

Identificação de Sistemas com Bases de Funções de Laguerre

Josenildo Ferreira Galdino

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande - Campus de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Instrumentação e Controle

Péricles Rezende Barros, Ph.D
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil
©Josenildo Ferreira Galdino, Março de 2012



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCC

G149i Galdino, Josenildo Ferreira.
Identificação de sistemas com bases de funções de Laguerre / Josenildo Ferreira Galdino. - Campina Grande, 2012.
85f.: il. col.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática.

Orientador: Prof. Ph.D. Péricles Rezende Barros.

Referências.

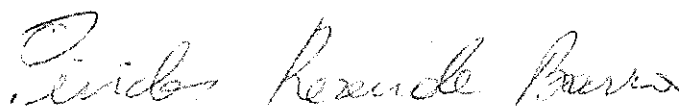
1. Identificação de Sistemas. 2. Laguerre. 3. Experimento do Relé.
I. Título.

CDU 621.318 (043)

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM BASES DE FUNÇÕES DE LAGUERRE

JOSENILDO FERREIRA GALDINO

Dissertação Aprovada em 21.03.2012



PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG
Orientador



BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D.Sc., UFCG
Componente da Banca



JOSÉ SÉRGIO DA ROCHA NETO, D.Sc., UFCG
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
MARÇO -2012

Dedicatória

*Aos meus pais, José Gal-
dino Fernandes e Aurenir
Freitas Fernandes.*

Agradecimentos

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos.

Primeiramente, agradeço a DEUS por proporcionar a conclusão de mais uma etapa da minha vida que se consuma neste trabalho.

Aos meus pais, José Galdino Fernandes e Aurenir Freitas Fernandes e aos meus queridos irmãos: Juraci, Jurandir e Joelma, agradeço todo o amor, carinho e motivação.

Ao Ph.D Péricles Rezende Barros, sou grato pela orientação e confiança em mim depositada. Agradeço pelas discussões e reflexões que possibilitaram o enriquecimento e realização deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro que deu suporte à realização deste trabalho.

Resumo

Na teoria clássica de identificação de sistemas o problema de identificar o sistema consiste na estimação dos parâmetros de um dado modelo, por meio de um algoritmo que utiliza os dados de entrada e saída do processo. Em contrapartida, a identificação de sistemas com bases de funções ortonormais permite incorporar um conhecimento parcial sobre a dinâmica do sistema, o que reduz a ordem e, conseqüentemente, estimação de menos parâmetros serão necessários.

Nesta dissertação, o problema de identificação de sistemas é resolvido utilizando-se bases de funções de Laguerre. É proposta uma nova metodologia para a identificação de sistemas com bases de Laguerre com a utilização do experimento do relé para obtenção de uma estimativa inicial do pólo de Laguerre. O uso do experimento do relé possibilita obter um conhecimento parcial do sistema a ser identificado. Além disso, diversos experimentos de alguns processos de primeira e segunda ordem foram simulados com o Matlab®.

Palavras-Chave: Identificação de Sistemas, Laguerre e Experimento do Relé.

Abstract

In the classical approach to system identification problem of identifying the system is the assessment of parameters of a given model, using an algorithm that uses data input and output of the process. In contrast, system identification with orthonormal basis functions allows incorporating a partial knowledge about the dynamics of the system which reduces the order and, consequently, fewer parameters are necessary in the representation of the model.

In this thesis we address the problem of identifying base systems using Laguerre functions. It proposed a new approach for identifying systems with bases Laguerre using the relay experiment to obtain an initial estimate of the pole of Laguerre. The use of experiment relay allows to obtain a partial knowledge of the system being identified. In addition, several experiments of some processes first and second order were simulated with Matlab.

Keywords: System Identification, Laguerre and Experiment Relay.

Lista de Abreviaturas

AR	Auto-regressivo (<i>Auto regressive</i>);
ARMAX	Auto-regressivo, de média móvel com entradas exógena (<i>Auto regressive moving average with exogenous input</i>);
ARX	Auto-regressivo com entradas exógenas (<i>Auto regressive with exogenous input</i>);
AWGN	Ruído branco gaussiano aditivo (<i>Additive White Gaussian Noise</i>);
BJ	Box-Jenkins;
FIR	Resposta finita ao impulso (<i>Finite Impulse Response</i>);
OFB	Base de Funções Ortonormais (<i>Orthonormal Basis Functions</i>);
OE	Erro na saída (<i>Output Error</i>);
PEP	Porcentagem do Erro de Predição;
PRBS	Sinal binário pseudo-aleatório (Pseudo Random Binary Signal).

Lista de Tabelas

3.1	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.6).	33
3.2	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.7).	35
3.3	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.8).	38
3.4	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.9).	40
3.5	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.10).	44
4.1	Processos utilizados na identificação.	48
4.2	Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.10).	50
4.3	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.10).	50
4.4	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.10).	52
4.5	Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.13).	55
4.6	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.13).	55
4.7	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.13).	58
4.8	Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.16).	61
4.9	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.16).	61
4.10	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.13).	63
4.11	Processos utilizados na identificação.	64
4.12	Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.19).	66
4.13	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.19).	66
4.14	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.19).	69
4.15	Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.22).	72
4.16	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.22).	72
4.17	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.22).	74
4.18	Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.25).	77
4.19	Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.25).	77
4.20	Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.25).	79

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de etapas da identificação de sistemas.[23]	8
2.1	Uso do operador q (atraso).	11
2.2	Regiões \mathbb{D} , \mathbb{E} e o círculo de raio unitário ($r = z = 1$).	14
2.3	Representação gráfica do procedimento de Gram-Schmidt	16
2.4	Funções de Laguerre para $p = 1$	19
2.5	As duas primeiras funções de Laguerre para $p = 0, 3; 0, 5; 0, 7; 1, 0$.	20
2.6	Diagrama de blocos: modelo linear geral	21
2.7	Sistema real G_0, H_0 e modelo preditor (G, H)	22
2.8	Diagrama de blocos do modelo ARX	24
2.9	Diagrama de blocos do modelo ARMAX	25
2.10	Diagrama de blocos do modelo OE	25
2.11	Diagrama de blocos do modelo BJ	25
2.12	Diagrama de blocos do modelo FIR	26
3.1	Modelo OBF com dinâmica de Laguerre.	29
3.2	Amplitude do sinal de saída do sistema (3.6).	31
3.3	Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.	31
3.4	Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.	32
3.5	Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.	32
3.6	Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.	34
3.7	Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.	34
3.8	Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.	35
3.9	Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.	36
3.10	Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.	37
3.11	Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.	37
3.12	Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.	39
3.13	Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.	39
3.14	Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.	40
3.15	Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (3.10).	42

3.16 Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$	42
3.17 Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$	43
3.18 Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$	43
4.1 Sistema em Malha Fechada.	45
4.2 Diagrama de blocos do processo com realimentação por relé.	45
4.3 Método do Relé no Simulink para o processo (4.10).	48
4.4 Diagrama de Nyquist (4.10).	49
4.5 Saída do sistema e do relé do processo (4.10).	49
4.6 Determinação do ganho estático do processo (4.10).	50
4.7 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.10).	51
4.8 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.10).	51
4.9 Saída do sistema e do modelo de Laguerre.	52
4.10 Método do Relé no Simulink para o processo (4.13).	53
4.11 Diagrama de Nyquist do processo (4.13).	54
4.12 Saída do sistema e do relé do processo (4.13).	54
4.13 Determinação do ganho estático do processo (4.13).	55
4.14 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.13).	56
4.15 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.13).	57
4.16 Saída do sistema e do modelo de Laguerre.	57
4.17 Método do Relé no Simulink para o processo (4.16).	59
4.18 Diagrama de Nyquist do processo (4.16).	59
4.19 Saída do sistema e do relé do processo (4.16).	60
4.20 Determinação do ganho estático do processo (4.16).	60
4.21 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.16).	61
4.22 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.16).	62
4.23 Saída do sistema e do modelo de Laguerre.	63
4.24 Método do Relé no Simulink para o processo (4.19).	64
4.25 Diagrama de Nyquist do processo (4.19).	65
4.26 Saída do sistema e do relé do processo (4.19).	65
4.27 Determinação do ganho estático do processo (4.19).	66
4.28 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.19).	67
4.29 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.19).	68
4.30 Saída do sistema do modelo de Laguerre.	68
4.31 Método do Relé no Simulink para o processo (4.22).	70
4.32 Diagrama de Nyquist do processo (4.22).	70
4.33 Saída do sistema e do relé do processo (4.22).	71
4.34 Determinação do ganho estático do processo (4.22).	71

4.35 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.22).	72
4.36 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.22).	73
4.37 Saída do sistema e do modelo de Laguerre.	73
4.38 Método do Relé no Simulink para o processo (4.25).	75
4.39 Diagrama de Nyquist do processo (4.25).	75
4.40 Saída do sistema e do relé do processo (4.25).	76
4.41 Determinação do ganho estático do processo (4.25).	76
4.42 Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.25).	77
4.43 Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.25).	78
4.44 Saída do sistema e do modelo de Laguerre.	78

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Revisão Bibliográfica	8
1.2	Objetivos	10
1.3	Organização do Texto	10
2	Fundamentação Teórica	11
2.1	Introdução	11
2.2	Função de Transferência, Resposta ao Impulso e Resposta em Frequência	11
2.3	Modelo de Espaço de Estados	12
2.4	Espaço de Funções e Produto Interno	13
2.4.1	Propriedades do Produto Interno	14
2.4.2	Norma	15
2.5	Ortonormalidade	15
2.5.1	Procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt	15
2.5.2	Funções Ortogonais Racionais	17
2.5.3	Funções de Laguerre	18
2.5.4	Método Baseado em Espaço de Estados	19
2.6	Identificação de Sistemas	21
2.6.1	Erro de Predição	22
2.6.2	Porcentagem do Erro de Predição (PEP)	23
2.7	Identificação Paramétrica	23
2.7.1	ARX	23
2.7.2	ARMAX	24
2.7.3	OE	24
2.7.4	BJ	25
2.7.5	FIR	26
2.8	Conclusões	26

3	Identificação de Sistemas usando Bases de Laguerre	27
3.1	Introdução	27
3.2	Critério de Identificação: Mínimos Quadrados	28
3.3	Casos de Simulação	30
3.3.1	Experimento 1: Sistema de 4ª Ordem com degrau na entrada.	30
3.3.2	Experimento 2: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,1).	33
3.3.3	Experimento 3: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,3).	35
3.3.4	Experimento 4: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,5).	38
3.3.5	Experimento 5: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e PRBS na entrada.	40
3.4	Conclusões	44
4	O Método do Relé	45
4.1	Introdução	45
4.2	Estimação do pólo de Laguerre com o método do Relé para modelos de primeira ordem	47
4.3	Estimação do pólo de Laguerre com o método do Relé para modelos de segunda ordem	47
4.4	Casos de Simulação: Sistemas de 1ª Ordem	48
4.4.1	Experimento I	48
4.4.2	Experimento II	53
4.4.3	Experimento III	58
4.5	Casos de Simulação: Sistemas de 2ª Ordem	64
4.5.1	Experimento I	64
4.5.2	Experimento II	69
4.5.3	Experimento III	74
4.6	Conclusões	79
5	Conclusões e Sugestões	80
5.1	Conclusões	80
5.2	Sugestões	80
	Referências Bibliograficas	82

Capítulo 1

Introdução

Modelos matemáticos de sistemas são utilizados. Por exemplo, modelo em espaço de estados, função de transferência (relaciona a entrada e saída do sistema) ou modelos baseados em série (a série de Laguerre). O conhecimento obtido da química, física ou matemática do processo pode apontar um modelo que descreva a dinâmica do sistema, isto é, o funcionamento do sistema ao longo do tempo. No entanto, essa prática não é interessante para sistemas mais complexos e que não tenhamos o conhecimento pleno dos fenômenos envolvidos. Alternativamente, a identificação de sistemas possibilita a obtenção de modelos matemáticos aproximados para a representação de sistemas. Sendo assim, na identificação de sistemas, os modelos utilizam os dados obtidos de experimentos que devem ser realizados no processo ou a partir de modelos simulados.

Identificar sistemas dinâmicos significa calcular, aproximar ou obter modelo(s) matemático(s) que representem determinado(s) tipo(s) de comportamento(s) do sistema que está sendo estudado, numa determinada faixa ou região de operação.[2]

A identificação de sistemas pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência. No domínio do tempo são utilizados dados temporais medidos na entrada e na saída do sistema. Já no domínio da frequência utilizam-se das características de resposta em frequência do sistema.

Na identificação de sistemas o problema de identificar o sistema consiste na estimação dos parâmetros de um dado modelo, por meio de um algoritmo que utiliza os dados de entrada e saída do processo. Em contrapartida, a identificação de sistemas com bases de funções ortonormais permite incorporar um conhecimento parcial sobre a dinâmica do sistema o que reduz a ordem e, conseqüentemente, menos parâmetros serão necessários

para o modelo, o que está de acordo com o Princípio de Parsimony.¹ Sendo assim, ao utilizar modelos de base de funções ortonormais os problemas na identificação do sistema tornam-se mais simples. Dentre as bases de funções ortonormais utilizadas na identificação de sistemas, destacam-se: Laguerre e de Kautz. A base de Laguerre é formada pelas funções de Laguerre, ideal para representar sistemas dinâmicos que possuam pólos reais, enquanto que a base de Kautz é adequada para sistemas que possuam pólos complexos conjugados.

O problema de identificar um sistema é dividido em etapas. As etapas de identificação de sistemas são quatro, são elas: [23]

1. **Testes dinâmicos e coleta de dados.** Esta etapa consiste na obtenção dos dados a partir de um experimento. Comumente esses dados, chamados de *dados de identificação* podem ser obtidos no domínio do tempo ou da frequência, dependendo da escolha do critério de identificação a ser utilizado. No domínio do tempo são utilizados dados temporais medidos na entrada e na saída do sistema. Enquanto que no domínio da frequência utilizam-se das características de resposta em frequência do sistema.
2. **Escolha da estrutura do modelo.** Esta etapa consiste na escolha de um conjunto de modelos que serão utilizados para representar o sistema. Além disso, o tipo de modelo: linear ou não linear, tempo contínuo ou discreto, paramétrico ou não paramétrico.
3. **Estimação de parâmetros.** Esta etapa consiste na escolha do critério para estimação dos parâmetros do modelo e depende da escolha da estrutura de modelo da etapa anterior. Por exemplo, ao trabalhar com dados no domínio do tempo pode-se utilizar o critério dos mínimos quadrados.
4. **Validação do modelo.** Com os parâmetros do modelo calculados na etapa anterior é preciso decidir se o modelo de fato pode ser utilizado para identificar o sistema. Por esse motivo essa etapa é conhecida como Validação do Modelo. Ao trabalhar no domínio do tempo é utilizado um parâmetro que quantifique a proximidade da saída do modelo com a saída do sistema. Por exemplo, a Porcentagem do Erro de Predição (PEP) é um indicativo de quão próximo o modelo está do sistema.

¹O Princípio de Parsimony estabelece que a variabilidade dos modelos identificados aumenta com o aumento do número de parâmetros.

A figura (1.1) é o diagrama de etapas de identificação de sistemas.

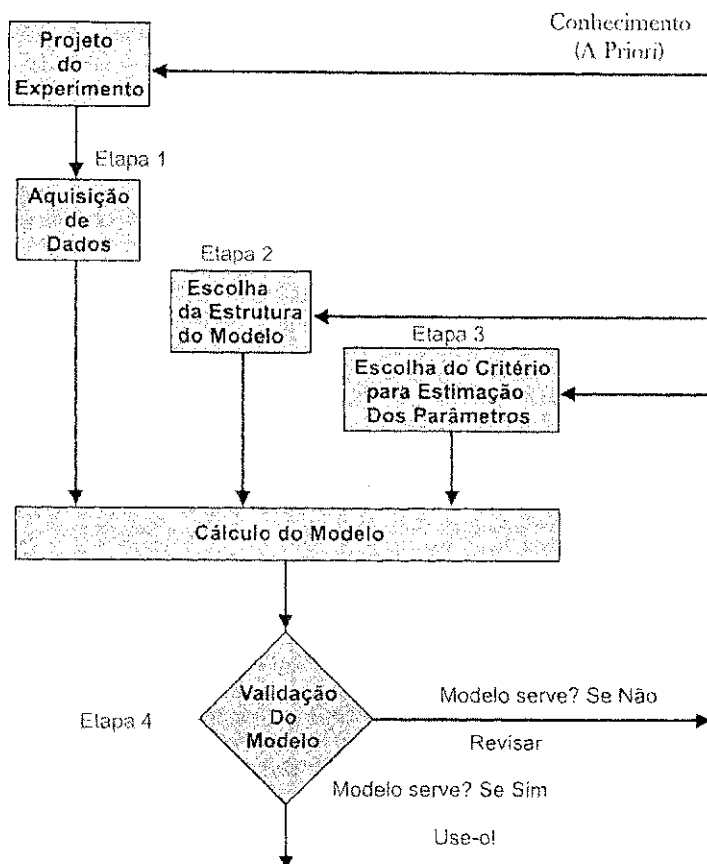


Figura 1.1: Diagrama de etapas da identificação de sistemas.[23]

1.1 Revisão Bibliográfica

A *modelagem e identificação com bases de funções ortogonais racionais* é um tema de pesquisa que vem ganhando destaque na literatura especializada, pelo fato de que modelos de sistemas dinâmicos que utilizam base de funções ortonormais apresentam vantagens em relação à identificação clássica de sistemas. Em [41] mostra-se algumas vantagens do uso das funções de Laguerre na identificação de sistemas, como por exemplo, o fato da ordem do modelo ser reduzido, em comparação com a modelagem (ARX (Auto regressive with exogenous input), FIR (Finite Impulse Response), AR (Auto regressive)), através de modelos Laguerre. Já [33] propõe uma técnica de identificação de sistemas baseada em expansões da série de Laguerre considerando dados de entrada e saída filtrados. Em [15] utilizam o algoritmo dos *mínimos quadrados* para a estimação do modelo OBF (Orthonormal Basis Functions). Do mesmo modo, [6] destacam a estimação numérica dos parâmetros dos modelos baseados nas funções de Laguerre, utilizando o algoritmo clássico dos mínimos quadrados.

Geralmente, os modelos de base de funções ortonormais são parametrizados a partir da especificação de um ou mais pólos do sistema a ser identificado. Modelos parametrizados por pólos podem levar a modelos com número reduzido de parâmetros se o pólo escolhido for próximo do pólo real do sistema. Em geral, a escolha do(s) pólo(s) pode ser feita através de métodos de seleção do(s) pólo(s) ou a partir de algum conhecimento prévio das características da dinâmica do sistema. [36]

Diversos autores abordaram o problema de seleção de pólos em modelos BFO. Em [8] demonstra como resolver o problema de seleção de pólo ótimo de Laguerre para sistemas descritos por funções de transferências racionais, assumindo a existência de uma expressão analítica da resposta ao impulso e que não haja atraso de transporte no sistema. Já [21] apresentam uma condição de otimalidade para a escolha do pólo de Laguerre. Em [29] apresentam uma solução analítica para determinação do pólo ótimo de Laguerre utilizando a resposta ao impulso do sistema. Já [12] propõem a utilização de busca numérica unidimensional para localizar o pólo de Laguerre. Em [43] é mostrada uma solução para o pólo ótimo de Laguerre para sistemas em tempo contínuo. Já [28] utilizam o algoritmo de Newton-Raphson iterativo para calcular o pólo de Laguerre ideal para sistemas de tempo contínuo. Em [42] é dada uma generalização para sistemas estáveis no L_2 tomando como base o estudo de [8] para a escolha ótima do pólo de Laguerre. Em [39] apresenta um algoritmo híbrido para seleção de pólo ótimo de Laguerre. Neste caso o algoritmo híbrido utiliza algoritmos genéticos e o algoritmo de Newton-Raphson. Enquanto que, [35], utiliza o método de Otimização por Nuvem de Partículas (PSO, do inglês, Particle Swarm Optimization) proposto por [20] para buscar uma solução do problema de seleção de pólos em modelos BFO. Por fim, [26] apresentam uma nova proposta para a otimização de modelos de sistemas dinâmicos através de BFO com funções de Laguerre na forma de espaço de estados.

Apesar dos trabalhos citados anteriormente sobre o problema da seleção de pólos na identificação de sistemas usando bases de funções ortonormais. Nesta dissertação utiliza-se uma nova estratégia de identificação utilizando o método do relé para obtenção de uma estimativa do pólo de Laguerre. Este método é uma alternativa para obter os parâmetros do modelo do processo, através da análise de alguns pontos da resposta em frequência do processo.

Diversos autores utilizaram o método do relé na área de identificação de sistemas. Em [19] é descrito um método para estimação dos parâmetros de um modelo de primeira ordem com atraso a partir do experimento do relé assimétrico. Já [40] propõem uma modificação

no método anterior para utilizar o experimento do relé simétrico. Em [16] sugerem uma alternativa para obtenção dos parâmetros dos modelos de primeira e segunda ordem com atraso a partir do experimento do relé.

1.2 Objetivos

A identificação de sistemas é útil para o projeto de controle, economia de tempo e dinheiro, evitar testes experimentais. Enfim, a identificação é uma maneira de responder questões sobre o sistema sem a necessidade de fazer testes perigosos ou destrutivos. Além disso, é possível conhecer o funcionamento do processo em condições operacionais padrões extremas sem danificar o sistema. [27]

Com a realização desse trabalho, objetiva-se atingir os seguintes pontos:

- Realizar um estudo na área de identificação, trabalhando no domínio do tempo.
- Identificar sistemas utilizando bases de Laguerre.
- Utilizar o método do relé como estratégia para escolha do pólo de Laguerre.

1.3 Organização do Texto

Nesta introdução, apresentamos a descrição do problema e os objetivos deste trabalho. Nos capítulos seguintes serão abordados os tópicos atinentes ao desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2 os fundamentos teóricos para entendimento do problema de identificação são apresentados. Em seguida, no capítulo 3 descrevemos a metodologia e os procedimentos que serão utilizados na identificação usando as bases de Laguerre.

No capítulo 4 destaca-se o método do relé e sua aplicabilidade na identificação de sistemas utilizando bases de Laguerre. No capítulo 5 é feita a conclusão do trabalho e são dadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Neste capítulo destaca-se alguns conceitos fundamentais atinentes a área de identificação de sistemas. Destacamos dois métodos de construção de bases ortonormais: Método de ortogonalização de Gram-Schmidt e método baseado em espaço de estados.

2.2 Função de Transferência, Resposta ao Impulso e Resposta em Frequência

Dado um sistema linear em tempo discreto

$$y(t) = G(q)u(t) \quad (2.1)$$

na qual, $u(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é o sinal de saída. O sistema será representado por um operador de transferência $G(q)$, q é um operador de deslocamento e pode funcionar como um avanço ou atraso. Por exemplo, dado um sinal de entrada $u(t)$, $qu(t) = u(t+1)$ funciona como um avanço, enquanto que, $q^{-1}u(t) = u(t-1)$ é um atraso. Na figura (2.1) enfatiza-se o uso do operador q como atraso.

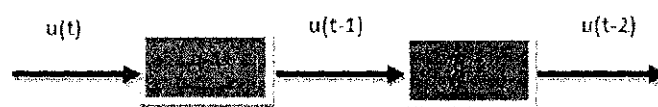


Figura 2.1: Uso do operador q (atraso).

Para sistemas estáveis, a resposta ao impulso é dada por

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t-k) \quad (2.2)$$

Note que $u(t-k) = q^{-k}u(t)$. Sendo assim, podemos reescrever a equação (2.2).

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k} u(t) \quad (2.3)$$

Agora, comparando-se a equação (2.3) com a equação (2.1), obtém-se

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k} \quad (2.4)$$

A função de transferência $G(z)$ será dada por

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

e a resposta em frequência é obtida por $G(e^{iw})$ com $w = [-\pi, \pi]$. Além disso, assumiremos que as funções de transferências são *estritamente próprias*, ou seja,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z) = 0 \quad (2.5)$$

Em outras palavras, uma função de transferência $G(z)$ é dita *estritamente própria*, quando o grau do denominador de $G(z)$ for maior que o grau do numerador de $G(z)$. [10]

2.3 Modelo de Espaço de Estados

Um modelo de espaço de estados de tempo discreto é dado por

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.7)$$

Na qual, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$. O caso particular em que $m = p = 1$ é conhecido como SISO (*Single-Input Single-Output*), ou seja, uma entrada e uma saída.

Para distinguir os sinais de suas transformadas, iremos adotar a seguinte convenção, os sinais serão representados por letras minúsculas do alfabeto, enquanto que suas transformadas serão representadas por letras maiúsculas. Além disso, a transformada Z de sinais é dada por

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad (2.8)$$

Agora, aplicando-se a transformada Z a ambos os membros da equação (2.6), obtém-se

$$\begin{aligned}
 Z(x(t+1)) &= Z(Ax(t) + Bu(t)) \\
 zX(z) &= Z(Ax(t)) + Z(Bu(t)) \\
 zX(z) &= AZ(x(t)) + BZ(u(t)) \\
 zX(z) &= AX(z) + BU(z) \\
 X(z)(zI - A) &= BU(z) \\
 X(z) &= B(zI - A)^{-1}U(z)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 Z(y(t)) &= Z(Cx(t) + Du(t)) \\
 Y(z) &= Z(Cx(t)) + Z(Du(t)) \\
 Y(z) &= CX(z) + DU(z)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) em (2.10), obtém-se

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \tag{2.11}$$

Portanto, a função de transferência para o modelo de espaço de estado de tempo discreto é dado por

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \tag{2.12}$$

2.4 Espaço de Funções e Produto Interno

Seja \mathbb{D} o disco de raio unitário, ou seja, $\{z; |z| < 1\}$, \mathbb{E} o exterior do disco de raio unitário, incluindo o infinito: $\{z; |z| > 1\}$ e \mathbb{T} o círculo de raio unitário: $z; |z| = 1$. Na figura (2.2) mostra as regiões \mathbb{D} , \mathbb{E} e o círculo de raio unitário. Além disso, denota-se $H_2(\mathbb{E})$ o espaço denso de funções quadraticamente integráveis em \mathbb{T} , analíticas¹ na região \mathbb{E} . No entanto, existem espaços de funções mais gerais, como o espaço de Hilbert², espaço formado por funções matriciais complexas de dimensão $p \times m$ que são integráveis no

¹Uma função f da variável complexa w é dita analítica num ponto w_0 , se sua derivada $f'(w)$ existe não só em w_0 como também em todo ponto w de uma vizinhança de w_0 . Em outras palavras, f é analítica num domínio do plano- w se ela é analítica em todo ponto desse domínio. Uma introdução as funções analíticas pode ser encontrada em [38].

²David Hilbert (1862-1943) Foi um matemático alemão cujo trabalho em geometria teve a maior influência no campo desde Euclides. Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, Hilbert propôs um conjunto de 21 axiomas e analisou o significado deles. Hilbert recebeu o seu Ph.D. da Universidade de Königsberg e serviu em sua faculdade de 1886 a 1895. Ele se tornou (1895) professor de matemática na Universidade de Göttingen, onde ele permaneceu

círculo de raio unitário e representado simbolicamente por $L_2^{p \times m}(\mathbb{T})$

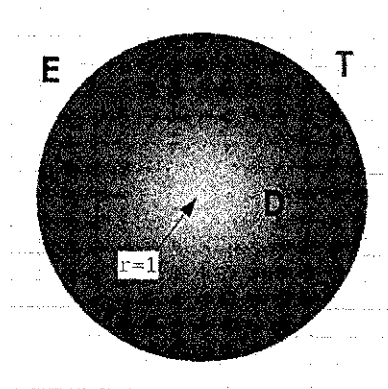


Figura 2.2: Regiões \mathbb{D} , \mathbb{E} e o círculo de raio unitário ($r = |z| = 1$).

Definição 1 (Produto Interno) Sejam duas funções $X(z)$ e $Y(z) \in H_2(\mathbb{E})$, o produto interno entre elas será expresso matematicamente por

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{iw})Y^*(e^{iw}) dw = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbb{T}} X(z)Y^*(1/z^*) \frac{dz}{z} \quad (2.13)$$

2.4.1 Propriedades do Produto Interno

O produto interno possui boas propriedades, tais como: *bilinearidade*, *simetria* e *positividade definida*. Sejam $F_1(z)$, $F_2(z)$, e $F_3(z) \in H_2(\mathbb{E})$.

- Bilinearidade

$$\begin{aligned} \langle F_1 + aF_2, F_3 \rangle &= \langle F_1, F_3 \rangle + a\langle F_2, F_3 \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \langle F_1, F_2 + bF_3 \rangle &= \langle F_1, F_2 \rangle + b\langle F_1, F_3 \rangle, \quad \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Simetria

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle F_2, F_1 \rangle$$

- Positividade Definida

$$\langle F_1, F_1 \rangle \geq 0, \quad \langle F_1, F_1 \rangle = 0 \Rightarrow F_1 = 0$$

pele resto de sua vida. Entre 1900 e 1914, muitos matemáticos dos Estados Unidos que depois representaram um papel importante no desenvolvimento da matemática foram para Göttingen estudar com ele. Hilbert contribuiu em vários ramos da matemática, incluindo a teoria algébrica do número, análise funcional, físicas matemáticas, e os cálculos de variações. Também enumerou 23 problemas não solucionados de matemática que ele considerou merecedor de investigação adicional. Desde o tempo de Hilbert, foram resolvidos quase todos estes problemas.

2.4.2 Norma

A norma da função de transferência $X(z) \in H_2(\mathbb{E})$ é dada por

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

2.5 Ortonormalidade

Dadas duas funções $X_1(z)$ e $X_2(z)$ elas são ortonormais, se as seguintes condições são satisfeitas mutuamente

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 0 \quad (2.14)$$

$$\|X_1\| = \|X_2\| = 1 \quad (2.15)$$

A condição (2.14) garante que as funções $X_1(z)$ e $X_2(z)$ são ortogonais. Enquanto que, a condição (2.15) garante a normalidade de $X_1(z)$ e $X_2(z)$. Esta definição pode ser generalizada para o caso de utilizarmos n funções de transferências.

Iremos descrever nas seções seguintes dois métodos de ortonormalização, são eles: método de Ortonormalização de Gram-Schmidt e método de espaço de estados.

2.5.1 Procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O procedimento de ortogonalização de Gram³-Schmidt é um método sistemático utilizado para converter uma dada base arbitrária numa base ortogonal. Vale salientar que nosso interesse aqui é utilizar este procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt a uma base formada de funções de transferências.

Primeiramente, iremos considerar uma base formada por apenas duas funções de transferências racionais, $V(z) = [F_1(z) \ F_2(z)]$. Deste modo, deseja-se encontrar uma base ortogonal a partir de $V(z)$. Sejam $F_1(z)$ e $F_2(z) \in \mathbb{H}_2(E)$ duas funções de transferências

³Jørgen Pederson Gram (1850 -1916) foi um atuário dinamarquês. A educação básica de Gram foi em escolas de aldeias suplementada com tutoria particular. Depois de concluir o segundo grau ele obteve o grau de Mestre em Matemática com especialização em Álgebra Moderna. Em seguida Gram foi contratado como atuário na Companhia Hafnia de Seguros de Vida, onde ele desenvolveu os fundamentos matemáticos de seguros de acidentes para a firma Skjold. Ele trabalhou na Diretoria da Hafnia e dirigiu Skjold até 1910, quando se tornou diretor do Conselho Dinamarquês de Seguros. Enquanto trabalhava de atuário, ele obteve o Doutorado com sua tese intitulada Sobre Desenvolvimentos em Séries Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Foi nesta tese que primeiro formulou suas contribuições ao processo de Gram-Schmidt. Mais tarde Gram passou a interessar-se por Teoria Abstrata de Números, tendo ganhado uma medalha de ouro da Sociedade Real Dinamarquesa de Ciências e Letras por sua contribuição neste campo. No entanto, ele também manteve um interesse, durante toda sua vida, na inter-relação entre matemática-teórica e aplicada, que o levou a quatro tratados sobre administração florestal dinamarquesa. Gram foi atropelado a caminho de uma reunião da Sociedade Real Dinamarquesa.

racionais. Devemos obter as funções $F'_1(z)$ e $F'_2(z)$ que são as funções que formam a base ortogonal a $V(z)$. Simbolizaremos esta base por $V'(z) = [F'_1(z) F'_2(z)]$.

Seja $F'_1 = \tilde{F}_1$. Sendo assim, precisamos encontrar a partir de F_2 uma função F'_2 que seja ortogonal a F'_1 , isto é, $\langle F'_2, F'_1 \rangle = 0$. Para isto tomamos $F'_2 = F_2 - cF'_1$, na qual c é um número escolhido, de modo que $\langle F'_2, F'_1 \rangle = 0$, isto é, $\langle F_2 - cF'_1, F'_1 \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle F'_1, F_2 - cF'_1 \rangle &= \langle F'_1, F_2 \rangle - c\langle F'_1, F'_1 \rangle \\ \langle F'_1, F_2 - cF'_1 \rangle &= \langle F_2, F'_1 \rangle - c\langle F'_1, F'_1 \rangle \\ 0 &= \langle F_2, F'_1 \rangle - c\langle F'_1, F'_1 \rangle \\ c &= \frac{\langle F_2, F'_1 \rangle}{\langle F'_1, F'_1 \rangle} \end{aligned}$$

, ou seja, $c = \frac{\langle F_2, F'_1 \rangle}{\langle F'_1, F'_1 \rangle}$. Na figura (2.3), ilustra-se graficamente o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado a base $V(z) = [F_1(z) F_2(z)]$.

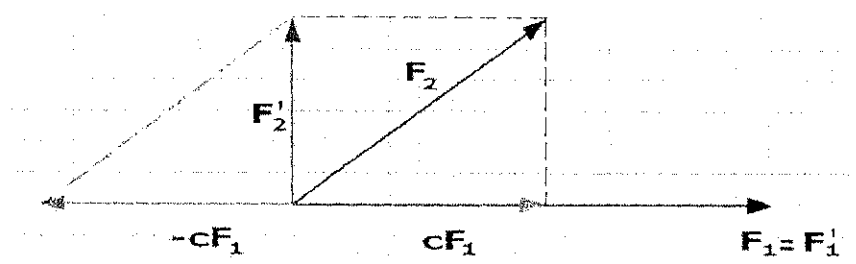


Figura 2.3: Representação gráfica do procedimento de Gram-Schmidt.

Portanto,

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1 \\ F'_2 &= F_2 - \frac{\langle F_2, F'_1 \rangle}{\langle F'_1, F'_1 \rangle} F'_1 \end{aligned}$$

Observe que F'_2 , que é ortogonal a F'_1 , foi originada de F_2 subtraindo-se a projeção de F_2 sobre F'_1 . Logo, a base ortogonal obtida é dada por

$$V'(z) = [F'_1(z) F'_2(z)] \quad (2.16)$$

Ao utilizar o procedimento Gram-Schmidt⁴ obtém-se uma base ortogonal. No entanto,

⁴Erhardt Schmidt (1876-1959) foi um matemático alemão. Schmidt recebeu seu doutorado da Universidade de Göttingen em 1905, onde estudou sob orientação de David Hilbert, um dos gigantes da Matemática. Mais tarde em 1917, foi lecionar na Universidade de Berlim, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Schmidt fez importantes contribuições em uma variedade de campos matemáticos, mas é mais notável por ter conseguido moldar muitas das diversas idéias de Hilbert num único conceito abrangente (chamado *espaço de Hilbert*), que é fundamental no estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita. Schmidt primeiro descreveu o processo que leva seu nome num trabalho sobre equações integrais publicado em 1907.

é interessante ter uma base que seja ortogonal e normal, ou seja, uma base ortonormal. Para obtenção da base ortonormal a partir da base ortogonal, basta normalizar cada uma das funções. Matematicamente, temos:

$$V'(z) = \left[\frac{F_1'(z)}{\|F_1'(z)\|} \quad \frac{F_2'(z)}{\|F_2'(z)\|} \right] \quad (2.17)$$

O procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt pode ser generalizado para uma base finita formada por n funções de transferências.

$$V(z) = \left[F_1(z) \quad F_2(z) \quad \dots \quad F_n(z) \right] \quad (2.18)$$

A base ortogonal obtida pelo procedimento de Gram-Schmidt é dada matematicamente por

$$\begin{aligned} F_1' &= F_1 \\ F_2' &= F_2 - \frac{\langle F_2, F_1' \rangle}{\langle F_1', F_1' \rangle} F_1' \\ F_3' &= F_3 - \frac{\langle F_3, F_2' \rangle}{\langle F_2', F_2' \rangle} F_2' - \frac{\langle F_3, F_1' \rangle}{\langle F_1', F_1' \rangle} F_1' \\ &\vdots \\ F_n' &= F_n - \frac{\langle F_n, F_{n-1}' \rangle}{\langle F_{n-1}', F_{n-1}' \rangle} F_{n-1}' - \dots - \frac{\langle F_n, F_1' \rangle}{\langle F_1', F_1' \rangle} F_1' \end{aligned}$$

Portanto,

$$V' = \left[F_1' \quad F_2' \quad \dots \quad F_n' \right] \quad (2.19)$$

Conseqüentemente, a base ortonormal será dada por

$$V' = \left[\frac{F_1'}{\|F_1'\|} \quad \frac{F_2'}{\|F_2'\|} \quad \dots \quad \frac{F_n'}{\|F_n'\|} \right]$$

2.5.2 Funções Ortogonais Racionais

Uma função de transferência $G(z)$ é dita racional de ordem n , se ela for expressa como a razão entre dois polinômios em z . Matematicamente, temos

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.20)$$

na qual,

$$\begin{aligned} B(z) &= b_1 z^{n-1} + \dots + b_n \\ A(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{k=1}^n (z - \xi_k) \end{aligned}$$

Além disso, se as funções racionais satisfazem a condição de ortogonalidade dada por (??), então elas são funções ortogonais racionais. Alguns exemplos de funções ortogonais racionais são as funções de Laguerre e Takenaka-Malmquist. A seguir apresentaremos, de forma detalhada, as funções de Laguerre.

2.5.3 Funções de Laguerre

O crescente interesse na utilização das funções de Laguerre, deve-se a sua aplicabilidade na área de identificação de sistemas. As funções de Laguerre possuem propriedades atrativas, tais como ortonormalidade e completude que destacaremos na seção seguinte. Em suma, as funções de Laguerre podem ser utilizadas para representar funções de transferências estáveis. Teoricamente, qualquer sistema estável pode ser representado exatamente por uma série infinita de funções de Laguerre. Obviamente, na prática, utiliza-se uma série finita (truncamento) da série de Laguerre. Sendo assim, o erro de truncamento depende do número de funções utilizadas e do parâmetro a que é característico das funções de Laguerre. [11]

Um conjunto de funções reais $l_1(t), l_2(t), \dots$ forma um conjunto ortonormal no intervalo $(0, \infty)$ se elas satisfazem as seguintes propriedades.

$$\int_0^{\infty} l_i^2(t) dt = 1 \quad (2.21)$$

e

$$\int_0^{\infty} l_i(t)l_j(t) dt = 0, \quad i \neq j \quad (2.22)$$

A condição (2.21) garante a normalidade para o conjunto de funções $l_1(t), l_2(t), \dots$, enquanto que a condição (2.22) garante a ortogonalidade das funções $l_1(t), l_2(t), \dots$. Além disso, o conjunto de funções ortogonais será completo se não existir uma função $f(t)$ com $\int_0^{\infty} f(t)^2 dt < \infty$, excetuando-se a função identicamente nula, de modo que

$$\int_0^{\infty} f(t)l_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Funções de Laguerre em tempo contínuo

As funções de Laguerre formam uma base de funções ortonormais, ou seja, satisfazem as condições (2.21) e (2.22). O conjunto das funções de Laguerre é definido como

$$\begin{aligned}
 l_1(t) &= \sqrt{2p} \cdot e^{-pt} \\
 l_2(t) &= \sqrt{2p}(-2pt + 1) \cdot e^{-pt} \\
 l_3(t) &= \sqrt{2p}(+2p^2t^2 - 4pt + 1) \cdot e^{-pt} \\
 &\vdots \\
 l_i(t) &= \sqrt{2p} \left[(-1)^{i-1} \frac{(2p)^{i-1}}{(i-1)!} t^{i-1} + (-1)^i \frac{(i-1)(2p)^{i-2}}{(i-2)!} t^{i-2} \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{i-1} \frac{(i-1)(i-2)(2p)^{i-3}}{2!(i-3)!} t^{i-3} + \dots + 1 \right] \cdot e^{-pt}
 \end{aligned}$$

na qual, p é um parâmetro chamado de fator de escala do tempo para as funções de Laguerre.[42] Na figura (2.4) mostra as 4 primeiras funções de Laguerre para $p = 1$.

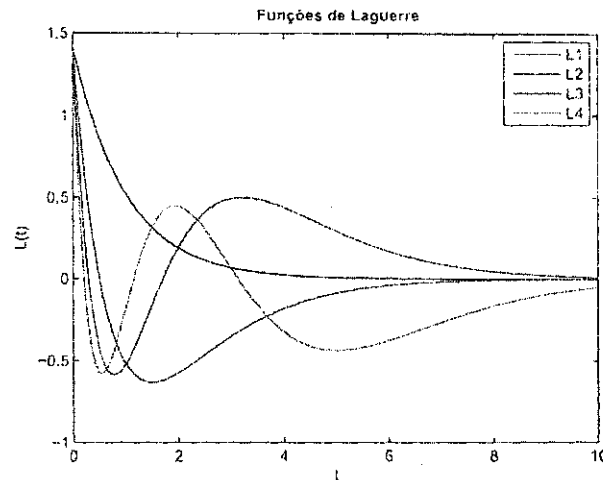


Figura 2.4: Funções de Laguerre para $p = 1$

Para analisarmos a influência do parâmetro p nas funções de Laguerre mostra-se na figura (2.5) a primeira função de Laguerre para os casos em que p assume os seguintes valores 0, 3; 0, 5; 0, 7; 1, 0. Do mesmo modo, traçaremos em um outro gráfico a segunda função de Laguerre.

2.5.4 Método Baseado em Espaço de Estados

Para obter uma base ortonormal ao espaço formado por $\{\bar{F}_1(z), \dots, \bar{F}_n(z)\}$ siga as seguintes etapas.[15]

1. Considere o espaço formado por n funções de transferências racionais

$$\{\bar{F}_1(z), \dots, \bar{F}_n(z)\}$$

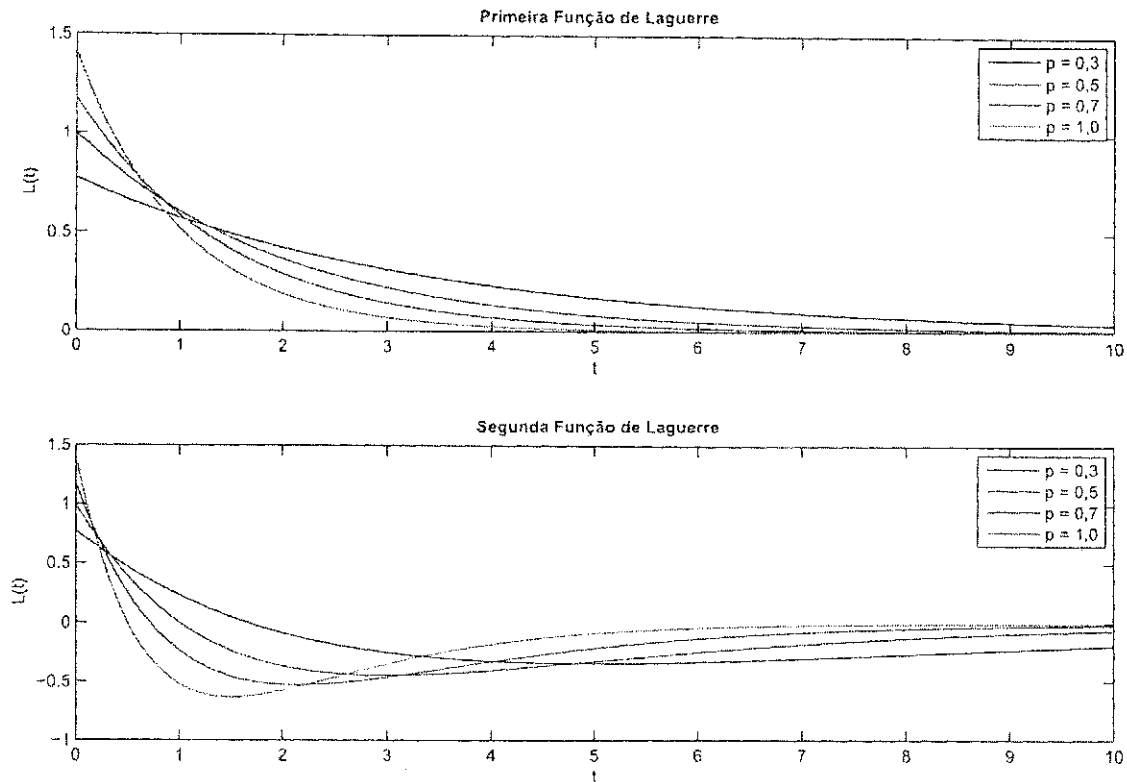


Figura 2.5: As duas primeiras funções de Laguerre para $p = 0,3; 0,5; 0,7; 1,0$.

- Determine o modelo de espaço de estados controlável

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t)$$

com base de funções de transferências dada por

$$\bar{V}(z) = [\bar{F}_1(z), \dots, \bar{F}_n(z)] = (zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$$

Os autovalores de \bar{A} são iguais aos pólos de $\{\bar{F}_1(z), \dots, \bar{F}_n(z)\}$.

- Determine a matriz de covariância \bar{P} que satisfaz a equação de Lyapunov

$$\bar{P} = \bar{A}\bar{P}\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T$$

- Encontre a raiz quadrada da matriz T da inversa de \bar{P} , ou seja, $T\bar{P}T^T = I$
- Faça a transformação $x(t) = T\bar{x}(t)$. O modelo em espaço de estados transformado é dado por

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = T\bar{A}T^{-1}, \quad B = T\bar{B}$$

com base de funções de transferências dada por

$$\bar{V}(z) = [\bar{F}_1(z), \dots, \bar{F}_n(z)] = (zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = T\bar{V}(z)$$

2.6 Identificação de Sistemas

O problema da identificação de sistemas, é no fundo, um caso particular da busca por leis e modelos que expliquem fenômenos naturais ou por ação do Homem. Os modelos obtidos são do tipo caixa-preta, ou seja através do simples ajuste dos dados experimentais a modelos de estrutura pré-definida, sem relação com descrições fenomenológicas. Existe ainda a possibilidade de se aplicar técnicas de identificação para se obter coeficientes para uso em modelos a partir das leis da Física. [30],[13]

A identificação de um sistema dinâmico a partir de dados experimentais, consiste na escolha de um conjunto de modelos de estrutura pré-definida. O conjunto de modelos é uma coleção de modelos entre os quais o melhor modelo é procurado com base nos dados. Sendo assim, a escolha do conjunto de modelos influencia diretamente na máxima precisão possível do modelo identificado. Além disso, o conjunto de modelos deve ser tão grande e flexível quanto possível, a fim de conter, muitos candidatos de modelos possíveis. Isso reduzirá erros estruturais ou de polarização no modelo. No entanto, ao parametrizar o modelo definido, o número de parâmetros deve ser tão pequeno quanto possível devido ao princípio da Parsimony. Este princípio estabelece que a variabilidade dos modelos identificados aumenta com o aumento do número de parâmetros.

Para obtenção do conjunto de modelos iremos definir um modelo linear dinâmico que é formado por duas partes: uma parte determinística e uma parte estocástica. A parte determinística é obtida a partir dos dados experimentais $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$, enquanto que a parte estocástica é originada pela perturbação no sistema ($e(t)$). Representaremos graficamente este modelo linear dinâmico por meio do diagrama de blocos da figura (2.6)

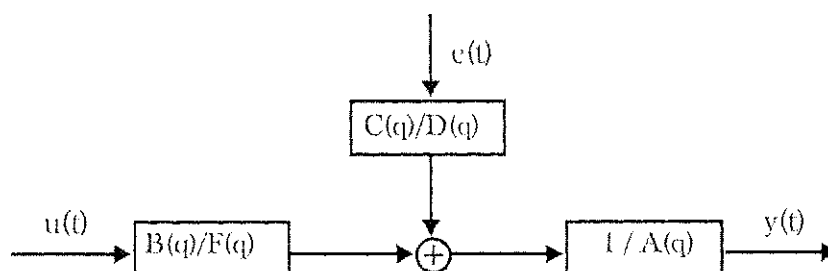


Figura 2.6: Diagrama de blocos: modelo linear geral

2.6.1 Erro de Predição

A partir de uma sequência de dados de entrada e saída do processo, ou seja, $\{u(t), y(t)\}_{t=1,2,\dots,N}$ e considerando um sistema linear, invariante no tempo e de tempo discreto.[15]

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t)$$

na qual, $G_0 \in \mathbb{H}_2$, u é um sinal quase-estacionário e v é um processo estocástico estacionário com densidade espectral racional, representada por $v(t) = H_0(q)e(t)$, onde e é um ruído branco com média nula e variância σ_e^2 e H_0 é uma função de transferência mônica, isto é, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_0(z) = 1$, com $H, H_0^{-1} \in \mathbb{H}_2$.

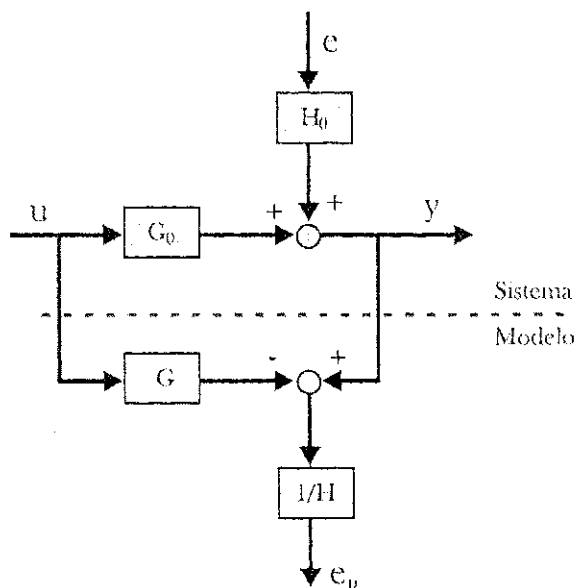


Figura 2.7: Sistema real G_0, H_0 e modelo preditor (G, H)

2.6.2 Porcentagem do Erro de Predição (PEP)

A porcentagem do erro de predição é definida como

$$PEP = \frac{\sum_{k=1}^n (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\sum_{k=1}^n (y(k) - \bar{y})^2} \times 100 \quad (2.24)$$

na qual \bar{y} é o valor médio das medições $\{y(k)\}$ e $\hat{y}(k)$ são os valores preditos de $y(k)$.

A PEP pode ser utilizado como critério de convergência [25]. Sendo assim, utilizando a PEP podemos obter o melhor modelo de Laguerre, ou seja, o que apresentar o menor valor da PEP.

2.7 Identificação Paramétrica

A identificação paramétrica surgiu devido ao fato que modelos não-paramétricos, bem como, diagramas de Bode, diagrama de Nyquist e resposta ao degrau podem não ser capazes de descrever completamente a dinâmica do sistema. Em contrapartida, modelos paramétricos tem a capacidade de obter um modelo aproximado para a dinâmica do sistema. Os modelos mais utilizados na identificação paramétrica são: ARX (*Auto regressive*), ARMAX (*Auto regressive moving average with exogenous input*), OE (*Output Error*), FIR (*Finite Impulse Response*), BJ (*Box-Jenkins*). [34]

2.7.1 ARX

O modelo auto-regressivo com entradas externas, ARX, onde AR é a parte auto-regressiva, $A(q)y(t)$ e X a entrada externa, $B(q)u(t)$ pode ser obtido a partir do modelo geral.[24] O modelo ARX é dado por

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.25)$$

com as restrições $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários dados por

$$A(q^{-1}, \theta) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (2.26)$$

$$B(q^{-1}, \theta) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \quad (2.27)$$

na qual q^{-1} denota o operador atraso. Além disso, θ é o vetor de parâmetros que é dado por

$$\theta := [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}]^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n_a+n_b+1} \quad (2.28)$$

Sendo assim, temos:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + e(t) \quad (2.29)$$

Reescrevendo a equação (2.29), obtém-se:

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t - nk) + \frac{1}{A(q)}e(t) \quad (2.30)$$

O modelo ARX descrito pela equação (2.30) é ilustrado na figura (2.8).

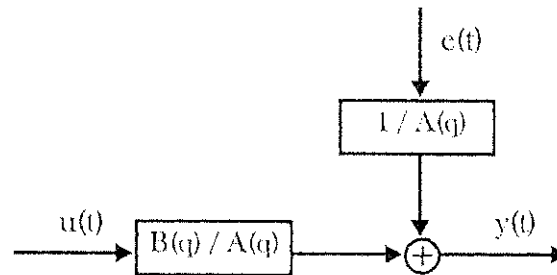


Figura 2.8: Diagrama de blocos do modelo ARX

O modelo ARX é utilizado em aplicações industriais devido a sua simplicidade na estimação dos parâmetros do modelo. Em [31] aborda a utilização do modelo ARX para a observação do comportamento da temperatura do retificador de corrente elétrica utilizado para suprimento dos motores de tração de uma Locomotiva Diesel-Elétrica.

2.7.2 ARMAX

O modelo ARMAX é derivado do modelo linear geral com as seguintes restrições, $D(q) = F(q) = 1$. Matematicamente, temos:

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}e(t) \quad (2.31)$$

O diagrama de blocos do modelo ARMAX é dado na figura (2.9).

2.7.3 OE

O modelo OE é derivado do modelo linear geral com as seguintes restrições, $A(q) = C(q) = D(q) = 1$. Matematicamente, temos:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t) \quad (2.32)$$

O diagrama de blocos do modelo OE é dado na figura (2.10).

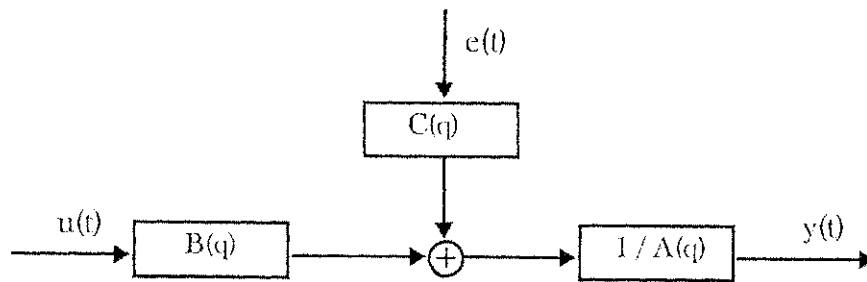


Figura 2.9: Diagrama de blocos do modelo ARMAX

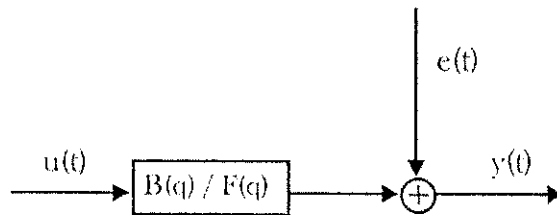


Figura 2.10: Diagrama de blocos do modelo OE

2.7.4 BJ

O modelo BJ é derivado do modelo linear geral com a restrição, $A(q) = 1$. Matematicamente, temos:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.33)$$

A estrutura do modelo BJ é a estrutura mais geral, visto que utiliza quatro polinômios distintos B, F, C, D . O diagrama de blocos do modelo BJ é dado na figura (2.11).

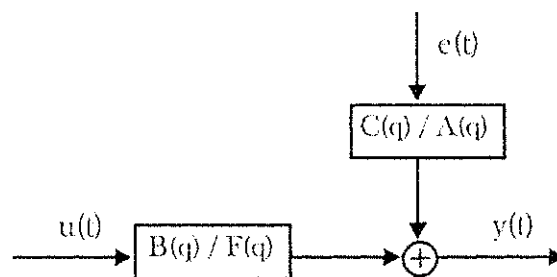


Figura 2.11: Diagrama de blocos do modelo BJ

2.7.5 FIR

O modelo FIR é derivado do modelo linear geral com as seguintes restrições, $C(q) = D(q) = F(q) = 1$. Matematicamente, temos:

$$y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (2.34)$$

O modelo FIR é o modelo linear mais simples, sendo formado por uma combinação linear de atrasos sucessivos, $q^{-1}, q^{-2}, \dots, q^{-n}$. O diagrama de blocos do modelo FIR é dado na figura (2.12).

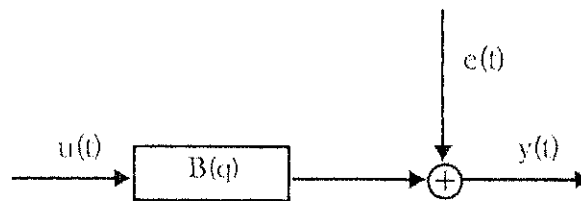


Figura 2.12: Diagrama de blocos do modelo FIR

2.8 Conclusões

Neste capítulo destaca-se alguns conceitos básicos e informações sobre a área de identificação de sistemas. Dois métodos para construção de uma base ortonormal: Procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt e método baseado em espaço de estados. Além disso, uma introdução sobre identificação paramétrica de sistemas. No próximo capítulo o modelo de Laguerre é descrito e sua aplicabilidade na identificação de sistemas.

Capítulo 3

Identificação de Sistemas usando Bases de Laguerre

As bases ortonormais de Laguerre são dotadas de boas propriedades tais como: completude e ortonormalidade. A completude garante sua representação para sistemas estáveis. Além disso, a identificação de sistemas usando as bases de Laguerre possibilita incorporar um conhecimento parcial sobre a dinâmica do sistema.

Neste capítulo o termo OBF¹-N exibido em algumas legendas de figuras desse capítulo deve ser entendido como o modelo de Laguerre-N, isto é, modelo de Laguerre de ordem N.

3.1 Introdução

As funções de Laguerre são definidas, no domínio do tempo, por

$$F_k(z) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{z-a} \left[\frac{1-az}{z-a} \right]^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

no qual, o parâmetro a , com $a \in \mathbb{R}$, especifica a localização de k pólos idênticos em a . O conjunto formado pelas funções $F_k(z)$, $k = 1, \dots, N$ é conhecido como base de Laguerre. A base de Laguerre é adequada para representar sistemas dinâmicos que possuem pólos reais. [15].

Em identificação de sistemas, na etapa da escolha da estrutura do Modelo, é preciso definir qual o tipo de estrutura a ser utilizada no modelo. Os modelos baseados em funções ortonormais possibilitam que sistemas sejam representados pela seguinte série

¹OBF - Orthonormal Basis Functions

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k \quad (3.1)$$

No entanto, na prática é desejável utilizar modelos com bases de funções ortonormais de ordem N , ou seja, trunca-se a série (3.1) com N termos. Matematicamente, temos:

$$G(z) \approx G_n(z) = \sum_{k=1}^N c_k F_k$$

O vetor $\theta = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de parâmetros a ser definido. Ao definir a ordem do modelo, temos o número de funções utilizadas na série (3.1), isto é, define-se a base $\{F_k(z), k = 1, \dots, N\}$. O desafio é encontrar os parâmetros c_k que melhor aproxime o modelo obtido do sistema. Em [1] foi utilizado a base de Laguerre.

O modelo de Laguerre pode ser expresso matematicamente pela seguinte série

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^n c_k F_k \quad (3.2)$$

na qual

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ F_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ F_n &= L_{n-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Observe que as funções de Laguerre são recursivas, isto é, a função F_n pode ser obtida da função anterior F_{n-1} . A base $[F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n]$ é conhecida como base de Laguerre. O modelo de Laguerre de ordem n em diagrama de blocos está apresentado na figura (3.1). Na seção seguinte são mostrados alguns experimentos de identificação usando bases de Laguerre, considerando como sinal de entrada o degrau e o PRBS.

3.2 Critério de Identificação: Mínimos Quadrados

A partir dos dados $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$ obtidos do sistema o erro de predição de uma passo a frente relacionado a estrutura de modelo escolhida é dada por

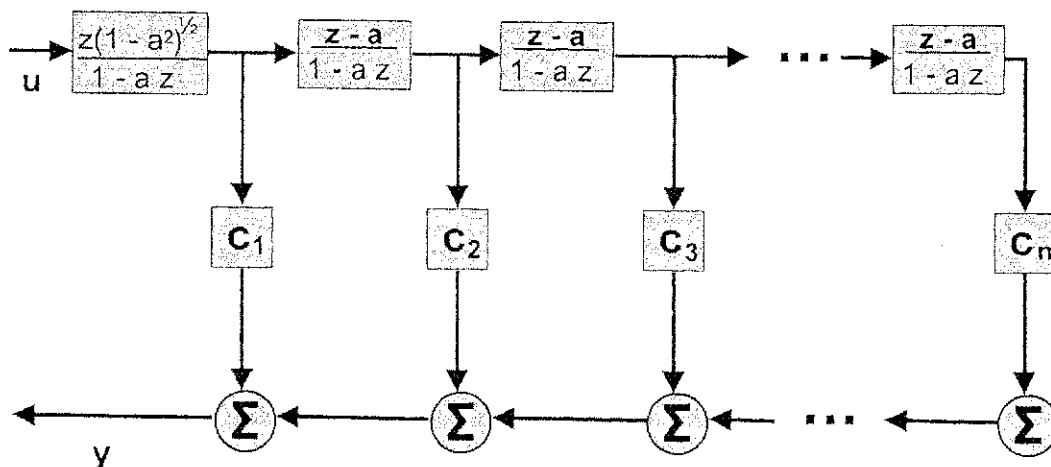


Figura 3.1: Modelo OBF com dinâmica de Laguerre.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= H(q)^{-1}[y(t) - G(q, \theta)u(t)] \\ &= y(t) - \varphi^T(t)\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na qual,

$$\varphi(t) := \Gamma_n(q)u(t), \quad \Gamma_n(q) := [F_1(q) F_2(q) \dots F_n(q)]^T$$

Observe que a expressão (3.3) exibe uma estrutura de regressão linear para o problema de identificação. A única diferença do clássico FIR ou ARX é que as variáveis de regressão são versões filtradas do sinal de entrada, em vez de versões atrasadas dos sinais u e y . Sendo assim, o critério dos mínimos quadrados pode ser utilizado para estimar os parâmetros do modelo OBF.

O parâmetro estimado por mínimos quadrados é determinado por

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in \Theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2$$

e pode ser obtido como uma estimativa da regressão linear simples, resolvendo as equações normais

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right] \cdot \hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (3.4)$$

isto é,

$$\hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad (3.5)$$

A equação (3.5) é conhecida como o estimador de mínimos quadrados clássico. Para o modelo de Laguerre

$$\hat{\theta}_N = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]$$

isto é, o vetor de parâmetros representa os coeficientes do modelo de Laguerre com pólo em a .

O sinal empregado na identificação do sistema deve ser capaz de excitá-lo em toda a faixa de interesse pois, caso contrário, estas características não são registradas e, portanto, o modelo identificado não é capaz de representá-las. Geralmente, sinais de entrada com excitação persistente possibilitam um melhor condicionamento numérico nos problemas de estimação que utilizam o algoritmo dos mínimos quadrados.

3.3 Casos de Simulação

Devido a propriedade de completude, ao construir uma base de Laguerre, todo sistema será representado por um modelo de Laguerre. A seguir, iremos projetar alguns experimentos para um sistema de 4ª ordem.

3.3.1 Experimento 1: Sistema de 4ª Ordem com degrau na entrada.

Considere um sistema dado por

$$y(s) = \frac{13,5}{17,13s^4 + 56,09s^3 + 57,64s^2 + 20,2s + 1} u(s) \quad (3.6)$$

na qual, u é o sinal de entrada e y é o sinal de saída.

Para a identificação, o sinal de entrada será um degrau unitário e o modelo dado em (3.6) foi construído no Simulink do Matlab, foram gerados 80 pontos com intervalo de amostragem de uma unidade de tempo para utilizar como dados no algoritmo de identificação implementado no Matlab. Na figura (3.2) temos a amplitude do sinal de saída. Nas figuras (3.3), (3.4) e (3.5) os resultados obtidos das simulações do processo usando o modelo de Laguerre com pólos em 0,4; 0,6 e 0,8, respectivamente, nessa ordem. Vale ressaltar que foi utilizado o método do mínimos quadrados como critério de identificação.

Além disso, na tabela (3.1) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

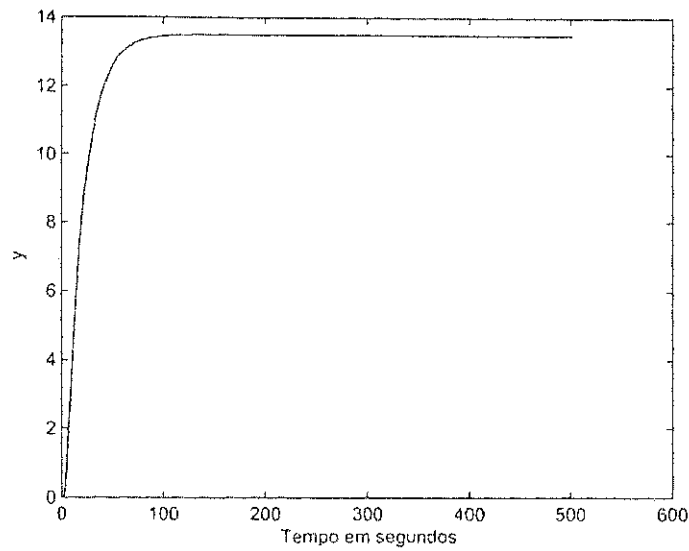


Figura 3.2: Amplitude do sinal de saída do sistema (3.6).

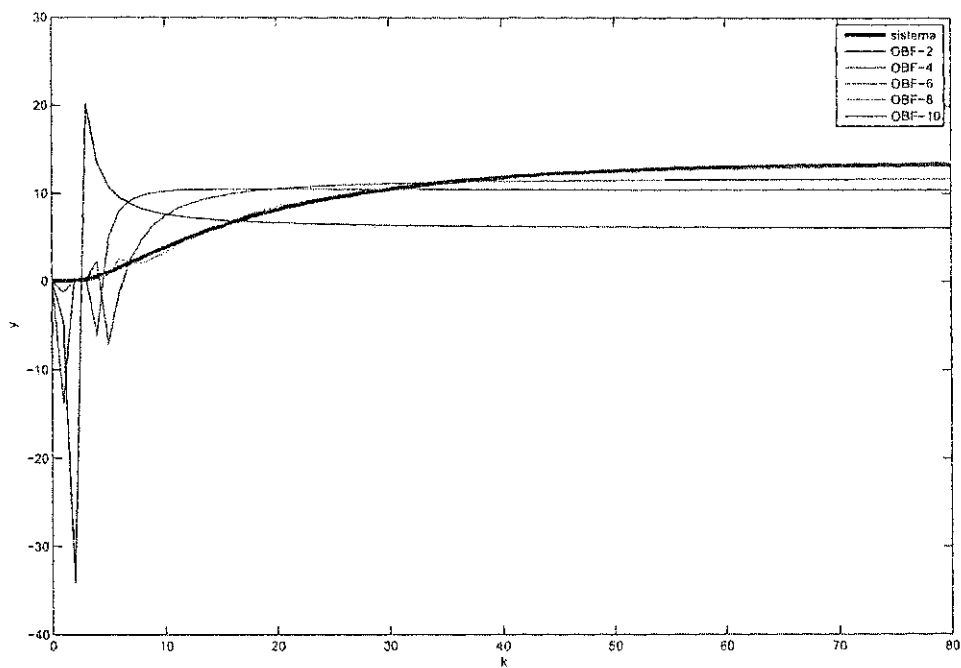


Figura 3.3: Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.

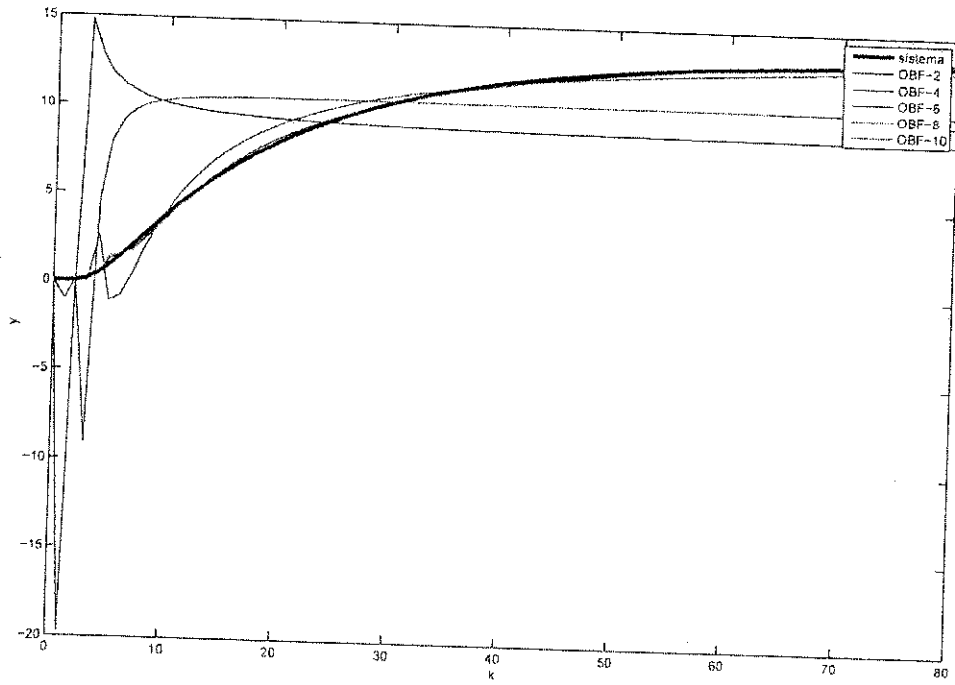


Figura 3.4: Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.

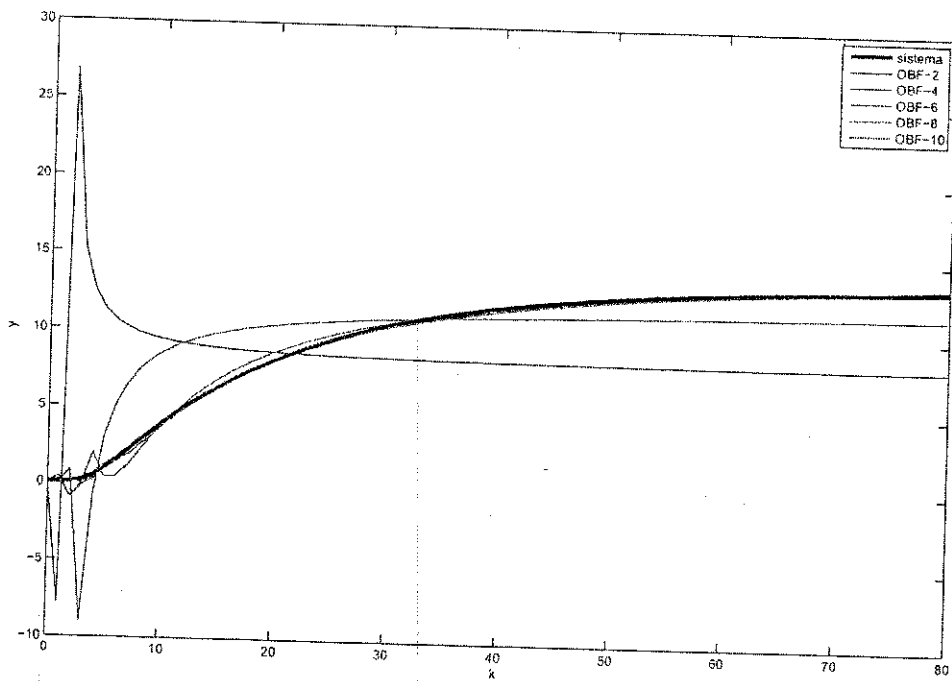


Figura 3.5: Saída do sistema (3.6) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.

Pólo	OBF-2	OBF-4	OBF-6	OBF-8	OBF-10
0,4	312,1385	69,2807	22,9183	0,3362	0,0813
0,6	147,9330	61,7686	2,6308	0,1509	0,1222
0,8	191,6212	30,7012	0,7212	0,2156	0,2772

Tabela 3.1: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.6).

Agora, analisando os dados da tabela (3.1) o melhor modelo dentre o conjunto de pólos $\{0,4; 0,6; 0,8\}$ é o OBF-10 com pólo em 0,4. Os parâmetros desse modelo são

$[-185,0711 \quad -38,6553 \quad 117,1444 \quad 82,6584 \quad 21,9852 \quad 2,1275 \quad -0,1381 \quad -0,0474 \quad -0,0036 \quad -0,0001]$.

3.3.2 Experimento 2: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,1).

Considere um sistema dado por

$$y(s) = \frac{13,5}{17,13s^4 + 56,09s^3 + 57,64s^2 + 20,2s + 1}u(s) + \frac{3}{6s + 1}e(s) \quad (3.7)$$

na qual, u é o sinal de entrada, y é o sinal de saída e e um ruído branco.

Para a identificação, o sinal de entrada será um degrau unitário e o modelo dado em (3.7) foi construído no Simulink do Matlab, foram gerados 80 pontos com tempo de amostragem de uma unidade de tempo para utilizar como dados no algoritmo de identificação implementado no Matlab. Além disso, o ruído branco foi gerado no simulink utilizando o bloco *Band-Limited White -Noise* e ajustando os parâmetros de tempo de amostragem para uma unidade de tempo e potência do ruído em 0,1. Na figura (3.2) temos a amplitude do sinal de saída. Nas figuras (3.6), (3.7) e (3.8) os resultados obtidos das simulações do processo usando o modelo de Laguerre com pólos em 0,4; 0,6 e 0,8, respectivamente, nessa ordem.. Vale ressaltar que foi utilizado o método do mínimos quadrados como critério de identificação. Além disso, na tabela (3.2) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

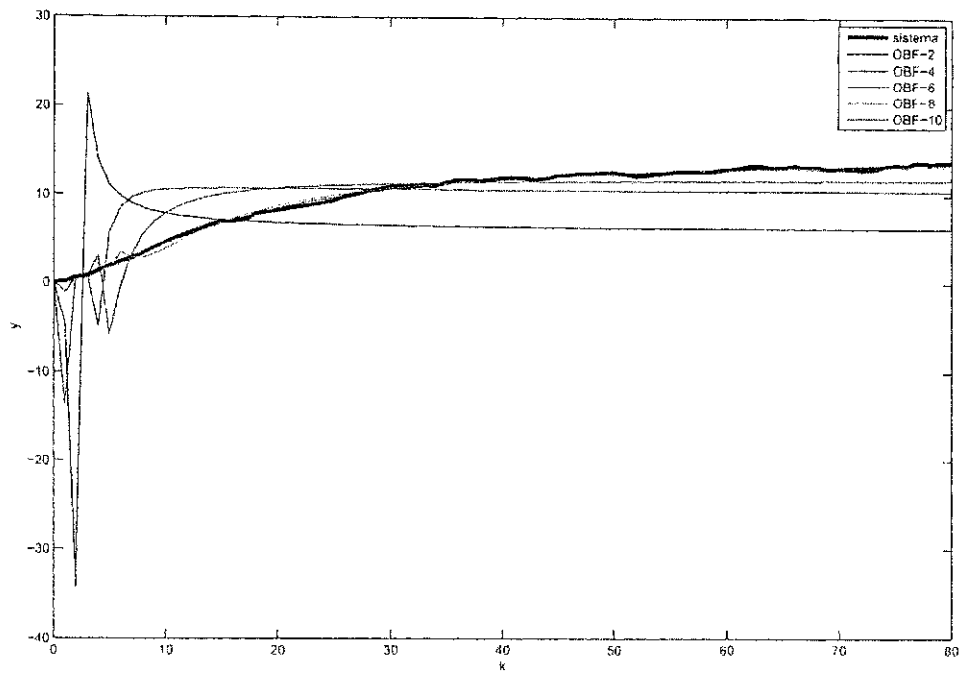


Figura 3.6: Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.

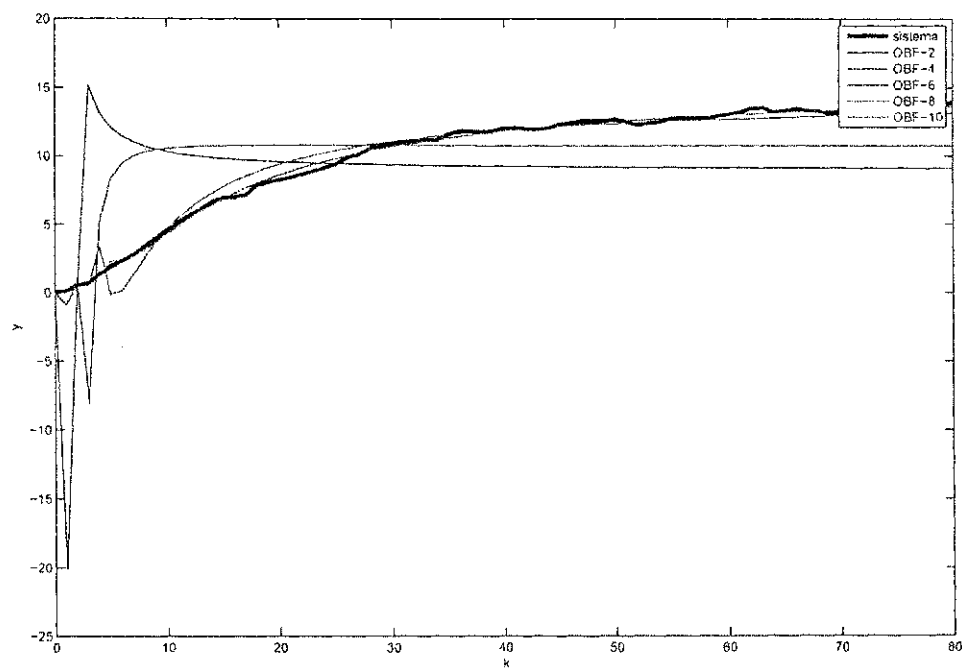


Figura 3.7: Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.

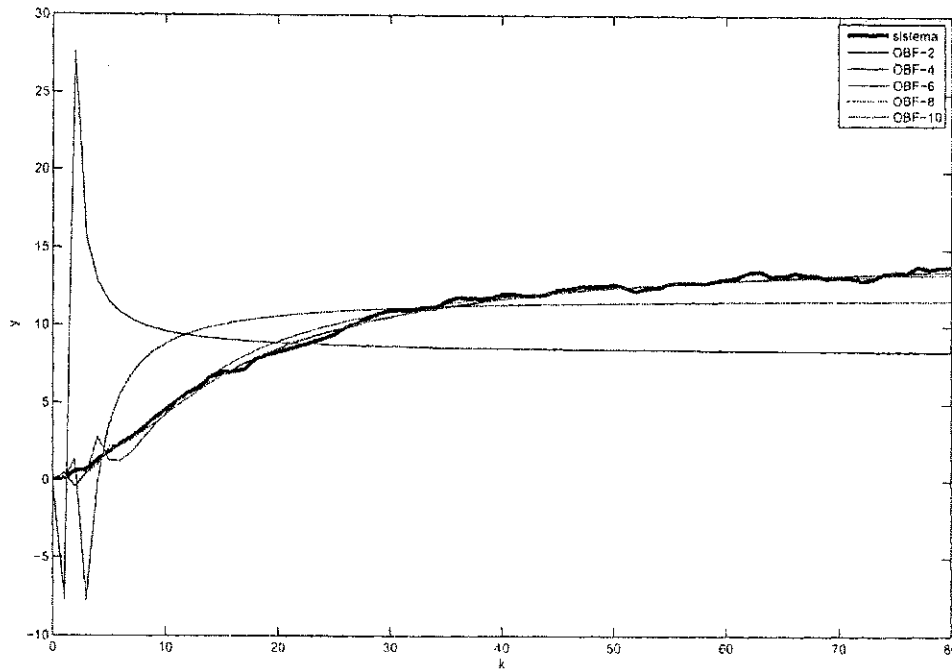


Figura 3.8: Saída do sistema (3.7) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.

Pólo	OBF-2	OBF-4	OBF-6	OBF-8	OBF-10
0,4	339,6148	70,5344	23,5854	0,7449	0,3278
0,6	152,8032	60,8713	3,1613	0,4047	0,3606
0,8	199,5883	30,0566	1,1130	0,4729	0,5116

Tabela 3.2: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.7).

Agora, analisando os dados da tabela (3.2) o melhor modelo dentre o conjunto de pólos $\{0,4; 0,6; 0,8\}$ é o OBF-10 com pólo em 0,4. Os parâmetros desse modelo são

$[-199,7452 \quad -42,6483 \quad 127,4087 \quad 89,7379 \quad 23,4224 \quad 2,1001 \quad -0,1768 \quad -0,0498 \quad -0,0034 \quad -0,0001]$.

3.3.3 Experimento 3: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,3).

Considere um sistema dado por

$$y(s) = \frac{13,5}{17,13s^4 + 56,09s^3 + 57,64s^2 + 20,2s + 1} u(s) + \frac{3}{6s + 1} e(s) \quad (3.8)$$

na qual, u é o sinal de entrada, y é o sinal de saída e e um ruído branco.

Para a identificação, o sinal de entrada será um degrau unitário e o modelo dado em (3.8) foi construído no Simulink do Matlab, foram gerados 80 pontos com tempo de amostragem de uma unidade de tempo para utilizar como dados no algoritmo de identificação implementado no Matlab. Além disso, o ruído branco foi gerado no simulink utilizando o bloco *Band-Limited White -Noise* e ajustando os parâmetros de tempo de amostragem para uma unidade de tempo e potência do ruído em 0,3. Na figura (3.2) temos a amplitude do sinal de saída. Nas figuras (3.9), (3.10) e (3.11) os resultados obtidos das simulações do processo usando o modelo de Laguerre com pólos em 0,4; 0,6 e 0,8, respectivamente, nessa ordem. Vale ressaltar que foi utilizado o método dos mínimos quadrados como critério de identificação. Além disso, na tabela (3.3) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

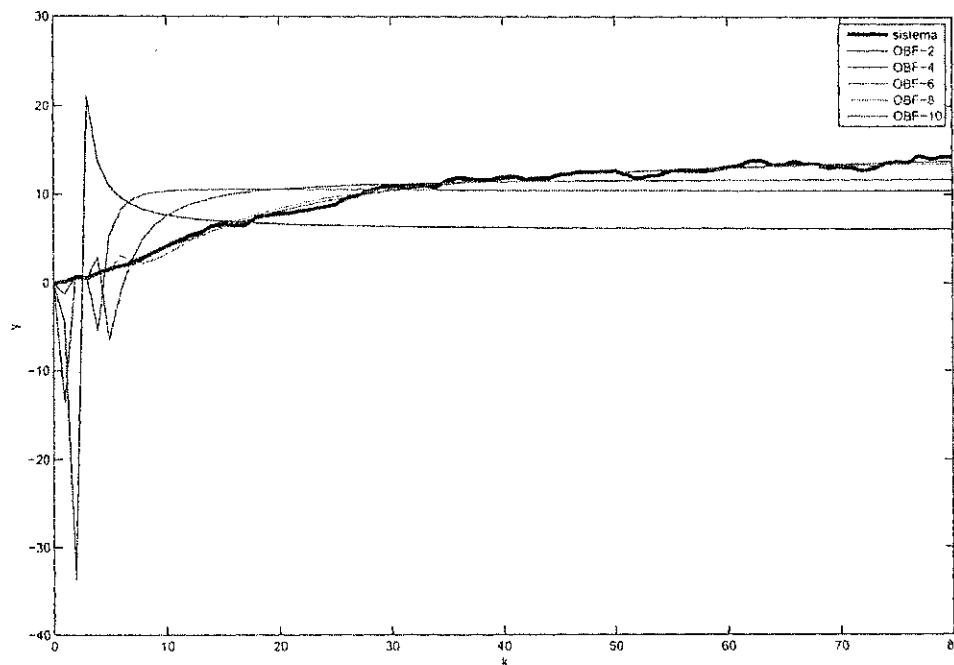


Figura 3.9: Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.

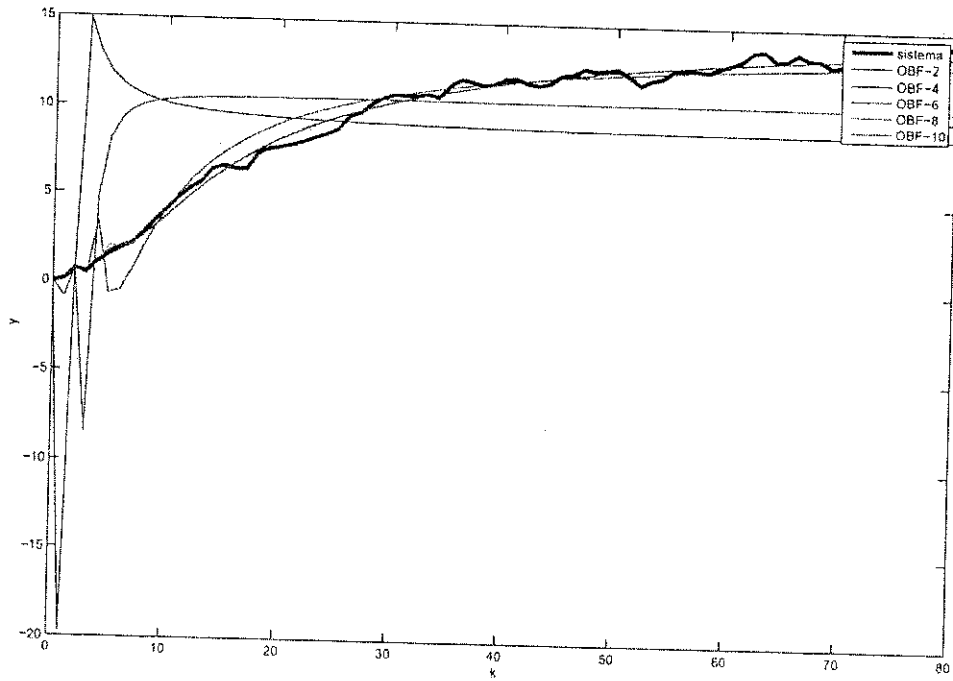


Figura 3.10: Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.

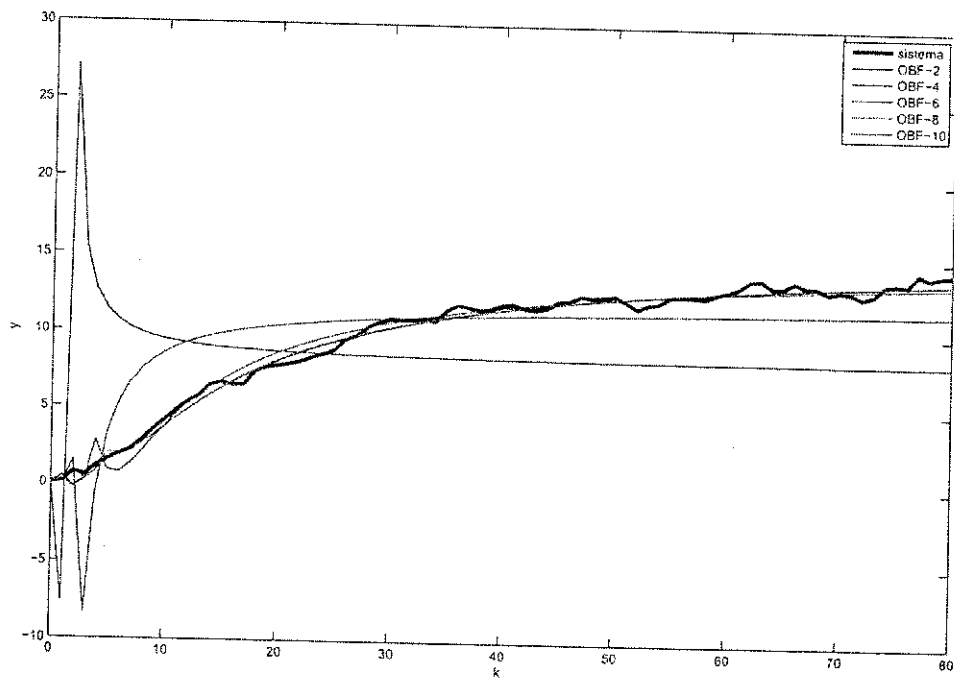


Figura 3.11: Saída do sistema (3.8) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.

Pólo	OBF-2	OBF-4	OBF-6	OBF-8	OBF-10
0,4	322,3618	72,2876	25,7147	1,4179	0,8447
0,6	149,9339	63,5143	4,1419	0,9425	0,8847
0,8	192,1478	32,8289	1,8042	1,0014	1,0084

Tabela 3.3: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.8).

Agora, analisando os dados da tabela (3.3) o melhor modelo dentre o conjunto de pólos $\{0,4; 0,6; 0,8\}$ é o OBF-10 com pólo em 0,4. Os parâmetros desse modelo são

$[-222,6223 \quad -49,2897 \quad 145,2583 \quad 102,2799 \quad 26,4373 \quad 2,2718 \quad -0,2171 \quad -0,0558 \quad -0,0036 \quad -0,0001]$.

3.3.4 Experimento 4: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e degrau na entrada (Potência = 0,5).

Considere um sistema dado por

$$y(s) = \frac{13,5}{17,13s^4 + 56,09s^3 + 57,64s^2 + 20,2s + 1}u(s) + \frac{3}{6s + 1}e(s) \quad (3.9)$$

na qual, u é o sinal de entrada, y é o sinal de saída e e um ruído branco.

Para a identificação, o sinal de entrada será um degrau unitário e o modelo dado em (3.9) foi construído no Simulink do Matlab, foram gerados 80 pontos com tempo de amostragem de uma unidade de tempo para utilizar como dados no algoritmo de identificação implementado no Matlab. Além disso, o ruído branco foi gerado no simulink utilizando o bloco *Band-Limited White -Noise* e ajustando os parâmetros de tempo de amostragem para uma unidade de tempo e potência do ruído em 0,5. Na figura (3.2) temos a amplitude do sinal de saída. Nas figuras (3.12), (3.13) e (3.14) os resultados obtidos das simulações do processo usando o modelo de Laguerre com pólos em 0,4; 0,6 e 0,8, respectivamente, nessa ordem. Vale ressaltar que foi utilizado o método dos mínimos quadrados como critério de identificação. Além disso, na tabela (3.4) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

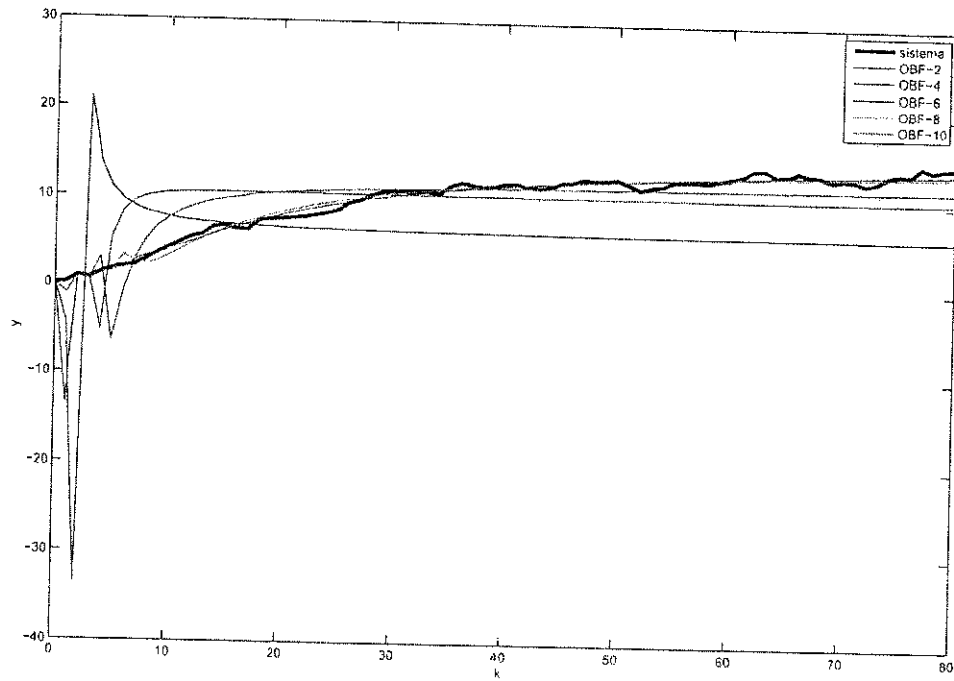


Figura 3.12: Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.

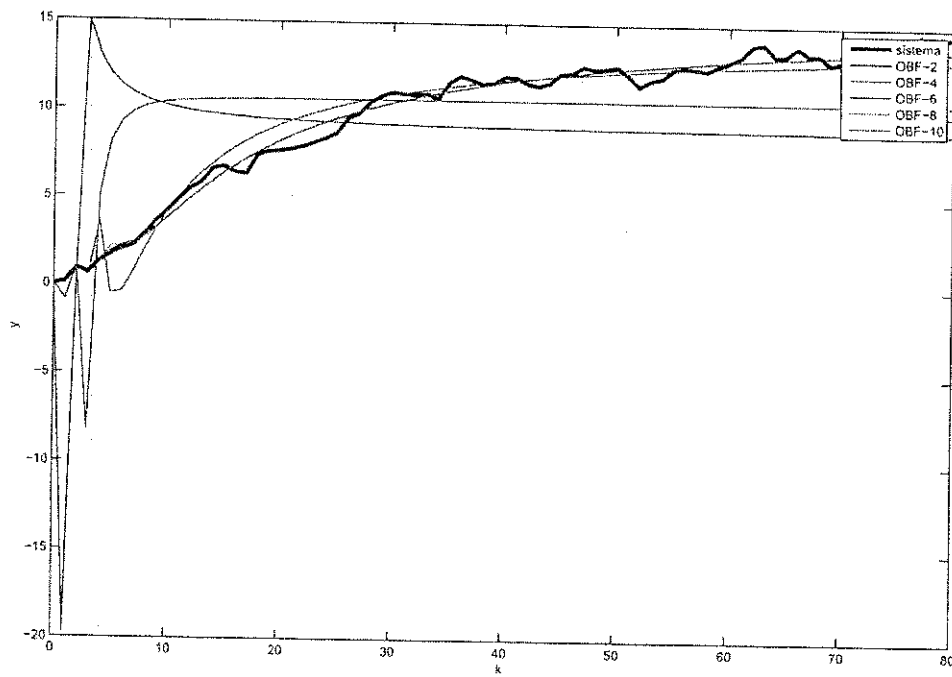


Figura 3.13: Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.

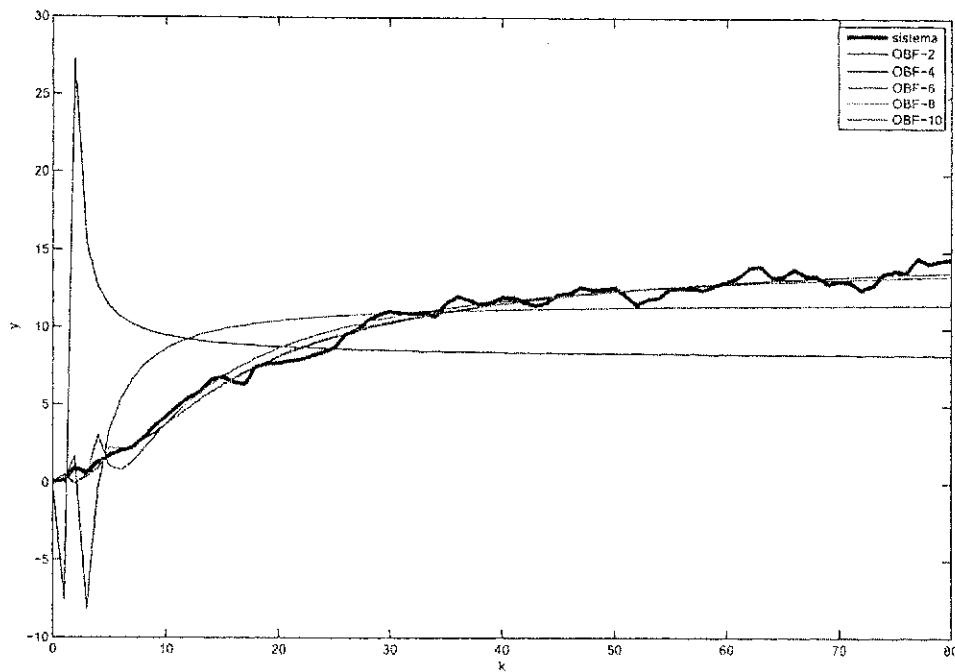


Figura 3.14: Saída do sistema (3.9) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.

Pólo	OBF-2	OBF-4	OBF-6	OBF-8	OBF-10
0,4	324,5440	73,2636	26,8085	2,0847	1,3975
0,6	150,3225	64,1562	4,9341	1,5118	1,4439
0,8	191,9343	33,7018	2,4720	1,5776	1,5542

Tabela 3.4: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.9).

Agora, analisando os dados da tabela (3.4) o melhor modelo dentre o conjunto de pólos $\{0,4; 0,6; 0,8\}$ é o OBF-10 com pólo em 0,4. Os parâmetros desse modelo são

$[-238,7138 \quad -52,3844 \quad 153,4395 \quad 107,9898 \quad 27,7329 \quad 2,3138 \quad -0,2401 \quad -0,0583 \quad -0,0036 \quad -0,0001]$.

3.3.5 Experimento 5: Sistema de 4ª Ordem com AWGN e PRBS na entrada.

Considere um sistema dado por

$$y(s) = \frac{13,5}{17,13s^4 + 56,09s^3 + 57,64s^2 + 20,2s + 1} u(s) + \frac{3}{6s + 1} e(s) \quad (3.10)$$

na qual, u é o sinal de entrada, y é o sinal de saída e e um ruído branco.

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e o modelo dado em (3.10) foi construído no Simulink do Matlab, foram gerados 10000 pontos com tempo de amostragem de uma unidade de tempo para utilizar como dados no algoritmo de identificação implementado no Matlab. Além disso, o ruído branco foi gerado no simulink utilizando o bloco *Band-Limited White -Noise* e ajustando os parâmetros de tempo de amostragem para uma unidade de tempo e potência do ruído em 0,1. A figura (3.15) mostra o sinal de entrada utilizado na simulação. As figuras (3.16), (3.17) e (3.18) mostram os resultados obtidos das simulações do processo usando o modelo de Laguerre. Vale ressaltar que foi utilizado o método dos mínimos quadrados como critério de identificação. Por fim, na tabela (3.4) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

A utilização de sinais pseudo-aleatórios, como o PRBS, justifica-se por duas razões. A primeira delas é que alguns métodos de estimação de parâmetros (por exemplo: mínimos quadrados) necessitam calcular a inversa de uma matriz e quanto menor a variação do sinal de entrada, mais mal-condicionada será a matriz. A segunda razão é que um sinal aleatório possui potência espectral em uma ampla faixa de frequências.

Em (17) são citadas algumas vantagens ao utilizar sinais do tipo PRBS na identificação de sistemas, são elas:

- Um sinal PRBS perturba o sistema em torno de um ponto de operação, em regime permanente, sem desviá-lo significativamente deste valor. Isto implica que o sistema continua funcionando na região de operação enquanto é feita a identificação, esta característica é desejável, principalmente, em processos lentos que necessitam de um tempo longo.
- O conteúdo frequencial de um sinal PRBS pode ser ajustado facilmente para atender as especificações sobre qual faixa de frequências deseja-se excitar.
- Sinais PRBS podem ser repetidos diversas vezes, o que pode aumentar a precisão das estimativas.

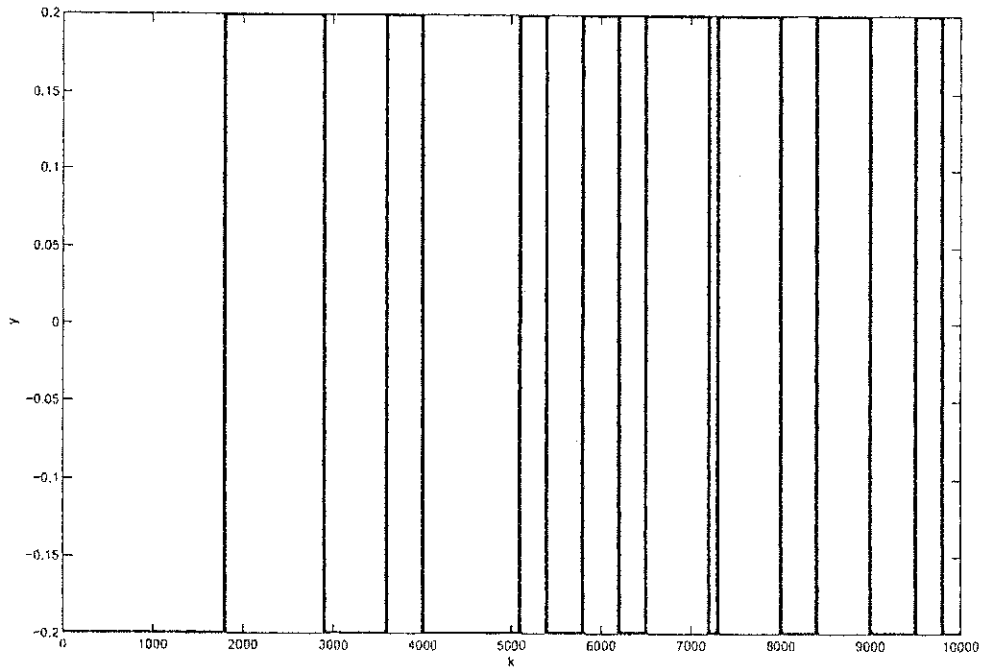


Figura 3.15: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (3.10).

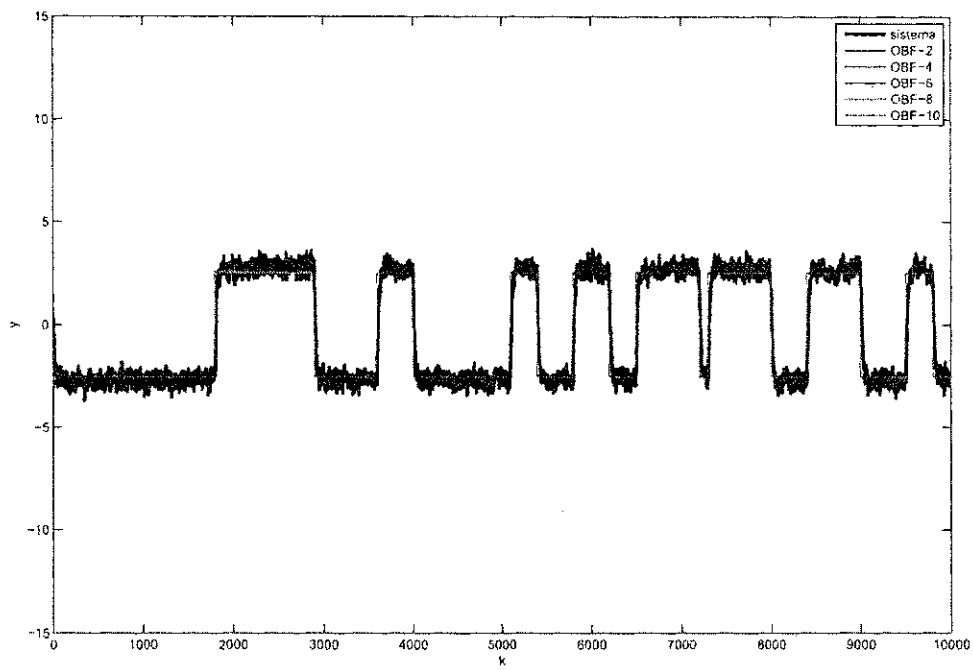


Figura 3.16: Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,4$.

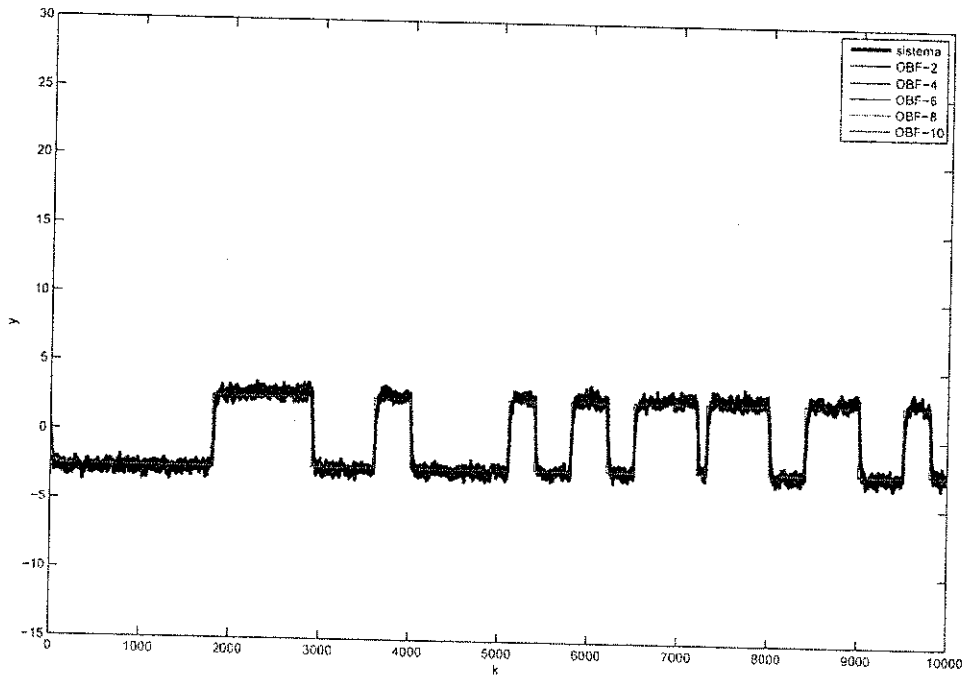


Figura 3.17: Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,6$.

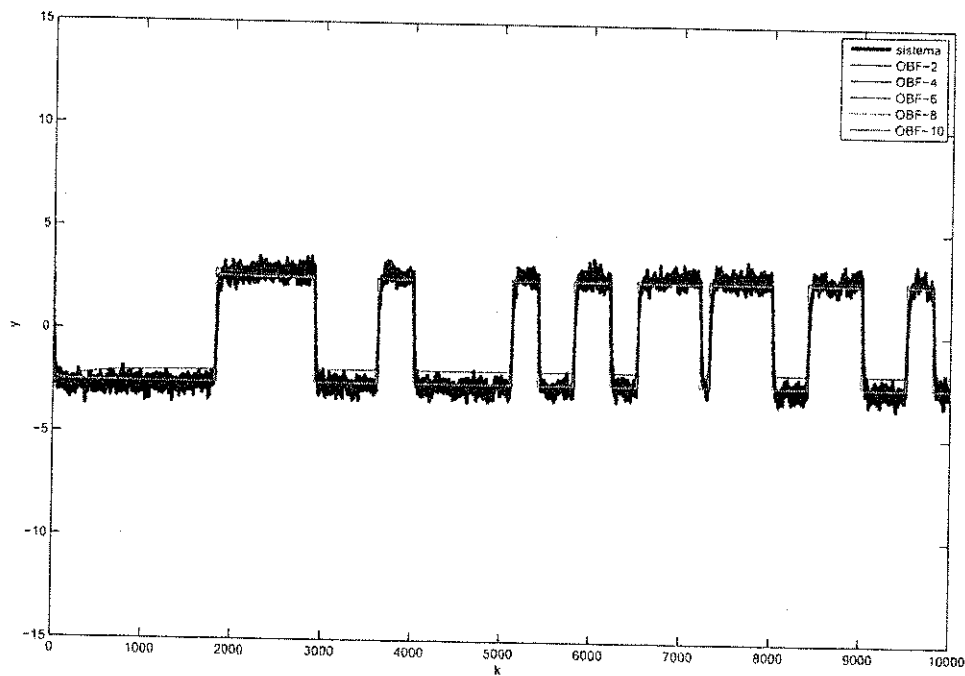


Figura 3.18: Saída do sistema (3.10) e do modelo de Laguerre com pólo $a = 0,8$.

Pólo	OBF-2	OBF-4	OBF-6	OBF-8	OBF-10
0,4	9,3544	8,8416	8,7081	8,6801	8,6737
0,6	9,2063	8,7859	8,6887	8,6819	9,6605
0,8	9,0326	8,8024	8,6885	8,6781	11,9540

Tabela 3.5: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (3.10).

Agora, analisando os dados da tabela (3.5) o melhor modelo dentre o conjunto de pólos $\{0,4; 0,6; 0,8\}$ é o OBF-10 com pólo em 0,4. Os parâmetros desse modelo são

$$[-15,1 \quad -17,9 \quad 243,2 \quad -420,5 \quad -441,4 \quad 2034 \quad -1693,3 \quad -229,9 \quad 725,4 \quad -188,4].$$

3.4 Conclusões

Neste capítulo foram realizadas algumas simulações utilizando o modelo de Laguerre na identificação de sistemas. Nas simulações foram consideradas como sinal de entrada: o degrau e o PRBS. O algoritmo de identificação via mínimos quadrados foi gerado em linguagem Matlab. No entanto, não foi utilizado nenhum algoritmo para obter uma estimativa para o pólo ótimo de Laguerre. No próximo capítulo utilizaremos o método do relé para obter uma estimativa inicial do pólo de Laguerre.

Capítulo 4

O Método do Relé

4.1 Introdução

O método do relé convencional foi proposto por Astrom e Haggund [4] em 1984. O método do relé é uma técnica experimental que possibilita obter estimativas do ganho e frequência crítica (K_u e w_u , respectivamente) do sistema. Este método consiste na substituição do controlador por um relé (controlador do tipo liga-desliga). Considere o sistema em malha fechada da figura 4.1. Na figura 4.2 apresenta-se o diagrama de blocos do processo dado na figura (4.1) com realimentação por relé.

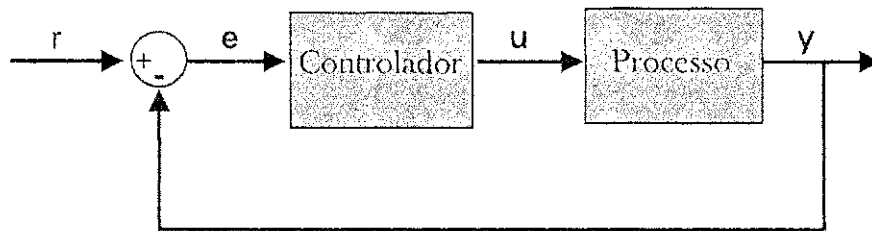


Figura 4.1: Sistema em Malha Fechada.

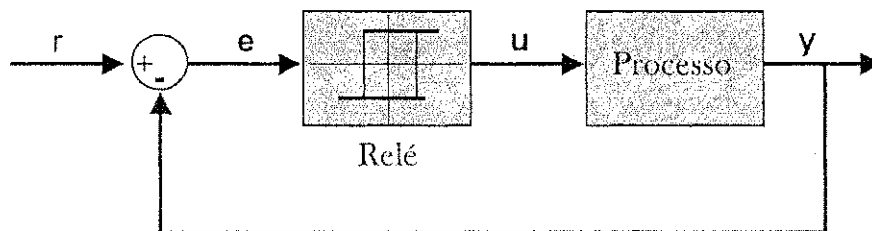


Figura 4.2: Diagrama de blocos do processo com realimentação por relé.

Na figura 4.2 o relé tem amplitude d . Da análise por função descritiva mostra-se que a condição para oscilação na saída do processo é que o ganho de malha seja igual a -1 , isto é,

$$N(a)G(j\omega) = K_u G(j\omega) = -1$$

na qual,

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a}$$

$N(a)$ é a função descritiva do relé e a é a amplitude da oscilação na saída do processo. Sendo assim, a intersecção da curva de Nyquist do processo com a função descritiva do relé ocorre no ponto crítico, de modo que

$$G(j\omega_n) = -\frac{\pi a}{4d} \quad (4.1)$$

Observando a equação (4.1), nota-se que a amplitude de oscilação na saída do processo pode ser facilmente controlada a partir da amplitude d do relé.

Algumas vantagens da utilização do método do relé são listadas a seguir, são elas:

- Estimacão do ganho e frequencia critica do processo por meio de um simples teste experimental.
- Não requer que o processo seja forçado ao seu limite de estabilidade.
- A amplitude da saída do processo pode ser controlada a partir da amplitude do relé.
- Elimina a necessidade de uma escolha criteriosa da taxa de amostragem do processo.
- Identificacão de pontos do processo no diagrama de Nyquist.

4.2 Estimação do pólo de Laguerre com o método do Relé para modelos de primeira ordem

A grande maioria dos processos industriais são modelados por funções de transferência de primeira ou segunda ordem com atraso de transporte. Os sistemas de primeira ordem são representados por

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta_1 s}}{\tau_1 s + 1} = \frac{K_1 e^{-\theta_1 s}}{s + \frac{1}{\tau_1}} \quad (4.2)$$

Na qual $K_1 = \frac{K}{\tau_1}$. Os parâmetros θ_1 e τ_1 do modelo (4.2) são estimados pelo método clássico do relé. O parâmetro K é conhecido como ganho estático do processo. Este parâmetro é obtido a partir das medidas dos sinais de entrada e saída em regime permanente para uma mudança degrau na entrada da planta. Em [9] são apresentadas as fórmulas para cálculo dos parâmetros K_u, τ_1 e θ_1 .

$$K_u = \frac{4d}{\pi a} \quad (4.3)$$

$$\tau_1 = \frac{T_u}{2\pi} \sqrt{(K_u K)^2 - 1} \quad (4.4)$$

$$\theta_1 = \frac{T_u}{2\pi} \left(\pi - \arctan \frac{2\pi}{T_u} \tau_1 \right) \quad (4.5)$$

onde a é a amplitude do relé.

4.3 Estimação do pólo de Laguerre com o método do Relé para modelos de segunda ordem

Os sistemas de segunda ordem são representados por

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta_2 s}}{(\tau_2 s + 1)^2} \quad (4.6)$$

Os parâmetros θ_2 e τ_2 do modelo (4.6) são estimados pelo método clássico do relé. O parâmetro K é conhecido como ganho estático do processo. Este parâmetro é obtido a partir das medidas dos sinais de entrada e saída em regime permanente para uma mudança degrau na entrada da planta. Em [9] são apresentadas as fórmulas para cálculo dos parâmetros K_u, τ_2 e θ_2 .

$$K_u = \frac{4d}{\pi a} \quad (4.7)$$

$$\tau_2 = \frac{T_u}{2\pi} \sqrt{K_u K - 1} \quad (4.8)$$

$$\theta_2 = \frac{T_u}{2\pi} \left(\pi - 2 \arctan \frac{2\pi}{T_u} \tau_2 \right) \quad (4.9)$$

onde d é a amplitude do relé.

4.4 Casos de Simulação: Sistemas de 1ª Ordem

Para a realização das simulações foram escolhidos três sistemas de primeira ordem que são representativos para a maioria dos processos industriais [5]. Tais processos estão indicados na tabela (4.11).

Experimento	Função de Transferência
I	$\frac{1}{s+1}$
II	$\frac{1}{6s+1}$
III	$\frac{1,5}{3s+1}$

Tabela 4.1: Processos utilizados na identificação.

4.4.1 Experimento I

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{K_1}{s + \frac{1}{\tau_1}} \quad (4.10)$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.10) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 2,6. Na figura (4.3) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.10).

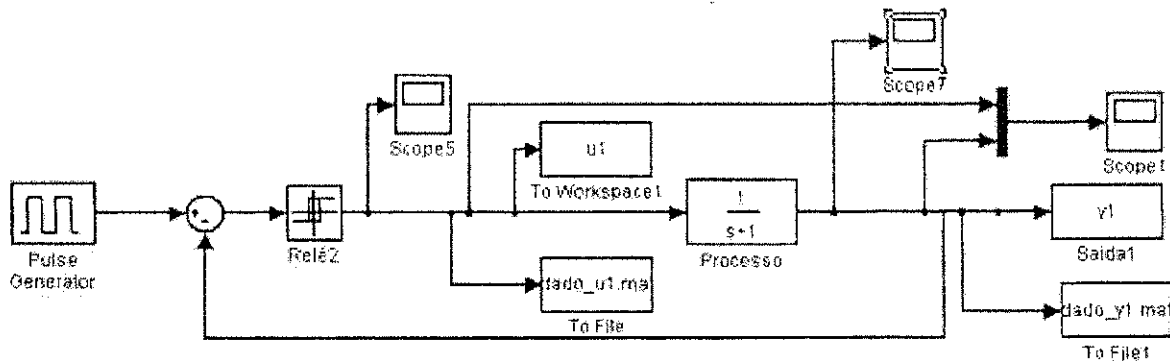


Figura 4.3: Método do Relé no Simulink para o processo (4.10).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.4) e (4.5).

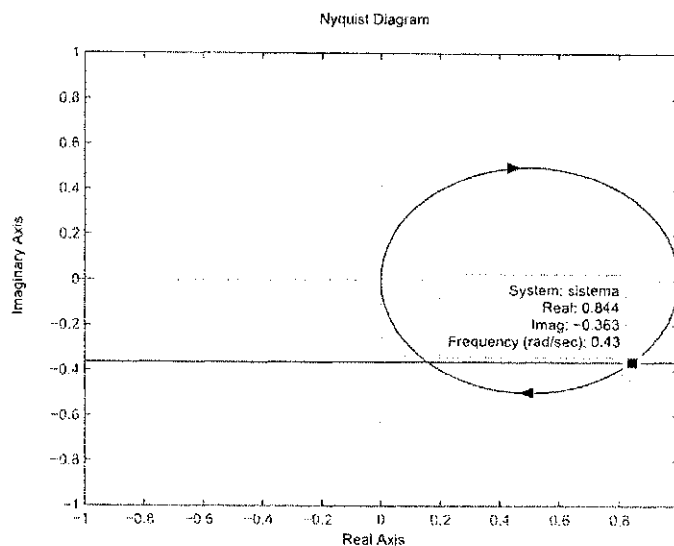


Figura 4.4: Diagrama de Nyquist (4.10).

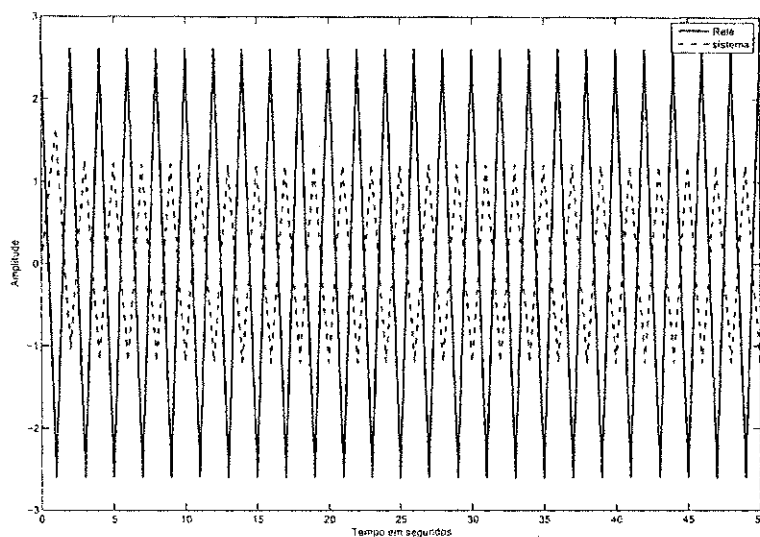


Figura 4.5: Saída do sistema e do relé do processo (4.10).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.10) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.6). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, T_u, τ_1 e K estão na tabela (4.2).

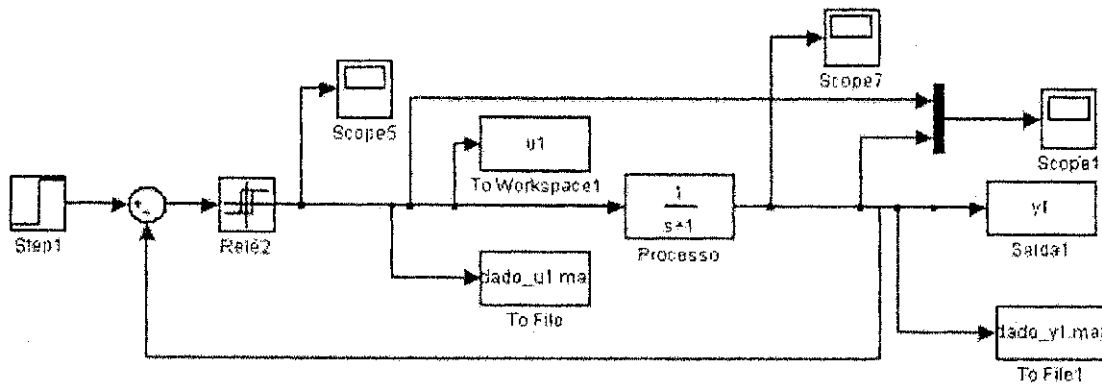


Figura 4.6: Determinação do ganho estático do processo (4.10).

Parâmetros	Valor
K_u	2,755
T_u	2,040
τ_1	1,024
K	1,201

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.10).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_1 da tabela (4.2) uma estimativa do pólo do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_1} \tag{4.11}$$

Na tabela (4.3) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.10)

Pólo	Real	Aproximado
a	1	0,9766

Tabela 4.3: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.10).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.10). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do processo (4.10) e foram armazenados nos arquivos *dado_u.mat* e *dado_y.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.7) temos o modelo do simulink para o processo (4.10).

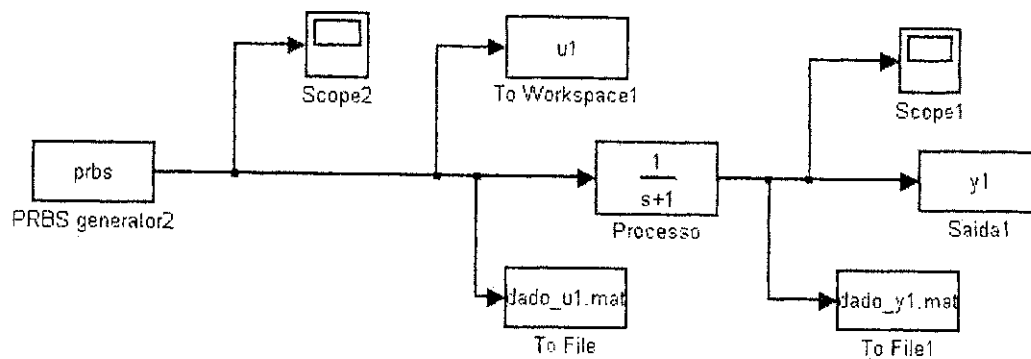


Figura 4.7: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.10).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 0,9766. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 0,9766. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.9) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.10). Por fim, na tabela (4.4) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

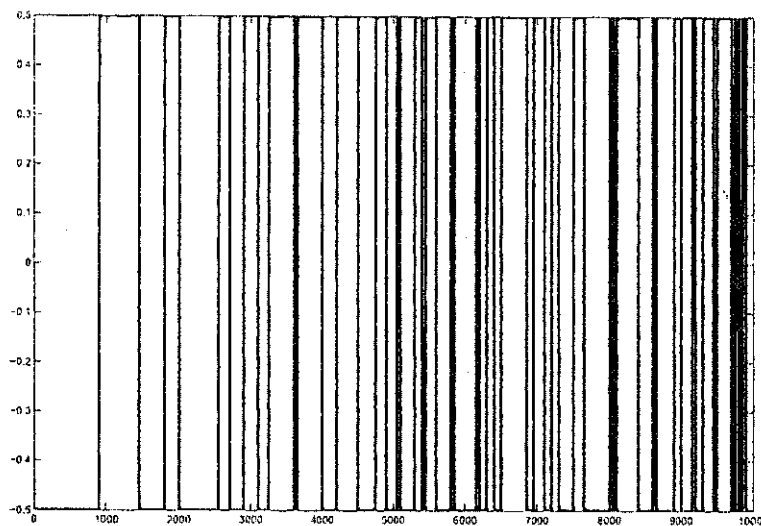


Figura 4.8: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.10).

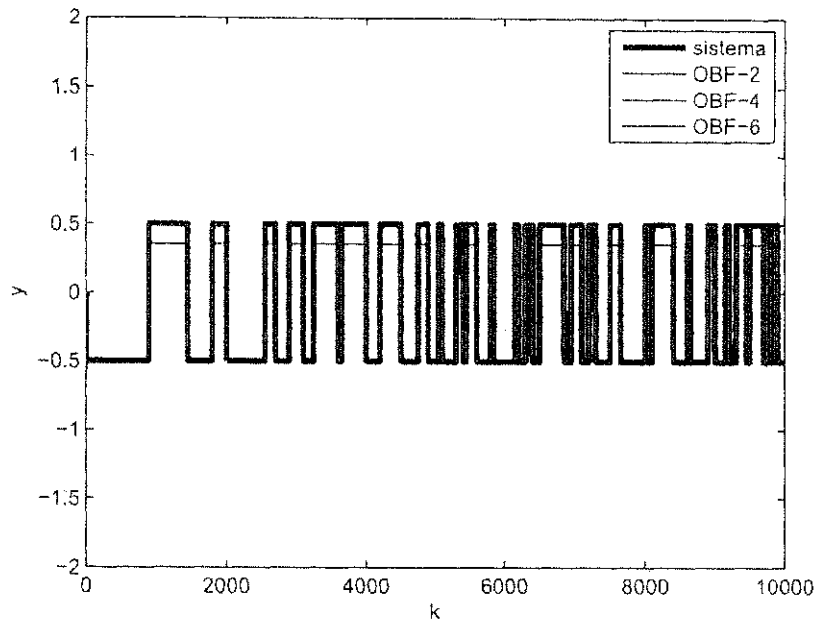


Figura 4.9: Saída do sistema e do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
0,9766	15,3500	2,5569	2,5559

Tabela 4.4: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.10).

Agora, analisando os dados da tabela (4.4) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 6, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^6 c_k L_k \tag{4.12}$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -7770$, $c_2 = 13600$, $c_3 = 60690$, $c_4 = -106960$, $c_5 = -118590$ e $c_6 = 210150$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 1 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual

a 2,5558. Comparando-se esse valor com o valor 2,5559 da tabela (4.4) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.4.2 Experimento II

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{1}{6s + 1} = \frac{K_1}{s + \frac{1}{\tau_1}} \quad (4.13)$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.13) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 3,0. Na figura (4.10) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.13).

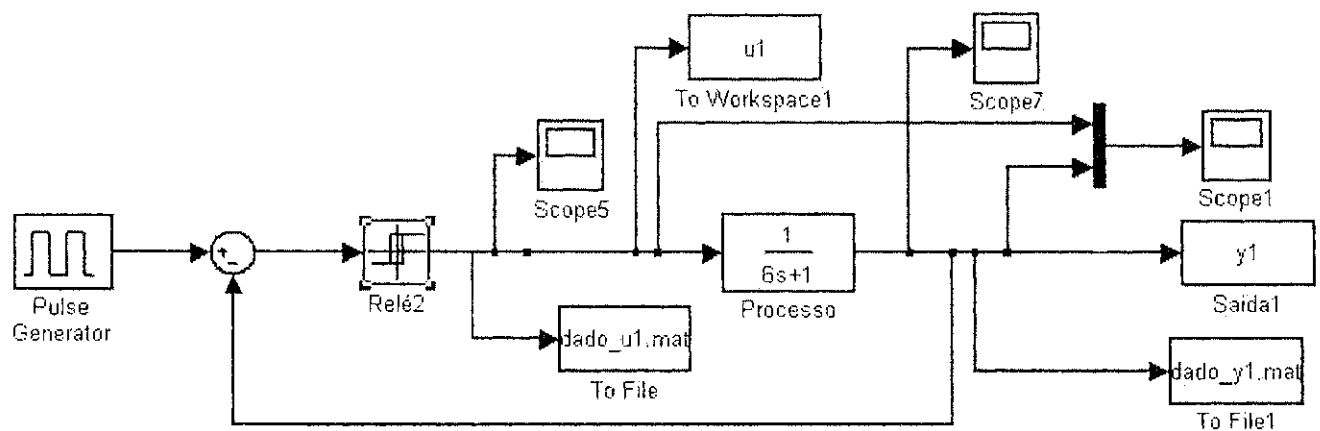


Figura 4.10: Método do Relé no Simulink para o processo (4.13).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.11) e (4.12).

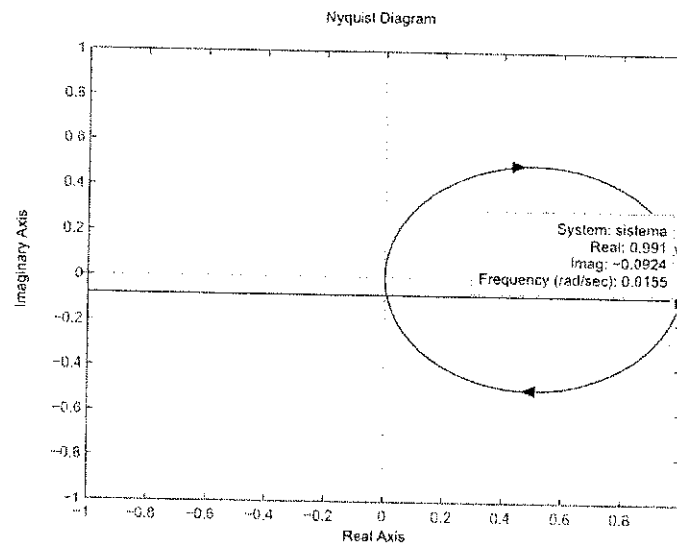


Figura 4.11: Diagrama de Nyquist do processo (4.13).

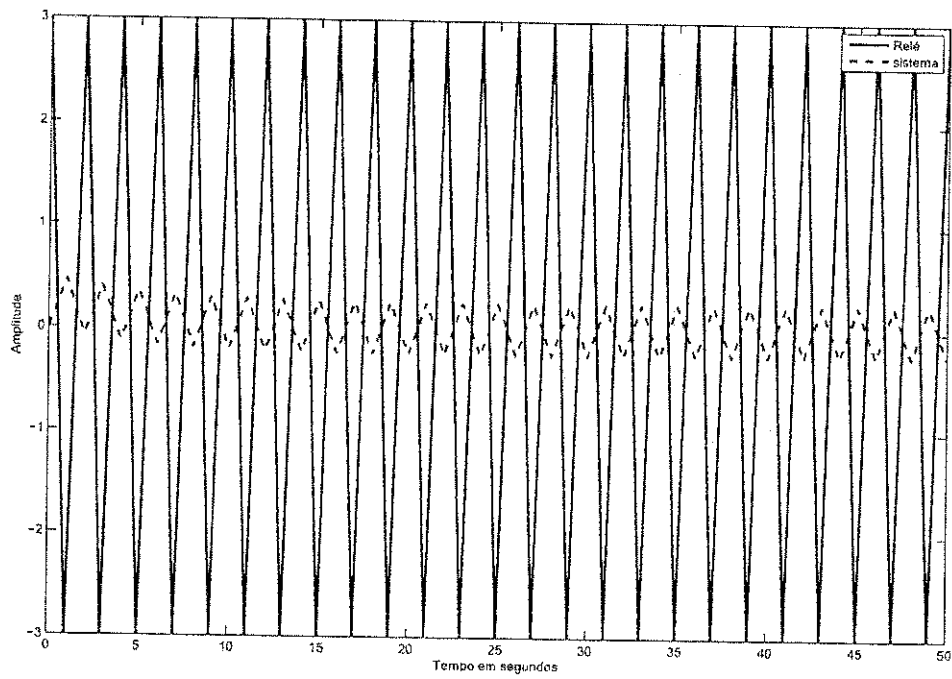


Figura 4.12: Saída do sistema e do relé do processo (4.13).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.13) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.13). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, T_u, τ_1 e K estão na tabela (4.5).

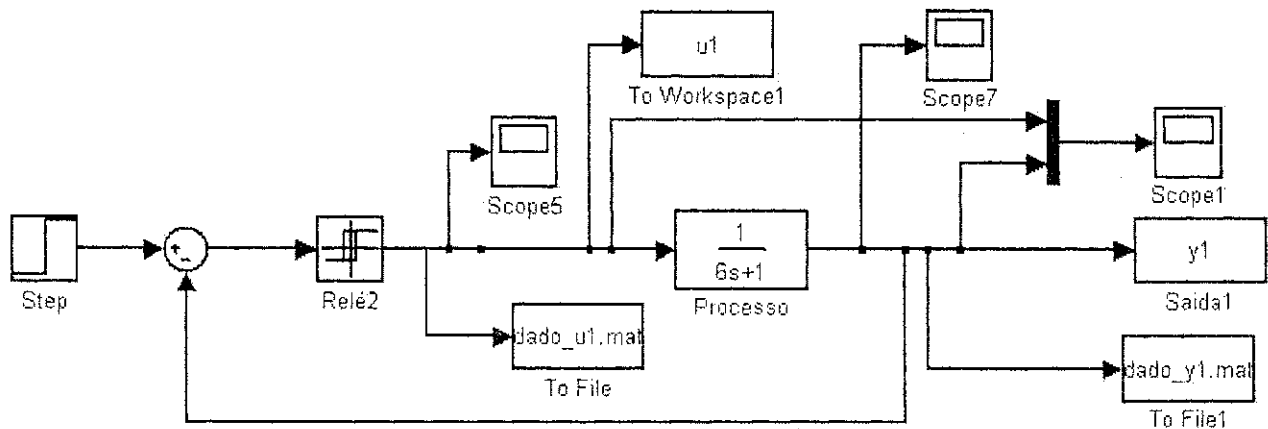


Figura 4.13: Determinação do ganho estático do processo (4.13).

Parâmetros	Valor
K_u	12,5205
T_u	2,00
τ_1	5,0320
K	1,32

Tabela 4.5: Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.13).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_1 da tabela (4.5) uma estimativa do pólo do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_1} \tag{4.14}$$

Na tabela (4.6) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.13)

Pólo	Real	Aproximado
a	0,1667	0,1987

Tabela 4.6: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.13).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.13). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do processo (4.13) e foram armazenados nos arquivos *dado_u.mat* e *dado_y.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.14) temos o modelo do simulink para o processo (4.13).

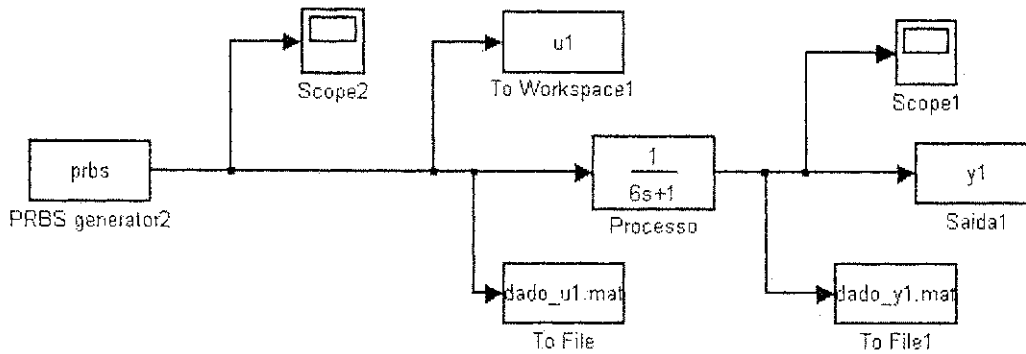


Figura 4.14: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.13).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 0,1987. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 0,1987. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.16) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.13). Por fim, na tabela (4.7) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

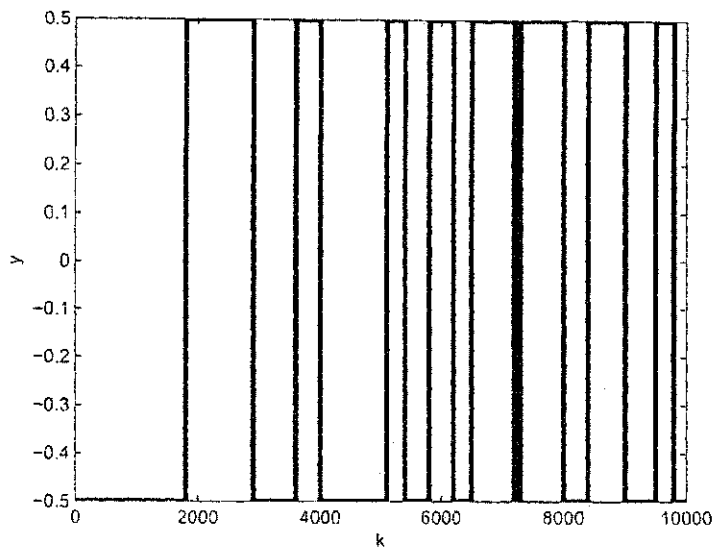


Figura 4.15: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.13).

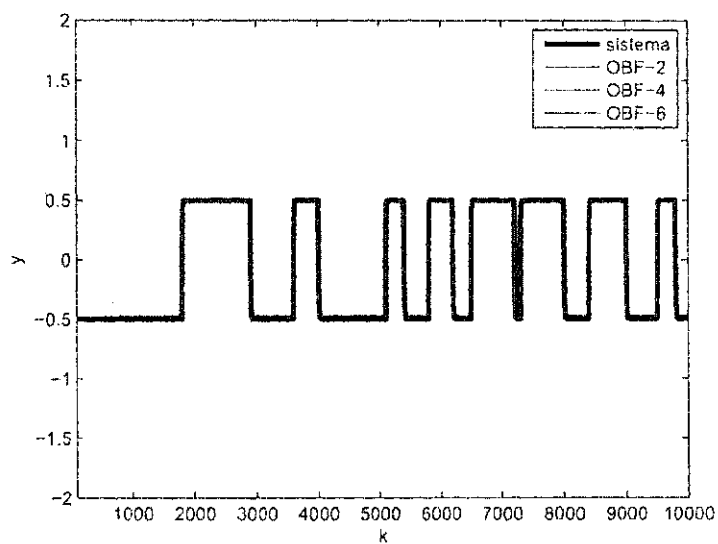


Figura 4.16: Saída do sistema e do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
0,1987	3,0391	2,5302	6,6919

Tabela 4.7: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.13).

Agora, analisando os dados da tabela (4.7) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 4, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^4 c_k L_k \quad (4.15)$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -0,2032$, $c_2 = -0,0003$, $c_3 = 0,0009$ e $c_4 = 0$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 0,1667 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual a 2,4783. Comparando-se esse valor com o valor 2,5302 da tabela (4.4) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.4.3 Experimento III

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{1.5}{3s+1} = \frac{0,5}{s+\frac{1}{3}} = \frac{K_1}{s+\frac{1}{\tau_1}} \quad (4.16)$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.16) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 3,0. Na figura (4.17) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.16).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados

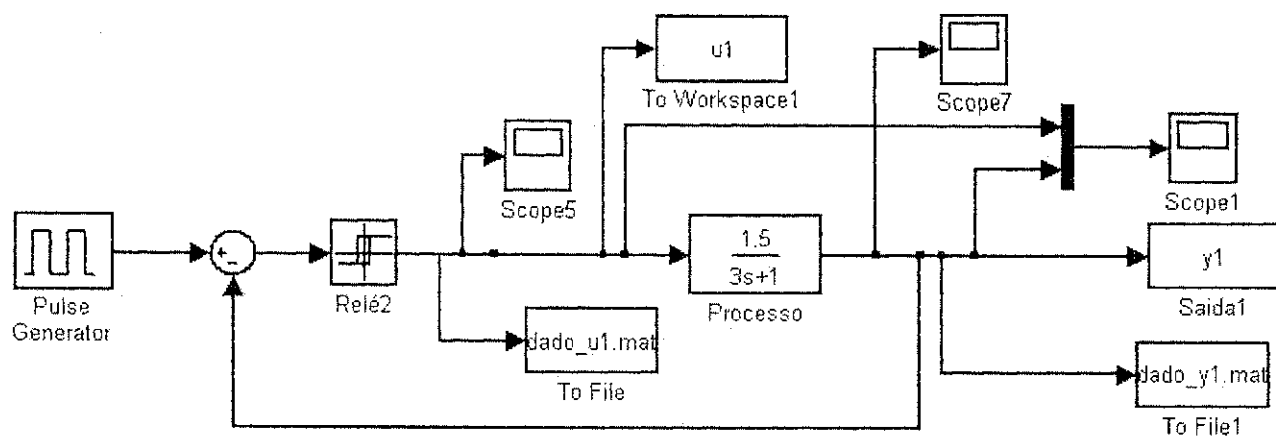


Figura 4.17: Método do Relé no Simulink para o processo (4.16).

armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.18) e (4.19).

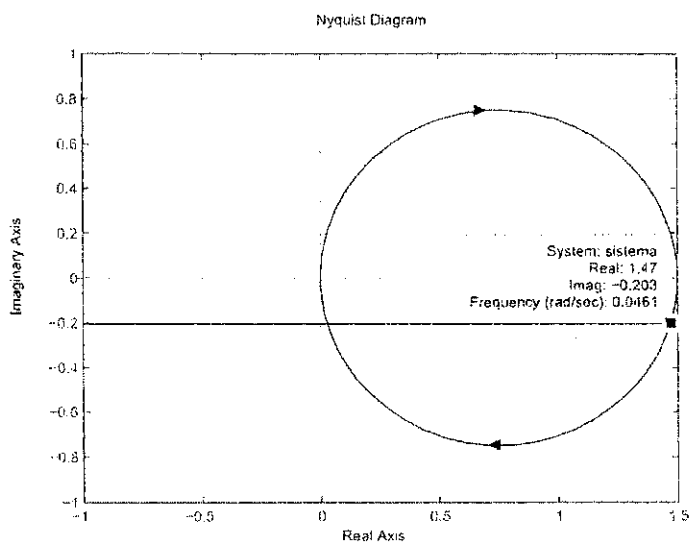


Figura 4.18: Diagrama de Nyquist do processo (4.16).

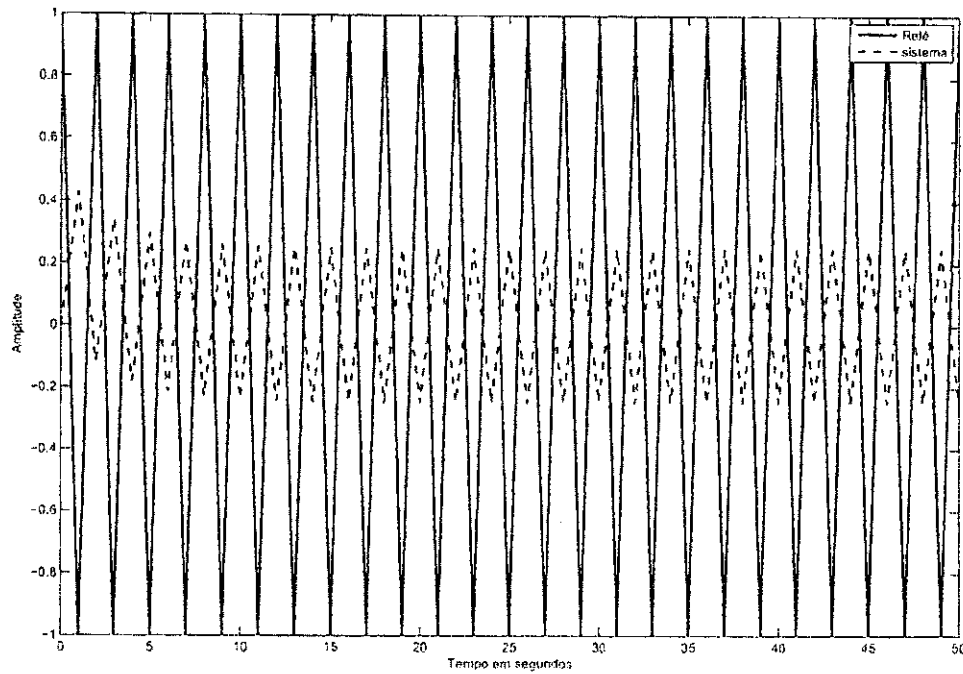


Figura 4.19: Saída do sistema e do relé do processo (4.16).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.16) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.20). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, τ_u, τ_I e K estão na tabela (4.8).

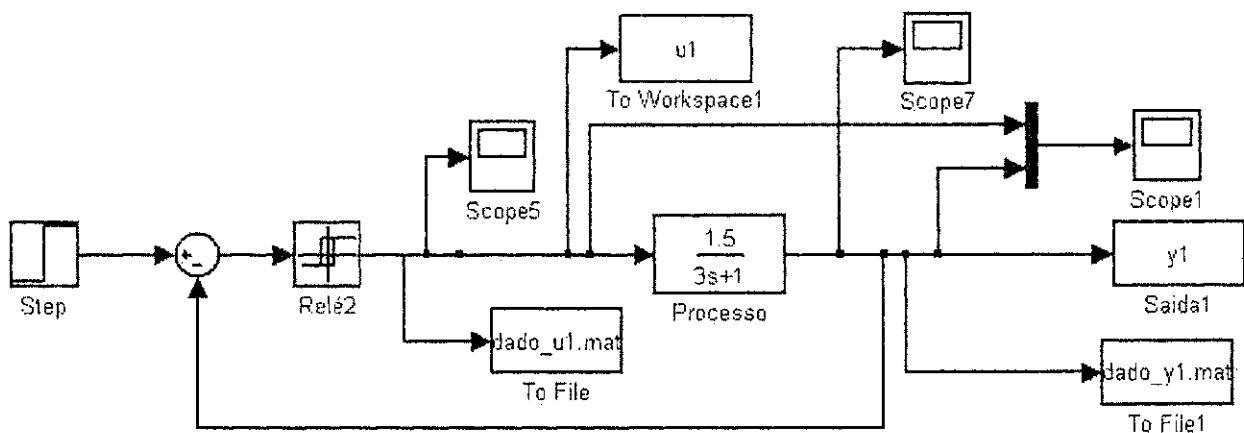


Figura 4.20: Determinação do ganho estático do processo (4.16).

Parâmetros	Valor
K_u	12
T_u	3
τ_1	4,5587
K	0,8

Tabela 4.8: Parâmetros do modelo de primeira ordem dado em (4.16).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_1 da tabela (4.8) uma estimativa do pólo do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_1} \tag{4.17}$$

Na tabela (4.9) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.16)

Pólo	Real	Aproximado
a	0,3333	0,2194

Tabela 4.9: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.16).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.16). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do processo (4.16) e foram armazenados nos arquivos *dado_u.mat* e *dado_y.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.7) temos o modelo do simulink para o processo (4.16).

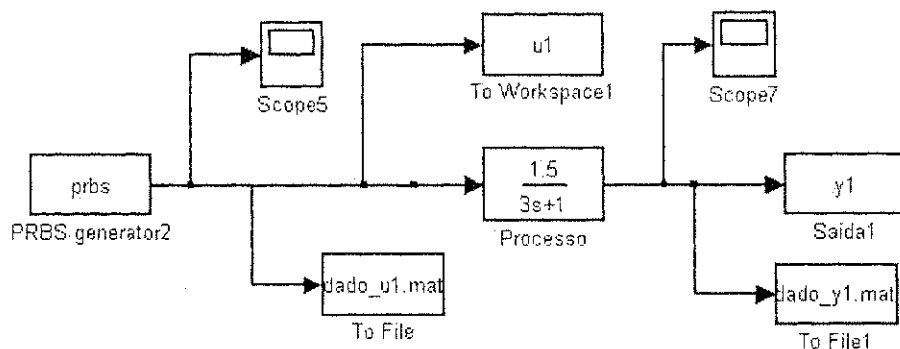


Figura 4.21: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.16).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 0,2194. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 0,2194. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.23) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.16). Por fim, na tabela (4.10) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

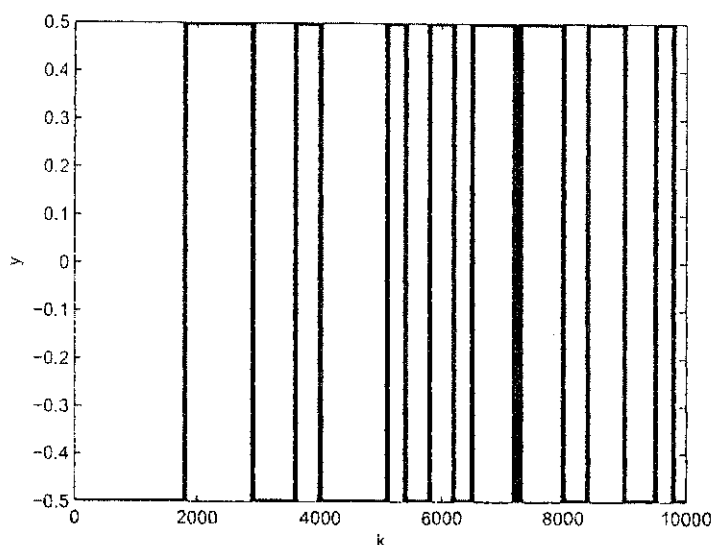


Figura 4.22: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.16).

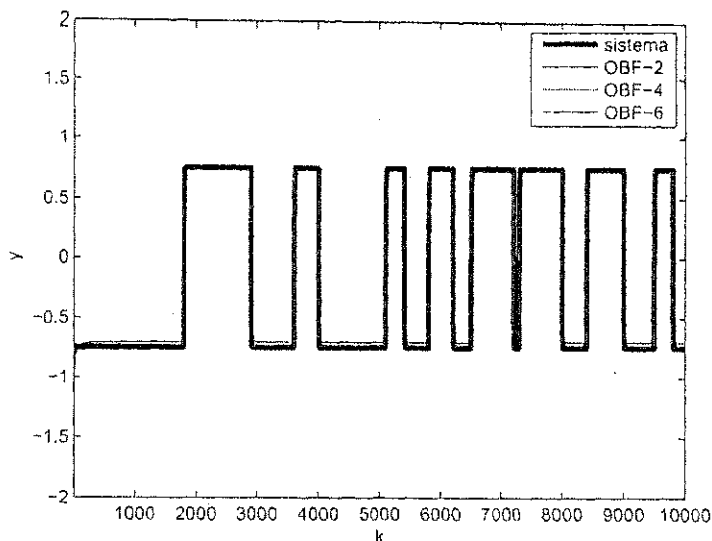


Figura 4.23: Saída do sistema e do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
0,2194	2,9684	1,5419	1,3690

Tabela 4.10: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.13).

Agora, analisando os dados da tabela (4.10) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 6, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^6 c_k L_k \quad (4.18)$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -0,4385$, $c_2 = 0,0072$, $c_3 = 0,0208$, $c_4 = -0,0014$, $c_5 = -0,0001$ e $c_6 = 0$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 0,3333 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual a 1,3397 para o modelo de Laguerre de ordem 6. Comparando-se esse valor

com o valor 1,3690 da tabela (4.10) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.5 Casos de Simulação: Sistemas de 2ª Ordem

Para a realização das simulações foram escolhidos três sistemas de segunda ordem. Tais processos estão indicados na tabela (4.11).

Experimento	Função de Transferência
I	$\frac{3}{(s+1)^2}$
II	$\frac{1}{(0,6s+1)^2}$
III	$\frac{2}{(0,7s+1)^2}$

Tabela 4.11: Processos utilizados na identificação.

4.5.1 Experimento I

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)^2} = \frac{3}{s^2 + 2s + 1} = \frac{K}{(\tau_2 s + 1)^2} \tag{4.19}$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.19) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 3,0. Na figura (4.24) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.19).

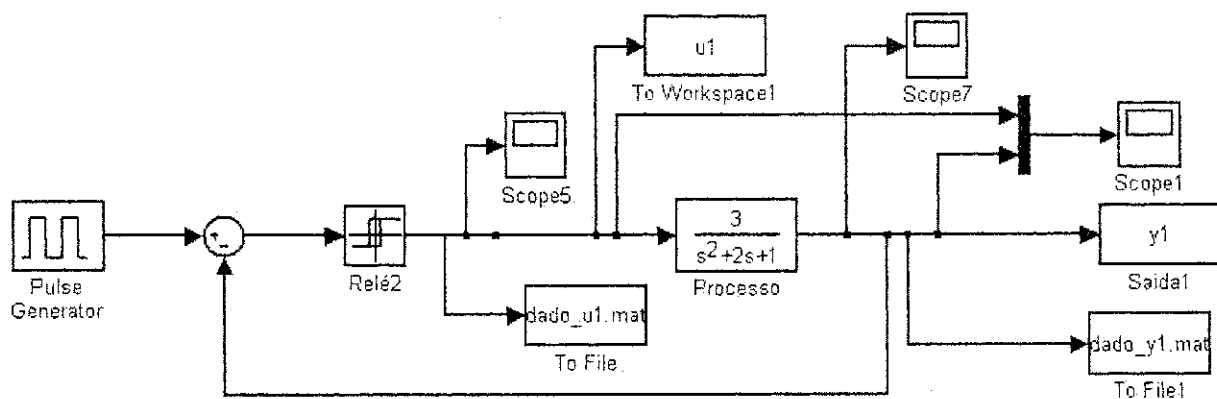


Figura 4.24: Método do Relé no Simulink para o processo (4.19).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação

dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.25) e (4.26).

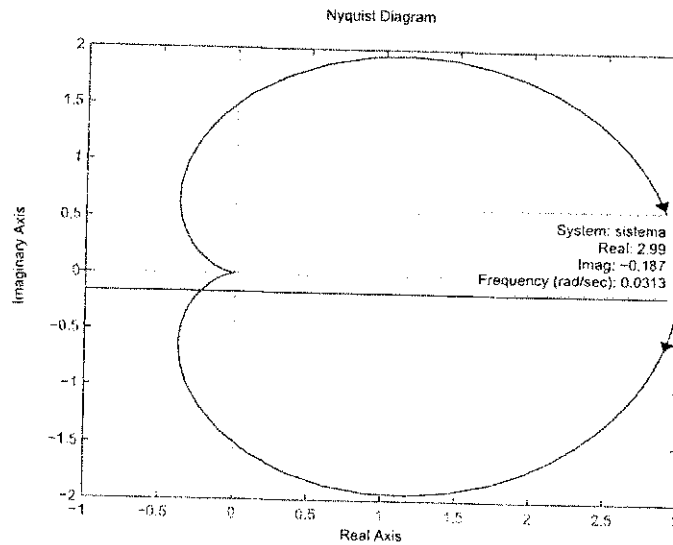


Figura 4.25: Diagrama de Nyquist do processo (4.19).

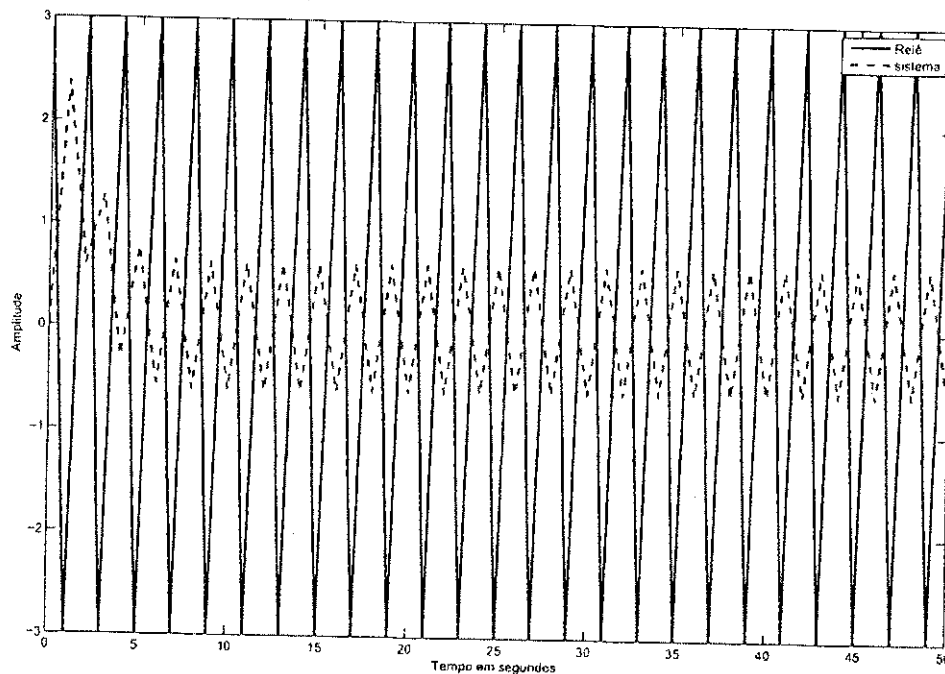


Figura 4.26: Saída do sistema e do relé do processo (4.19).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.19) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.34). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude

unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, T_u, τ_2 e K são apresentados na tabela (4.18).

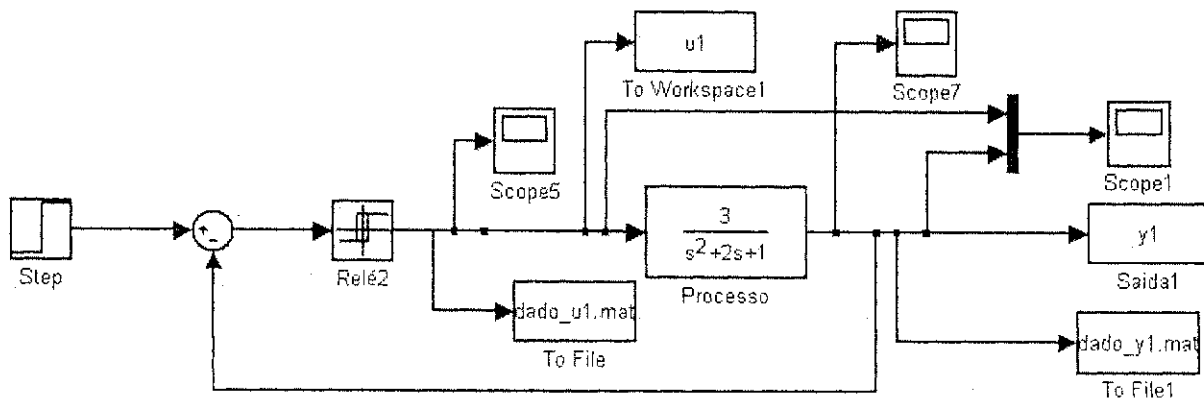


Figura 4.27: Determinação do ganho estático do processo (4.19).

Parâmetros	Valor
K_u	6,1129
T_u	1,9830
τ_2	0,8208
K	1,27

Tabela 4.12: Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.19).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_2 apresentado na tabela (4.18) uma estimativa do pólo do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_2} \quad (4.20)$$

Na tabela (4.19) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.19)

Pólo	Real	Aproximado
a	1	1,21

Tabela 4.13: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.19).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.19). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do

processo (4.19) e foram armazenados nos arquivos *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.35) temos o modelo do simulink para o processo (4.19).

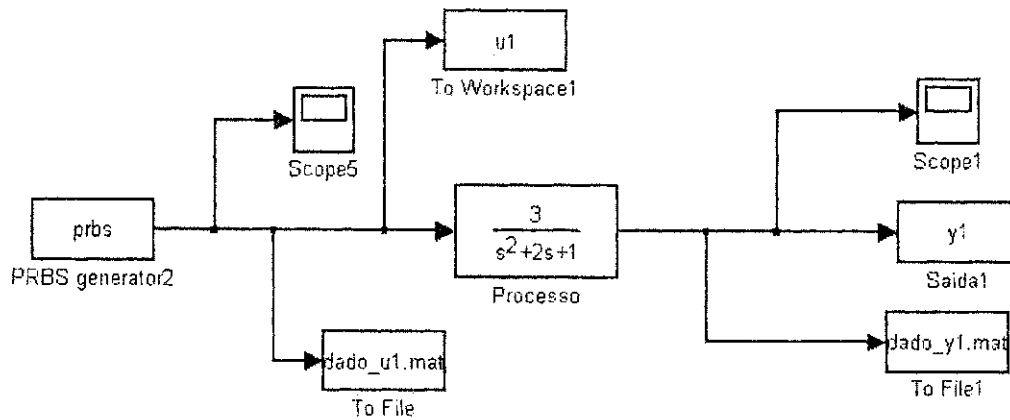


Figura 4.28: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.19).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 1,21. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 1,21. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.30) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.19). Por fim, na tabela (4.14) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

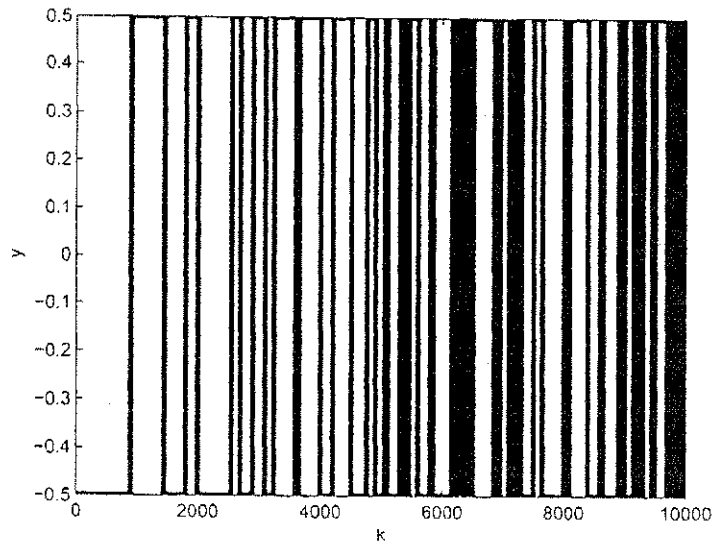


Figura 4.29: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.19).

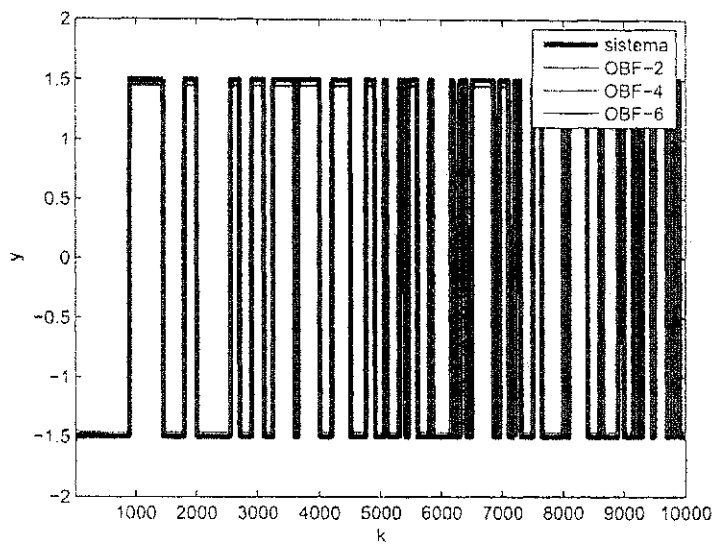


Figura 4.30: Saída do sistema do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
1,21	4,1630	3,8609	3,8564

Tabela 4.14: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.19).

Agora, analisando os dados da tabela (4.14) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 6, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^6 c_k L_k \quad (4.21)$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -106i$, $c_2 = 465i$, $c_3 = 863i$, $c_4 = -4759i$, $c_5 = -1599$ e $c_6 = 11925$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 1 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual a 3,8556 para o modelo de Laguerre de ordem 6. Comparando-se esse valor com o valor 3,8564 da tabela (4.14) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.5.2 Experimento II

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{1}{(0,6s+1)^2} = \frac{1}{0,36s^2+1,2s+1} = \frac{K}{(\tau_2s+1)^2} \quad (4.22)$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.22) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 1,0. Na figura (4.31) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.22).

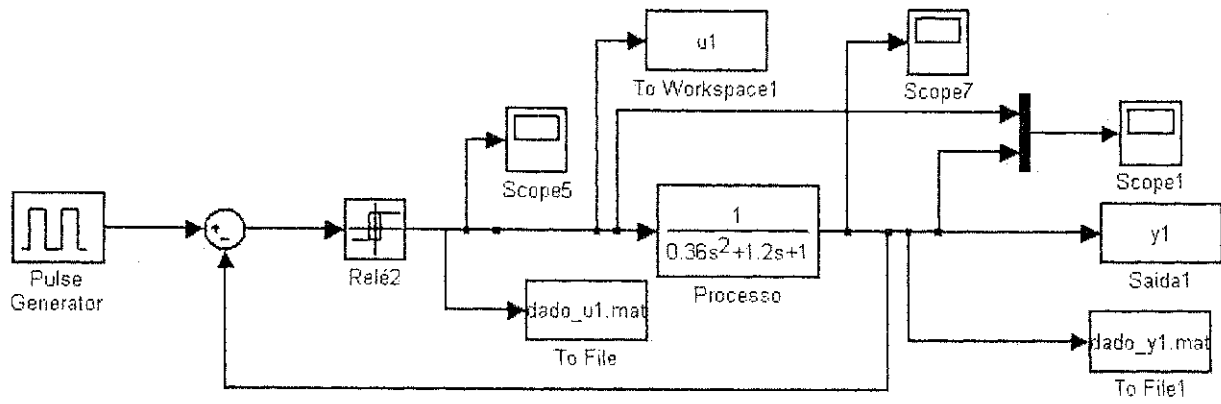


Figura 4.31: Método do Relé no Simulink para o processo (4.22).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.32) e (4.33).

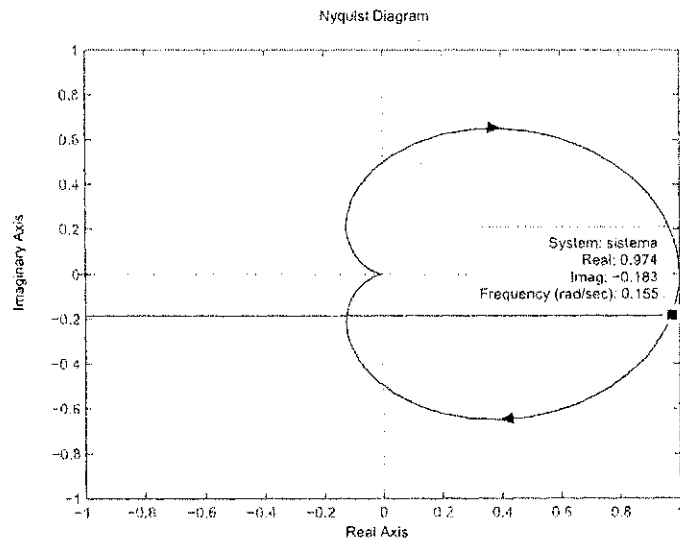


Figura 4.32: Diagrama de Nyquist do processo (4.22).

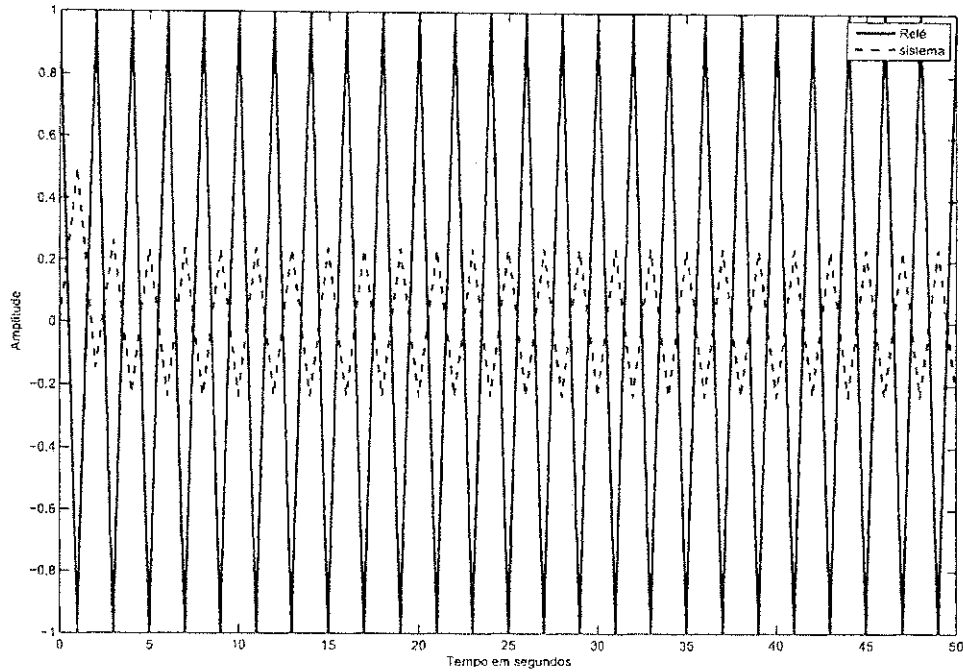


Figura 4.33: Saída do sistema e do relé do processo (4.22).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.22) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.34). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, τ_u, τ_2 e K estão na tabela (4.18).

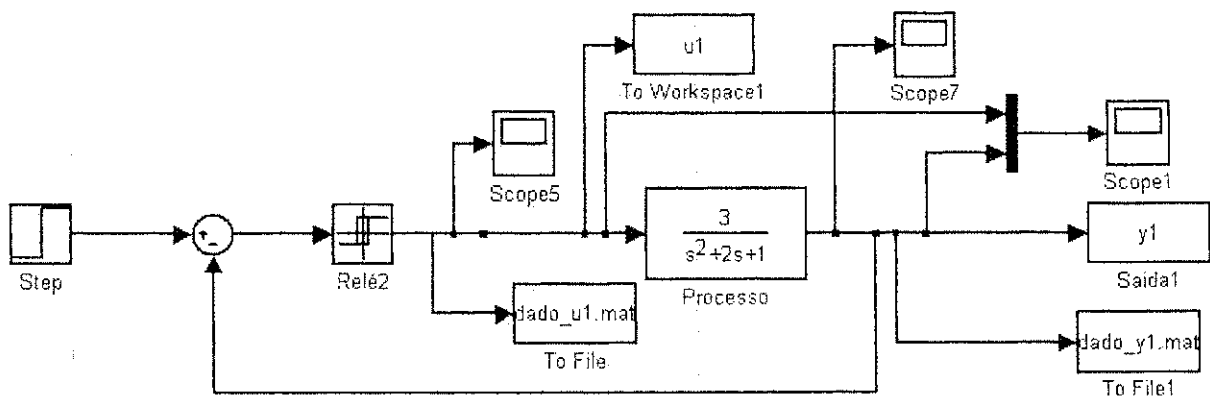


Figura 4.34: Determinação do ganho estático do processo (4.22).

Parâmetros	Valor
K_u	5,3755
T_u	2,0
τ_2	0,9940
K	2

Tabela 4.15: Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.22).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_2 apresentado na tabela (4.18) uma estimativa do pólo do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_2} \tag{4.23}$$

Na tabela (4.19) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.22)

Pólo	Real	Aproximado
a	1,6667	1,0061

Tabela 4.16: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.22).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.22). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do processo (4.22) e foram armazenados nos arquivos *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.35) temos o modelo do simulink para o processo (4.22).

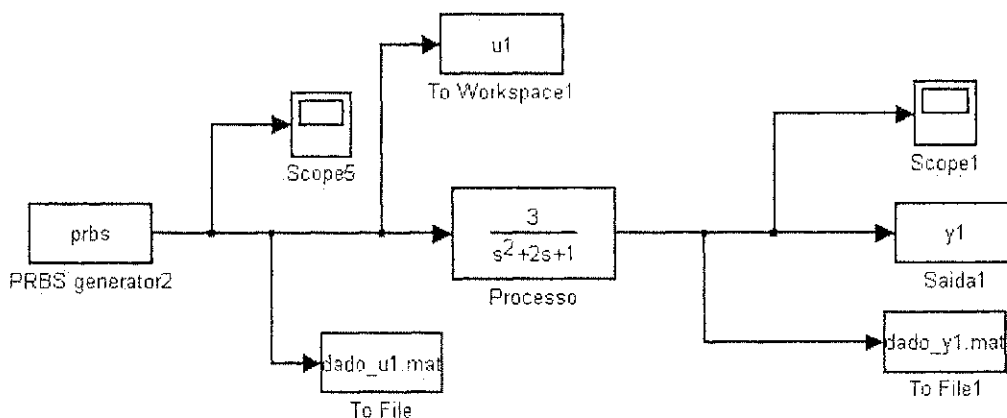


Figura 4.35: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.22).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o

conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 1,21. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 1,21. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.30) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.22). Por fim, na tabela (4.14) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.

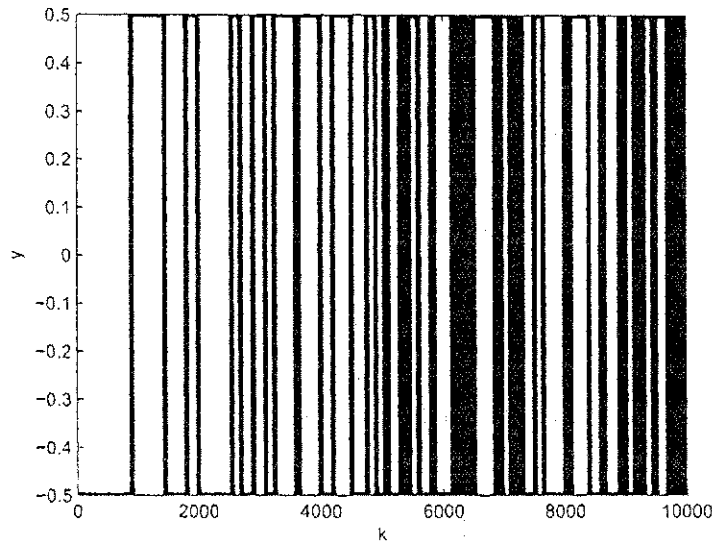


Figura 4.36: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.22).

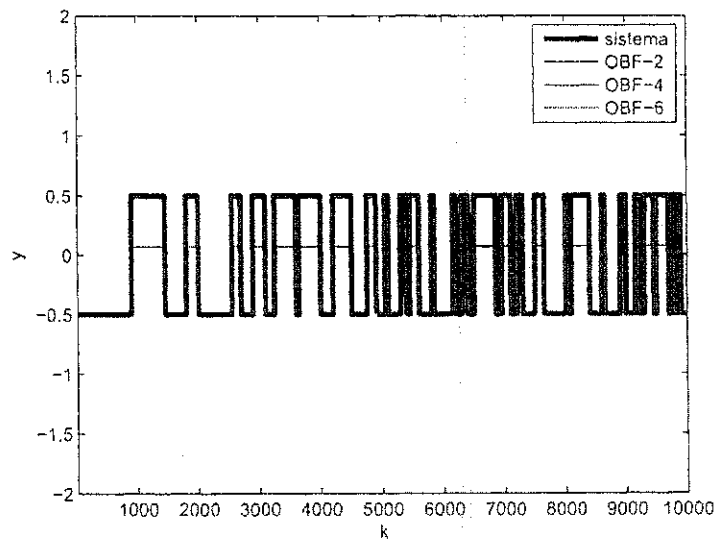


Figura 4.37: Saída do sistema e do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
1,0061	40,1583	2,8221	2,8313

Tabela 4.17: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.22).

Agora, analisando os dados da tabela (4.17) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 4, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^4 c_k L_k \quad (4.24)$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -258i$, $c_2 = 951,3i$, $c_3 = 1008,6i$ e $c_4 = -3851,8i$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 1,6667 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual a 2,8243 para o modelo de Laguerre de ordem 4. Comparando-se esse valor com o valor 2,8221 da tabela (4.17) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.5.3 Experimento III

Considere o processo dado por

$$G(s) = \frac{2}{(0,7s+1)^2} = \frac{2}{0,49s^2 + 1,4s + 1} = \frac{K}{(\tau_2s+1)^2} \quad (4.25)$$

Para implementação do método do relé para o processo (4.25) foi utilizado o ambiente Simulink do Matlab, esta ferramenta possibilita trabalhar no Matlab com uma interface gráfica. Na simulação foi utilizado um relé de amplitude igual a 1,0. Na figura (4.38) temos o diagrama construído no Simulink para o processo (4.25).

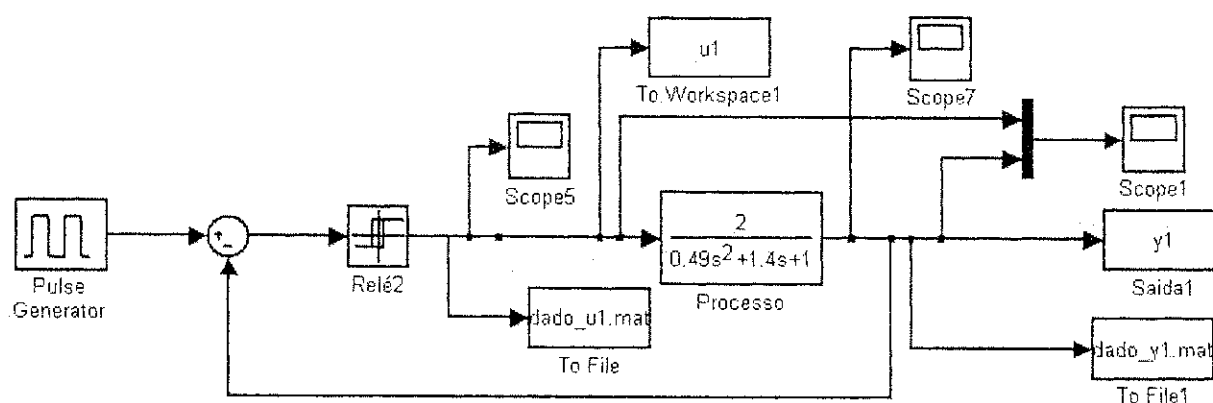


Figura 4.38: Método do Relé no Simulink para o processo (4.25).

Os dados de entrada e saída do processo, u_1 e y_1 foram armazenados em dois arquivos de dados *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente, nessa ordem. Para determinação dos parâmetros K_u e T_u foi implementado um programa em Matlab que utiliza os dados armazenados em *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*. Os resultados são apresentados nas figuras (4.39) e (4.40).

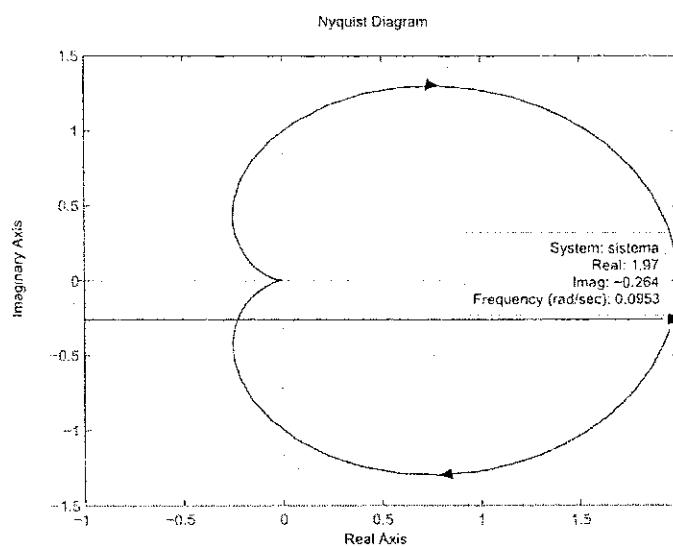


Figura 4.39: Diagrama de Nyquist do processo (4.25).

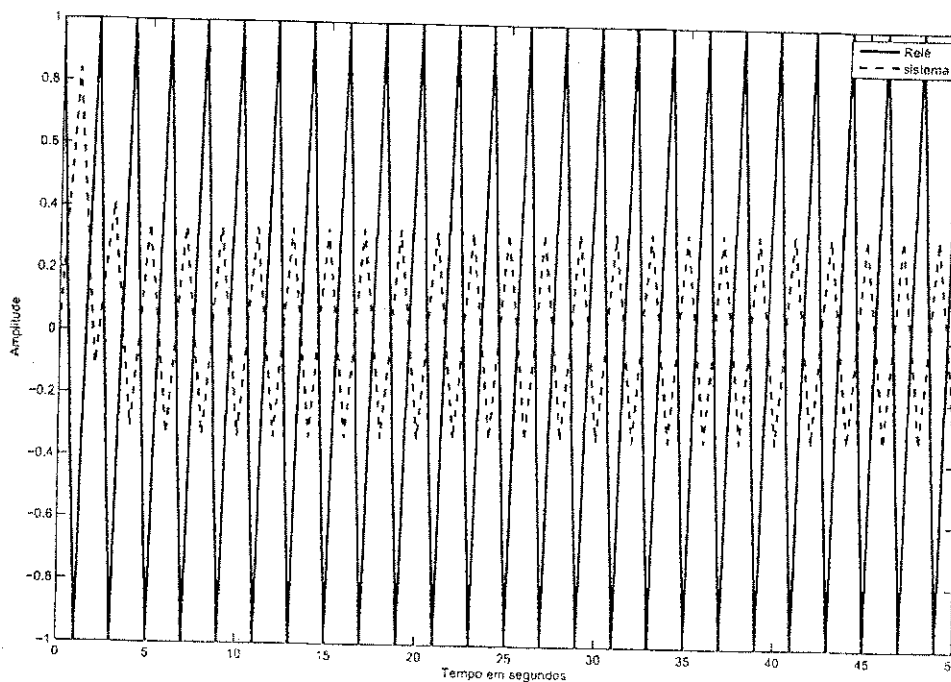


Figura 4.40: Saída do sistema e do relê do processo (4.25).

Para obtenção do ganho estático do processo (4.25) foi construído um modelo no Simulink apresentado na figura (4.41). Inicialmente foi considerado um degrau de amplitude unitária como sinal de entrada e observou-se uma oscilação no sinal de saída do processo. Em seguida, incrementamos a amplitude do sinal de entrada até obter um valor máximo da amplitude do degrau para o qual o sinal de saída continue oscilando. Este valor máximo obtido é o ganho estático do processo. Os parâmetros K_u, T_u, τ_2 e K estão na tabela (4.18).

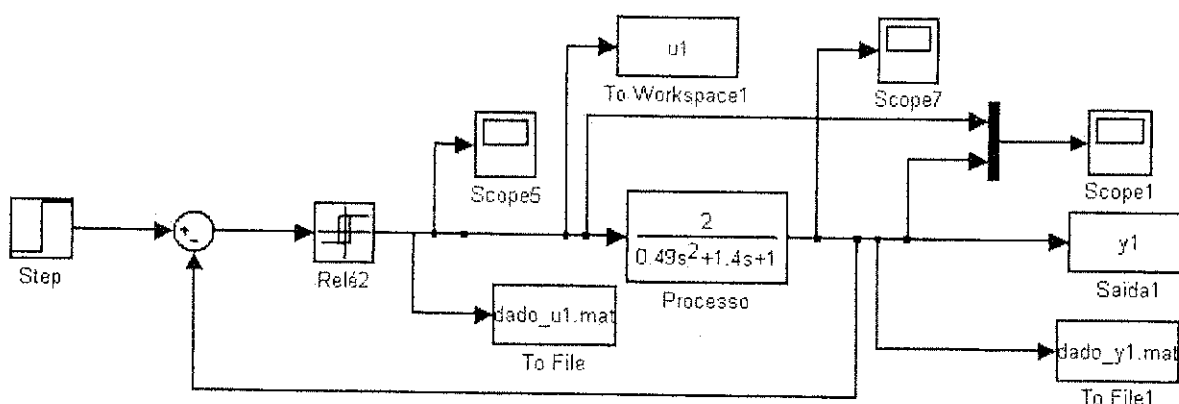


Figura 4.41: Determinação do ganho estático do processo (4.25).

A partir do valor obtido para o parâmetro τ_2 da tabela (4.18) uma estimativa do pólo

Parâmetros	Valor
K_u	3,7929
T_u	1,9340
τ_2	0,7899
K	2

Tabela 4.18: Parâmetros do Modelo de segunda ordem dado em (4.25).

do processo, que denotaremos por a , pode ser calculada pela fórmula

$$a = \frac{1}{\tau_2} \tag{4.26}$$

Na tabela (4.19) temos o valor real e o valor aproximado para o pólo do processo dado em (4.25)

Pólo	Real	Aproximado
a	1,4286	1,2660

Tabela 4.19: Comparativo entre o valor real e aproximado do pólo do processo (4.25).

Para geração dos dados de identificação foi construído um modelo no simulink do matlab para o processo (4.25). Estes dados correspondem aos sinais de entrada e saída do processo (4.25) e foram armazenados nos arquivos *dado_u1.mat* e *dado_y1.mat*, respectivamente nessa ordem. Na figura (4.42) temos o modelo do simulink para o processo (4.25).

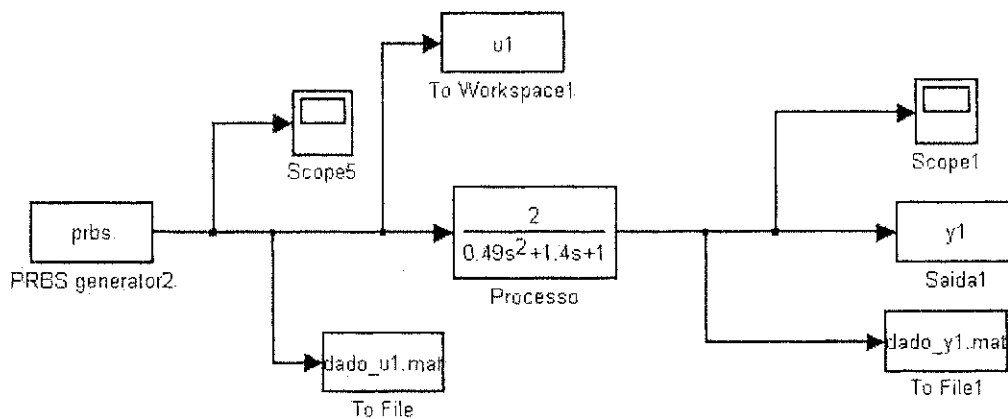


Figura 4.42: Diagrama de blocos no Simulink para o sistema (4.25).

Para a identificação, o sinal de entrada será um PRBS e foi implementado em Matlab um algoritmo de identificação que utiliza os dados de identificação e agregando o conhecimento da dinâmica do processo pela simulação prévia do método do relé realizada

anteriormente. A estimativa inicial do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé foi 1,2660. Foram considerados modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 com pólo em 1,2660. Além disso, foi utilizado o critério dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes de cada modelo de Laguerre simulado. Na figura (4.44) temos os gráficos do sinal de saída para os modelos de Laguerre de ordem 2, 4 e 6 e compara com o sinal de saída do processo (4.25). Por fim, na tabela (4.14) temos os valores da porcentagem do erro de predição para modelo simulado no Matlab.



Figura 4.43: Sinal de entrada utilizado na identificação do sistema (4.25).

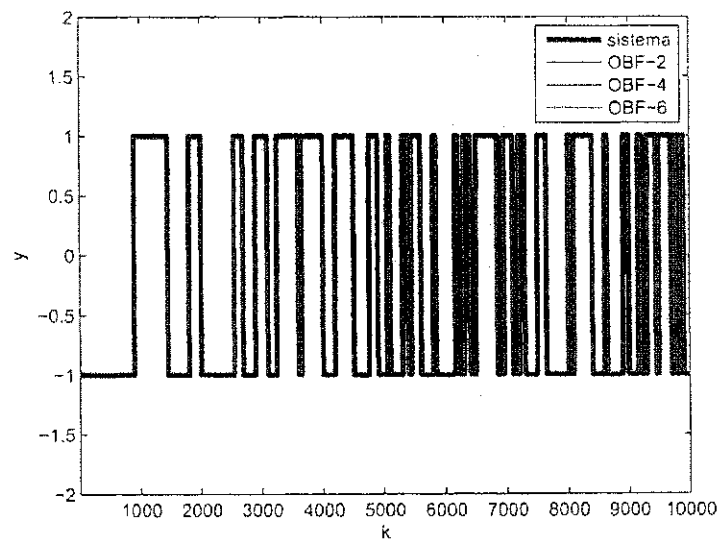


Figura 4.44: Saída do sistema e do modelo de Laguerre.

Pólo	BFO-2	BFO-4	BFO-6
1,2660	3,2622	3,0723	3,0698

Tabela 4.20: Porcentagem do Erro de Predição do sistema (4.25).

Agora, analisando os dados da tabela (4.20) o melhor modelo é o de Laguerre de ordem 6, isto é,

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^6 c_k L_k \quad (4.27)$$

na qual

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z(1-a^2)^{1/2}}{1-az} \\ L_2 &= L_1 \cdot \frac{z-a}{1-az} \\ &\vdots \\ L_k &= L_{k-1} \cdot \frac{z-a}{1-az} \end{aligned}$$

Os parâmetros desse modelo são $c_1 = -23i$, $c_2 = 116,1i$, $c_3 = 157,3i$, $c_4 = -1269,5i$, $c_5 = -193i$ e $c_6 = 3364,7i$. Executando-se o mesmo procedimento de identificação para modelos de Laguerre com pólo em 1,4286 obtém-se uma porcentagem do erro de predição igual a 3,0610 para o modelo de Laguerre de ordem 6. Comparando-se esse valor com o valor 3,0698 da tabela (4.20) percebemos que a estimativa do pólo de Laguerre obtida com a utilização do método do relé foi satisfatória.

4.6 Conclusões

Neste capítulo foram realizadas simulações utilizando as bases de Laguerre, com a estimativa do pólo de Laguerre obtida pelo método do relé. Foi utilizado o PRBS como sinal de entrada, o algoritmo de identificação via mínimos quadrados e o método do relé.

ideal para representar sistemas com dinâmicas dominantes mal amortecidas, isto é, que tenham variação oscilatória. Já a base ortonormal generalizada possibilita que as funções ortonormais sejam parametrizadas por mais de um pólo real ou par de pólos complexo conjugado. Em contrapartida, requerem uma maior quantidade de informação a priori sobre as suas dinâmicas dominantes do sistema.

- Realizar a identificação utilizando dados reais de um processo para comparar os resultados das simulações computacionais.

Referências Bibliograficas

- [1] Ades, R. *Problema H_2/H_∞ - Soluções Aproximadas por meio de Expansão em Bases*. Tese de Doutorado, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.
- [2] Aguirre, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 3ª ed. Editora UFMG. Belo Horizonte, MG, Brasil (2007).
- [3] Amaral W.C, Campello R. J. G. B, Oliveira G. H. C *Modelagem e Controle Utilizando Bases de Funções Ortonormais*. XII Congresso Brasileiro de Automática - Juiz de Fora, Setembro de 2008.
- [4] Aström K. J and Hägglund, T. (1984) *Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase an amplitude margins*. Automatica 20(5): 645-651.
- [5] Aström K. J and Hägglund T. *PID Controllers Theory Design and Tuning*. Instrument Society of America.
- [6] Campello R. J. G. B, Amaral W. C e Oliveira G. H. C. *Minicurso: Modelagem e Controle Utilizando Bases de Funções Ortonormais*. XII Congresso Brasileiro de Automática, Setembro de 2008.
- [7] Chen Chi-Tsong, *Linear System Theory and Design*, Third Edition. New York Oxford, 1999.
- [8] Clowes, G.J, (1965) Choice of the time scaling factor for linear system approximation using orthonormal laguerre function. In: IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 10. pp. 487-489.
- [9] Coelho A. A. R *Notas de Aula. Identificação e Controle Adaptativo*. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Grupo de Pesquisa em Tecnologias de Controle (GPqTCA), Florianópolis, SC - Brasil.
- [10] Doyle J, Francis B. Tannenbaum A, *Feedback Control Theory* ©Macmillan Publishing Co., 1990.

- [11] Fu, Y., G. A. Dumont *An Optimum Time Scale for Discrete Laguerre Network* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 38, No 6, June 1993.
- [12] Fu, Y. e G. Dumont (1993a) *On determination of laguerre filter pole through step or impulse response data*. In: Proc. 12th IFAC World Congress. IFAC. Sydney, Australia. pp. 5:303-307.
- [13] Garcia C. *Identificação de Sistemas*. Notas de Aula. Universidade de São Paulo.
- [14] Gustavo H. M. de Arruda e Péricles R. Barros. *Estimação da função de sensibilidade baseada em experimento com malha fechada*. Revista Controle & Automação - Vol.14 no.3 - Julho, Agosto e Setembro 2003.
- [15] Heuberger P.S.C ; Van den Hof P. M. J and Wallberg B. *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. Springer, 2005.
- [16] Hsiao-Ping Huiyang, Jyh-Cheng Jeng, and Kuo-Yan Luan. *Auto-tune system using single-run relay feedback test model-based controller design*. Journal of Process Control, 15:713-727,2005.
- [17] Joseph, B.; Brosilow, C.B; *Inferential Control of Processes: Part I, II e III*. AIChE Journal, v.24, n.3, p.485-509, 1978.
- [18] Kalman, R. E., *Optimization, Mathematical Theory of Control*, en Encyclopaedia Britannica, Fifteenth ed. (1974), p.636-638.
- [19] K. Srinivasan and M. Chidambaram. Modified relay feedback method for improved system identification. Computer and Chemical Engineering, 27: 727-732, 2003.
- [20] Kennedy, J. and Eberhart, H. (1995). *Particle swarm optimization*, Proc of the IEEE International Conference on Neural Networks, pp. 1942-1948.
- [21] King J. J, Canainn T. O. *Optimum Pole Position for Laguerre Functions Models*. IET Electronics Letters, Vol. 5 No.23 pp. 601-602, Sepetmber, 1969.
- [22] Ljung, L. modeling of Dynamic System - Prentice Hall, 1994.
- [23] Ljung, L. *System Identification: Theory For The User*. 2. ed [S.1]: Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1999.
- [24] Lemma D.T., M. Ramasamy and M. Shuhaimi (2010) *System Identification using Orthonormal Basis Filters*. Journal of Applied Sciences, 10 (21). pp. 2516-2522. ISSN 1812-5654.

- [25] Lemma D. Tufa, M. Ramasamy, M. Shuhairni. *Improved method for development of parsimonious orthonormal basis filter models* Journal of Process Control, 21(2011) 36-45. journal homepage: www.elsevier.com/locate/jprocont.
- [26] Machado J. B, Campello R. J. G. B, Amaral W. C. *Otimização de Modelos BFO com Funções de Laguerre*. In: Encontro dos alunos e docentes do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp, 2010, Campinas - SP. Terceiro Encontro dos alunos e docentes do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp, 2010.
- [27] Maestrelli, Rafael. *Funções Ortonormais em Tempo Contínuo com Seleção Ótima das Dinâmicas do modelo na Identificação no domínio da Frequência*. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR, Curitiba, Brasil 2010.
- [28] Malti R., Ekongolo S. B. and Ragot J. *Dynamic SISO and MISO System approximations based on Optimal Laguerre Models*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.43, No.9, September 1998.
- [29] Masnadi-Shirazi, M. A. and Ahmed. N. (1991). *Optimum Laguerre Networks for a class of discrete time systems*, IEEE Transactions on Signal Processing 39(9):2104-2108.
- [30] Miranda, F.C.P.R, *Identificação de sistemas em malha fechada usando controlador preditivo multivariável: um caso industrial*. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Química. São Paulo (2005), 99p.
- [31] Neto B. N, Catunda S. B. Y, Neto J. Y. F; *Utilização de Modelo ARX e Teoria de Identificação de Sistemas no Estudo e Análise do Comportamento da Temperatura do Retificador Principal de uma Locomotiva Diesel-Elétrica*. VIII SEMETRO (8th Internacional Seminar on Electrical Metrology), João Pessoa, Paraíba - Brasil, 17 a 19 de Junho, 2009.
- [32] Oliveira e Silva, T.A.M. *On the determination on the optimal pole position of laguerre filters*. IEEE Transactions on Signal Processing, V-43, n. 9, p.2079-2087. 1995a
- [33] Olivier P. D. *System Identification Using Laguerre Functions: Simple Examples*. IEEE, 1997.

- [34] Paul M.J, Van den Hof. *System Identification*. Delft Center for Systems and Control - Delft University of Technology. Lectures Notes, 2004.
- [35] Reginato, B. C. and Oliveira, G. H. C (2007) *On selecting the mimo generalized orthonormal basis functions poles using particle swarm optimization*, Proc. of the European Control Conference, Kos, Greece.
- [36] Reginato, B. C. *Ambiente Computacional para Identificação de Sistemas nos Domínios do Tempo e da Frequência usando Bases de Funções Ortonormais Generalizadas*. Dissertação (Mestrado) - Pontífica Universidade Católica do Paraná - PUCPR, Brasil, 2008.
- [37] Reginato, B. C.; Oliveira, G. H. C. *Bases de funções ortonormais generalizadas na modelagem de componentes do sistema elétrico de potência*. 2007b
- [38] Ruel V. Churchill, *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.
- [39] Sabatini, A. M. *A Hybrid Genetic Algorithm for Estimating the Optimal Time Scale of Linear Systems Approximations Using Laguerre Models*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 45, No.5, May 2000.
- [40] S. Vivek and M. Chidambaram. *Identification using single symmetrical relay feedback test*. Computers and Chemical Engineering, 29:1625-1630,2005.
- [41] Wahlberg B. *System Identification Using Laguerre Models*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 36, No.5, Maio de 1991.
- [42] Wang Liuping, Cluett W. R, *From Plant Data to Process Control - Ideas for process identification and PID design*, Firsst Edition. Taylor & Francis, London and New York, 2000.
- [43] Wang, L. e W. R. Cluett (1994). *Optimal choice of time-scaling factor for linear system approximations using laguerre models*. IEEE Transactions on Automatic Control 39(7), 1463-1467.
- [44] Ziegler, J. G e Nichols, N. B. (1942) *Optimum setting for automatic controllers*, *Transactions of the ASME* 42:759-768.