haste contribui diferentemente para o potencial em um ponto qualquer da 2ª camada, conforme a camada em que esteja imersa. Isto é, serão usadas as equações (3.28) e (3.29) da seguinte forma :

$$dVp = \frac{\rho_1 I (1+k)}{4\pi L} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} \right) \right) dz_j, \text{ se } H \leq z_j < h \quad (3.40)$$

$$dV_p = \frac{\rho_2 I}{4\pi L} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj+}^-} + \frac{1}{r_{nj-}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^-} \right) \right) dz_j \quad (3.41)$$

$$\text{se } h \leq z_j < L+H$$

Utilizando o mesmo procedimento mostrado anteriormente, chega-se ao seguinte resultado final :

$$\begin{aligned} V_p = & \frac{\rho_1 I(1+k)}{4\pi L} \left\{ f_1(h-z, H-z, A_z) + f_1(h+z, H+z, A_z) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(2nh+h-z, 2nh+H-z, A_z) + \right. \\ & \left. + f_1(2nh+h+z, 2nh+H+z, A_z) \right\} + \\ & + \frac{\rho_2 I}{4\pi L} \left\{ f_1(H+L-z, h-z, A_z) + f_1(H+L+z, h+z, A_z) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \left[f_1(2nh+H+L-z, 2nh+h-z, A_z) + \right. \\ & \left. + f_1(2nh+H+L+z, 2nh+h+z, A_z) + \right. \\ & \left. + f_1(2nh-h-z, 2nh-H-L-z, A_z) + \right. \\ & \left. + f_1(2nh-h+z, 2nh-H-L+z, A_z) \right\} \quad (3.42) \end{aligned}$$

A equação (3.42) expressa o potencial em um ponto qualquer da 2ª camada do solo produzido por dispersão de corrente em um solo de duas camadas (ρ_1, k, h) através de uma haste de comprimento L e profundidade H .

3.3 Descrição do método

Com base nas equações que foram desenvolvidas na seção anterior construiu-se uma rotina computacional com a finalidade de determinar o potencial em um ou mais

pontos na superfície do solo devido à dispersão de corrente no solo, quando se usa uma malha com ou sem hastes. Abaixo tem-se a descrição da rotina:

1. Ler os dados :

1.1 Gerais :

- Número de pontos da superfície do solo onde o valor do potencial deve ser calculado; dois valores representando as direções x ($qtdx$) e y ($qtdy$);
- Comprimento (m) nas direções x ($comp_x$) e y ($comp_y$) que definem até onde deve ser feito o mapeamento do potencial na superfície do solo;
- Coordenadas x ($coord_x$) e y ($coord_y$) que identifica o ponto onde começa o mapeamento do potencial na superfície do solo. O passo é calculado da seguinte forma :

$$incr_x = \frac{comp_x}{qtdx}$$

e somado a coordenada x ($coord_x = coord_x + incr_x$) para varrer toda a área especificada pelo usuário. Da mesma forma é feito para y

- Corrente total em ampères (I);
- Profundidade do aterramento (H);
- Tolerância (τ) que limita o número de reflexões. O limite superior do somatório das reflexões começa a partir de 1 e é incrementado a cada passo. Este procedimento continua até que o erro relativo do somatório seja menor que a tolerância τ . O erro é calculado da seguinte forma :

$$\text{erro} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i - \sum_{i=1}^{n-1} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad \text{com } n = 2, 3, \dots$$

1.2 do solo :

- Resistividade da primeira camada, ρ_1 ;
- Resistividade da segunda camada, ρ_2 ;
- Espessura da primeira camada, h ;

1.3 do eletrodo :

- Posição do condutor no solo, em função das coordenadas x, y e z ;
- Direção em que estará o condutor (1 - eixo x ; 2 - eixo y ; 3 - eixo z);
- Comprimento do condutor (L);
- Número de divisões de cada condutor. Cada eletrodo horizontal pode ser particionado pelo usuário. Quanto maior o número de divisões, maior será o tempo de processamento, mas em contra partida, como já foi mostrado, os resultados serão mais próximos da realidade. A haste não será seccionada visto que isso é dificultado por ela estar entre as duas camadas do solo. O efeito desta limitação é pequeno pois normalmente os sistemas de aterramento tem os eletrodos horizontais bem maiores que as hastes, e dessa forma pode-se dividir cada eletrodo em pedaços de tamanhos compatíveis aos da haste;

2. Definir os parâmetros :

- Fator de reflexão, k ;
- Posição inicial de cada segmento em que o(s) condutor(es) é(são) dividido(s), em função das coordenadas x , y e z ;

3. Determinar :

- O valor do GPR usando a equação (2.13);
- Com o GPR encontrar o valor da corrente que percorre cada segmento dos condutores horizontais usando as equações (3.7), (3.8) e (3.11);
- Com o GPR encontrar o valor da corrente que percorre as hastes usando as equações (3.38) e (3.42);
- Obtido o valor das correntes em cada segmento dos condutores e nas hastes, encontrar o potencial na área de mapeamento definida pelo usuário, usando as equações (3.7), (3.8), (3.11), (3.38) e (3.42).

4.0 MÉTODO DA INTEGRAL COM PARÂMETROS CONCENTRADOS

O método que será descrito a seguir também fará uso de integrais, mas difere do anterior em dois pontos básicos:

- A matriz $[F]$ encontrada para calcular o *GPR* não mais terá como base o centro de cada eletrodo, mas sim a média dos potenciais de todos os pontos que compõem o eletrodo;
- As relações entre os eletrodos já entram no programa em formulas pré-definidas, como parâmetros concentrados. As fórmulas são usualmente chamadas de *resistência própria*, *resistência mútua* e *resistência de transferência*.

Consideram-se inicialmente dois segmentos de eletrodos $2L_1$ e $2L_2$ conforme a figura (4.1). As coordenadas dos centros dos segmentos dos condutores são (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) . Uma corrente uniforme sai do eletrodo 1 para o solo.

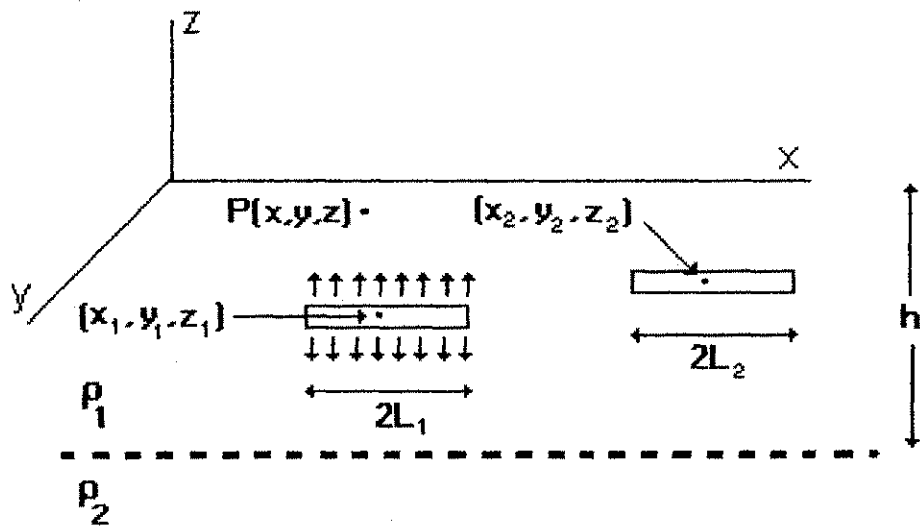


Figura 4.1 segmento de eletrodos de comprimento $2L_1$ e $2L_2$.

De acordo com a figura 4.1 serão encontradas as seguintes equações :

- Equação do potencial de “transferência” em um ponto genérico do solo $P(x, y, z)$, devido à corrente elétrica I_1 no segmento de condutor 1;
- Equação do potencial mútuo entre os dois segmentos, devido à corrente elétrica I_1 no segmento de condutor 1;
- Equação do potencial próprio do segmento do condutor 1, devido à corrente elétrica I_1 .

Qualquer um desses potenciais é proporcional à corrente total no segmento de condutor, isto é:

$$V = R_T I \quad (4.1)$$

onde I é a corrente elétrica total do segmento do condutor 1 para o solo e R_T é função da geometria do sistema e da condutividade do solo. R_T tem dimensão de resistência.

Por causa do grande número de configurações espaciais que os eletrodos de aterramento podem assumir, consideram-se apenas três disposições geométricas ao longo do eixo x , y e z . Dessa forma diminuem o número de equações que precisam ser

definidas para encontrar as relações entre dois segmentos e entre um segmento e um ponto. Essas relações serão denominadas de VDF ⁶.

Na tabela 4.1 estão especificados os possíveis casos para a construção das equações de VDF :

Tabela 4.1 Equações para os fatores de distribuição de potencial VDF

VDF entre segmento de eletrodo e um ponto na 1ª camada	
VDF_x	Segmento na direção X e um ponto
VDF_y	Segmento na direção Y e um ponto
VDF_{z1}	Segmento na direção Z (1ª cam.) e um ponto
VDF_{z2}	Segmento na direção Z (2ª cam.) e um ponto
VDF entre dois segmentos de eletrodos	
VDF_{x-x}	Dois segmentos na direção X
VDF_{y-y}	Dois segmentos na direção Y
VDF_{z-z-1}	dois Segmentos da 1ª camada na direção Z
VDF_{z-z}	dois Segmentos na direção Z em camadas diferentes
VDF_{z-z-2}	dois Segmentos da 2ª camada na direção Z
VDF_{x-y}	Segmento na direção X e outro em Y
VDF_{x-z-1}	Segmento na direção X e outro em Z (1ª camada)
VDF_{x-z-2}	Segmento na direção X e outro em Z (2ª camada)
VDF_{y-z-1}	Segmento na direção Y e outro em Z (1ª camada)
VDF_{y-z-2}	Segmento na direção Y e outro em Z (2ª camada)
VDF próprio	
VDF_{xx}	Segmento na direção X
VDF_{yy}	Segmento na direção Y
VDF_{zz1}	Segmento na direção Z (1ª camada)
VDF_{zz2}	Segmento na direção Z (2ª camada)

⁶ Voltage Distributed Factor

Tabela 4.2 - Equação para o *VDF* entre segmento de eletrodo e ponto na 1ª camada (resistência transferida)

Seg. do eletrodo ⁷	Fator de distribuição de potencial
Direção - x	$\frac{\rho_1}{8\pi L_1} \left\{ f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^2) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^3) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^4) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^5) \right] \right\}$
Direção - y	$\frac{\rho_1}{8\pi L_1} \left\{ f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y) + f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y^1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y^2) + f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y^3) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y^4) + f_1(y_1 + L_1 - y, y_1 - L_1 - y, A_y^5) \right] \right\}$
Direção z - 1ª cam.	$\frac{\rho_1}{8\pi L_1} \left\{ f_1(a + L_1, a - L_1, A_z) + f_1(a_1 + L_1, a_1 - L_1, A_z) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(a_2 + L_1, a_2 - L_1, A_z) + f_1(a_3 + L_1, a_3 - L_1, A_z) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_1(a_4 + L_1, a_4 - L_1, A_z) + f_1(a_5 + L_1, a_5 - L_1, A_z) \right] \right\}$
Direção z - 2ª cam.	$\frac{\rho_1(1+k)}{8\pi L_1} \left\{ f_1(a + L_1, a - L_1, A_z) + f_1(a_1 + L_1, a_1 - L_1, A_z) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(a_2 + L_1, a_2 - L_1, A_z) + f_1(a_3 + L_1, a_3 - L_1, A_z) \right] \right\}$

$$(A_x)^2 = (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2; (A_x^1)^2 = (y_1 - y)^2 + (z_1 + z)^2; (A_x^2)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh + z_1 - z)^2; (A_x^3)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh + z_1 + z)^2; (A_x^4)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh - z_1 - z)^2; (A_x^5)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh - z_1 + z)^2$$

$$(A_y)^2 = (x_1 - x)^2 + (z_1 - z)^2; (A_y^1)^2 = (x_1 - x)^2 + (z_1 + z)^2; (A_y^2)^2 = (x_1 - x)^2 + (2nh + z_1 - z)^2; (A_y^3)^2 = (x_1 - x)^2 + (2nh + z_1 + z)^2; (A_y^4)^2 = (x_1 - x)^2 + (2nh - z_1 - z)^2; (A_y^5)^2 = (x_1 - x)^2 + (2nh - z_1 + z)^2$$

$$(A_z)^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$$

$$a = z_1 - z; a_1 = z_1 + z; a_2 = 2nh + z_1 - z; a_3 = 2nh + z_1 + z; a_4 = 2nh - z_1 - z; a_5 = 2nh - z_1 + z$$

$$f_1(u_1, u_2, A) = \ln \left(\frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + A^2}}{u_2 + \sqrt{u_2^2 + A^2}} \right)$$

⁷ Comprimento do Segmento de eletrodo 1 é $2L_1$ e o seu centro está em (x_1, y_1, z_1)

Tabela 4.3 : Equação para o fator de distribuição de potencial entre dois segmentos de eletrodo (resistência mútua)*

Seg. do eletrodo Sg. 1 ⁷ Sg. 2 ⁸	Fator de distribuição de potencial
Dir. x Dir. x	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \left\{ F_2(u+L_m, B_x) - F_2(u+L_d, B_x) - F_2(u-L_d, B_x) + F_2(u-L_m, B_x) + F_2(u+L_m, B_x^1) - F_2(u+L_d, B_x^1) - F_2(u-L_d, B_x^1) + F_2(u-L_m, B_x^1) + \right.$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[F_2(u+L_m, B_x^{2n}) - F_2(u+L_d, B_x^{2n}) - F_2(u-L_d, B_x^{2n}) + F_2(u-L_m, B_x^{2n}) + F_2(u+L_m, B_x^{2n+1}) - F_2(u+L_d, B_x^{2n+1}) - F_2(u-L_d, B_x^{2n+1}) + F_2(u-L_m, B_x^{2n+1}) + \right.$ $\left. \left. + F_2(u+L_m, B_x^{4n}) - F_2(u+L_d, B_x^{4n}) - F_2(u-L_d, B_x^{4n}) + F_2(u-L_m, B_x^{4n}) + F_2(u+L_m, B_x^{5n}) - F_2(u+L_d, B_x^{5n}) - F_2(u-L_d, B_x^{5n}) + F_2(u-L_m, B_x^{5n}) \right] \right\}$
Dir. y Dir. y	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \left\{ F_2(v+L_m, B_y) - F_2(v+L_d, B_y) - F_2(v-L_d, B_y) + F_2(v-L_m, B_y) + F_2(v+L_m, B_y^1) - F_2(v+L_d, B_y^1) - F_2(v-L_d, B_y^1) + F_2(v-L_m, B_y^1) + \right.$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[F_2(v+L_m, B_y^{2n}) - F_2(v+L_d, B_y^{2n}) - F_2(v-L_d, B_y^{2n}) + F_2(v-L_m, B_y^{2n}) + F_2(v+L_m, B_y^{2n+1}) - F_2(v+L_d, B_y^{2n+1}) - F_2(v-L_d, B_y^{2n+1}) + F_2(v-L_m, B_y^{2n+1}) + \right.$ $\left. \left. + F_2(v+L_m, B_y^{4n}) - F_2(v+L_d, B_y^{4n}) - F_2(v-L_d, B_y^{4n}) + F_2(v-L_m, B_y^{4n}) + F_2(v+L_m, B_y^{5n}) - F_2(v+L_d, B_y^{5n}) - F_2(v-L_d, B_y^{5n}) + F_2(v-L_m, B_y^{5n}) \right] \right\}$
Dir. z Dir. z 1 ^a cam. 1 ^a cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \left\{ F_2(w+L_m, B_z) - F_2(w+L_d, B_z) - F_2(w-L_d, B_z) + F_2(w-L_m, B_z) + F_2(w_1+L_m, B_z) - F_2(w_1+L_d, B_z) - F_2(w_1-L_d, B_z) + F_2(w_1-L_m, B_z) + \right.$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[F_2(w_2+L_m, B_z) - F_2(w_2+L_d, B_z) - F_2(w_2-L_d, B_z) + F_2(w_2-L_m, B_z) + F_2(w_3+L_m, B_z) - F_2(w_3+L_d, B_z) - F_2(w_3-L_d, B_z) + F_2(w_3-L_m, B_z) + \right.$ $\left. \left. + F_2(w_4+L_m, B_z) - F_2(w_4+L_d, B_z) - F_2(w_4-L_d, B_z) + F_2(w_4-L_m, B_z) + F_2(w_5+L_m, B_z) - F_2(w_5+L_d, B_z) - F_2(w_5-L_d, B_z) + F_2(w_5-L_m, B_z) \right] \right\}$

⁸ Comprimento do Segmento de eletrodo 2 é $2L_2$ e o seu centro está em (x_2, y_2, z_2)

Tabela 4.3 : (continuação)

Seg. do eletrodo Sg. 1 ⁷ Sg. 2 ⁸	Fator de distribuição de potencial
Dir z Dir. z 1ª cam 2ª cam. Ou 2ª cam 1ª cam.	$\frac{\rho_1(1+k)}{16L_1L_2\pi} \{F_2(w+L_m, B_z) - F_2(w+L_d, B_z) - F_2(w-L_d, B_z) + F_2(w-L_m, B_z) + F_2(w_1+L_m, B_z) - F_2(w_1+L_d, B_z) - F_2(w_1-L_d, B_z) + F_2(w_1-L_m, B_z) +$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_2(w_2+L_m, B_z) - F_2(w_2+L_d, B_z) - F_2(w_2-L_d, B_z) + F_2(w_2-L_m, B_z) + F_2(w_3+L_m, B_z) - F_2(w_3+L_d, B_z) - F_2(w_3-L_d, B_z) + F_2(w_3-L_m, B_z)]\}$
Dir. z Dir. z 2ª cam. 2ª cam.	$\frac{\rho_2}{16L_1L_2\pi} \{F_2(w+L_m, B_z) - F_2(w+L_d, B_z) - F_2(w-L_d, B_z) + F_2(w-L_m, B_z) + F_2(w_1+L_m, B_z) - F_2(w_1+L_d, B_z) - F_2(w_1-L_d, B_z) + F_2(w_1-L_m, B_z) +$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n [F_2(w_2+L_m, B_z) - F_2(w_2+L_d, B_z) - F_2(w_2-L_d, B_z) + F_2(w_2-L_m, B_z) + F_2(w_3+L_m, B_z) - F_2(w_3+L_d, B_z) - F_2(w_3-L_d, B_z) + F_2(w_3-L_m, B_z) +$ $+ F_2(w_4+L_m, B_z) - F_2(w_4+L_d, B_z) - F_2(w_4-L_d, B_z) + F_2(w_4-L_m, B_z) + F_2(w_5+L_m, B_z) - F_2(w_5+L_d, B_z) - F_2(w_5-L_d, B_z) + F_2(w_5-L_m, B_z)]\}$
Dir. x Dir. y	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(u+L_1, v+L_2, w) - F_3(u+L_1, v-L_2, w) - F_3(u-L_1, v+L_2, w) + F_3(u-L_1, v-L_2, w) + F_3(u+L_1, v+L_2, w_1) - F_3(u+L_1, v-L_2, w_1) - F_3(u-L_1, v+L_2, w_1) +$ $+ F_3(u-L_1, v-L_2, w_1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(u+L_1, v+L_2, w_2) - F_3(u+L_1, v-L_2, w_2) - F_3(u-L_1, v+L_2, w_2) + F_3(u-L_1, v-L_2, w_2) + F_3(u+L_1, v+L_2, w_3) - F_3(u+L_1, v-L_2, w_3) -$ $- F_3(u-L_1, v+L_2, w_3) + F_3(u-L_1, v-L_2, w_3) + F_3(u+L_1, v+L_2, w_4) - F_3(u+L_1, v-L_2, w_4) - F_3(u-L_1, v+L_2, w_4) +$ $+ F_3(u-L_1, v-L_2, w_4) + F_3(u+L_1, v+L_2, w_5) - F_3(u+L_1, v-L_2, w_5) - F_3(u-L_1, v+L_2, w_5) + F_3(u-L_1, v-L_2, w_5)]\}$
Dir. x Dir. z 1ª cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(u+L_1, w+L_2, v) - F_3(u+L_1, w-L_2, v) - F_3(u-L_1, w+L_2, v) + F_3(u-L_1, w-L_2, v) + F_3(u+L_1, w_1+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_1-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_1+L_2, v) +$ $+ F_3(u-L_1, w_1-L_2, v) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(u+L_1, w_2+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_2-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_2+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_2-L_2, v) + F_3(u+L_1, w_3+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_3-L_2, v) -$ $- F_3(u-L_1, w_3+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_3-L_2, v) + F_3(u+L_1, w_4+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_4-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_4+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_4-L_2, v) +$ $+ F_3(u+L_1, w_5+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_5-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_5+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_5-L_2, v)]\}$

Tabela 4.3 : (continuação)

Seg. eletrodo sg 1 ⁷ sg 2 ⁸	Fator de distribuição de potencial
Dir. x Dir. z 2 ^a cam.	$\frac{\rho_1(1+k)}{16L_1L_2\pi} \{F_3(u+L_1, w+L_2, v) - F_3(u+L_1, w-L_2, v) - F_3(u-L_1, w+L_2, v) + F_3(u-L_1, w-L_2, v) + F_3(u+L_1, w_1+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_1-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_1+L_2, v) +$ $+ F_3(u-L_1, w_1-L_2, v) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(u+L_1, w_2+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_2-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_2+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_2-L_2, v) +$ $+ F_3(u+L_1, w_3+L_2, v) - F_3(u+L_1, w_3-L_2, v) - F_3(u-L_1, w_3+L_2, v) + F_3(u-L_1, w_3-L_2, v)] \}$
Dir. y Dir. x	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(v+L_1, u+L_2, w) - F_3(v+L_1, u-L_2, w) - F_3(v-L_1, u+L_2, w) + F_3(v-L_1, u-L_2, w) + F_3(v+L_1, u+L_2, w_1) - F_3(v+L_1, u-L_2, w_1) - F_3(v-L_1, u+L_2, w_1) +$ $+ F_3(v-L_1, u-L_2, w_1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(v+L_1, u+L_2, w_2) - F_3(v+L_1, u-L_2, w_2) - F_3(v-L_1, u+L_2, w_2) + F_3(v-L_1, u-L_2, w_2) + F_3(v+L_1, u+L_2, w_3) - F_3(v+L_1, u-L_2, w_3) -$ $- F_3(v-L_1, u+L_2, w_3) + F_3(v-L_1, u-L_2, w_3) + F_3(v+L_1, u+L_2, w_4) - F_3(v+L_1, u-L_2, w_4) - F_3(v-L_1, u+L_2, w_4) +$ $+ F_3(v-L_1, u-L_2, w_4) + F_3(v+L_1, u+L_2, w_5) - F_3(v+L_1, u-L_2, w_5) - F_3(v-L_1, u+L_2, w_5) + F_3(v-L_1, u-L_2, w_5)] \}$
Dir. y Dir. z 1 ^a cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(v+L_1, w+L_2, u) - F_3(v+L_1, w-L_2, u) - F_3(v-L_1, w+L_2, u) + F_3(v-L_1, w-L_2, u) + F_3(v+L_1, w_1+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_1-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_1+L_2, u) +$ $+ F_3(v-L_1, w_1-L_2, u) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(v+L_1, w_2+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_2-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_2+L_2, u) + F_3(v-L_1, w_2-L_2, u) + F_3(v+L_1, w_3+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_3-L_2, u) -$ $- F_3(v-L_1, w_3+L_2, u) + F_3(v-L_1, w_3-L_2, u) + F_3(v+L_1, w_4+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_4-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_4+L_2, u) +$ $+ F_3(v-L_1, w_4-L_2, u) + F_3(v+L_1, w_5+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_5-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_5+L_2, u) + F_3(v-L_1, w_5-L_2, u)] \}$
Dir. y Dir. z 2 ^a cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(v+L_1, w+L_2, u) - F_3(v+L_1, w-L_2, u) - F_3(v-L_1, w+L_2, u) + F_3(v-L_1, w-L_2, u) + F_3(v+L_1, w_1+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_1-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_1+L_2, u) +$ $+ F_3(v-L_1, w_1-L_2, u) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(v+L_1, w_2+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_2-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_2+L_2, u) + F_3(v-L_1, w_2-L_2, u) +$ $+ F_3(v+L_1, w_3+L_2, u) - F_3(v+L_1, w_3-L_2, u) - F_3(v-L_1, w_3+L_2, u) + F_3(v-L_1, w_3-L_2, u)] \}$

Tabela 4.3 : (continuação)

Seg. eletrodo Sg 1 ⁷ sg 2 ⁸	Fator de distribuição de potencial
Dir. z Dir. x 1ª cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(w+L_1, u+L_2, v) - F_3(w+L_1, u-L_2, v) - F_3(w-L_1, u+L_2, v) + F_3(w-L_1, u-L_2, v) + F_3(w_1+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_1+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_1-L_1, u+L_2, v) +$ $+ F_3(w_1-L_1, u-L_2, v) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(w_2+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_2+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_2-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_2-L_1, u-L_2, v) + F_3(w_3+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_3+L_1, u-L_2, v) -$ $- F_3(w_3-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_3-L_1, u-L_2, v) + F_3(w_4+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_4+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_4-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_4-L_1, u-L_2, v) +$ $+ F_3(w_5+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_5+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_5-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_5-L_1, u-L_2, v)] \}$
Dir. z Dir. x 2ª cam.	$\frac{\rho_1(1+k)}{16L_1L_2\pi} \{F_3(w+L_1, u+L_2, v) - F_3(w+L_1, u-L_2, v) - F_3(w-L_1, u+L_2, v) + F_3(w-L_1, u-L_2, v) + F_3(w_1+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_1+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_1-L_1, u+L_2, v) +$ $+ F_3(w_1-L_1, u-L_2, v) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(w_2+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_2+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_2-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_2-L_1, u-L_2, v) +$ $+ F_3(w_3+L_1, u+L_2, v) - F_3(w_3+L_1, u-L_2, v) - F_3(w_3-L_1, u+L_2, v) + F_3(w_3-L_1, u-L_2, v)] \}$
Dir. z Dir. y 1ª cam.	$\frac{\rho_1}{16L_1L_2\pi} \{F_3(w+L_1, v+L_2, u) - F_3(w+L_1, v-L_2, u) - F_3(w-L_1, v+L_2, u) + F_3(w-L_1, v-L_2, u) + F_3(w_1+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_1+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_1-L_1, v+L_2, u) +$ $+ F_3(w_1-L_1, v-L_2, u) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(w_2+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_2+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_2-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_2-L_1, v-L_2, u) + F_3(w_3+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_3+L_1, v-L_2, u) -$ $- F_3(w_3-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_3-L_1, v-L_2, u) + F_3(w_4+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_4+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_4-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_4-L_1, v-L_2, u) +$ $+ F_3(w_5+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_5+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_5-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_5-L_1, v-L_2, u)] \}$
Dir. z Dir. y 2ª cam.	$\frac{\rho_1(1+k)}{16L_1L_2\pi} \{F_3(w+L_1, v+L_2, u) - F_3(w+L_1, v-L_2, u) - F_3(w-L_1, v+L_2, u) + F_3(w-L_1, v-L_2, u) + F_3(w_1+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_1+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_1-L_1, v+L_2, u) +$ $+ F_3(w_1-L_1, v-L_2, u) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(w_2+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_2+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_2-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_2-L_1, v-L_2, u) +$ $+ F_3(w_3+L_1, v+L_2, u) - F_3(w_3+L_1, v-L_2, u) - F_3(w_3-L_1, v+L_2, u) + F_3(w_3-L_1, v-L_2, u)] \}$

$$(B_x)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 ; (B_x^1)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 ; (B_x^2)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh + z_1 - z_2)^2 ; (B_x^3)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh + z_1 + z_2)^2 ; (B_x^4)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh - z_1 - z_2)^2 ; (B_x^5)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh - z_1 + z_2)^2$$

$$(B_y)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 ; (B_y^1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 ; (B_y^2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2nh - z_1 - z_2)^2 ; (B_y^3)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2nh + z_1 + z_2)^2 ; (B_y^4)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2nh - z_1 - z_2)^2 ; (B_y^5)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2nh - z_1 + z_2)^2$$

$$(B_z)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$L_m = L_1 + L_2 ; L_d = L_1 - L_2 ; u = x_1 - x_2 ; v = y_1 - y_2 ; w = z_1 - z_2 ; w_1 = z_1 + z_2 ; w_2 = 2nh + z_1 - z_2 ; w_3 = 2nh + z_1 + z_2 ; w_4 = 2nh - z_1 - z_2 ; w_5 = 2nh - z_1 + z_2$$

$$F_2(u, a) = \int F_1(u, a) du = u \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) - \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$F_3(u, a, b) = -a + a \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2} \right) + u \ln \left(a + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2} \right) + 2b \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{u + a + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}}{b} \right)$$

Tabela 4.4 : Equação para o fator de distribuição de potencial próprio

Seg. eletrodo ⁷	Fator de distribuição de potencial
Direção x ou Direção - y	$\frac{\rho_1}{16L_1^2\pi} \{F_2(2L_1, a) - 2F_2(0, a) + F_2(-2L_1, a) + F_2(2L_1, a_1) - 2F_2(0, a_1) + F_2(-2L_1, a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_2(2L_1, a_2) - 2F_2(0, a_2) + F_2(-2L_1, a_2) + F_2(2L_1, a_3) - 2F_2(0, a_3) + F_2(-2L_1, a_3) + F_2(2L_1, a_4) - 2F_2(0, a_4) + F_2(-2L_1, a_4) + F_2(2L_1, a_5) - 2F_2(0, a_5) + F_2(-2L_1, a_5)]\}$
Direção - z 1ª camada	$\frac{\rho_1}{16L_1^2\pi} \{F_2(2L_1, 0) + F_2(-2L_1, 0) + F_2(2z_1 + 2L_1, 0) - 2F_2(2z_1, 0) + F_2(2z_1 - 2L_1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [2F_2(2L_1 + 2nh, 0) - 4F_2(2nh, 0) + 2F_2(-2L_1 + 2nh, 0) + F_2(2L_1 + 2z_1 + 2nh, 0) - 2F_2(2z_1 + 2nh, 0) + F_2(-2L_1 + 2z_1 + 2nh, 0) + F_2(2L_1 - 2z_1 + 2nh, 0) - 2F_2(-2z_1 + 2nh, 0) + F_2(-2L_1 - 2z_1 + 2nh, 0)]\}$
Direção - z 2ª camada	$\frac{\rho_2}{16L_1^2\pi} \{F_2(2L_1, 0) + F_2(-2L_1, 0) + F_2(2z_1 + 2L_1, 0) - 2F_2(2z_1, 0) + F_2(2z_1 - 2L_1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n [2F_2(2L_1 + 2nh, 0) - 4F_2(2nh, 0) + 2F_2(-2L_1 + 2nh, 0) + F_2(2L_1 + 2z_1 + 2nh, 0) - 2F_2(2z_1 + 2nh, 0) + F_2(-2L_1 + 2z_1 + 2nh, 0) + F_2(2L_1 - 2z_1 + 2nh, 0) - 2F_2(-2z_1 + 2nh, 0) + F_2(-2L_1 - 2z_1 + 2nh, 0)]\}$

4.1 Descrição do método

Com base nas equações que foram desenvolvidas nesse capítulo construiu-se uma rotina computacional com a finalidade de determinar o potencial em um ou mais pontos na superfície do solo devido à dispersão de corrente no solo, quando se usa uma malha com ou sem hastes. Abaixo tem-se a descrição da rotina:

1. Ler os dados :

1.1 Gerais :

- Número de pontos da superfície do solo onde o valor do potencial deve ser calculado; são dois valores representando as direções x ($qtdx$) e y ($qtdy$);
- Comprimento (m) nas direções x ($comp_x$) e y ($comp_y$) que definem até onde deve ser feito o mapeamento do potencial na superfície do solo;
- Coordenadas x ($coord_x$) e y ($coord_y$) que identifica o ponto de onde começa o mapeamento do potencial na superfície do solo. O passo é calculado da seguinte forma :

$$incrx = \frac{comp_x}{qtdx}$$

e somado a coordenada x ($coord_x = coord_x + incrx$) para varrer toda a área especificada pelo usuário. Da mesma forma é feito para y

- Corrente total em ampères (I);
- Profundidade do aterramento (H);

- Tolerância (τ) que limita o número de reflexões. O limite superior do somatório das reflexões começa a partir de 1 e é incrementado a cada passo. Este procedimento continua até que o erro relativo do somatório seja menor que a tolerância τ . O erro é calculado da seguinte forma :

- $$erro = \frac{\sum_{i=1}^n S_i - \sum_{i=1}^{n-1} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad \text{com } n = 2, 3, \dots$$

1.2 do solo :

- Resistividade da primeira camada, ρ_1 ;
- Resistividade da segunda camada, ρ_2 ;
- Espessura da primeira camada, h ;

1.3 do eletrodo :

- Posição do condutor no solo, em função das coordenadas x, y e z ;
- Direção do condutor (1 - eixo x ; 2 - eixo y ; 3 - eixo z);
- Comprimento do condutor (L);
- Número de divisões de cada condutor. Cada eletrodo horizontal pode ser particionado pelo usuário. Quanto maior o número de divisões, maior será o tempo de processamento, mas em contra partida, como já foi mostrado, os resultados serão mais próximos da realidade. A haste não será seccionada visto que isso é dificultado por ela estar entre as duas camadas do solo. O efeito desta limitação é pequeno pois normalmente

os sistemas de aterramento tem os eletrodos horizontais bem maiores que as hastes, e dessa forma pode-se dividir cada eletrodo em pedaços de tamanhos compatíveis aos da haste;

2. Definir os parâmetros :

- Fator de reflexão, k ;
- As coordenadas do centro de todos os segmentos do(s) condutor(es) ;

3. Determinar :

- O valor do GPR usando a equação (2.13);
- Com o GPR encontrar o valor da corrente que percorre cada segmento dos condutores horizontais usando as equações das tabelas (4.3) e (4.4);
- Com o GPR encontrar o valor da corrente que percorre as hastes usando as equações das tabelas (4.3) e (4.4);
- Obtido o valor das correntes em cada segmento dos condutores e nas hastes, encontrar o potencial na área de mapeamento definida pelo usuário, usando as equações da tabela (4.2).

5. SIMULAÇÃO DE MALHAS DE ATERRAMENTO

Este capítulo trata da simulação de malhas de aterramento usando os dois programas desenvolvidos em linguagem FORTRAN 90 baseados nos capítulos III e IV deste trabalho. O programa relativo ao capítulo III será aqui referenciado como Método da Integral (MI) e o do capítulo IV como Método da Integral com Parâmetros Concentrados (MIPC). Também serão simuladas malhas de aterramento através de uma rotina onde o modelo do eletrodo é o *densidade de corrente constante* e o modelo de solo é o *homogêneo* (uma camada) para comparar os resultados com os programas aqui apresentados.

Da bibliografia consultada foram utilizados dois exemplos para servir como validação dos programas MI e MIPC, não sendo encontrado exemplos contendo hastes.

5.1 Simulação da malha de aterramento da SE de Barra do Peixe.

No artigo de VILLAS *et al.* (1986) encontram-se os dados referentes a subestação de Barra do Peixe do sistema CESP⁹. Trata-se de uma malha quadrada 240 x 240 m², constituída de 50 condutores uniformemente espaçados conforme a figura (5.1) e tabela (5.1).

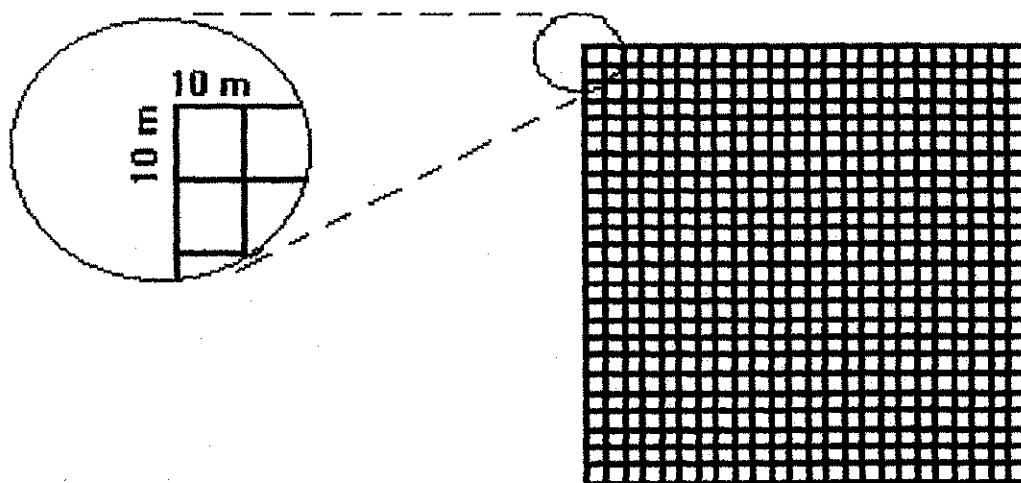


Figura 5.1. Malha da Subestação de Barra do Peixe.

Tabela 5.1. Dados relativos a malha da subestação de Barra do Peixe

Comprimento dos condutores	240 m
Diâmetro dos condutores	0,0126 m
Profundidade da malha	0,6 m
Corrente de dispersão	6000 A

Há dois modelos de solo de duas camadas : o modelo reduzido e o modelo ótimo, conforme explica CAVALCANTI (1991).

O modelo reduzido é o “equivalente” de duas camadas de um modelo de três ou mais camadas. A redução do modelo é feita através da fórmula de Helmut, a qual

⁹ Centrais Elétricas de São Paulo

considera que o campo elétrico em cada camada é uniforme e completamente horizontal. O modelo de várias camadas é obtido interpolando-se sua curva característica pelos pontos do plano resistividade versus profundidade correspondentes à média dos valores medidos válidos. Essa interpolação é geralmente feita por método gráfico.

O modelo ótimo é obtido ajustando-se a curva característica do modelo de duas camadas pelos pontos do plano $\rho \times h$ correspondentes à média dos valores medidos válidos. Esse ajuste é, de fato, um problema de otimização que pode ser resolvido por diferentes métodos. CAVALCANTI (1991) emprega o método dos mínimos quadrados. SILVA *et al.* (1996) utiliza o método de Newton. Os dois modelos de duas camadas do solo da subestação Barra do Peixe são dados na tabela (5.2), conforme VILLAS *et al.* (1986).

Tabela 5.2. Dados do solo da subestação de Barra do Peixe

Modelo	$\rho_1, \Omega\text{m}$	$\rho_2, \Omega\text{m}$	Altura 1ª camada, (m)
Reduzido	3.181	500	3,2
Ótimo	3.400	553,5	3,5

Para efeito de levantamento do potencial na superfície do solo, foi tomada uma área de mapeamento de $300 \times 300 \text{ m}^2$ que se sobrepõe por completo à malha (figura 5.2). O resultado da simulação é mostrado na figura (5.3).

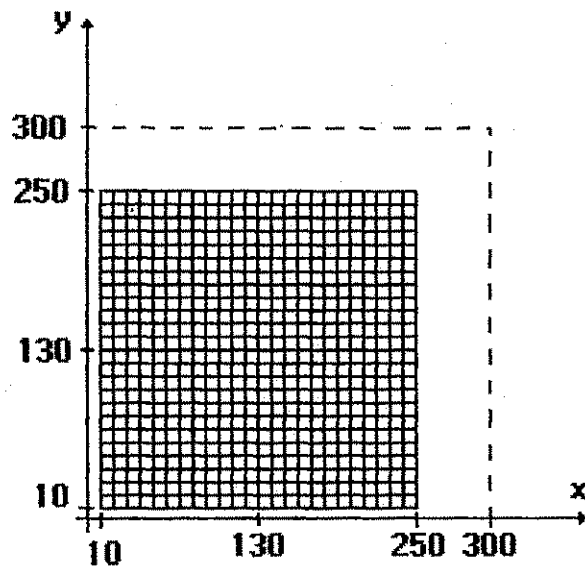


Figura 5.2. Referencial e área de mapeamento escolhidos para a malha da Subestação de Barra do Peixe.

Valores particulares resultantes da simulação são comparados com os correspondentes obtidos por VILLAS *et al.* (1986). Os resultados são mostrados na tabela (5.3) sendo denominados valores de referência (VILLAS *et al.*, 1986) e valores calculados. A resistência de malha é encontrada dividindo-se o valor de *GPR* pela corrente de dispersão. O potencial de malha que é o potencial máximo de toque visto dentro de uma malha, é a diferença entre o *GPR* e o menor potencial encontrado na superfície do solo. O potencial de passo é a maior diferença entre potenciais com uma distância de um metro na superfície do solo. O potencial de passo só foi encontrado pelos programas desenvolvidos neste trabalho.

Tabela 5.3. Valores calculados para a subestação de Barra do Peixe

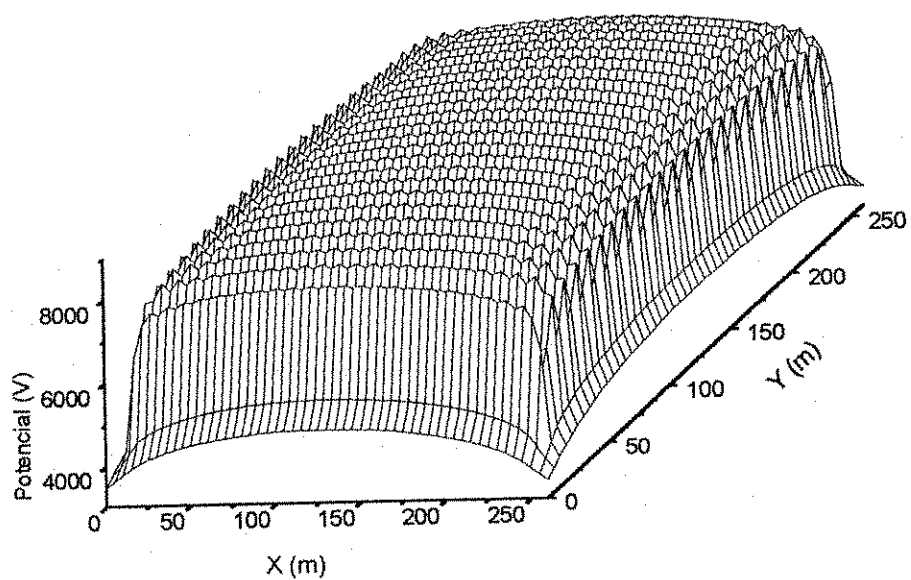
Modelo	Grandeza	Referência*	Calculado (MI)	Calculado (MIPC)
Reduzido	Resistência de malha, Ω	1,78	1,74	1,75
	Potencial de malha, V	4873	4784	4905
	GPR, kV	10,56	10,44	10,52
	Potencial de passo	---	893,5	876,5
Ótimo	Resistência de malha, Ω	1,74	1,72	1,73
	Potencial de malha, V	5039	4942	5099
	GPR, kV	10,44	10,3	10,36
	Potencial de passo, V	---	986,51	906,41

(*) VILLAS *et al.*(1986)

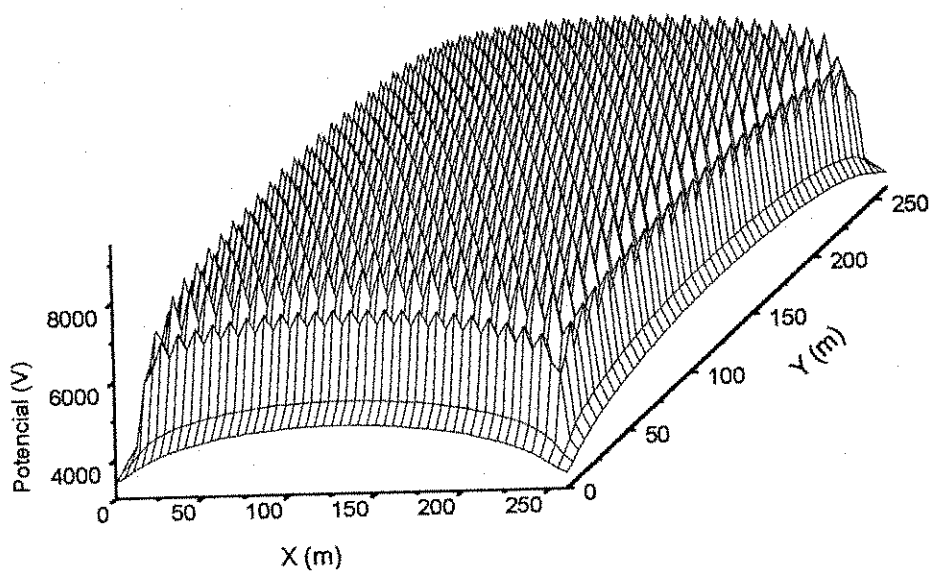
Os valores máximos que os potenciais de toque e de passo possam vir a assumir determinam se o sistema de aterramento é ou não seguro para as pessoas e equipamentos.

Nota-se que os valores dos programas MI e MIPC concordam satisfatoriamente com os valores de referência, visto que em nenhum caso o erro atingiu 5%. Essa comparação serve como validação da rotina implementada.

Comparando-se agora os dois programas desenvolvidos neste trabalho observa-se também pela tabela (5.3) e pela figura (5.3) que os resultados são muito próximos, tendo pequenas variações devido as diferenças inerentes aos procedimentos adotados em cada um.



(a)



(b)

Figura 5.3. Potencial na superfície do solo (modelo ótimo) da subestação de barra do peixe :

(a) Rotina método da integral ;

(b) Rotina método da integral com parâmetros concentrados.

5.2 Simulação de uma malha assimétrica.

Como uma segunda aplicação tomou-se a malha vista em DAWALIBI & MUKHEDKAR(1975) de onde tiraram-se os dados mostrados na tabela (5.4). Usando os programas MI e MIPC foram calculados os potenciais em três direções transversais à malha, indicadas na figura (5.4). A curva de potencial da superfície do solo na região coberta pela malha é mostrada na figura (5.5). Os perfis de potencial nas três direções especificadas obtidos com as rotinas desenvolvidas nesse trabalho e por DAWALIBI & MUKHEDKAR(1975) são vistos nas figuras (5.6) e (5.7) respectivamente. Os resultados são coincidentes, o que mais uma vez valida as rotinas desenvolvidas.

Tabela 5.4. Dados relativos a malha da figura 5.4

Resistividade ρ_1	200 Ωm
Resistividade ρ_2	800 Ωm
Profundidade da malha	0,2 m
altura 1ª camada (h)	4,0 m
Corrente de dispersão	100 A

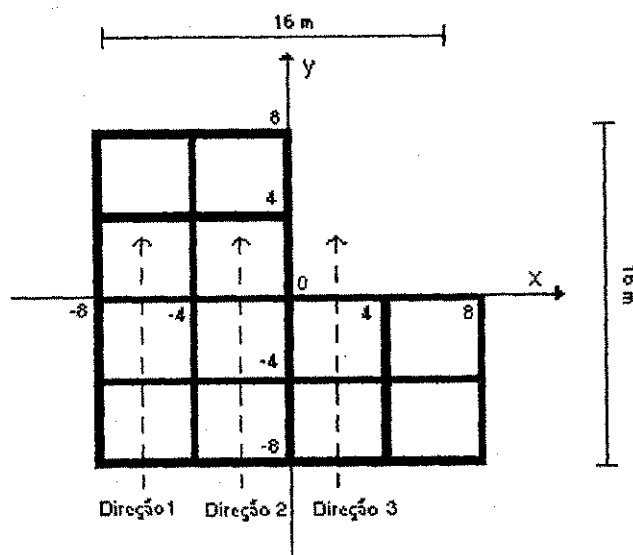
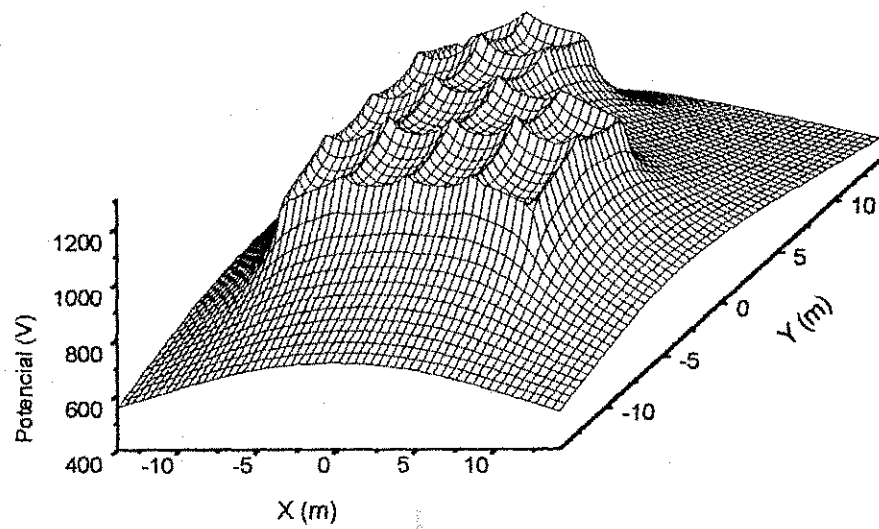
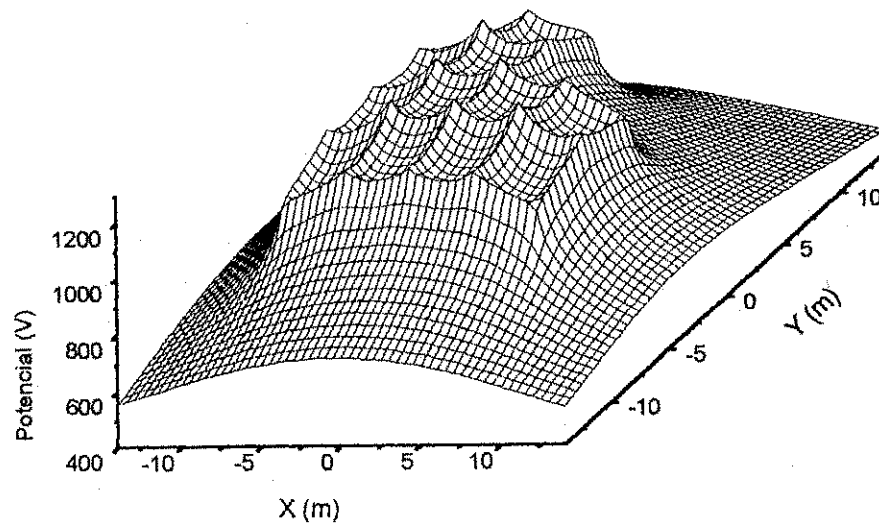


Figura 5.4. Referencial e direções de mapeamento escolhidos assimétrica de 10 condutores.



(a)



(b)

Figura 5.5. Potencial na superfície do solo da malha assimétrica :

(a) Rotina método da integral ;

(b) Rotina método da integral com parâmetros concentrados.

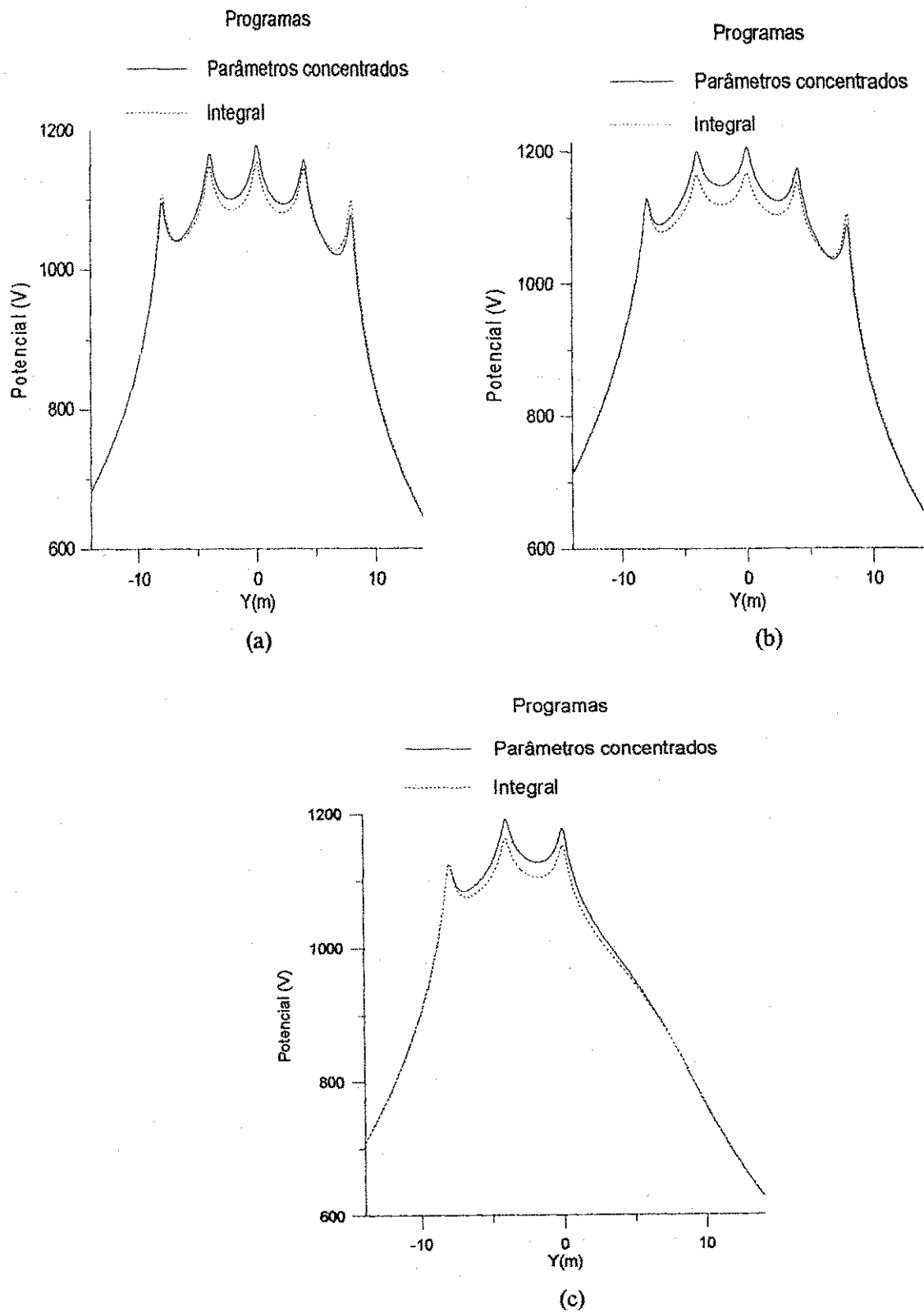


Figura 5.6. Potencial em três direções da superfície do solo (rotinas MI e MIPC) :
 (a) $x = -6.0 \text{ m}$; (b) $x = -2.0 \text{ m}$; (c) $x = 2.0 \text{ m}$.

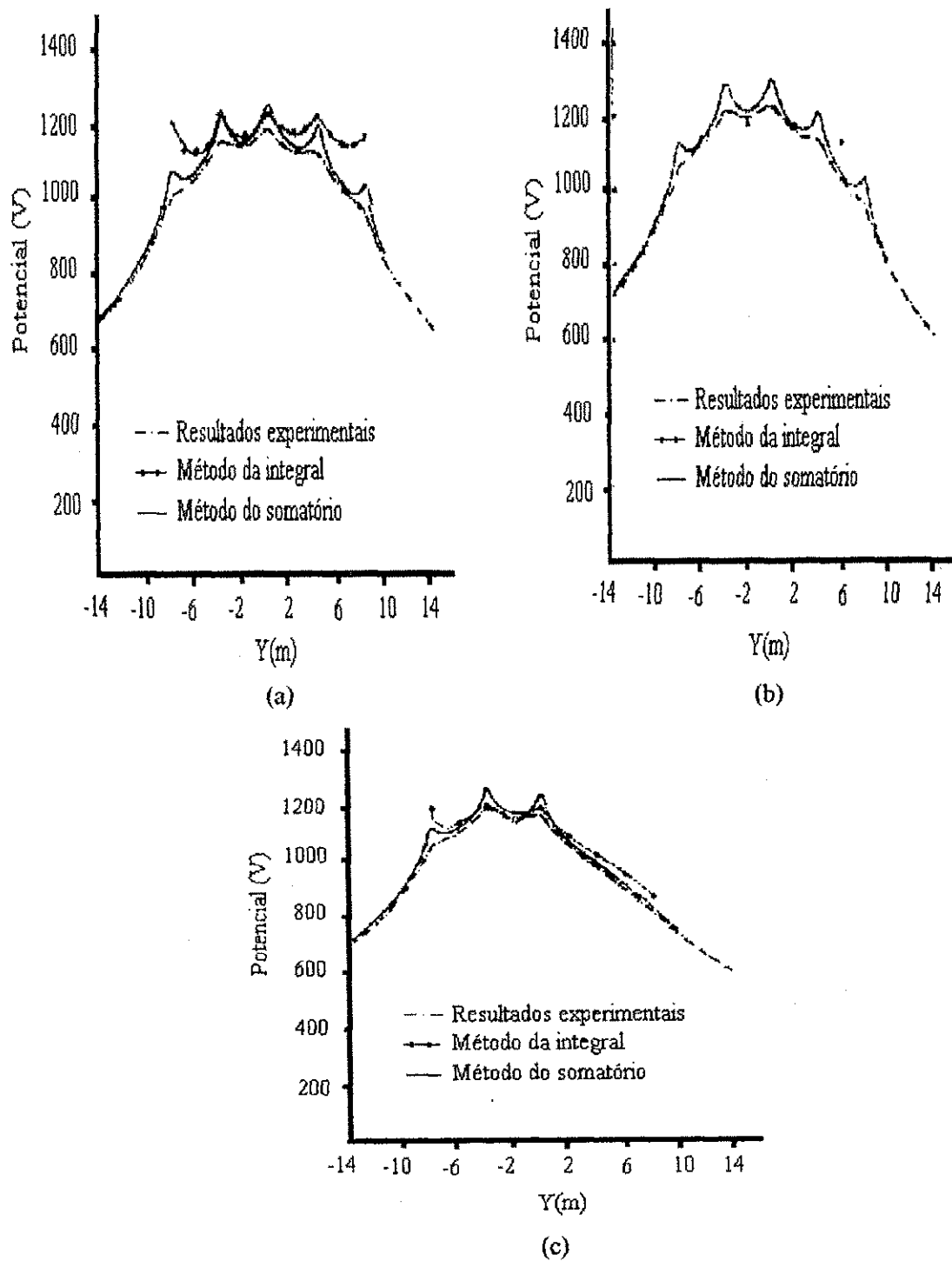


Figura 5.7. Potencial em três direções da superfície do solo (DAWALIBI & MUKHEDKAR) :

(a) $x = -6.0$ m ; (b) $x = -2.0$ m ; (c) $x = 2.0$ m .

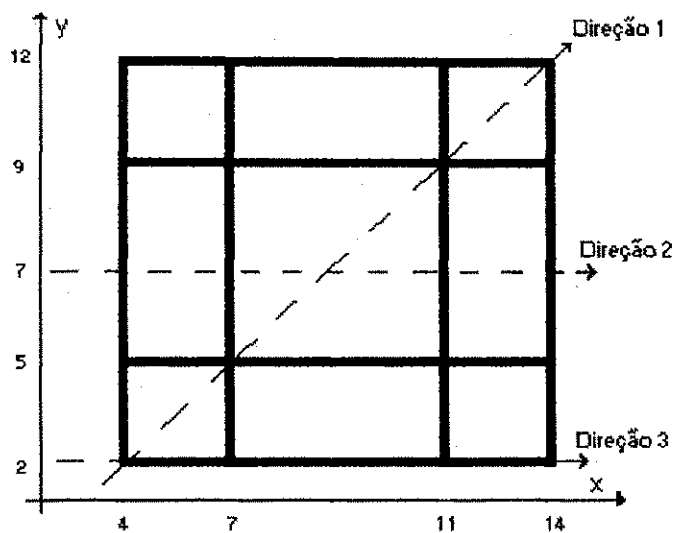
5.3 Simulação de uma malha com hastes.

Até agora, as configurações de eletrodo estudadas foram todas constituídas de elementos horizontais. Entretanto, é sabido que muitas configurações de malhas incluem também hastes, as quais melhoram sobremaneira o desempenho dos sistemas de aterramento. Neste exemplo será mostrado as diferenças de potenciais que ocorrem entre malhas com e sem hastes.

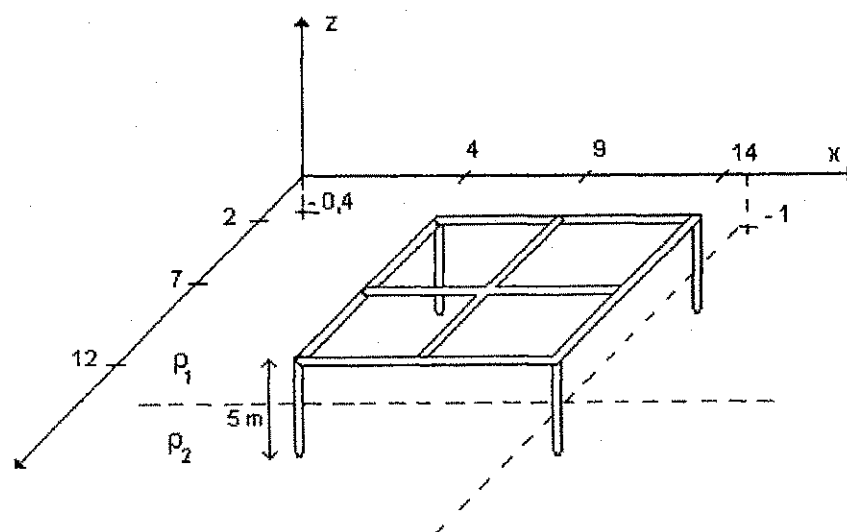
Serão simuladas duas malhas de aterramento; a primeira terá 8 condutores horizontais de 10 m e a segunda malha com 6 condutores horizontais de 10 m e 4 hastes de 5 m, ambas perfazendo um total de 80 m de eletrodo. A configuração das malhas é mostrada na figura (5.8) e os dados são mostrados na tabela (5.5). Foram calculados os potenciais em três direções transversais as malhas (figura 5.8a), as quais são mostradas na figura (5.9). O levantamento completo do potencial na superfície do solo da malha é mostrada na figura (5.10).

Tabela 5.5. Dados relativos as malhas simuladas na seção 5.3.

Resistividade ρ_1	400 Ωm
Resistividade ρ_2	100 Ωm
Profundidade da malha	0,4 m
Altura 1ª camada (h)	1,0 m
Corrente de dispersão	10 A



(a)



(b)

Figura 5.8. Configuração das malhas de aterramento : (a) malha com 8 condutores ;
(b) malha com 6 condutores e 4 hastes.

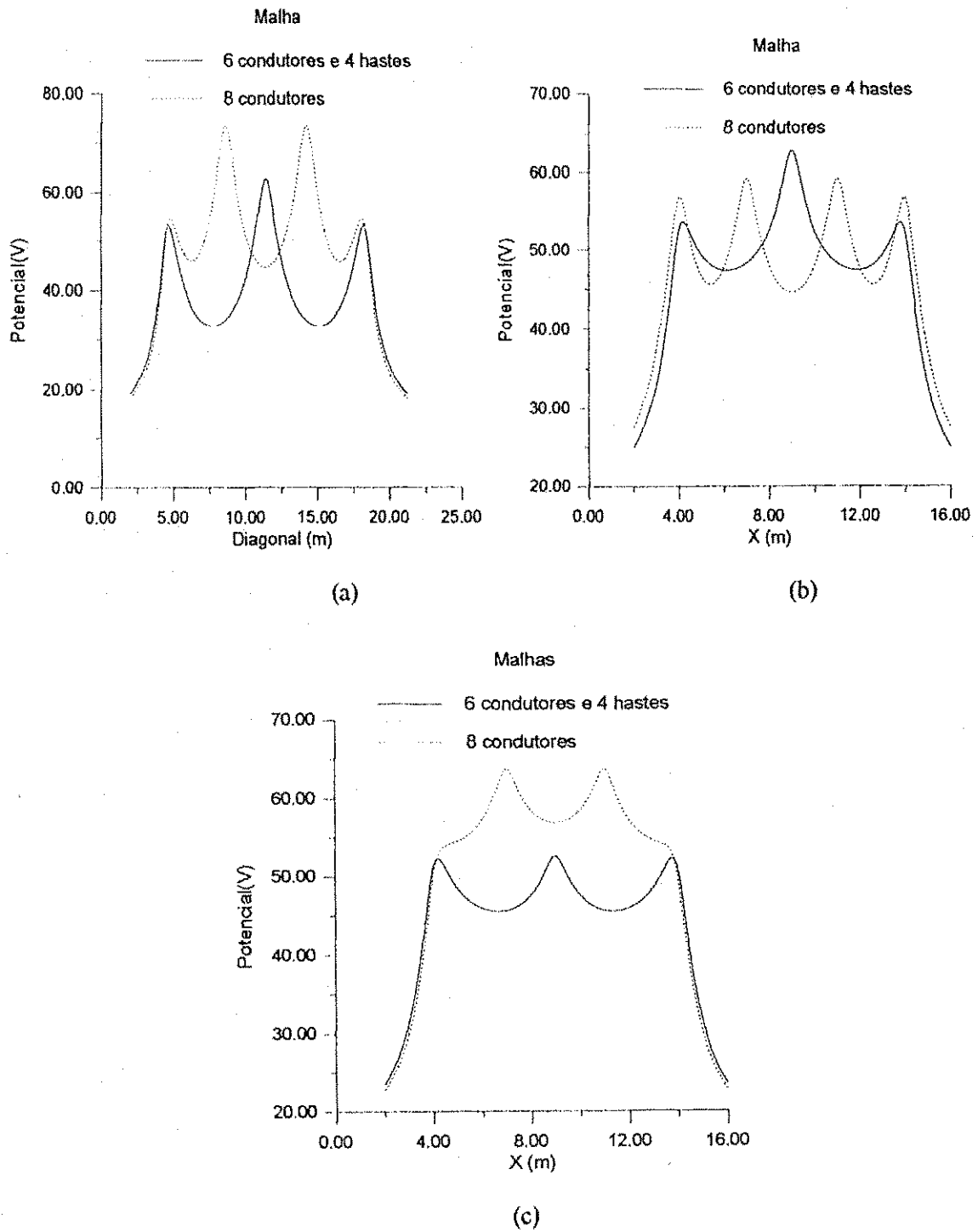
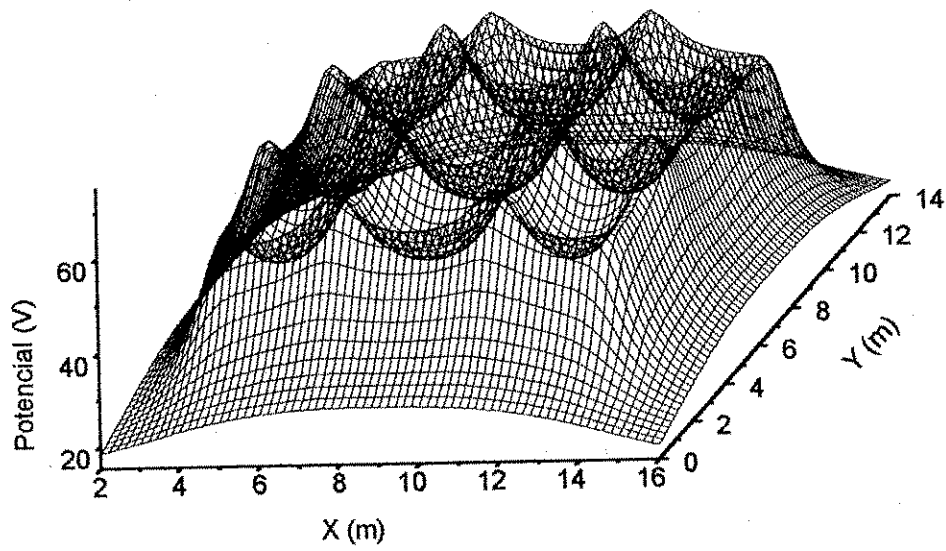
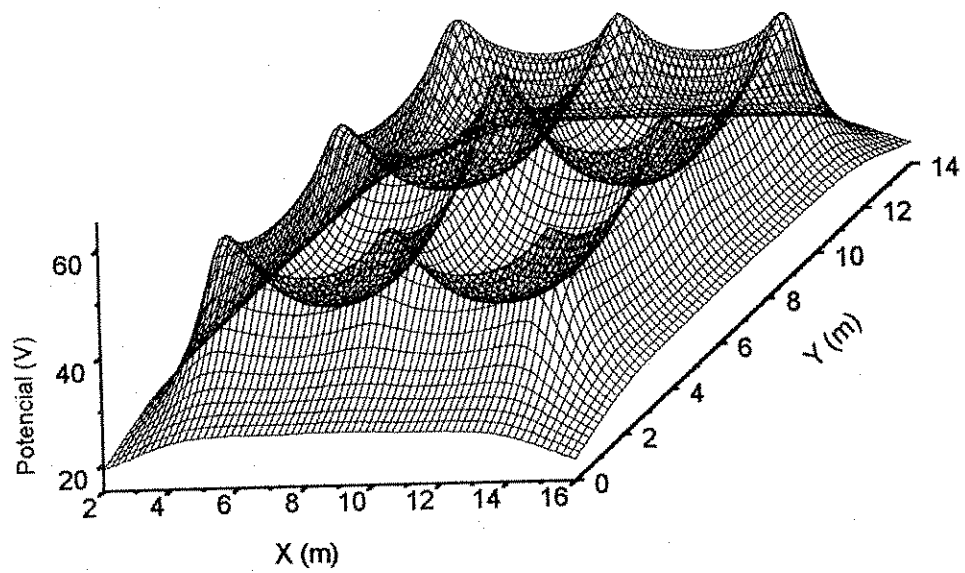


Figura 5.9. Potencial na superfície do solo : (a) direção 1 ; (b) direção 2 ; (c) direção 3.



(a)



(b)

Figura 5.10. Potencial na superfície do solo : (a) malha com 8 condutores ;
 (b) malha com 6 condutores e 4 hastes.

Comparando-se os gráficos vemos que apesar de usar o mesmo comprimento de eletrodo nas duas malhas, a malha com hastes produz um potencial na superfície do solo de menor valor que a malha só com condutores. O maior potencial produzido pela malha com 8 condutores é de 73,738 V enquanto que na malha com hastes encontramos um potencial máximo de 62,875 V.

5.4 Simulação de malha com rotina obtida de outros modelos de eletrodo e solo.

Tomando a malha com 8 condutores do exemplo anterior e usando uma rotina onde o eletrodo é modelado por densidade de corrente constante e o solo é considerado homogêneo. O resultado obtido é mostrado na figura (5.11).

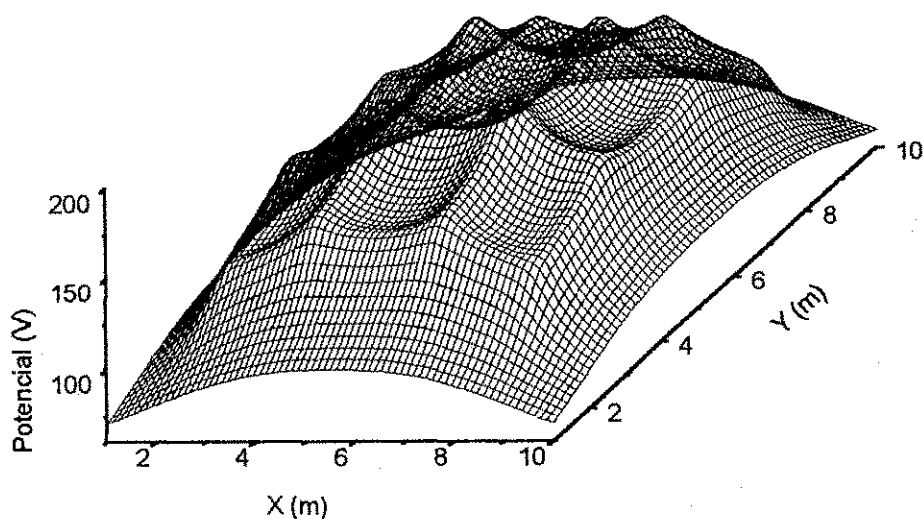


Figura 5.11. Potencial na superfície do solo da malha com 8 condutores.
Modelo densidade de corrente constante e solo homogêneo.

Comparando a figura (5.11) com a figura (5.10a) se vê que a forma das duas curvas são parecidas mas os valores de potenciais são bastante diferentes. O maior potencial produzido pela malha usando as rotinas MI e MIPC foi de 73,738 V enquanto

que neste exemplo se encontra um potencial máximo de 191,415 V. Essa variação aparece exatamente por causa das simplificações que os modelos de solo homogêneo e eletrodo de densidade de corrente constante emprestam aos cálculos. Os resultados são obtidos com bem menos processamento computacional mas em contra partida ficam muito distantes dos resultados de outros modelos mais sofisticados.

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudaram-se modelos de solo e de eletrodo, essenciais para a simulação de malhas de aterramento. Tais modelos foram cuidadosamente comparados, de modo que suas diferenças fossem salientadas.

Dos modelos de eletrodo estudados, escolheu-se o do potencial constante para a etapa subsequente do trabalho, que se constituiu no desenvolvimento de duas rotinas de cálculo de potencial na superfície do solo, decorrente da dispersão de corrente. O modelo de potencial constante mostrou-se adequado, pois apesar de sua relativa simplicidade, permitia que a não uniformidade da corrente pudesse ser levada em conta. Como ficou demonstrado, esse fato é realmente importante.

Para o solo foi utilizado o modelo de duas camadas, que só perde em simplicidade para o modelo de solo uniforme. Apesar da simplicidade, esse modelo é válido na maioria das vezes. No Nordeste em particular, três quartos dos solos podem ser modelados em duas camadas (CAVALCANTI, 1991).

A partir do método matricial modificado foram desenvolvidos dois programas computacionais na linguagem FORTRAN 90. Essas rotinas são diferentes quanto a forma como as integrais são calculadas internamente. O método da integral fundamenta-se em três equações (3.11), (3.40) e (3.44), através das quais a corrente dispersada por cada segmento é calculado. Neste método o potencial no ponto central do segmento é

considerado constante. No método da integral com parâmetros concentrados há vinte e duas equações (tabelas 4.2, 4.3 e 4.4) que correspondem a todas as possibilidades de configuração entre os elementos que constituem uma malha de aterramento convencional. A corrente dispersada por cada segmento é encontrada considerando que a média do potencial de todos os pontos sobre o eletrodo é constante.

Os resultados de cada rotina foram comparados entre si e também com os resultados de trabalhos anteriores. A semelhança encontrada nestas comparações serviram como validação das rotinas desenvolvidas.

Ao comparar as rotinas implementadas neste trabalho com outra baseada nos modelos de eletrodo densidade de corrente constante e solo homogêneo, se percebeu que os valores de potenciais encontrados foram bastante diferentes. Essa variação apareceu exatamente por causa das simplificações que os modelos de solo homogêneo e eletrodo densidade de corrente constante emprestaram aos cálculos. Os resultados foram obtidos com bem menos processamento computacional, mas em contra partida ficaram muito distantes dos resultados obtidos com os modelos mais sofisticados.

De acordo com resultados já conhecidos de alguns sistemas de aterramento, o uso de hastes na malha acarretou redução geral do potencial, reafirmando a importância de seu uso, pois produz um grau maior de segurança para os sistemas elétricos. Utilizou-se nas simulações um *solo positivo*¹⁰. Neste tipo de solo, a eficiência da haste é maior, uma vez que a maior parte dela está num meio de menor resistividade, ao contrário dos condutores horizontais, os quais são completamente contidos pelo meio de maior resistividade. O solo positivo é o mais comum, uma vez que a umidade se

¹⁰ Solo cujo valor de resistividade da primeira camada é maior que o da Segunda.

mantém mais facilmente no interior do solo que na superfície. A exceção ocorre quando o subsolo é muito seco ou bastante rochoso.

Usualmente variáveis importantes de um sistema de aterramento como resistência de terra, GPR, potencial de malha entre outras são calculadas através de fórmulas empíricas que exigem uma grande quantidade de operações. Este tipo de procedimento além de ser cansativo é bastante rudimentar. O empirismo torna os resultados pouco confiáveis, distantes dos valores reais. As rotinas desenvolvidas neste trabalho encontram essas variáveis rapidamente utilizando modelos confiáveis. Dessa forma o computador se torna uma ferramenta eficiente para o engenheiro que trabalha com projetos e manutenção de sistemas de aterramento.

Nesta instituição foram realizados outros trabalhos sobre sistemas de aterramento, que analisaram isoladamente os modelos de eletrodo do potencial constante e do solo de duas camadas. Tiveram como base expressões para o potencial já encontradas na bibliografia. No presente trabalho os modelos referidos foram estudados em conjunto devido as suas vantagens, que já foram expostas nesta conclusão. As equações finais usadas nas rotinas computacionais foram completamente desenvolvidas no corpo deste trabalho, não sendo encontradas na bibliografia estudada.

A maior deficiência das rotinas implementadas está no limitado número de pontos de contorno tomados para efeito de definição do potencial comum da superfície do eletrodo. Sugere-se que o efeito da quantidade e distribuição desses pontos de contorno sobre o valor do potencial calculado seja pesquisado em trabalhos futuros.

Uma limitação dos programas é que só se aplicam a malhas retangulares (com ou sem hastes). Outra sugestão seria estender seu raio de aplicação a configurações não convencionais. Para isso o leque de alternativas (tab. 4.2, 4.3 e 4.4) deveria ser aberto.

Reconhece-se que isso proporciona um maior grau de complexidade ao programa, mas imagina-se que os recursos avançados do FORTRAN 90, que é uma linguagem orientada para objeto, pudessem ser explorados no sentido de viabilizar essa generalização.

Por último, se espera que as rotinas implementadas venham a ser empregadas na pesquisa de configurações que otimizem a distribuição do potencial do solo de duas camadas, a exemplo do que fez Mourente (1981) com respeito a solos uniformes.

Referências bibliográficas

- ANSI, IEEE. ANSI/IEEE Standard 80, IEEE guide for safety in AC substation grounding. New York : ANSI/IEEE, 1986.
- CAVALCANTI, A. P. Influência da distribuição de corrente elétrica em malhas de aterramento sobre o cálculo de potencial. Dissertação de mestrado. Campina Grande: UFPB. 1996.
- CAVALCANTI, C. V. A. Uma rotina computacional para estratificação : desenvolvimento e aplicação a solos do Nordeste. Dissertação de mestrado. Campina Grande: UFPB. 1991.
- CHOW L. Y., YANG, J. J., SRIVASTAVA, K. D. Grounding resistance of buried electrodes in multi-layer earth predicted by simple voltage measurements along Earth surface - A theoretical discussion. IEEE Trans. On Power Delivery, v.10,n. 2, p. 707-715.,abr. 1995.
- DAWALIBI, F. P., MUKHEDKAR, D. Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure, part I - analytical study. IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, v. PAS-94, p. 252-257, mar/abr. 1975.
- DAWALIBI, F. P., MUKHEDKAR, D. Parametric analysis of grounding grids. IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, v. PAS-98, n. 5, p. 1659-1668, set/out. 1979.
- DAWALIBI, F. P., SOUTHEY, R.D. Behavior of grounding systems in multiplier soils: Aparametric analysis. IEEE Trans. On Power Delivery, v. 9,n. 1, p. 334-340, janeiro 1994.
- ENDRENY, J. Evaluation of resistivity tests for design of station grounds in non-uniform soil. IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, v. PAS-84, n. 12, p. 966-970, dez. 1963.
- IEEE, IEEE brown book, IEEE standard 399-1980, power system analysis. New York: 1980.
- HARRINGTON, R.F., Introduction to Electromagnetic Engineering. New York: MacGraw-Hill. 1958. 312p.
- KRAUS, J.D., CARVER, K.R. Eletromagnetismo, 2ª. ed., Rio de Janeiro : Guanabara, 1986.

- KOSTIC, M. B., SHIRKOOHI, G. H. Numerical analysis of a class of foundation grounding systems surrounded by two-layers soil. IEEE Trans. On Power Delivery, v. 8,n. 3, p. 1080-1087. Jul. 1993.
- MELIOPOULOS, A. P. S. Power system grounding and transients : an introduction. New York: Marcel Dekker. 1988. 450p.
- MELIOPOULOS, A. P. S.,WEBB, R. P., JOY, E.B. Analysis of grounding systems. IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems, v.PAS-100,n. 3, p. 1039-1047, março. 1981.
- MOURENTE, P. B. Projeto de malha de terra em subestações – otimização da distribuição de potencial na superfície do solo. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ. 1981.
- SALAMA, M. M. A., EI S., CHOW, Y. L. A formula for resistance of substation grounding grid in two layer soil. IEEE Trans. On Power Delivery, v. 10,n. 3, p. 1255-1262.,Jul. 1995.
- SATO, S., ZAENGL, W.S. Effective grounding mesh calculation technique. IEEE Trans. On Power Delivery, v. 3,n. 1, p. 744-747. 1988.
- SEEDHER, H. R., ARORA, J. K. Estimation of two layer soil parameters using Wenner resistivity expressions. IEEE Trans. On Power Delivery, v.7,n. 3, p. 1213-1217, jul. 1992.
- SILVA, E.G.L., JUNIOR, M.F.M., OLIVEIRA,J.T. Estratificação do solo em duas camadas utilizando o método de Newton como técnica de otimização. Anais do XI Congresso Brasileiro de automática, Vol. 2. São Paulo-SP. 2 a 6 de setembro de 1996.
- SOUZA, E. V. N. Potenciais produzidos por dispersão de corrente em solos de duas camadas : Uma rotina computacional baseada no método do somatório modificado. Dissertação de mestrado. Campina Grande: UFPB. 1996.
- SUNDE, E. D. Earth conduction effects in transmission systems. New York: Dover Publications. 1968.
- SVERAK,J.G.et al., Simplified Analysis of Electrical Gradients above a ground grid, part II – The beauty of Improper Approximations for an Efficient Optimization of Progressively Spaced Grids Under a Dominant Safety constraint. IEEE Trans. On Power Delivery, v 4,n. 1, p. 272-279, jan. 1989.
- TAKAHASHI, T., KAWASE, T. Analysis of apparent resistivity in a multi-layer earth structure. IEEE Trans. On Power Delivery, v. 5,n. 2, p. 604-610., 1990.

VILLAS, J.E.T., MAIA, F.C., COSTA, V.S. Grupo VIII – Subestações, Equipamentos Elétricos e Materiais (GSE). Dimensionamentos de malhas de terra de S.E's em solos não-homogêneos. Anais do VIII SNPTEE. São Paulo, 4 a 8 de maio 1986.

APÊNDICE

Será mostrado abaixo, como exemplo, a dedução das equações VDF_x , VDF_x , $VDF_{x=0}$ e $VDF_{x=2}$. No capítulo IV é mostrado nas tabelas 4.2, 4.3 e 4.4, todas as equações para os fatores de distribuição de potencial VDF .

A. Fator de distribuição de potencial correspondente a um segmento na direção x e um ponto na 1ª camada - VDF_x

O objetivo será o cálculo do potencial em um ponto genérico $P(x,y,z)$ da 1ª camada, devido ao fluxo de corrente I_1 do segmento do eletrodo 1 com centro em (x_1, y_1, z_1) , conforme figura A.1, esquecendo a presença de todos os outros seguimentos que porventura venham a existir. A corrente I_1 é considerada uniformemente distribuída na superfície do segmento 1. A corrente elétrica em um segmento infinitesimal dx do condutor é $\frac{I_1 dx_j}{2L_1}$. A contribuição dessa corrente para o potencial em um ponto $P(x,y,z)$

é dada pela equação (2.6) da seguinte forma :

$$dVp = \frac{\rho_1 I_1}{8\pi L_1} dx_j \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} + \frac{1}{r_{nj}^+} + \frac{1}{r_{nj}^-} \right) \right) \quad (A.1)$$

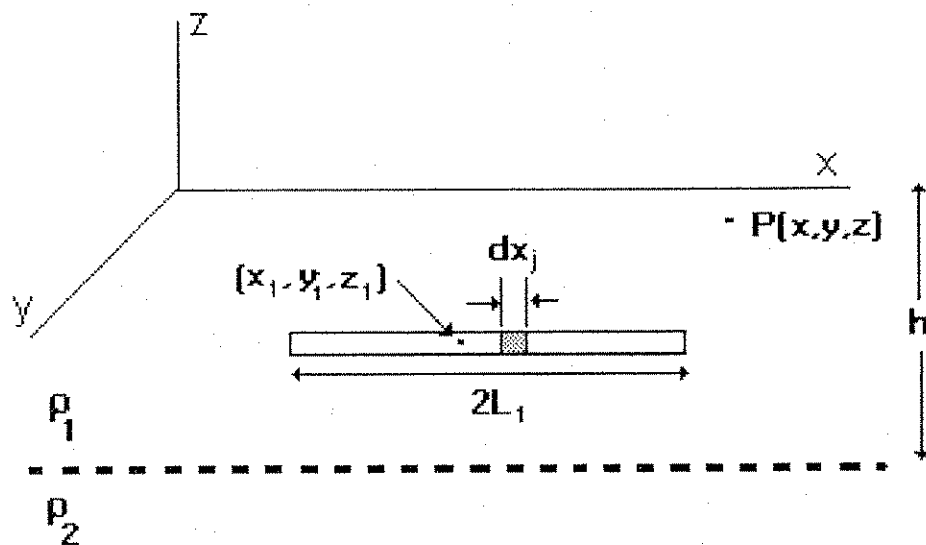


Figura A.1. Segmento de um eletrodo representado por uma fonte linear de densidade de corrente constante.

A equação (A.1) pode ser combinada com as equações (2.6) e reorganizada :

$$dVp = \frac{\rho_1 l_1 dx_j}{8\pi L_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A_x)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^1)^2 + (x_j - x)^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{1}{\sqrt{(A_x^2)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^3)^2 + (x_j - x)^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(A_x^4)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^5)^2 + (x_j - x)^2}} \right] \right\} \quad (\text{A.2a})$$

$$\text{onde } (A_x)^2 = (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \quad (\text{A.2b})$$

$$(A_x^1)^2 = (y_1 - y)^2 + (z_1 + z)^2 \quad (\text{A.2c})$$

$$(A_x^2)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh + z_1 - z)^2 \quad (\text{A.2d})$$

$$(A_x^3)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh + z_1 + z)^2 \quad (\text{A.2e})$$

$$(A_x^4)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh - z_1 - z)^2 \quad (\text{A.2f})$$

$$(A_x^5)^2 = (y_1 - y)^2 + (2nh - z_1 + z)^2 \quad (\text{A.2g})$$

O potencial no ponto $P(x,y,z)$ é resultante da contribuição de todas as fontes infinitesimais que constituem o segmento de eletrodo. Logo,

$$Vp = \int_{x_1 - L_1}^{x_1 + L_1} dVp = VDI_x \quad (\text{A.3})$$

Resolve-se a integral acima com a ajuda da equação (3.34) e o resultado será :

$$VDI_x = \frac{\rho_1 l_1}{8\pi L_1} \left\{ f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^1) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^2) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^3) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^4) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^5) \right] \right\} \quad (\text{A.4})$$

onde a função $f_1(u_1, u_2, A)$ é mostrada na equação (3.39).

B. Fator de distribuição de potencial correspondente a dois segmentos na direção $x - VDF_{x-x}$

O objetivo será o cálculo do VDF , devido à presença de dois segmentos de eletrodos na mesma direção, conforme figura B.1. As coordenadas dos centros dos segmentos e seus comprimentos são respectivamente (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , $2L_1$ e $2L_2$. A corrente total que flui pelo segmento do eletrodo 1 para o solo é I_1 . Um potencial “transferido” surge no segmento do eletrodo 2, devido a presença de campos magnéticos no solo, originados pela corrente I_1 .

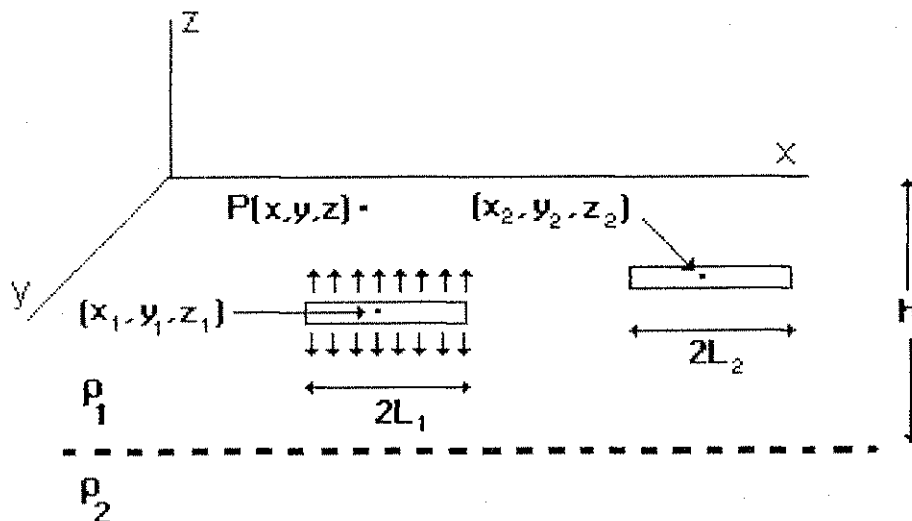


Figura B.1 segmento de eletrodos de comprimento $2L_1$ e $2L_2$.

O problema se resume em encontrar uma equação VDF para o potencial médio no centro do segmento do condutor 2, devido à contribuição de todos os pontos ao longo do comprimento do eletrodo 2.

Em princípio, admite-se que o eletrodo 2 não existe. As coordenadas do ponto onde se deseja encontrar o potencial são (x, y_2, z_2) , onde x varia no intervalo $x_2 - L_2 \leq x \leq x_2 + L_2$. O potencial é obtido da equação (B.1) :

$$V_2(x, y_2, z_2) = \frac{\rho_1 L_1}{8\pi L_1} \left\{ f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x^1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x^2) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x^3) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x^4) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, B_x^5) \right] \right\} \quad (\text{B.2a})$$

$$\text{onde } (B_x)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2; \quad (\text{B.2b})$$

$$(B_x^1)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2; \quad (\text{B.2c})$$

$$(B_x^2)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh + z_1 - z_2)^2; \quad (\text{B.2d})$$

$$(B_x^3)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh + z_1 + z_2)^2; \quad (\text{B.2e})$$

$$(B_x^4)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh - z_1 - z_2)^2; \quad (\text{B.2f})$$

$$(B_x^5)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (2nh - z_1 + z_2)^2. \quad (\text{B.2g})$$

O potencial médio no centro do segmento do eletrodo 2 é definido pela seguinte equação :

$$V_2 = \frac{1}{2L_2} \int_{x_2 - L_2}^{x_2 + L_2} V_2(x, y_2, z_2) dx = VDI'_{x-x} \quad (\text{B.3})$$

Resolvendo-se a equação (B.3) com a ajuda da seguinte integral indefinida,

$$F_2(u, a) = \int F_1(u, a) du = u \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) - \sqrt{u^2 + a^2} \quad (\text{B.4})$$

A expressão final para VDI'_{x-x} será então :

$$\begin{aligned}
VDF_{x-x} = M \{ & F_2(u + L_m, B_x) - F_2(u + L_d, B_x) - F_2(u - L_d, B_x) + F_2(u - L_m, B_x) + \\
& + F_2(u + L_m, B_x^1) - F_2(u + L_d, B_x^1) - F_2(u - L_d, B_x^1) + F_2(u - L_m, B_x^1) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_2(u + L_m, B_x^2) - F_2(u + L_d, B_x^2) - F_2(u - L_d, B_x^2) + F_2(u - L_m, B_x^2) + \\
& + F_2(u + L_m, B_x^3) - F_2(u + L_d, B_x^3) - F_2(u - L_d, B_x^3) + F_2(u - L_m, B_x^3) + \\
& + F_2(u + L_m, B_x^4) - F_2(u + L_d, B_x^4) - F_2(u - L_d, B_x^4) + F_2(u - L_m, B_x^4) + \\
& + F_2(u + L_m, B_x^5) - F_2(u + L_d, B_x^5) - F_2(u - L_d, B_x^5) + F_2(u - L_m, B_x^5) \} \quad (B.5a)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } L_m = L_1 + L_2 \quad (B.5b)$$

$$L_d = L_1 - L_2 \quad (B.5c)$$

$$u = x_1 - x_2 \quad (B.5d)$$

$$M = \frac{\rho_1 I_1}{16\pi d_1 L_2} \quad (B.5e)$$

C. Fator de distribuição de potencial correspondente a um segmento na direção x e outro na direção z (1ª camada) - VDF_{x-z-1}

Considera-se o segmento de eletrodo na direção x de comprimento $2L_1$ centrado nas coordenadas (x_1, y_1, z_1) . Da mesma forma, o segmento na direção z, contido na 1ª camada, tem comprimento $2L_2$ centrado nas coordenadas (x_2, y_2, z_2) . Uma corrente I_1 percorre o segmento 1. O objetivo é calcular o potencial "transferido" para o segmento 2, devido à circulação de corrente do segmento 1. A figura (C.1) mostra a configuração dos eletrodos em suas respectivas direções.

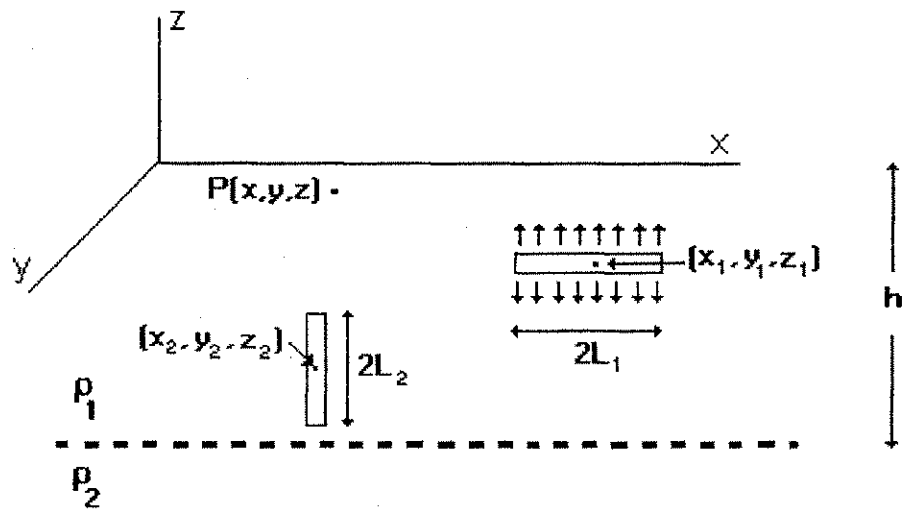


Figura C.1. Segmentos de eletrodos nas direções x e z respectivamente com o eletrodo na direção z contido na 1ª camada.

O problema se resume em encontrar uma equação *VDF* para o potencial médio no centro do segmento do condutor 2, devido à contribuição de todos os pontos ao longo do comprimento do mesmo condutor. As coordenadas do ponto onde se deseja encontrar o potencial são (x_2, y_2, z) , onde z varia no intervalo $z_2 - L_2 \leq z \leq z_2 + L_2$.

O potencial médio no centro do segmento do eletrodo 2 é definido pela seguinte equação :

$$V_2 = \frac{1}{2L_2} \int_{z_2-L_2}^{z_2+L_2} V_2(x_2, y_2, z) dz = VDF_{x_2-z} \quad (C.1)$$

A integral (C.1) é resolvida com o auxílio da seguinte integral indefinida :

$$\begin{aligned} F_3(u, a, b) &= \int \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}) da \\ F_3(u, a, b) &= -a + a \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}) + u \ln(a + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}) \\ &\quad + 2btg^{-1} \left(\frac{u + a + \sqrt{u^2 + a^2 + b^2}}{b} \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

A expressão final para VDF_{x-z-1} será então :

$$\begin{aligned}
 VDF_{x-z-1} = M \{ & F_3(u + L_1, w + L_2, v) - F_3(u + L_1, w - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w + L_2, v) + F_3(u - L_1, w - L_2, v) + \\
 & + F_3(u + L_1, w_1 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_1 - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w_1 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_1 - L_2, v) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [F_3(u + L_1, w_2 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_2 - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w_2 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_2 - L_2, v) + \\
 & + F_3(u + L_1, w_3 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_3 - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w_3 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_3 - L_2, v) + \\
 & + F_3(u + L_1, w_4 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_4 - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w_4 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_4 - L_2, v) + \\
 & + F_3(u + L_1, w_5 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_5 - L_2, v) - \\
 & - F_3(u - L_1, w_5 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_5 - L_2, v)] \} \quad (C.3a)
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } v = y_1 - y_2 \quad (C.3b)$$

$$w = z_1 - z_2 \quad (C.3c)$$

$$w_1 = z_1 + z_2 \quad (C.3d)$$

$$w_2 = 2nh + z_1 - z_2 \quad (C.3e)$$

$$w_3 = 2nh + z_1 + z_2 \quad (C.3f)$$

$$w_4 = 2nh - z_1 - z_2 \quad (C.3g)$$

$$w_5 = 2nh - z_1 + z_2 \quad (C.3h)$$

D. Fator de distribuição de potencial correspondente a um segmento na direção x e outro na direção z (2^{a} camada) - VDF_{x-z-2}

Considera-se o segmento de eletrodo na direção x de comprimento $2L_1$ centrado nas coordenadas (x_1, y_1, z_1) . Da mesma forma, o segmento na direção z , contido na 2^{a} camada, tem comprimento $2L_2$ centrado nas coordenadas (x_2, y_2, z_2) . Uma corrente I_1 percorre o segmento 1. O objetivo é calcular o potencial “transferido” para o segmento 2, devido à circulação de corrente do segmento 1. A figura (D.1) mostra a configuração dos eletrodos em suas respectivas direções.

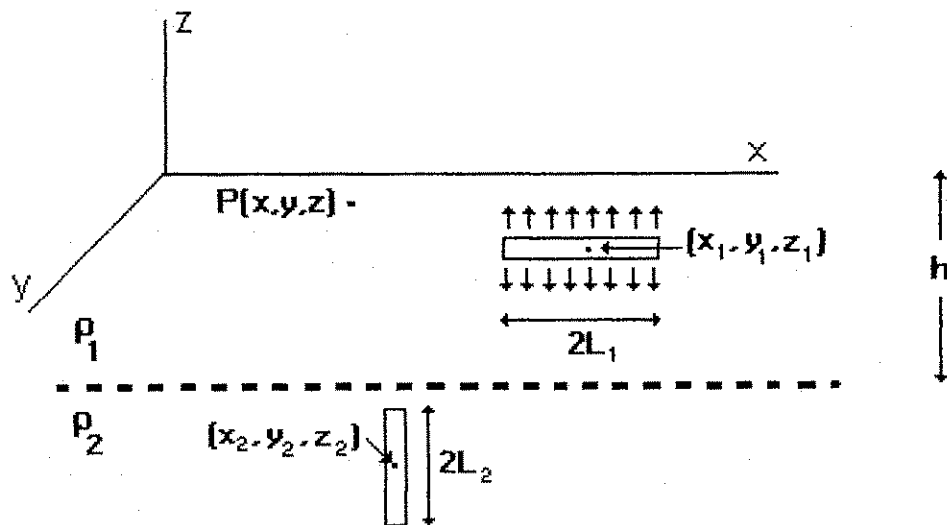


Figura D.1. Segmentos de eletrodos nas direções x e z respectivamente com o eletrodo na direção z contido na 2^{a} camada.

O problema se resume em encontrar uma equação VDF para o potencial médio no centro do segmento do condutor 2, devido à contribuição de todos os pontos ao longo do comprimento do mesmo condutor. As coordenadas do ponto onde se deseja encontrar o potencial são (x_2, y_2, z) , onde z varia no intervalo $z_2 - L_2 \leq z \leq z_2 + L_2$.

O potencial médio no centro do segmento do eletrodo 2 é definido pela seguinte equação :

$$V_3 = \frac{1}{2L_2} \int_{z_2-L_2}^{z_2+L_2} V_3(x_2, y_2, z) dz = VDF_{x-z-2} \quad (D.1)$$

onde V_3 é o potencial em qualquer ponto da 2ª camada de um segmento de eletrodo na direção X .

Usando o mesmo procedimento empregado para encontrar VDF_x e substituindo a equação (A.1) pela equação abaixo, derivada da equação (3.29),

$$dVp = \frac{\rho_1 I (1+K)}{8\pi L} \left(\frac{1}{r_{0j}^+} + \frac{1}{r_{0j}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left(\frac{1}{r_{nj+}^+} + \frac{1}{r_{nj-}^+} \right) \right) \quad (D.2)$$

Tem-se como resultado final,

$$V_3(x, y, z) = \frac{\rho_1 I (1+k)}{8\pi L_1} \left\{ f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^1) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^2) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^3) \right] \right\} \quad (D.3)$$

onde a função $f_j(u_1, u_2, R)$ é mostrada na equação (3.39).

Resolve-se a equação (D.1) com o auxílio da equação (C.2) :

$$VDF_{x-z-2} = M(1+k) \left\{ F_3(u + L_1, w + L_2, v) - F_3(u + L_1, w - L_2, v) - \right. \\ - F_3(u - L_1, w + L_2, v) + F_3(u - L_1, w - L_2, v) + \\ + F_3(u + L_1, w_1 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_1 - L_2, v) - \\ - F_3(u - L_1, w_1 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_1 - L_2, v) + \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[F_3(u + L_1, w_2 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_2 - L_2, v) - \right. \right. \\ - F_3(u - L_1, w_2 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_2 - L_2, v) + \\ + F_3(u + L_1, w_3 + L_2, v) - F_3(u + L_1, w_3 - L_2, v) - \\ \left. \left. - F_3(u - L_1, w_3 + L_2, v) + F_3(u - L_1, w_3 - L_2, v) \right] \right\} \quad (D.4)$$

E. Fator de distribuição de potencial correspondente ao próprio segmento que está na direção x - VDF_x

O cálculo dos VDF próprios requer uma consideração a respeito do raio do segmento do eletrodo em estudo.

O segmento do eletrodo é modelado com sendo uma fonte de corrente linear localizada sobre o eixo do eletrodo. Adota-se uma densidade de corrente constante ao longo da fonte linear, então o potencial do segmento do eletrodo é calculado pelo potencial médio da superfície cilíndrica do segmento do eletrodo. Devido ao fato de o comprimento do eletrodo ser muito maior do que o raio, as duas superfícies finais do segmento são ignoradas.

Sabendo que o eletrodo tem comprimento $2L$, corrente total I , a densidade de corrente da fonte linear é então definida por :

$$J = \frac{I}{2L} \quad (E.1)$$

Considera-se uma superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de condutor localizado sobre o eixo x , conforme ilustra a figura (E.1). Um comprimento infinitesimal dx é mostrado na mesma figura. Esse comprimento representa uma fonte de corrente infinitesimal de corrente $\frac{I dx}{2L}$. Considera-se agora um ponto $P(x,y,z)$ localizado na superfície cilíndrica e o potencial no mesmo devido à fonte infinitesimal será :

$$+ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}} \Bigg\} \quad (E.2)$$

$$dVp = \frac{\rho_1 I_1 dx_j}{8\pi d_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A_x)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^1)^2 + (x_j - x)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{1}{\sqrt{(A_x^2)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^3)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^4)^2 + (x_j - x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(A_x^5)^2 + (x_j - x)^2}} \right] \right\} \quad (E.2)$$

onde as variáveis A_x são definidas nas equações (A.2).

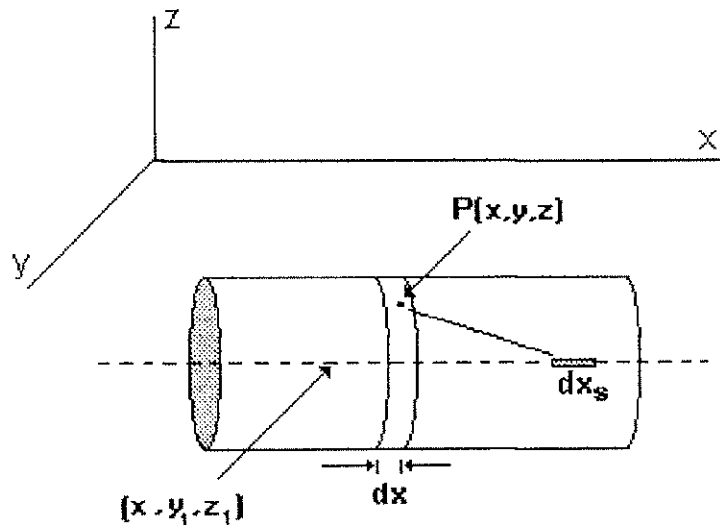


Figura E.1. Superfície cilíndrica infinitesimal de um segmento de eletrodo localizado em (x, y_1, z_1)

O potencial no ponto $P(x, y, z)$ será igual à soma das contribuições de todas as fontes infinitesimais :

$$Vp = \int_{x_1 - L_1}^{x_1 + L_1} dVp \quad (E.3)$$

Resolve-se a integral acima com a ajuda da equação (3.34) e o resultado será :

$$\begin{aligned}
VDF_x = \frac{\rho_1 I_1}{8\pi L_1} & \left\{ f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^1) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^2) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^3) + \right. \\
& \left. \left. + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^4) + f_1(x_1 + L_1 - x, x_1 - L_1 - x, A_x^5) \right] \right\} \quad (E.4)
\end{aligned}$$

onde a função $f_1(u_1, u_2, R)$ é mostrada na equação (3.39).

VDF_{xx} é calculado ao longo da superfície infinitesimal cilíndrica integrando ao longo de todo o segmento, logo :

$$VDF_{xx} = \int_{x_1 - L_1}^{x_1 + L_1} V_p dx \quad (E.5)$$

resultando na equação :

$$\begin{aligned}
VDF_{xx} = M & \left\{ F_2(2L_1, a) - 2F_2(0, a) + F_2(-2L_1, a) + F_2(2L_1, a_1) - 2F_2(0, a_1) + \right. \\
& + F_2(-2L_1, a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[F_2(2L_1, a_2) - 2F_2(0, a_2) + F_2(-2L_1, a_2) + \right. \\
& + F_2(2L_1, a_3) - 2F_2(0, a_3) + F_2(-2L_1, a_3) + F_2(2L_1, a_4) - 2F_2(0, a_4) + \\
& \left. \left. + F_2(-2L_1, a_4) + F_2(2L_1, a_5) - 2F_2(0, a_5) + F_2(-2L_1, a_5) \right] \right\} \quad (E.6a)
\end{aligned}$$

$$\text{onde } a = z_1 - z \quad (E.6b)$$

$$a_1 = z_1 + z \quad (E.6c)$$

$$a_2 = 2nh + z_1 - z \quad (E.6d)$$

$$a_3 = 2nh + z_1 + z \quad (E.6e)$$

$$a_4 = 2nh - z_1 - z \quad (E.6f)$$

$$a_5 = 2nh - z_1 + z \quad (E.6g)$$

e a função $F_2(u, a)$ é mostrada na equação (B.4).