



S586e Silva, Kleber Freire da.
Estimação de fluxo magnético em máquinas assíncronas utilizando filtro de Kalman / Kleber Freire da Silva. - Campina Grande, 1991.
196 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 1991.
"Orientação : Prof. Dr. Cursino Brandão Jacobina, Prof. Dr. Antônio Marcus Nogueira Lima".
Referências.

1. Máquinas Assíncronas. 2. Fluxo Magnético. 3. Filtro de Kalman. 4. Dissertação - Engenharia Elétrica. I. Jacobina, Cursino Brandão. II. Lima, Antônio Marcus Nogueira. III. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). IV. Título

CDU 621.313.33(043)

ESTIMAÇÃO DE FLUXO MAGNÉTICO EM MÁQUINAS ASSÍNCRONAS UTILIZANDO
FILTRO DE KALMAN

KLEBER FREIRE DA SILVA

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 01.02.91



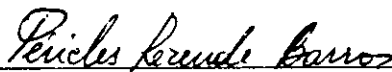
CURSINO BRANDÃO JACOBINA, Dr. Ing.

Orientador



ANTONIO MARCUS NOGUEIRA LIMA, Dr.

Orientador



PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D.

Componente da Banca



WELLINGTON SANTOS MOTA, Ph.D.

Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB

FEVEREIRO - 1991

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Geraldo e Aidil

Aos meus irmãos Tânia e Nelson

A minha namorada Bebel

A todos os meus amigos

AGRADECIMENTOS

Aos professores Cursino Brandão Jacobina e Antônio Marcus Nogueira Lima pela intensa orientação e colaboração sem os quais, este trabalho não teria sido possível.

Aos professores Péricles Rezende Barros e Wellington Santos Mota por aceitarem participar da Banca Examinadora desta tese.

Ao professor Edison Roberto Cabral da Silva pela constante orientação e esclarecimentos com relação à técnica de se realizar uma pesquisa científica.

Aos meus companheiros de trabalho Eurico Bezerra Filho, Fabiano Salvadori, Raimundo Nazareno da Cunha Alves e Talvanes Meneses Oliveira pelas discussões técnicas que enriqueceram este trabalho.

Aos meus colegas Euclério Barbosa Ornellas Filho e Reginaldo Corteletti pelas constantes discussões durante o curso de mestrado.

A professora Lígia Sousa Palma pelo incentivo e apoio dados à realização deste trabalho.

Ao CNPq que financiou a realização deste trabalho de tese.

RESUMO

Este trabalho objetiva dar uma contribuição ao estudo da aplicação de técnicas de estimação estocástica de fluxo magnético em sistemas de acionamentos com máquinas assíncronas. Desenvolve-se portanto, o algoritmo do filtro discreto de Kalman de modo a estimar os fluxos estatóricos e rotóricos a partir do conhecimento do modelo dinâmico do sistema e da medição das correntes estatóricas e velocidade da máquina. Análises são realizadas com relação à modelagem estocástica da máquina, introdução de filtragem analógica nas correntes estatóricas, formulações alternativas com o aumento da ordem do sistema e ao esforço computacional associado à resolução do algoritmo. São definidos os procedimentos e índices para avaliação da consistência estatística das variáveis estimadas. Finalmente, apresenta-se uma técnica de filtragem adaptativa para prevenção da divergência e obtenção da consistência estatística do estimador.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO GERAL.....	1
1. MODELAGEM DINÂMICA DA MÁQUINA ASSÍNCRONA	4
1.1 - INTRODUÇÃO	4
1.2 - HIPÓTESES SIMPLICADORAS NA MODELAGEM DO MOTOR	5
1.3 - EQUAÇÕES GERAIS DA MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA IDEALIZADA	5
1.3.1 - Expressões de fluxo, tensão, conjugado e potência	7
1.4 - TRANSFORMADA DE PARK GENERALIZADA	8
1.5 - SISTEMA DA MÁQUINA NO ESPAÇO DE ESTADOS	12
1.5.1 - Posicionamento do sistema de eixos d,q de referência	14
1.5.2 - Fontes de ruído para modelagem estocástica .	15
1.6 - MODELO DISCRETO DA MÁQUINA ASSÍNCRONA	17
1.6.1 - Escolha do período de amostragem	20
1.7 - MODELO DA MÁQUINA COM FLUXOS ROTÓRICOS E CORRENTES ESTATÓRICAS COMO VARIÁVEIS DE ESTADO	24
1.8 - CONCLUSÃO	27
2. DESENVOLVIMENTO DO FILTRO DISCRETO DE KALMAN	28
2.1 - INTRODUÇÃO	28
2.2 - PROBLEMA DA ESTIMAÇÃO LINEAR RECURSIVA	29
2.3 - CONDIÇÕES CRÍTICAS PARA O FUNCIONAMENTO DO ESTIMADOR	32
2.4 - FILTRO DE KALMAN - DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO	33

2.4.1 - Modelo do sistema simplificado	33
2.4.1.1 - Equações da estimação ótima	35
2.4.1.2 - Expressão do erro de estimação	32
2.4.1.3 - Covariância do erro de estimação ...	36
2.4.1.4 - Expressão do ganho ótimo de Kalman .	37
2.4.1.5 - Fórmula não estabilizada para a covariância do erro de estimação ..	39
2.4.2 - Síntese do filtro de Kalman para o modelo simplificado	40
2.4.3 - Extensão para função determinística e ruído de estado	40
2.4.4 - Análise da expressão do resíduo de predição.	45
2.4.5 - Índices de consistência estatística	46
2.4.6 - Condições iniciais do estimador	47
2.4.7 - Síntese do filtro de Kalman para o modelo completo	47
2.5 - CONCLUSÃO	49
3. MODELAGEM DE FONTES DE RUÍDOS DO SISTEMA DA MÁQUINA	50
3.1 - INTRODUÇÃO	50
3.2 - DESCRIÇÃO DO SISTEMA	52
3.2.1 - Incremento de covariância	53
3.3 - DEFINIÇÃO DO NÍVEL DE RUÍDO NO SISTEMA CONTÍNUO ..	58
3.4 - COVARIÂNCIA ASSOCIADA AO CÁLCULO COMPUTACIONAL DO ESTIMADOR ÓTIMO DE KALMAN	60
3.4.1 - Consideração da metodologia de discretização do sistema contínuo	62
3.4.2 - Covariância do ruído de medição	63
3.4.3 - Definição da covariância de estado com ruído de medição	64
3.4.4 - Consideração do ruído de estado nas equações bifásicas da máquina	65
3.4.5 - Influência do comportamento da tensão de entrada no funcionamento do estimador	70
3.4.6 - Consideração do conjugado de carga com tensão senoidal	73

3.4.7 - Comportamento do resíduo de predição da saída do sistema	76
3.5 - CONCLUSÃO	79
4. FILTRAGEM ANALÓGICA	80
4.1 - INTRODUÇÃO	80
4.2 - PROCESSO DE AMOSTRAGEM	80
4.3 - CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DE FILTROS ANALÓGICOS	81
4.3.1 - Relação entre o atraso de fase e o atraso de grupo	83
4.3.2 - Requisitos do filtro passa-baixa ideal	84
4.3.3 - Função de transferência de Butterworth	87
4.3.4 - Critérios de projeto do filtro analógico ...	89
4.3.5 - Análise harmônica dos sinais filtrados	93
4.3.6 - Introdução do filtro analógico na simulação digital do sistema	94
4.4 - CONCLUSÃO	95
5. FILTRO DE KALMAN COM ORDEM MODIFICADA	96
5.1 - INTRODUÇÃO	96
5.2 - RUÍDO DE MEDIÇÃO CORRELACIONADO	98
5.3 - FILTRO ANALÓGICO NA SAÍDA DO SISTEMA	101
5.3.1 - Aplicação da teoria de medições perfeitas ..	105
5.3.1.1 - Transitório nos valores iniciais do filtro de Kalman	108
5.3.1.2 - Transitório através de conjugado de carga	109
5.3.2 - Ruído de medição no filtro analógico	110
5.3.2.1 - Transitório de partida da máquina ..	111
5.4 - CONCLUSÃO	115
6. CÁLCULO PRÉVIO DOS GANHOS ÓTIMOS DO FILTRO DE KALMAN ...	116
6.1 - INTRODUÇÃO	116
6.2 - FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO ESTIMADOR DE KALMAN ..	117

6.3 - ESFORÇO COMPUTACIONAL DO ESTIMADOR ÓTIMO	121
6.4 - DETERMINAÇÃO OFF-LINE DO FILTRO DE KALMAN PADRAO .	126
6.5 - CONCLUSÃO	130
7. TECNICAS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA	131
7.1 - INTRODUÇÃO	131
7.2 - PROCEDIMENTOS GERAIS DE PREVENÇÃO DA DIVERGÊNCIA .	132
7.3 - CONTROLE DA DIVERGÊNCIA ATRAVES DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS	134
7.3.1 - Princípios básicos	135
7.3.2 - Estimacão da covariância do ruído de estado.	136
7.3.3 - Definição da covariância do ruído de medição	137
7.4 - OPERAÇÃO DO FILTRO COM A ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA	137
7.5 - CONCLUSÃO	141
8. CONCLUSOES GERAIS	143
ANEXO I	146
ANEXO II	147
ANEXO III	148
APÊNDICE A	149
APÊNDICE B	159
APÊNDICE C	164
APÊNDICE D	169
APÊNDICE E	172
APÊNDICE F	177
APÊNDICE G	179
APÊNDICE H	185
BIBLIOGRAFIA	192

ÍNDICE DE FIGURAS E TABELAS

FIGURA 1.1	- Máquina simétrica trifásica	6
FIGURA 1.2	- Eixos de referência da transformação d,q generalizada	10
FIGURA 1.3	- Modelo dinâmico elétrico da máquina	12
FIGURA 1.4	- Polos de malha aberta do sistema contínuo ...	15
FIGURA 1.5	- Sistema discreto com elemento segurador	18
FIGURA 1.6	- Região admissível para localização dos polos dominantes do sistema discreto	22
FIGURA 1.7	- Polos de malha aberta do sistema discreto ...	25
FIGURA 2.1	- Sistema discreto da máquina assíncrona com o estimador ótimo de Kalman	41
FIGURA 2.2	- Função densidade de probabilidade condicionada após a consideração da medição t_{k+1}	45
FIGURA 2.3	- Diagrama esquemático do filtro discreto de Kalman	49
FIGURA 3.1	- Incremento de covariância no intervalo de integração	54
FIGURA 3.2	- Máquina em regime permanente sem ruídos aplicados	61
FIGURA 3.3	- Máquina em regime permanente com ruído de medição	66
FIGURA 3.4	- Máquina em regime permanente com ruído de estado e medição (Parte I)	68
FIGURA 3.5	- Máquina em regime permanente com ruído de estado e medição (Parte II)	69
FIGURA 3.6	- Partida da máquina com tensão de alimentação senoidal	71

FIGURA 3.7	- Partida da máquina com tensão de alimentação senoidal: fluxos magnéticos e correntes reais e estimadas	72
FIGURA 3.8	- Máquina em regime permanente com tensão de alimentação senoidal	73
TABELA 3.1	- Consideração do conjugado de carga	74
FIGURA 4.1	- Atenuação e deslocamento de fase devido ao filtro passa-baixa	82
FIGURA 4.2	- Característica do filtro passa-baixa ideal ..	85
FIGURA 4.3	- Resposta ao degrau unitário do filtro passa-baixa ideal	86
FIGURA 4.4	- Resposta em frequência do filtro analógico ..	88
TABELA 4.1	- Análise harmônica dos sinais cossenoidais ...	93
FIGURA 4.5	- Representação no espaço de estados do filtro analógico	94
FIGURA 4.6	- Filtragem analógica das correntes bifásicas da máquina	95
FIGURA 5.1	- Sistema aumentado com ruído de medição correlacionado	97
FIGURA 5.2	- Máquina assíncrona com filtro analógico na saída	102
FIGURA 5.3	- Máquina em regime permanente com sistema aumentado pelo filtro analógico com medições perfeitas (Parte I)	106
FIGURA 5.4	- Máquina em regime permanente com sistema aumentado pelo filtro analógico com medições perfeitas (Parte II)	108
FIGURA 5.5	- Transitório no filtro de Kalman com a máquina em regime permanente	109
FIGURA 5.6	- Máquina em regime permanente com ruído de medição na saída do filtro analógico (Parte I)	112
FIGURA 5.7	- Máquina em regime permanente com ruído de medição na saída do filtro analógico (Parte II)	113
FIGURA 5.8	- Transitório na partida da máquina com ruído	

	de medição na saída do filtro analógico	114
TABELA 6.1	- Esforço computacional do estimador ótimo de Kalman para um sistema linear invariante no tempo	124
TABELA 6.2	- Esforço computacional adicional do estimador ótimo de Kalman calculado "on-line"	125
FIGURA 6.1	- Projeto do filtro de Kalman	128
FIGURA 6.2	- Transitório na partida da máquina com o filtro de Kalman calculado previamente	129
FIGURA 7.1	- Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman durante a partida da máquina	138
FIGURA 7.2	- Índices de qualidade da estimação com e sem filtragem adaptativa num transitório de partida	139
FIGURA 7.3	- Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman com a máquina em regime permanente .	141
FIGURA 7.4	- Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman: fluxos magnéticos e correntes reais e estimadas	142
FIGURA A.1	- Ortogonalidade entre o erro de estimação e_k e o estado estimado x_k	151
FIGURA C.1	- Trem de pulsos de área unitária	164
FIGURA C.2	- Sinal contínuo $f(t)$	165
FIGURA C.3	- Sinal amostrado pelo trem de pulsos	165
FIGURA C.4	- Processo de amostragem do sinal $f(t)$	165
FIGURA C.5	- Amostragem ideal por trem de impulsos	166
FIGURA C.6	- Espectro de frequência	167
FIGURA H.1	- Máquina em regime permanente com ruídos de estado e medição aplicados no sistema discreto (Parte I)	190
FIGURA H.2	- Máquina em regime permanente com ruído de estado e medição aplicados no sistema discreto (Parte II)	191

NOMENCLATURA

- n : Ordem do sistema da máquina
- m : Dimensão do vetor de saída da máquina
- r : Dimensão do vetor de entrada da máquina
- n_a : Ordem do sistema aumentado
- m_i : Dimensão do vetor de saída reduzido
- α, β : Eixos de referência do estator fixo
- d, q : Eixos de referência com velocidade ω_a
- T_s : Período de amostragem [s]
- ω_e : Velocidade angular do campo girante estatórico [rad/s]
- ω_m : Velocidade angular elétrica do rotor [rad/s]
- ω_d : Velocidade angular dos eixos d, q [rad/s]
- θ : Ângulo elétrico de posição rotórica [rad]
- θ_n : Ângulo mecânico de posição rotórica [rad]
- θ_d : Posição angular do eixo d [rad]
- θ_e : Ângulo do campo girante estatórico [rad]
- θ_i : Ângulo entre uma bobina do estator e uma do rotor [rad]
- θ_{er} : Ângulo entre o fluxo estatórico e o rotórico [rad]
- δ_{ij} : Delta de Kronecker
- $\delta(t)$: Impulso unitário no tempo $t = 0$ s
- v : Vetor de tensões [v]
- i : Vetor de correntes [A]
- Φ : Vetor de fluxos [Wb]
- L_{ee} : Matriz de indutâncias estatóricas da máquina trifásica [H]
- L_{rr} : Matriz de indutâncias rotóricas da máquina trifásica [H]
- v_e e v_r : Vetores de tensão estatórica e rotórica [v]
- i_e e i_r : Vetores de corrente estatórica e rotórica [A]
- Φ_e e Φ_r : Vetores de fluxo estatórico e rotórico [Wb]
- L_{er} e L_{re} : Matrizes de indutâncias mútuas entre estator e

rotor da máquina trifásica [H]

R_e : Matriz de resistências estatóricas [Ω]

R_r : Matriz de resistências rotóricas [Ω]

L : Matriz de indutâncias [H]

R : Matriz de resistências [Ω]

$x_{0,d,q}$: Vetor de estado no referencial d,q

$x_{1,2,3}$: Vetor de estado no referencial trifásico

L_e e L_r : Indutâncias próprias de bobinas do estator e rotor [H]

M_e e M_r : Indutâncias mútuas entre duas bobinas do estator e rotor [H]

M_{er} : Indutância mútua entre uma bobina do estator e uma do rotor [H]

r_e e r_r : Resistência de uma bobina do estator e rotor [Ω]

$T(\theta_d)$: Matriz da transformação linear de Park

Φ_{ed} e Φ_{eq} : Componentes de fluxo estatórico de eixos d,q [Wb]

Φ_{rd} e Φ_{rq} : Componentes de fluxo rotórico de eixos d,q [Wb]

v_{ed} e v_{eq} : Componentes de tensão estatórica de eixos d,q [v]

v_{rd} e v_{rq} : Componentes de tensão rotórica de eixos d,q [v]

i_{ed} e i_{eq} : Componentes de corrente estatórica de eixos d,q [A]

i_{rd} e i_{rq} : Componentes de corrente rotórica de eixos d,q [A]

l_e e l_r : Indutâncias próprias de estator e rotor da máquina bifásica [H]

m_{er} : Indutância mútua entre o estator e o rotor da máquina bifásica [H]

p : Número de pares de polos

C_e : Conjugado eletromagnético [N.m]

K_J : Momento de inércia da máquina [$kg.m^2$]

C_r : Conjugado de carga [N.m]

C_a : Conjugado de atrito [N.m]

K_a : Coeficiente de atrito [N.m/rad/s]

σ : Coeficiente de dispersão magnética total

índice "b" : Indica variável estimada

índice "r" : Indica grandeza associada ao algoritmo de integração numérica (Runge Kutta de 4ª ordem)

índice "d" : Indica variável do sistema discreto

índice "a" : Indica variável do sistema aumentado

índice "m" : Indica variável do filtro formador
 índice "f" : Indica variável do filtro analógico
 L : Operador da transformada de Laplace
 E : Operador de esperança matemática
 Tr : Indica traço de uma matriz
 N[.] : Indica distribuição normal de probabilidade
 exp : Operador de exponenciação
 $\delta/\delta\theta$: Operador de derivada parcial em relação a θ
 d/dt : Operador de derivada em relação a t
 D : Indica diferença, erro ou incremento
 m_r : Média ponderada de N resíduos de predição da saída
 i_r : Índice de qualidade do filtro de Kalman
 δQ_0 : Incremento da covariância do ruído de estado
 D_w : Incremento de velocidade [rad/s]
 σ_{1+jw_1} : Representação de polo complexo (plano s)
 z_1 : Representação de polo no plano z
 s : Vetor dos polos de malha aberta (plano s)
 σ_x : Desvio padrão da estimação de estados
 σ_z : Desvio padrão da estimação da saída
 δT_a : Trem de impulsos unitários
 w_s : Frequência de amostragem
 ! : Operador matemático: Fatorial

INTRODUÇÃO GERAL

Por vários anos as máquinas de corrente contínua têm sido utilizadas em aplicações com velocidade variável em função da simplicidade de seu sistema de controle e do conversor de alimentação. Por outro lado, além de ter um custo mais elevado comparado à máquina CA, é menos confiável devido ao seu comutador mecânico, não sendo portanto indicada para operação em ambientes explosivos. Como elevada confiabilidade e operação livre de manutenções excessivas são considerações essenciais em sistemas de controle industriais, as máquinas CC começam a ser substituídas por máquinas CA. A máquina assíncrona, particularmente do tipo com rotor em gaiola, ocupa um espaço significativo devido à sua robustez, confiabilidade, eficiência e baixo custo. Estas características entretanto, são balanceadas pelo elevado custo do equipamento de controle e do conversor devido à complexidade do comportamento dinâmico da máquina CA, que constitui um sistema multivariável não linear, com acoplamento entre as grandezas de eixo direto e em quadratura.

Estas dificuldades têm sido contornadas recentemente com a utilização de sistemas de controle baseados em microcomputadores através dos quais, pode-se implementar estratégias avançadas de controle desacoplado (independente) de fluxo e conjugado para máquinas CA, alimentadas por conversores estáticos, obtendo-se acionamentos de elevado desempenho dinâmico.

Estas técnicas de campo orientado ou controle vetorial foram desenvolvidas originalmente na Alemanha (década de 70), dividindo-se basicamente em método direto (por realimentação) e indireto ("feedforward").

Para implementação do método direto, cujas características de robustez são bastante importantes, necessita-se detectar o vetor de fluxo estatórico, rotórico ou de entreferro. Para isto, pode-se utilizar sensores de efeito Hall, enrolamentos de fluxo ("flux coils") ou realizar uma estimação a partir da tensão estatórica e dos sinais de corrente utilizando-se observadores de estado.

Apresenta-se neste trabalho, um estudo detalhado da utilização do estimador estocástico de Kalman-Bucy para obtenção dos fluxos magnéticos em máquinas assíncronas. Nesta metodologia, um tratamento probabilístico é dado ao processamento dos sinais de modo a obter-se uma confiabilidade maior na modelagem dinâmica do sistema. As grandezas de fluxo magnético são estimadas a partir de medições das grandezas elétricas e mecânicas do sistema.

O Trabalho divide-se basicamente em 7 capítulos:

No capítulo 1 apresenta-se a modelagem dinâmica da máquina assíncrona, obtendo-se o sistema equivalente da máquina bifásica no espaço de estados. Analisa-se também o processo de discretização do sistema e a definição do período de amostragem.

No capítulo 2 apresenta-se o desenvolvimento analítico completo do filtro discreto de Kalman, definindo-se o conceito de Projeções Ortogonais. Análises com relação à condição inicial do algoritmo e estimação não polarizada são realizadas.

A modelagem das fontes de ruído de estado e medição é realizada no capítulo 3. A compatibilização entre as covariâncias no sistema real da máquina e na simulação digital, considerando-se o método específico de integração numérica utilizado, é detalhada. São realizadas análises da influência do método de discretização e o comportamento da tensão estatórica nos erros introduzidos pelo cálculo computacional do estimador discreto de Kalman.

No capítulo 4 analisa-se o processo de amostragem no domínio da frequência e apresenta-se o teorema da amostragem de Shannon.

Detalha-se a teoria e projeto do filtro passa-baixa, especificamente com função de transferência de Butterworth, para implementação no sistema de estimação e controle. Introduce-se o filtro analógico nas correntes de saída da máquina.

No capítulo 5 considera-se o ruído de medição correlacionado através de um "filtro formador" de dinâmica conhecida. Desenvolve-se o estimador com ordem aumentada e analisa-se o condicionamento numérico das expressões do filtro de Kalman, considerando-se medições perfeitas na saída do sistema. Introduce-se o filtro analógico na saída do sistema, correlacionando o ruído de medição, e realiza-se o tratamento do sistema com ordem aumentada. Transitórios são aplicados no sistema com consideração do conjugado de carga e partida da máquina.

No capítulo 6 realiza-se o cálculo prévio ("off-line") das covariâncias e ganhos ótimos (regime permanente) do filtro de Kalman para toda a faixa de velocidade da máquina. O funcionamento do estimador com a leitura destas grandezas de uma tabela é implementado. Análises com relação ao esforço computacional na operação do estimador são realizadas. Apresenta-se formulações alternativas do estimador ótimo de Kalman.

Finalmente, no capítulo 7, apresenta-se técnicas de filtragem adaptativa para prevenção da divergência do filtro. Demonstra-se a metodologia de análise da consistência estatística das variáveis estimadas e sua utilização para ajuste das covariâncias do filtro de Kalman.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM DINÂMICA DA MÁQUINA ASSÍNCRONA

1.1) INTRODUÇÃO

A máquina assíncrona compõe-se basicamente por um enrolamento estatórico primário alojado nas ranhuras, que é ligado à fonte de alimentação, e um secundário (rotor) que pode ser bobinado ou formado por barras (gaiola de esquilo).

Se o rotor é bobinado, constitui-se de um enrolamento trifásico alojado nas ranhuras cuja extremidade de cada fase está disponível através de anéis coletores. Assim, pode-se interligar um dispositivo ativo (ponte retificadora ou chaveador alimentando uma carga) ou passivo (reostato de partida) para controle direto do escorregamento do motor, e/ou utilizar-se sensores de corrente rotórica para a implementação de sistemas de controle de campo orientado (controle vetorial).[16],[43]

Um rotor em gaiola é constituído por um certo número de barras, uma por ranhura, interligadas por anéis em cada extremidade. Este tipo de rotor é representado por um enrolamento trifásico equivalente.

Como neste trabalho, a máquina assíncrona é considerada um processo estocástico, esta aproximação para o enrolamento rotórico constitui um dos fatores de incerteza na modelagem dinâmica do sistema da máquina.

1.2) HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS NA MODELAGEM DO MOTOR

Na modelagem da máquina assíncrona, algumas hipóteses simplificadoras são adotadas resultando num sistema adequado para o tratamento matemático:[39]

- a) O entreferro é distribuído de modo uniforme e o efeito das ranhuras é desprezado. O comprimento do circuito magnético servindo para o cálculo da indutância é independente do ângulo de posição rotórico (θ), ou seja, a máquina é de polos lisos.
- b) A saturação do circuito magnético, o ciclo de histerese e as correntes de Foucault são desprezadas.
- c) As resistências dos enrolamentos não variam com a temperatura e despreza-se o efeito pelicular.
- d) Admite-se que cada f.m.m criada por cada uma das fases das duas armaduras apresenta distribuição senoidal de fluxo magnético.

Estas hipóteses resultam em expressões simplificadas para as indutâncias mútuas e próprias dos enrolamentos.

1.3) EQUAÇÕES GERAIS DA MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA IDEALIZADA

Considerando-se as hipóteses assumidas em 1.2, pode-se definir o modelo dinâmico da máquina assíncrona trifásica. As convenções, hipóteses e notações para a representação da máquina trifásica (Fig 1.1) podem ser resumidas como:[16]

- As fases estatóricas s_1, s_2, s_3 são idênticas (enrolamento estatórico simétrico);
- As fases rotóricas r_1, r_2, r_3 são idênticas (enrolamento rotórico simétrico);
- Ângulos elétricos entre bobinas do estator ou do rotor com valores de $2.\pi/3$ rad elétricos;
- Máquina multipolar onde $\theta = p.\theta_n$. Nesta expressão, θ_n é o ângulo de posição mecânico do rotor e "p" é o número de pares de

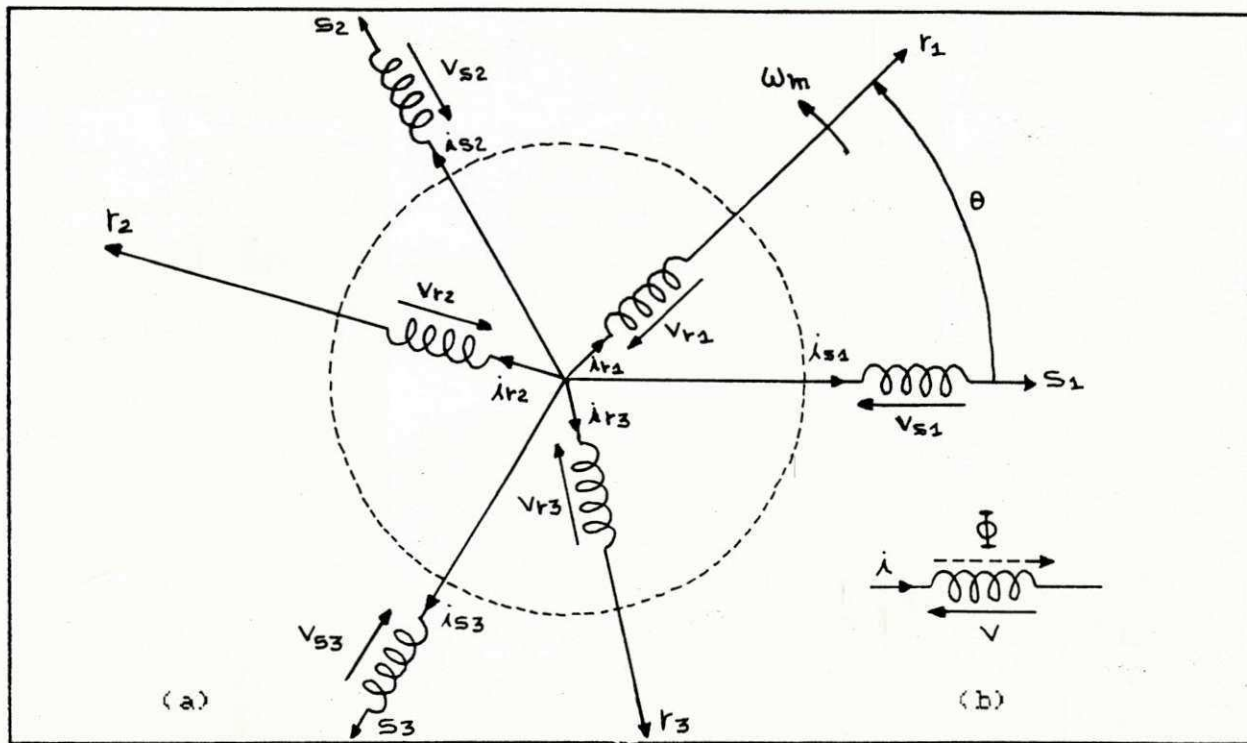


Fig. 1.1: (a) Máquina simétrica trifásica (b) Convenção utilizada para as grandezas da máquina em uma bobina

polos:

- $v_e, v_r, i_e, i_r, \Phi_e, \Phi_r$: tensões, correntes e fluxos nas bobinas de estator e rotor respectivamente;
- Indutâncias próprias e mútuas entre enrolamentos de uma mesma armadura são constantes e iguais;
- L_e e L_r : Indutâncias próprias de uma bobina do estator e do rotor;
- M_e e M_r : Indutâncias mútuas entre duas bobinas do estator e entre duas bobinas do rotor;
- $M_{er} \cdot \cos\theta_1$: Indutância mútua entre uma bobina do estator e uma do rotor separadas por um ângulo θ_1 (repartição senoidal da indução eletromagnética no entreferro). Portanto, esta indutância é função do ângulo θ de posição rotórico;
- r_e e r_r : Resistências de uma bobina do estator e do rotor respectivamente;

- θ e ω_m são respectivamente ângulo elétrico de posição do rotor e velocidade angular elétrica do mesmo.

1.3.1) Expressões de fluxo, tensão, conjugado e potência

Expressões de fluxo magnético:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= L_{ee}.i_e + L_{er}.i_r \\ \Phi_r &= L_{re}.i_e + L_{rr}.i_r\end{aligned}\quad (1.1)$$

Definindo-se as matrizes e vetores:

$$\Phi_e = [\Phi_{e1} \quad \Phi_{e2} \quad \Phi_{e3}]^T \quad \Phi_r = [\Phi_{r1} \quad \Phi_{r2} \quad \Phi_{r3}]^T \quad (1.2)$$

$$i_e = [i_{e1} \quad i_{e2} \quad i_{e3}]^T \quad i_r = [i_{r1} \quad i_{r2} \quad i_{r3}]^T \quad (1.3)$$

$$L_{ee} = \begin{bmatrix} L_e & M_e & M_e \\ M_e & L_e & M_e \\ M_e & M_e & L_e \end{bmatrix} \quad L_{rr} = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$L_{er} = M_{er} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+2.\pi/3) & \cos(\theta+4.\pi/3) \\ \cos(\theta+4.\pi/3) & \cos\theta & \cos(\theta+2.\pi/3) \\ \cos(\theta+2.\pi/3) & \cos(\theta+4.\pi/3) & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$L_{re} = M_{er} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+4.\pi/3) & \cos(\theta+2.\pi/3) \\ \cos(\theta+2.\pi/3) & \cos\theta & \cos(\theta+4.\pi/3) \\ \cos(\theta+4.\pi/3) & \cos(\theta+2.\pi/3) & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

O sistema 1.1 pode portanto ser escrito na forma compacta:

$\Phi = L.i$ onde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_e \\ \Phi_r \end{bmatrix} \quad i = \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_{ee} & L_{er} \\ L_{re} & L_{rr} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Com relação a estas matrizes observa-se que:

- L_{ee} e L_{rr} são simétricas

- L_{er} e L_{re} são circulares ($x_{1j} = x_{1+1,j+1}$)
- $L_{er} = L_{re}^T$

Expressões de Tensão:

$$v = R.i + d\Phi/dt \quad (1.8)$$

$$v = R.i + L.di/dt + w_m.\{\delta/\delta\theta L\}.i \quad (1.9)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_e \\ v_r \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_e \\ R_r \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$v_e = [v_{e1} \ v_{e2} \ v_{e3}]^T \quad v_r = [v_{r1} \ v_{r2} \ v_{r3}]^T \quad (1.11)$$

$$R_e = \begin{bmatrix} r_e & 0 & 0 \\ 0 & r_e & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{bmatrix} \quad R_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

O termo diferencial da corrente em 1.9 é a tensão induzida de transformação e o termo em w_m é a tensão induzida de rotação.

Expressão do conjugado eletromagnético:

$$C_e = i_e^T.\{\delta/\delta\theta L_{er}\}.i_r \quad (1.13)$$

Expressões de potência instantânea:

$$P = i^T.v$$

$$P = i^T.R.i + i^T.L.di/dt + w_m.i^T.\{\delta/\delta\theta L\}.i \quad (1.14)$$

O termo diferencial da corrente em 1.14 corresponde à potência de transformação e o termo em w_m corresponde à potência de rotação.

1.4) TRANSFORMADA DE PARK GENERALIZADA

Nas expressões apresentadas de fluxo e tensão da máquina no referencial trifásico, verifica-se a presença de elementos senoidais variando com o ângulo de posição rotórico θ . Uma simplificação pode ser obtida definindo-se uma transformação que origina matrizes com elementos constantes. Obtem-se assim, um

sistema de equações não lineares a coeficientes constantes num par de eixos de referência d,q arbitrário girando à velocidade genérica ω_a . As matrizes de transformação são encontradas pela determinação dos enrolamentos no eixo d,q que criem a mesma indução de fluxo no entreferro que os enrolamentos originais nos eixos 1,2,3 (trifásico), conservando-se o mesmo valor de potência elétrica da máquina trifásica (versão conservativa de potência). Para o caso da existência de componente contínua na máquina trifásica, deve-se considerar um enrolamento a mais para circulação da componente homopolar de corrente (i_{a0}) no referencial 0,d,q.

A transformação linear generalizada de Park é definida, para grandezas estatóricas, por:

$$x_{0,d,q} = T(\theta_a)^{-1} \cdot x_{1,2,3} \quad (1.15)$$

$$x_{1,2,3} = T(\theta_a) \cdot x_{0,d,q} \quad (1.16)$$

$$T(\theta_a)^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta_a) & \cos(\theta_a - 2\pi/3) & \cos(\theta_a - 4\pi/3) \\ -\text{sen}(\theta_a) & -\text{sen}(\theta_a - 2\pi/3) & -\text{sen}(\theta_a - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$T(\theta_a) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos(\theta_a) & -\text{sen}(\theta_a) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta_a - 2\pi/3) & -\text{sen}(\theta_a - 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta_a - 4\pi/3) & -\text{sen}(\theta_a - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Para as grandezas rotóricas, basta substituir nas expressões 1.17 e 1.18 o ângulo θ_a do eixo d em relação ao estator fixo (θ_a), pelo ângulo $\theta_a - \theta$, que é o ângulo do eixo d em relação ao rotor r_a . (Fig. 1.2)

As equações de tensão apresentam formas diversas em função da localização dos eixos d,q: eixo d,q ligado ao estator fixo ($\omega_a = 0$); eixo d,q ligado ao rotor ($\omega_a = \omega_m$) e eixo d,q ligado ao campo girante ($\omega_a = \omega_e$), onde ω_e é a frequência de alimentação da

máquina. Fazendo-se $\omega_a = 0$, obtém-se a representação bifásica no referencial estatórico fixo s_α, s_β [16]. Na figura 1.2 observa-se a representação simplificada da transformação d,q generalizada.

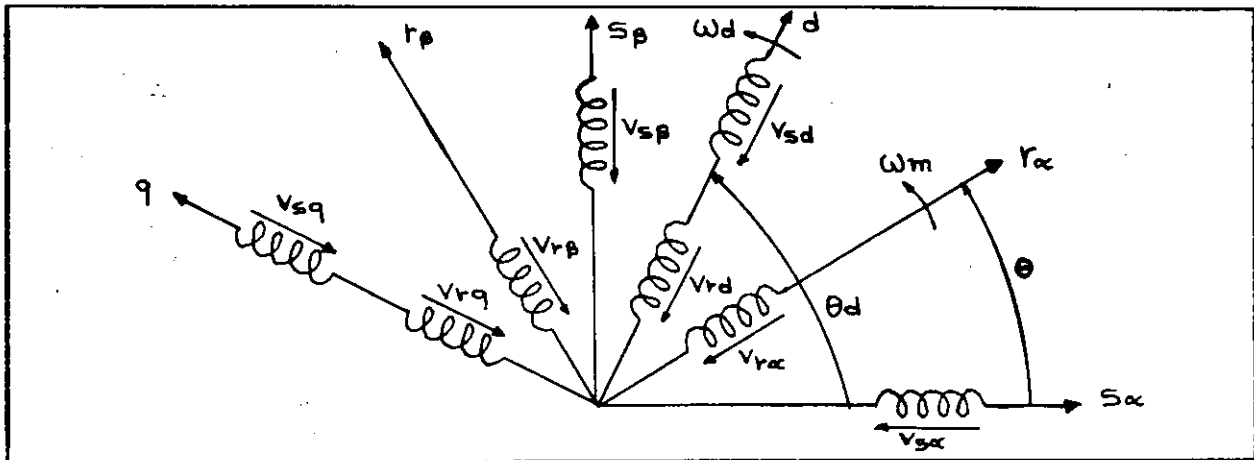


Fig. 1.2: Eixos de referência da transformação d,q generalizada

- Equações elétricas:

Expressões dos fluxos estatóricos:

$$\begin{aligned}\Phi_{ed} &= l_e \cdot i_{ed} + m_{er} \cdot i_{rd} \\ \Phi_{eq} &= l_e \cdot i_{eq} + m_{er} \cdot i_{rq} \\ \Phi_{eo} &= l_{eo} \cdot i_{eo}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Expressões dos fluxos rotóricos:

$$\begin{aligned}\Phi_{rd} &= l_r \cdot i_{rd} + m_{er} \cdot i_{ed} \\ \Phi_{rq} &= l_r \cdot i_{rq} + m_{er} \cdot i_{eq} \\ \Phi_{ro} &= l_{ro} \cdot i_{ro}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Expressões das tensões estatóricas:

$$\begin{aligned}v_{ed} &= r_e \cdot i_{ed} + d\Phi_{ed}/dt - \omega_a \cdot \Phi_{eq} \\ v_{eq} &= r_e \cdot i_{eq} + d\Phi_{eq}/dt + \omega_a \cdot \Phi_{ed} \\ v_{eo} &= r_{eo} \cdot i_{eo} + d\Phi_{eo}/dt\end{aligned}\tag{1.21}$$

Expressões das tensões rotóricas:

$$\begin{aligned}v_{rd} &= r_r \cdot i_{rd} + d\Phi_{rd}/dt - (\omega_a - \omega_m) \cdot \Phi_{rq} \\ v_{rq} &= r_r \cdot i_{rq} + d\Phi_{rq}/dt + (\omega_a - \omega_m) \cdot \Phi_{rd} \\ v_{ro} &= R_{ro} \cdot i_{ro} + d\Phi_{ro}/dt\end{aligned}\tag{1.22}$$

Onde:

$$\begin{aligned}l_{eo} &= L_e + 2.M_e & l_{ro} &= L_r + 2.M_r \\l_e &= L_e - M_e & l_r &= L_r - M_r \\r_{eo} &= r_e & r_{ro} &= r_r \\m_{er} &= (3/2).M_{er} & \omega_d &= \text{Velocidade dos eixos d,q} \\ \omega_m &= \text{Velocidade angular (elétrica) do rotor: } \omega_m = d\theta/dt & & (1.23)\end{aligned}$$

- **Equações mecânicas:**

Expressões do conjugado eletromagnético:

$$\begin{aligned}C_e &= p.(\Phi_{ed}.i_{eq} - \Phi_{eq}.i_{ed}) \\ C_e &= p.m_{er}.(i_{eq}.i_{rd} - i_{ed}.i_{rq})\end{aligned} \quad (1.24)$$

Esta relação evidencia o fato de que o conjugado resulta da interação de correntes estáticas e rotóricas em quadratura.

Expressão da dinâmica de rotação da máquina:

$$K_J.d(\omega_n)/dt = C_e - C_r - C_a \quad (1.25)$$

Para a expressão 1.25 acima define-se:

$$\begin{aligned}K_J &= \text{Momento de inércia da máquina} \\ \omega_n &= \text{Velocidade angular mecânica do rotor} \\ C_r &= \text{Conjugado de carga} \\ C_a &= \text{Conjugado de atrito}\end{aligned}$$

Utilizando-se as relações $\omega_n = \omega_m/p$ e $C_a = K_a.\omega_n$, onde p = número de pares de polos e K_a = coeficiente de atrito, a expressão resultante final para a equação diferencial da velocidade angular elétrica do rotor (ω_m) é dada por:

$$d(\omega_m)/dt = (1/K_J).[p.(C_e - C_r) - K_a.\omega_m] \quad (1.26)$$

Observa-se que se os enrolamentos da máquina são ligados em estrela com neutro não interligado, as componentes homopolares são nulas, reduzindo a representação da máquina trifásica a uma máquina bifásica d,q. Neste trabalho será considerado que a máquina é ligada em estrela não interconectado. Portanto apenas as componentes d,q são consideradas.

1.5) SISTEMA DA MÁQUINA NO ESPAÇO DE ESTADOS

Rigorosamente as equações elétricas e mecânicas da máquina, apresentadas na seção anterior, constituem um sistema não linear, invariante, de sexta ordem onde além dos fluxos estatóricos (Φ_{sa} , Φ_{sa}) e rotóricos (Φ_{ra} , Φ_{ra}), a posição angular elétrica do rotor (θ) e a velocidade angular elétrica do mesmo (w_m) também constituem variáveis de estado. Porém, analisando-se a equação diferencial de movimento de 1ª ordem 1.26, admite-se que a constante de tempo do módulo mecânico do sistema é dominante em relação às constantes de tempo do módulo elétrico. Considera-se assim a velocidade do motor como um parâmetro variável mensurável da matriz dinâmica do sistema $A(w_m)$. Este parâmetro portanto, é medido em intervalos de tempo regulares, durante os quais é assumido constante.

Observa-se em [27] que este procedimento, para contornar esta não linearidade do modelo, pode ser utilizado para máquinas assíncronas de potência nominal superior a 1 kW, onde verifica-se que as constantes de tempo mecânicas são muito maiores comparadas às constantes de tempo elétricas.

Portanto, a partir das expressões de tensões (1.21 e 1.22) no referencial bifásico d,q, introduz-se a medição da velocidade angular w_m e obtem-se o modelo estocástico dinâmico elétrico da máquina para representação no espaço de estados (Fig. 1.3):

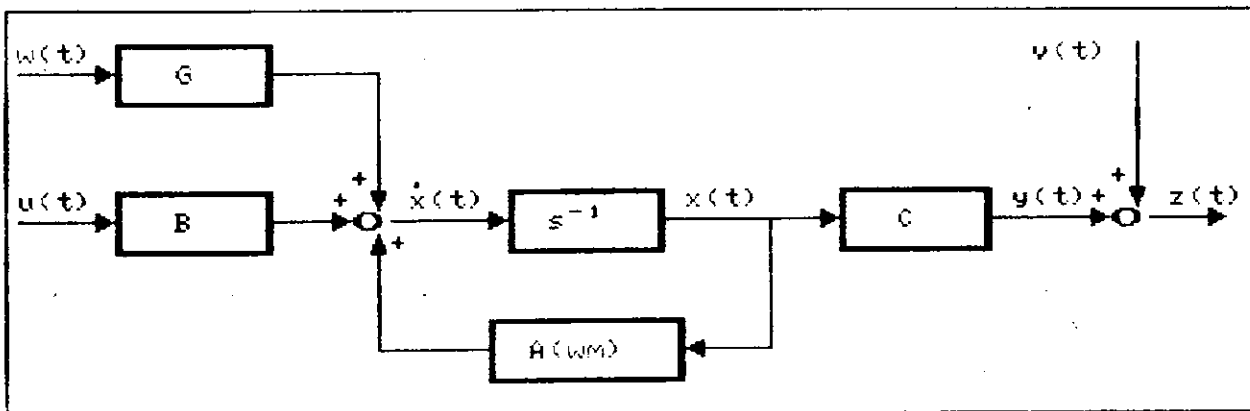


Fig. 1.3: Modelo dinâmico elétrico da máquina

$$dx(t)/dt = A(w_m).x(t) + B.u(t) + G.w(t) \quad (1.27.a)$$

$$z(t) = C.x(t) + v(t) \quad (1.27.b)$$

Onde: $x(t) = [\Phi_{sd} \ \Phi_{sq} \ \Phi_{rd} \ \Phi_{rq}]^T$ é o vetor de variáveis de estado do sistema (ordem $n = 4$); $u(t) = [v_{sd} \ v_{sq}]^T$ é o vetor das tensões de entrada (ordem $r = 2$) e $z(t) = [i_{sd} \ i_{sq}]^T$ é o vetor de correntes de saída (ordem $m = 2$). A matriz G e os vetores $w(t)$ e $v(t)$ constituem respectivamente a matriz de pesos do ruído de estado e as entradas de ruído enfatizando a idéia da modelagem estocástica do sistema. Estes termos serão definidos posteriormente.

Afirma-se em [27] que a definição dos fluxos como variáveis de estado proporciona valores dos parâmetros do modelo com a mesma ordem de grandeza, simplificando sensivelmente a codificação dos algoritmos de estimação no microcomputador de controle. Nas próximas seções se constatará que a utilização do modelo fluxo rotórico-corrente estatística ocasiona uma elevada dispersão dos parâmetros do modelo com ordens de grandezas bem diferentes.

As matrizes do modelo fluxo estatístico-fluxo rotórico (eq's 1.27) são definidas por:

$$A(w_m) = \begin{bmatrix} \frac{-r_s}{\sigma.l_s} & -w_d & \frac{r_s.M_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} & 0 \\ w_d & \frac{-r_s}{\sigma.l_s} & 0 & \frac{r_s.M_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} \\ \frac{r_s.M_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} & 0 & \frac{-r_r}{\sigma.l_r} & (w_d - w_m) \\ 0 & \frac{r_r.M_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} & -(w_d - w_m) & \frac{-r_r}{\sigma.l_r} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma.l_s} & 0 & \frac{-m_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma.l_s} & 0 & \frac{-m_{sr}}{\sigma.l_s.l_r} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$\sigma = 1 - m_{ax}/l_{e.lr}$: Coeficiente de dispersão magnética total.

1.5.1) Posicionamento do sistema de eixos d,q de referência

Utilizando-se por exemplo, o eixo d,q no campo girante definido pela frequência das tensões senoidais (ω_m) de alimentação estatórica, todas as variáveis (fluxos, correntes e tensões) são grandezas contínuas em regime permanente. Torna-se portanto mais fácil a análise da resposta a transitórios nas grandezas de controle do sistema. No entanto, isto implica na necessidade de transformações de coordenadas conhecendo-se o ângulo θ_m do campo girante com relação ao estator.

A implementação dos algoritmos de estimação em micro-computador requer o desenvolvimento do sistema discretizado, onde um período de amostragem deve ser determinado em função do comportamento transitório do sistema. Este último é função dos auto-valores da matriz dinâmica $A(\omega_m)$. Esta apresenta 4 auto-valores complexos conjugados em função da velocidade rotórica (ω_m) e do eixo de referência adotado (ω_a).

Calcula-se assim os auto-valores do sistema em malha aberta para $\omega_a = 0$, variando-se a velocidade de $\omega_m = 0$ rad/s até a velocidade nominal $\omega_m = 120.\pi$ rad/s (A frequência máxima de alimentação estatórica é considerada igual a 60 Hz), representando-se o plano s na fig. 1.4. Observa-se que para baixas velocidades (próximas a $\omega_m = 0$), os polos dominantes apresentam parte real bastante próxima do eixo imaginário com partes imaginárias de pequena amplitude. Tem-se portanto uma resposta transitória bastante lenta e a situação mais crítica do ponto de vista de estabilidade do sistema. Com o aumento da velocidade, tanto as partes imaginárias como reais dos polos dominantes aumentam em valor absoluto, melhorando a estabilidade do sistema.

O posicionamento dos eixos de referência d,q no estator fixo ($\omega_a = 0$) foi definido de modo a evitar a determinação em tempo real dos ângulos de posição rotórico (θ) ou do campo girante (θ_m)

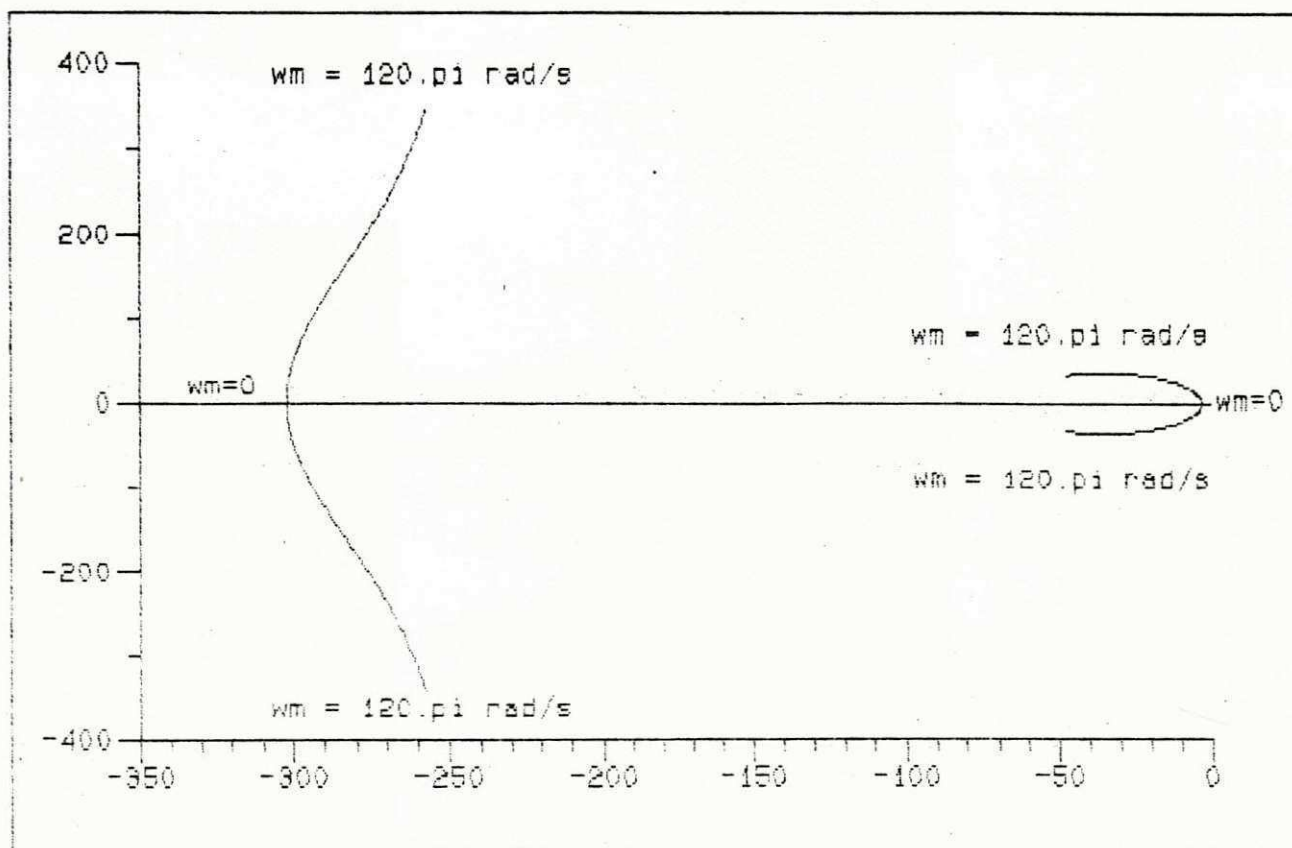


Fig. 1.4: Polos de malha aberta do sistema contínuo da máquina

e também economizar em transformações de coordenadas. Além disto, com a utilização da estimação de fluxo magnético para realização de controle vetorial, a tensão estatórica da máquina ficará constante durante o período de amostragem. Este comportamento da tensão é tratado matematicamente de modo mais simples com o sistema de eixo d, q posicionado no estator fixo. Como consequência, as grandezas do fluxo, correntes e tensões são senoidais em regime permanente e o sistema apresenta uma dinâmica pouco oscilatória para baixas velocidades. As variáveis transformadas são obtidas por operações algébricas simples sobre as grandezas trifásicas.

1.5.2) Fontes de ruído para modelagem estocástica

Na modelagem estocástica da máquina assíncrona, os vetores $w(t)$ e $v(t)$ correspondem as fontes de ruído de estado e medição que são introduzidos no sistema de modo a representar os

seguintes fatores:

1) Incertezas envolvidas na modelagem dinâmica do sistema no espaço de estados;

2) Os erros inerentes na resolução computacional da versão discretizada do sistema que será implementado em tempo real (no caso da simulação digital, estes erros estão associados à metodologia de discretização do sistema e ao comportamento da tensão de entrada);

3) Os erros característicos do processo de medição e introdução dos dados no microcomputador para o controle (análises realizadas no capítulo 3).

Os vetores de ruído citados acima são rigorosamente definidos como:

$w(t) \approx N[0 ; Q(t)]$: vetor de ruído gaussiano branco de média nula e covariância $Q(t)$: $E\{w(t).w^T(t)\} = Q(t)$ (ordem n)

$v(t) \approx N[0 ; R(t)]$: vetor de ruído gaussiano branco de média nula e covariância $R(t)$: $E\{v(t).v^T(t)\} = R(t)$ (ordem m).

$Q(t) \geq 0$ e $R(t) > 0$ (matrizes simétricas semidefinida e definida positiva, respectivamente).

A matriz G é utilizada para a modelagem dos ruídos de estado aplicando pesos específicos nos elementos do vetor $w(t)$ ou introduzindo correlação entre estes. A modelagem do nível de ruído $w(t)$ para a simulação digital do sistema deve ser equivalente ao nível de ruído admitido para a máquina real levando-se em consideração o algoritmo específico de integração numérica utilizado para resolução das equações diferenciais. [11],[37]

É importante ressaltar no entanto que toda a teoria que possibilita a aplicação da transformada de Park, considera a máquina perfeitamente simétrica [16],[39]. Portanto, ao se introduzir o ruído nas equações de estado no referencial d,q , a simetria da máquina deve continuar preservada, onde a alimentação $u(t)$ deve permanecer senoidal sem componente contínua. Esta

advertência é reforçada pelo fato de que ao fazer-se a transformação trifásico-d,q, é estabelecida uma equação para a componente homopolar (CC) de corrente, $i_{\omega 0}$, que é tratada em separado e posteriormente adicionada às correntes d,q que foram consideradas livres de qualquer componente contínua.

A modelagem e análise do ruído de estado e medição a ser introduzido na simulação digital do sistema é feito de modo sistemático no capítulo 3 considerando-se as discussões acima.

1.6) MODELO DISCRETO DA MÁQUINA ASSÍNCRONA

Adotando-se a representação no espaço de estados 1.27 e suprimindo-se as entradas de ruído que serão posteriormente consideradas para avaliar as estatísticas das grandezas do sistema, obtem-se a seguinte resolução analítica do sistema de equações diferenciais linearizadas através da medição de w_m : [17],[14]

Aplicando-se a transformada de Laplace em 1.27.a:

$$s.X(s) - x(0) = A(w_m).X(s) + B.U(s) \quad (1.29)$$

Onde $x(0)$ é o valor inicial do vetor de estados em $t = 0$ s. Obtem-se portanto, omitindo-se o parâmetro w_m na matriz A por simplificação:

$$X(s) = [s.I_4 - A]^{-1}.x(0) + [s.I_4 - A]^{-1}.B.U(s) \quad (1.30)$$

Onde I_4 é a matriz identidade de ordem $n = 4$.

Introduz-se assim a matriz de transição de estados ao aplicar-se a transformada inversa de Laplace na equação 1.30:

$$F(t) = L^{-1}[s.I_4 - A]^{-1} \quad (1.31)$$

Exprime-se portanto o vetor de estados no domínio do tempo:

$$x(t) = F(t).x(0) + \int_0^t F(t - \tau).B.u(\tau).d\tau \quad (1.32)$$

Generalizando-se para o caso em que o vetor inicial é definido para $t = t_0$ obtem-se:

$$x(t) = F(t - t_0).x(t_0) + \int_{t_0}^t F(t - \tau).B.u(\tau).d\tau \quad (1.33)$$

Obtem-se portanto o sistema multivariável da máquina, considerando-se um dispositivo segurador de ordem zero (ZOH - "zero order hold"), que realiza a amostragem do vetor de entradas $u(t)$ simultaneamente e retém a informação durante 1 período de amostragem T_a . Define-se portanto as matrizes:

$$F = F(T_a) \quad (1.34)$$

$$H = \int_0^{T_a} [F(\tau).d\tau].B \quad (1.35)$$

Obtendo-se as equações de estado do sistema discreto:

$$x(k+1) = F.x(k) + H.u(k) \quad (1.36.a)$$

$$z(k) = C.x(k) \quad (1.36.b)$$

A equação da saída $z(k)$ não se modifica na discretização do sistema. O diagrama estrutural é visto na fig. 1.5.

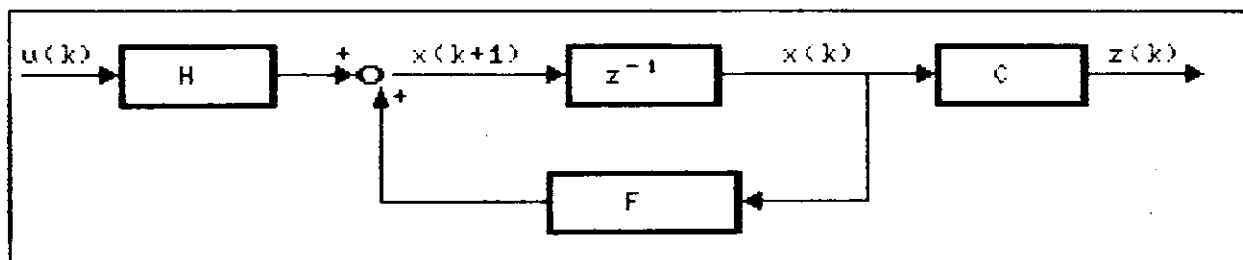


Fig. 1.5: Sistema discreto com elemento segurador (ZOH)

A matriz de transição de estados $F(t)$ pode ser obtida através do método analítico utilizando-se a transformada inversa de Laplace. Sua aplicação no entanto, é limitada em função da ordem do sistema. A característica principal deste método é que demonstra-se claramente a influência dos elementos da matriz A (coeficientes do sistema contínuo) sobre os elementos da matriz F (coeficientes do sistema discreto), pois obtem-se uma expressão analítica para a matriz F . Entretanto, a resolução analítica a ser empregada pode ser bastante trabalhosa apresentando

dificuldades para se obter a expressão resultante final.

Um outro método, que se aplica particularmente bem para o tratamento numérico por computador, é o cálculo da exponencial da matriz dinâmica [A]. Pela transformação inversa de Laplace obtém-se que a solução da equação de estados diferencial homogênea:

$$dx(t)/dt = A.x(t), \quad (1.37)$$

é dada por:

$$x(t) = \exp(A.t).x(0) \quad (1.38)$$

Assim, comparando-se a relação 1.38 com 1.32 e supondo-se a entrada nula $u(t) = 0$, obtém-se a matriz de transição de estados pela expressão:

$$F(t) = \exp(A.t) \quad (1.39)$$

A exponencial em 1.39 pode ser expandida numa série de potências dada por:

$$F(t) = I_n + A.t + (A.t)^2/2! + (A.t)^3/3! + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} (A.t)^i/i! \quad (1.40)$$

Onde I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Para o caso particular $t = T_a$ obtém-se:

$$F = F(T_a) = \sum_{i=0}^{+\infty} (A.T_a)^i/i! \quad (1.41)$$

Para a implementação no microcomputador, deve-se estabelecer um número finito de termos definindo-se uma precisão a partir da qual, a contribuição dos termos de ordem superior é desprezível. Existe logicamente um compromisso com o valor do tempo de amostragem T_a pois se este for muito elevado, é possível que o tempo necessário para se calcular a expressão 1.41, com a precisão desejada, seja inaceitável.

Apresenta-se em [5] uma metodologia onde primeiro calcula-se a matriz $J(t)$, que é a integral da matriz transição de estados $F(t)$, utilizando-se também a série exponencial de potências:

$$J(t) = \int_0^t F(\tau).d\tau = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \cdot t^{i+1}/(i+1)! \quad (1.42)$$

Para o caso particular $t = T_a$:

$$J(T_a) = T_a \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (A \cdot T_a)^i / (i+1)! \quad (1.43)$$

Estabelece-se assim uma relação entre as matrizes $J(t)$ e $F(t)$ da seguinte maneira partindo da expressão 1.42:[5]

$$J(t) = A^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} A^{i+1} \cdot t^{i+1}/(i+1)! = A^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} A^i \cdot t^i / i! =$$

$$A^{-1} \cdot [- I_n + \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \cdot t^i / i!] = A^{-1} \cdot [F(t) - I_n] \quad (1.44)$$

Conhecendo-se portanto a matriz transição de estados $F(t)$, pode-se calcular a matriz $J(t)$ pela expressão 1.44, sem que seja necessário proceder o somatório 1.42. No entanto, esta relação exige o cálculo da matriz inversa A^{-1} , o que não é interessante numa aplicação prática em função de casos de mau condicionamento da matriz A , memória de armazenamento e tempo de cálculo necessário.

Obtem-se assim outra relação, evitando-se a inversão da matriz. Multiplica-se a matriz $[A]$ pela esquerda dos termos da expressão 1.44:

$$A \cdot J(t) = F(t) - I_n \quad (1.45)$$

$$F(t) = I_n + A \cdot J(t) \quad (1.46)$$

Neste trabalho implementa-se na simulação digital esta metodologia, onde primeiro calcula-se $J(T_a)$ por 1.43 e depois $F(T_a)$ via expressão 1.46.

1.6.1) Escolha do período de amostragem

A definição do período de amostragem é baseada no comportamento dinâmico do sistema discreto da máquina que será utilizado para implementação do estimador de estados.

O comportamento dinâmico do sistema contínuo é caracterizado pelos polos $s_1 = -\sigma_1 + j.w_1$ da função de transferência $G(s)$ (ou raízes da equação característica do sistema dada pelo determinante de $[s.I_4 - A]$). Os polos da função de transferência discreta são obtidos pela relação $z_1 = \exp(s_1.T_a) = \exp[(-\sigma_1 + j.w_1).T_a]$.

Na operação de amostragem de um sistema contínuo, deve-se assegurar que o comportamento entre dois instantes de amostragem seja bem representado pelos valores obtidos nos instantes de amostragem. Demonstra-se em [5] que a resposta ao impulso unitário é representada de maneira conveniente pelos valores nos instantes de amostragem, quando a parte imaginária dos polos complexos conjugados (w_1) é igual ou inferior a $\pi/4.T_a$. Logo, obtém-se a primeira relação para a definição do tempo de amostragem:

$$T_a \leq \pi/4.w_1 \quad (1.47)$$

Esta relação corresponde a uma região limite de localização do polo z_1 no plano z , definida por um setor de $\pm 45^\circ$.

Com relação à parte real ($-\sigma_1$) do polo, deseja-se que a resposta ao impulso unitário amostrado represente de maneira conveniente um comportamento exponencial. Isto é obtido para o caso de $\sigma_1.T_a \leq 0.5$ de onde obtém-se a segunda condição:

$$T_a \leq 1/2.\sigma_1 = T_1/2, \quad (1.48)$$

onde introduz-se a constante de tempo $T_1 = 1/\sigma_1$ do sistema contínuo. Esta condição corresponde a posicionar os polos dominantes do sistema discreto entre as circunferências de raio $\exp(-0.5) \approx 0.6$ e 1.0 (dado pelo limite de estabilidade). Esta condição também implica em obter-se o período de amostragem 2 vezes menor que a menor constante de tempo do sistema, representada pelo polo mais rápido (de maior parte real em valor absoluto no plano s).

Resumindo-se o critério, deve-se determinar o período de amostragem T_a de modo que os polos dominantes z_1 do sistema discreto situem-se no interior da área hachuriada da figura 1.6.

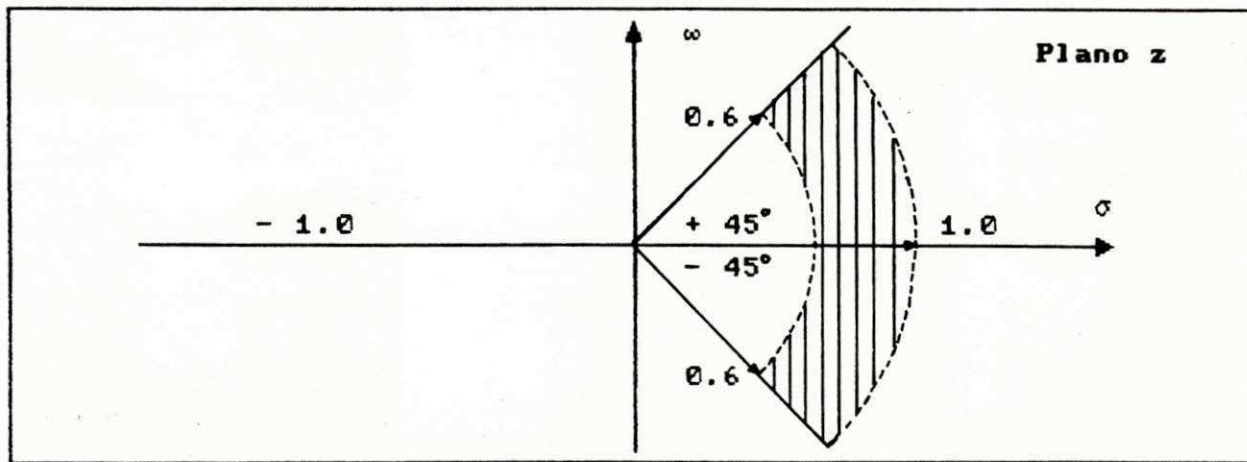


Fig. 1.6: Região admissível para localização dos polos dominantes do sistema discreto

A consideração do teorema da amostragem de Shannon (cap. 4), o limite do círculo unitário para estabilidade do sistema e as análises do ponto de vista dos recursos computacionais e condicionamento numérico do algoritmo para implementação prática completam os critérios para definição do período de amostragem.

Para o sistema contínuo da máquina assíncrona em malha aberta, tem-se os seguintes vetores de auto-valores da matriz dinâmica $[A(\omega_m)]$ para as duas condições limites de funcionamento:

a) Rotor Bloqueado (partida: $\omega_m = 0$): polos reais e duplos:

$$[s] = \begin{bmatrix} - & 3.2854 \\ - & 301.5795 \\ - & 3.2854 \\ - & 301.5795 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

b) Velocidade nominal ($\omega_m = 120.\pi$ rad/s): 2 pares de polos complexos conjugados:

$$[s] = \begin{bmatrix} - & 2.5713 + j.3.4311 \\ - & 2.5713 - j.3.4311 \\ - & 0.4774 + j.0.3289 \\ - & 0.4774 - j.0.3289 \end{bmatrix} \times 10^2 \quad (1.50)$$

Analisando-se os polos pelas expressões 1.47 e 1.48, determina-se um período de amostragem que atende às condições para toda a faixa de velocidade, desde a partida (situação mais crítica) até a velocidade nominal, e também seja compatível com os recursos computacionais disponíveis para a implementação do controle (tempo de cálculo, condicionamento numérico, taxa de amostragem, etc):

$$T_a = 0.5 \text{ ms} \quad (1.51)$$

Apresenta-se em [27] um estudo da relação entre o período de amostragem e a precisão numérica do cálculo da exponencial da matriz, avaliando-se o erro de discretização com base em alterações nos auto-valores do sistema discreto. Este erro obtido significa a modificação da dinâmica do modelo em função da discretização aproximada em relação àquela do modelo exato. Calcula-se assim o erro de discretização variando-se o período de amostragem (T_a) de 0.1 ms até 1.5 ms para vários valores da velocidade de rotação ω_m , considerando-se o truncamento de 1ª e 2ª ordem da exponencial da matriz.

Conclui-se que para os dois casos (1ª e 2ª ordem), o erro cresce com o aumento de T_a e decresce com o aumento de ω_m . Porém, para toda a faixa de velocidade da máquina, o erro de discretização é inferior a 1% (truncamento de 1ª ordem) e inferior a 0.1% (truncamento de 2ª ordem) quando $T_a < 0.5$ ms.

Para o último caso, de truncamento de 2ª ordem, os erros são tão pequenos que pode-se tolerar um aumento no período de amostragem se for necessário. Neste trabalho adota-se o truncamento de 3ª ordem para a exponencial da matriz, obtendo-se uma melhor precisão no cálculo da série, deixando-se uma margem de ajuste para a situação de ter-se que aumentar o período de amostragem em função de possíveis problemas de implementação prática.

Implementa-se assim na simulação digital:

$$J_d(T_a) = T_a \cdot [I_4 + A \cdot T_a / 2! + (A \cdot T_a)^2 / 3! + (A \cdot T_a)^3 / 4!] \quad (1.52)$$

$$F_d(T_a) = I_4 + A \cdot J_d(T_a) \quad (1.53)$$

$$H_d(T_s) = J_d(T_s).B, \quad (1.54)$$

onde a introdução do índice "d" indica a matriz discretizada com aproximação da série de potências.

Utilizando-se esta metodologia, além de obter-se a aproximação de 3ª ordem para a matriz $J_d(T_s)$ (A exponencial da matriz A é calculada até a ordem 3), o cálculo da matriz de transição de estados $[F_d(T_s)]$ através da expressão 1.53 evita a inversão de uma matriz nxn e resulta numa aproximação de quarta ordem.

O modelo discretizado para implementação computacional torna-se:

$$x(k+1) = F_d(k+1,k).x(k) + H_d(k).u(k) \quad (1.55.a)$$

$$z(k) = C(k).x(k) \quad (1.55.b)$$

Utilizando-se algoritmos computacionais, calcula-se os polos em malha aberta do sistema, discretizado (plano z) pelas expressões aproximadas 1.52 a 1.54, sendo que o gráfico é traçado na fig. 1.7.

Observa-se claramente nesta figura que os polos encontram-se inteiramente dentro da faixa mais indicada para localização obtida no início desta seção. A escolha do período de amostragem foi portanto bastante conveniente, apresentando resultados satisfatórios para o comportamento dinâmico do sistema discretizado.

1.7) MODELO DA MÁQUINA COM FLUXOS ROTÓRICOS E CORRENTES ESTATÓRICAS COMO VARIÁVEIS DE ESTADO

Na seção 1.5 introduziu-se a idéia da utilização do modelo de fluxos rotóricos e correntes estatóricas para o sistema dinâmico da máquina assíncrona. Tem-se portanto duas variáveis de estado que podem ser mensuráveis (i_{ea} e i_{eq}).

Esta representação possibilita a obtenção de um modelo de ordem reduzida para a estimação de fluxos rotóricos, onde

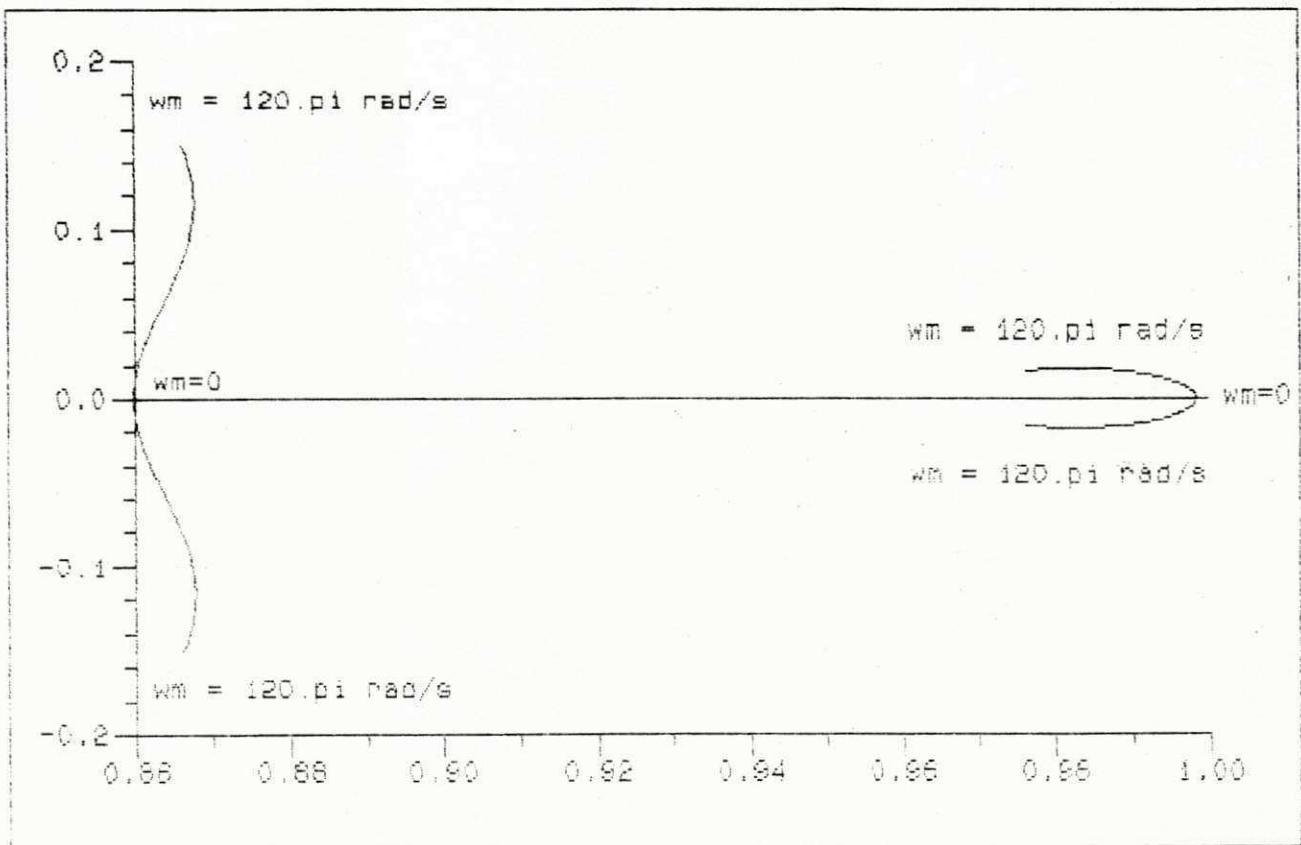


Fig. 1.7: Polos de malha aberta do sistema discreto da máquina

considera-se a medição das correntes livre de ruídos. A dinâmica das correntes portanto, é incorporada às expressões do fluxo rotórico reduzindo-se assim a ordem do sistema para $n=2$. Como consequência, o sistema torna-se bem menos robusto e a dinâmica bastante sensível a qualquer ruído de medição das correntes.

A partir do modelo de fluxo estático-fluxo rotórico da máquina (eq's 1.27), define-se a seguinte transformação linear para a qual obtem-se o vetor de estados:

$$x_1(t) = T_1 \cdot x(t) \quad (1.56)$$

$$x_1(t) = [i_{sa} \quad i_{sq} \quad \Phi_{ra} \quad \Phi_{rq}]^T, \quad (1.57)$$

onde a matriz de transformação linear T_1 e sua inversa são dadas por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1/\sigma.l_e & 0 & -mer/\sigma.l_e.l_r & 0 \\ 0 & 1/\sigma.l_e & 0 & -mer/\sigma.l_e.l_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma.l_e & 0 & mer/l_r & 0 \\ 0 & \sigma.l_e & 0 & mer/l_e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

A expressão do sistema transformado é dada por:

$$dx_1(t)/dt = T_1.A(w_m).T_1^{-1}.x_1(t) + T_1.B.u(t) \quad (1.60.a)$$

$$z(t) = C.T_1^{-1}.x_1(t), \quad (1.60.b)$$

ou de modo simplificado, utilizando-se as matrizes resultantes:

$$dx_1(t)/dt = A_1(w_m).x_1(t) + B_1.u(t) \quad (1.61.a)$$

$$z(t) = C_1.x_1(t) \quad (1.61.b)$$

As matrizes do sistema resultante final (1.61) são dadas por:

$$A_1(w_m) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sigma.l_e} \cdot [r_s + \frac{r_r.mer^2}{l_r^2}] & w_d & \frac{mer.r_r}{\sigma.l_e.l_r^2} & \frac{mer.w_m}{\sigma.l_e.l_r} \\ -w_d & \frac{-1}{\sigma.l_e} \cdot [r_s + \frac{r_r.mer^2}{l_r^2}] & -\frac{mer.w_m}{\sigma.l_e.l_r} & \frac{mer.r_r}{\sigma.l_e.l_r^2} \\ \frac{r_r.mer}{l_r} & 0 & -\frac{r_r}{l_r} & (w_d - w_m) \\ 0 & \frac{r_r.mer}{l_r} & -(w_d - w_m) & -\frac{r_r}{l_r} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1/\sigma.l_m & 0 \\ 0 & 1/\sigma.l_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z(t) = [i_{sd}(t) \quad i_{sq}(t)]^T \quad u(t) = [v_{sd}(t) \quad v_{sq}(t)]^T \quad (1.62)$$

Realizando-se a discretização do sistema, os níveis de ruído de estado a serem introduzidos na simulação digital podem ser obtidos diretamente dos valores para o modelo anterior, fluxo estatórico-fluxo rotórico. Para isto, aplica-se a mesma transformação linear nas matrizes de covariância de ruído de estado $Q(t)$ e do erro de estimação inicial $P(0/0)$.

1.8) CONCLUSÃO

Neste capítulo desenvolveu-se o modelo estocástico dinâmico da máquina assíncrona no espaço de estados. O posicionamento do sistema de eixos d,q de referência foi feito no estator fixo baseado em considerações de implementação prática. A metodologia de discretização do sistema foi apresentada utilizando-se uma simplificação na obtenção da matriz transição de estados. A definição do período de amostragem foi realizado em função do comportamento dinâmico do sistema discreto da máquina (resposta transitória ao impulso unitário) para toda a faixa de velocidade. A transformação linear para obter-se o modelo de fluxos rotóricos e correntes estatóricas como variáveis de estado foi apresentada.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO DO FILTRO DISCRETO DE KALMAN

2.1) INTRODUÇÃO

A partir do modelo dinâmico discreto da máquina assíncrona deduzido no capítulo anterior (eq's. 1.55), estabelece-se os conceitos fundamentais para projeto do estimador de estados de Kalman a ser aplicado neste sistema.

O processo de estimação, numa abordagem determinística, consiste em obter-se as variáveis de estado do sistema a partir do conhecimento do modelo matemático dinâmico e da medição das grandezas de entrada e saída.

Considerando-se, no entanto, a máquina como um processo estocástico onde existem incertezas tanto na modelagem dinâmica como no processo de aquisição dos dados, analisa-se o problema da estimação numa abordagem estocástica onde o conhecimento prévio das estatísticas dos ruídos presentes no processo é fundamental para o desenvolvimento do estimador de estados. Assim, a partir dos trabalhos precursores de Kolmogorov, 1941 e Wiener, 1942, em técnicas de estimação linear por mínimos quadrados desenvolvidos numa abordagem estatística, Kalman desenvolveu uma solução recursiva para o problema original dos mínimos quadrados. A contribuição de Kalman foi considerável pois, obteve um procedimento extremamente conveniente para implementação em computador digital. Para isto, Kalman também utilizou uma abordagem probabilística, considerando o sistema como um processo

estocástico linear invariante no tempo. [44]

O filtro de Kalman é portanto, um estimador estocástico recursivo ótimo se a descrição estatística do sistema é conhecida completamente e se os ruídos presentes são considerados gaussianos.

2.2) PROBLEMA DA ESTIMAÇÃO LINEAR RECURSIVA

O modelo estocástico dinâmico discreto do sistema linearizado da máquina assíncrona pode ser escrito pelas seguintes expressões:

$$x(k+1) = F_a(k+1,k).x(k) + H_a(k).u(k) + G_a(k).w_a(k) \quad (2.1.a)$$

$$z(k) = C(k).x(k) + v(k) \quad (2.1.b)$$

Onde:

$x(k)$ é o vetor de variáveis de estado de dimensão n ;

F_a é a matriz transição de estados (ordem $n \times n$);

H_a é a matriz de entrada determinística (ordem $n \times r$);

G_a é a matriz de pesos para os ruídos de estado (ordem $n \times n$)

$u(k)$ é o vetor de entrada determinística (dimensão r)

$z(k)$ é o vetor de medições do sistema (dimensão m)

$C(k)$ é a matriz de saída do sistema (ordem $m \times n$)

$w_a(k) \approx N[0 ; Q_a(k)]$: vetor de ruído discreto gaussiano branco de média nula e covariância $Q_a(k)$ representando o ruído de estado do sistema (dimensão n).

$v(k) \approx N[0 ; R(k)]$: vetor de ruído discreto gaussiano branco de média nula e covariância $R(k)$ representando o ruído na medição das grandezas de saída do sistema (dimensão m).

Os ruídos de estado e medição são considerados independentes entre si. Estas propriedades são formalizadas pelas seguintes relações:

$$E\{w_a(t_1).w_a(t_j)^T\} = \begin{cases} Q_a(t_1) & t_1 = t_j \\ 0 & t_1 \neq t_j \end{cases} \quad (2.2)$$

$$E\{v(t_1).v(t_j)^T\} = \begin{cases} R(t_1) & t_1 = t_j \\ 0 & t_1 \neq t_j \end{cases} \quad (2.3)$$

$$E\{w_a(t_1).v(t_j)^T\} = 0 \quad \text{qualquer } t_1, t_j, \quad (2.4)$$

onde $E\{.\}$ representa a Esperança Matemática de uma determinada variável, vetor ou matriz.

$Q_a(k) \geq 0$ e $R(k) > 0$ (matrizes simétricas semi-definida e definida positiva, respectivamente).

O estado inicial do sistema é também desconhecido e pode ser modelado por um vetor aleatório, gaussiano, não correlacionado com $w_d(k)$ e $v(k)$, onde define-se uma função densidade de probabilidade gaussiana especificando-se a média $E\{x(0)\} = x_0$ e a covariância $E\{x(0).x(0)^T\} = P_0$. Assume-se portanto, x_0 , $\{w_a(k)\}$ e $\{v(k)\}$ independentes.

O problema da estimação linear recursiva ótima numa abordagem estocástica, disponíveis as seguintes informações:[36]

- Modelo matemático do sistema (eq's 1.27);
- Propriedades estatísticas dos ruídos (eq's 2.2 a 2.4);
- Conjunto de medições da saída até o instante atual t_k ;
- Condições iniciais do estado estimado $x_b(0/0) = x_0$ e covariância associada $P(0/0) = P_0$,

consiste portanto em determinar a melhor estimação possível $x_b(k/k)$ do vetor de estados $x(k)$. Realiza-se assim uma combinação linear de uma estimação anterior $[x_b(k-1/k-1)]$ e da medição da saída (vetor de observações) no tempo t_k $[z(k)]$. O conceito de melhor estimação ou estimação ótima está associado com a minimização do erro quadrático médio do vetor de estado estimado em relação aos estados reais do sistema:

$$e_b(k/k) = x_b(k/k) - x(k) \quad (2.5)$$

Onde: $x_b(k/k)$ é o vetor de estado estimado; $x(k)$ é o vetor de estado real do sistema e $e_b(k/k)$ é o vetor erro de estimação ótima para o instante t_k .

O erro de estimação verifica a seguinte expressão:

$$E\{e_b(k/k)\} = 0 \quad (2.6)$$

Definindo-se a matriz $P(k/k)$, como a covariância associada ao vetor erro de estimação:

$$P(k/k) = E\{e_b(k/k) \cdot e_b(k/k)^T\} = E\{[x_b(k/k) - x(k)] \cdot [x_b(k/k) - x(k)]^T\}, \quad (2.7)$$

o critério da minimização do erro quadrático médio também pode ser colocado como a minimização do traço da matriz de covariância $P(k/k)$:

$$\text{Tr} [P(k/k)] = \text{Tr} [E\{e_b(k/k) \cdot e_b(k/k)^T\}] = E\{e_b(k/k)^T \cdot e_b(k/k)\} \quad (2.8)$$

Como definiu-se acima, a estimação deve ser ótima no sentido de que o valor esperado da soma dos quadrados dos erros de estimação seja mínimo. Assim, $x_b(k/k)$ é calculado de modo que:

$$E\{[x_b(k/k) - x(k)]^T \cdot [x_b(k/k) - x(k)]\} = \text{mínimo} \quad (2.9)$$

O algoritmo recursivo do filtro de Kalman deve ser implementado em tempo real fornecendo os estados estimados (fluxos magnéticos) da máquina em funcionamento contínuo. A importância deste procedimento está associada a problemas de controle onde uma completa informação dos estados é necessária para sintetizar as leis de realimentação ótima.

No caso específico deste trabalho, o objetivo é utilizar a estimação do vetor de fluxo rotórico para implementação futura de controle vetorial com desacoplamento fluxo-conjugado (por exemplo, controle de campo orientado direto). Com isto, obtém-se um excelente comportamento dinâmico no controle do conjugado da máquina assíncrona (rápida resposta transitória e bom amortecimento), tornando-se equivalente a uma máquina de corrente contínua com excitação em separado.

Na prática, mesmo para um problema definido completamente em ambiente contínuo, é vantajoso transferir o problema para a aproximação discreta de modo a obter uma forma numérica e

recursiva para implementação computacional do filtro de Kalman.

2.3) CONDIÇÕES CRÍTICAS PARA O FUNCIONAMENTO DO ESTIMADOR

Para a utilização deste algoritmo de estimação estocástica, além das condições já citadas anteriormente, define-se três condições de importância fundamental e que geralmente são violadas nas situações práticas:[21]

1) O ruído gaussiano branco de medição deve ter a matriz de densidade espectral $R(k)$ definida positiva: $R(k) > 0$

2) Todos os estados do sistema devem ser observáveis. A condição de observabilidade para o sistema estocástico discreto é definida em [18]:

$$O_b(k,0) = \sum_{i=1}^k F_a(i,k)^T \cdot C(i)^T \cdot R(i)^{-1} \cdot C(i) \cdot F_a(i,k)$$

$$O_b(k,0) > 0, \quad k > 0 \quad (2.10)$$

A matriz de observabilidade $O_b(k,0)$ deve ser definida positiva. De fato, se $R(k)$ é definida positiva, um sistema estocástico é completamente observável se isto ocorrer no sentido determinístico. [27]

3) Todos os estados podem ser perturbados pelo ruído de estado. A condição de controlabilidade do sistema estocástico discreto também é definida em [18]: (O conceito de controlabilidade é o dual do conceito de observabilidade).

$$O_c(k,0) = \sum_{i=1}^k F_a(i,k)^T \cdot G_a^T(i) \cdot Q_a(i)^{-1} \cdot G_a(i) \cdot F_a(i,k)$$

$$O_c(k,0) > 0, \quad k > 0 \quad (2.11)$$

O sistema dinâmico discreto 2.1 é completamente controlável se a matriz de controlabilidade $O_c(k,0)$ for definida positiva. De modo similar à condição anterior, se $Q_a(k)$ é definida positiva, um sistema estocástico é completamente controlável se isto ocorrer no sentido determinístico. [27]

Discute-se no capítulo 5 (seção 5.2) as consequências para a situação de violação do item nº 1 citado acima, sugerindo-se alguns procedimentos para a análise numérica no tratamento de sistemas com ruído de medição desprezível [$R(k) = 0$]. Os itens 2 e 3 são abordados de modo sucinto a seguir.

A condição de observabilidade dos estados é o mais importante requisito em problemas de estimação. Através desta condição, estabelece-se que a informação dos estados pode ser melhorada pelas medições da saída utilizadas em conexão com o modelo dinâmico.

Se existem alguns estados não observáveis (autovalores não observáveis) pode-se proceder de acordo com os seguintes critérios: [21]

- Se são quantidades físicas de interesse fundamental, sensores adicionais podem ser colocados;
- Em outros casos é necessário encontrar uma representação alternativa da dinâmica do processo.

A condição de que todos os estados devem ser perturbáveis pelo ruído de estado, se não for satisfeita, pode ocasionar problemas na estabilidade do algoritmo de estimação resultante. Do ponto de vista prático, a situação de ruído de estado desprezível é bastante desejável pois tais estados não perturbáveis podem ser estimados de modo exato com o aumento do tempo de processamento. Como consequência, os ganhos ficam bastante reduzidos finalmente resultando apenas na predição dos estados. Porém, esta situação pode causar divergência do erro de estimação como se constatará no capítulo 7.

2.4) FILTRO DE KALMAN - DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

2.4.1) Modelo do sistema simplificado

Considera-se inicialmente um modelo mais simples do sistema 2.1 onde a dinâmica é descrita apenas por uma equação linear homogênea das diferenças (sistema discreto) e, para cada tempo

t_k , são disponíveis as medições de m variáveis de saída componentes do vetor $z(k)$ que são linearmente relacionadas com os estados e perturbadas por um ruído adicional de medição $v(k)$:

$$x(k+1/k) = F_a(k+1,k).x(k) \quad (2.12.a)$$

$$z(k) = C(k).x(k) + v(k) \quad (2.12.b)$$

2.4.1.1) Equações da estimação ótima

Inicialmente uma equação de estimação linear pode ser obtida a partir das características físicas (modelo) do sistema. Constitui-se assim uma predição do estado para o tempo t_{k+1} baseado na estimação ótima do estado anterior t_k :

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) \quad (2.13)$$

A medição em t_{k+1} é utilizada para modificar esta estimação constituindo-se o erro de predição (resíduo) da saída do sistema, dado pela diferença entre a medição efetiva da saída em t_{k+1} e a predição da saída para t_{k+1} com base apenas nas grandezas disponíveis no tempo t_k :

$$r(k+1/k) = z(k+1) - C(k+1).x_b(k+1/k) \quad (2.14)$$

De acordo com o estabelecimento do problema, a estimação ótima deve ser uma função linear das medições. Define-se assim uma matriz de ganhos $K(k+1)$ tal que:

$$x_b(k+1/k+1) = x_b(k+1/k) + K(k+1).[z(k+1) - C(k+1).x_b(k+1/k)] \quad (2.15)$$

Analisando-se a expressão 2.15, conclui-se que o vetor de estado estimado é formado de duas partes definidas da seguinte maneira: [36]

a) A componente $x_b(k+1/k)$ constitui a predição da estimação de $x(k+1)$, baseado apenas na dinâmica do sistema e na estimação do instante anterior $x_b(k/k)$. Este resultado é coerente pois, na ausência de informações complementares [no caso, a medição $z(k+1)$], o mais correto é igualar x_b à parte determinística da expressão de $x(k+1)$ (2.1.a). (A entrada $u(k)$ ainda não está sendo

considerada.)

b) O termo restante constitui uma correção do vetor de estado estimado, considerando-se a medição da saída para o instante t_{k+1} . Portanto, $x_b(k+1/k+1)$ é a estimativa do estado em t_{k+1} dada as medições até o instante t_{k+1} .

2.4.1.2) Expressão do erro de estimativa

Definindo-se o erro de estimativa ótima pela expressão:

$$e_b(k/k) = x_b(k/k) - x(k), \quad (2.16)$$

a matriz de ganhos $K(k+1)$ é determinada de modo que a covariância associada a este erro seja mínima. Portanto, considerando-se a expressão 2.6, a matriz de covariância do erro de estimativa é dada por:

$$P(k/k) = E\{e_b(k/k).e_b(k/k)^T\}, \text{ ou seja:} \quad (2.17)$$

$$P(k/k) = E\{[x_b(k/k) - x(k)].[x_b(k/k) - x(k)]^T\} \quad (2.18)$$

Substituindo-se as expressões 2.12.a e 2.15 em 2.16 e considerando-se o tempo t_{k+1} :

$$e_b(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) + K(k+1).[z(k+1) - C(k+1).x_b(k+1/k)] - F_a(k+1,k).x(k). \text{ Logo,} \quad (2.19)$$

$$e_b(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).e_b(k/k) - K(k+1).C(k+1).x_b(k+1/k) + K(k+1).z(k+1) \quad (2.20)$$

Usando a expressão de $z(k+1)$ (2.12.b):

$$e_b(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).e_b(k/k) - K(k+1).C(k+1).x_b(k+1/k) + K(k+1).[C(k+1).x(k+1) + v(k+1)] \quad (2.21)$$

Substituindo o valor de $x(k+1)$ da expressão 2.12.a e $x_b(k+1/k)$ da expressão 2.13 em 2.21:

$$e_b(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).e_b(k/k) - K(k+1).C(k+1).F_a(k+1,k).e_b(k/k) + K(k+1).v(k+1). \text{ Logo,} \quad (2.22)$$

$$e_b(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].F_a(k+1,k).e_b(k/k) + K(k+1).v(k+1) \quad (2.23)$$

Observa-se pela expressão 2.23 que a dinâmica do erro de estimação de estados é totalmente governada pela matriz $[I_4 - K(k+1).C(k+1)].F_a(k+1,k)$, pois $v(k+1)$ é um ruído discreto com média nula. Portanto a esperança matemática do erro é dada por:

$$E\{e_b(k+1/k+1)\} = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].F_a(k+1,k).E\{e_b(k/k)\} \quad (2.24)$$

Logo, a matriz de ganhos $K(k)$ é fundamental para o comportamento do filtro com relação à estabilidade, atenuação de ruídos em regime permanente e resposta transitória. [32]

2.4.1.3) Covariância do erro de estimação

Obtem-se a matriz de covariância do erro de estimação utilizando a expressão 2.23 na expressão 2.17:

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].F_a(k+1,k).E\{e_b(k/k).e_b(k/k)^T\}.F_a(k+1,k)^T.[I_4 - C(k+1)^T.K(k+1)^T] + K(k+1).E\{v(k+1).e_b(k/k)^T\}.F_a(k+1,k)^T.[I_4 - C(k+1)^T.K(k+1)^T] + [I - K(k+1).C(k+1)].F_a(k+1,k).E\{e_b(k/k).v(k+1)^T\}.K(k+1)^T + K(k+1).E\{v(k+1).v(k+1)^T\}.K(k+1)^T \quad (2.25)$$

Por definição das variáveis aleatórias envolvidas,

$$E\{e_b(k/k).e_b(k/k)^T\} = P(k/k), \quad (2.26)$$

representa a covariância do erro de estimação ótima calculado para o instante anterior t_k , o que enfatiza a idéia da recursividade do processo.

$$E\{v(k+1).v(k+1)^T\} = R(k+1), \quad (2.27)$$

corresponde à covariância associada ao ruído branco $v(k+1)$ que interfere na medição da saída em t_{k+1} .

A covariância do erro de predição da estimação de estado para t_{k+1} é definida por:

$$P(k+1/k) = E\{e_b(k+1/k).e_b(k+1/k)^T\} \quad (2.28)$$

Devido à independência das variáveis tem-se:

$$E\{v(k+1).e_b(k/k)^T\} = E\{e_b(k/k).v(k+1)^T\} = 0$$

$$E\{v(k+1).x_0^T\} = 0 \quad (2.29)$$

Utilizando-se as equações 2.26 a 2.29, a expressão de $P(k+1/k+1)$ (eq. 2.25) torna-se:

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].P(k+1/k).[I_4 - K(k+1).C(k+1)]^T + K(k+1).R(k+1).K(k+1)^T, \text{ com:} \quad (2.30)$$

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T \quad (2.31)$$

A matriz de covariância $P(k+1/k)$ está associada ao erro $e_b(k+1/k)$ da estimação $x_b(k+1/k)$, utilizando-se apenas as medições disponíveis em t_k . Pela expressão 2.31, observa-se que $P(k+1/k)$ é função da dinâmica do sistema. Se o sistema diverge, $P(k+1/k)$ tende a aumentar. De modo inverso, se o sistema é amortecido, $P(k+1/k)$ tende a decrescer. [36]

2.4.1.4) Expressão do ganho ótimo de Kalman

Expandindo a expressão 2.30 obtém-se:

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1).C(k+1).P(k+1/k) - P(k+1/k).C(k+1)^T .K(k+1)^T + K(k+1).[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)].K(k+1)^T \quad (2.32)$$

A matriz $[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]$ é simétrica e definida não negativa. Portanto, pode ser definida como o produto de uma matriz $S(k+1)$ por sua transposta $S(k+1)^T$:[44]

$$S(k+1).S(k+1)^T = C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1) \quad (2.33)$$

Observa-se que os últimos 3 termos da expressão de $P(k+1/k+1)$ (eq. 2.32) apresentam um forma quadrática de matrizes em termos da matriz não conhecida ainda $K(k+1)$. Introduzindo-se 2.33 na expressão 2.32 obtém-se:

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1).C(k+1).P(k+1/k) - P(k+1/k).C(k+1)^T .K(k+1)^T + K(k+1).S(k+1).S(k+1)^T.K(k+1)^T \quad (2.34)$$

Adotando-se a hipótese da existência de uma matriz $A(k+1)$ tal que: [44]

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) + [K(k+1).S(k+1) - A(k+1)].[K(k+1).S(k+1) - A(k+1)]^T - A(k+1).A(k+1)^T \quad (2.35)$$

Esta expressão é obtida de modo equivalente a se completar os quadrados de uma polinomial somando-se e subtraindo-se termos similares.

Para que as expressões 2.34 e 2.35 sejam equivalentes obtem-se:

$$A(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[S(k+1)^{-1}]^T, \quad (2.36)$$

respeitadas as seguintes condições:

$$P(k+1/k) = P(k+1/k)^T \quad (\text{matriz simétrica}) \quad (2.37)$$

$$[S(k+1)^{-1}]^T = [S(k+1)^T]^{-1} \quad (\text{se } S(k+1) \text{ é não singular}) \quad (2.38)$$

Assumindo-se que $S(k+1).S(k+1)^T > 0$ (definida positiva), o traço de $P(k+1/k+1)$ é minimizado escolhendo-se:

$$K(k+1).S(k+1) = A(k+1), \text{ ou seja:} \quad (2.39)$$

$$K(k+1).S(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[S(k+1)^{-1}]^T \quad (2.40)$$

Portanto o ganho ótimo é dado por:

$$K(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[S(k+1)^{-1}]^T.S(k+1)^{-1} \quad (2.41)$$

Em função da propriedade 2.38 da matriz $S(k+1)$ (propriedade esta de qualquer matriz quadrada não singular) [32], obtem-se:

$$\begin{aligned} [S(k+1)^{-1}]^T.S(k+1)^{-1} &= [S(k+1)^T]^{-1}.S(k+1)^{-1} = [S(k+1).S(k+1)^T]^{-1} \\ &= [C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

A expressão final para o ganho ótimo é dada por:

$$K(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1} \quad (2.43)$$

Esta equação do ganho pode ser substituída pela seguinte expressão quando $R(k)$ não for singular [$R(k) > 0$]: [36]

$$K(k+1) = P(k+1/k+1).C(k+1)^T.R(k+1)^{-1} \quad (2.44)$$

Analisando-se as duas expressões do ganho, sendo porém menos evidente na expressão 2.43, obtem-se as importantes conclusões: [36]

a) Se existe uma grande confiança nas estimações precedentes ($P(k+1/k+1)$ reduzido) e considerando-se a medição atual como duvidosa ($R(k+1)$ elevado), a matriz de ganhos K deve ser de valor reduzido.

b) De modo inverso, se as estimações precedentes são sujeitas a restrições ($P(k+1/k+1)$ elevado) e se a medição atual é considerada pouco ruidosa ($R(k+1)$ reduzido), a matriz de ganhos K deve ser de valor elevado.

2.4.1.5) Fórmula não estabilizada para a covariância do erro de estimação

Introduzindo-se a expressão de $A(k+1)$ e $K(k+1)$ na expressão 2.35, obtem-se a forma simplificada (fórmula não estabilizada) para a covariância do erro de estimação ótima:

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].P(k+1/k) \quad (2.45)$$

A matriz de covariância $P(k+1/k+1)$ é associada ao erro $e_{\hat{x}}(k+1/k+1)$ da estimação $\hat{x}_{\hat{b}}(k+1/k+1)$, considerando-se a medição da saída $z(k+1)$ no instante t_{k+1} . É constituída portanto, de dois termos:

a) $P(k+1/k)$ que é a matriz de covariância obtida, ainda sem o processamento da medição

b) $- K(k+1).C(k+1).P(k+1/k)$ que representa a influência da medição $z(k+1)$, implicando numa redução da covariância $P(k+1/k+1)$. Isto corresponde a um ganho na precisão da estimação. Substituindo-se $K(k+1)$ pela sua expressão 2.43, este termo torna-se:

$$- P(k+1/k).C(k+1)^T.[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1}.C(k+1).P(k+1/k). \quad (2.46)$$

Esta expressão é da forma $M.X.M^T$ onde X é uma matriz não negativa. Logo, $-M.X.M^T \leq 0$ (os termos da diagonal são negativos ou nulos). Conclui-se portanto que a consideração correta de uma medição, mesmo que não seja muito confiável, implica numa redução da covariância da estimação atual.

2.4.2) Síntese do filtro de Kalman para o modelo simplificado

Resume-se finalmente o algoritmo de estimação recursiva ótima de Kalman dado o modelo onde ainda não se considera entrada determinística ou ruído de estado. Apenas a equação homogênea das diferenças e o ruído de medição na equação de saída (eq's 2.12):

Filtro discreto de Kalman (equações de predição):

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) \quad (2.47)$$

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T \quad (2.48)$$

Equações de filtragem: (processamento das observações)

$$x_b(k+1/k+1) = x_b(k+1/k) + K(k+1).[z(k+1) - C(k+1).x_b(k+1/k)] \quad (2.49)$$

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].P(k+1/k) \quad (2.50)$$

Expressão do ganho ótimo de Kalman:

$$K(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1} \quad (2.51)$$

2.4.3) Extensão para função determinística e ruído de estado

Faz-se agora a extensão da análise para a introdução da função de entrada determinística do sistema $u(k)$ e do vetor de ruído de estado $w_a(k)$, gaussiano, branco com média nula e covariância especificada. Utiliza-se portanto, o modelo estocástico da máquina assíncrona definido pelo sistema de equações 2.1.

É possível supor a estimação de $x(k+1)$ baseado apenas no estado estimado anterior em t_k , $x(k)$ (ou seja, sem medição em t_{k+1}). O vetor de ruídos $w_d(k)$ é independente do estado no tempo t_k e tem média nula esperando-se portanto que este não interfira na estimação em t_k . Também $u(k)$ é uma função de controle conhecida atuando durante um período de amostragem, de modo que a estimação pode ser definida como:

$$x_b(k+1/k) = F_d(k+1,k).x_b(k/k) + H_d(k).u(k) \quad (2.52)$$

A expressão resultante de $x_b(k+1/k+1)$, ao processar-se a medição da saída para melhorar a estimação, é a mesma 2.49. O sistema completo com o modelo discreto da máquina assíncrona e a estrutura do filtro de Kalman implementado para estimação dos estados da máquina é representado na figura 2.1.

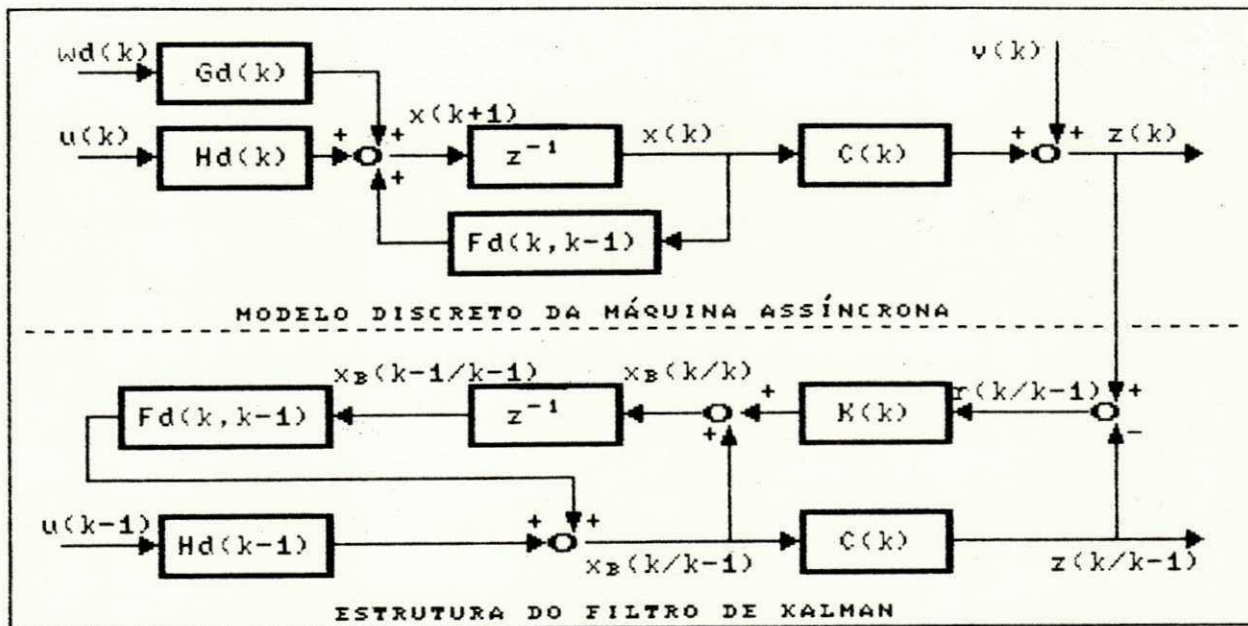


Fig. 2.1: Sistema discreto da máquina assíncrona com o estimador ótimo de Kalman

É importante estabelecer a expressão 2.52 acima numa base matemática mais rigorosa utilizando-se a abordagem estatística [18]. Isto é feito de modo detalhado no apêndice A (seção A.1).

De modo similar ao procedimento do apêndice A, define-se a

propagação da covariância condicionada $P(k+1/k)$ do erro de estimação de $x(k+1)$, anterior à medição da saída em t_{k+1} [$z(k+1)$]:

$$P(k+1/k) = E\{[x(k+1) - x_b(k+1/k)].[x(k+1) - x_b(k+1/k)]^T / Z_k\} \quad (2.53)$$

Obtem-se em [32] a expressão resultante após desenvolvida a esperança matemática condicionada (eq. 2.53):

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_a(k+1,\tau).G(\tau).Q(\tau).G(\tau)^T.F_a(k+1,\tau)^T.d\tau \quad (2.54)$$

É importante salientar que a matriz de pesos $G(t)$ e a matriz de covariância de ruído de estado $Q(t)$, utilizadas na expressão 2.54, são as originais do sistema contínuo (eq's 1.27) e não do sistema discreto aproximado [$G_a(k)$ e $Q_a(k)$]. O primeiro termo da expressão 2.54 representa a contribuição da dinâmica do sistema na propagação da covariância do erro de estimação, enquanto que o segundo termo representa a influência do ruído de estado nesta propagação. Este último termo jamais ocasiona uma redução de $P(k+1/k)$ pois a matriz $Q(t)$ é definida não negativa.

O termo de integração da equação 2.54 é de difícil implementação em tempo real, em função do esforço computacional adicional. Utiliza-se assim, uma expressão aproximada [27], tanto mais válida em regime permanente da máquina onde a matriz de transição de estados F_a fica constante. Também, quanto menor for o tempo de amostragem T_a , mais correta é a aproximação. A expressão 2.54 torna-se portanto:

$$P(k+1/k) \approx F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + Q_T(k+1), \text{ com:} \quad (2.55)$$

$$Q_T(k+1) = T_a.F_a(k+1,k).G(k).Q(k).G(k)^T.F_a(k+1,k)^T \quad (2.56)$$

O resultado da expressão 2.55 é uma propagação discreta da covariância no intervalo de 1 período de amostragem em que a função densidade de probabilidade do erro se dispersa em torno do valor médio nulo. É importante salientar que $P(k+1/k)$ é a covariância condicionada não apenas do estado estimado mas também

do erro resultante, usando-se a média condicionada como um estimador de estado. A função densidade de probabilidade da predição pode ser definida como (assumindo-se gaussiana):

$$f_{x_b(k+1)}/Z_k(\epsilon, z) = [(2.\pi)^n/2 . |P(k+1/k)|^{1/2}]^{-1} . \exp\{(-1/2) . [\epsilon - x_b(k+1/k)]^T . P(k+1/k)^{-1} . [\epsilon - x_b(k+1/k)]\} \quad (2.57)$$

Deseja-se agora incorporar a medição que torna-se disponível no tempo t_{k+1} de modo a gerar a função de densidade condicionada $f_{x_b(k+1)}/Z_{k+1}(\epsilon, z)$ e conseqüentemente a média condicionada $x_b(k+1)/Z_{k+1}$ e a covariância condicionada $P(k+1/k+1) = P(k+1)/Z_{k+1}$.

Constituindo-se o erro de estimação ótima, após processada a medição em t_{k+1} , utilizando-se as expressões 2.1.a e 2.49:

$$e_b(k+1/k+1) = x_b(k+1/k+1) - x(k+1) \quad (2.58)$$

$$e_b(k+1/k+1) = F_a(k+1, k) . x_b(k/k) + H_a(k) . u(k) + K(k+1) . [z(k+1) - C(k+1) . x_b(k+1/k)] - F_a(k+1, k) . x(k) - H_a(k) . u(k) - G_a(k) . w_a(k) \quad (2.59)$$

Utilizando-se as expressões de $z(k+1)$ (eq. 2.1.b), $x_b(k+1/k)$ (eq. 2.52) e $x(k+1)$ (eq. 2.1.a) obtém-se:

$$e_b(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1) . C(k+1)] . F_a(k+1, k) . e_b(k/k) + [K(k+1) . C(k+1) - I_4] . G_a(k) . w_a(k) + K(k+1) . v(k+1) \quad (2.60)$$

Observa-se mais uma vez que, como $w_a(k)$ e $v(k)$ possuem médias nulas, a dinâmica do erro é completamente governada pela matriz $[I_4 - K(k+1) . C(k+1)] . F_a(k+1, k)$.

A covariância do erro de estimação ótima, processada a medição em t_{k+1} , é dada portanto pela esperança matemática 2.17.

Utilizando-se a expressão 2.60 na expressão 2.17, para o tempo t_{k+1} , obtém-se:

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1) . C(k+1)] . [F_a(k+1, k) . P(k/k) . F_a(k+1, k)^T + G_a(k) . Q_a(k) . G_a(k)^T] . [I_4 - K(k+1) . C(k+1)]^T + K(k+1) . R(k+1) . K(k+1)^T \quad (2.61)$$

Na dedução da expressão 2.61, fez-se as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} E\{e_b(k/k).w_a(k)^T\} &= E\{e_b(k/k).v(k+1)^T\} = E\{w_a(k).e_b(k/k)^T\} = 0 \\ E\{w_a(k).v(k+1)^T\} &= E\{v(k+1).e_b(k/k)^T\} = E\{v(k+1).w_a(k)^T\} = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

A partir da expressão 2.61 define-se a predição da covariância para o tempo t_{k+1} :

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T \quad (2.63)$$

Observa-se que a expressão acima é equivalente à 2.54, porém utiliza-se as matrizes $G_a(k)$ e $Q_a(k)$ do modelo discreto constituindo uma forma quadrática de matrizes. Substituindo-se a eq. 2.63 em 2.61 obtém-se a mesma expressão 2.30 do caso anterior onde o sistema dinâmico era homogêneo (sem a entrada determinística e a entrada de ruído de estado). Conseqüentemente, obtém-se a mesma expressão 2.50 para a fórmula simplificada, não estabilizada, de $P(k+1/k+1)$.

Porém, a expressão da covariância do erro de predição $P(k+1/k)$ é acrescida do termo da matriz de covariância do ruído $w_a(k)$ que perturba o estado do sistema. Observa-se que este termo não ocasiona uma redução da covariância $P(k+1/k)$ devido à matriz $Q_a(k)$ ser semi-definida positiva.

Como a expressão de $P(k+1/k+1)$ não se altera, a matriz de ganhos ótimos também não se altera, sendo dada pela expressão 2.51.

A função densidade de probabilidade do estado estimado para t_{k+1} condicionado ao conjunto de vetores de medição até t_{k+1} , apresentada na Fig. 2.2, é dada por:

$$\begin{aligned} f_{x_b(k+1)}/Z_{k+1}(\epsilon/z) &= [(2.\pi)^{n/2}.|P(k+1/k+1)|^{1/2}]^{-1}. \exp\{(-1/2). \\ &[\epsilon - x_b(k+1/k+1)]^T.P(k+1/k+1)^{-1}.[\epsilon - x_b(k+1/k+1)]\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

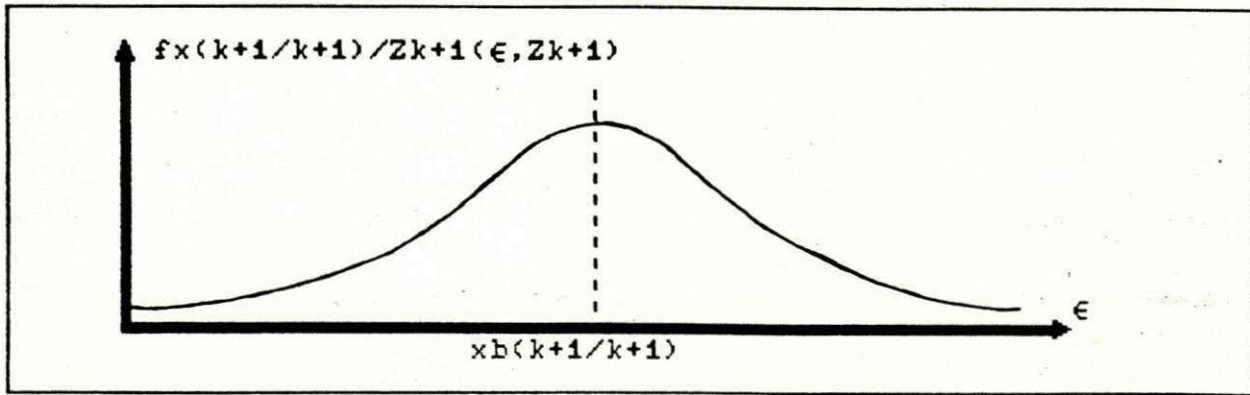


Fig. 2.2: Função densidade de probabilidade condicionada após a consideração da medição t_{k+1} : variância = $P(k+1/k+1)$.

2.4.4) Análise da expressão do resíduo de predição

Definidas todas as matrizes de covariâncias que constituem o filtro de Kalman, resta analisar a expressão do resíduo de predição da saída estimada (eq. 2.14), que multiplicada pelo ganho ótimo, resulta no termo de correção da predição da estimação de estados (eq. 2.49). Numa aplicação em tempo real, tem-se acesso a este resíduo que é considerado um vetor de variáveis aleatórias com distribuição gaussiana de probabilidade, de média nula e covariância condicionada dada por [32]:

$$E\{r(k+1/k).r^T(k+1/k)/Z_k\} = C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1) \quad (2.65)$$

A análise do funcionamento do filtro de Kalman em tempo real é realizada através do estudo de consistência estatística entre o resíduo de predição (2.14) e a estimação da covariância associada a este resíduo (eq. 2.65).

Se as variáveis de estado do modelo real são acessíveis, caso em que o modelo é simulado, pode-se acrescentar ao estudo de consistência estatística, o erro de estimação. Para o caso da máquina assíncrona, cujo vetor de estados é formado pelos componentes de fluxos estatóricos e rotóricos, este procedimento de consistência estatística entre o erro de estimação ótima e a covariância associada só é realizado na fase de ajuste fino do estimador (em simulações). Durante esta fase, as matrizes de covariância $Q(k)$ e $R(k)$ são ajustadas de modo a obter-se plena

consistência estatística entre as grandezas estimadas do sistema.

O resíduo de predição da saída e o erro de estimação devem ser variáveis aleatórias gaussianas de covariância conhecida [32]. Assim, o teste da faixa do desvio padrão pode ser aplicado no estudo de consistência. Este teste é baseado no fato de que para variáveis aleatórias com distribuição gaussiana de covariância σ^2 , aproximadamente 99 % dos valores obtidos para a variável deve estar na faixa de $\pm 3.\sigma$.

2.4.5) Índices de consistência estatística

Outra análise possível para a consistência estatística entre o erro de estimação e a previsão da covariância é obtido utilizando-se os índices apresentados em [18]:

$$RSS_j(k) = \left\{ (1/k) \cdot \sum_{i=1}^k [x_j(i) - x_{b_j}(i/i)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.66)$$

$$RMS_j(k) = \{P_{jj}(k/k)\}^{1/2} \quad (2.67)$$

onde $j = 1, 2, 3, 4$ correspondendo aos quatro estados do modelo dinâmico discreto da máquina assíncrona; x_j e x_{b_j} correspondem ao estado real e estimado pelo filtro e P_{jj} é a covariância prevista para o erro de estimação. Define-se $RSS_j(k)$ como sendo a raiz quadrada da média temporal dos quadrados dos erros de estimação até o tempo t_k e $RMS_j(k)$ como sendo a raiz quadrada do elemento da diagonal da matriz de covariância do erro de estimação. Para que a estimação estocástica apresente consistência estatística, a relação de desempenho definida por $RDP_j(k) = RSS_j(k)/RMS_j(k)$ deve tender para a unidade. A qualidade da estimação estocástica pode ser aferida através destes indicadores, além da análise de falhas em sensores ou na aquisição dos dados. A partir destas informações pode-se implementar esquemas de ajustes das matrizes de covariância de modo a prevenir a ocorrência de divergência do filtro [9] (cap. 7).

2.4.6) Condições iniciais do estimador

Algumas considerações são importantes para o perfeito funcionamento do algoritmo de estimação, principalmente com relação ao instante do início de funcionamento do estimador. Uma vez que $P(k+1/k)$ ou $P(k+1/k+1)$ torne-se definida positiva para algum instante, todas as covariâncias serão definidas positivas a partir deste instante. (embora estas possam tender assintoticamente para a singularidade). Em função disto, deve-se observar o intervalo de tempo inicial com a seguinte equação de propagação da covariância:

$$P(t_1/t_0) = F_a(t_1, t_0) \cdot P_0 \cdot F_a(t_1, t_0)^T + \int_{t_0}^{t_1} F_a(t_1, \tau) \cdot G(\tau) \cdot Q(\tau) \cdot G(\tau)^T \cdot F_a(t_1, \tau)^T \cdot d\tau, \quad (2.68)$$

e analisar-se para que condições esta expressão é definida positiva. Duas condições suficientes (mas não necessárias) são descritas: Se $P_0 > 0$ ou se o termo da integral > 0 [$Q(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ e o sistema é completamente controlável através das entradas de ruído dinâmico). Porém nenhuma destas duas condições é restritiva sendo que a principal exigência é que $P(t_1/t_0)$ seja definida positiva.

Nota-se finalmente, que o algoritmo discreto de Kalman apenas propaga e corrige com as medições, as expressões de média e covariância condicionada. No entanto, como todas as densidades de probabilidade de interesse são consideradas gaussianas, este algoritmo realmente atinge o objetivo da estimação Bayesiana de propagar toda a informação probabilística disponível no sistema.

2.4.7) Síntese do filtro de Kalman para o modelo completo

Resume-se portanto, o filtro discreto de Kalman, dado o modelo estocástico da máquina definido pelas equações 2.1:

1) Equações de predição:

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1, k) \cdot x_b(k/k) + H_a(k) \cdot u(k) \quad (2.69)$$

$$P(k+1/k) = F_d(k+1,k).P(k/k).F_d(k+1,k)^T + G_d(k).Q_d(k).G_d(k)^T \quad (2.70)$$

A expressão 2.70 pode ser dada também em função das matrizes $G(t)$ e $Q(t)$ do sistema contínuo (eq. 2.54):

$$P(k+1/k) = F_d(k+1,k).P(k/k).F_d(k+1,k)^T + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_d(k+1,\tau).G(\tau).Q(\tau).G(\tau)^T.F_d(k+1,\tau)^T.d\tau, \quad (2.71)$$

onde o termo da integral é obtido de modo aproximado por:

$$Q_T(k+1) = T_a.F_d(k+1,k).G(k).Q(k).G(k)^T.F_d(k+1,k)^T \quad (2.72)$$

2) **Equações de filtragem com o processamento da medição em t_{k+1} :**

$$x_b(k+1/k+1) = x_b(k+1/k) + K(k+1).[z(k+1) - C(k+1).x_b(k+1/k)] \quad (2.73)$$

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].P(k+1/k) \quad (2.74)$$

Uma expressão (2.30) algebricamente equivalente à 2.74, porém com condicionamento numérico superior por ser constituída de formas quadráticas das matrizes de covariâncias (fórmula estabilizada), é dada por [32]:

$$P(k+1/k+1) = [I_4 - K(k+1).C(k+1)].P(k+1/k).[I_4 - K(k+1).C(k+1)]^T + K(k+1).R(k+1).K(k+1)^T \quad (2.75)$$

3) **A expressão do ganho ótimo é dada por:**

$$K(k+1) = P(k+1/k).C(k+1)^T.[C(k+1).P(k+1/k).C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1} \quad (2.76)$$

4) **As condições iniciais para o algoritmo recursivo são dadas por:**

$$x_b(t_0/t_0) = E\{x(t_0)\} = x_{b0} \quad (2.77)$$

$$P(t_0/t_0) = E\{[x(t_0) - x_{b0}].[x(t_0) - x_{b0}]^T\} = P_0 \quad (2.78)$$

O diagrama de blocos do filtro de Kalman é apresentado na fig. 2.3

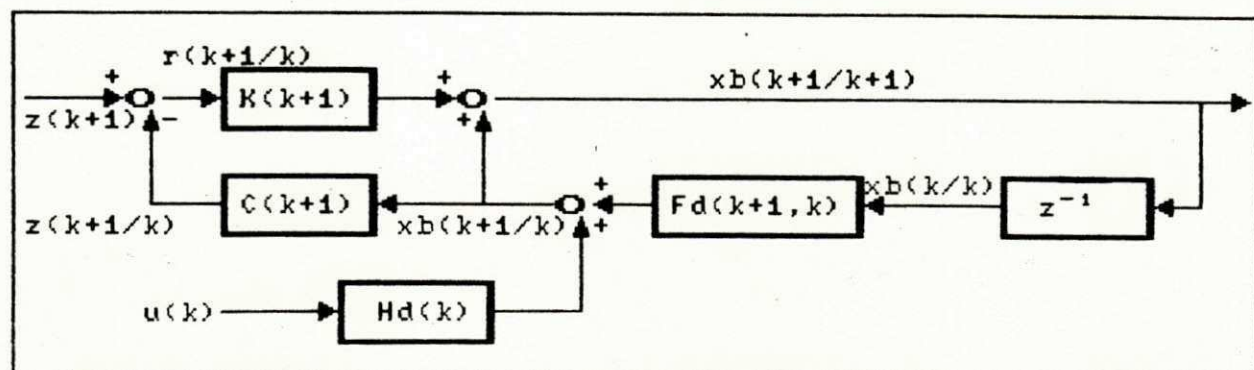


Fig. 2.3: Diagrama esquemático do filtro discreto de Kalman

Na dedução original do filtro discreto, Kalman utilizou o conceito de projeções ortogonais. Este desenvolvimento é descrito no apêndice A (seção A.2) [18]

2.5) CONCLUSÃO

Considerou-se neste capítulo, a máquina como um processo estocástico e as propriedades estatísticas das entradas de ruído foram definidas. O problema da estimação linear recursiva ótima numa abordagem estocástica foi introduzido. As condições de controlabilidade e observabilidade estocástica foram analisadas. Foi apresentado um desenvolvimento analítico completo do filtro de Kalman para estimação de fluxo magnético na máquina assíncrona. Os índices de consistência estatística para ajuste das matrizes de covariância de modo a prevenir a ocorrência de divergência do filtro foram definidos. A análise do funcionamento do filtro em tempo real foi realizada através do estudo de consistência estatística entre o resíduo de predição das correntes de saída e a estimação da sua covariância.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DE FONTES DE RUÍDOS DO SISTEMA DA MÁQUINA

3.1) INTRODUÇÃO

A simulação do sistema numa abordagem determinística, corresponde basicamente à definição do modelo matemático dinâmico da máquina, resultando num sistema de equações diferenciais não lineares a ser resolvido por um algoritmo de integração numérica. Porém na abordagem estocástica, a consideração de entradas de ruídos no sistema, implica na necessidade de um procedimento mais específico para o tratamento destas entradas de perturbação. Portanto, a simulação digital do processo estocástico contínuo assumido para representar a máquina real (eq's 1.27) necessita de geradores de sequências aleatórias para representar os ruídos a serem introduzidos no método de integração numérica. As estatísticas destas sequências devem ser calculadas, em função do método de integração, de tal forma que as variáveis de estado obtidas na integração numérica tenham estatísticas consistentes com aquelas correspondentes às do processo estocástico contínuo simulado [37]. Por outro lado, este nível de ruído tem de estar compatível com os resultados obtidos para o sistema real principalmente com relação às correntes trifásicas que devem permanecer senoidais e ao conjugado que deve apresentar um valor médio bem definido.

A introdução do ruído de estado nas equações, já em d, q da máquina não deve ocasionar o deslocamento do valor médio nulo das grandezas AC, provenientes do posicionamento do eixo d, q no

referencial estatórico fixo. Isto é justificado pelo fato de que a transformação trifásico-bifásico já fornece 3 sistemas equivalentes de eixos d,q e homopolar. Porém, como a máquina possui o estator ligado em estrela não conectado, a componente homopolar das correntes não é considerada. Portanto, a introdução dos ruídos nas equações de estado em d,q não deve ocasionar uma componente contínua nas grandezas pois esta, mesmo se existisse, seria tratada separadamente no sistema homopolar e posteriormente os efeitos seriam adicionados de modo a obter-se a composição final das grandezas.

Respeitadas estas restrições para a definição do nível de ruído a ser introduzido na simulação digital do sistema, deve-se concentrar a atenção no método específico de integração de sistemas de equações diferenciais utilizado para a representação digital da máquina real. Demonstra-se em [11] que para a integração numérica, com o método de Euler, de um sistema linear de equações diferenciais de 1ª ordem, submetido apenas a um ruído de estado (para representar a incerteza dos parâmetros do modelo) e a um ruído de medição (para representar as incertezas associadas aos dispositivos de medição), a covariância $[Q_r]$ usada no GNA (gerador de números pseudo - aleatórios) deve se relacionar com a densidade espectral $[Q]$ do ruído do sistema contínuo pela expressão:

$$Q_r = Q/h, \quad (3.1)$$

onde h = passo de integração do algoritmo de Euler e Q = covariância do ruído de estado atribuído ao sistema.

A expressão simplificada 3.1 foi obtida desenvolvendo-se uma expressão analítica para a covariância associada às variáveis de estado e comparando-se com a expressão obtida para a covariância, utilizando-se o método de integração de Euler implementado numericamente. Observa-se assim que a covariância obtida analiticamente varia linearmente com o passo de cálculo h , enquanto que a covariância obtida numericamente varia com o quadrado do passo de cálculo h . Logo deve-se aplicar um fator de correção na covariância da resolução numérica inversamente

proporcional ao passo de cálculo h de modo que os incrementos das covariâncias sejam equivalentes.

As principais conclusões obtidas em [11] se resumem em:

- a) A estatística do GNA responsável pela introdução do ruído branco, gaussiano e de média nula, relacionada ao modelo contínuo é função do método de integração utilizado;
- b) Para um dado método de integração, as características físicas do sistema podem influenciar na relação entre as covariâncias;
- c) Atenção especial deve ser empregada quando se implementar passos de cálculo variáveis em função do regime de funcionamento do sistema e também quando se utilizar técnicas de integração de ordem variável (comutação entre dois métodos diferentes de integração);
- d) A introdução de uma entrada determinística no sistema não altera o resultado apresentado na eq. 3.1 sendo que, as variáveis de estado apresentam uma oscilação em torno de um valor médio introduzido pela entrada determinística.

3.2) DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Dado um sistema de equações diferenciais lineares representativo da máquina de indução, obtido das equações 1.27 (sem a entrada determinística de tensão):

$$dx(t)/dt = A.x(t) + G.w(t) \quad (3.2)$$

A solução analítica da expressão 3.2 é dada por:

$$x(t) = F(t, t_0).x(t_0) + \int_{t_0}^t F(t, \tau).G.w(\tau)d\tau, \quad (3.3)$$

$$\text{onde } F(t, \tau) = F(t-\tau) = \exp[A.(t-\tau)] = I + A.(t-\tau) + [A(t-\tau)]^2/2! + \dots \quad (3.4)$$

representa a matriz de transição de estados do sistema entre os instantes t_0 e t .

Sabendo-se que $w(t)$ é um vetor de ruído, a equação 3.2 não é determinística e o melhor procedimento é obter-se as propriedades estatísticas de $x(t)$.

A matriz de covariância do vetor de estados para o tempo t , $P(t)$, dados os valores do instante t_0 é dada por [32]:

$$P(t) = F(t, t_0) \cdot P(t_0) \cdot F(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t F(t, \tau) \cdot G \cdot Q(\tau) \cdot G^T \cdot F(t, \tau)^T \cdot d\tau \quad (3.5)$$

Portanto, baseado na equação 3.5 acima, a propagação da covariância associada ao estado do sistema contínuo no intervalo de 1 período de amostragem (T_a) é dado por:

$$P(T_a) = F(T_a, 0) \cdot P(0) \cdot F(T_a, 0)^T + \int_0^{T_a} F(T_a, \tau) \cdot G \cdot Q \cdot G^T \cdot F(T_a, \tau)^T \cdot d\tau \quad (3.6)$$

A equação da covariância $P(t)$ (eq. 3.5), só pode ser resolvida analiticamente se o sistema é linear e de baixa ordem. Assim, para um sistema de ordem elevada e não linear, é mais conveniente obter a matriz $P(t)$ através de simulação digital onde métodos aproximados são utilizados para resolver a equação 3.5. Para que a simulação seja correta, o incremento em $P(t)$ para um dado intervalo de tempo deve corresponder ao incremento obtido usando a expressão analítica 3.5.

3.2.1) Incremento de covariância

Para determinar-se o incremento de covariância num dado intervalo de tempo, fazendo-se uma analogia entre a solução analítica e a aproximação digital, considera-se as estatísticas de 1ª e 2ª ordem do ruído de estado $w(t)$ constantes (valor médio nulo e covariância $Q(t)$).

Considerando-se t_1 como instante inicial e t_{1+1} como o instante final do intervalo de integração h , e observando-se a representação simplificada do gráfico da fig. 3.1, escreve-se:

$$DP = P(t_{i+1}) - P(t_i) = F(h,0) \cdot P(t_i) \cdot F(h,0)^T - P(t_i) +$$

$$\int_0^h F(h,\tau) \cdot G \cdot Q \cdot G^T \cdot F(h,\tau)^T \cdot d\tau \quad (3.7)$$

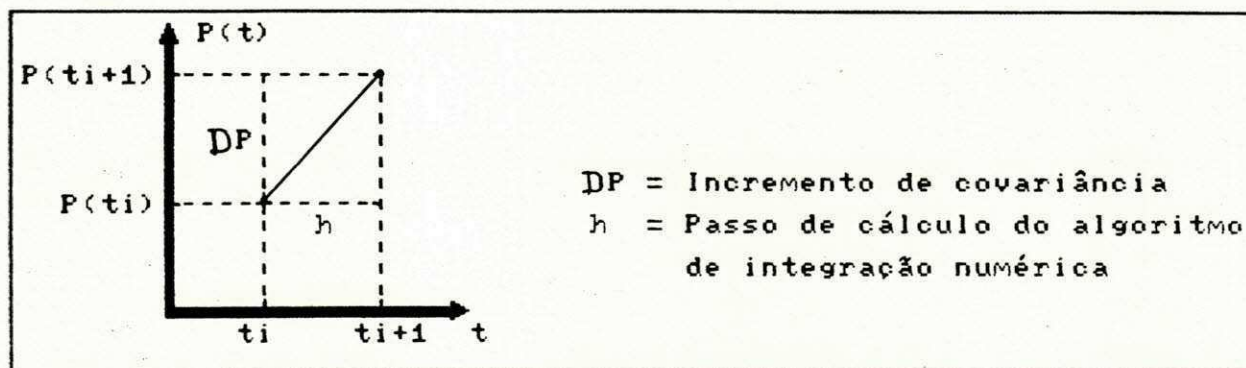


Fig. 3.1: Incremento de covariância no intervalo de integração

Em simulação digital, a covariância $P(t)$ (eq. 3.5) é aproximada por uma equação de covariância discreta [32] dada por:

$$P_r(t_{i+1}) = F_r(t_{i+1}, t_i) \cdot P_r(t_i) \cdot F_r(t_{i+1}, t_i)^T + G_r \cdot Q_r \cdot G_r^T \quad (3.8)$$

onde: Q_r é a covariância do GNA introduzido no algoritmo de integração; $P_r(\cdot)$ é a covariância de estado discreto; $F_r(\dots)$ é equivalente à equação da matriz de transição de estados (eq. 3.4) truncada na ordem n do algoritmo de integração numérica; G_r é a matriz discretizada de multiplicação do ruído de estado. Portanto, a matriz de covariância do estado da simulação digital para o tempo t_{i+1} , dados os valores do instante t_i onde $t_{i+1} - t_i = h$, é dada por:

$$P_r(t_{i+1}) = F_r(h,0) \cdot P_r(t_i) \cdot F_r(h,0)^T + G_r \cdot Q_r \cdot G_r^T \quad (3.9)$$

Assim, durante o intervalo de tempo h , o incremento da covariância de estado discreto dada por DP_r pode ser escrito como:

$$DP_r = P_r(t_{i+1}) - P_r(t_i) = F_r(h,0) \cdot P_r(t_i) \cdot F_r(h,0)^T - P_r(t_i) + G_r \cdot Q_r \cdot G_r^T \quad (3.10)$$

Para se ter uma simulação confiável, DP_r deve se igualar à DP dentro de uma tolerância especificada. Se o integrador está funcionando de modo apropriado, pode-se dizer que a matriz transição de estados obtida pela série de potências truncada se aproxima da resolução analítica dada pela exponencial de $A.h$:

$$F_r(h,0) \approx F(h,0), \text{ onde:} \quad (3.11)$$

$$F(h,0) = \exp[A.h] \quad (3.12)$$

Utilizando-se a aproximação da expressão 3.11 e considerando-se $P_r(t_1) = P(t_1)$, o que pode ser justificado pelo valor inicial conhecido de $P_r(t_1)$, onde supõe-se confiáveis os resultados obtidos para a covariância discreta nos instantes de funcionamento anteriores à t_1 , pode-se observar que os incrementos de covariância DP e DP_r (eqs. 3.7 e 3.10) são equivalentes se:

$$G_r.Q_r.G_r^T = \int_0^h F(h,\tau).G.Q.G^T.F(h,\tau)^T.d\tau \quad (3.13)$$

Se a expressão analítica da matriz transição de estados $F(...)$ é conhecida através da transformada inversa de Laplace da matriz $[s.I - A]^{-1}$, a equação 3.13 pode ser resolvida analiticamente ou numericamente. Porém esta determinação analítica é impraticável para sistemas de ordem igual ou superior a 4. Consequentemente a matriz $F(...)$ em geral não é conhecida na sua forma analítica.

Considerando-se no entanto, o fato de que o passo de cálculo h deve ser menor que a menor constante de tempo do processo que deseja-se representar numericamente, h assume valores bem pequenos, como é o caso da máquina assíncrona em estudo que possui constantes de tempo da ordem de 0.001 seg. Adota-se neste desenvolvimento o valor de $h = 5 \mu s$ em função da magnitude do autovalor da matriz dinâmica de malha aberta $[A]$ mais afastado da origem do plano s , e que é portanto responsável pela menor constante de tempo do sistema. Esta análise foi realizada para toda a faixa de velocidade da máquina, desde o rotor bloqueado ($\omega_m = 0 \text{ rad/s}$) até a velocidade nominal ($\omega_m = 120.\pi \text{ rad/s}$),

tomando-se como base a situação mais crítica (velocidade próxima do zero). Aproximando-se portanto:

$$h \rightarrow 0 \implies F(h,0) \rightarrow I \quad (3.14)$$

a equação 3.13 torna-se na forma simplificada:

$$G_r \cdot Q_r \cdot G_r^T = h \cdot G \cdot Q \cdot G^T \quad (3.15)$$

De modo análogo, verificando-se a relação 3.14, a expressão de DP_r (3.10) torna-se equivalente à expressão 3.15.

Pode-se adiantar que realizando-se um estudo mais detalhado dos algoritmos conhecidos, a necessidade de h muito pequeno pode ser relaxada para certos métodos de integração com uma maior complexidade numérica. [37]

Uma restrição que surge com relação à aplicação de modo generalizado da expressão 3.15 é que, a matriz de entrada de ruído discretizada G_r não é conhecida para qualquer caso, sendo portanto única para cada método de integração. Demonstra-se em [11] que, para um integrador de Euler na simulação digital, a matriz G_r é dada por $h \cdot G$ onde G é a matriz de entrada de ruído no sistema contínuo. Por extensão, deduz-se que o problema básico consiste em determinar a expressão para a matriz de entrada do ruído discretizada e conseqüentemente a expressão $G_r \cdot Q_r \cdot G_r^T$ considerando-se algoritmos de integração mais utilizados como Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem e Adams-Bashforth.

Com relação ao passo de cálculo h , observa-se até este ponto que a obtenção das propriedades estatísticas de 2ª ordem (correlação, covariância) baseia-se na restrição de h sendo suficientemente pequeno para permitir a aproximação da matriz transição de estados pela matriz identidade. Conclui-se portanto, que este h requerido para as estatísticas de 2ª ordem é muito menor que o valor necessário para se calcular com uma precisão razoável as propriedades estatísticas de 1ª ordem dos estados do sistema (valor médio). Por outro lado, valores muito pequenos para h podem introduzir erros de arredondamento nos cálculos realizados no microcomputador.

Restringindo-se o problema de análise para sistemas lineares ou sistemas não lineares, com um comportamento suave de modo que possam ser representados através de um processo de linearização em torno do ponto de funcionamento, a matriz transição de estados pode ser escrita numa série de potências e a análise a partir deste ponto torna-se completamente dependente do método de integração sendo utilizado.

Realiza-se no apêndice B um estudo detalhado do método de integração de Runge Kutta de 4ª ordem que é utilizado neste desenvolvimento para modelagem da máquina assíncrona em simulação digital. Obtem-se portanto deste apêndice, a expressão para o incremento de covariância da simulação digital utilizando o método de Runge - Kutta de 4ª ordem (eq. B.27):

$$DP_r = h^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n c_i^2 \right] \cdot G \cdot Q_r \cdot G^T \quad (3.16)$$

onde $n = 4$ (ordem do Runge - Kutta) e c_i 's são as constantes da média ponderada já definidas na expressão B.10 do apêndice B: $c_1 = c_4 = 1/6$ e $c_2 = c_3 = 1/3$.

Demonstra-se em [37] a validade da expressão 3.16 para um algoritmo de integração de Runge - Kutta de 2ª ordem e mostra-se por conceito intuitivo que esta pode ser estendida a um algoritmo de ordem n .

Comparando-se agora a expressão aproximada do incremento de covariância discreta DP_r (eq. 3.16) com a expressão do incremento de covariância obtida analiticamente (eq. 3.15), escreve-se a seguinte relação para equivalência dos incrementos:

$$h^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n c_i^2 \right] \cdot G \cdot Q_r \cdot G^T = h \cdot G \cdot Q \cdot G^T. \quad \text{Logo,} \quad (3.17)$$

$$Q_r = Q / \left\{ h \cdot \left[\sum_{i=1}^n c_i^2 \right] \right\} \quad (3.18)$$

$$Q_r = (3.6/h) \cdot Q \quad (3.19)$$

Como $h < 1.0$ geralmente, observa-se que a covariância de ruído a ser introduzida na simulação digital do sistema é bem

mais elevada que a covariância de ruído de estado presente no sistema contínuo, de modo que se obtenha efeitos similares nas grandezas do sistema.

Por uma metodologia de análise de erros, pode-se afirmar que o método de Runge - Kutta opera de modo satisfatório para valores mais elevados do passo de cálculo h se comparado com outros algoritmos como o Adams - Bashforth [37]. Porém, o Runge - Kutta apresenta uma maior sensibilidade à definição da covariância discreta Q_r a ser aplicada, apresentando resultados bastante discrepantes para as estatísticas de 2ª ordem se a expressão simplificada 3.1 for utilizada ao invés da expressão deduzida 3.18, mesmo que h seja feito suficientemente pequeno. Isto porém não ocorre para o algoritmo de Adams - Bashforth desde que h seja feito bem pequeno, havendo entretanto, uma certa sensibilidade ao algoritmo numérico utilizado para inicialização do Adams - Bashforth [37].

3.3) DEFINIÇÃO DO NÍVEL DE RUÍDO NO SISTEMA CONTÍNUO

Para definição do nível de ruído do sistema contínuo, adota-se a representação do processo estocástico da máquina assíncrona no referencial bifásico utilizando-se a transformada de Park na versão conservativa de potência (eq's 1.27), considerando o ruído de medição nulo ($v(t) = 0$)

Posicionando-se o sistema de eixos d,q no referencial estatórico fixo ($\omega_a=0$) obtém-se as componentes d,q alternadas para as grandezas elétricas da máquina. Resolvendo-se o sistema de equações diferenciais não lineares no referencial d,q , através do Runge - Kutta de 4ª ordem, introduz-se um ruído gaussiano branco de média nula nas equações de cálculo das derivadas das variáveis de estado. Este ruído poderia também ser introduzido nas equações no referencial trifásico. Neste caso, ao aplicar-se a transformação trifásico-bifásico, resultaria num ruído de estado correlacionado com matriz de correlação variável. Isto complicaria razoavelmente o algoritmo de estimação. A covariância do ruído de estado em d,q é ajustada de modo que as seguintes

exigências sejam atendidas com relação aos resultados obtidos para as grandezas do sistema:

a) O valor médio das grandezas alternadas no referencial d,q (estator fixo) deve permanecer nulo pois qualquer componente homopolar seria tratada num sistema em separado.

b) As formas de onda senoidais dos fluxos estatóricos, rotóricos e correntes estatóricas e rotóricas não devem ser muito distorcidas.

c) Os módulos dos fluxos estatórico e rotórico e o ângulo θ_{er} entre estes vetores devem apresentar um valor médio bem definido, a menos logicamente do ripple introduzido pelo ruído de estado.

d) O conjugado eletromagnético deve também apresentar um valor médio bem definido, sendo que é a grandeza mais sensível ao nível de ruído de estado do sistema.

Respeitando-se as restrições anteriores e alimentando-se a máquina com uma tensão senoidal com ZOH, obtem-se através de simulações sucessivas de regime permanente o seguinte nível de ruído aplicado no Runge - Kutta:

$$Q_r(t) = 25 * I_4 \quad \implies \quad \sigma_r(t) = 5.0 \quad (3.20)$$

Aplicando-se a expressão 3.19, obtem-se a covariância do ruído previsto para o sistema da máquina real (sistema contínuo)

$$Q(t) = 3.5 \times 10^{-5} * I_4 \quad (3.21)$$

O objetivo deste nível de ruído é representar as prováveis fontes de distúrbios na máquina, com relação à saturação, temperatura, distribuição de fluxo magnético, uniformidade do entreferro, composição do rotor, etc. No entanto, é importante ressaltar que todos estes fatores de distúrbios no funcionamento da máquina não podem ser modelados única e exclusivamente pela introdução do ruído de estado de média nula e não correlacionado, igualmente distribuído pelas variáveis.

3.4) COVARIÂNCIA ASSOCIADA AO CÁLCULO COMPUTACIONAL DO ESTIMADOR ÓTIMO DE KALMAN

Compondo-se o sistema da simulação digital por dois blocos principais dados por:

Bloco 1: Simulação digital da máquina assíncrona no referencial bifásico através de um Runge - Kutta de 4ª ordem com 6 equações diferenciais não lineares com coeficientes constantes.

Bloco 2: Implementação do estimador recursivo de estados de Kalman com o método de predição - correção (filtragem) para um sistema de equações lineares das diferenças de 4ª ordem modelando a máquina de indução (a velocidade é medida e introduzida no algoritmo).

Considerando-se o integrador de Runge - Kutta sem nenhum ruído aplicado, a covariância associada ao erro de estimação pelo filtro de Kalman é definida inteiramente pelo condicionamento numérico do algoritmo do filtro discreto, pela aproximação no cálculo da matriz transição de estados e também em função do comportamento da tensão de entrada aplicada no algoritmo integrador.

Observa-se na figura 3.2, os erros de estimação do fluxo estatórico do eixo direto (Φ_{sa}) e o fluxo rotórico de eixo em quadratura (Φ_{rq}) sem ruídos de estado ou medição aplicados no sistema. A consistência estatística da estimação avaliada através das relações de desempenho (RDP's) e o teste da faixa do desvio padrão, é obtida fornecendo-se as covariâncias: $Q_0 = R_0 = 0.0001$ para o algoritmo do filtro de Kalman discreto, com $P(0/0) = 0$. As matrizes de covariâncias introduzidas no filtro (eq's 2.72 e 2.76) são obtidas pelas seguintes expressões:

$$Q(k) = Q_0 * I_4 \quad e \quad R(k) = R_0 * I_2 \quad (3.22)$$

Analisando-se as relações de desempenho na figura 3.2, comprova-se a plena consistência da estimação estocástica. Porém, observa-se que o erro de estimação de estado apresenta característica determinística (correlação elevada). Isto

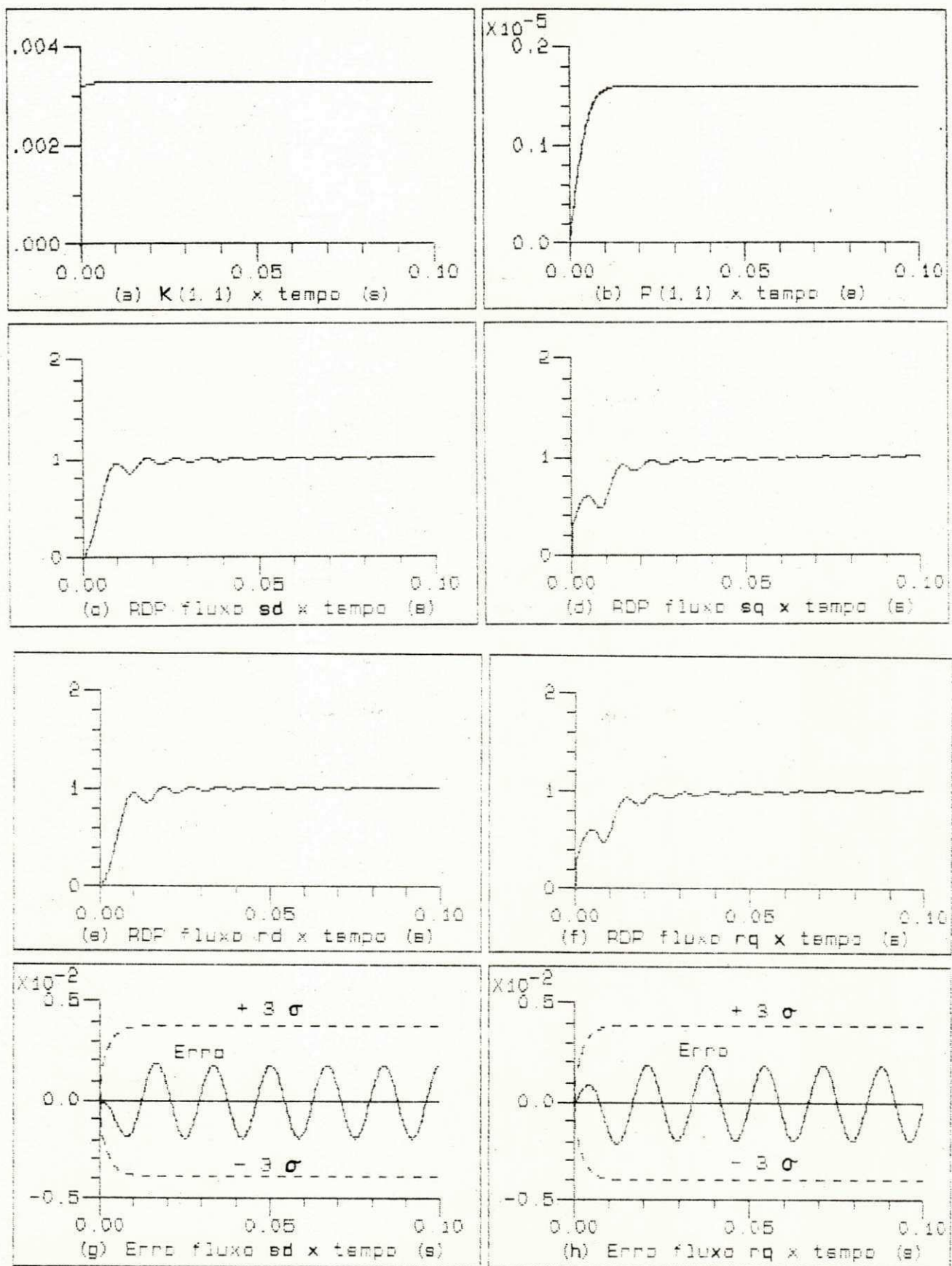


Fig. 3.2: Máquina em regime permanente sem ruídos aplicados

verifica-se em função das aproximações realizadas na obtenção do sistema discreto e da utilização de um algoritmo integrador de Runge-Kutta para a resolução do sistema de equações do modelo da máquina. Este algoritmo integrador representa uma aproximação e portanto introduz erros nos resultados para as grandezas do sistema. Observa-se entretanto, que o erro determinístico das figuras 3.2.g e 3.2.h diminui com a redução do passo de cálculo do Runge-Kutta. No apêndice H discute-se um procedimento alternativo para simulação dinâmica da máquina, utilizando-se o modelo discreto. Consequentemente, realiza-se um estudo para obtenção da consistência estatística da estimação, com o ruído de estado aplicado no sistema discreto.

Ressalta-se entretanto, que o erro determinístico verificado na fig. 3.2 está sendo compensado pelas covariâncias de ruído fornecidas para o algoritmo de estimação, de modo a obter-se a consistência estatística. Este procedimento será discutido em detalhes na seção 3.4.5.

3.4.1) Consideração da metodologia de discretização do sistema contínuo

O problema citado acima, do comportamento da tensão aplicada à entrada do sistema no algoritmo de integração, está relacionado com a definição do método de discretização do sistema contínuo.

Apresenta-se em [41] um estudo comparativo entre vários diferentes métodos de discretização para resolução de um sistema contínuo. No entanto, Martens, 1969 [41], já havia concluído que o melhor método para se representar equações diferenciais lineares na forma discreta é através da matriz de transição de estados. Porém, este método apresenta melhores resultados se a entrada do sistema contínuo permanece inalterada durante o período de amostragem T_a .

Para o caso onde a entrada do sistema contínuo varia rapidamente no tempo, o método da transição de estados apresenta erros significativos, devendo ser utilizado com uma modificação :

(método modificado da transição de estados) onde a tensão de entrada introduzida no algoritmo discreto é uma média aritmética dos valores da tensão no início e fim do intervalo: [41]

$$x_b(k+1/k) = F_d \cdot x_b(k/k) + (1/2) \cdot H_d \cdot [u(k) + u(k+1)] \quad (3.23)$$

É interessante observar a diferença significativa nos resultados que se obtém entre os métodos da transição de estado normal e modificado já que praticamente não se altera a filosofia da implementação do estimador discreto [41]. Porém, a necessidade da medição da tensão $u(k+1)$ no tempo t_{k+1} para se realizar a predição do estado $x_b(k+1/k)$ é um fator limitante na utilização do método modificado da transição de estados para discretização em tempo real.

Ressaltando-se que o sistema de interesse da máquina assíncrona, a ser discretizada, apresenta tensão de entrada senoidal, e o tempo de amostragem especificado é razoavelmente pequeno em relação ao período desta tensão, adota-se o método da transição de estados neste desenvolvimento. Entretanto, por se tratar de uma estimação também das propriedades estatísticas das grandezas do sistema, pode-se prever na matriz de covariância de ruído de estado um possível erro (determinístico) maior de estimação em função de um determinado padrão do comportamento da tensão de entrada. Este procedimento, no entanto, não é o mais correto pois o problema da polarização da estimação não é resolvido. (seção 3.4.5)

Uma restrição importante está relacionada com o período de amostragem T_s , que deve ser definido de modo que $w \cdot T_s < 0.5$, onde w pode ser a magnitude do polo de malha aberta mais distante da origem do plano s ou a frequência (rad/s) da maior componente de frequência do sinal de entrada. Também não se pode fazer o T_s muito menor que $1/5$ do valor crítico pois pode-se provocar um mau condicionamento numérico do estimador.

3.4.2) Covariância do ruído de medição

Para se determinar a covariância do ruído de medição, deve-

se levantar um grande número de medições das grandezas elétricas no próprio local de funcionamento da máquina. A partir destes dados obtidos, efetua-se as análises de correlação estatística para se definir a natureza dos ruídos de medição. [28]

Como em situações gerais, e também neste trabalho, estas médias estatísticas não são disponíveis, adota-se a caracterização de ruído gaussiano com média nula e covariância definida em função da amplitude da corrente nominal da máquina.

Adota-se assim um desvio padrão de 5% do valor da corrente nominal em regime permanente:

$$i_{n\max} = 10 \text{ A} \implies \sigma_z = 0.5 \quad (3.24)$$

Isto implica numa covariância do ruído de medição dada por:

$$R_0 = \sigma_z^2 = 0.25 \quad (3.25)$$

Este ruído é introduzido na medição das correntes i_{ea} e i_{eq} , para cada intervalo de amostragem influenciando assim no resíduo de predição da saída estimada. A covariância associada é introduzida no algoritmo do filtro de Kalman discreto.

3.4.3) Definição da covariância de estado com ruído de medição

Introduzindo-se o ruído de medição definido na seção anterior na operação do sistema, determina-se o valor da covariância do ruído de estado a ser fornecida para o algoritmo do filtro de Kalman discreto, de modo que seja obtida uma plena consistência estatística na estimação dos estados e saídas. É importante observar que não está se introduzindo ruído de estado, e portanto, está se determinando a covariância associada aos erros decorrentes do funcionamento do algoritmo discreto do filtro. No problema futuro de implementação prática do algoritmo num microcomputador emergem outros fatores importantes para a definição da covariância do ruído de estado, como os erros de arredondamentos e truncamentos nas operações de multiplicação e adição; o efeito do comprimento de palavra finito na representação das grandezas; a quantização das grandezas na

conversão analógico/digital, etc.

Introduzindo-se a covariância do ruído de medição dada pela expressão 3.25 e considerando-se a inexistência de incerteza nos valores iniciais das grandezas do estimador em relação ao sistema contínuo [$P(0/0) = 0$], implementa-se uma série de simulações em regime permanente obtendo-se:

$$Q_0 = 5.6 \times 10^{-4} \quad (3.26)$$

Para este nível de covariância sendo fornecido ao algoritmo discreto do filtro, obtém-se a consistência estatística entre o erro de estimação dos estados e das saídas e as covariâncias associadas a estes erros. Este teste estatístico é realizado através das relações de desempenho do filtro e do teste do desvio padrão. [36]

As relações de desempenho para os estados Φ_{ea} , Φ_{eq} , Φ_{ra} e Φ_{rq} e o teste do desvio padrão para as grandezas Φ_{ea} , Φ_{rq} e i_{ea} são observados na figura 3.3

3.4.4) Consideração do ruído de estado nas equações bifásicas da máquina

Introduzindo-se um ruído de estado gaussiano, branco, com média nula e covariância dimensionada por simulações (Seção 3.3), estabelece-se os seguintes níveis de covariâncias:

Covariância do ruído aplicado no Runge - Kutta:

$$Q_r(t) = 25 * I_4 \quad (3.27)$$

Covariância equivalente do ruído associado ao sistema da máquina real:

$$Q(t) = 3.5 \times 10^{-5} * I_4 \quad (3.28)$$

Covariâncias resultantes a serem fornecidas ao algoritmo do filtro de Kalman discreto (eq's 2.72 e 2.76) para se obter consistência estatística na estimação:

$$Q(k) = (5.6 \times 10^{-4}) * I_4 + (3.5 \times 10^{-5}) * I_4 \approx (6 \times 10^{-4}) * I_4 \quad (3.29)$$

$$R(k) = 0.25 * I_2 \quad (3.30)$$

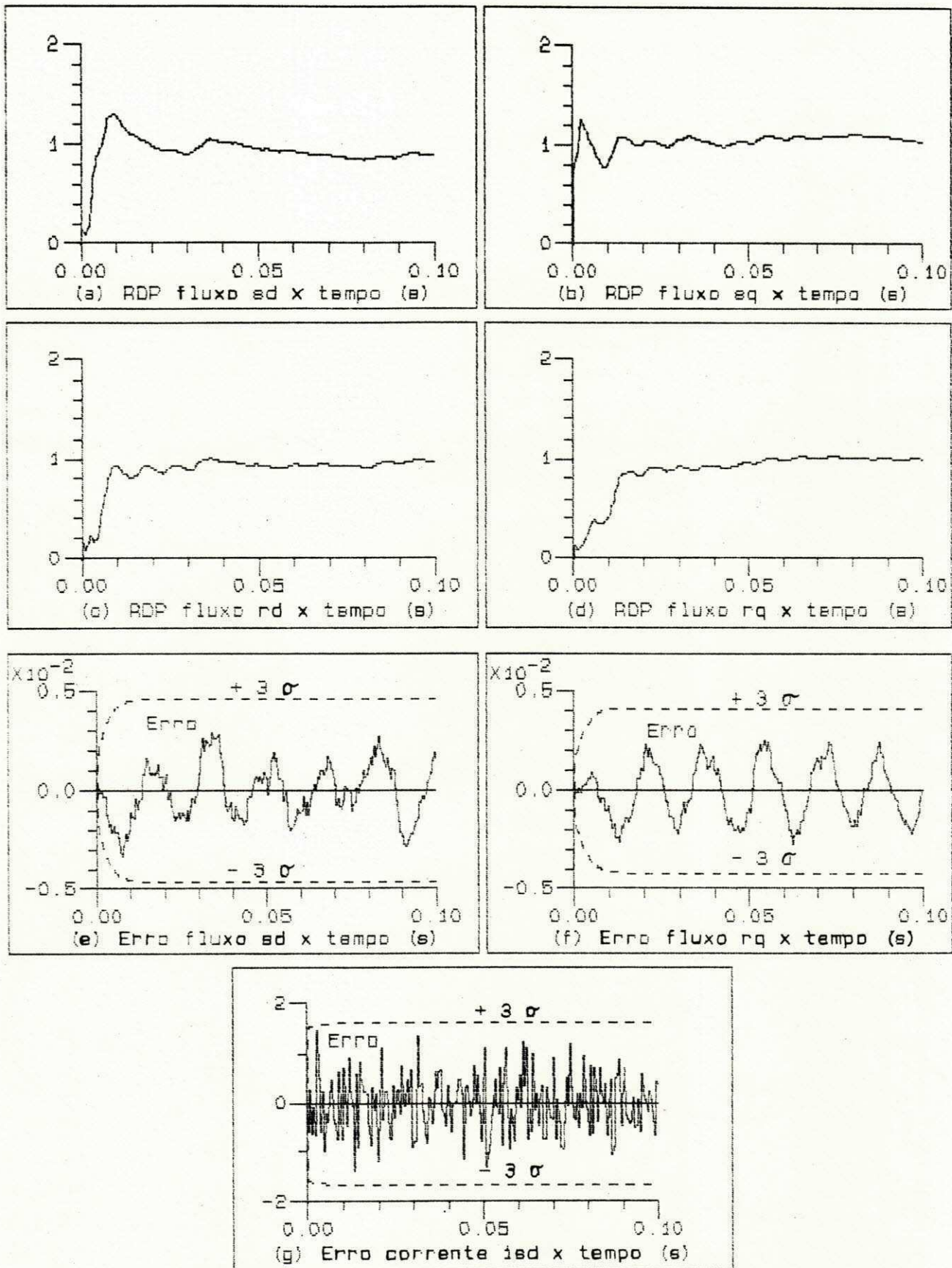


Fig. 3.3: Máquina em regime permanente com ruído de medição

A covariância $Q(k)$ está associada aos erros inerentes do processo de cálculo do algoritmo no computador juntamente com a estatística do ruído introduzido nas equações de estado do sistema.

A partir dos níveis de covariância de estado e medição (relações 3.29 e 3.30), pode-se prever que os ganhos do filtro de Kalman são bem reduzidos analisando-se a relação aproximada, válida algebricamente para o caso do sistema monovariável :

$$K \propto Q/R \quad (3.31)$$

Qualitativamente, esta proporcionalidade é válida para o caso multivariável do motor de indução, utilizando-se os elementos da diagonal das matrizes $Q(k)$ e $R(k)$ na relação algébrica 3.31. Obtem-se assim, que os ganhos são da ordem de 10^{-4} aproximadamente.

Os resultados para as relações de desempenho da estimação dos estados e o teste do desvio padrão para Φ_{ea} , Φ_{ra} e i_{ea} são apresentados na figura 3.4.

Observa-se nesta figura que os resultados da estimação estocástica são perfeitamente consistentes. A matriz de ganhos em regime permanente é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 6.919 & -4.864 \\ 4.884 & 6.919 \\ -3.323 & -5.024 \\ 5.024 & -3.323 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (3.32)$$

A forma simétrica da matriz de ganhos K é devido ao sistema do estimador de estados apresentar 4 polos complexos conjugados 2 a 2. Isto garante a simetria de comportamento entre as componentes de fluxo estatórico e as componentes de fluxo rotórico. Esta simetria será abordada mais especificamente no capítulo 6.

O comportamento do conjugado, módulo dos fluxos estatórico e

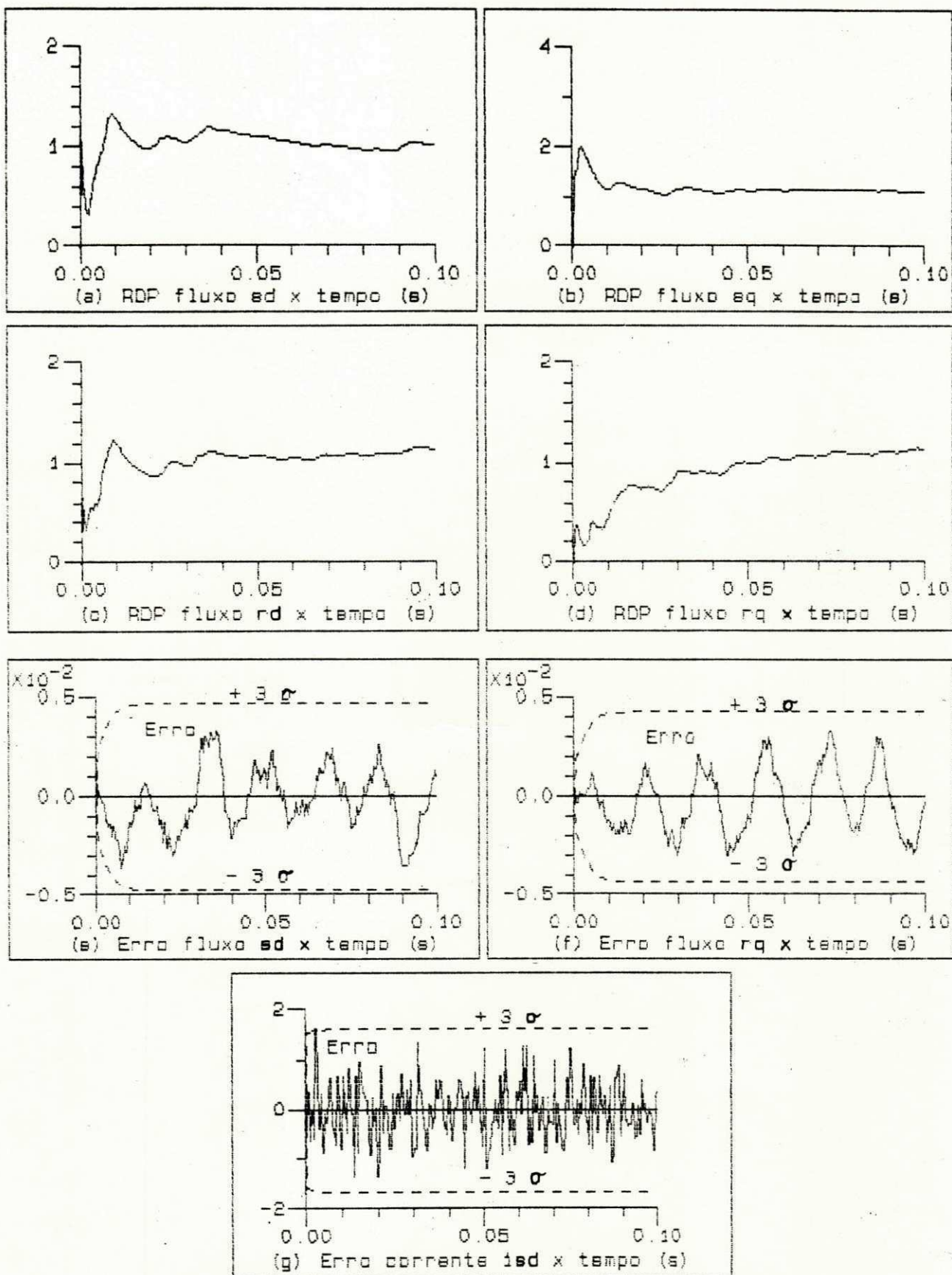


Fig. 3.4: Máquina em regime permanente com ruído de estado e medição.

rotórico e ângulo de carga (ângulo entre os vetores de fluxo estatórico e rotórico) é apresentado na figura 3.5.

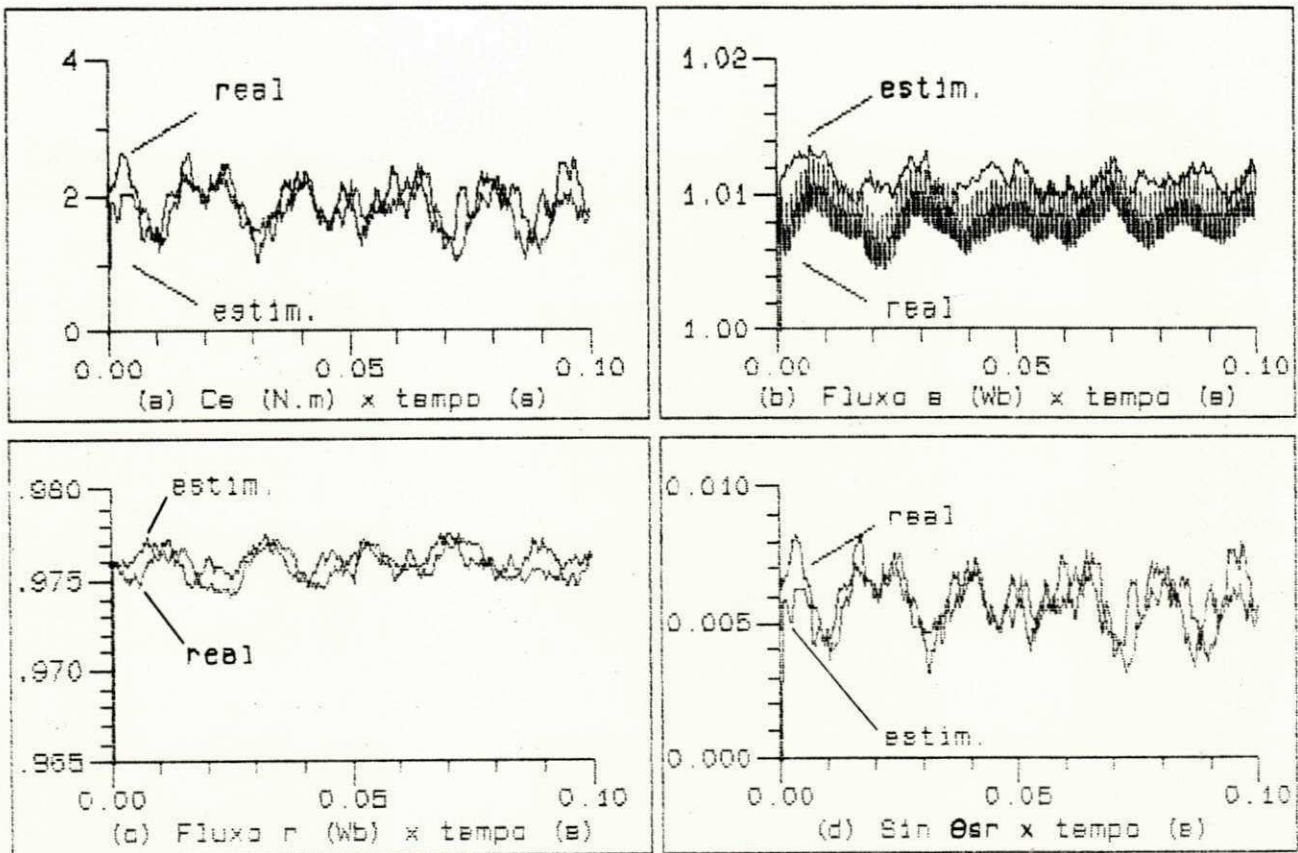


Fig. 3.5: Máquina em regime permanente com ruído de estado e medição

Observa-se nesta figura que apesar do nível de ruído de estado introduzido no sistema contínuo ser bastante reduzido, o comportamento do conjugado eletromagnético é acentuadamente afetado. O módulo do fluxo estatórico real oscila razoavelmente. Entretanto, os valores estimados do módulo do fluxo estatórico e rotórico apresentam oscilações bem menores que as grandezas reais, indicando que uma certa atenuação de ruídos é obtida no algoritmo de estimação. É importante ressaltar o melhor comportamento do fluxo rotórico real e estimado, comparado com o comportamento do fluxo estatórico.

3.4.5) Influência do comportamento da tensão de entrada no funcionamento do estimador

Para as análises realizadas até o presente item, considerou-se a tensão aplicada na máquina constante durante o período de amostragem. Este procedimento é realmente o mais importante do ponto de vista de controle digital. Porém, é interessante analisar o caso da alimentação senoidal contínua da máquina. Neste caso, tem-se um elevado erro determinístico na estimação em função da metodologia de discretização do sistema contínuo (cálculo da matriz transição de estados e comportamento da tensão nos terminais da máquina) (seção 3.4.1). Resulta-se assim, num estimador polarizado onde deve-se realizar um estudo, para compensação desta polarização, no modelo dinâmico do sistema. Outro procedimento seria o ajuste da matriz de covariância do ruído de estado para obter-se consistência estatística na estimação, compensando-se assim o erro determinístico (isto no entanto não resolve o problema da polarização).

Este último procedimento descrito é implementado neste trabalho. Assim, similarmente à introdução da seção 3.4, estabelece-se $R_0 = 1 \times 10^{-4}$ e $P(0/0) = 0$ indicando uma incerteza bastante reduzida na medição das correntes da máquina e nos valores iniciais do filtro. Por simulações sucessivas obtém-se a covariância associada à máquina real, para a qual obtém-se consistência estatística na estimação:

$$Q_0 = 2.0 \quad (3.33)$$

Os resultados para os índices de consistência estatística e superposição das variáveis de estado e de saída reais e estimadas, para simulação de partida da máquina, são apresentados nas figuras 3.6 e 3.7.

Os resultados da fig. 3.6 apresentam propriedades estatísticas consistentes, com os índices de desempenho da estimação excursionando para a unidade. Os estados estimados apresentam um erro maior em relação aos valores reais da simulação digital.

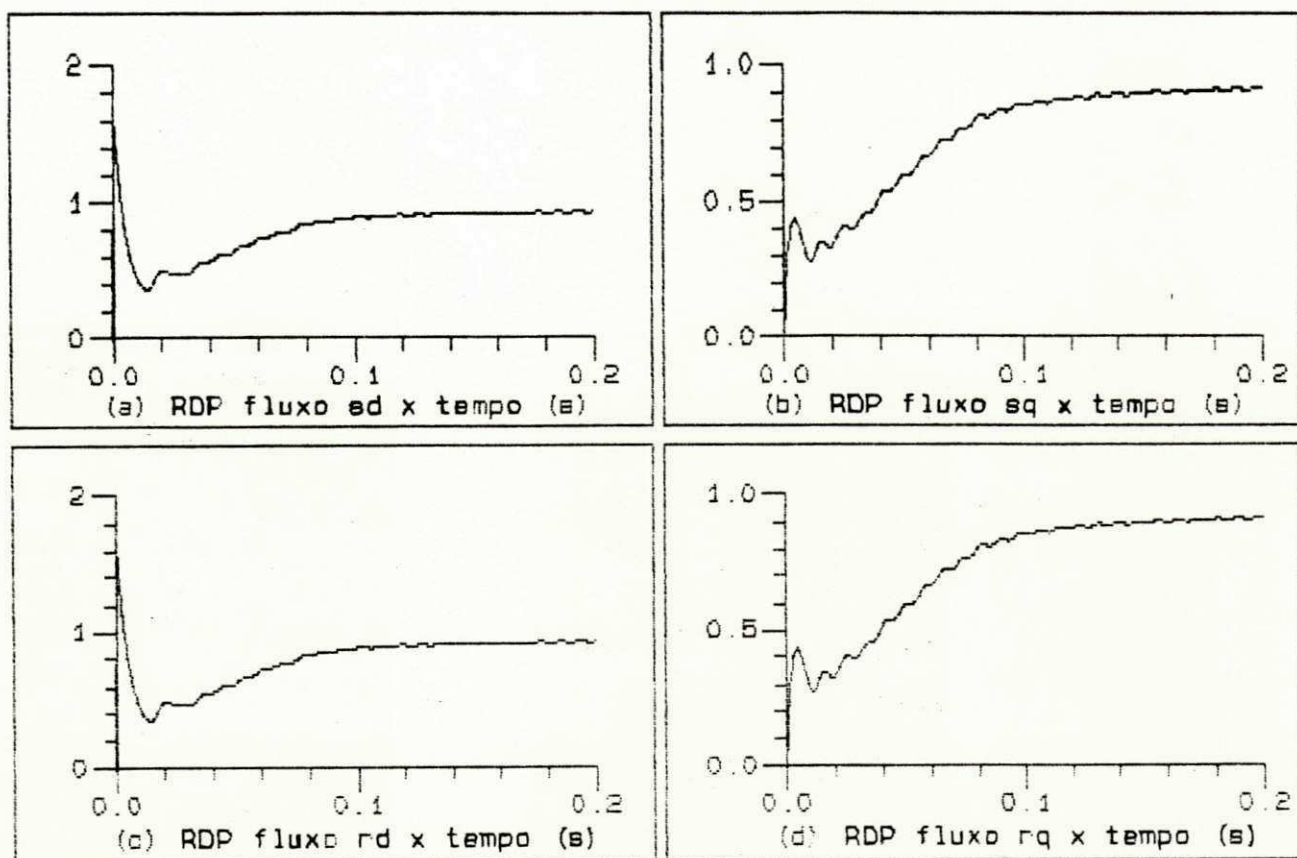


Fig. 3.6: Partida da máquina com tensão de alimentação senoidal

A polarização causada pelo comportamento da tensão nos terminais da máquina pode ser observado comparando-se as curvas reais e estimadas para o conjugado, módulo dos fluxos e ângulo de carga. As grandezas reais e estimadas apresentam as seguintes diferenças constantes, em regime permanente para a máquina em vazio ($C_r = 0$):

Conjugado eletromagnético:	2.0	N.m	
Módulo do fluxo estatórico:	0.00025	Wb	
Módulo do fluxo rotórico:	0.0015	Wb	
Senô do ângulo de carga:	0.006		(3.34)

Para o conjugado e o seno do ângulo de carga, os valores estimados são maiores que os reais. De modo inverso, para os módulos dos fluxos, os valores estimados são menores que os reais. Estes resultados podem ser observados na figura 3.8.

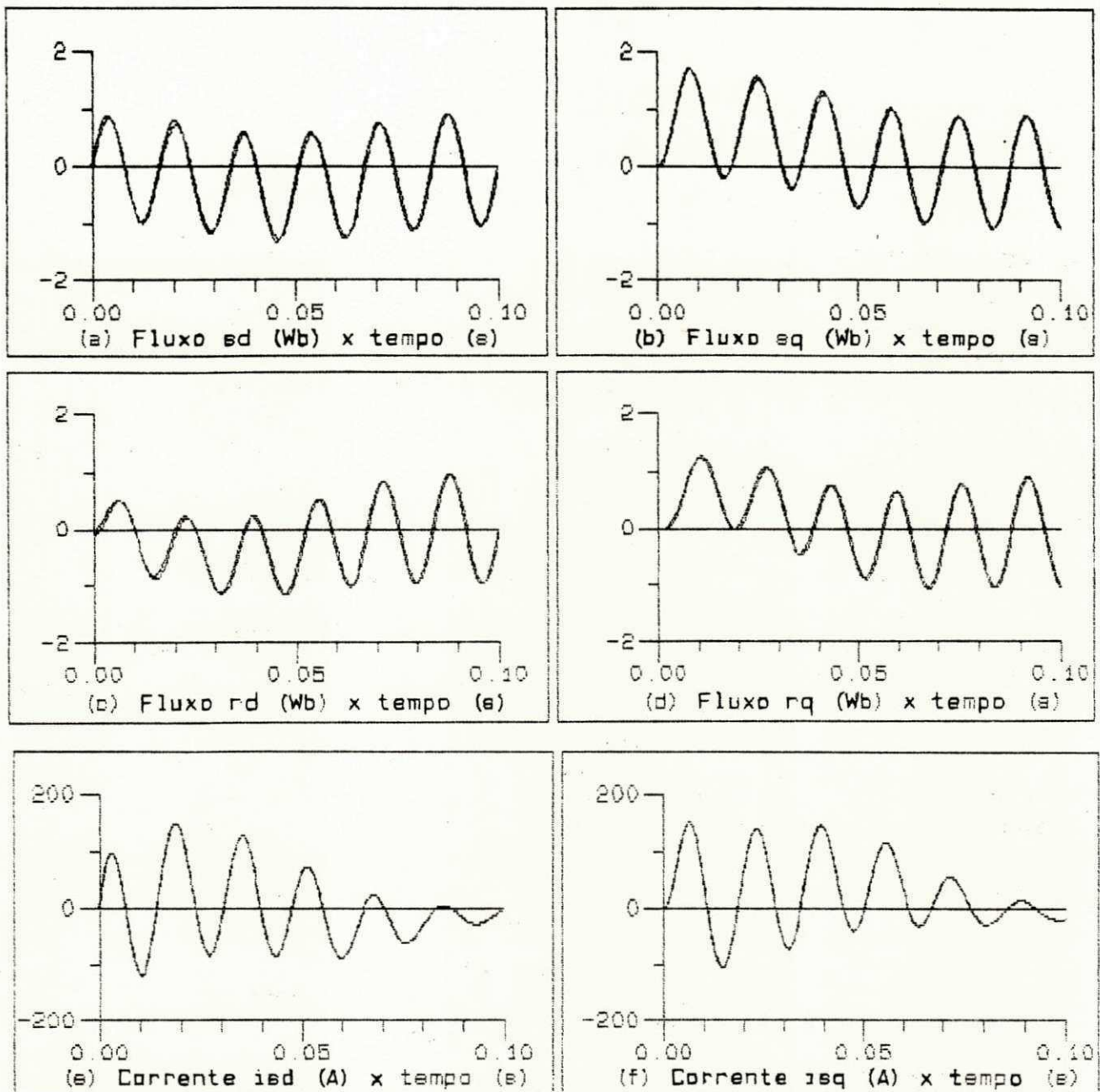


Fig. 3.7: Partida da máquina com tensão de alimentação senoidal: fluxos magnéticos e correntes reais e estimadas.

Como o conjugado de carga está nulo, o ângulo entre os vetores de fluxo estático e rotórico é bastante reduzido, havendo assim uma maior influência do erro de estimação ocasionando uma diferença de 100% entre os senos deste ângulo real e estimado. Este erro se reflete diretamente sobre o conjugado também apresentando uma diferença de 100% entre os valores real e estimado.

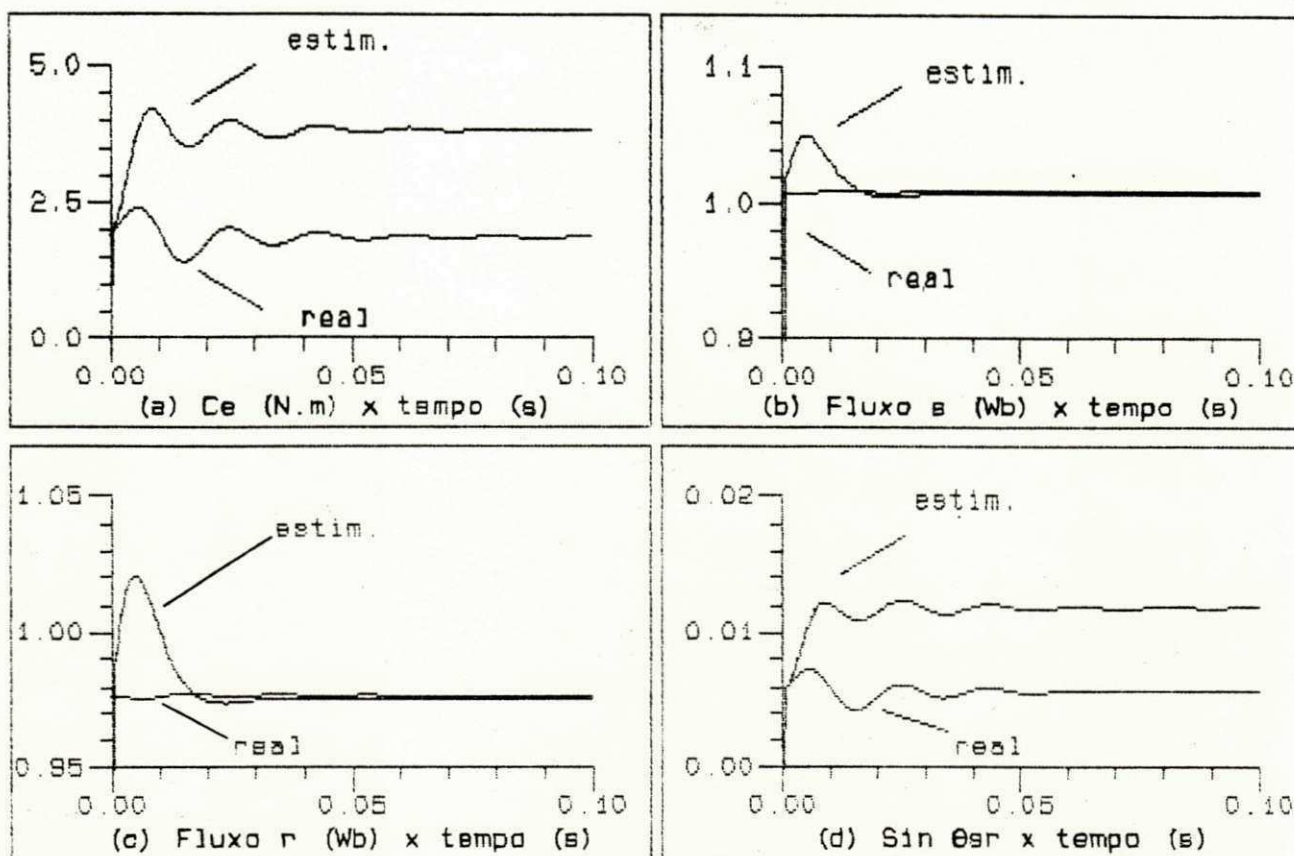


Fig. 3.8: Máquina em regime permanente com tensão de alimentação senoidal

3.4.6) Consideração do conjugado de carga com tensão senoidal

Aumentando-se o conjugado de carga para 10 Nm ocorre logicamente um aumento dos valores médios do conjugado eletromagnético e do ângulo de carga enquanto que os módulos dos fluxos não variam acentuadamente.

Assim, para um conjugado resistente ($C_r = 10$ Nm) constante, obtém-se os valores reais e estimados comparados com a situação em vazio ($C_r = 0$), e que são apresentados na tabela 3.1. Analisando-se os resultados desta tabela, obtém-se as importantes conclusões:

a) A diferença entre valores reais e estimados do conjugado e ângulo de carga independe do conjugado resistivo no motor sendo que, permanece com valores constantes de 2.0 N.m e 0.006

respectivamente. Quanto maior o conjugado de carga, menos significativa é esta diferença em relação ao valor nominal do conjugado eletromagnético:

Para $C_r = 0$ N.m \implies $DC_e = 100\%$ do valor nominal

Para $C_r = 10$ N.m \implies $DC_e = 17.4\%$ do valor nominal

b) A diferença entre valor real e estimado do módulo do fluxo estatórico é dobrada com o aumento do conjugado de 0 para 10 N.m;

C_r	C_e	$ \Phi_e $	$ \Phi_r $	$\text{sen}\theta_{er}$	DC_e	$D \Phi_e $	$D \Phi_r $	$D\text{sen}\theta_{er}$
0	1.6	1.010	0.976	0.006	-2.0	0.00025	0.0015	-0.006
10	11.5	1.005	0.971	0.036	-2.0	0.00500	0.0005	-0.006

NOMENCLATURA:

C_e , C_r , $|\Phi_e|$, $|\Phi_r|$ e $\text{sen}\theta_{er}$ são as grandezas reais

DC_e , $D|\Phi_e|$, $D|\Phi_r|$ e $D\text{sen}\theta_{er}$ são diferenças entre as grandezas reais e estimadas definindo-se portanto $DX = X - X_b$ (índice b significa grandeza estimada).

As grandezas de conjugado são dadas em N.m e as de fluxos em Wb

TABELA 3.1 - Consideração do conjugado de carga

c) A diferença entre valor real e estimado do módulo do fluxo rotórico é reduzida a 1/3 do valor em vazio com o aumento do conjugado para 10 N.m.

Estes resultados são bastante importantes no que se refere ao objetivo específico de se realizar a estimação de fluxo da máquina de indução para implementação de controle vetorial direto com desacoplamento fluxo-conjugado. Sob a ótica da implementação em tempo real, onde erros são introduzidos pela discretização, e

considerando-se a máquina operando com carga nominal, a redução do erro envolvido na estimação do fluxo rotórico acena com a possibilidade de melhor utilização do estimador em sistemas de controle com regulação de fluxo rotórico. Adiciona-se a isto, o fato de que o controle vetorial em coordenadas de fluxo rotórico apresenta uma realização bem mais simples para o desacoplamento do controle de fluxo rotórico (através da corrente estatórica i_{sd}) e do conjugado (através da corrente estatórica i_{sq}) [43]. Além disto, apresenta um excelente comportamento dinâmico com resposta rápida do conjugado a um degrau de corrente de controle i_{sq} ficando o fluxo rotórico livre de qualquer transitório. [24].[40]

Já a implementação com o controle de fluxo estatórico não é indicada nestas condições uma vez que o erro de estimação do módulo do fluxo estatórico aumenta acentuadamente com o aumento do conjugado de carga. Por outro lado, o controle vetorial em coordenadas de fluxo estatórico apresenta uma modelagem mais complexa com acoplamento mútuo da corrente i_{sq} na equação de controle do fluxo estatórico e da corrente i_{sd} na equação de controle do conjugado. Além disto, aparecem os termos de derivadas das correntes nestas duas equações. [40]

Uma observação importante é que estas considerações com relação ao controle vetorial são válidas para o caso de alimentação da máquina com o controle de corrente (correntes impostas no estator). Para o caso da alimentação da máquina em tensão, a situação se inverte inteiramente e o controle de fluxo estatórico é que pode ser implementado com um mínimo de complexidade adicional. Porém, observou-se pela análise da tabela 3.1 que o módulo do fluxo estatórico é mais sensível ao comportamento da tensão de entrada, ocorrendo um aumento do erro de estimação em regime permanente, com o aumento do conjugado de carga da máquina. Também, neste caso de alimentação em tensão, a relação torque eletromagnético-frequência de escorregamento é não linear e existe portanto um valor limite máximo do torque em regime permanente na operação com fluxo constante. Na prática porém isto não causa limitações pois este valor máximo é cerca de

várias vezes o valor nominal do torque da máquina. [40]

3.4.7) Comportamento do resíduo de predição da saída do sistema

No início da seção 3.4.5 afirmou-se que a estimação apresenta propriedades estatísticas consistentes com relação aos estados do sistema examinando-se os índices de desempenho e o teste do desvio padrão. Porém, com relação à covariância $P_{zz}(k)$ do resíduo de predição da saída, obtem-se um valor bastante elevado comparado com o erro realmente existente. Mesmo variando-se a covariância do ruído de medição de $R_0 = 0$ até $R_0 = 1.0$, onde considera-se o ruído de medição no valor limite de 10 % da corrente nominal, os resultados obtidos para $P_{zz}(k)$ são praticamente os mesmos. Este excesso de incerteza no resíduo de predição da saída comparado com o erro efetivamente obtido pode ser explicado pelo valor bastante elevado de covariância do ruído de estado Q_0 , ajustado de modo a compensar o erro determinístico verificado. Porém, a análise a seguir não está unicamente associada a este caso, sendo válida para qualquer situação de ruído de estado muito elevado. Assim, em regime permanente obtem-se o termo:

$$C.P(k+1/k).C^T = \begin{bmatrix} 46.19 & 0 \\ 0 & 46.19 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Como a covariância do resíduo de predição da saída é dado por:

$$P_{zz}(k+1/k) = C.P(k+1/k).C^T + R(k), \quad (3.36)$$

o termo $R(k)$ sendo uma matriz diagonal variando numa faixa de 0 a 1.0 não influi no resultado final de $P_{zz}(k+1/k)$ e também praticamente não influi nos termos $P(k+1/k)$, $P(k+1/k+1)$ e conseqüentemente nos ganhos $K(k+1)$. Pode-se observar que a variação no ganho é mínima em função de $R(k)$ e os índices de desempenho estatísticos também não são alterados convergindo para a unidade.

Resta explicar a não propagação da elevada covariância do

erro de predição das variáveis de estado da máquina (fluxos estatóricos e rotóricos) para o cálculo das saídas (correntes i_{sa} e i_{sq}), uma vez que estas são obtidas diretamente de uma transformação linear, via matriz C, dos estados estimados. A própria covariância prevista para o resíduo de predição indica que deveria haver um erro elevado na obtenção das saídas estimadas utilizando-se a predição dos estados $x_b(k+1/k)$.

Estes últimos resultados constituem uma particularidade na utilização do estimador de estados de Kalman para o motor de indução em estudo. Uma análise deste comportamento é realizada a seguir onde a chave da questão situa-se basicamente nos seguintes aspectos:

a) A característica simétrica de comportamento do erro com relação às variáveis de estado de um mesmo eixo (Φ_{sa} e Φ_{ra} ; Φ_{sq} e Φ_{rq}). Assim, a diferença para um dado instante entre Φ_{sa} real e estimado é igual à diferença entre Φ_{ra} real e estimado. Comportamento similar é verificado para Φ_{sq} e Φ_{rq} apenas invertendo as posições entre as curvas reais e estimadas;

b) A formação específica da matriz de saída do sistema [C].

Análise simplificada destas características:

Para um dado tempo $t = k.T_s$ define-se:

$$x_b(t/t-1) = [\Phi_{sdb} \ \Phi_{sqb} \ \Phi_{rdb} \ \Phi_{rqb}]^T \quad (3.37)$$

$$x(t) = [\Phi_{sa} \ \Phi_{sq} \ \Phi_{ra} \ \Phi_{rq}]^T$$

$$x(t) = [\Phi_{sdb} + D_d \ \Phi_{sqb} - D_q \ \Phi_{rdb} + D_d \ \Phi_{rqb} - D_q]^T \quad (3.38)$$

Onde D_d e D_q são os erros obtidos para grandezas de eixo d e de eixo q respectivamente. Estas diferenças dependem do tempo, porém, para cada t, as grandezas para um mesmo eixo apresentam diferenças iguais:

$$x(t) - x_b(t/t-1) = [D_d \ -D_q \ D_d \ -D_q] \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
 [\Phi_{ad} - \Phi_{adb}] &= [\Phi_{rd} - \Phi_{rdb}] = D_a \\
 [\Phi_{aq} - \Phi_{aqb}] &= [\Phi_{rq} - \Phi_{rqb}] = -D_a
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

considerando-se a formação específica da matriz de saída C:

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \end{bmatrix}
 \tag{3.41}$$

$$\text{Onde } a = 169.3694 \quad b = 163.9640
 \tag{3.42}$$

Expressão da saída real do sistema:

$$y(t) = C.x(t) = \begin{bmatrix} a.(\Phi_{adb} + D_a) - b.(\Phi_{rdb} + D_a) \\ a.(\Phi_{aqb} - D_a) - b.(\Phi_{rqb} - D_a) \end{bmatrix}
 \tag{3.43}$$

Cálculo da saída estimada do sistema (predição) a partir da predição do estado $x_b(t/t-1)$ para o tempo t:

$$y_b(t/t-1) = C.x_b(t/t-1) = \begin{bmatrix} a.\Phi_{adb} - b.\Phi_{rdb} \\ a.\Phi_{aqb} - b.\Phi_{rqb} \end{bmatrix}
 \tag{3.44}$$

O residuo de predição da saída é dado portanto por:

$$y(t) - y_b(t/t-1) = \begin{bmatrix} (a-b).D_a \\ (b-a).D_a \end{bmatrix}
 \tag{3.45}$$

Portanto, pela expressão 3.45, se $a \approx b$ (o que realmente se verifica na matriz C), o erro de predição da saída praticamente se anula mesmo na presença do erro de estimação das variáveis de estado.

Conclui-se que deve-se ter bastante cuidado com relação aos erros de discretização cujos efeitos não se refletem de modo significativo no residuo das correntes de saída. Como consequência, pode-se conduzir o sistema à divergência já que desvios acentuados nos estados estimados não são corrigidos

devidamente pelo termo de compensação utilizando a matriz de ganhos de estimador.

3.5) CONCLUSÃO

As estatísticas das entradas de ruído da simulação digital do sistema foram definidas de modo compatível com os resultados obtidos para o sistema real da máquina. Uma análise completa do método de integração numérica da simulação digital foi realizada, comparando-se os resultados da resolução analítica e computacional de modo a determinar-se as estatísticas de 2ª ordem dos ruídos a serem introduzidos na simulação digital. O nível de ruído de estado no sistema contínuo foi obtido através de simulações sucessivas, bem como a covariância associada ao cálculo computacional do estimador. Considerações com relação à metodologia de discretização do sistema contínuo e ao comportamento da tensão de entrada foram realizadas, principalmente em função da ocorrência de polarização do estimador. A introdução do conjugado de carga resultou numa redução do erro de estimação do fluxo rotórico. O comportamento do resíduo de predição da saída do sistema foi analisado, principalmente em situações de ruído de estado muito elevado ou erro determinístico acentuado por uma polarização do estimador.

CAPÍTULO 4

FILTRAGEM ANALÓGICA

4.1) INTRODUÇÃO

Para a implementação digital dos algoritmos de controle e estimação, existe a necessidade de uma pré-filtragem, de modo a limitar o espectro de frequência do sinal a ser amostrado. Pelo teorema de Shannon, o espectro de frequência deve ser limitado em $\omega_s/2$ onde ω_s é a frequência de amostragem. Evita-se assim a ocorrência do fenômeno de "aliasing" para o qual, as frequências interferem entre si no sinal amostrado resultando que o sinal original não pode ser mais recuperado (reconstrução do sinal que foi amostrado).

Nesta aplicação específica de estimação de fluxo utilizando-se as informações de tensão de entrada e correntes de saída da máquina, utiliza-se um filtro analógico com função de transferência de Butterworth de 1ª ordem para as medições das correntes i_{sa} e i_{sb} no estator da máquina. Os detalhes com relação à especificação e projeto do filtro serão dados nas seções seguintes.

4.2) PROCESSO DE AMOSTRAGEM

O desenvolvimento matemático do processo de amostragem de um sinal contínuo $f(t)$ pode ser visto no apêndice C. Obtem-se assim, a expressão C.8 para o espectro de frequência $F^*(j\omega)$ da função $f(t)$ modulada por um trem de impulsos unitários. Esta expressão

demonstra que ocorre uma multiplicação do espectro de frequência original (espectros complementares), para frequências múltiplas da frequência de amostragem ($m \cdot \omega_a$ com $m = \pm 1, \pm 2 \dots$) (Fig. C.6 do apêndice C).

Cita-se assim, o teorema da amostragem de Shannon:[15]

"Dada uma função do tempo $f(t)$, limitada em frequência onde ω_c é a componente mais elevada, para que não ocorra a sobreposição dos espectros de frequência fundamental e complementares do sinal amostrado, deve-se ter":

$$\omega_a \geq 2 \cdot \omega_c \quad (4.1)$$

O teorema portanto especifica o máximo valor de T_a para o qual consegue-se reconstruir o sinal original a partir do sinal amostrado ou, de uma outra maneira, estabelece que existe uma condição limite especificando um suficiente número de impulsos de amostragem que devem ser utilizados.

No caso da expressão 4.1 ser respeitada, um filtro passa baixa pode ser utilizado para extrair o espectro original do sinal contínuo, atenuando os espectros de frequências mais elevados (complementares).

4.3) CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DE FILTROS ANALÓGICOS

Existem vários procedimentos que podem ser utilizados para o projeto de filtros contínuos (analógicos), sendo que a partir destes, filtros digitais podem ser obtidos utilizando-se o método de digitalização (DIG) onde faz-se o mapeamento do plano s para o plano z .

As técnicas de aproximação à situação ideal de filtros passa-baixa contínuos mais frequentemente utilizadas são baseadas nas funções de transferência de Butterworth e Chebyshev. A forma básica utilizada para o projeto é o quadrado da função de transferência:

$$|G(j\omega)|^2 = 1 / \{1 + \epsilon^2 \cdot [C_n(j\omega)]^2\}, \quad (4.2)$$

onde $C_n(j\omega)$ é uma polinomial em ω , n é a ordem do filtro e ϵ é um parâmetro de projeto. Dependendo destes fatores, esta função de transferência pode resultar num filtro de Butterworth ou de Chebyshev. [15]

A atenuação em dB para esta função de transferência é dada por:

$$A(\text{dB}) = |20 \cdot \log|G(j\omega)|| = |10 \cdot \log|G(j\omega)|^2| = 10 \cdot \log[1 + \epsilon^2 \cdot C_n^2(j\omega)] \quad (4.3)$$

Ressaltando-se logicamente que o conceito de "atenuação" já considera o sinal negativo antecedendo a expressão de $A(\text{dB})$ (eq 4.3).

Outro dado importante com relação à função de transferência do filtro é o deslocamento de fase imposto por este no sinal de entrada: (Fig. 4.1).

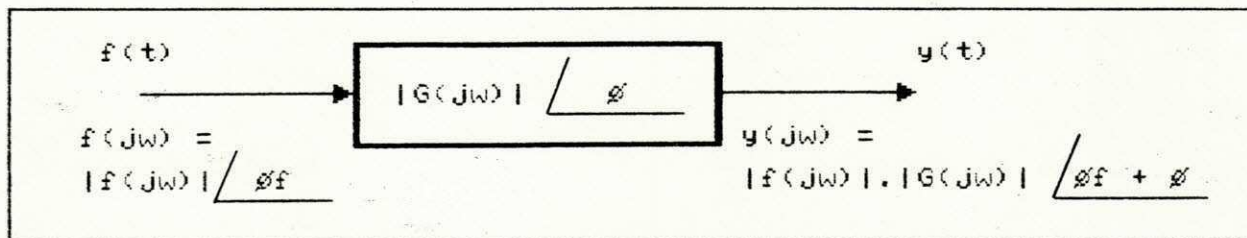


Fig. 4.1: Atenuação e deslocamento de fase devido ao filtro passa - baixa

O sinal de saída portanto, além de atenuado (em função da frequência) será defasado de um ângulo ϕ em relação ao sinal de entrada. Este deslocamento em frequência resulta num deslocamento no tempo entre os dois sinais. Geralmente na literatura técnica usa-se o termo "deslocamento de fase" referindo-se ao ângulo de defasagem e "atraso de fase" referindo-se ao tempo de atraso. O atraso de fase (T_{af}) está diretamente relacionado com a resposta transitória do filtro. Uma vez que os sistemas de controle em tempo real operam com sinais que possuem um espectro de frequência variado, é muito importante estimar o atraso introduzido em cada componente de frequência do sinal [48]. A

resposta transitória pode ser obtida da análise da resposta ao degrau unitário e ao impulso, sendo que o atraso envolvido pode ser estimado a partir dos parâmetros do projeto do filtro, utilizando-se as curvas normalizadas de resposta transitória que constam em manuais de especificações técnicas de filtros. [48]

Outro parâmetro diretamente relacionado com a resposta transitória é o "atraso de grupo" (T_{ag}) que é dado pela derivada do deslocamento de fase [$\phi(w)$] em função da frequência w :

$$T_{ag} = d\phi(w)/dw \quad (4.4)$$

Se a variação do deslocamento de fase ϕ é linear em função da frequência w , o atraso de grupo é uma constante. Este parâmetro também é fornecido nos manuais de especificação técnica de filtros, em curvas normalizadas em função do tipo e ordem do filtro.

4.3.1) Relação entre o atraso de fase (T_{af}) e o atraso de grupo (T_{ag})

O atraso de fase, provocado pelo filtro no sinal de entrada, pode ser calculado determinando-se o intervalo de tempo representado pelo deslocamento (ângulo) de fase, considerando-se que 1 período inteiro contém 360° :

$$T_{af} = (\phi/360^\circ) \cdot (1/f_x) = (\phi/360^\circ) \cdot T_x, \quad (4.5)$$

onde: $T_x = 1/f_x$ (período da componente de frequência f_x do sinal de entrada).

Em termos do ângulo ϕ em radianos e w_x (a frequência componente do sinal de entrada em rad/s) obtém-se:

$$T_{af} = \phi/w_x \quad (4.6)$$

Assim, quando um sinal é aplicado num filtro, de modo que a forma de onda fundamental seja preservada, as frequências da banda de passagem (frequências que realmente definem o espectro original do sinal) devem apresentar um mesmo tempo de atraso (atraso de fase). Do contrário, o sinal será seriamente

distorcido. É lógico que a situação ideal seria que o filtro passa-baixa não introduzisse nenhum deslocamento de fase e conseqüentemente atraso de fase. Porém, como no caso prático não se consegue eliminar este efeito, deseja-se que pelo menos T_{af} seja constante para qualquer componente de frequência (ω_x) na banda de passagem. Como o atraso de grupo é definido por $d\phi/d\omega$, basta que este seja constante na banda de passagem para se ter uma boa recuperação do sinal [48]. É importante ressaltar que na prática os filtros não possuem uma característica completamente constante na banda de passagem, apresentando uma relação não linear entre o deslocamento de fase e a frequência. Como consequência, sinais de complexidade muito elevada (vasto espectro de frequência) serão razoavelmente distorcidos.

O atraso de fase é um parâmetro muito importante para a análise do funcionamento do estimador com o filtro analógico processando as correntes de saída da máquina. Estas correntes, introduzidas no algoritmo (microcomputador) de estimação, apresentam um atraso constante em relação à predição das correntes de saída da máquina realizada na expressão do resíduo (eq. 2.14). Portanto, o estimador apresenta um erro constante (polarização). Uma técnica para compensação deste erro será vista no capítulo 5, porém é importante que a ordem do filtro analógico não seja muito elevada.

O atraso de fase nominal (T_{af}) de um filtro passa-baixa para frequências bem abaixo da frequência de corte (ω_c) pode ser aproximado pela expressão 4.7 geralmente com uma precisão de 25%

$$T_{\text{af}} \text{ (ms)} \approx 125.n/f_c \text{ (Hz)} \quad (4.7)$$

onde n = ordem do filtro; f_c = frequência de corte do projeto em Hz.

4.3.2) Requisitos do filtro passa-baixa ideal

Sob a ótica da impossibilidade de implementação de um filtro teoricamente ideal, especifica-se os seguintes requisitos básicos:

a) Amplitude constante e o mais próximo possível da unidade na banda de passagem e zero para as frequências superiores (Fig 4.2.a)

b) Deslocamento de fase linear na banda de passagem (Fig. 4.2.b)

c) Atraso de grupo constante na banda de passagem e zero na banda de bloqueio (Fig. 4.2.c)

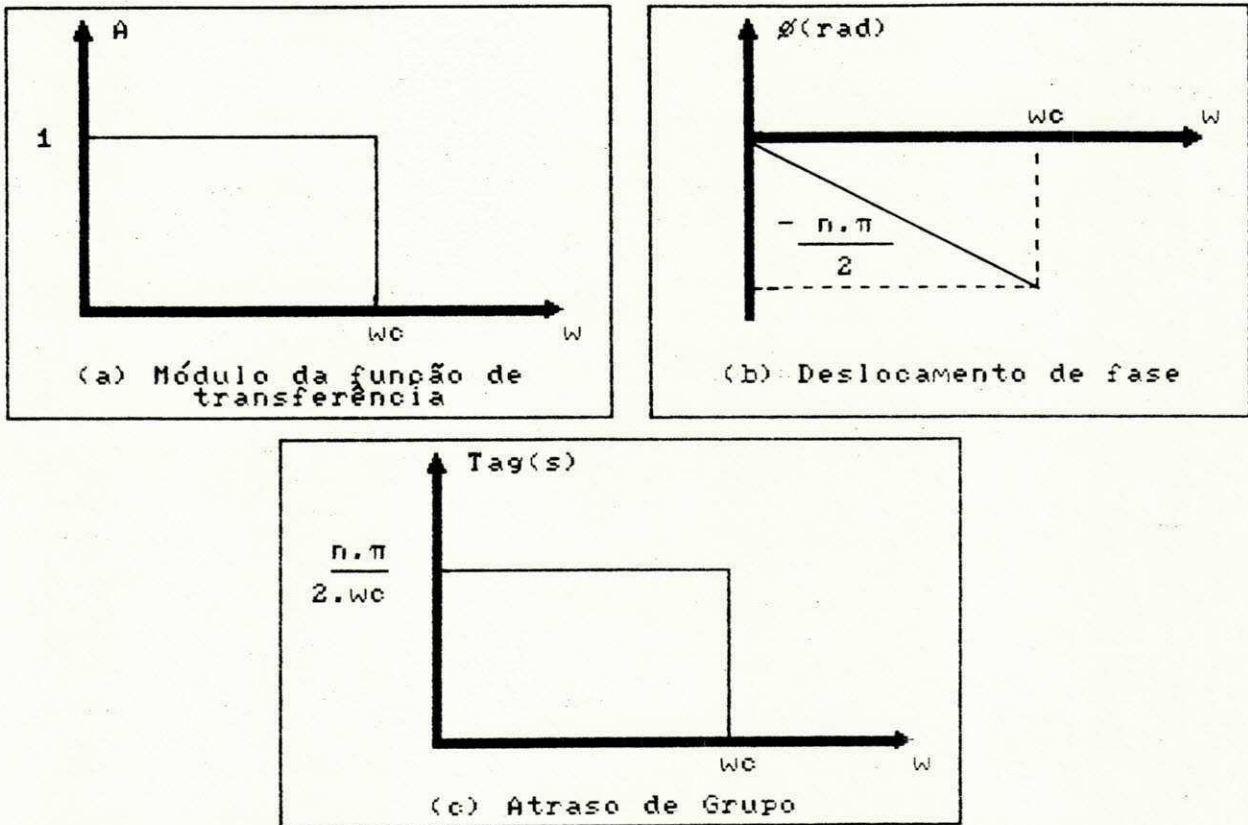


Fig. 4.2: Características do filtro passa - baixa ideal.

Com base nos gráficos apresentados na Fig 4.2 e que são função dos parâmetros de projeto do filtro, pode-se prever a resposta transitória ao degrau unitário apresentado na fig. 4.3:

- o atraso de tempo para atingir metade da amplitude final é dado por $n.\pi/2.w_c$ que é justamente o atraso de grupo.

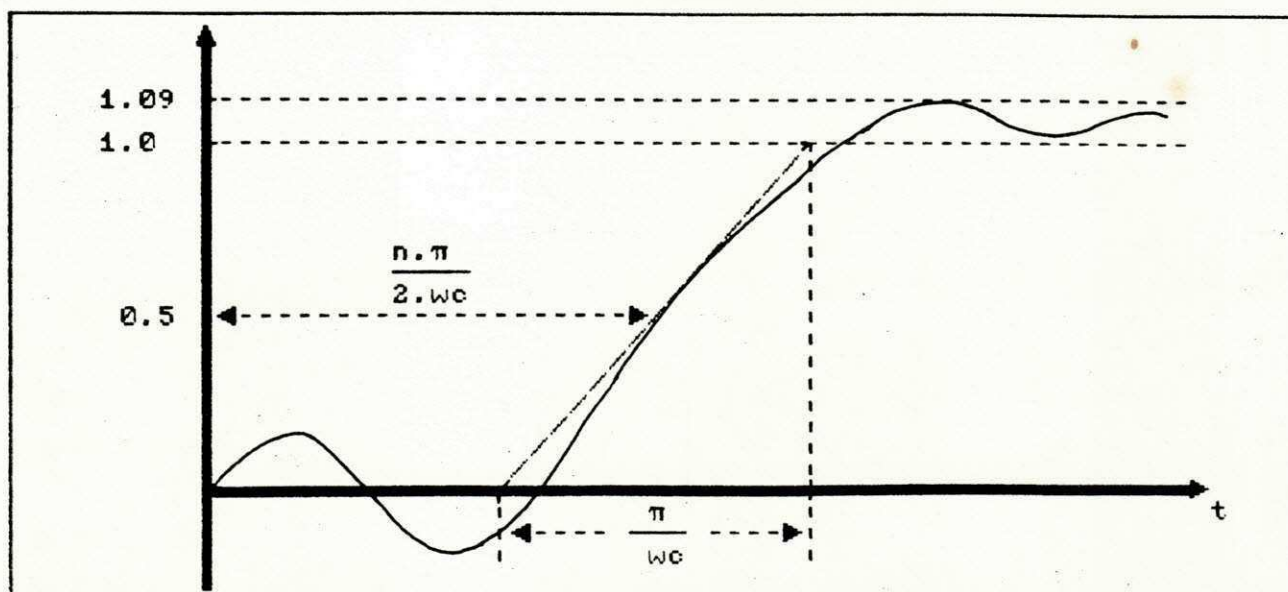


Fig. 4.3: Resposta ao degrau unitário do filtro passa - baixa ideal

- O intervalo de tempo necessário para excursionar de 0 a 1 de amplitude com a declividade da tangente no ponto de amplitude média é dado por π/ω_c (tempo de subida T_r). Conclui-se que $T_r \propto 1/\omega_c$ e portanto, quanto mais rigoroso for o filtro com relação à rejeição de frequência (ω_c pequeno) maior será o atraso de tempo ocasionado pelo filtro no sinal de entrada.

Uma expressão aproximada para o tempo de subida em função da frequência de corte é dada por: [48]

$$T_r(s) \approx 0.35/f_c(\text{Hz}) \quad (4.8)$$

Existe portanto um compromisso entre a resposta em frequência (módulo e fase) e a resposta transitória temporal do filtro. O sobresinal máximo (overshoot) seguido por oscilações sustentadas, com um período de $2.\pi/\omega_c$ que decaem até fixar-se na unidade, são indesejáveis se o filtro foi projetado para processar pulsos com a menor distorção possível. Com relação ao objetivo fundamental deste trabalho, visando aplicações em controle vetorial desacoplado fluxo - conjugado, a dinâmica de resposta a um transitório da corrente de controle do conjugado pode ser bastante piorada se o atraso introduzido pelo filtro na medição das correntes i_{ed} , i_{eq} for significativo.

4.3.3) Função de transferência de Butterworth

A definição desta função de transferência baseia-se fundamentalmente no princípio de que a amplitude mantida constante e unitária na faixa de passagem é o mais importante requisito de projeto sendo que, a atenuação para as frequências fora da faixa de passagem representa uma consideração secundária.

Com base na forma padrão do filtro (eq. 4.2) obtém-se a função de transferência de Butterworth definindo-se: [15]

$$\epsilon = 1 \quad C_n = (w/w_c)^n. \quad \text{Assim,} \quad (4.9)$$

$$|G(jw)|^2 = 1/\{1 + (w/w_c)^{2n}\} \quad (4.10)$$

onde w_c = frequência de corte do filtro.

Esta função de transferência normalizada apresenta atenuação de 3dB quando $w = w_c$ e possui todos os polos localizados no círculo unitário. Utilizando-se esta expressão, a aproximação para o filtro passa-baixa ideal se deteriora a proporção que se excursiona da banda de passagem para a banda de transição e finalmente para a banda de bloqueio.

A expressão da atenuação em dB é dada por:

$$A(\text{dB}) = 10 \cdot \log\{1 + (w/w_c)^{2n}\} \quad (4.11)$$

Escrevendo-se a função de transferência na forma de um produto usando-se todos os polos obtém-se:

$$G(s) = D_o / \left\{ \prod_{k=1}^n (s - p_k) \right\} \quad (4.12)$$

Os polos podem ser obtidos pela expressão:

$$p_k = -\sin(2k-1) \cdot \pi/2n + j \cdot \cos(2k-1) \cdot \pi/2n \quad k=1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Estes polos, variando-se o k , são igualmente espaçados de π/n rad num círculo de raio unitário centrado na origem do plano s .

No projeto do filtro, D_0 é a constante de normalização para o ganho em regime permanente e que deve ser feito unitário para frequência nula.

O filtro analógico de Butterworth foi selecionado para esta aplicação em função das seguintes considerações de projeto (ver fig. 4.4):

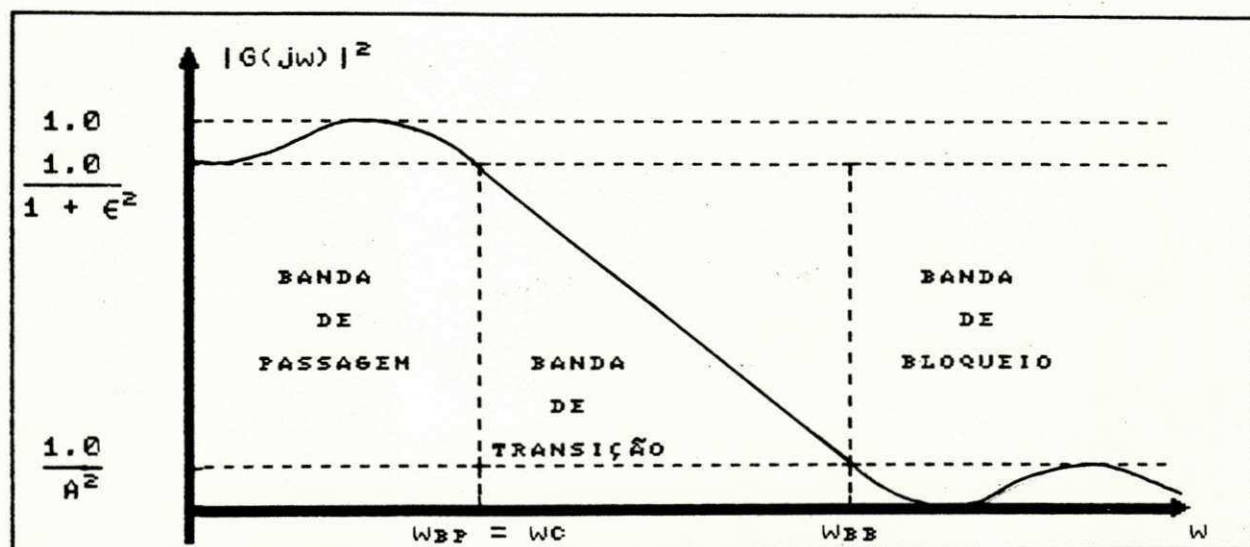


Fig. 4.4: Resposta em frequência do filtro analógico

a) O ganho na faixa de passagem deve ser unitário e o mais constante possível. (o filtro de Chebyshev introduz um comportamento oscilatório do ganho na faixa de passagem denominado "ripple");

b) O requisito de resposta em frequência não é muito crítico e portanto a taxa de decaimento do ganho na faixa de transição não necessita ser muito acentuada (caso contrário justificaria a utilização do filtro de Chebyshev que apresenta uma característica de resposta em frequência bem mais retangular na vizinhança de ω_C);

c) Atraso de grupo o mais constante possível na faixa de passagem (Chebyshev introduz uma maior variação do atraso de grupo nesta faixa sendo tanto pior quanto maior foi o ripple associado com o ganho também nesta faixa);

d) Para um dado conjunto de especificações técnicas, o filtro de Chebyshev aplica-se com uma ordem n inferior ao filtro de Butterworth, sendo que a taxa de redução do ganho na faixa de transição é bem mais acentuada. Entretanto, o filtro de Butterworth é bem mais simples do ponto de vista matemático, sendo que os valores dos elementos são bastante práticos e menos críticos comparados com o filtro de Chebyshev e com os demais tipos de filtros. [15],[48]

As considerações "a" e "c" são fundamentais para o funcionamento do estimador de estados com o filtro analógico processando a saída do sistema. Como a predição das correntes reais da máquina é comparada com as correntes filtradas (para o sistema não aumentado), um ganho não unitário ou variável e um elevado atraso de grupo influenciaria significativamente no erro de estimação. Uma possível técnica de compensação, sem considerar-se o aumento da ordem do estimador, seria de implementação bem mais dificultada.

Concluindo-se, a menos de utilizações onde a exigência de resposta em frequência na vizinhança de ω_c seja muito rigorosa, a função de transferência de Butterworth deve ser utilizada devido às suas características favoráveis.

4.3.4) Critérios de projeto do filtro analógico

Tendo em vista o problema de implementação prática do algoritmo de estimação estocástica utilizando o filtro de Kalman, onde a diferença entre as correntes reais da máquina e as correntes obtidas na saída do filtro analógico deve ser convenientemente tratada, opta-se pela utilização de um filtro de 1ª ordem. A utilização de filtros de ordens superiores implicaria num aumento da complexidade do algoritmo de estimação, embora a característica de resposta em frequência estaria sendo bastante melhorada.

As especificações de projeto partem da premissa de que o filtro é de 1ª ordem e são baseadas nas curvas de resposta em frequência: característica de atenuação (Anexo I) e atraso de

grupo (Anexo II). [48]

Com referência à figura 4.4 especifica-se:

a) w_{bp} = frequência limite da banda de passagem e que neste caso é também definida como frequência de corte (w_c). O filtro apresenta um módulo de $(1/2)^*$ ou - 3dB nesta frequência. Esta é definida através das curvas do anexo I considerando-se o fato de que as correntes medidas apresentam uma fundamental de 60 Hz, já que o sistema da máquina assíncrona está sendo resolvido no estator fixo ($w_a = 0$). Assim deve-se ter a menor atenuação possível para $f_x = 60$ Hz. Estabelece-se portanto:

$$w_c = 2.\pi.300 \text{ rad/s} \quad (4.14)$$

b) w_{bb} = frequência limite da banda de bloqueio: definida em função do teorema de Shannon considerando-se a frequência de amostragem $w_a = 2$ kHz:

$$w_{bb} = 2.\pi.1000 \text{ rad/s} \quad (\text{com atenuação de } 10 \text{ dB}) \quad (4.15)$$

c) ϵ = Parâmetro associado com o nível de oscilação do ganho permitido para a faixa de passagem.

$$\epsilon = 1 \quad (\text{Ganho constante}) \quad (4.16)$$

O projeto do filtro a partir das especificações acima pode ser sintetizado nas seguintes etapas:

1) Cálculo do parâmetro "A" que define a atenuação para a frequência limite da banda de bloqueio: (fig. 4.4).

$$|G(jw)|^2 = 1/A^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Atenuação} = 10 \text{ dB} \quad (4.17)$$

$$A = 3.1623 \quad (4.18)$$

2) Determinação da ordem necessária para o filtro:

Obtem-se em [15] as seguintes relações simplificadas compatibilizando a ordem do filtro com as especificações de resposta em frequência:

$$r = \epsilon / \{(A^2 + 1)^{1/2}\} = 0.3015 \quad (4.19)$$

$$L = \omega_{bp}/\omega_{bb} = 0.3 \quad (4.20)$$

$$n = \ln(r)/\ln(L) = 0.9958 \approx 1.0 \quad (4.21)$$

onde r e L são parâmetros intermediários e n é a ordem necessária para o filtro.

Conclui-se pela expressão 4.21 que o filtro de 1ª ordem atende plenamente aos requisitos de projeto.

3) Localização do polo único no círculo unitário: Pela expressão 4.13 para $k = 1$ obtém-se $p_1 = -1.0$.

4) Aplicação de uma fator de escalonamento de frequência (FEF) [48] de modo a se obter o filtro no verdadeiro espectro de frequência de trabalho, já que todo o projeto é feito com base nas características normalizadas onde, para ω_c (normalizada) = 1 rad/s a atenuação é de 3 dB:

$$\text{FEF} = \text{Frequência de projeto}/\text{Frequência normalizada} \quad (4.22)$$

$$\text{FEF} = 2.\pi.f_c / 1 \text{ rad/s} = 600.\pi \quad (4.23)$$

onde f_c = frequência de corte em Hz

A apresentação de filtros na forma normalizada baseia-se no fato de que, uma dada resposta deste pode ser deslocada para uma nova faixa de frequência apenas dividindo os elementos reativos que compõem o filtro por um fator de escalonamento de frequência (FEF). Assim, os elementos físicos (indutores e capacitores) são obtidos dividindo-se todos os elementos reativos pelo FEF, ficando inalterados os resistores e os amplificadores operacionais (estes últimos no caso de um filtro ativo).

As curvas características apresentadas em manuais de especificação técnica para filtros normalizados devem ser transformadas pelo FEF de acordo com procedimentos específicos. [48]

O escalonamento em frequência também é aplicado aos polos e zeros (estes últimos se existirem) sendo que as raízes do filtro real são obtidas multiplicando-se as raízes do filtro normalizado

pelo FEF.

5) Aplicação de um escalonamento de impedâncias de modo que os valores dos componentes do filtro sejam práticos do ponto de vista comercial. Este procedimento é justificado pela afirmação de que dada uma rede linear ativa ou passiva, a função de transferência não se altera se todos os resistores e indutores são multiplicados por um fator Z e se todos os capacitores são divididos pelo mesmo fator.

6) Localização do polo do filtro real:

$$p_1 = 600.\pi.(-1) = - 600.\pi \quad (4.24)$$

7) Definição da função de transferência do filtro:

$$G(s) = 600.\pi/(s + 600.\pi), \quad (4.25)$$

obtida de modo que o ganho seja unitário para $\omega = 0$, ou seja, atenuação de 0 dB para frequências nulas.

Analisando-se a função de transferência do filtro acima, obtém-se as seguintes atenuações para as frequências que definem o projeto:

$f = 60 \text{ Hz}$	\Longrightarrow	$A(\text{dB}) = 0.17$	
$f = 300 \text{ Hz}$	\Longrightarrow	$A(\text{dB}) = 3.01$	
$f = 1 \text{ kHz}$	\Longrightarrow	$A(\text{dB}) = 10.83$	(4.26)

8) Estimação do atraso de grupo introduzido na banda de passagem do filtro: (Anexo II)

Faixa de frequência de 0 a 60 Hz: $T_{ag} \approx 0.53 \text{ ms}$
(aproximadamente constante);

Faixa de frequência de 60 a 300 Hz: T_{ag} reduz até atingir 0.26 ms em 300 Hz;

Faixa de frequência de 300 a 1000 Hz: T_{ag} reduz até atingir 0.16 ms em 1kHz.

(4.27)

Conclui-se pela figura do anexo II que o filtro de 1ª ordem apresenta um melhor comportamento de atraso de grupo em relação

aos filtros de ordens superiores. Isto é muito importante do ponto de vista de implementação prática do estimador de Kalman.

4.3.5) Análise harmônica dos sinais filtrados

De modo a testar o desempenho do filtro projetado com relação à resposta em frequência, injeta-se sinais cossenoidais puros ou combinados com frequências ajustáveis, realizando-se a análise harmônica dos sinais de entrada e de saída do filtro. A tabela 4.1 sintetiza os resultados obtidos sendo que estes, embora não sejam completamente coincidentes com os valores teóricos esperados, apresentam um comportamento compatível com as expressões 4.26 e 4.27. Também injeta-se um sinal com forma de onda quadrada no filtro e os resultados obtidos na saída fazendo-se a análise harmônica são coerentes.

SINAL		TERMINAL	ANÁLISE HARMÔNICA			
AMP(A)	FRQ(Hz)		MOD(A)	$\theta(^{\circ})$	$T_{af}(ms)$	ATEN.(dB)
10	60	ENTRADA	10.0157	0.5	-	-
		SAÍDA	9.1534	-11.76	0.54	0.78
10	300	ENTRADA	10.0116	0.24	-	-
		SAÍDA	5.9195	-46.17	0.43	4.56
10	1000	ENTRADA	9.9658	-2.35	-	-
		SAÍDA	2.6781	-74.39	0.20	11.41

NOMENCLATURA: AMP = amplitude; FRQ = frequência; MOD = módulo
 θ = ângulo de fase; T_{af} = atraso de fase; ATEN = atenuação

TABELA 4.1: Análise harmônica dos sinais cossenoidais

4.3.6) Introdução do filtro analógico na simulação digital do sistema

A simulação digital do filtro analógico aplicado às correntes estatóricas i_{sa} e i_{sq} da máquina é realizada tomando-se a função de transferência da equação 4.25 e escrevendo-se no espaço de estados: (já considerando uma matriz de transferência para as 2 correntes)

$$\begin{aligned} dx_f(t)/dt &= A_f \cdot x_f(t) + B_f \cdot u_f(t) \\ y_f(t) &= C_f \cdot x_f(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $x_f(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ $y_f(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$

$$A_f = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Com $a = 600 \cdot \pi$.

Portanto, este sistema de equações diferenciais de 2ª ordem (fig. 4.5) será integrado por um algoritmo de Runge - Kutta de 4ª ordem, cujo passo de cálculo é função da constante de tempo do filtro:

$$\tau_f = 1/a = 530.52 \ \mu\text{seg} \quad (4.30)$$

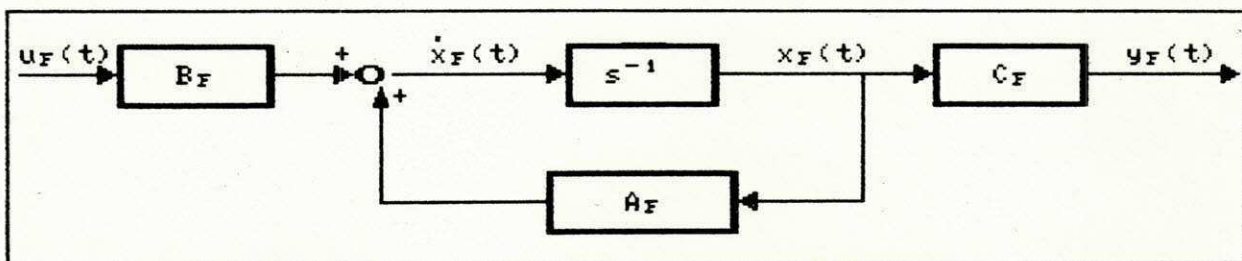


Fig. 4.5: Representação no espaço de estados do filtro analógico

Na simulação digital realizada, o módulo da máquina assíncrona é acoplado ao módulo do filtro analógico e como este último apresenta uma folga razoável em termos de constante de tempo, foi adotado o mesmo passo de cálculo do módulo máquina

(5 μ s) para resolução do módulo conjunto.

A entrada do filtro analógico (fig. 4.6) é dada pela adição da corrente bifásica da máquina com o ruído de medição injetado:

$$u_r(t) = [i_{sd}(t) + v_1(t) \quad i_{sq}(t) + v_2(t)]^T, \quad (4.31)$$

onde $v(t)$ é o vetor de ruído de medição já definido no cap. 3.

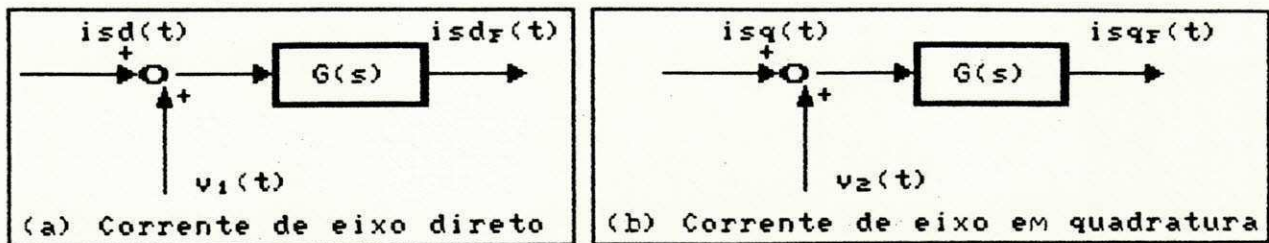


Fig. 4.6: Filtragem analógica das correntes bifásicas da máquina

4.4) CONCLUSÃO

Neste capítulo foi projetado o filtro analógico para as correntes estatóricas bifásicas a serem medidas e introduzidas no microcomputador. O filtro de Butterworth de 1ª ordem foi definido em função das características de atenuação, resposta transitória e também em função da implementação do algoritmo do filtro de Kalman com ordem aumentada pelo sistema do filtro analógico. O modelo do filtro analógico no espaço de estados foi apresentado.

CAPÍTULO 5

FILTRO DE KALMAN COM ORDEM MODIFICADA

5.1) INTRODUÇÃO

Em algumas aplicações práticas, a utilização de modelos de ruído gaussiano branco para todas as incertezas presentes num sistema real pode não ser satisfatória. A modelagem de uma função específica de correlação de ruído no tempo e de um determinado comportamento da densidade espectral de potência (podendo ser um ruído de banda limitada) é obtida através de um sistema linear invariante no tempo (filtro formador ou "shapping filter" identificado neste trabalho pelo índice m) de dinâmica conhecida processando um ruído gaussiano branco. [18]

Pode-se por exemplo, desejar a modelagem de um ruído de medição correlacionado exponencialmente no tempo, apresentando uma densidade espectral de potência constante numa faixa limitada de frequência (banda limitada). Este ruído ($v_c(t)$) é introduzido na medição das correntes da máquina (Fig. 5.1) sendo que, o modelo é facilmente obtido a partir de um sistema de atraso de 1ª ordem processando um ruído gaussiano branco produzido por um gerador de números aleatórios (v_m). O nível de correlação do ruído e a extensão da banda de passagem são ajustados na matriz dinâmica do filtro formador (A_m).

O filtro de Kalman deve portanto, ter a ordem aumentada pelas variáveis de estado do filtro formador, onde o ruído de medição $v_c(t)$ correlacionado passa a constituir um ruído de

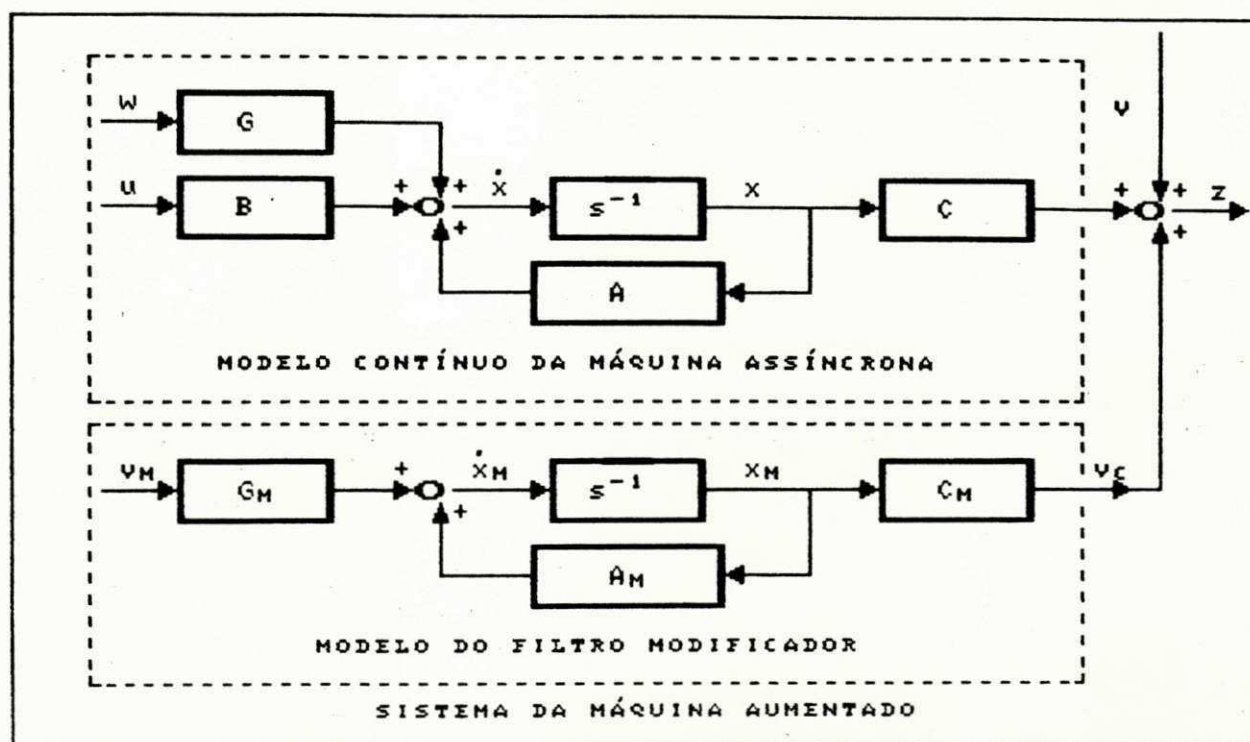


Fig. 5.1: Sistema aumentado com ruído de medição correlacionado

estado $v_m(t)$ já que este último é processado por um sistema de dinâmica conhecida. É lógico que podem existir problemas de implementação prática em função da ordem do sistema aumentado, devido à uma possível limitação de memória de armazenamento e tempo de cálculo do microcomputador.

O tratamento matemático do sistema aumentado é descrito a partir do modelo estocástico contínuo da máquina, onde introduz-se dois vetores de ruídos de medição: $v_c(t)$ correlacionado e $v(t)$ independente:

$$dx(t)/dt = A(t).x(t) + B(t).u(t) + G(t).w(t) \quad (5.1.a)$$

$$z(t) = C(t).x(t) + v_c(t) + v(t) \quad (5.1.b)$$

onde: $w(t) \approx N [0, Q(t)]$ e $v(t) \approx N [0, R(t)]$

O sistema do filtro formador é dado por:

$$dx_m(t)/dt = A_m(t).x_m(t) + G_m(t).v_m(t) \quad (5.2.a)$$

$$v_c(t) = C_m(t).x_m(t) \quad (5.2.b)$$

onde define-se o ruído: $v_m(t) \approx N [0, Q_m(t)]$

O sistema aumentado tomado como base para desenvolvimento do filtro de Kalman é obtido combinando-se as expressões 5.1 e 5.2 (ordem $n_a = n + m = 6$):

$$\begin{bmatrix} dx(t)/dt \\ dx_m(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & A_m(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} G(t) & 0 \\ 0 & G_m(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix} \quad (5.3.a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C(t) & C_m(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (5.3.b)$$

As expressões 5.3 representam um sistema linear, no espaço de estados, cujos ruídos de estado e medição são gaussianos e independentes no tempo com densidade espectral de potência infinita (ruído branco).

Um desenvolvimento análogo pode ser feito para ruído de estado correlacionado, estendendo-se também o conceito para permitir o tratamento das duas situações: ruído de estado e medição correlacionados no tempo.

5.2) RUIÍDO DE MEDIÇÃO CORRELACIONADO

A partir do sistema da máquina, dado pelas expressões 5.1, considera-se inicialmente que o único ruído na equação de medição $z(t)$ é o correlacionado no tempo obtido na saída do filtro formador $v_c(t)$. Portanto, o termo $v(t) = 0$ e tem-se a situação de medições perfeitas (sem ruído) já que o ruído de medição, correlacionado ao processar-se um ruído gaussiano branco por um sistema linear de dinâmica conhecida, passa a constituir um ruído de estado do sistema aumentado.

O sistema de equações de estado 5.3 é definido com as matrizes do sistema aumentado pelas seguintes expressões:

$$dx_a(t)/dt = A_a(t).x_a(t) + B_a(t).u(t) + G_a(t).w_a(t) \quad (5.4.a)$$

$$z(t) = C_a(t).x_a(t) \quad (5.4.b)$$

onde: $w_a(t) \approx N [0 ; Q_a(t)]$ $Q_a(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & Q_m(t) \end{bmatrix}$ (5.5)

considerando-se os ruídos $w(t)$ e $v_m(t)$ independentes entre si.

As equações para o filtro de Kalman são as mesmas (2.69 a 2.78) logicamente utilizando-se as matrizes do sistema aumentado. A particularidade importante verificada neste caso é que a covariância do ruído de medição $R(k)$ é nula. Durante a dedução das expressões do filtro utilizando o critério de projeções ortogonais, tem-se $R(k) > 0$ como condição, devido a operações de inversão nesta matriz. Porém, isto não ocorre nas expressões recursivas finais obtidas para o filtro de Kalman. Utiliza-se portanto as seguintes equações de filtragem de estado:

Expressão da estimação ótima do estado:

$$x_a(k+1/k+1) = x_a(k+1/k) + P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T.[C_a(k+1).P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T]^{-1}.[z(k+1) - C_a(k+1).x_a(k+1/k)] \quad (5.6)$$

Expressão da covariância associada ao erro de estimação:

$$P_a(k+1/k+1) = P_a(k+1/k) - P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T.[C_a(k+1).P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T]^{-1}.C_a(k+1).P_a(k+1/k) \quad (5.7)$$

Duas análises importantes para aplicação das equações 5.6 e 5.7 situam-se na inversão da matriz de covariância do resíduo de predição da saída $[C_a(k+1).P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T]$ e na singularidade da matriz aumentada de covariância $P_a(k+1/k+1)$, já que a saída do sistema aumentado é dado por uma combinação linear dos estados livre de ruídos.

a) Com relação à inversão da matriz de covariância do resíduo de predição da saída, se $P_a(k+1/k) > 0$ (definida positiva

ou com posto " n_a ") e $C_a(k+1)$ possui posto pleno (m), $[C_a(k+1).P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T]$ é definida positiva com ordem m e portanto possui inversa. Entretanto, $P_a(k+1/k+1)$ é singular com m autovalores nulos e apresentando um posto ($n_a - m$). Isto acontece porque mede-se perfeitamente dois estados do sistema ou a combinação linear entre eles. Portanto, quando a medição $z(k)$ é disponível, a função densidade de probabilidade do erro de estimação se concentra inteiramente nos estados medidos ou na combinação linear entre estes. Durante o tempo de propagação das grandezas (equações de predição) entre duas medições consecutivas, a função densidade de probabilidade das grandezas medidas novamente se dispersa em torno do valor médio. [32]

b) Com relação à necessidade de $P_a(k+1/k)$ ser definida positiva (posto n_a), sendo obtida a partir de $P_a(k/k)$, que é semidefinida positiva (singular com posto $n_a - m$), através da expressão:

$$P_a(k+1/k) = F_a(k+1,k).P_a(k/k).F_a(k+1,k)^T +$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F_a(k+1,\tau).G_a(\tau).Q_a(\tau).G_a(\tau)^T.F_a(k+1,\tau)^T.d\tau, \quad (5.8)$$

é necessário que o termo da integral na equação 5.8 acima seja de posto " n_a " (pleno)

Dentro da possibilidade de realizações de medições livres de ruído (medições perfeitas), pode-se definir uma transformação de coordenadas de modo que sejam feitas medições diretas do estado estimado. Esta transformação linear deve resultar num vetor de estados formado pelos estados mensuráveis sem ruídos e os estados de interesse para aplicações de controle do sistema. No caso de aplicação com máquinas assíncronas, pode-se obter um sistema resultante onde as variáveis de estado são as correntes estatóricas i_{sa} e i_{sq} e os fluxos rotóricos Φ_{ra} e Φ_{rq} que são de interesse para o controle vetorial. No âmbito de observadores determinísticos, esta construção de estados estimados, dadas medições perfeitas de um sistema livre de ruídos na dinâmica do estado (porém com condições iniciais desconhecidas) é denominado

observador de Luenberger (ou observador de ordem reduzida).
[30],[31]

A utilização de um estimador de Kalman de ordem reduzida proporciona uma grande economia de esforço computacional e tempo de processamento, porém introduz uma grande sensibilidade na dinâmica do estimador em relação a qualquer ruído associado às grandezas medidas. Também apresenta uma sensibilidade bem maior à variação de parâmetros do sistema ficando bem menos robusto. [44]

Outra suposição bastante importante é de ter-se uma correlação entre o ruído de estado e o ruído de medição, já que em aplicações práticas as fontes de erros e ruídos geralmente superpõem seus efeitos em função do ambiente de funcionamento e medição das grandezas do processo. Uma tarefa difícil para esta situação é a modelagem da função de correlação ou covariância cruzada $[Q_c(k)]$ entre estes dois ruídos. Uma descrição sucinta do projeto do filtro de Kalman, para esta última situação é apresentado no apêndice D. De modo análogo, a metodologia proposta por Bryson [18],[32],[44] para tratamento do ruído de medição correlacionado, evitando o aumento da ordem do sistema, é apresentado no apêndice E.

5.3) FILTRO ANALÓGICO NA SAÍDA DO SISTEMA

Na seção 4.3.6 do capítulo 4, discutiu-se inicialmente a introdução do filtro analógico nas correntes i_{ea} e i_{eq} medidas de modo contínuo na máquina e sujeitas a um ruído de medição. O sinal de corrente com ruído é processado por um sistema linear, invariante no tempo cuja dinâmica de projeto é função dos requisitos de operação especificados para o filtro passa-baixa. Como consequência, o ruído de medição fica correlacionado no tempo (fig. 5.2). Desenvolvendo-se o sistema com ordem aumentada, como já foi apresentado na seção 5.1, este ruído passa a constituir um ruído de estado. A dinâmica do filtro analógico portanto, é adicionada à dinâmica da máquina de indução, sendo que o ruído de medição do sistema aumentado resultante depende das condições de medição da saída do filtro analógico

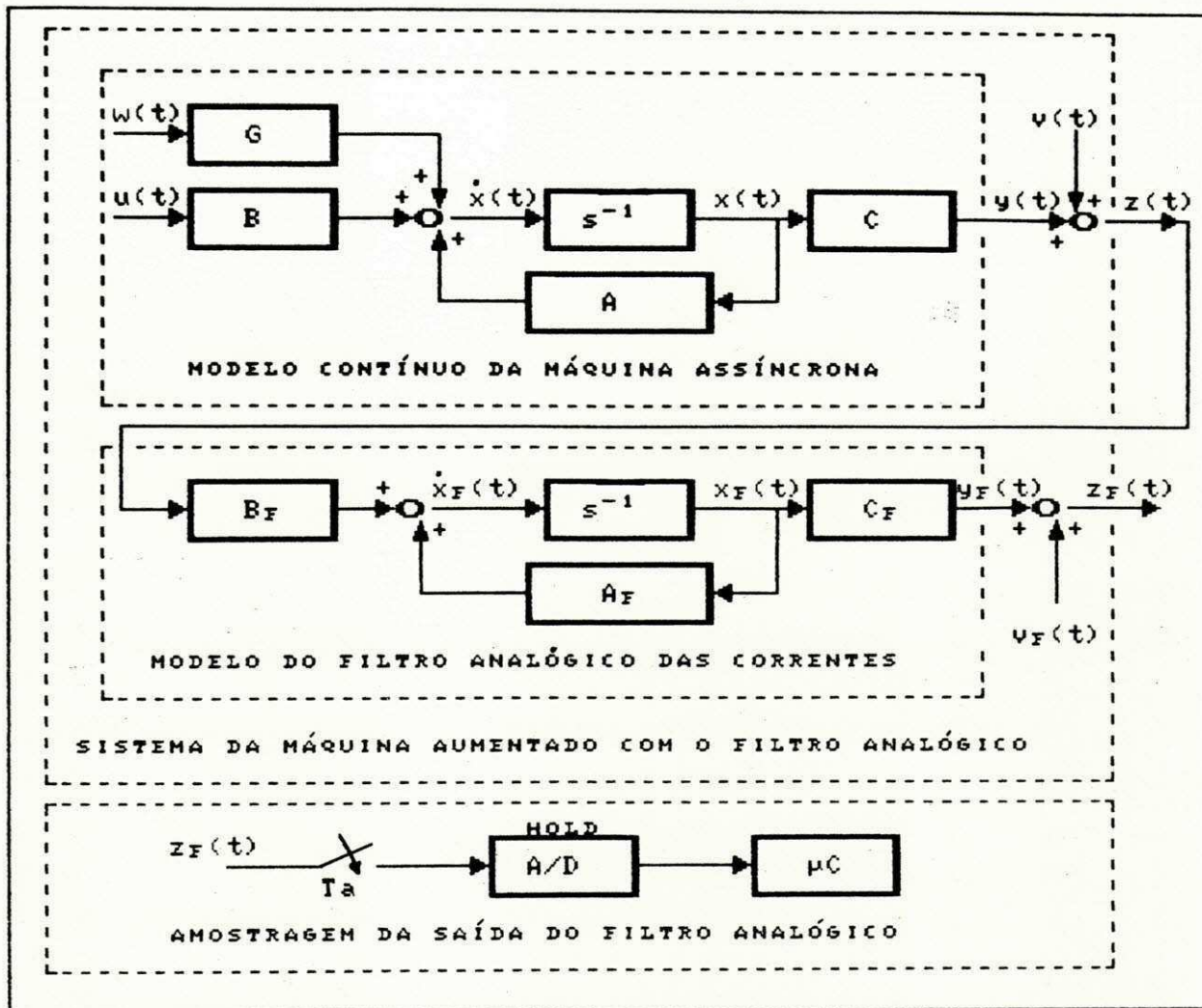


Fig. 5.2: Máquina assíncrona com filtro analógico na saída

Dado o sistema contínuo da máquina (ordem = 4) (eq's 1.27) e o sistema do filtro analógico (ordem = 2), obtido na seção 4.3.6:

$$dx_f(t)/dt = A_f(t).x_f(t) + B_f(t).z(t) \quad (5.9.a)$$

$$z_f(t) = C_f(t).x_f(t) + v_f(t) \quad (5.9.b)$$

onde $v_f(t) \approx N [0 ; R_f(t)]$: ruído gaussiano branco com média nula e covariância $R_f(t)$, representando o ruído de medição na saída do filtro analógico. O sistema completo é apresentado na figura 5.2. As matrizes do sistema 5.9 são dadas pelas expressões 4.29. O sistema aumentado resultante é obtido pelas expressões:

$$dx(t)/dt = A(t).x(t) + B(t).u(t) + G(t).w(t)$$

$$dx_f(t)/dt = A_f(t).x_f(t) + B_f(t).C(t).x(t) + B_f(t).v(t) \quad (5.10.a)$$

$$z_f(t) = C_f(t).x_f(t) + v_f(t) \quad (5.10.b)$$

Obtem-se o sistema simplificado escrevendo-se matrizes e vetores de ordem aumentada:

$$dx_a(t)/dt = A_a(t).x_a(t) + B_a(t).u(t) + G_a(t).w_a(t) \quad (5.11.a)$$

$$z_a(t) = C_a(t).x_a(t) + v_a(t) \quad (5.11.b)$$

Para o sistema aumentado 5.11, define-se as matrizes e os vetores:

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) & | & x_f(t) \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}^T \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_{ad}(t) & & v_{eq}(t) \end{bmatrix}_{(2 \times 1)}^T$$

$$w_a(t) = \begin{bmatrix} w(t) & | & v(t) \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}^T \quad v_a(t) = \begin{bmatrix} v_{f1}(t) & & v_{f2}(t) \end{bmatrix}_{(2 \times 1)}^T = v_f(t)$$

(5.12)

$$A_a(t) = \left[\begin{array}{c|c} A(t) & 0 \\ \hline B_f(t).C(t) & A_f(t) \end{array} \right]_{(6 \times 6)} \quad G_a(t) = \left[\begin{array}{c|c} G(t) & 0 \\ \hline 0 & B_f(t) \end{array} \right]_{(6 \times 2)}$$

$$B_a(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{(6 \times 2)} \quad C_a(t) = \begin{bmatrix} 0 & | & C_f(t) \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}$$

(5.13)

As matrizes $A_f(t)$, $B_f(t)$ e $C_f(t)$ têm dimensões 2×2 . Os ruídos do sistema aumentado são definidos por:

$$w_a(t) \approx N [0 ; Q_a(t)] \quad e \quad v_a(t) \approx N [0 ; R_a(t)] \quad (5.14)$$

$$Q_a(t) = E\{w_a(t).w_a(t)^T\} = E \begin{bmatrix} w(t).w(t)^T & | & w(t).v(t)^T \\ \hline v(t).w(t)^T & | & v(t).v(t)^T \end{bmatrix}$$

$$Q_a(t) = \left[\begin{array}{c|c} Q(t) & 0 \\ \hline 0 & R(t) \end{array} \right]_{(6 \times 6)} \quad (5.15)$$

onde considerou-se $w(t)$ e $v(t)$ independentes entre si e com média nula. A covariância do ruído de medição $v_a(t)$ é dada por:

$$R_a(t) = E\{v_a(t).v_a(t)^T\} = R_r(t) \quad (5.16)$$

O sistema aumentado 5.11 resulta na forma convencional do filtro de Kalman onde os ruídos de estado e medição são gaussianos, brancos, de média nula e independentes entre si. Obtem-se portanto o modelo discreto do sistema aumentado:

$$x_a(k+1) = F_a(k+1,k).x_a(k) + H_a(k).u(k) + G_{ad}(k).w_{ad}(k) \quad (5.17.a)$$

$$z_a(k) = C_a(k).x_a(k) + v_a(k) \quad (5.17.b)$$

O ruído de estado discreto do sistema aumentado é definido por:

$$w_{ad}(k) \approx N [0 ; Q_{ad}(k)] \quad (5.18)$$

As equações do filtro de Kalman para o sistema aumentado, e portanto, estimando os estados da máquina e do filtro analógico, são resumidas abaixo:

1) Equações de predição:

$$x_{ab}(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_{ab}(k/k) + H_a(k).u(k) \quad (5.19)$$

$$P_a(k+1/k) = F_a(k+1,k).P_a(k/k).F_a(k+1,k)^T +$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F_a(k+1,\tau).G_a(\tau).Q_a(\tau).G_a(\tau)^T.F_a(k+1,\tau)^T d\tau \quad (5.20)$$

2) Equações de filtragem:

$$x_{ab}(k+1/k+1) = x_{ab}(k+1/k) + K_a(k+1).[z_a(k+1) - C_a(k+1).x_{ab}(k+1/k)] \quad (5.21)$$

$$P_a(k+1/k+1) = [I - K_a(k+1).C_a(k+1)].P_a(k+1/k) \quad (5.22)$$

3) Expressão do ganho ótimo de Kalman:

$$K_a(k+1) = P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T.[C_a(k+1).P_a(k+1/k).C_a(k+1)^T + R_a(k+1)]^{-1} \quad (5.23)$$

No cálculo do termo integral da expressão 5.20, utiliza-se a expressão aproximada abaixo (seção 2.4.3):

$$Q_{aT}(k+1) \approx T_a \cdot F_a(k+1, k) \cdot G_a(k) \cdot Q_a(k) \cdot G_a(k)^T \cdot F_a(k+1, k)^T \quad (5.24)$$

5.3.1) Aplicação da teoria de medições perfeitas.

Considerando-se que as correntes medidas na saída do filtro analógico são livres de ruído, $v_a(t) = 0$ no sistema 5.11, tem-se a situação de estimação estocástica de estados com medições perfeitas. As condições de operacionalidade do filtro de Kalman para esta situação onde $R_a(k) = 0$ (covariância do ruído de medição) já foram analisadas na seção 5.2.

De modo similar ao procedimento realizado na seção 3.4.4, define-se os seguintes níveis de ruído para a simulação digital do sistema:

$$Q(t) = 3.5 \times 10^{-5} \cdot I_4 \quad (5.25)$$

$$R(t) = 1.0 \cdot I_2 \quad (5.26)$$

As covariâncias a serem introduzidas no algoritmo do filtro discreto são dadas por:

$$Q_a(k) = 0.0006 \cdot I_6 \quad (5.27)$$

$$R_a(k) = 0 \cdot I_2 \quad (5.28)$$

As modificações introduzidas comparadas à seção 3.4.4 são basicamente as seguintes:

- aumento da covariância do ruído de medição das correntes da máquina, $R(t)$ que constituem a entrada do filtro analógico, de modo a melhor verificar sua influência na operação do estimador;
- Consideração da medição perfeita na saída do sistema aumentado [$R_a(k) = 0$];

Os resultados em regime permanente para os testes de consistência estatística, alimentando-se a máquina com tensão senoidal (com ZOH) são apresentados na fig. 5.3

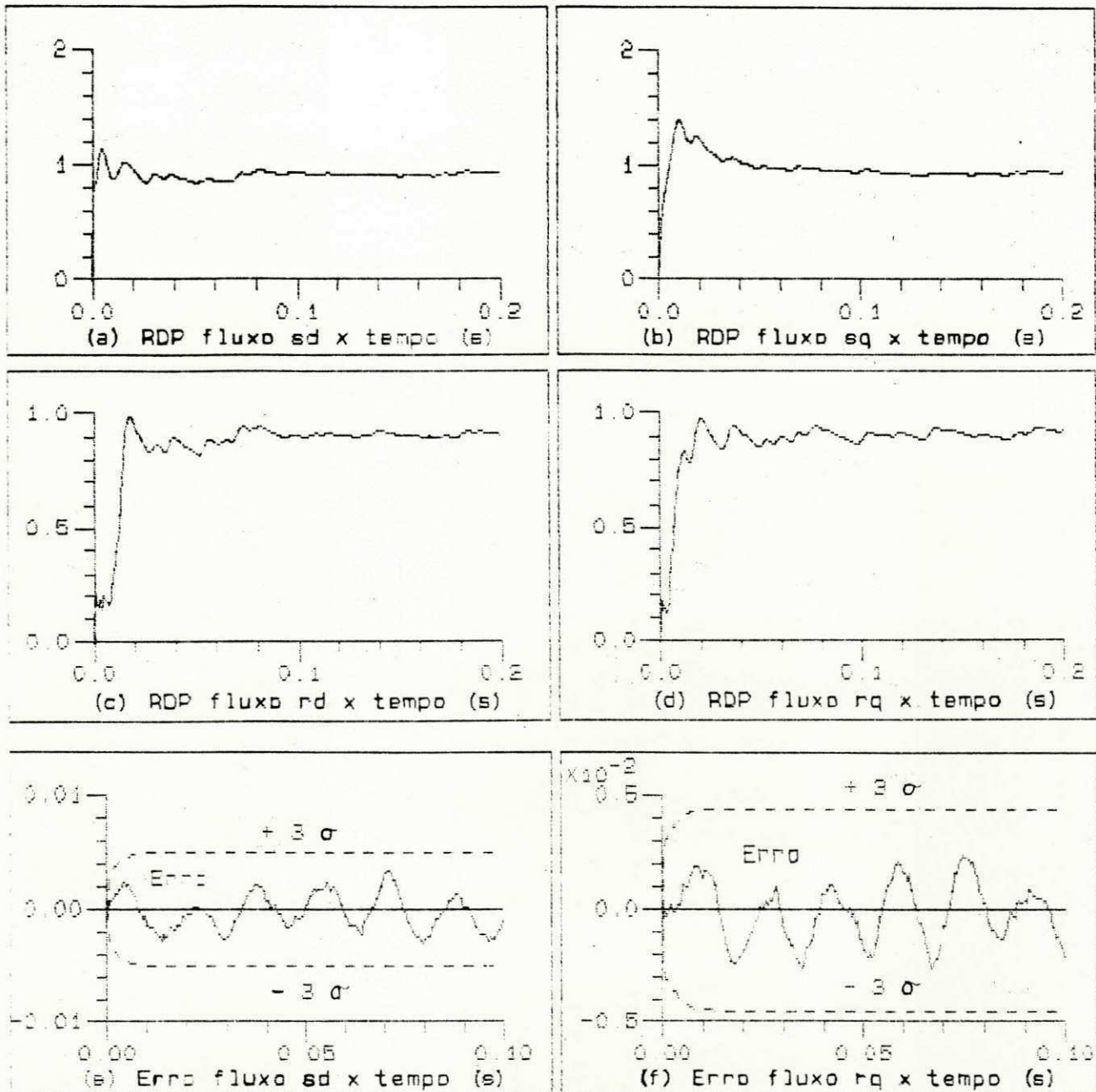


Fig. 5.3: Máquina em regime permanente com sistema aumentado pelo filtro analógico com medições perfeitas.

As relações de desempenho RDP's tendem para a unidade, porém por valores inferiores, indicando que a covariância $Q_a(k)$ fornecida está mais elevada que o valor ideal. Como o valor na expressão 5.27 é o mesmo que foi utilizado na simulação sem o filtro analógico, conclui-se que a introdução deste reduz o erro na estimação ótima dos estados da máquina.

O teste da faixa do desvio padrão está coerente para os estados Φ_{sd} e Φ_{ra} . Com relação ao erro de predição das correntes de saída, a covariância prevista pela expressão $[C_{\bullet}(k+1).P_{\bullet}(k+1/k).C_{\bullet}(k+1)^T]$ está bem mais elevada comparada ao erro propriamente detectado. Isto é explicado pela incerteza muito elevada na operação de predição dos estados do filtro analógico, onde os elementos da matriz de covariância $P_{\bullet}(k+1/k)_{(s,s)}$ e $P_{\bullet}(k+1/k)_{(e,s)}$ são bem maiores que o restante dos termos da diagonal de $P_{\bullet}(k+1/k)$.

A matriz de ganhos de Kalman em regime permanente é dada na expressão 5.29:

$$K_{\bullet}(k) = \begin{bmatrix} 8.38 \times 10^{-4} & -5.64 \times 10^{-4} \\ 5.64 \times 10^{-4} & 8.38 \times 10^{-4} \\ -3.86 \times 10^{-4} & -5.51 \times 10^{-4} \\ 5.51 \times 10^{-4} & -3.86 \times 10^{-4} \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Os termos unitários indicam a total confiabilidade da medição da saída em detrimento da propagação estimada destas entre 2 períodos consecutivos de amostragem.

A matriz de covariância do erro de estimação ótima, já processada a medição das saídas no instante t_{k+1} , $P_{\bullet}(k+1/k+1)$ apresenta as duas últimas linhas e colunas nulas pois os estados do filtro analógico são as próprias saídas que estão sendo medidas sem ruído associado.

Os resultados para o conjugado, módulo dos fluxos estatórico e rotórico e seno do ângulo de carga para as grandezas reais e estimadas são apresentados na figura 5.4.

O conjugado estimado apresenta menor ripple que o real. O módulo do fluxo estatórico real oscila em função do ruído de estado introduzido e em função da tensão de alimentação aplicada na máquina (que é mantida constante durante 1 período de

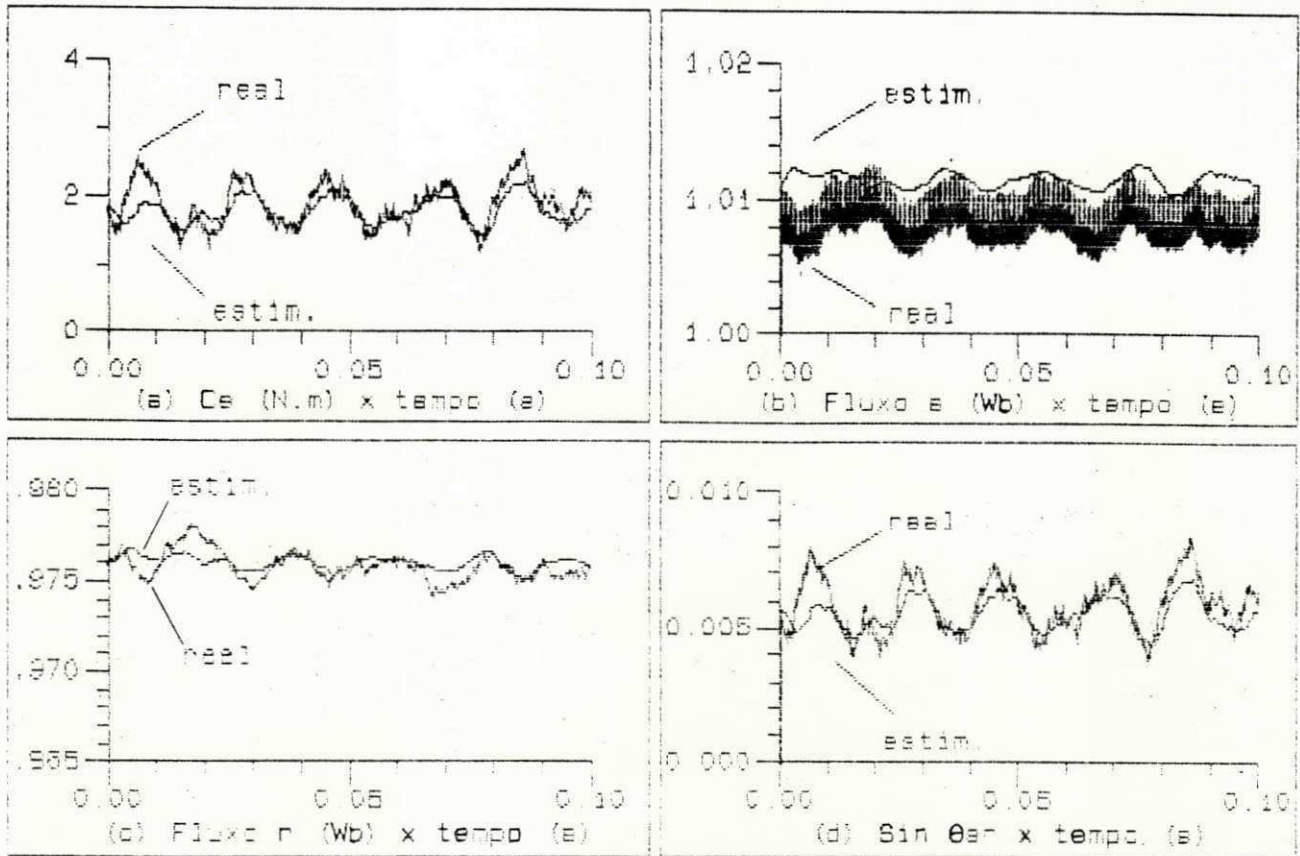


Fig. 5.4: Máquina em regime permanente com sistema aumentado pelo filtro analógico com medições perfeitas

amostragem). Já o valor estimado apresenta uma oscilação bem menor. O módulo do fluxo rotórico estimado apresenta um ripple bem menor que o valor real. O seno do ângulo de carga apresenta um comportamento similar ao conjugado.

5.3.1.1) Transitório nos valores iniciais do filtro de Kalman

Aplica-se em seguida um transitório em regime permanente no sistema aumentado onde para um determinado ponto de operação da máquina, todas as variáveis do filtro de Kalman aumentado, bem como a matriz de covariância $P(0/0)$ são iniciadas nulas. Isto corresponde à entrada em operação do estimador em um instante qualquer, com a máquina funcionando plenamente. Os resultados para o conjugado e módulos dos fluxos são observados na fig. 5.5,

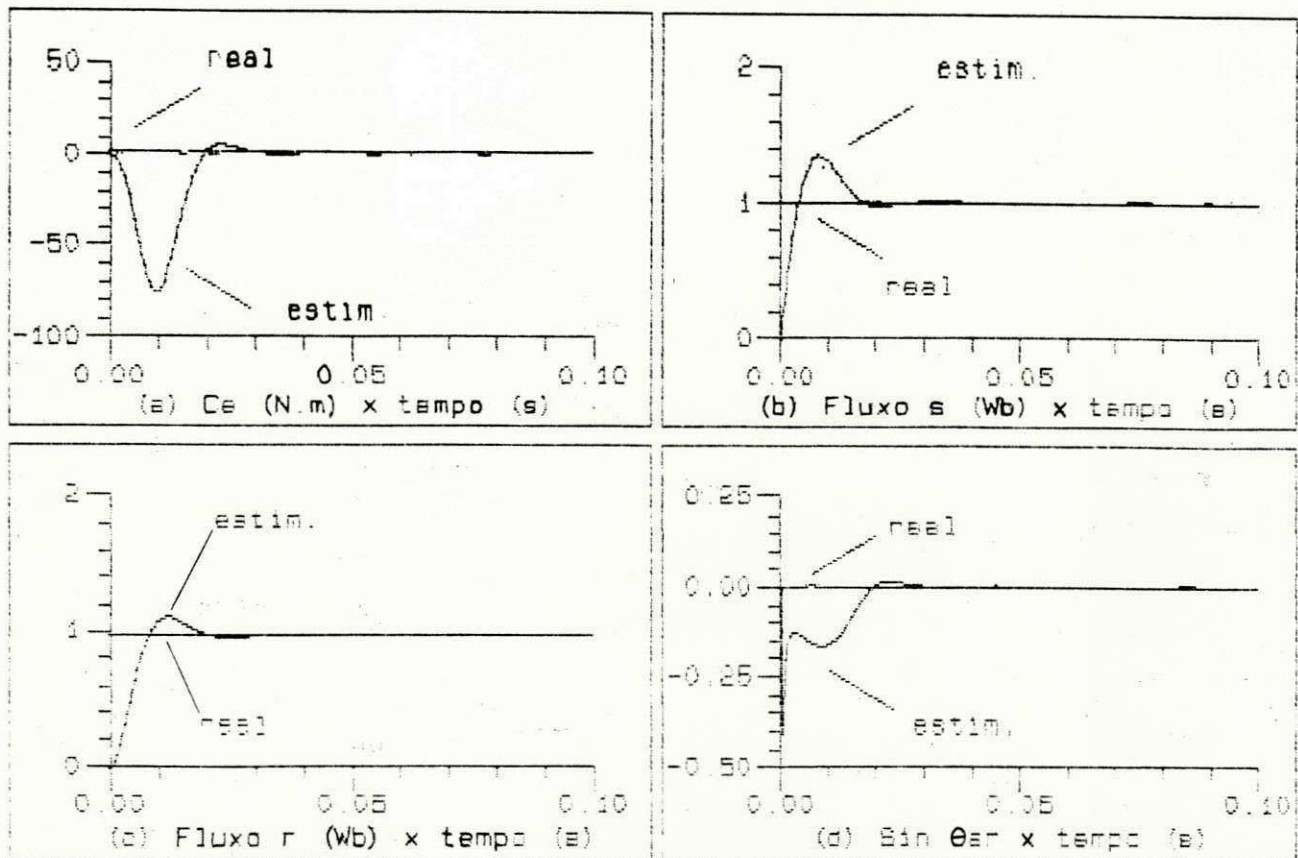


Fig. 5.5: Transitório no filtro de Kalman com a máquina em regime permanente.

onde o tempo de convergência é de aproximadamente 0.02 segundos indicando uma boa resposta transitória do estimador em regime permanente.

5.3.1.2) Transitório através de conjugado de carga

Em regime permanente introduz-se um conjugado de carga de 5 N.m, provocando-se portanto um transitório no módulo mecânico do sistema. Para esta situação não se observa modificações significativas nos RDP's ou nos testes do desvio padrão em relação à operação em vazio. O conjugado eletromagnético e o ângulo de carga logicamente aumentam em função do conjugado de carga introduzido, porém o ripple associado à estas grandezas, devido ao ruído de estado, permanece inalterado. Conseqüentemente, para um mesmo nível de ruído de estado, a operação da máquina em

carga nominal apresenta resultados para as grandezas estimadas bem melhores comparados à estimação com a máquina em vazio.

5.3.2) Ruído de medição no filtro analógico

Analisada na seção anterior a teoria de medições perfeitas das grandezas de saída do sistema aumentado, considera-se nesta seção um ruído de medição na obtenção da saída do filtro analógico. Assim, a amostragem destas grandezas a ser utilizada no algoritmo computacional do filtro de Kalman, passa a ser influenciada por um ruído discreto gaussiano, branco de média nula e covariância definida em função do ambiente de aquisição das referidas grandezas e dos valores nominais.

As equações do filtro discreto de Kalman são as mesmas 5.19 a 5.24 e o nível de ruído de estado utilizado na simulação digital é o mesmo definido em 5.25. A única diferença é a introdução do ruído discreto de medição $v_a(k)$ no sistema 5.11, ou $v_r(k)$ na figura 5.2, cuja covariância é definida pela seguinte expressão:

$$R_a(k) = 0.25 \cdot I_2 \quad (5.30)$$

A utilização deste nível de ruído já foi justificado na seção 3.4.2.

A matriz de ganhos de Kalman em regime permanente é dada pela expressão:

$$K_a(k) = \begin{bmatrix} 5.02 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-4} \\ 3.33 \times 10^{-4} & 5.02 \times 10^{-4} \\ -2.05 \times 10^{-4} & -3.18 \times 10^{-4} \\ 3.18 \times 10^{-4} & -2.05 \times 10^{-4} \\ 0.4757 & 0 \\ 0 & 0.4757 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Como a medição das correntes de saída do filtro analógico não é mais perfeita, a submatriz relativa às variáveis de estado

do filtro analógico, na matriz de ganhos, não é mais unitária. Outra consequência imediata é que a covariância associada a estas variáveis de estado após a filtragem (processamento da medição) não é mais zero apresentando um valor de 0.1189 indicando porém, uma incerteza elevada se comparada com as demais covariâncias associadas à estimação dos estados da máquina. Isto é justificado pelos valores elevados da matriz $B_x(t)$ que multiplica o ruído de estado nas equações dinâmicas do filtro analógico.

Os resultados de simulação digital para os índices de consistência estatística e teste do desvio padrão são apresentados na fig. 5.6.

Observa-se na fig. 5.6 que a estimação dos estados da máquina apresenta consistência estatística. Pelo teste da faixa do desvio padrão, conclui-se que inclusive a covariância do resíduo de predição da saída do sistema está perfeitamente coerente com o erro de predição detectado. Alguns resultados observados e comparados com os obtidos para a medição perfeita já eram esperados como por exemplo, o aumento da covariância do resíduo de predição devido à introdução do ruído de medição bem como uma redução dos módulos dos ganhos devido ao fato das medições terem se tornado menos confiáveis para o algoritmo de estimação.

Os resultados para valores reais e estimados do conjugado, módulos dos fluxos estatórico e rotórico e seno do ângulo de carga são apresentados na fig. 5.7

5.3.2.1) Transitório de partida da máquina

Durante o transitório de partida da máquina, como a velocidade é nula, as grandezas de fluxo magnético e correntes atingem valores bastantes elevados (cerca de 10 vezes os valores nominais). Pelo mesmo motivo acima, a dinâmica do sistema modelado no estimador é deteriorada na partida devido aos ganhos, que são calculados de modo transitório, apresentarem valores bastante reduzidos partindo de zero, onde foi realizada uma iniciação nula para a matriz $P(0/0)$.

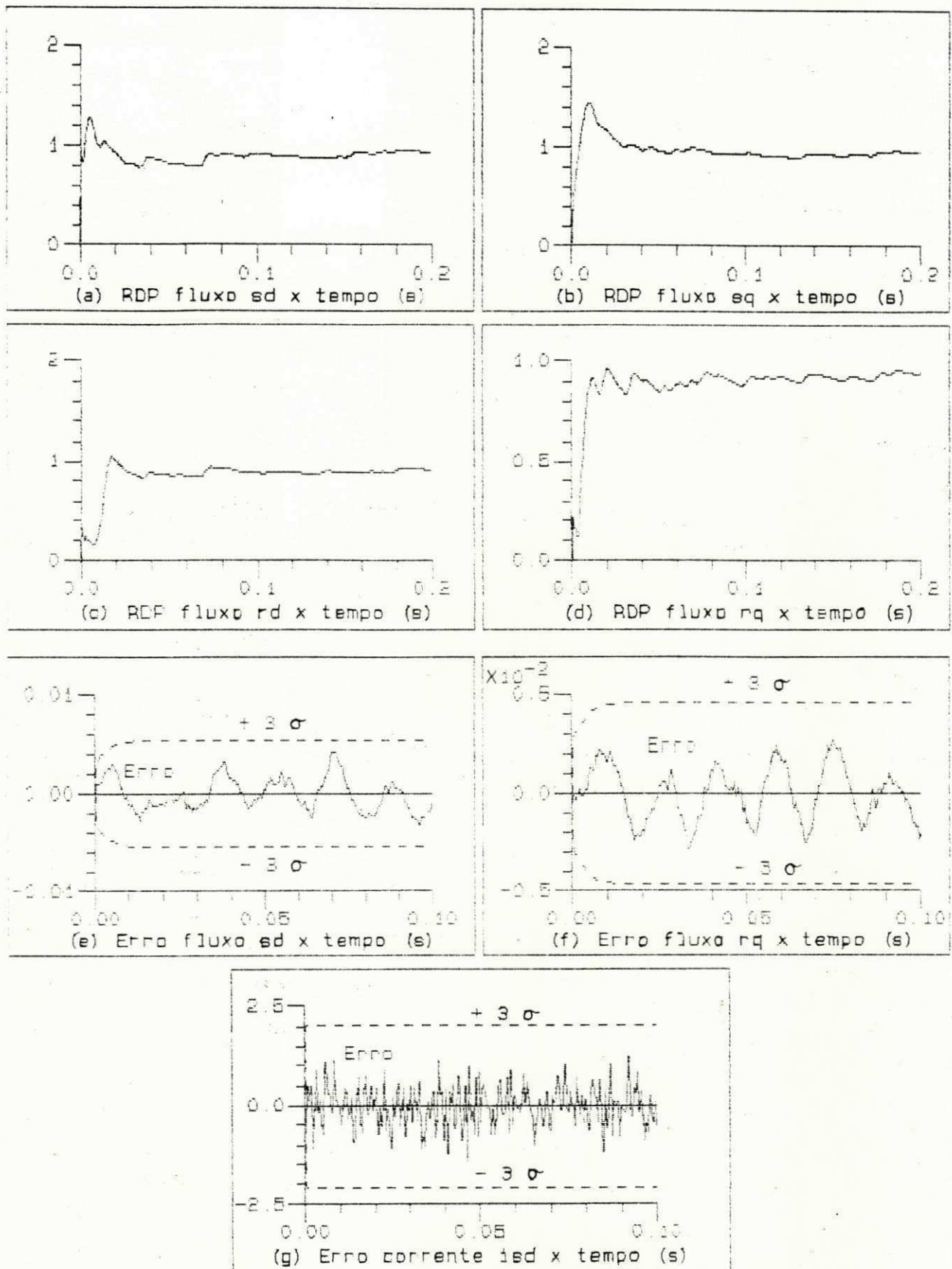


Fig. 5.6 Máquina em regime permanente com ruído de medição na saída do filtro analógico

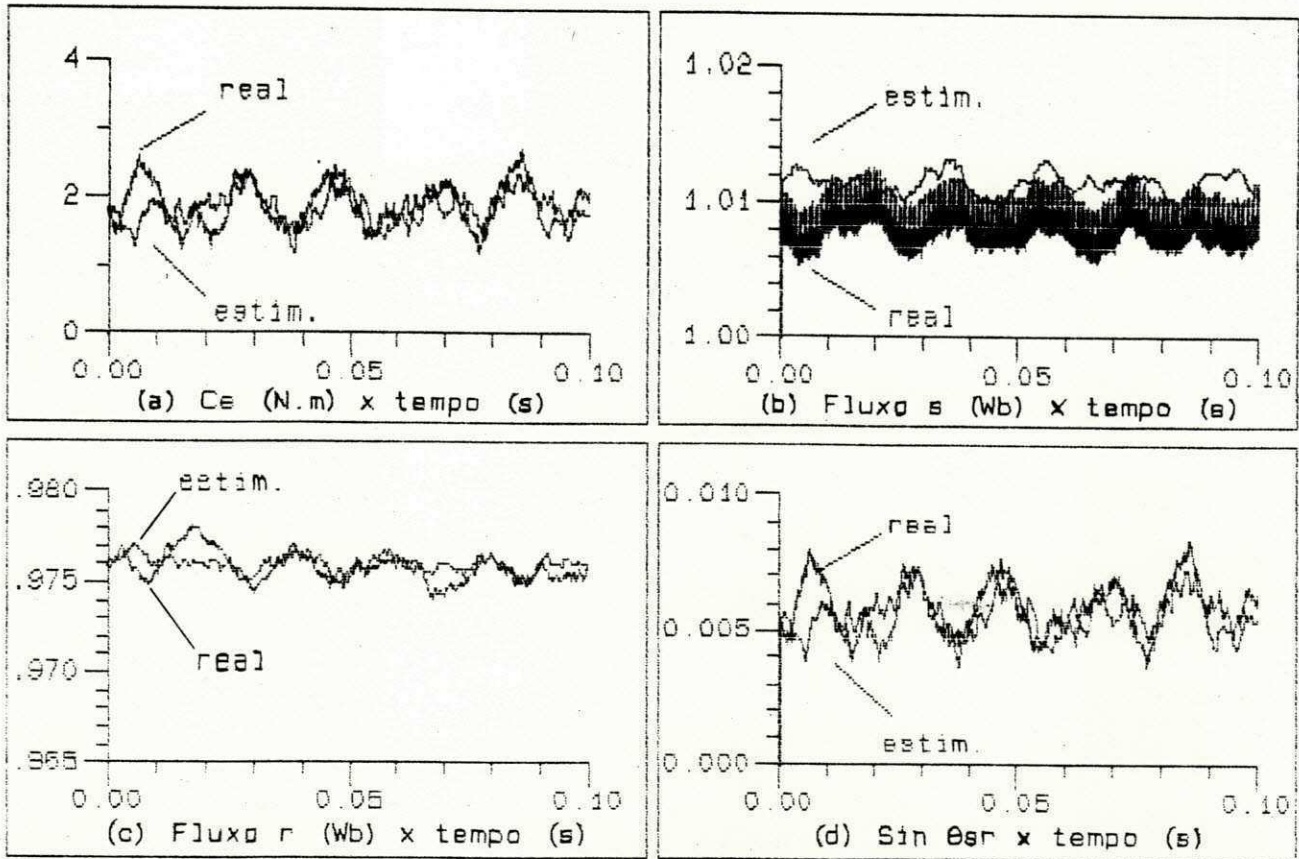


Fig. 5.7: Máquina em regime permanente com ruído de medição na saída do filtro analógico.

Realiza-se assim uma simulação de um transitório no filtro de Kalman durante a partida da máquina utilizando-se níveis de ruído de estado e de medição mais elevados para verificar o comportamento dinâmico do sistema.

Adota-se portanto os níveis de ruído de estado (eq's 5.25 e 5.26) porém com o desvio padrão 10 vezes maior:

$$Q(t) = 3.5 \times 10^{-3} \cdot I_4 \quad (5.32)$$

$$R(t) = 100 \cdot I_2 \quad (5.33)$$

O ruído de medição $v_a(k)$, aplicado na saída do filtro analógico, também é obtido multiplicando-se por 10 o desvio padrão. A covariância $R_a(k)$ (eq 5.30) torna-se:

$$R_a(k) = 25 \cdot I_2 \quad (5.34)$$

Este valor de covariância é fornecido para o algoritmo do filtro de Kalman discreto.

A covariância do ruído de estado a ser introduzida no filtro discreto de Kalman é obtida de modo aproximado, proporcionalmente ao acréscimo dado na covariância do ruído (eq's 5.32 e 5.33):

$$Q_a(k) = 0.06 \cdot I_a \quad (5.35)$$

O transitório é feito iniciando as 6 variáveis de estado do filtro de Kalman (máquina e filtro analógico) com valores unitários e os resultados obtidos para as grandezas reais e estimadas de conjugado, módulo dos fluxos e ângulo de carga são apresentados na fig. 5.8.

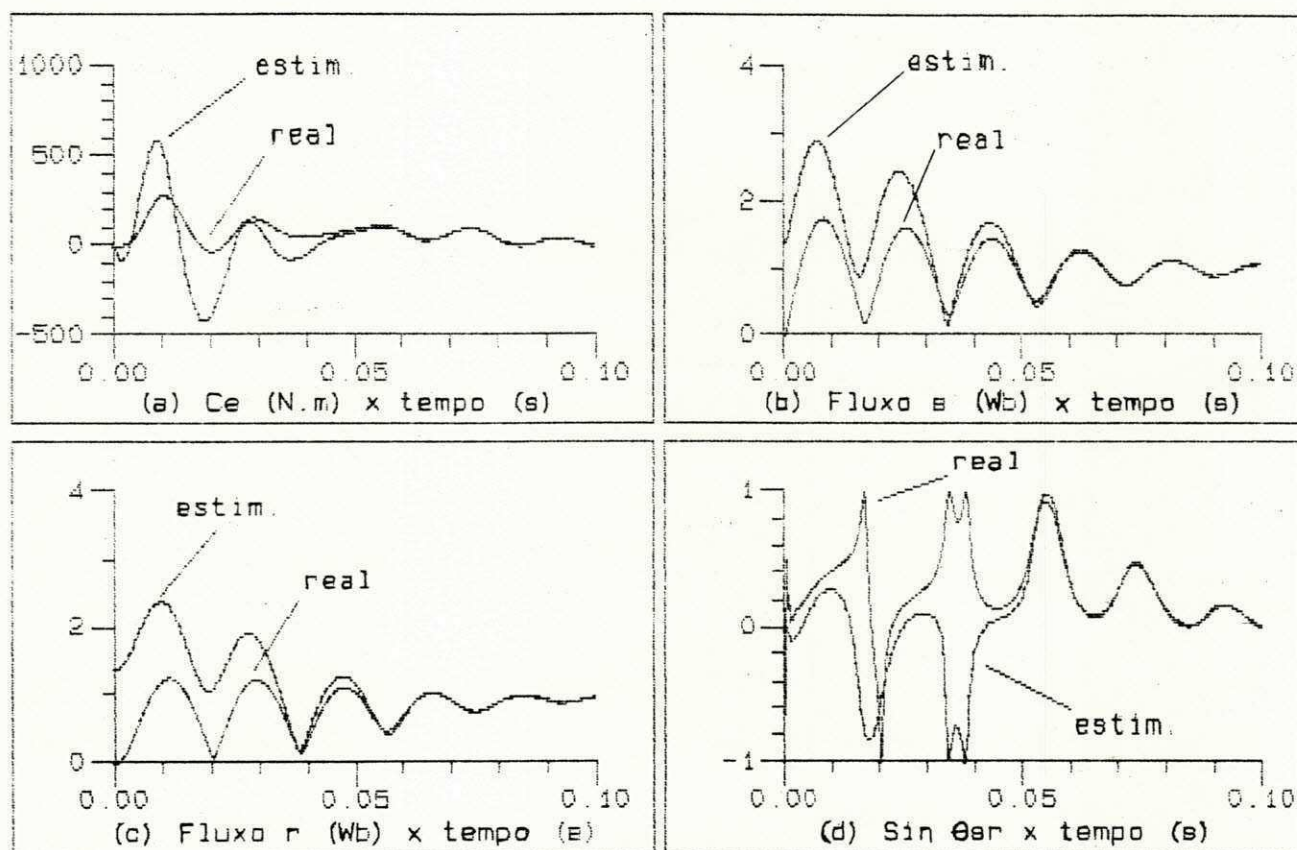


Fig. 5.8: Transitório na partida da máquina com ruído de medição na saída do filtro analógico.

Observa-se nesta figura um elevado transitório para o conjugado estimado porém o mesmo não acontece para os módulos dos fluxos. O importante é que o comportamento é bom para estas grandezas na presença de um elevado ruído de estado e medição durante um transitório aplicado na partida. A convergência foi obtida em aproximadamente 0.06 seg para $P(0/0) = 0$, e portanto, a dinâmica é um pouco pior comparada ao tempo de 0.02 segundos obtido para a convergência de um transitório em regime permanente.

Em termos de consistência estatística da estimação, os resultados também são bons com os erros dentro da faixa de 3 vezes o desvio padrão e as relações de desempenho tendendo para 0.8 e portanto indicando que a covariância fornecida para o algoritmo do filtro discreto de Kalman foi um pouco excessiva.

5.4) CONCLUSÃO

Analisou-se neste capítulo, a situação de ruído de medição correlacionado (por um filtro formador de dinâmica conhecida) utilizando-se a condição de medições perfeitas e aumentando-se a ordem do filtro de Kalman. O condicionamento numérico do sistema aumentado, com a covariância do ruído de medição nula, foi detalhado. Uma metodologia alternativa para tratamento do ruído de medição correlacionado, sem o aumento da ordem do estimador, foi apresentada. Para isto, resultou-se na situação de correlação entre o ruído de estado e de medição. O filtro analógico foi introduzido na saída do sistema e o funcionamento do estimador aumentado com e sem medições perfeitas foi analisado. Transitórios em função dos valores iniciais do filtro, introdução de conjugado de carga e partida da máquina foram estudados.

CAPÍTULO 6

CÁLCULO PRÉVIO DOS GANHOS ÓTIMOS DO FILTRO DE KALMAN

6.1) INTRODUÇÃO

Ultimamente as ferramentas de projetos auxiliados por computador (CAD: Computer Aided Design) ocupam um espaço importante no projeto de modernos sistemas de controle. É bastante conveniente projetar e simular um determinado sistema num computador antes da implementação prática do mesmo. As técnicas clássicas de projeto de sistemas de controle baseadas em experiências de laboratório, utilizando o método de tentativa e erro, consomem muito tempo, são caras e frustrantes, especialmente se o sistema de controle é complexo e uma grande quantidade de incertezas é envolvida na operação do sistema. Entretanto, computadores analógicos e digitais têm sido usados no passado para projeto e simulação de sistemas sendo que atualmente, computadores digitais têm sido usados preferencialmente à medida que programas potentes de CAD se multiplicam no mercado. Utiliza-se assim, nesta etapa do trabalho, o projeto do filtro de Kalman auxiliado por computador através de um "software" específico para sistemas de controle.

Para o algoritmo estimador de Kalman, a matriz de covariância $P(k/k)$ bem como a matriz de ganhos $K(k)$ são independentes das medições atuais $z(k)$ e do estado ótimo estimado presente $x_b(k/k)$. O contrário porém não é válido. Este acoplamento das equações somente em uma única direção é muito importante, sendo uma propriedade benéfica da estimação linear do

ponto de vista computacional. Em função disto, as matrizes de ganho e covariância podem ser computadas previamente, "off-line", com a ajuda de um computador de porte mais elevado comparado ao microcomputador utilizado para implementação de algoritmos de estimação e controle em tempo real. Os ganhos e covariâncias pré-calculados são armazenados numa tabela e podem ser usados na operação "on-line" para estimação de estados $x_b(k/k)$ baseados nas medições $u(k)$, $z(k)$ e também na previsão das incertezas envolvidas nas grandezas estimadas.

Nota-se porém que, para o caso de sistemas não lineares, a operação do sistema deve ser linearizada em torno de um ponto de funcionamento utilizando as derivadas parciais de 1ª ordem obtidas para o estado atual. Conseqüentemente, a propriedade citada acima é violada e a matriz de covariância do erro de estimação fica dependente de $x_b(k/k)$ e deve ser obtida "on-line" juntamente com o estado estimado. Este desenvolvimento é feito para o filtro de Kalman estendido onde a ordem do sistema é aumentada para a estimação de parâmetros de interesse para aplicações de controle. Os principais problemas que surgem referem-se à elevação do tempo de cálculo do algoritmo e ao controle da divergência, em função de uma redução acentuada nas covariâncias e ganhos após um longo tempo de funcionamento do filtro. Estes problemas são tratados convenientemente utilizando-se as técnicas de filtragem adaptativa analisadas no capítulo 7 deste trabalho.

6.2) FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO ESTIMADOR DE KALMAN

Devido ao fato de que o cálculo da matriz de covariâncias é fator preponderante no esforço computacional e em alguns casos requer uma elevada precisão, é interessante analisar formulações algébricas equivalentes dos algoritmos de estimação com vantagens do ponto de vista computacional. Estas análises incluem precisão, estabilidade numérica, requisitos de armazenamento e tempo de cálculo.

Algumas das mais importantes formulações são resumidas a seguir: [21]

a) Filtro de Kalman Padrão:

É exatamente o desenvolvimento original realizado neste trabalho (eq's 2.69 a 2.74 e 2.76 a 2.78), e provavelmente o mais comumente utilizado para a correção da matriz de covariância. Sabe-se, no entanto, que $P(k/k)$ pode perder a propriedade de definição positiva devido aos erros de arredondamento, especialmente para o caso de covariâncias reduzidas. Assim, é conveniente simetrizar a matriz de covariâncias para cada tempo de amostragem, através do seguinte cálculo:

$$P(k/k) = (1/2) \cdot [P(k/k) + P(k/k)^T] \quad (6.1)$$

b) Filtro de Kalman Estabilizado:

Para esta versão modifica-se apenas a expressão de correção da covariância (eq 2.74):

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1) \cdot C(k+1)] \cdot P(k+1/k) \cdot [I - K(k+1) \cdot C(k+1)]^T + K(k+1) \cdot R(k+1) \cdot K(k+1)^T \quad (6.2)$$

Obtem-se assim a forma de soma de duas matrizes simétricas, a primeira definida positiva e a segunda semi-definida positiva (matriz $n \times n$ de posto pelo menos m). Consequentemente, resoluções numéricas baseadas nesta fórmula são melhor condicionadas assegurando a simetria e a definição positiva de $P(k+1/k+1)$.

Do ponto de vista de precisão, esta versão é superior à anterior embora seja algebricamente equivalente, porque é menos sensível a erros de arredondamento numérico. Isto pode ser demonstrado considerando-se um erro $\delta K(k+1)$ de 1ª ordem na matriz de ganhos, onde obtem-se para a matriz de covariância do filtro padrão, um erro também de 1ª ordem: [21]

$$\delta P(k+1/k+1) \approx - \delta K(k+1) \cdot C(k+1) \cdot P(k+1/k) \quad (6.3)$$

Entretanto, para o filtro estabilizado obtem-se um erro de 2ª ordem:

$$\delta P(k+1/k+1) \approx 0 \quad (6.4)$$

A formulação estabilizada fornece covariâncias de erros corretas para ganhos não ótimos enquanto que a formulação padrão apresenta resultados corretos apenas se os ganhos forem os ótimos. A desvantagem da formulação estabilizada é a elevação dos requisitos de memória de armazenamento e tempo de cálculo computacional. Um outro problema que pode ocorrer, está relacionado com longos períodos de tempo de funcionamento em regime permanente, onde os ganhos e covariâncias tornam-se muito reduzidos. Para esta situação, o grande número de adições e multiplicações (cada operação individual com o erro de truncamento ou arredondamento associado) introduz um elevado erro numérico na formulação estabilizada se comparada com a formulação padrão.

c) Filtro de Informação:

Esta formulação propaga a chamada matriz de informação (de Fisher) [21] $I_1(k) = P(k/k)^{-1}$ ao invés da matriz de covariância $P(k/k)$. As equações básicas de predição e correção são dadas por:

$$I_1(k+1/k) = [I - L(k+1).G_a(k)^T].M(k+1) \quad (6.5)$$

$$I_1(k+1/k+1) = I_1(k+1/k) + C(k+1)^T.R(k+1)^{-1}.C(k+1) \quad (6.6)$$

Onde,

$$M(k+1) = F_a(k,k+1)^T.I_1(k/k).F_a(k,k+1) \quad (6.7)$$

$$L(k+1) = M(k+1).G_a(k).[G_a(k)^T.M(k+1).G_a(k) + Q_a(k)^{-1}] \quad (6.8)$$

Embora seja equivalente algebricamente às formulações anteriores, este desenvolvimento pode ser aplicado de modo satisfatório quando não se tem uma informação a priori das variáveis de estado, ou seja, $P(0/0) \rightarrow \infty$ e consequentemente $P(0/0)^{-1} \rightarrow 0$. A formulação utilizando a própria covariância pode conduzir à problemas de condicionamento numérico no início do funcionamento do algoritmo.

A eficiência computacional deste método no entanto não é competitiva e portanto raramente é utilizado.

d) Filtragem por Raiz Quadrada

Em alguns casos, especialmente para computadores com comprimento de palavra reduzido e modelos com ruídos de processo desprezíveis, as formulações descritas anteriormente não são suficientes para um bom desempenho do estimador.

A resolução numérica usando um comprimento de palavra finito pode ocasionar autovalores de $P(k/k)$ negativos especialmente se:

1) Os autovalores de $R(k)$ são muito menores que os autovalores de $P(k/k-1)$, sendo pior ainda a situação se $P(0/0)$ possui autovalores elevados;

2) Uma combinação linear das variáveis de estado é conhecida quase sem incerteza enquanto que outras combinações são praticamente não observáveis. Estas condições podem ocasionar a divergência total do estimador.

Para estas situações é conveniente utilizar um algoritmo de filtragem por raiz quadrada. A idéia básica desta metodologia é a substituição da matriz $P(k/k)$ pela sua raiz quadrada $S(k)$. Esta manipulação é motivada por duas considerações:

1) O produto $S(k).S(k)^T = P(k)$ é inerentemente (semi) definida positiva;

2) O condicionamento numérico de $S(k)$ é bem melhor comparado à $P(k)$.

Particularmente para problemas de mau-condicionamento (erros elevados devido ao comprimento de palavra finito), com esta formulação obtém-se o dobro da precisão efetiva apresentada no filtro convencional. O esforço computacional (armazenamento e tempo de processamento) desta formulação situa-se na faixa intermediária entre o filtro convencional e o estabilizado.

O processamento das medições nesta formulação é feita de modo escalar, uma por vez, de modo a melhorar as características numéricas e a eficiência do procedimento. A descrição completa

das equações pode ser verificada em [32].

e) Síntese da definição do algoritmo em função do problema específico:

O algoritmo específico de estimação de estados é definido em função das seguintes considerações:

- Memória de armazenamento e tempo de cálculo podem ser reduzidos em sistemas bem condicionados utilizando-se o filtro de Kalman padrão (ou convencional);
- Existindo problemas de mau-condicionamento e comprimento de palavra finito, opta-se por algoritmos estabilizados ou filtragem por raiz quadrada;
- Se não existem restrições de esforço computacional, porém ganhos não ótimos podem ser usados, o algoritmo estabilizado é preferível;
- Se existem problemas de valores iniciais das variáveis de estado, pode-se usar a formulação de informação;
- Finalmente, para um problema extremamente mau condicionado, a análise numérica deve ser substituída por uma tentativa de melhorar a modelagem dinâmica do sistema.

Para o caso específico da máquina de indução, optou-se pelo algoritmo padrão do filtro de Kalman, em função de ter-se um sistema bem condicionado, não existindo outras restrições entre as que foram relacionadas nesta seção. Algumas análises com relação ao esforço computacional associado ao filtro padrão, com os ganhos ótimos pré-calculados, são realizadas na seção seguinte.

6.3) ESFORÇO COMPUTACIONAL DO ESTIMADOR ÓTIMO

Define-se as seguintes dimensões para o sistema, com o objetivo de realizar-se uma análise do esforço computacional: n = ordem da matriz dinâmica do sistema (número de variáveis de

estado); m = ordem do vetor de saídas; r = ordem do vetor de entradas.

O esforço computacional pode ser definido pelo tempo de computação por iteração do algoritmo e memória de armazenamento [33]. O tempo computacional influencia na definição do período de amostragem e os requisitos de armazenamento definem a dimensão da memória.

O esforço computacional é estimado diretamente em função das dimensões dos vetores de estado, medição, entrada e ruídos do sistema.

Em função da simetria da matriz $P(k/k)$, para o caso onde o cálculo da covariância deve ser feito "on-line", é suficiente calcular apenas $n.(n+1)/2$ equações de diferença dos n^2 termos totais da matriz $P(k/k)$. Porém isto ainda requer muito mais esforço computacional se comparado ao necessário para calcular as n equações (das diferenças) do estimador acopladas entre si. Conclui-se portanto, que o esforço computacional para estimação das estatísticas de 2ª ordem é bem mais elevado comparado ao respectivo para a determinação das estatísticas de 1ª ordem. Pode-se, entretanto, investigar se o cálculo da covariância está correto testando-se a simetria e a definição de semi-positivo para a matriz $P(k/k)$.

A inversão da matriz (m,m) de covariância do resíduo de predição $[C(k).P(k/k-1).C(k)^T + R(k)]$, que deve ser feita para cada intervalo de amostragem, representa também um esforço significativo sendo tanto pior quanto maior for a ordem m do vetor de saídas. Porém, no caso da máquina assíncrona no referencial bifásico, tem-se como saídas as correntes i_{2a} e i_{2q} ($m=2$) sendo portanto facilitada a operação de inversão da referida matriz.

Existe, entretanto, a possibilidade de um processamento serial dos resíduos de predição da saída [Apêndice F]. Assim, realiza-se em [33] um estudo comparativo entre o processamento simultâneo e sequencial deste resíduo, obtendo-se as importantes conclusões abaixo:

a) Uma significativa redução do tempo computacional é obtido agrupando-se o vetor de medições independentes em vetores reduzidos e processando-os sequencialmente;

b) A maneira ótima para processar as "m" medições depende fortemente das dimensões "m" e "n";

c) Se $m \leq n/2$, a maneira mais eficiente é o processamento simultâneo (caso do motor de indução em estudo);

d) Se $m > n/2$, deve-se implementar um esquema de processamento sequencial, onde um estudo ótimo define as dimensões dos vetores reduzidos. Se $m \rightarrow n$, uma significativa economia de tempo computacional é obtida realizando-se o processamento sequencial dos resíduos.

A capacidade do computador é de importância primordial para a implementação das equações do estimador. Esta capacidade é medida em termos de memória de armazenamento e tempo de cálculo, de modo a determinar o tamanho e o tempo de operação do computador específico para o controle. Geralmente utiliza-se um computador dedicado cuja capacidade é também distribuída com várias outras tarefas de controle.

Como já foi visto anteriormente, obtem-se um modelo de 4ª ordem para a máquina assíncrona com a velocidade ω_m (rad/s) constituindo um parâmetro mensurável e variável no tempo. Resulta-se, portanto, num sistema linear variante no tempo. Os valores ótimos dos ganhos e covariâncias para toda a trajetória do sistema podem ser calculados previamente ("off-line").

Com base nesta situação, define-se inicialmente a tabela 6.1 sintetizando o esforço computacional na operação do estimador ótimo de Kalman para um sistema linear invariante no tempo e com ganhos ótimos pré-calculados. [21]

Além do especificado na tabela 6.1, necessita-se de uma memória para armazenamento fixo das matrizes F_a, H_a, C e K , totalizando um espaço de $n^2 + 2.m.n + n.r$ para um determinado instante da operação. Assume-se que estas matrizes são calculadas previamente ("off-line"), sendo portanto, disponíveis para o

OPERAÇÃO	MEMÓRIA DE TRABALHO	MULTIPLICAÇÕES	ADIÇÕES
Armazena x_b :	n	-	-
Armazena u :	r	-	-
Armazena z :	m	-	-
$F_d.x_b$:	n	n^2	n^2
$+ H_d.u \longrightarrow x_b$:	-	$n.r$	$n.r$
$z - C.x_b \longrightarrow z$:	-	$m.n$	$m.n$
$x_b + K.z \longrightarrow x_b$:	-	$m.n$	$m.n$
TOTAL	$2.n+m+r$	$n^2+2.m.n+n.r$	$n^2+2.m.n+n.r$

TABELA 6.1: Esforço computacional do estimador ótimo de Kalman para um sistema linear invariante no tempo

filtro de Kalman sem causar elevação do tempo computacional. [33]

Observa-se pela tabela 6.1 que a memória de trabalho necessária é proporcional a "n" e portanto não é uma condição restritiva. O número de multiplicações, que é determinante para o tempo de cálculo computacional, é proporcional a n^2 para cada ciclo.

Do exposto acima, conclui-se que uma diminuição imediata do esforço computacional pode ser obtida reduzindo-se ao máximo a ordem n do sistema de modo que não ocasione, no entanto, a degradação da performance do estimador. Esta afirmação é muito importante do ponto de vista do tratamento a ser adotado para correlação entre os ruídos de estado e medição, como viu-se no

apêndice D.

O estudo realizado acima considera o filtro de Kalman previamente calculado. Para o caso do cálculo "on-line" do filtro, acrescenta-se à tabela 6.1, o esforço computacional referente às expressões do ganho e covariâncias do estimador, apresentadas na tabela 6.2. [33]

Observa-se na tabela 6.2 o aumento significativo do esforço computacional com o cálculo "on-line" do filtro e também a diferença entre as formulações padrão (eq. 2.74) e estabilizada (eq. 2.75) da covariância $P(k/k)$. É importante observar que para o caso do sistema variante do motor de indução (em função da velocidade), a matriz $F_a(k+1,k)$ apresenta alguns termos dependentes da velocidade w_m . Portanto, é necessário armazenar

OPERAÇÃO	MEMÓRIA DE TRABALHO	MULTIPLICAÇÕES	ADIÇÕES
$P(k+1/k)$:	n^2	$4n^3$	$4n^3 - 3n^2$
$K(k+1)$:	nm	$n^2 m + 2nm^2 + m^3$	$n^2 m + 2nm^2 + m^3 - 2nm$
$P(k+1/k+1)$ Fórmula padrão	-	$n^3 + n^2 m$	$n^3 + n^2 m - n^2$
$P(k+1/k+1)$ Estabilizada	-	$2n^3 + 2n^2 m + nm$	$2n^3 + 2n^2 m - 2n^2$
TOTAL Fórmula padrão	$n^2 + nm$	$5n^3 + 2n^2 m + 2nm^2 + m^3$	$5n^3 + 2n^2 m + 2nm^2 + m^3 - 4n^2 - 2nm$
TOTAL Estabilizada	$n^2 + nm$	$6n^3 + 3n^2 m + 2nm^2 + nm + m^3$	$6n^3 + 3n^2 m + m^3 + 2nm^2 - 5n^2 - 2nm$

TABELA 6.2: Esforço computacional adicional do estimador ótimo de Kalman calculado "on-line"

numa tabela estes valores para cada velocidade considerada. Isto ocasiona uma certa elevação dos requisitos de memória de armazenamento, além do especificado na tabela 6.2.

A situação torna-se mais crítica para o caso não linear, onde a trajetória de referência do sistema não é definida previamente e a linearização deve ser feita utilizando-se o estado estimado atual. Como consequência, o esforço computacional é adicionado por:

a) Cálculo dos coeficientes da expansão em série de Taylor (elementos da matriz Jacobiana) para a matriz dinâmica do sistema;

b) cálculo "on-line" das matrizes de covariâncias e dos ganhos ótimos;

Neste caso, os requisitos de memória (armazenamento) de trabalho aumentam para a ordem $3.n^2$ e o tempo de cálculo computacional apresenta aproximadamente a ordem n^3 , sendo porém, superior aos casos anteriores analisados.

6.4) DETERMINAÇÃO "OFF-LINE" DO FILTRO DE KALMAN PADRÃO

Para determinação prévia dos ganhos e covariâncias do filtro de Kalman, utilizou-se um "software" específico para projeto de sistemas de controle. As variáveis de entrada são as matrizes do sistema discreto e as matrizes de covariância dos ruídos, obtendo-se como resultados, os valores de "regime permanente" dos ganhos e a covariância do erro de estimação já processada a medição. Faz-se portanto a velocidade variar de 0 à velocidade máxima (375 rad/s) definindo-se um incremento específico ($Dw = 4$ rad/s) e para cada velocidade, armazena-se numa tabela os valores dos ganhos $K(k)$ e covariâncias $P(k/k)$. Em função da simetria destas duas matrizes para a máquina assíncrona, é necessário armazenar apenas a 1ª coluna de $K(k)$ e a diagonal de $P(k/k)$ (esta última com o objetivo de testar a consistência estatística da estimação) totalizando 8 valores. A tabela total constitui uma matriz de 95 (pontos incluindo os extremos de velocidade 0 e 376

rad/s) por 9 (incluindo a velocidade w_m). Esta tabela pode ser armazenada numa memória ROM ou RAM para a operação em tempo real do estimador (considerando-se assim, o processo estatístico estacionário com relação aos ruídos de estado e de medição, e funcionando livre de qualquer problema de divergência do filtro).

As matrizes de covariâncias de ruído de estado e medição fornecidas para o projeto do filtro por computador são as mesmas utilizadas nas seções anteriores:

$$Q_d(k) = 0.0006 * I_4 \quad (6.9)$$

$$R(k) = 0.25 * I_2 \quad (6.10)$$

As matrizes de ganhos e covariâncias obtidas para a velocidade nominal (regime permanente do filtro) são dadas por:

$$K(k) = \begin{bmatrix} 0.6919 & -0.4864 \\ 0.4864 & 0.6919 \\ -0.3323 & -0.5025 \\ 0.5025 & -0.3323 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (6.11)$$

$$P(k/k) = \begin{bmatrix} 0.2453 & 0 & 0.1478 & 0.0742 \\ 0 & 0.2453 & -0.0742 & 0.1478 \\ 0.1478 & -0.0742 & 0.2034 & 0 \\ 0.0742 & 0.1478 & 0 & 0.2034 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \quad (6.12)$$

Os resultados para os ganhos e covariâncias obtidos de modo "regime permanente" pelo "software" de controle e de modo transitório (simulação digital em programa FORTRAN) para toda a faixa de velocidade da máquina desde a partida até a velocidade máxima são apresentados na figura 6.1.

Observa-se que tanto os ganhos como as covariâncias são maiores durante o período de partida (baixas velocidades) para os valores obtidos em característica permanente pelo "software" de controle, comparados aos valores obtidos de modo transitório. Para a velocidade nominal de operação, os valores passam a ser

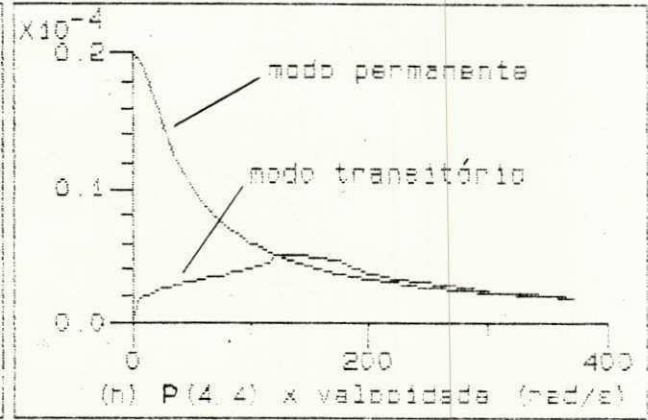
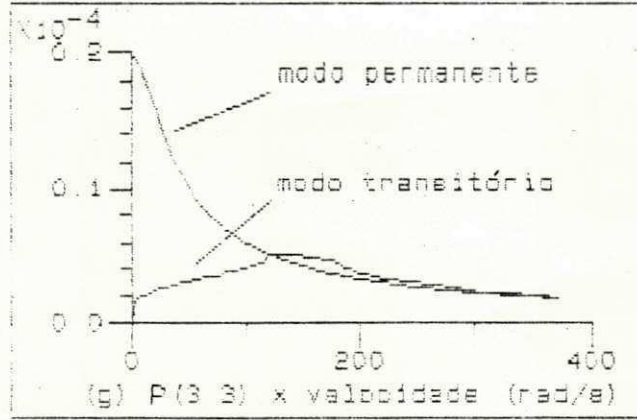
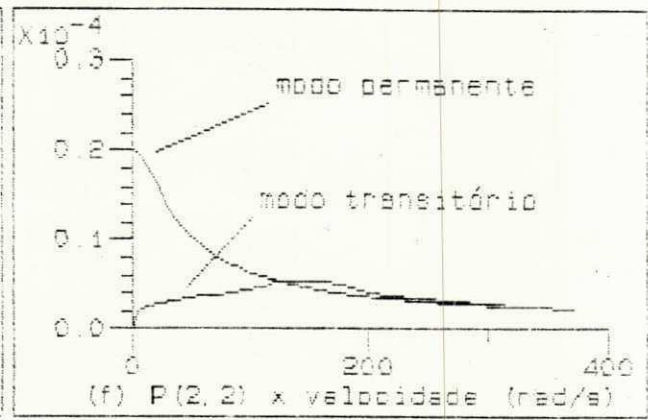
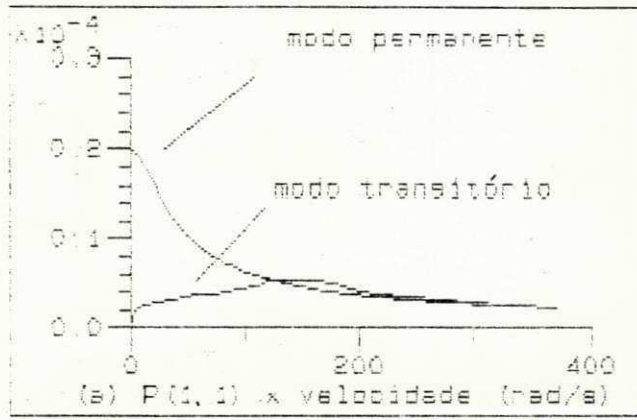
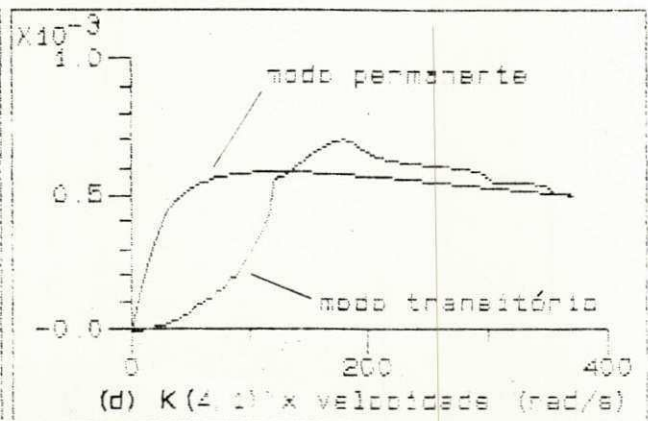
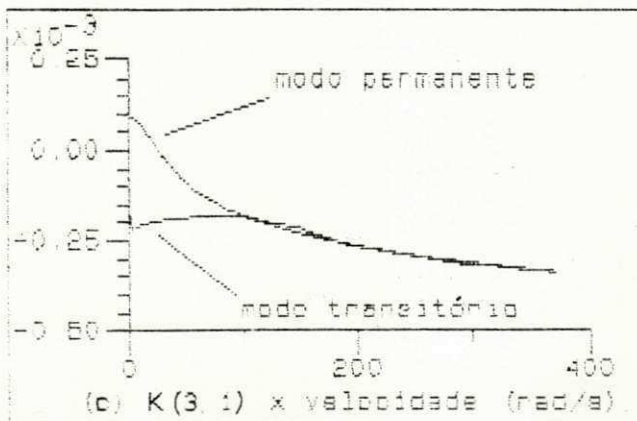
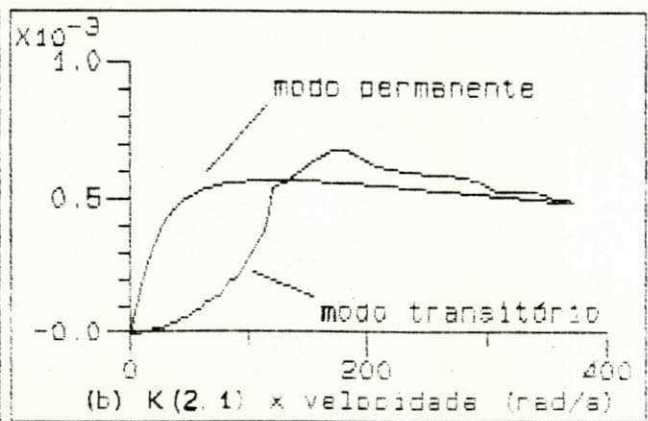
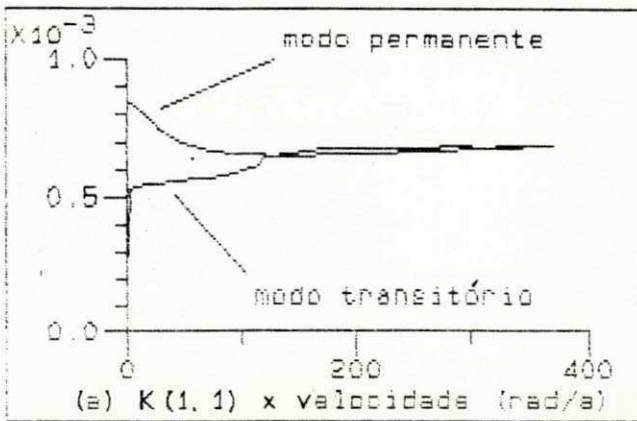


Fig. 6.1: Projeto do filtro de Kalman.

coincidentes. É razoável portanto afirmar que utilizando-se a tabela de valores pré-calculados, qualquer transitório aplicado em baixas velocidades deve ter um comportamento dinâmico melhor comparado ao resultado obtido com os ganhos calculados de modo transitório (com $P(0/0) = 0$). Entretanto, é importante ressaltar que utilizando-se um valor inicial de covariância $[P(0/0)]$ diferente de zero, o comportamento transitório é melhorado. Na figura 6.2 têm-se os resultados para as grandezas reais e estimadas do conjugado, módulos dos fluxos magnéticos e ângulo de carga aplicando-se um transitório na partida onde o filtro de Kalman é iniciado com o valor 0.5 para suas variáveis de estado. Os ganhos ótimos calculados proporcionam o melhor comportamento dinâmico transitório do estimador.

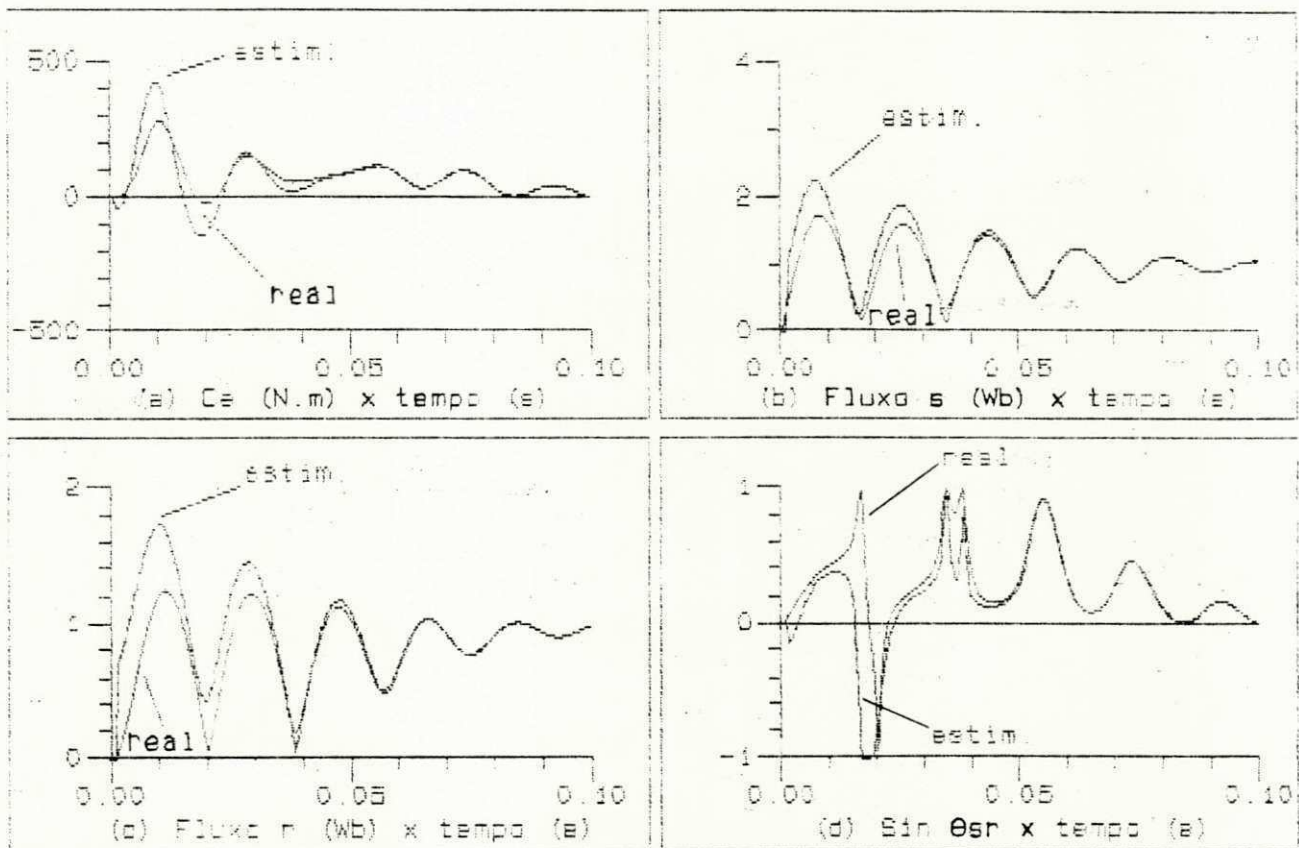


Fig 6.2 Transitório na partida da máquina com o filtro de Kalman calculado previamente (off - line).

6.5) CONCLUSÃO

Apresentou-se neste capítulo, algumas formulações alternativas do estimador ótimo de Kalman motivadas principalmente pelo cálculo da matriz de covariâncias e sua influência no esforço computacional resultante. Este último foi analisado para a formulação padrão do filtro de Kalman empregado para um sistema linear invariante no tempo e com ganhos ótimos pré-calculados. Considerações com relação ao cálculo "on-line" do filtro de Kalman, sistema linear variante no tempo e ao sistema não linear foram realizadas. Foi implementado o estimador com ganhos pré-calculados e os resultados foram comparados com o estimador calculando os ganhos de modo transitório, para toda a faixa de velocidade. Concluiu-se que os ganhos pré-calculados apresentam valores mais elevados, para baixas velocidades, comparados com os ganhos obtidos de modo transitório.

CAPÍTULO 7

TÉCNICAS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA

7.1) INTRODUÇÃO

Em aplicações do algoritmo de filtragem de Kalman-Bucy para estimação de estados em sistemas dinâmicos, verifica-se em alguns casos a ocorrência de problemas de divergência, em função de erros na modelagem do sistema e da precisão de aritmética finita durante a resolução computacional do algoritmo do filtro. Uma solução imediata seria aumentar a precisão da modelagem do sistema, porém isto pode ser bastante difícil do ponto de vista prático e em alguns casos até "impossível", dependendo da complexidade do sistema.

As duas fontes de divergência citadas acima possuem uma influência menor quando as entradas de ruído de estado apresentam valores elevados e conseqüentemente mais elevados são os ganhos do filtro. Por outro lado, se os ruídos de entrada são reduzidos e considerando-se erros no modelo dinâmico do sistema, quando o filtro opera por um longo intervalo de tempo, processando uma grande quantidade de dados, este assume como "correto" o modelo, resultando uma matriz de covariância do erro de estimação bastante reduzida apresentando estatísticas otimistas, o que não confere com a realidade. Como conseqüência, o ganho do filtro torna-se reduzido e as novas medições realizadas nas saídas do sistema praticamente não são consideradas, significando que o filtro está "fechado" para novas informações das grandezas de saída. [9],[18]

As técnicas de prevenção da divergência do filtro são várias. [9],[18],[44] Pode-se por exemplo, realizar o incremento arbitrário da matriz de covariância $P(k/k)$, de modo a manter seus elementos acima de um limite inferior definido a partir de simulações computacionais ou da realização de uma determinação experimental de níveis de ruído de entrada do sistema. Em função deste nível de ruído de estado, utiliza-se uma estimação adaptativa da variância deste ruído $Q(k)$, de modo a evitar uma redução acentuada da matriz de covariâncias e conseqüentemente, da matriz de ganhos. A adaptação em $Q(k)$ é realizada em função da análise das únicas grandezas disponíveis para avaliação do desempenho do filtro que são: resíduo de predição das saídas $r(k+1/k)$ (eq. 2.14) e a estimação de suas estatísticas de 2ª ordem (covariância) (eq. 2.65). A equação 2.14 é repetida aqui devido a sua importância no desenvolvimento desta seção:

$$r(k+1/k) = z(k+1) - E\{z(k+1)/Z_k\}, \quad (7.1)$$

onde $E\{z(k+1)/Z_k\} = C(k+1).x_b(k+1/k)$: valor esperado para a saída do sistema em t_{k+1} dado o conjunto de medições, desde o instante inicial (t_0) até o instante anterior t_k (espaço formado pelo conjunto de medições Z_k).

No algoritmo do filtro de Kalman observa-se que a correção do estado estimado [$x_b(k+1/k+1)$] no instante da medição t_{k+1} , é proporcional ao resíduo de predição, onde a constante de proporcionalidade é justamente o ganho do filtro $K(k+1)$ (eq. 2.73). Este por sua vez, é proporcional à inversa da covariância do resíduo.

7.2) PROCEDIMENTOS GERAIS DE PREVENÇÃO DA DIVERGÊNCIA

A idéia básica para a prevenção da divergência é apresentada em [18]. Esta consiste em aumentar a matriz de covariância $P(k/k)$ de modo a compensar erros de modelagem do sistema segundo duas metodologias diferentes:

a) Fornecer uma entrada de ruído "fictício" para o sistema ou atribuir os erros à imprecisão (incertezas) em alguns

parâmetros do sistema efetuando-se assim um acréscimo direto na matriz de covariâncias $P(k+1/k)$;

b) Determinar um peso maior no algoritmo de filtragem, aos dados mais recentes, desprezando-se informações mais anteriores e assim aumentando indiretamente a matriz de covariâncias. Isto é justificado porque estas observações mais antigas, sendo processadas por um longo período de tempo através de um modelo "errôneo" do sistema, não apresentam informações significativas.

Na metodologia proposta em "a", deve-se determinar a entrada de ruído adicional (δQ_a) por tentativas até obter-se uma performance satisfatória do filtro de modo que o erro de estimação seja consistente com suas estatísticas previstas (matriz de covariâncias). Por outro lado, na consideração de erros em função da incerteza de alguns parâmetros do sistema, o algoritmo de filtragem de Schmidt-Kalman inclui esta incerteza nos estados estimados pelo filtro, não havendo portanto uma estimação direta dos parâmetros em questão [18]. Obviamente o funcionamento depende dos parâmetros mais importantes na construção do modelo, o que varia de acordo com o caso.

Uma limitação do método de Schmidt-Kalman é que este envolve formulações recursivas para 2 matrizes de correlação, além das equações usuais de x_k e P . Logo, o esforço computacional de cálculo é bastante aumentado. No entanto, este esforço ainda é menor comparado com o desenvolvimento do filtro com estado aumentado para estimação de parâmetros (como o filtro de Kalman estendido). [18]. Portanto, se a estimação direta dos parâmetros não é necessária, o desenvolvimento de Schmidt-Kalman torna-se bastante interessante para consideração direta de incertezas de parâmetros na modelagem do sistema.

Na metodologia proposta em "b" pode-se empregar um algoritmo de Kalman modificado de modo que a matriz de ganho $K(k)$ e de covariâncias $P(k/k)$ sejam função de uma exponencial que "pondera" os dados mais anteriores. O decaimento da exponencial é controlado por um parâmetro que, deste modo, determina a "velocidade" com que as observações mais anteriores vão ser

desprezadas.

Uma outra possibilidade consiste em prevenir que a matriz de ganhos $K(k)$ se torne muito pequena, fixando-se a matriz de covariância P em um determinado valor que pode ser obtido experimentalmente após o filtro ter processado uma determinada quantidade de dados. A partir deste valor de P , obtem-se a matriz de ganhos $K(k)$ e de modo recursivo, obtem-se a matriz de covariâncias $P(k/k)$ utilizando-se $K(k)$ e a predição da covariância $P(k/k-1)$ feita antes da medição no instante t_k . Esta última técnica é bem mais apropriada para o processamento da filtragem em tempo real, sendo que a tarefa principal consiste em determinar um valor ótimo para P .

Estas metodologias apresentadas não são genéricas, possuindo portanto parâmetros que devem ser determinados e ajustados de modo particular para cada caso sendo considerado. A exceção da última técnica descrita, geralmente as outras não são aplicadas em operações de filtragem em tempo real. Descreve-se em [44] uma técnica adaptativa de estimação da covariância do ruído de estado para processamento em tempo real, baseado na análise da consistência estatística entre os resíduos de predição das saídas e a sua covariância. Estes conceitos já foram introduzidos no início deste capítulo. Apresenta-se de modo sucinto no apêndice G, esta técnica que inspirou a metodologia final [35] adotada neste trabalho para processamento em tempo real da filtragem adaptativa (seção 7.3). Esta metodologia objetivou superar algumas dificuldades encontradas na técnica proposta em [44] relacionadas com a elevação do esforço computacional (tempo de processamento e hardware adicional).

7.3) CONTROLE DA DIVERGÊNCIA ATRAVÉS DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS

De modo portanto a obter-se um algoritmo otimizado para aplicação em tempo real (com realimentação em tempo real dos resíduos), desenvolve-se uma metodologia baseada no índice quadrático dos resíduos de predição [35]. Os princípios básicos

desta metodologia são descritos abaixo.

7.3.1) Princípios básicos

O controle da divergência por este método, baseia-se exatamente no controle da matriz de covariância do erro de estimação, que é portanto o mesmo objetivo proposto em [44], porém utilizando-se ferramentas diferentes para a análise da consistência estatística dos resíduos.

Define-se assim o índice de qualidade do filtro. Este é obtido a partir das equações de predição e filtragem, constituindo-se num resíduo normalizado do filtro, ou como também pode ser denominado, índice quadrático do resíduo de predição (i_r):

$$i_r(k+1) = r(k+1/k)^T \cdot [C(k+1) \cdot P(k+1/k) \cdot C(k+1)^T + R(k+1)]^{-1} \cdot r(k+1/k) \quad (7.2)$$

Observa-se que a matriz utilizada no cálculo do índice quadrático (i_r) é justamente a inversa da estimação da covariância do resíduo de predição. Portanto, a qualidade da estimação de estados através do filtro de Kalman é avaliada em função da consistência estatística entre os resíduos obtidos e sua covariância calculada pela expressão 2.65.

A metodologia de análise da consistência estatística dos resíduos baseia-se fundamentalmente em duas importantes propriedades:

- Os resíduos apresentam distribuições gaussianas de média nula e densidade espectral de potência infinita (branco). Isto implica na completa definição do processo (resíduo) pelos seus dois primeiros momentos estatísticos (média e covariância).

Quando os resíduos tornam-se polarizados (médias não nulas) e grandes em magnitudes comparados com os valores RMS (eq. 2.65) previstos pela teoria (covariância), tem-se uma condição de divergência do processo de estimação pelo algoritmo de Kalman.

A partir do comportamento do índice quadrático, a matriz de covariância do ruído de estado $Q_d(k+1)$ é estimada em tempo real durante a operação do filtro. Para que a operação seja aceitável, o índice deve ficar dentro de uma faixa previamente especificada através de simulações de divergência usando o modelo dinâmico do sistema.

7.3.2) Estimação da covariância do ruído de estado

Após determinados, de forma experimental, os limites superior l_s e inferior l_i e também o incremento δQ_d a ser aplicado na matriz Q_d , a metodologia para o incremento utiliza uma "histerese" da seguinte maneira:

Se $i_r > l_s$, então $Q_d = Q_d + \delta Q_d$ até que $i_r < l_i$, a partir do qual faz-se $\delta Q_d = 0$ (O funcionamento já está normal novamente).

Propõe-se em [27] a metodologia que também é implementada neste trabalho, onde o ruído de estado é igualmente distribuído entre todos os estados e a estimação da covariância de ruído de estado é baseada no procedimento de histerese citado acima:

a) Q_0 é um escalar cujo valor inicial é bem pequeno de modo a ser posteriormente ajustado, no funcionamento do filtro para prevenção da divergência.

b) Q_0 é calculado de acordo com o índice de qualidade i_r , incrementando-se $Q_0 = Q_0 + \delta Q_0$ utilizando-se a faixa de histerese.

c) A covariância estimada do ruído de estado é obtida pela seguinte expressão:

$$Q_d(k) = Q_0 \cdot I_4, \quad (7.3)$$

onde I_4 é a matriz identidade de ordem 4, indicando portanto que o ruído de estado é distribuído igualmente.

7.3.3) Definição da covariância do ruído de medição

A matriz de covariância do ruído de medição a ser utilizada no estimador é obtida pela expressão:

$$R(k) = R_0 \cdot I_2, \quad (7.4)$$

onde R_0 é um escalar e I_2 é a matriz identidade de ordem 2

Observa-se que o ruído de medição é considerado distribuído igualmente por todas as saídas do sistema.

7.4) OPERAÇÃO DO FILTRO COM A ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA

Baseado no que foi exposto na seção 3.4.1 sobre a influência da metodologia de discretização do sistema contínuo e comportamento da tensão de entrada na covariância associada ao cálculo computacional do estimador, realiza-se as análises de filtragem adaptativa utilizando-se a tensão de alimentação senoidal. Como esta tensão aplicada na máquina está variando durante o período de amostragem (T_a), constitui um caso mais crítico para o funcionamento do estimador.

Implementa-se assim a técnica de filtragem adaptativa descrita na seção 7.3.2, onde os seguintes parâmetros foram ajustados através de simulações sucessivas do sistema:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 2 \text{ (Valor inicial)} & R_0 &= 1 \times 10^{-4} \text{ (Sem ruído de medição)} \\ l_1 &= 0.1 \text{ (Limite inferior)} & l_2 &= 1.0 \text{ (Limite superior)} \\ \delta Q_0 &= 0.4 \text{ (Incremento da covariância)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Com o objetivo de simular uma situação crítica que poderia provocar divergência do sistema, utiliza-se valores iniciais bastante otimistas para $P(0/0)$ e provoca-se um transitório nos valores iniciais do filtro de Kalman durante a partida da máquina:

$$\begin{aligned} P(0/0) &= 1 \times 10^{-4} \cdot I_4 \\ x_b(0/0) &= [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T \quad \text{e} \quad y_b(0/0) = [0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ajusta-se os valores dos limites superior e inferior para o índice quadrático do resíduo, bem mais rigorosos de modo a analisar apenas esta influência do valor inicial $P(0/0)$:

$$l_1 = 0.02 \quad e \quad l_2 = 0.1 \quad (7.7)$$

Na figura 7.1 observa-se os resultados para as relações de

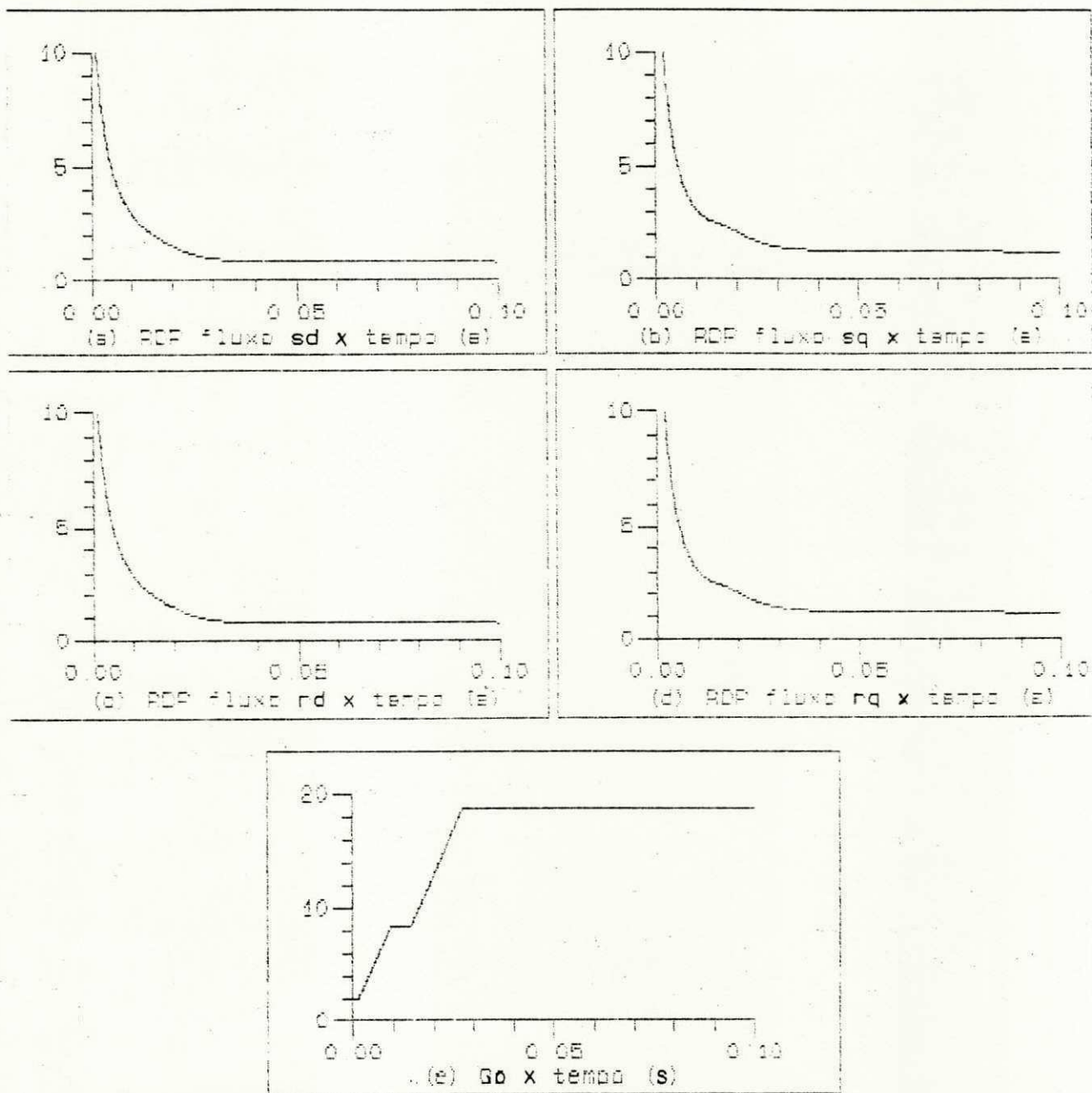


Fig. 7.1: Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman durante a partida da máquina.

desempenho (RDP's) da estimação estocástica das componentes de fluxos estatóricos e rotóricos que, por sua vez, apresentam consistência estatística. Também observa-se a variação de Q_0 adaptado através do índice quadrático do resíduo.

Repetindo-se esta simulação digital porém desligando-se o esquema adaptativo do estimador, obtem-se na figura 7.2 a superposição dos índices de qualidade da estimação com e sem adaptação. Observa-se o resultado bem melhor para o ir com a adaptação, onde este índice varia bem menos. Também para o caso sem adaptação, as RDP's não convergem para a unidade.

Existe uma sensibilidade considerável dos índices de avaliação de desempenho estatístico em relação aos valores de Q_0 (inicial) e do incremento δQ_0 . Por outro lado, com este esquema

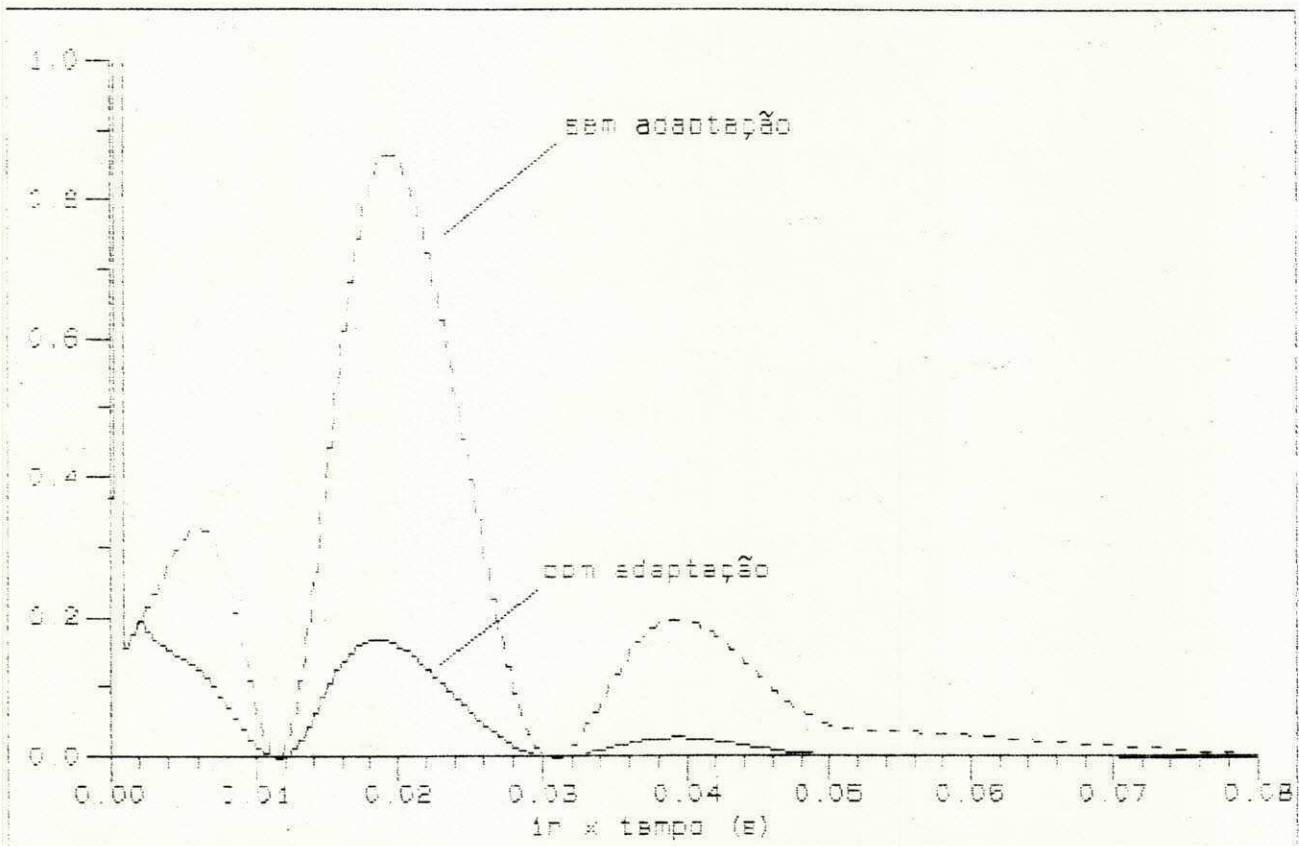


Fig. 7.2: Índices de qualidade da estimação com e sem filtragem adaptativa num transitório de partida.

adaptativo, o valor de $P(0/0)$ praticamente não influi no desempenho do sistema pois a correção na covariância é feita rapidamente após a obtenção do índice quadrático do resíduo. Diz-se portanto que o filtro está protegido contra a divergência em função de uma situação de valor inicial bastante otimista de $P(0/0)$. [44]

Realiza-se uma simulação de regime permanente onde a máquina está funcionando a velocidade nominal e um transitório é aplicado nos valores iniciais do filtro de Kalman:

$$x_b(0/0) = 0 \quad y_b(0/0) = 0 \quad (7.8)$$

Os parâmetros da estimação adaptativa são utilizados das expressões 7.5 sendo que a única diferença é a introdução de um ruído de medição gaussiano, branco, independente com média nula e covariância unitária:

$$R_0 = 1 \quad (7.9)$$

As relações de desempenho (RDP's), o índice quadrático do resíduo i_r e a excursão do parâmetro Q_0 podem ser observados na figura 7.3, apresentando consistência estatística na estimação, mesmo na presença de transitório inicial em regime permanente. Este resultado satisfatório só é obtido devido à utilização da filtragem adaptativa que eleva a covariância do estado estimado para equilibrar o elevado erro de estimação inicial.

Os resultados para as componentes de fluxo e de corrente fazendo-se a sobreposição entre valores estimados e reais são apresentados na figura 7.4. Pode-se observar perfeitamente que o tempo necessário para a convergência dos fluxos e correntes estimados devido ao transitório inicial é em torno de 20 ms. Conclui-se portanto, que além do estimador apresentar consistência estatística, obtem-se um excelente comportamento dinâmico com uma convergência bastante rápida na presença de um transitório. Entretanto, existe o compromisso da elevação da covariância não ser muito excessiva, pois uma elevação muito acentuada dos ganhos, embora melhore a resposta transitória, amplificaria os ruídos de medição em regime permanente,

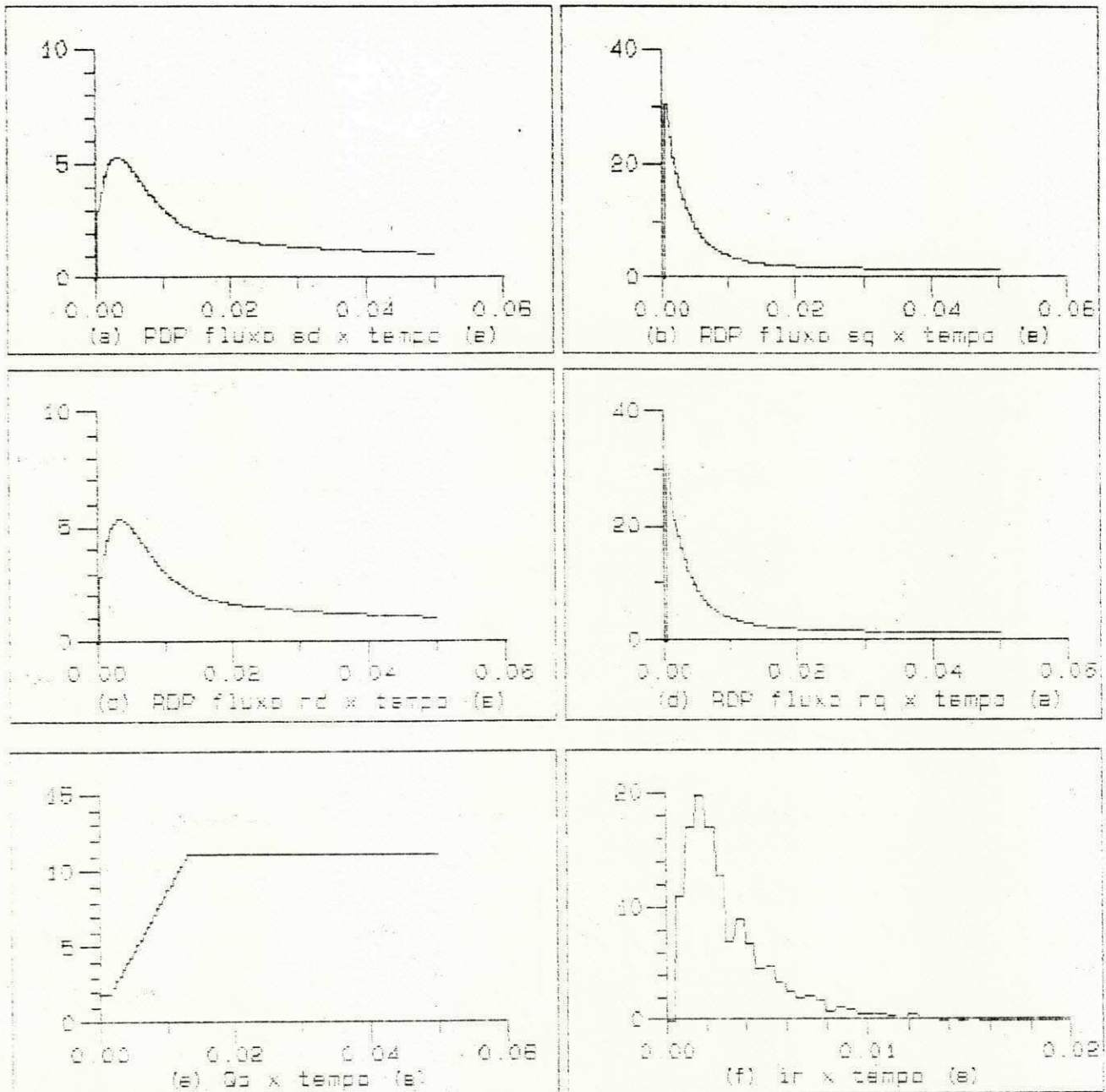


Fig. 7.3: Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman com a máquina em regime permanente.

deteriorando-se assim a estimação ótima de estados do sistema.

7.5) CONCLUSÃO

Analisou-se neste capítulo, as condições gerais que podem provocar a divergência do filtro de Kalman. Uma técnica para prevenção da divergência, baseada numa forma quadrática dos

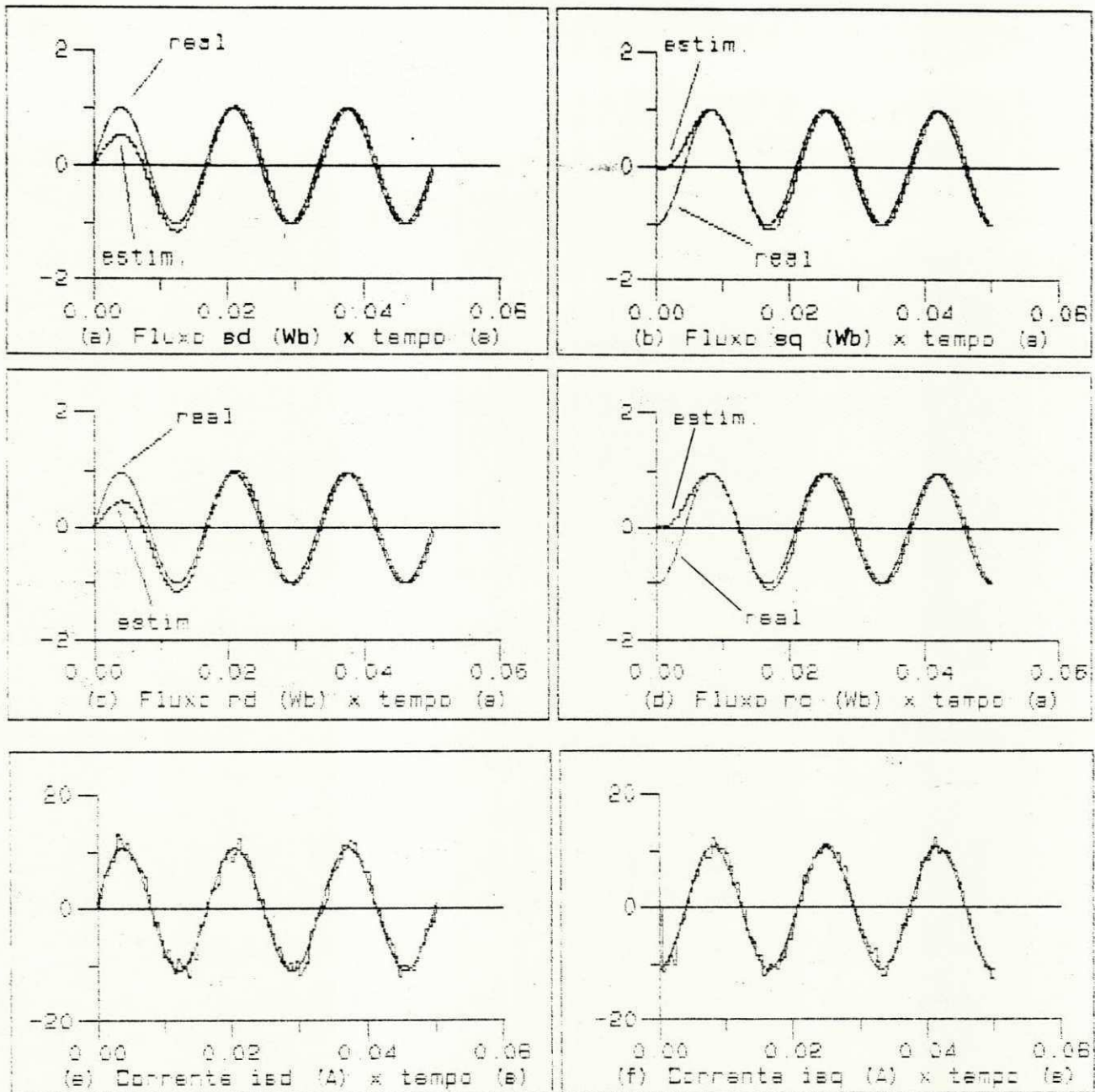


Fig. 7.4: Filtragem adaptativa com transitório no filtro de Kalman fluxos magnéticos e correntes reais e estimadas.

resíduos foi apresentada. Através desta, corrigiu-se a covariância do ruído de estado de modo que os resíduos fossem estatisticamente consistentes com a covariância prevista pelas expressões do estimador. Comparações do funcionamento do estimador com e sem adaptação da covariância foram realizadas, com resultados melhores para o estimador utilizando a filtragem adaptativa.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES GERAIS

Desenvolveu-se neste trabalho o estimador ótimo recursivo de Kalman para a estimação de fluxo magnético em máquinas assíncronas. Diferentemente do projeto de observadores determinísticos, esta abordagem de estimação estocástica proporciona a definição dos ganhos do estimador em função das propriedades estatísticas dos ruídos de estado e medição do sistema. O posicionamento dos polos do estimador não é portanto, função de algum critério baseado por exemplo, na resposta transitória do sistema. Este posicionamento é consequência dos níveis de covariância definidos para as entradas de ruído do sistema, utilizando-se a formulação recursiva do filtro de Kalman.

Inicialmente, realizou-se a modelagem estocástica da máquina assíncrona e estudos foram feitos com relação à metodologia de discretização e definição do período de amostragem.

Uma análise completa foi realizada para definir as estatísticas das entradas de ruído do simulador digital do sistema, de modo compatível com o funcionamento da máquina real. Verificou-se que esta análise é função do método de integração numérica da simulação digital.

Obteve-se, através de simulações, a covariância do erro associado com o cálculo computacional do estimador. Verificou-se que este erro é função do método de discretização e do comportamento da tensão de entrada na máquina, podendo ocasionar

a polarização do estimador.

O comportamento do resíduo de predição da saída foi analisado. Observou-se que o erro determinístico (polarização) que surge em função do processo de discretização, não se propaga para o resíduo de predição das correntes de saída.

Índices para o teste da consistência estatística da estimação foram introduzidos. Estes foram utilizados na fase de ajuste fino do estimador e no funcionamento em tempo real com a análise das variáveis e respectivas covariâncias estimadas.

Um filtro analógico foi projetado e introduzido na saída do sistema, seguido por uma análise completa do estimador com ordem aumentada pela inclusão da dinâmica do filtro. Transitórios em função dos valores iniciais do filtro de Kalman, introdução de conjugado de carga e partida da máquina foram estudados.

A situação de ruído de medição correlacionado, utilizando-se a condição de medições perfeitas do sistema aumentado (covariância do ruído de medição nula) foi discutida em detalhes.

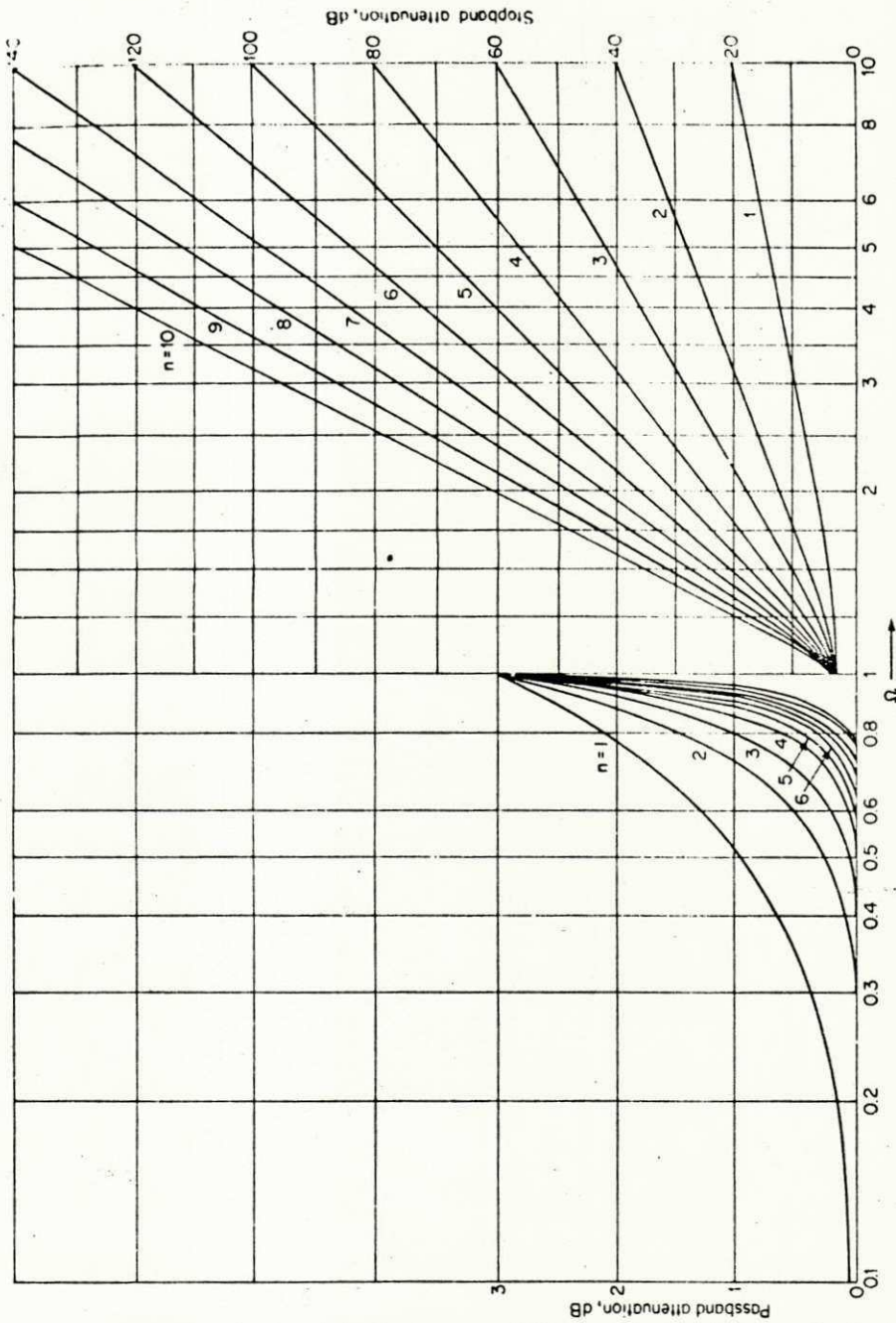
Realizou-se uma análise do esforço computacional (requisitos de memória de armazenamento e tempo de cálculo) do filtro de Kalman, com ganhos ótimos e covariâncias calculados previamente ("off-line") e "on-line". Verificou-se que os ganhos pré-calculados (regime permanente) são mais elevados, para velocidades inferiores à nominal, comparados com os ganhos obtidos de modo transitório no programa de simulação. Estes ganhos mais elevados proporcionam uma melhor resposta transitória reduzindo o tempo de convergência do estimador.

Analisou-se as condições gerais que podem provocar a divergência do filtro de Kalman e descreveu-se uma técnica de filtragem adaptativa de modo a obter-se consistência estatística na estimação. Comparando-se o funcionamento do estimador com e sem adaptação, verificou-se que os resultados foram piores para este último caso.

Finalmente, o objetivo deste trabalho é abrir o campo de perspectivas da utilização de técnicas avançadas de controle

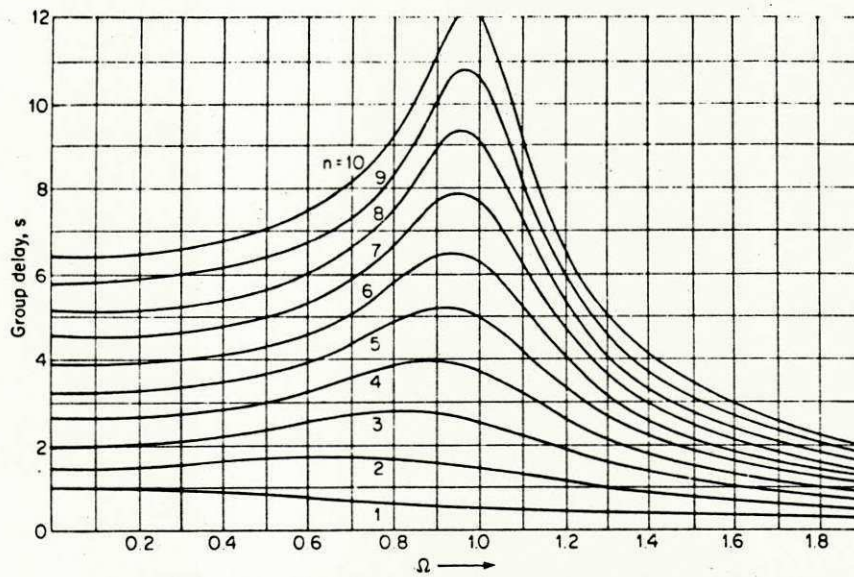
digital para máquinas elétricas. A estimação de fluxo magnético pode ser utilizada para implementação de controle vetorial direto, obtendo-se um sistema de controle bastante robusto e com excelente desempenho dinâmico. Ressalta-se entretanto, que existe um campo aberto para futuras pesquisas, utilizando-se o filtro de Kalman em máquinas síncronas e de indução com diferentes parâmetros. O fechamento da malha do sistema, com o controle do fluxo magnético e da corrente da máquina, através de um inversor fonte de tensão (VSI) comandado por um modulador por largura de pulso (PWM) também constitui um longo campo de estudos. Neste caso, uma atenção especial deve ser dada às tensões aplicadas na máquina e na entrada do algoritmo de estimação. Pode-se estender a análise utilizando-se os diversos tipos de reguladores digitais (histerese, preditivo, proporcional-integral, etc) no sistema de controle completo com a estimação de fluxo magnético.

ANEXO I



Attenuation characteristics for Butterworth filters. (From Anatol I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967. By permission of the publishers.)

ANEXO II



Group-delay characteristics for Butterworth filters. (From Anatol I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967. By permission of the publishers.)

ANEXO III

PARÂMETROS DA MÁQUINA

$$r_e = 0.39 \Omega$$

$$r_r = 1.41 \Omega$$

$$l_e = 0.094 \text{ H}$$

$$l_r = 0.094 \text{ H}$$

$$m_{er} = 0.091 \text{ H}$$

$$K_j = 0.04 \text{ Kg.m}^2$$

$$K_a = 0.01 \text{ N.m / rad / s}$$

$$p = 2 \text{ pares de polos}$$

$$f = 60 \text{ Hz}$$

APÊNDICE A

A.1) BASE MATEMÁTICA PARA A ESTIMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Para estabelecer a expressão 2.52 numa base matemática mais rigorosa, introduz-se inicialmente um Lema cujos resultados são válidos para qualquer estimação quadrática média, incluindo-se estimação não linear. Assume-se também que as funções densidade de probabilidade necessárias existem.

LEMA: Supondo-se que o vetor de variáveis aleatórias x deve ser estimado dos vetores de variáveis conhecidas z_1, z_2, \dots, z_q e que x e z_j possuem a função de densidade de probabilidade conjunta $p(x, z_1, z_2, \dots, z_q)$, a estimação x_b deve ser escolhida tal que:

$$E\{[x_b - x]^T \cdot [x_b - x]\} = \text{mínimo} \quad (\text{A.1})$$

Então a estimação por mínimos quadrados médios x_b de x dados z_1, z_2, \dots, z_q é definida por:

$$x_b = E\{x/z_1, z_2, \dots, z_q\} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando-se o teorema para o problema específico da máquina em consideração, o objetivo é obter a melhor estimação de $x(k+1)$ dados os vetores de medição em todos os instantes anteriores a t_{k+1} : z_1, z_2, \dots, z_k . Compõe-se o espaço Z_k formado por todos os vetores de medição até o instante t_k : $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$.

Assim pela expressão A.2 tem-se a equação de predição:

$$x_b(k+1/k) = E\{x(k+1)/Z_k\} \quad (\text{A.3})$$

$$x_b(k+1/k) = E\{F_a(k+1,k).x(k) + H_a(k).u(k) + G_a(k).w_a(k)/Z_k\} \quad (A.4)$$

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).E\{x(k)/Z_k\} + H_a(k).E\{u(k)/Z_k\} + G_a(k).E\{w_a(k)/Z_k\} \quad (A.5)$$

A primeira esperança matemática na expressão A.5 é por definição do problema de estimação ótima:

$$E\{x(k)/Z_k\} = x_b(k/k) \quad (A.6)$$

Para a entrada determinística tem-se logicamente:

$$E\{u(k)/Z_k\} = u(k) \quad (A.7)$$

Por hipótese, o ruído de estado $w_a(k)$ é independente dos estados em qualquer tempo anterior a t_{k+1} e também é independente do ruído de medição $v(k)$. Assim, a média condicionada de $w_a(k)$ se iguala à média não condicionada que é nula por definição:

$$E\{w_a(k)/Z_k\} = E\{w_a(k)\} = 0 \quad (A.8)$$

Portanto, a melhor estimação de $x(k+1)$ baseada na estimação do instante anterior, em t_k , é dada por:

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) + H_a(k).u(k) \quad (A.9)$$

Está comprovada assim a expressão 2.52 sugerida inicialmente na seção 2.4.3 para a predição do estado. Assumindo-se que a medição em t_{k+1} é disponível, introduz-se a operação de filtragem (correção ótima) da predição realizada, resultando na expressão 2.49.

A.2) CONCEITO DE PROJEÇÕES ORTOGONAIS

O espaço de variáveis aleatórias com momentos estatísticos de segunda ordem finitos e com o produto escalar: [18].

$\langle x, y \rangle = E\{x.y\}$, e a norma:

$$\| x \| = \{E\{x^2\}\}^{1/2} \quad (A.10)$$

constitui um "espaço normal" completo (Espaço de Hilbert de dimensão infinita). Por definição, a estimação com mínima

variância minimiza a norma do erro de estimação:

$$E\{(x - x_b)^2\} = \text{mínimo} \quad (\text{A.11})$$

O seguinte Lema apresenta uma condição que é equivalente à minimização da norma:

LEMA DE PROJEÇÕES ORTOGONAIS:

Seja X um espaço normado de dimensão infinita, $x \in X$ e $Z \subset X$ onde Z é um subespaço de X , então:

$$\min_{\alpha \in Z} \|x - \alpha\|^2 = \|x - x_b\|^2 \text{ se e somente se}$$

$\langle x - x_b, \alpha \rangle = 0$ para todo $\alpha \in Z$. Em outras palavras, o erro de estimação deve ser ortogonal ao "espaço aproximado" Z . Deseja-se portanto determinar $\alpha \in Z$ que minimiza a norma do erro para todo $x \in X$.

Escrevendo-se $x = e_b + x_b$ onde $e_b = x - x_b$ é o erro e x_b é a melhor estimação, então x_b é a projeção ortogonal de x em Z (Fig. A.1).

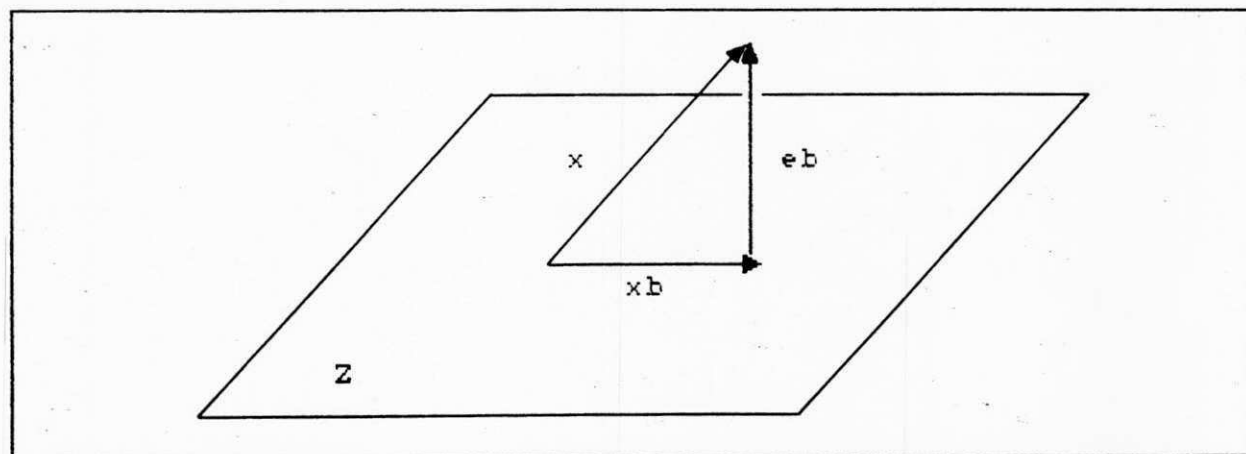


Fig. A.1: Ortogonalidade entre o erro de estimação e_b e o estado estimado x_b .

Aplicação do Teorema para o problema em questão:

No problema de filtragem recursiva, o espaço aproximado Z_k é

formado pelos vetores de medição de dimensão m (número de saídas) $\{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$. Portanto o espaço Z_k possui dimensão $k.m$.

Define-se os vetores de dimensão m $\{g(1), g(2), \dots, g(k)\}$ como uma base ortonormal para Z_k , ou seja:

$$\|g(i)\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$E\{g(i).g(j)^T\} = \begin{cases} I & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

É interessante observar que para a minimização da expressão $E\{[x(k) - x_b(k/k)]^T.[x(k) - x_b(k/k)]\}$, deve-se minimizar cada componente da esperança matemática do erro.

A partir do Lema de Projeções Ortogonais, o erro de estimação é ortogonal à qualquer vetor da base ortonormal de Z_k :

$$E\{[x(k) - x_b(k/k)].g(i)^T\} = 0 \text{ para todo } i, \text{ ou seja:} \quad (\text{A.12})$$

$$E\{x(k).g(i)^T\} = E\{x_b(k/k).g(i)^T\} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando-se a expressão A.13 por $g(i)$ e aplicando-se o somatório:

$$\sum_{i=1}^k E\{x(k).g(i)^T\}.g(i) = \sum_{i=1}^k E\{x_b(k/k).g(i)^T\}.g(i) \quad (\text{A.14})$$

Pelo Lema, $x_b(k/k)$ é a projeção ortogonal de $x(k)$ no sub-espaço Z_k . Pode-se portanto determinar um conjunto de matrizes constantes $A(i)$ para as quais:

$$x_b(k/k) = \sum_{i=1}^k A(i).g(i) \quad (\text{A.15})$$

Comparando-se a expressão A.15 com o termo à direita do sinal da igualdade da expressão A.14, obtém-se facilmente que:

$$x_b(k/k) = \sum_{i=1}^k E\{x_b(k/k).g(i)^T\}.g(i) \quad (\text{A.16})$$

Logo a expressão A.14 torna-se:

$$\sum_{i=1}^k E\{x(k).g(i)^T\}.g(i) = x_b(k/k) \quad (A.17)$$

Desmembrando-se em dois termos:

$$\sum_{i=1}^{k-1} E\{x(k).g(i)^T\}.g(i) + E\{x(k).g(k)^T\}.g(k) = x_b(k/k) \quad (A.18)$$

Usando a expressão de $x(k)$ do modelo dinâmico do sistema:

$$x(k) = F_a(k,k-1).x(k-1) + H_a(k-1).u(k-1) + G_a(k-1).w_a(k-1) \quad (A.19.a)$$

$$z(k) = C(k).x(k) + v(k) \quad (A.19.b)$$

Obtem-se para a expressão A.18:

$$x_b(k/k) = \sum_{i=1}^{k-1} E\{[F_a(k,k-1).x(k-1) + H_a(k-1).u(k-1) + G_a(k-1).w_a(k-1)].g(i)^T\}.g(i) + E\{x(k).g(k)^T\}.g(k) \quad (A.20)$$

Como $w_a(k-1)$ é independente de Z_{k-1} tem-se que:

$$x_b(k/k) = F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1) + H_a(k-1).u(k-1) + E\{x(k).g(k)^T\}.g(k) \quad (A.21)$$

Entretanto, $g(k)$ é ortogonal à Z_{k-1} . Pode-se mostrar que $[z(k) - C(k).x_b(k/k-1)]$ é ortogonal à Z_{k-1} e portanto está inserido no subespaço Z_k . Portanto, o resíduo de predição da saída para $t = t_k$ é ortogonal ao espaço formado pelas medições anteriores (Z_{k-1}) e assim situa-se no subespaço Z_k . Em decorrência disto, pode-se escrever:

$$E\{x(k).g(k)^T\}.g(k) = K(k).[z(k) - C(k).x_b(k/k-1)] \quad (A.22)$$

Adicionalmente, tem-se claramente da definição do problema que:

$$E\{[x(k-1) - x_b(k-1/k-1)].z(i)^T\} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (A.23)$$

Ou seja, o erro de estimação em t_{k-1} é ortogonal a todas as medições já realizadas, inclusive à medição em t_{k-1} .

Multiplicando-se a expressão A.23 pela matriz $F_a(k,k-1)$:

$$E\{[F_a(k,k-1).x(k-1) - F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1)].z(i)^T\}=0 \quad (A.24)$$

Somando-se e subtraindo-se a entrada determinística:

$$E\{[F_a(k,k-1).x(k-1) + H_a(k-1).u(k-1) - F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1) - H_a(k-1).u(k-1)].z(i)^T\}=0 \quad (A.25)$$

Utilizando-se a equação dinâmica do sistema (eq. A.19.a):

$$E\{[x(k) - F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1) - H_a(k-1).u(k-1)].z(i)^T\} = 0$$

com $i = 1, 2, \dots, k-1$ (A.26)

Multiplicando-se pela matriz $C(k)$:

$$E\{[C(k).x(k) - C(k).F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1) - C(k).H_a(k-1).u(k-1)].z(i)^T\} = 0 \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (A.27)$$

Utilizando-se a equação de medição do sistema (eq. A.19.b) e baseado no fato de que os ruídos de estado e medição têm média nula, tem-se:

$$E\{[z(k) - C(k).F_a(k,k-1).x_b(k-1/k-1) - C(k).H_a(k-1).u(k-1)].z(i)^T\} = 0 \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (A.28)$$

Está provado portanto pela expressão A.28 que o resíduo de predição da saída para o instante t_k é ortogonal ao espaço do conjunto de medições Z_{k-1} como já havia sido afirmado.

A estrutura do filtro ótimo baseado nas expressões A.21 e A.22 é dada por:

$$x_b(k/k) = x_b(k/k-1) + K(k).[z(k) - C(k).x_b(k/k-1)] \quad (A.29)$$

Resta portanto, determinar o ganho ótimo $K(k)$. Para isto, define-se a expressão do erro de estimação ótima:

$$e_b(k/k) = x(k) - x_b(k/k) \quad (A.30)$$

Utilizando-se as expressões A.19 e A.29, obtém-se o erro de estimação de modo similar ao procedimento que resultou na expressão 2.60:

$$e_b(k/k) = [I_4 - K(k).C(k)].F_a(k,k-1).e_b(k-1/k-1) + [I_4 - K(k).C(k)].G_a(k-1).w_a(k-1) - K(k).v(k) \quad (A.31)$$

A expressão do vetor de saída $z(k)$ é obtida de modo alternativo:

$$z(k) = C(k) \cdot [F_a(k, k-1) \cdot x(k-1) + H_a(k-1) \cdot u(k-1) + G_a(k-1) \cdot w_a(k-1)] + v(k) \quad (A.32)$$

$$z(k) = C(k) \cdot F_a(k, k-1) \cdot [e_b(k-1/k-1) + x_b(k-1/k-1)] + C(k) \cdot H_a(k-1) \cdot u(k-1) + C(k) \cdot G_a(k-1) \cdot w_a(k-1) + v(k) \quad (A.33)$$

No entanto, pelo Lema de Projeções Ortogonais:

$$E\{e_b(k/k) \cdot z(k)^T\} = 0 \quad (A.34)$$

Utilizando-se as expressões A.31 e A.33 e fazendo-se as considerações de independência das variáveis na estimação:

$$\begin{aligned} E\{e_b(k-1/k-1) \cdot x_b(k-1/k-1)^T\} &= E\{e_b(k-1/k-1) \cdot w_a(k-1)^T\} = 0 \\ E\{e_b(k-1/k-1) \cdot v(k)^T\} &= E\{w_a(k-1) \cdot e_b(k-1/k-1)^T\} = 0 \\ E\{w_a(k-1) \cdot v(k)^T\} &= E\{v(k) \cdot x_b(k-1/k-1)^T\} = 0, \end{aligned} \quad (A.35)$$

e também definindo-se as covariâncias:

$$\begin{aligned} E\{e_b(k-1/k-1) \cdot e_b(k-1/k-1)^T\} &= P(k-1/k-1) \\ E\{w_a(k-1) \cdot w_a(k-1)^T\} &= Q_a(k-1) \\ E\{v(k) \cdot v(k)^T\} &= R(k) \end{aligned} \quad (A.36)$$

obtem-se para a expressão A.34:

$$\begin{aligned} E\{e_b(k/k) \cdot z(k)^T\} &= F_a(k, k-1) \cdot P(k-1/k-1) \cdot F_a(k, k-1)^T \cdot C(k)^T + \\ &G_a(k-1) \cdot Q_a(k-1) \cdot G_a(k-1)^T \cdot C(k)^T - K(k) \cdot [C(k) \cdot F_a(k, k-1) \cdot P(k-1/k-1) \cdot \\ &F_a(k, k-1)^T \cdot C(k)^T + C(k) \cdot G_a(k-1) \cdot Q_a(k-1) \cdot G_a(k-1)^T \cdot C(k)^T + R(k)] = 0 \end{aligned} \quad (A.37)$$

Definindo-se adicionalmente:

$$P(k/k-1) = F_a(k, k-1) \cdot P(k-1/k-1) \cdot F_a(k, k-1)^T + G_a(k-1) \cdot Q_a(k-1) \cdot G_a(k-1)^T \quad (A.38)$$

A expressão A.37 torna-se:

$$E\{e_b(k/k) \cdot z(k)^T\} = P(k/k-1) \cdot C(k)^T - K(k) \cdot [C(k) \cdot P(k/k-1) \cdot C(k)^T + R(k)] = 0 \quad (A.39)$$

Logo, a matriz de ganhos ótimos é dada por:

$$K(k) = P(k/k-1) \cdot C(k)^T \cdot [C(k) \cdot P(k/k-1) \cdot C(k)^T + R(k)]^{-1} \quad (A.40)$$

Usando-se a expressão do erro $e_b(k/k)$ (eq. A.31), obtém-se a expressão para a covariância do erro de estimação ótima:

$$P(k/k) = E\{e_b(k/k) \cdot e_b(k/k)^T\} \quad (A.41)$$

Considerando-se $e_b(k-1/k-1)$, $w_d(k-1)$ e $v(k)$ independentes entre si (expressões A.35) tem-se:

$$P(k/k) = [I_4 - K(k) \cdot C(k)] \cdot P(k/k-1) \cdot [I_4 - K(k) \cdot C(k)]^T + K(k) \cdot R(k) \cdot K(k)^T \quad (A.42)$$

Deduziu-se assim o filtro de Kalman-Bucy inteiramente utilizando-se o conceito de projeções ortogonais com abordagem de propriedades estatísticas [18]

A.3) CONDIÇÕES INICIAIS E ESTIMAÇÃO NÃO POLARIZADA

As relações recursivas desenvolvidas nos itens anteriores deste apêndice são válidas para todo o tempo t_k . Resta no entanto a definição do procedimento de partida da resolução numérica do algoritmo, uma vez que as medições são feitas a partir do instante t_1 . Como o estado inicial não é conhecido inteiramente e não existe medição disponível em t_0 , este é modelado por uma função densidade de probabilidade gaussiana definindo-se a média e a covariância:

$$x_{b0} = E\{x_0\} \quad (A.43)$$

$$P_0 = E\{x_0 \cdot x_0^T\} \quad (A.44)$$

Esta escolha da estimação inicial dos estados apresenta a vantagem de produzir um esquema de estimação não polarizada para todo tempo t_k como se verificará a seguir: [18]

DEFINIÇÃO: A estimação x_b de um vetor de variáveis aleatórias x é dita não polarizada se e somente se:

$$E\{x_b\} = E\{x\} \quad (A.45)$$

Como a estimação $x_b(k/k)$ é uma variável aleatória, pode-se formalmente obter a sua esperança matemática utilizando-se a

expressão A.29:

$$E\{x_b(k/k)\} = F_a(k,k-1).E\{x_b(k-1/k-1)\} + H_a(k-1).u(k-1) + K(k). \\ [E\{z(k)\} - C(k).E\{x_b(k/k-1)\}] \quad (A.46)$$

Porém pelas expressões A.19.b e A.19.a:

$$E\{z(k)\} = C(k).E\{x(k)\} = C(k).F_a(k,k-1).E\{x(k-1)\} + C(k).H_a(k-1). \\ u(k-1), \quad (A.47)$$

e definindo-se:

$$E\{x_b(k/k-1)\} = F_a(k,k-1).E\{x_b(k-1/k-1)\} + H_a(k-1).u(k-1), \quad (A.48)$$

$$\text{onde: } E\{w_a(k-1)\} = E\{v(k)\} = 0 \quad (A.49)$$

Obtem-se a seguinte expressão, substituindo-se A.47 e A.48 em A.46:

$$E\{x_b(k/k)\} = F_a(k,k-1).E\{x_b(k-1/k-1)\} + H_a(k-1).u(k-1) + K(k). \\ C(k).F_a(k,k-1).[E\{x(k-1)\} - E\{x_b(k-1/k-1)\}] \quad (A.50)$$

Supondo-se o instante t_k com $k = 1$ (instante da 1ª medição na operação do estimador):

$$E\{x_b(1/1)\} = F_a(1,0).E\{x_b(0/0)\} + H_a(0).u(0) + K(1).C(1).F_a(1,0). \\ [E\{x(0)\} - E\{x_b(0/0)\}] \quad (A.51)$$

Portanto $x_b(0/0)$ deve ser especificado: $E\{x_b(0/0)\} = x_{b0}$

Escolhendo-se o valor de $x_{b0} = E\{x(0)\}$, a equação A.51 torna-se na forma simplificada:

$$E\{x_b(1/1)\} = F_a(1,0).E\{x(0)\} + H_a(0).u(0) \quad (A.52)$$

Considerando-se o valor esperado do estado real utilizando a expressão A.19.a:

$$E\{x(1)\} = F_a(1,0).E\{x(0)\} + H_a(0).u(0) + G_a(0).E\{w_a(0)\} \quad (A.53)$$

$$E\{x(1)\} = F_a(1,0).E\{x(0)\} + H_a(0).u(0) \quad (A.54)$$

Obtem-se portanto $E\{x(1)\} = E\{x_b(1/1)\}$ e por indução $E\{x(k)\} = E\{x_b(k/k)\}$.

Concluindo-se, o estimador ótimo de Kalman definido pela expressão A.29 representa um estimador não polarizado. Esta característica é conveniente porque possibilita $P(k/k)$ e a covariância do estado real $E\{x(k).x(k)^T\}$ serem distribuídas em torno do mesmo ponto.

APÊNDICE B

B.1) RUNGE KUTTA DE 4ª ORDEM - ANÁLISE DO INCREMENTO DA COVARIÂNCIA DURANTE O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

B.1.1) Método generalizado de Runge Kutta (ordem n)

Dado um sistema de equações diferenciais (lineares ou não) de ordem n:

$$dx(t)/dt = f(x,t) \quad (B.1)$$

O método introduzido por Johnston, 1982 [37], fornece x_{i+1} (variáveis de estado no tempo $t = (i+1).h$) em função dos estados conhecidos no instante anterior $t = i.h$ (x_i):

$$x_{i+1} = x_i + (c_1.k_1 + c_2.k_2 + \dots + c_n.k_n) \quad (B.2)$$

$$k_1 = h.f(x_i, i.h) \quad (B.3)$$

$$k_j = h.f[x_i + a_j.k_{j-1}, (i+b_j).h] \quad j = 2, 3, n \quad (B.4)$$

Onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes que ponderam os resultados incrementais previstos para as variáveis de estado durante o intervalo de integração t_i, t_{i+1} . A definição destas constantes é função da ordem do método de integração de Runge-Kutta;

a_2, a_3, \dots, a_n são multiplicadores dos incrementos k 's utilizados para cálculo das derivadas nos diferentes pontos do intervalo de integração.

b_2, b_3, \dots, b_n são multiplicadores que definem qual ponto do intervalo de integração está sendo considerado para cálculo da

derivada.

B.1.2) Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

$$x_{i+1} = x_i + (c_1.k_1 + c_2.k_2) \quad (B.5)$$

$$k_1 = h.f(x_i, i.h) \quad (B.6)$$

$$k_2 = h.f[x_i + a_2.k_1, (i+b_2).h] \quad (B.7)$$

Para este método tem-se o cálculo das derivadas no início e no final do intervalo h. Logo:

$$c_1 = c_2 = 1/2 \quad a_2 = b_2 = 1 \quad (B.8)$$

B.1.3) Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$x_{i+1} = x_i + (c_1.k_1 + c_2.k_2 + c_3.k_3 + c_4.k_4) \quad (B.9)$$

$$\text{onde: } c_1 = c_4 = 1/6 \quad c_2 = c_3 = 1/3 \quad (B.10)$$

Neste método são calculados 4 valores de incrementos para as variáveis de estado no intervalo h, utilizando-se uma derivada no início, uma no final e duas no centro do intervalo h. A média ponderada feita dos incrementos aplica um peso dobrado para as estimativas utilizando as derivadas no meio do intervalo, em relação ao peso atribuído nos extremos do intervalo.

As expressões dos incrementos k's são escritas por:

$$\begin{aligned} k_1 &= h.f(x_i, i.h) \\ k_2 &= h.f[x_i + a_2.k_1, (i+b_2).h] \\ k_3 &= h.f[x_i + a_3.k_2, (i+b_3).h] \\ k_4 &= h.f[x_i + a_4.k_3, (i+b_4).h] \end{aligned} \quad (B.11)$$

Assim, para este método tem-se:

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = 1/2 & \quad b_2 = b_3 = 1/2 \\ a_4 = 1 & \quad b_4 = 1 \end{aligned} \quad (B.12)$$

Realiza-se portanto, a integração do sistema de equações de estado da máquina assíncrona (eq. 3.2) pelo Runge-Kutta de 4ª ordem onde a entrada determinística de tensão não foi considerada para efeito de determinação das propriedades estatísticas de 2ª ordem.

Na operação do método de Runge-Kutta aplica-se o ruído discreto $w_r(t)$ cujo objetivo é introduzir um nível de ruído cujo resultado seja compatível com o comportamento do sistema contínuo da máquina de indução.

Seguindo-se um desenvolvimento rigoroso do método de integração e considerando-se o ruído de estado $w_r(t)$ com propriedades estatísticas constantes, introduz-se o ruído de modo diferenciado no cálculo das 4 derivadas realizadas pelo integrador (eq's B.13). Definindo-se a função $f(x_1, i.h) = A.x_1 + G.w_{r1}$, relacionada pela expressão 3.2, escreve-se os incrementos k 's:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h.(A.x_1 + G.w_{r1}) \\
 k_2 &= [h.A + 1/2.(h.A)^2].x_1 + 1/2.h^2.A.G.w_{r1} + h.G.w_{r2} \\
 k_3 &= [h.A + 1/2.(h.A)^2 + 1/4.(h.A)^3].x_1 + 1/4.h^2.A^2.G.w_{r1} + \\
 &\quad 1/2.h^2.A.G.w_{r2} + h.G.w_{r3} \\
 k_4 &= [h.A + (h.A)^2 + 1/2.(h.A)^3 + 1/4.(h.A)^4].x_1 + 1/4.h^4. \\
 &\quad A^3.G.w_{r1} + 1/2.h^3.A^2.G.w_{r2} + h^2.A.G.w_{r3} + h.G.w_{r4}
 \end{aligned}
 \tag{B.13}$$

Substituindo-se as equações dos k 's na expressão final da média ponderada do cálculo dos estados (eq. B.9) obtém-se:

$$x_{1+1} = F_r.x_1 + M_1.w_{r1} + M_2.w_{r2} + M_3.w_{r3} + M_4.w_{r4} \tag{B.14}$$

onde as matrizes multiplicadoras da expressão B.14 acima são definidas por:

$$F_r = [I + (h.A) + 1/2.(h.A)^2 + 1/6.(h.A)^3 + 1/24.(h.A)^4] \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= 1/6.h.G + 1/6.h^2.A.G + 1/12.h^3.A^2.G + 1/24.h^4.A^3.G \\
M_2 &= 1/3.h.G + 1/6.h^2.A.G + 1/12.h^3.A^2.G \\
M_3 &= 1/3.h.G + 1/6.h^2.A.G \\
M_4 &= 1/6.h.G
\end{aligned}
\tag{B.16}$$

Observa-se portanto pela expressão B.15 que o Runge-Kutta trunca a série de potência da matriz transição de estados na ordem $n = 4$.

B.1.4) Covariância do cálculo dos estados através do Runge-Kutta de 4ª ordem

Utilizando-se a definição de independência do ruído de estado no tempo e também em relação aos outros componentes do vetor de ruído, escreve-se:

$$E\{w_{r1}.w_{rj}^T\} = \begin{cases} Q_r(t) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}
\tag{B.17}$$

Também considerando-se a independência entre o ruído de estado e o cálculo do estado obtido pelo algoritmo integrador:

$$E\{w_{r1}.x_j^T\} = E\{x_i.w_{rj}^T\} = 0 \text{ para qualquer } i,j
\tag{B.18}$$

Obtem-se a função de correlação do estado calculado pelo integrador:

$$\begin{aligned}
E\{x_{i+1}.x_{i+1}^T\} &= F_r.E\{x_i.x_i^T\}.F_r^T + M_1.E\{w_{r1}.w_{r1}^T\}.M_1^T + M_2. \\
&E\{w_{r2}.w_{r2}^T\}.M_2^T + M_3.E\{w_{r3}.w_{r3}^T\}.M_3^T + M_4.E\{w_{r4}.w_{r4}^T\}.M_4^T
\end{aligned}
\tag{B.19}$$

Considerando-se o valor médio nulo do ruído de estado, a função de correlação é igual à função de covariância e assim pode-se escrever a expressão discreta:

$$\begin{aligned}
P_r(i+1) &= F_r.P_r(t_1).F_r^T + G_{r1}.Q_{r1}.G_{r1}^T + G_{r2}.Q_{r2}.G_{r2}^T + \\
&G_{r3}.Q_{r3}.G_{r3}^T + G_{r4}.Q_{r4}.G_{r4}^T
\end{aligned}
\tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde: } P_r(i+1) &= E\{x_{i+1}.x_{i+1}^T\} & Q_{r1} &= E\{w_{r1}.w_{r1}^T\} \\
P_r(i) &= E\{x_i.x_i^T\} & G_{r1} &= M_1
\end{aligned}
\tag{B.21}$$

Assumindo-se que o ruído de estado possui estatísticas constantes escreve-se:

$$Q_r = Q_{r1} = Q_{r2} = Q_{r3} = Q_{r4} \quad (B.22)$$

Considerando-se um valor bem pequeno para h , pode-se aproximar a matriz de transição de estados F_r , composta pelo Runge-Kutta, pela matriz identidade:

$$F_r \approx I \quad (B.23)$$

O incremento de covariância no integrador é dado portanto:

$$P_r(i+1) - P_r(i) = G_{r1}.Q_r.G_{r1}^T + G_{r2}.Q_r.G_{r2}^T + G_{r3}.Q_r.G_{r3}^T + G_{r4}.Q_r.G_{r4}^T = DP_r \quad (B.24)$$

Desprezando-se os termos em h^2 e em ordens superiores, obtem-se as expressões simplificadas dos multiplicadores da covariância discreta:

$$\begin{aligned} G_{r1} &= 1/6.h.G & G_{r3} &= 1/3.h.G \\ G_{r2} &= 1/3.h.G & G_{r4} &= 1/6.h.G \end{aligned} \quad (B.25)$$

Substituindo-se as expressões B.25 em B.24 obtem-se:

$$DP_r = (1/6.h)^2.G.Q_r.G^T + (1/3.h)^2.G.Q_r.G^T + (1/3.h)^2.G.Q_r.G^T + (1/6.h)^2.G.Q_r.G^T \quad (B.26)$$

Obtem-se portanto, a expressão generalizada:

$$DP_r = h^2 . \left[\sum_{i=1}^n c_i^2 \right] . G . Q_r . G^T \quad (B.27)$$

onde $n = 4$ (ordem do Runge - Kutta integrador) e c_i 's são as constantes da média ponderada já definidas anteriormente.

APÊNDICE C

PROCESSO DE AMOSTRAGEM (ANÁLISE DO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA)

C.1) INTRODUÇÃO

Dado a forma de onda de um trem de pulsos $p(t)$, na fig. C.1, o processo de amostragem pode ser definido através da utilização deste sinal para modulação (Fig C.4) de um sinal contínuo $f(t)$ (Fig. C.2), obtendo-se assim o sinal amostrado $f_p^* = p(t).f(t)$ (Fig C.3) onde T_a é o período de amostragem. A transformada de Fourier de $p(t)$ é dada por [15]:

$$p(j.w) = (1/T_a) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(m.w_a.l/2)}{m.w_a.l/2} \cdot [\exp(-j.m.w_a.l/2)] \cdot \delta(w-m.w_a) \quad (C.1)$$

onde "l" é a largura do pulso retangular.

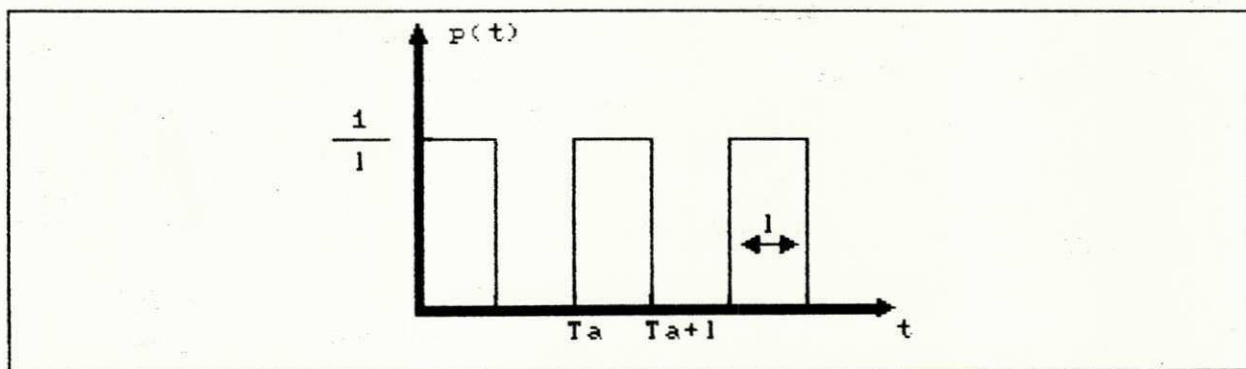


Fig. C.1: Trem de pulsos de área unitária

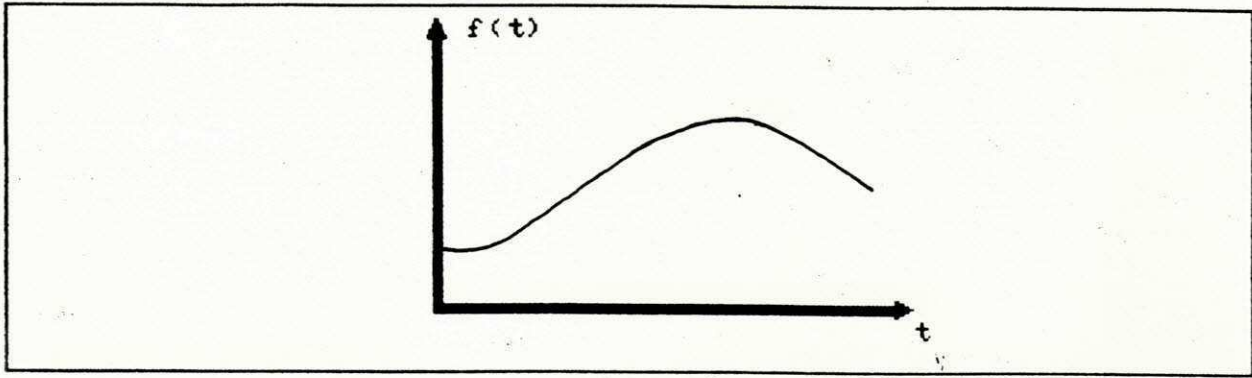


Fig. C.2: Sinal contínuo $f(t)$

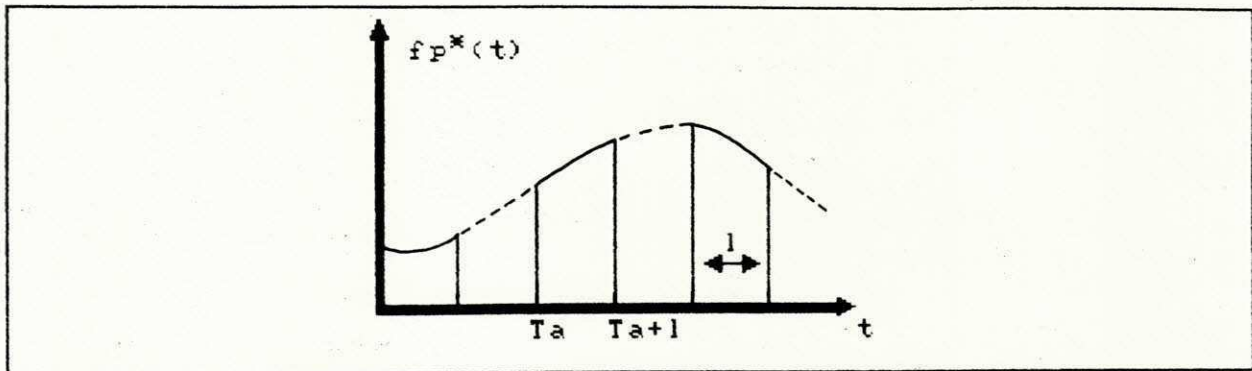


Fig. C.3: Sinal amostrado pelo trem de pulsos

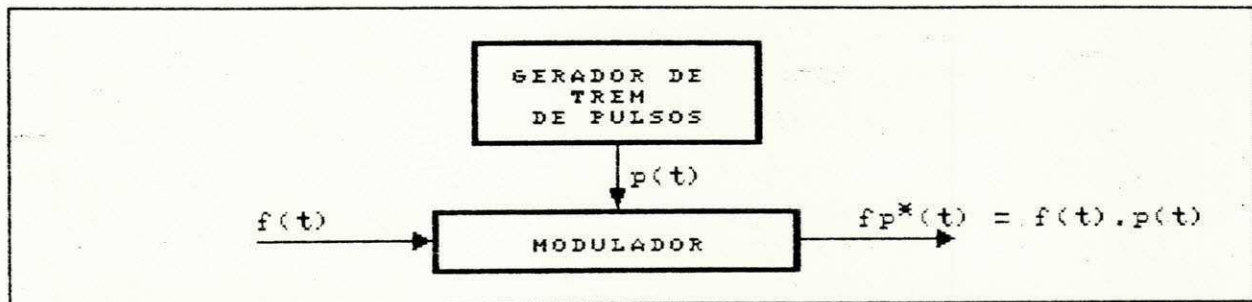


Fig.C.4: Processo de amostragem do sinal $f(t)$

Assim, $p(j\omega)$ é dado por um trem de impulsos, sendo ponderados por um coeficiente complexo, ocorrendo para valores de $\omega = m.\omega_a$.

Para se obter o espectro de frequência do sinal modulado $f_p^*(t)$ deve-se realizar uma convolução no domínio da frequência já que este sinal é obtido por uma multiplicação no tempo:

$$f_p^*(t) = p(t) \cdot f(t) \implies F_p^*(j\omega) = p(j\omega) \cdot F(j\omega) \quad (C.2)$$

$$F_p^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(j\omega') \cdot F[j(\omega - \omega')] \cdot d\omega' \quad (C.3)$$

Substituindo-se a expressão C.1 em C.3, alterando-se as posições de integral e somatório e utilizando-se o conceito que a função impulso é diferente de zero apenas no ponto $m \cdot \omega_a$ obtém-se:

$$F_p^*(j\omega) = (1/T_a) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(m \cdot \omega_a \cdot l/2)}{m \cdot \omega_a \cdot l/2} \cdot \exp(-j \cdot m \cdot \omega_a \cdot l/2) \cdot F[j(\omega - m \cdot \omega_a)] \quad (C.4)$$

Conclui-se que a operação de amostragem produz uma multiplicação do espectro de frequência fundamental $F(j\omega)$ do sinal anterior à amostragem, posicionando este espectro em valores múltiplos da frequência de amostragem ω_a , sendo denominados de espectros complementares. [15] A magnitude dos espectros fundamental e complementares é atenuada por um coeficiente complexo, como pode-se observar na expressão C.4.

C.2) AMOSTRAGEM IDEAL COM TREM DE IMPULSOS

De modo a simplificar a análise matemática dos sistemas de controle em tempo discreto, introduz-se o conceito de amostragem ideal com um trem de impulsos unitários $\delta_{T_a}(t)$ tal que:

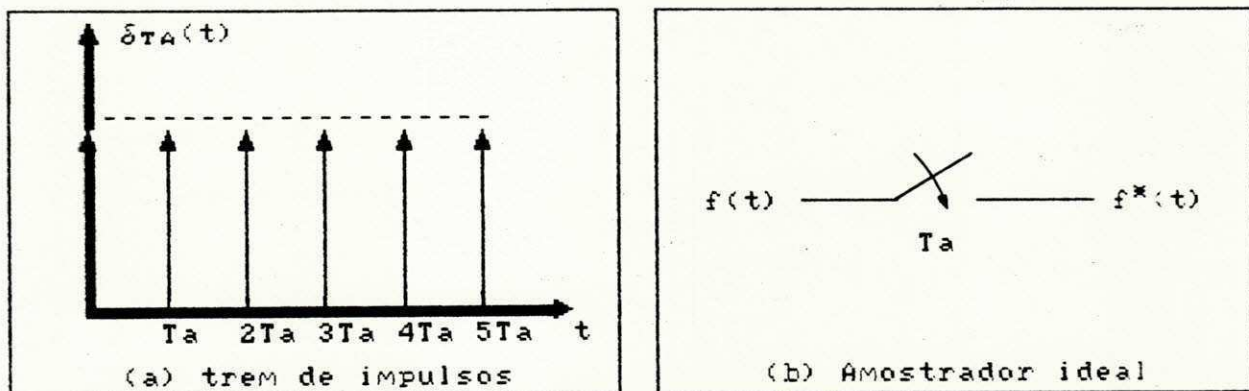


Fig. C.5: Amostragem ideal por trem de impulsos.

$$\delta_{T_a}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - k.T_a) \quad (C.5)$$

Onde $\delta(t - k.T_a)$ representa um impulso de área unitária no tempo $t = k.T_a$.

Do ponto de vista da aplicação prática, esta simplificação é justificada pelo fato da duração do pulso retangular (l) ser bem menor comparado ao tempo de amostragem T_a e à menor constante de tempo do sinal a ser amostrado $f(t)$. A saída do modulador de pulso $f_p^*(t)$ pode assim ser aproximada por um trem de impulsos onde a amplitude de $f_p^*(t)$ é considerada constante durante o período de tempo l.

O sinal modulado é aproximado pela expressão:

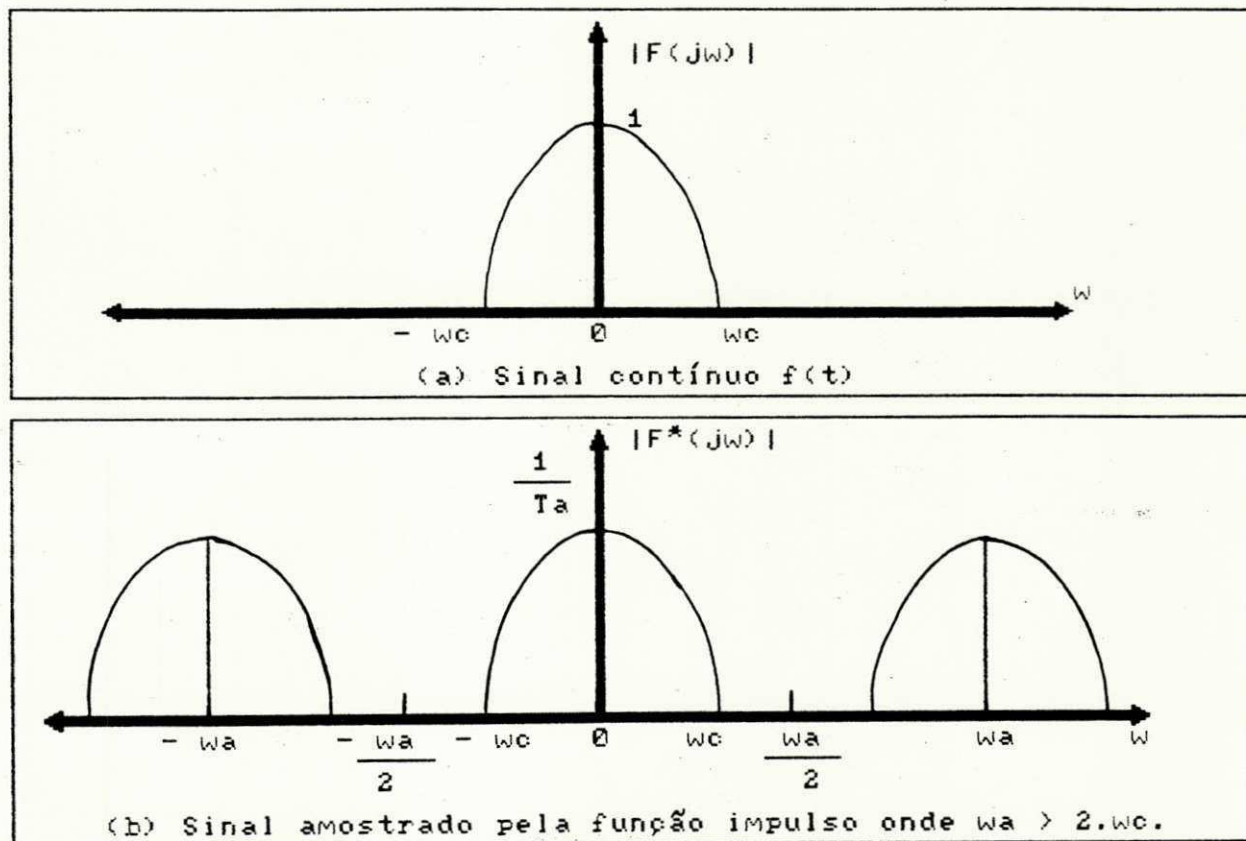


Fig. C.6: Espectro de frequência.

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_{T_a}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k.T_a) \cdot \delta(t - k.T_a) \quad (C.6)$$

A relação entre as funções moduladas no domínio do tempo pelas funções de pulso e impulso é obtida diretamente da expressão C.2 aplicando-se o caso limite $l \rightarrow 0$:

$$f^*(t) = \lim_{l \rightarrow 0} f_p^*(t) = \lim_{l \rightarrow 0} [p(t) \cdot f(t)] \quad (C.7)$$

De modo similar, no domínio da frequência obtem-se o espectro da função modulada pelo trem de impulsos como um caso limite da expressão de $F_p^*(j\omega)$ com $l \rightarrow 0$ (Eq. C.4):

$$F^*(j\omega) = \lim_{l \rightarrow 0} F_p^*(j\omega) = (1/T_a) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - m.\omega_a)] \quad (C.8)$$

Observa-se que a expressão C.8 não apresenta o termo de atenuação (função de l) dos espectros complementares. O processo de amostragem com impulsos ideais produz um espectro fundamental de forma similar à função contínua com amplitude multiplicada pelo fator $1/T_a$. Do mesmo modo, os espectros complementares deslocados periodicamente pela frequência de separação $m.\omega_a$ ($m = \pm 1, \pm 2 \dots$) também apresentam a mesma amplitude do espectro fundamental, se a frequência de amostragem ω_a é suficientemente elevada.

APÊNDICE D

D.1) CORRELAÇÃO ENTRE OS RUÍDOS DE ESTADO E MEDIÇÃO

Com o objetivo de analisar a correlação entre ruído de estado e medição, escreve-se as equações de estado do sistema (5.1) discretizado, obtido no capítulo 2 (eq's 2.1).

Sistema estocástico da máquina:

$$x(k+1) = F_a(k+1,k).x(k) + H_a(k).u(k) + G_a(k).w_a(k) \quad (D.1.a)$$

$$z(k) = C(k).x(k) + v(k) \quad (D.1.b)$$

Neste caso, aplica-se o Lema de Projeções Ortogonais (apêndice A), de modo que o erro de estimação $e_b(k+1/k)$ seja ortogonal ao vetor de medições $z(k)$ para $t = t_k$. Objetiva-se assim, minimizar a expressão $E\{[x(k+1) - x_b(k+1/k)]^T.[x(k+1) - x_b(k+1/k)]\}$, obtendo-se uma relação recursiva linear para $x_b(k+1/k)$ em função de $x_b(k/k-1)$. Assim, aplicando-se o Lema de Projeções Ortogonais escreve-se: [18],[32]

$$E\{e_b(k+1/k).z(k)^T\} = 0, \quad (D.2)$$

Obtem-se portanto, a expressão para o ganho $K_a(k)$:

$$K_a(k) = [F_a(k+1,k).P(k/k-1).C(k)^T + G_a(k).Q_c(k)]. \\ [C(k).P(k/k-1).C(k)^T + R(k)]^{-1} \quad (D.3)$$

A relação recursiva para a estimação nestas condições, é definida em [18]:

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k-1) + H_a(k).u(k) + K_a(k).$$

$$[z(k) - C(k).x_b(k/k-1)] \quad (D.4)$$

Utilizando-se a expressão do erro de estimação $e_b(k+1/k) = x(k+1) - x_b(k+1/k)$ e do ganho $K_a(k)$ obtém-se:

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k-1).F_a(k+1,k)^T + G_a(k).Q_a(k).$$

$$G_a(k)^T - K_a(k).[C(k).P(k/k-1).F_a(k+1,k)^T + Q_c(k)^T.G_a(k)^T] \quad (D.5)$$

As expressões D.4 e D.5 são desenvolvidas em [18] obtendo expressões idênticas às apresentadas em [32] para a predição do estado e covariância quando os ruídos de estado e medição são correlacionados entre si. Assim, define-se:

Expressão da predição do estado estimado para o tempo t_{k+1} :

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) + H_a(k).u(k) + G_a(k).Q_c(k).$$

$$[C(k).P(k/k-1).C(k)^T + R(k)]^{-1}.[z(k) - C(k).x_b(k/k-1)] \quad (D.6)$$

Expressão da covariância associada ao erro de predição do estado para o tempo t_{k+1} :

$$\begin{aligned} P(k+1/k) = & F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T \\ & - G_a(k).Q_c(k).[C(k).P(k/k-1).C(k)^T + R(k)]^{-1}.Q_c(k)^T.G_a(k)^T - \\ & F_a(k+1,k).K(k).Q_c(k)^T.G_a(k)^T - G_a(k).Q_c(k).K(k)^T.F_a(k+1,k)^T \end{aligned} \quad (D.7)$$

onde os ruídos discretos de estado ($w_a(k)$) e medição $v(k)$ foram definidos na seção 2.2.

A correlação entre $w_a(t_1)$ e $v(t_2)$, assumindo-se distribuição de probabilidade conjuntamente gaussiana, é definida pela relação:

$$E\{w_a(t_1).v(t_j)^T\} = \begin{cases} Q_c(t_1) & t_1 = t_j \\ 0 & t_1 \neq t_j \end{cases} \quad (D.8)$$

Neste caso portanto, o algoritmo de estimação de Kalman conserva as mesmas expressões de filtragem $[K(k)$ (eq. 2.76), $x_b(k+1/k+1)$ (eq. 2.73) e $P(k+1/k+1)$ (eq. 2.74)]. Entretanto, as expressões discretas de predição são alteradas segundo as relações D.6 e D.7.

Na expressão D.6 observa-se que a propagação de estado estimado para o tempo t_{k+1} depende da medição realizada no instante t_k . Portanto, ocorre um problema para o instante inicial ($t_k = 0$) onde a medição não está ainda disponível. Assim, para o instante inicial substitui-se as expressões D.6 e D.7 pelas expressões convencionais de propagação apresentadas na seção 2.4.7 (eq's 2.69 e 2.70).

APÊNDICE E

E.1) RÚIDO DE MEDIÇÃO CORRELACIONADO - REDUÇÃO DA ORDEM DO FILTRO

O problema do ruído de medição correlacionado (seção 5.2) pode ser tratado de uma forma alternativa como demonstra Bryson, 1967 [32]. Neste desenvolvimento, o aumento da ordem do sistema é evitado, gerando-se uma pseudo-medição onde a diferença entre duas medições consecutivas é realizada. Obtem-se assim, um filtro de dimensão n (mesma ordem do sistema da máquina) para o qual os problemas de singularidades e mau-condicionamento das matrizes, que podem ocorrer para o sistema aumentado, são resolvidos ou pelo menos atenuados.

Para o desenvolvimento do método, considera-se o sistema discreto da máquina assíncrona (eq's D.1), sendo que na eq. D.1.b o ruído discreto independente de medição, $v(k)$, é substituído pelo ruído discreto correlacionado $v_{ca}(k)$

O sistema discreto do filtro formador que processa o ruído de medição é dado por:

$$x_m(k+1) = F_m(k+1,k) \cdot x_m(k) + G_{md}(k) \cdot v_{md}(k) \quad (E.1.a)$$

$$v_{ca}(k) = C_m(k) \cdot x_m(k) \quad (E.1.b)$$

onde $v_{md}(k) \approx N [0 ; Q_{md}(k)]$ representa um ruído discreto gaussiano branco com média nula e covariância $Q_{md}(k)$. A dinâmica do ruído de medição correlacionado pelo sistema linear (eq's. E.1) é portanto introduzida na expressão de saída do sistema da máquina (eq. D.1.b). Observa-se entretanto, que $x_m(k)$ pode ser eliminado da expressão de $z(k+1)$, subtraindo-se o termo

$F_m(k+1,k).z(k)$. Assim, escreve-se a equação denominada de pseudo-medição:

$$z_a(k+1) = z(k+1) - F_m(k+1,k).z(k) \quad (E.2)$$

Desenvolvendo-se a expressão E.2 e considerando-se $C_m(k) = I_z$, obtém-se:

$$z_a(k+1) = [C(k+1).F_a(k+1,k) - F_m(k+1,k).C(k)].x(k) + C(k+1).H_a(k).u(k) + C(k+1).G_a(k).w_a(k) + G_{md}(k).v_{md}(k), \quad (E.3)$$

onde define-se os seguintes termos da expressão E.3:

$$C_a(k) = C(k+1).F_a(k+1,k) - F_m(k+1,k).C(k) \quad (E.4)$$

$$D(k) = C(k+1).H_a(k) \quad (E.5)$$

Escreve-se a expressão do ruído de medição resultante, que é uma função do ruído de estado e portanto, correlacionado com este:

$$n(k) = C(k+1).G_a(k).w_a(k) + G_{md}(k).v_{md}(k) \quad (E.6)$$

Obtem-se a forma final do sistema de equações de estado a ser processado pelo filtro de Kalman onde o aumento da ordem do sistema foi evitado:

$$x(k+1) = F_a(k+1,k).x(k) + H_a(k).u(k) + G_a(k).w_a(k) \quad (E.7.a)$$

$$z_a(k+1) = C_a(k).x(k) + D(k).u(k) + n(k) \quad (E.7.b)$$

O problema pode ser sintetizado da seguinte maneira:

- Medição a ser processada: $z(k+1)$
- Medição necessária e que deve ficar armazenada: $z(k)$
- Termo introduzido na medição a ser processada: $F_m(k+1,k).z(k)$.

O sistema resultante (E.7) consiste exatamente o caso analisado no apêndice D, de correlação entre ruído de estado e

ruído de medição sendo que, as equações de estimação do estado D.4 e D.5 se aplicam com pequenas alterações devido à presença do termo $D(k).u(k)$ na pseudo- medição $z_a(k+1)$.

O ruído de medição resultante no sistema E.7, que é dado por $n(k)$, apresenta a seguinte matriz de covariância ($R_a(k)$), já que é obtido através de uma combinação linear dos ruídos de estado do sistema aumentado pela dinâmica do filtro formador:

$$R_a(k) = C(k+1).G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T + G_{md}(k).Q_{md}(k).G_{md}(k)^T \quad (E.8)$$

$$n(k) \approx N [0 ; R_a(k)] \quad (E.9)$$

A covariância cruzada entre o ruído de estado $w_a(k)$ e o ruído de medição equivalente $n(k)$ é dado por:

$$Q_c(k) = Q_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T \quad (E.10)$$

É importante observar que, em função do artifício utilizado na medição de modo à evitar o aumento da ordem, o sistema resultante E.7 apresenta um termo na equação de medição que é função da entrada $u(k)$. Como consequência, não se pode aplicar diretamente os resultados obtidos no apêndice D. Repetindo-se a dedução realizada no referido apêndice, empregando-se o Lema de Projeções Ortogonais, e utilizando-se o sistema resultante E.7, obtem-se as seguintes expressões para o filtro de Kalman:

Expressão para a estimação do estado:

$$x_b(k+1/k) = F_a(k+1,k).x_b(k/k-1) + H_a(k).u(k) + K_a(k). [z_a(k+1) - C_a(k).x_b(k/k-1) - D(k).u(k)] \quad (E.11)$$

Expressão do ganho (similar à eq. D.3):

$$K_a(k) = [F_a(k+1,k).P(k/k-1).C_a(k)^T + G_a(k).Q_c(k)]. [C_a(k). P(k/k-1).C_a(k)^T + R_a(k)]^{-1} \quad (E.12)$$

Expressão da covariância do erro de estimação do estado (similar à eq. D.5):

$$P(k+1/k) = F_a(k+1,k).P(k/k-1).F_a(k+1,k)^T + G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T - K_a(k).[C_a(k).P(k/k-1).F_a(k+1,k)^T + Q_c(k)^T.G_a(k)^T] \quad (E.13)$$

E a medição da saída do sistema é definida por:

$$z_a(k+1) = z(k+1) - F_m(k+1,k).z(k) \quad (E.14)$$

Observa-se pela expressão de medição do sistema (E.14) que $z_a(k+1)$, embora dependa de $x(k)$ e $u(k)$ e portanto deva ser tratada formalmente como uma medição em t_k (como é comum em sistemas de equações de estado), sendo que em função disto aparece na expressão E.11 após a dedução pelo Lema de Projeções Ortogonais, esta grandeza depende também da medição $z(k+1)$ em $t = t_{k+1}$. Como consequência, aplicando-se as equações E.11 e E.13 do filtro para ruído de estado e medição correlacionados do sistema E.7, as predições $x_b(k+1/k)$ e $P(k+1/k)$ nestas equações são na verdade $x_b(k+1/k+1)$ e $P(k+1/k+1)$ respectivamente. Diz-se portanto, que estes valores resultantes estão condicionados ao conjunto de medições Z_{k+1} .

Baseado nas conclusões acima, deve-se substituir nas equações E.11, E.12 e E.13 as grandezas $x_b(k/k-1)$ e $P(k/k-1)$ por $x_b(k/k)$ e $P(k/k)$ respectivamente obtendo-se as seguintes expressões resultantes:

$$x_b(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).x_b(k/k) + H_a(k).u(k) + K_a(k).[z_a(k+1) - C_a(k).x_b(k/k) - D(k).u(k)] \quad (E.15)$$

$$P(k+1/k+1) = F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T - K_a(k).[C_a(k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T + Q_c(k)^T.G_a(k)^T] \quad (E.16)$$

A expressão do ganho (E.12) torna-se:

$$K_a(k) = [F_a(k+1,k).P(k/k).C_a(k)^T + G_a(k).Q_c(k)].[C_a(k).P(k/k).C_a(k)^T + R_a(k)]^{-1} \quad (E.17)$$

Estas expressões já constituem os resultados após a filtragem (onde a medição $z(k+1)$ é processada). Como a expressão de medição E.14 é função da medição $z(k)$ realizada no intervalo anterior, tem-se um problema relativo ao processamento da 1ª medição, quando $t = t_1$ e não se dispõe de medição no instante inicial $t = t_0$.

A solução para isto baseia-se no seguinte procedimento:

a) Processa-se a 1ª medição $z_a(1)$ através do algoritmo para o filtro com ordem aumentada apresentado na seção 5.1. Esta 1ª medição é definida de modo simples, como se faz no filtro de Kalman convencional, utilizando-se a expressão 5.3.b:

$$z_a(1) = z(1) = C_a(1) \cdot x_a(1) + v(1) \quad (E.18)$$

Após o processamento desta medição, obtém-se as estimativas ótimas $x_b(1/1)$ e $P(1/1)$ para o tempo $t = t_1$.

b) As observações subsequentes $z_a(k+1)$ com $k+1 \geq 2$ serão processadas pelas expressões E.15 a E.17, desenvolvidas nesta seção com o filtro de ordem n (não aumentado portanto). Utiliza-se como condições iniciais os resultados obtidos $x_b(1/1)$, $P(1/1)$ e $z(1)$ do procedimento anterior com o filtro aumentado.

APÊNDICE F

F.1) PROCESSAMENTO SERIAL DOS RESÍDUOS

Supondo-se que para o tempo t_k , m fontes de ruído estatisticamente independentes são adicionadas ao vetor de dimensão m , de medição das saídas, obtem-se a seguinte equação matricial de saída: [18]

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(k) \\ C_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ C_m(k) \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m(k) \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

(mx1)
(mxn)
(mx1)

Como as fontes de ruído são estatisticamente independentes:

$$E\{v_i(k) \cdot v_j(k)^T\} = \delta_{ij} \cdot R_i(k) \quad (F.2)$$

Onde δ_{ij} representa o Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (F.3)$$

A matriz de covariância de ruído de medição $R_i(k)$ possui dimensão reduzida para $[m_i \times m_i]$ onde:

$$\sum_{i=1}^m m_i = m \quad (F.4)$$

A justificativa para este procedimento é que a operação de inversão da matriz de covariância do resíduo de predição (eq. 2.65) demanda grande capacidade de memória para armazenamento, tempo de cálculo e, em função do algoritmo de inversão utilizado, pode apresentar problemas de precisão numérica. Quanto maior for a ordem m do vetor de saídas, mais crítica se torna a situação. De modo a contornar este problema, realiza-se um processamento serial das saídas do sistema sendo que a matriz a ser invertida passa a ter a dimensão m_1 . Assim, cada dado de saída é tratado separadamente. Especificamente, $z_1(k)$ é processado para se obter a estimacão $x_b(k/k)$ e a covariância $P(k/k)$, fazendo-se $z(k) = z_1(k)$. Completado este cálculo, $z_2(k)$ é processado para obter novos valores de $x_b(k/k)$ e $P(k/k)$. Cada saída é processada desta maneira até o último valor $z_m(k)$ disponível. Finalmente, incrementa-se o tempo para t_{k+1} e repete-se o ciclo completo de operações para a medição em t_{k+1} , $[z(k+1)]$.

APÊNDICE G

G.1) ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DE COVARIÂNCIA DE RUÍDO DE ESTADO

G.1.1) Método da consistência estatística dos resíduos

O conceito básico desta técnica consiste em se determinar a covariância de ruído de estado a partir de uma realimentação em tempo real dos resíduos, para análise também em tempo real do desempenho do filtro e portanto, não a posteriori como sugere a maioria das técnicas de filtragem adaptativa. [18],[44]

A expressão do resíduo de predição é apresentada no item 7.1 (eq. 7.1). Aplicando-se a operação de esperança matemática nesta expressão, pode-se demonstrar que o valor esperado do resíduo de predição é nulo. A expressão da covariância do resíduo é dada por (equivalente à expressão 2.65):

$$E\{r(k+1/k).r(k+1/k)^T\} = C(k+1).F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T.$$

$$C(k+1)^T + C(k+1).G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T + R(k+1) \quad (G.1)$$

G.1.2) Síntese do método

a) Impõe-se que os resíduos sejam consistentes com suas estatísticas previstas no estimador. Isto resulta num algoritmo que estima a matriz de covariância do ruído de estado $[Q_a(k)]$;

b) Sob certas condições consideradas no desenvolvimento do algoritmo, esta estimação de $Q_a(k)$ produz a sequência mais provável dos resíduos (o que consiste em maximizar a função

densidade de probabilidade do resíduo);

c) Pequenas sequências de resíduos são usadas na estimação de $Q_a(k)$ para que se tenha um maior significado estatístico.

G.1.3) Considerações especiais e modelo dinâmico do sistema

As duas principais considerações para o desenvolvimento do método de consistência estatística são as seguintes:

1) Entrada de ruídos de estado não correlacionados e distribuídos identicamente por todos os estados do sistema: $Q_a(k) = q \cdot I_n$.

2) A equação de medição é escalar ($m = 1$, ou seja 1 saída apenas sendo considerada por vez), o que não significa uma perda de generalidade, pois demonstrou-se no apêndice F que o vetor de medições $z(k)$ pode ser processado pelo algoritmo de filtragem utilizando-se uma componente de cada vez (processamento serial).

O modelo dinâmico estocástico discreto da máquina de indução é dado pelas expressões 2.1. Considerando-se o instante t_k , onde a medição de $z(k)$ acaba de ser processada pelo filtro, obtem-se a estimação ótima $x_b(k/k)$, $P(k/k)$ e também o conjunto de observações:

$$Z_k = \{ \dots, z(k-2), z(k-1), z(k) \} \quad (G.2)$$

Neste instante, antes de se calcular a predição do estado e covariância para t_{k+1} , obtem-se a covariância do ruído de estado "q" que produz a predição do resíduo mais provável $r(k+1/k)$ (eq. 2.14), ou seja, o valor de "q" que maximiza a função densidade de probabilidade do resíduo:

$$\max_{q \geq 0} p[r(k+1/k)] \quad (G.3)$$

O parâmetro "q" deve verificar a expressão $q \geq 0$ porque a matriz de covariância $Q_a(k)$ deve ser semidefinida positiva na dedução do algoritmo do filtro de Kalman discreto. A função densidade de probabilidade do resíduo é gaussiana, com média

nula, cuja matriz de covariância é dada pela expressão 2.65.

G.1.4) Estimativa adaptativa da covariância do ruído de estado

Pode-se demonstrar [18],[44] que o valor de "q" que maximiza a função densidade de probabilidade do resíduo é obtido resolvendo-se a expressão (para o caso da saída escalar):

$$r(k+1/k)^2 = E\{r(k+1/k)^2\}, \text{ se:} \quad (G.4)$$

$$r(k+1/k)^2 > C(k+1).F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T.C(k+1)^T + R(k+1) \quad (G.5)$$

o que corresponde à condição da matriz definida pela soma dos dois últimos termos de G.1 ser definida positiva:

$$C(k+1).G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T + R(k+1) > 0 \quad (G.6)$$

Para o caso onde as expressões G.5 e conseqüentemente G.6 não se verificam, "q" é feito zero.

Desenvolvendo-se a expressão G.1, obtem-se para o caso da saída escalar:

$$E\{r(k+1/k)^2\} = C(k+1).F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T.C(k+1)^T + C(k+1).G_a(k).q.In.G_a(k)^T.C(k+1)^T + R(k+1) \quad (G.7)$$

Logo, a estimativa de "q" (q_b) é dada por:

$$q_b = \{r(k+1/k)^2 - [C(k+1).F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T.C(k+1)^T + R(k+1)] / [C(k+1).G_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T]\} \quad (G.8)$$

Com a condição de que $q_b \geq 0$ devido à exigência de que a matriz de covariância $Q_a(k) = q_b.In$ seja semidefinida positiva.

Por outro lado, se $q_b < 0$ significa que a condição G.5 não é satisfeita e q_b é feito zero. Neste caso, uma consideração clara é que o denominador de G.8 seja tal que:

$$C(k+1).G_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T > 0 \quad (G.9)$$

Observa-se entretanto que o termo sendo subtraído na expressão G.8 pode ser escrito a partir da expressão G.7 fazendo-

se $q = 0$:

$$E\{r(k+1/k)^2 | q=0\} = C(k+1).F_a(k+1,k).P(k/k).F_a(k+1,k)^T.C(k+1)^T + R(k+1) \quad (G.10)$$

Assim a expressão G.8 assume um aspecto simplificado:

$$q_b = \frac{[r(k+1/k)^2 - E\{r(k+1/k)^2 | q=0\}]}{[C(k+1).G_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T]} \quad \left| \quad \text{se } q_b \geq 0. \quad (G.11)$$

Do contrário, faz-se $q_b = 0$.

Estendendo-se para o caso multivariável ($m > 1$), se qualquer valor quadrático médio de resíduo para ruído de estado nulo exceder o próprio valor quadrático do resíduo real, q_b assumirá o valor máximo considerando a formulação para todos os resíduos do vetor de saídas $z(k)$.

Se o valor estimado de q_b é positivo, a equação G.4 é satisfeita, obtendo-se assim a sequência mais provável do resíduo de predição, maximizando portanto a função densidade de probabilidade deste. Obtem-se assim, uma consistência entre os resíduos de predição e as suas propriedades estatísticas calculadas recursivamente.

G.1.5) Extensão para consideração de uma amostra de resíduos

A partir da formulação inicial feita acima, observa-se que a estimação de q_b é feita com base no vetor de resíduos de predição utilizando-se apenas 1 medição. Este procedimento tem pouco significado estatístico, pois o algoritmo faria a adaptação de $Q_a(k)$ também em função de medições das saídas com elevada taxa de ruído, sobrepondo-se ao efeito principal que se deseja considerar, que são os erros na modelagem dinâmica do sistema.

Esta predominância de ruído de medição resulta na seguinte relação:

$$R(k+1) > C(k+1).G_a(k).Q_a(k).G_a(k)^T.C(k+1)^T \quad (G.12)$$

De modo a superar-se esta dificuldade, utiliza-se uma média de amostras de N resíduos de predição, realizando-se o seguinte procedimento resumido:

$$m_r = (1/N) \cdot \sum_{l=1}^N \frac{r(k+1/k)}{\sqrt{R(k+1)}} \quad (G.13)$$

Pode-se demonstrar [18],[44] as propriedades estatísticas da média ponderada de N resíduos (m_r) para o caso da saída escalar, e da mesma forma facilmente aplicável para sistemas multivariáveis usando-se processamento serial dos resíduos de predição:

$$E\{m_r\} = 0 \quad (G.14)$$

$$E\{m_r^2\} = S_N \cdot F_d(k+1,k) \cdot P(k/k) \cdot F_d(k+1,k)^T \cdot S_N^T + q \cdot S + 1/N \quad (G.15)$$

Onde os valores de S_N a S_1 são obtidos recursivamente:

$$\begin{aligned} S_N &= (1/N) \cdot \sum_{l=1}^N \frac{1}{\sqrt{R(k+1)}} \cdot C(k+1) \cdot F_d(k+1,k+1) \\ S_{N-1} &= (1/N) \cdot \sum_{l=2}^N \frac{1}{\sqrt{R(k+1)}} \cdot C(k+1) \cdot F_d(k+1,k+2) \\ S_{N-2} &= (1/N) \cdot \sum_{l=3}^N \frac{1}{\sqrt{R(k+1)}} \cdot C(k+1) \cdot F_d(k+1,k+3) \\ &\vdots \\ S_1 &= (1/N) \cdot \frac{1}{\sqrt{R(k+1)}} \cdot C(k+N) \end{aligned} \quad (G.16)$$

Assim, de acordo com o valor escolhido para N amostras de resíduos, obtem-se a sequência de termos S_1, S_2, \dots, S_N e com base nestes valores calcula-se:

$$\begin{aligned} S &= S_N \cdot G_d(k) \cdot G_d(k)^T \cdot S_N^T + S_{N-1} \cdot G_d(k+1) \cdot G_d(k+1)^T \cdot S_{N-1}^T + \\ &S_{N-2} \cdot G_d(k+2) \cdot G_d(k+2)^T \cdot S_{N-2}^T + \dots + S_1 \cdot G_d(k+N-1) \cdot G_d(k+N-1)^T \cdot S_1^T \end{aligned} \quad (G.17)$$

Aplicando-se considerações similares às anteriores para 1 único resíduo, obtem-se a estimação de $q_b(N)$:

$$q_b(N) = \frac{[m_r^2 - E\{m_r^2 | q=0\}]}{S} \quad \left| \quad \text{se } q_b(N) \geq 0. \quad (G.18)$$

Do contrário, faz-se $q_b(N) = 0$.

Similarmente, tem-se que:

$$E\{m_r^2 | q=0\} = S_N \cdot F_a(k+1, k) \cdot P(k/k) \cdot F_a(k+1, k)^T \cdot S_N^T + 1/N \quad (G.19)$$

Da mesma forma, $q_b(N)$ maximiza a função densidade de probabilidade da média dos resíduos $p(m_r)$, e portanto, fornece a sequência mais provável dos resíduos de predição médios utilizando-se uma amostragem de N resíduos.

A covariância do ruído de medição na amostragem de N resíduos tende para zero quando N tende para o infinito, o que torna o processo mais eficiente do ponto de vista de rejeitar medições muito ruidosas quanto maior for o valor de N adotado.

As estimativas de $Q_a(k)$ são variáveis aleatórias pois dependem dos resíduos. Assim, a matriz de covariância $P(k/k)$ também é determinada por uma equação randômica, não linear, das diferenças. Como consequência, não se pode calcular previamente as covariâncias de modo a se avaliar o desempenho do filtro adaptativo, sendo que isto só poderá ser feito através de simulações numéricas.

APÊNDICE H

H.1) APLICAÇÃO DE RUÍDO DE ESTADO NO SISTEMA DISCRETO

De modo análogo ao desenvolvimento da seção 3.3, onde o ruído de estado foi modelado de modo a ser aplicado na simulação digital do sistema ou seja, no algoritmo de integração representando o sistema, uma outra possibilidade a nível de simulação é utilizar o modelo discretizado para simulação dinâmica da máquina assíncrona.

Com este objetivo, deve-se realizar um estudo analítico para que o nível de ruído associado à máquina real $[Q(t)]$ seja equivalente ao aplicado no sistema discreto $[Q_d(k)]$, obtendo-se resultados similares nas grandezas estimadas.

Dado o sistema da máquina de indução na representação em espaço de estados (eq's 1.27), o sistema equivalente discretizado é dado pelas equações 2.1. A propagação da covariância do estado contínuo no intervalo de 1 período de amostragem é dado pela equação 3.6.

Similarmente ao estudo realizado na seção 3.3 com relação ao passo do Runge - Kutta h , o período de amostragem é considerado pequeno o suficiente para permitir as simplificações seguintes:

$$F(T_a, 0) \approx I \text{ e } F(T_a, \tau) \Big|_{\tau=0} \longrightarrow T_a \approx I \quad (H.1)$$

Conseqüentemente o incremento de covariância durante o período de amostragem é obtido analiticamente pela expressão aproximada:

$$DP = P(t_{1+1}) - P(t_1) \approx \int_0^{T_a} G.Q.G^T.d\tau = G.Q.G^T.T_a \quad (H.2)$$

Para que o sistema contínuo possa ser convenientemente simulado no tempo discreto, além da equivalente propagação do valor médio dos estados (esperança matemática) deve-se ter uma propagação equivalente da covariância associada ao erro na estimação discreta dos estados.

Dadas as matrizes e vetores do modelo discreto definidas na seção 1.6.1, $F_d(T_a)$, $H_d(T_a)$ e $J_d(T_a)$ (integral da matriz de transição de estados $F_d(t)$ durante o período de amostragem), a partir desta última obtem-se a matriz discretizada de entrada do ruído de estado:

$$G_d(T_a) = \left[\int_0^{T_a} \exp[A.\tau].d\tau \right].G = J_d(T_a).G \quad (H.3)$$

Para o cálculo da covariância associada ao estado discretizado, pode-se suprimir a entrada determinística de tensão $u(k)$ já que este termo apenas contribui para o valor médio do estado, não interferindo na covariância. A predição do estado estimado realizada pelo algoritmo discreto para o instante t_{k+1} é, portanto, definida como:

$$x(k+1) = F_d(T_a).x(k) + G_d(T_a).w_d(k) \quad (H.4)$$

A matriz de correlação do vetor de estados é calculada por:

$$E\{x(k+1).x(k+1)^T\} = E\{[F_d(T_a).x(k) + G_d(T_a).w_d(k)]. [x(k)^T.F_d(T_a)^T + w_d(k)^T.G_d(T_a)^T]\} \quad (H.5)$$

Considerando-se $x(k)$, $w_d(k)$ e $x(0)$ vetores gaussianos independentes entre si, a expressão acima pode ser simplificada por:

$$E\{x(k+1).x(k+1)^T\} = F_d(T_a).E\{x(k).x(k)^T\}.F_d(T_a)^T + G_d(T_a).E\{w_d(k).w_d(k)^T\}.G_d(T_a)^T \quad (H.6)$$

Em função dos valores médios nulos das grandezas da expressão H.6, define-se as expressões de covariâncias do estado

e do ruído de estado discreto respectivamente, a partir das expressões de correlação:

$$E\{x(k).x(k)^T\} = P_d(k) \quad (H.7)$$

$$E\{w_d(k).w_d(k)^T\} = Q_d(k) \quad (H.8)$$

A expressão H.6 torna-se:

$$P_d(k+1) = F_d(T_s).P_d(k).F_d(T_s)^T + G_d(T_s).Q_d(k).G_d(T_s)^T \quad (H.9)$$

De modo similar à eq. H.1, assumindo-se que a matriz de transição de estados discreta F_d constitui uma boa aproximação da matriz de transição de estados contínua F , obtem-se:

$$F_d(T_s) \approx I \quad (H.10)$$

$$DP_d = P_d(k+1) - P_d(k) \approx G_d(T_s).Q_d(k).G_d(T_s)^T \quad (H.11)$$

Para que os incrementos de covariância sejam equivalentes, as expressões H.11 e H.2 devem apresentar resultados próximos. Utilizando a expressão de $G_d(T_s)$ em série de potências (eq. H.3) escreve-se para o termo à direita da equação H.11:

$$G_d(T_s).Q_d(k).G_d(T_s)^T = [I.T_s + A.T_s^2/2! + A^2.T_s^3/3! + \dots]. \\ G.Q_d(k).G^T.[I.T_s + A.T_s^2/2! + A^2.T_s^3/3! + \dots]^T \quad (H.12)$$

Desprezando-se os termos de potências de T_s de ordem igual ou superior a 2:

$$G_d(T_s).Q_d(k).G_d(T_s)^T \approx T_s^2.G.Q_d(k).G^T \quad (H.13)$$

Comparando-se diretamente o termo à direita da expressão H.13 com o respectivo da expressão H.2 obtem-se:

$$Q_d(k) = Q(t)/T_s \quad (H.14)$$

É importante observar que este resultado é o mesmo obtido em [11] para simulação digital de sistemas dinâmicos através do algoritmo integrador de Euler de 1ª ordem. Também este resultado de covariância de ruído de estado para o sistema discretizado foi previsto em [37].

Portanto, o ruído a ser injetado no sistema discreto é $(1/T_s)$ vezes maior que o ruído de estado do sistema contínuo (T_s

< 1.0). Neste caso, os comportamentos das grandezas (fluxos, correntes e conjugado) para o sistema contínuo com ruído $w(t)$ e discreto com ruído $w_a(k)$ (cuja covariância é especificada pela relação H.14) são equivalentes.

Nesta nova situação, o cálculo da covariância do erro de predição no algoritmo de Kalman é implementado pela expressão 2.70 e portanto, é alterado em relação à expressão utilizada quando o ruído era aplicado no integrador da simulação digital (eq. 2.71). Nesta última, a correção da covariância durante o período de amostragem é derivada diretamente da expressão analítica fazendo-se algumas simplificações e utilizando-se a própria covariância do ruído de estado do sistema contínuo $Q(t)$.

A partir das covariâncias obtidas na seção 3.4.4 para o sistema contínuo, deriva-se a situação equivalente com injeção do ruído de estado no sistema discreto aplicando-se a relação H.14:

Covariância do ruído de estado a ser introduzido nas equações de predição de estado no sistema discreto (2.70):

$$Q_a(k) = 3.5 \times 10^{-5}/T_a = 0.070 * I_4 \quad (H.15)$$

Covariância associada ao processo de cálculo computacional do estimador, só que de maneira adequada a ser introduzida na expressão de propagação da covariância dada pela eq. H.9.

$$Q_0 = 5.6 \times 10^{-4}/T_a = 1.12 \quad (H.16)$$

Covariância de ruído de estado total englobando o ruído de estado introduzido no sistema discreto e a incerteza envolvida na resolução do algoritmo de estimação:

$$Q_a(k) = 0.070 + 1.12 = 1.19 * I_4 \quad (H.17)$$

Covariância do ruído de medição das correntes:

$$R(k) = 0.25 * I_2 \quad (H.18)$$

Assim, estes dois últimos valores é que são introduzidos nas equações discretas do filtro de Kalman (eq's 2.70 e 2.76) para o cálculo da covariância do erro de estimação e da covariância do resíduo de predição da saída do sistema.

Realiza-se assim simulações de regime permanente com a máquina alimentada por tensões senoidais com ZOH. São introduzidos ruídos de estado e medição com níveis definidos nas equações H.15 e H.18. Os resultados para as relações de desempenho estatístico e teste do desvio padrão são apresentados na figura H.1.

Observa-se pelas curvas da fig H.1 que realmente os índices relacionados com o desempenho estatístico do estimador convergem para a unidade. Também no teste do desvio padrão, os erros de estimação dos fluxos Φ_{sa} , Φ_{ra} e da corrente i_{sa} estão dentro da faixa dos 3 desvios onde garante-se que 99 % dos valores de erros devem estar localizados para variáveis estocásticas com distribuição de probabilidade gaussiana. Assim, tem-se uma estimação consistente estatisticamente, de modo similar ao verificado na seção 3.4.4 onde o ruído de estado é aplicado no algoritmo de integração representando a máquina.

A comparação entre valores reais e estimados de conjugado, módulo dos fluxos estatórico e rotórico e ângulo de carga pode ser analisada na figura H.2

Algumas conclusões importantes podem ser obtidas da fig. H.2: Como a máquina está em vazio, o ângulo entre os vetores de fluxo estatórico e rotórico (θ_{ar}) é muito pequeno ($\text{Sen}\theta_{ar} = 0.006$) e conseqüentemente o ruído de estado introduzido no sistema discreto distorce bastante esta grandeza se refletindo diretamente no conjugado. Por outro lado, o comportamento dos módulos de fluxo estatórico e rotórico é excelente praticamente livre de ruídos, o que constitui um resultado muito importante para objetivos de regulação de fluxo em aplicações de controle vetorial.

Vale ressaltar a importância dos cálculos que são feitos para compatibilizar as covariâncias de ruído de estado entre o sistema contínuo (máquina real) e o modelo discreto do sistema. Por exemplo, reduzindo-se o tempo de amostragem T_s para 0.05 ms e mantendo-se todos os níveis de ruído e covariâncias introduzidos

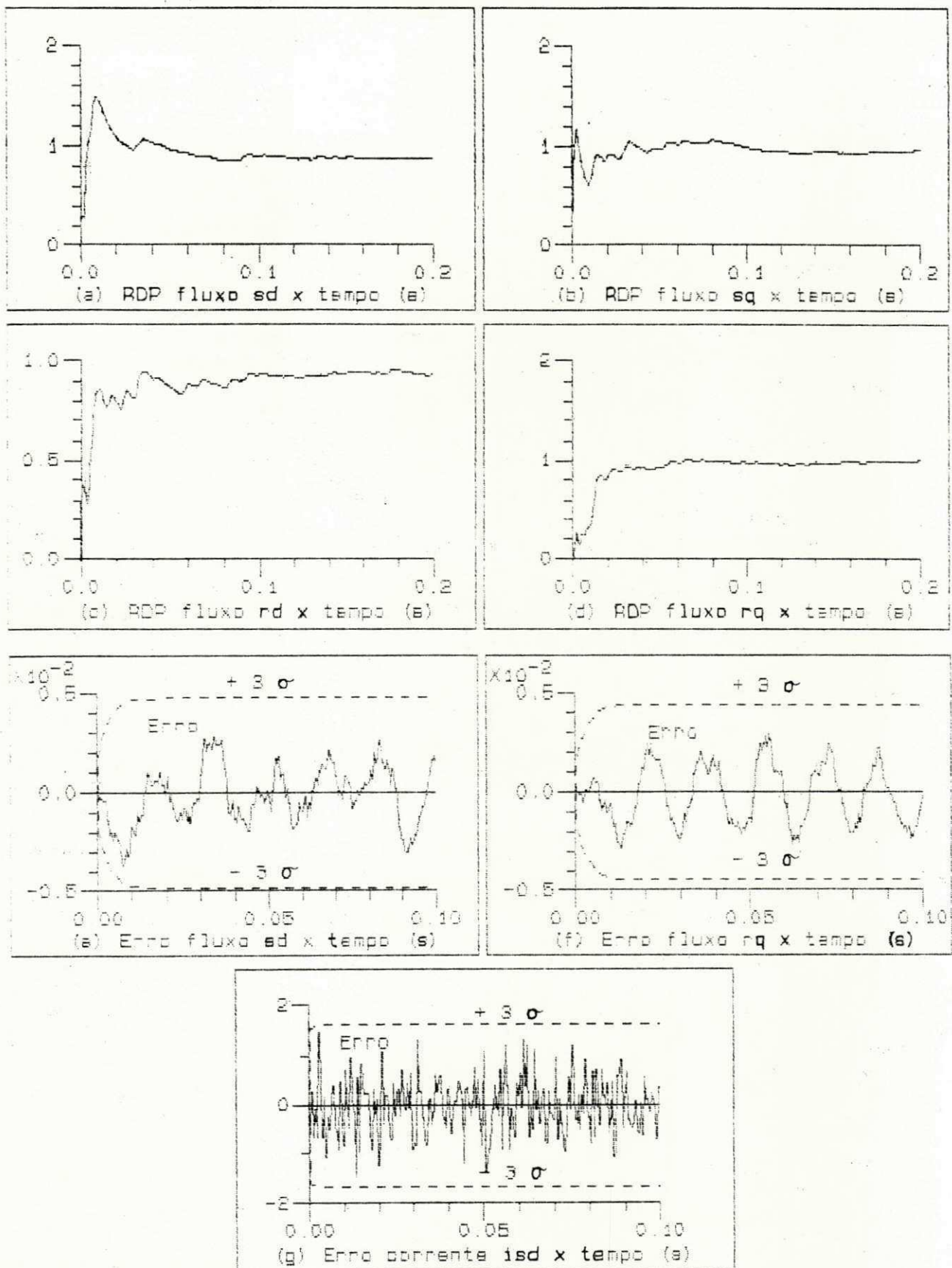


Fig. H.1: Máquina em regime permanente com ruídos de estado e medição aplicados no sistema discreto

no processo para $T_a = 0.5$ ms, a consistência estatística da estimação é totalmente perdida com relações de desempenho tendendo para um valor em torno de 3.0 e o erro de estimação ultrapassando todo o tempo a faixa dos 3 desvios padrões.

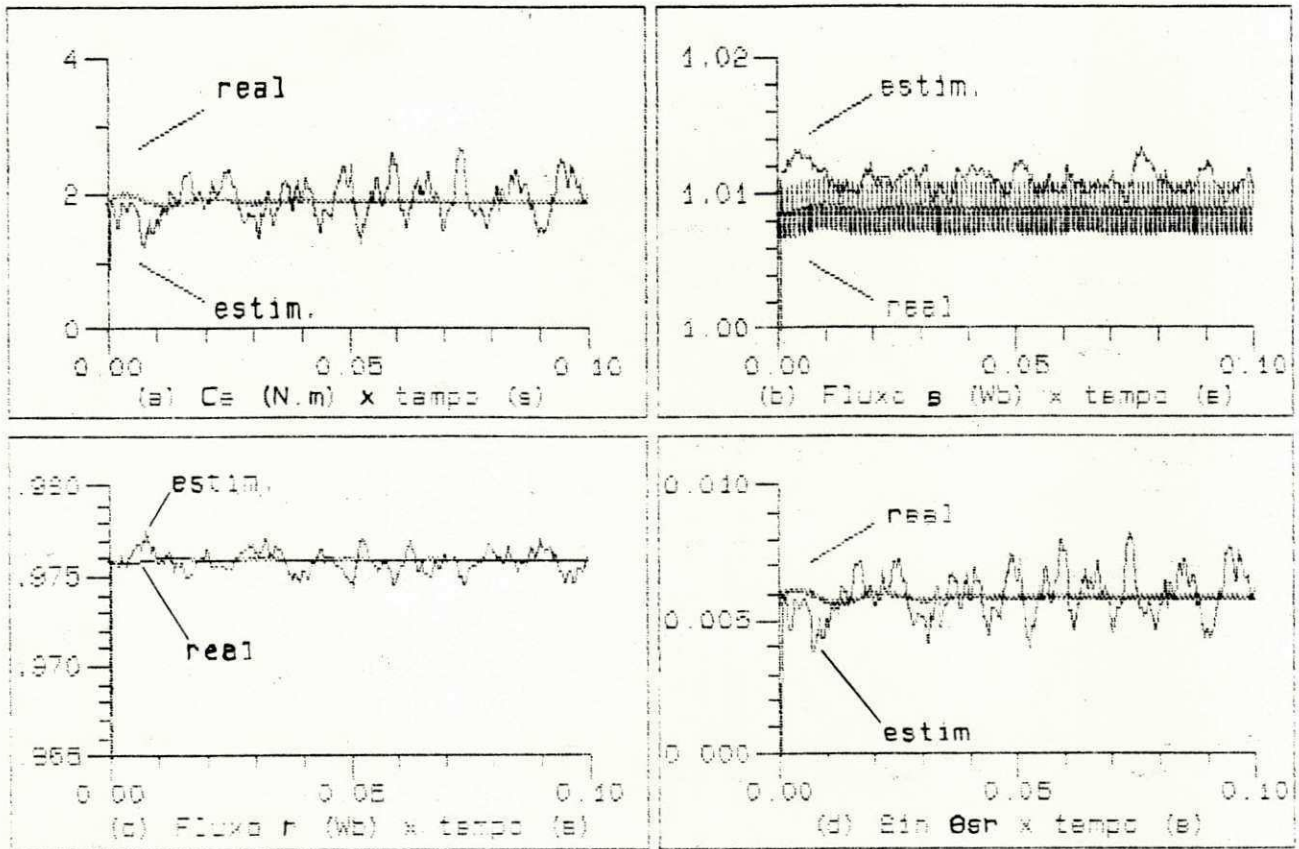


Fig. H.2: Máquina em regime permanente com ruídos de estado e medição aplicados no sistema discreto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Astrom, K.J. and Wittenmark, B. "Computer Controlled Systems". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984
- [2] Auslander, D.M., Rabins, M.J. and Takahashi, Y. "Control and Dynamic Systems." Addison - Wesley Publishing Company, Massachussets, 1972.
- [3] Bose, B.K. "Technology Trends in Microcomputer Control of Electrical Machines." IEEE Trans. on Ind. Elect., Vol. 35, No 1, Feb, 1988.
- [4] Buhler, H. "Électronique de Réglage et de Commande." Traité d'Électricité d'Électronique et d'Électrotechnique. Dunod, 1979.
- [5] Buhler, H. "Réglages Échantillonnés." Vols 1 et 2. Presses Polytechniques Romandes - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1983.
- [6] Chaharbaghi, K. and Davies, B.L. "Numerical Evaluation of a Multi-Stream Pseudo-Random Number Generator." Appl. Math. Modelling, Vol. 11, June, 1987.
- [7] Dote, Y. "Application of Modern Control Techniques to Motor Control." IEEE Proc., Vol 76, No. 4, Apr, 1988.
- [8] Dote, Y. and Anbo, K. "Combined Parameter and State Estimation of Controlled Current Induction Motor Drive System via Stochastic Nonlinear Filtering Technique." Conf. Rec. IEEE/IAS, Cleveland, 1979.
- [9] Fitzgerald, R.J. "Divergence of the Kalman Filter." IEEE Trans. Aut. Control, Dec, 1971.

- [10] Gabriel, R., Leonhard, W. and Nordby, C.J. "Field Oriented Control or a Standard AC Motor Using Microprocessors." IEEE Trans. Ind. Appl., Vol 16, Mar/Apr, 1980.
- [11] Griffith, J.M. "Random process simulation using a continuous system simulation language". SIMULATION, Oct, 1985.
- [12] Grimble, M.J. "Adaptative Kalman Filter for Control of Systems with Unknown disturbances." IEE Proc., Vol 128/D, No. 6, Nov 1981.
- [13] Heffes, H. "The Effect of Erroneous Models on the Kalman Filter Response." IEEE Trans. Aut. Control, July, 1966.
- [14] Hostetter, G.H. "Digital Control System Design." Holt, Rinehart and Winston, Inc. N.Y., 1988.
- [15] Houppis, C.H. and Lamont, G.B. "Digital Control Systems - Theory, hardware, software." McGraw Hill, N.Y., 1985.
- [16] Jacobina, C.B. "Apostila de Máquinas Elétricas - DEE/CCT/UFPb." Campina Grande, 1984.
- [17] Jacquot, R.G. "Modern Digital Control Systems." Marcel Dekker, Inc. N.Y., 1981.
- [18] Jazwinski, A.H. "Stochastic Process and Filtering Theory." Academic Press, N.Y., 1970.
- [19] Kalman, R.E. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems." Trans. of the ASME, Journal of Basic Engineering, March, 1960.
- [20] Kalman, R.E. and Bucy, R.S. "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory." Trans. of the ASME, Journal of Basic Engineering, March, 1961.
- [21] Kortum, W. "Computational Techniques in Optimal State Estimation - A tutorial Review." Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 101, June, 1979.
- [22] Kyriakopoulos, N. and Tan, J. "Implementation of a tracking Kalman Filter on a Digital Signal Processor." IEEE Trans. on Ind.

Elect., Vol. 35, No. 1, Feb., 1988.

[23] Leondes, C.T. and Pearson, J.O. "Kalman Filtering of Systems with Parameter Uncertainties: A Survey." Int. J. Control, Vol. 17, No. 4, 1973.

[24] Leonhard, W. "Control of Electrical Drives." Springer - Verlag, N.Y., 1985.

[25] Leonhard, W. "Adjustable-Speed AC Drives." IEEE Proc., Vol 76, No. 4, April, 1988.

[26] Leonhard, W. "Microcomputer Control of High Dynamic Performance ac - Drives: A Survey." Automática, Vol. 22, No. 1, 1986.

[27] Lima, A.M.N., "Commande numérique d'une machine asynchrone: Contrôle du flux par filtrage stochastique - Variation de la vitesse et de la position". These de Docteur de l'INP, Toulouse, France, juillet, 1989.

[28] Lima, A.M.N., De Fornel, B. and Mrs. Pietrzak-David "On Stochastic Filtering Techniques and its Applications to AC Numerical Drive Systems." EPE Proc., Grenoble, 1987.

[29] Lipo, T.A. "Recent Progress in the Development of Solid-State AC Motor Drives." IEEE Trans. on Power Elect., Vol 3, No. 2, April 1988.

[30] Luenberguer, D.G. "Observers for Multivariable Systems." IEEE Trans. Aut. Control, AC-11, 1966.

[31] Luenberguer, D.G. "Canonical Forms for Linear Multivariable Systems." IEEE Trans. Aut. Control, AC-12, 1967.

[32] Maybeck, P.S., "Stochastic Models, Estimation and Control". Vol. 1, Academic Press, 1979.

[33] Mendel, J.M. "Computational Requirements for a Discrete Kalman Filter." IEEE Trans. Aut. Control, Dec., 1971

[34] Mota, W.S. "Optimal Control Techniques in the Design of Power System Stabilizers." Ph.D. Thesis, University of Waterloo,

Canadá, 1981.

[35] Quigley, A.L.C. "An Approach to the Control of Divergence in Kalman Filter Algorithms." Int. J. Control, Vol. 17, No. 4, 1973.

[36] Radix, J.C. "Filtrage et Lissage Statistiques Optimaux." Automatique.

[37] Riggs, T.L., jr, Phillips, C.L., "Modeling continuous noise sources in digital simulations". SIMULATION, Jan, 1987.

[38] Salgado, M., Middleton, R. and Goodwin, G.C. "Connetion between Continuous and Discrete Riccati Equations with applications to Kalman Filtering." IEE Proc., Vol 135/D, No. 1, Jan, 1988.

[39] Segquier, G., Notelet, F. and Lesenne, J. "Introduction à l'electrotechnique Approfondie." Université des Sciences et Techniques de Lille, Paris, 1981.

[40] Sen, P.C. and Ho, E.Y.Y. "Decoupling Control of Induction Motor Drives." IEEE Trans. Ind. Elect., Vol 35, No. 2, May, 1988.

[41] Sinha, N.K. and Jie, Z.Q. "Discrete-Time Approximation of Multivariable Continous-Time Systems." IEE Proc., Vol 130/D, No. 3, May, 1983.

[42] Da Silva, K.F., Lima, A.M.N. e Jacobina, C.B. "Estimação Estocástica de Fluxo Magnético em Máquinas Assíncronas Utilizando Filtro de Kalman." SEP - 90, Dez, 1990.

[43] Da Silva, K.F., Lima, A.M.N. e Jacobina, C.B. "Controle Vetorial em Acionamentos Estáticos com Máquinas Síncronas." SEP - 90, Dez, 1990.

[44] Sorenson, H.W. "Kalman Filtering Theory and Application." IEEE Press Selected Reprint Series, 1985.

[45] Steven, G.F. "Kalman Filtering: Noise-Corrupted Signal Processing." Electronics & Wireless World, 1988.

[46] Vanlandingham, H.F. "Introduction to Digital Control Systems." Macmillan Publishing Company, N.Y., 1985.

[47] Verguese, G.C. and Sanders, S.R. "Observers for Flux Estimation in Induction Machines." IEEE Trans Ind. Elect., Vol 35, No. 1, Feb, 1988.

[48] Willians, A.B. and Taylor, F.J. "Electronic Filter Design Handbook: LC, Active and Digital Filters." McGraw Hill, N.Y., 1988.

[49] Zai, L.C. and Lipo, T.A. "An Extended Kalman Filter Approach to Rotor Time Constant Measurement in PWM Induction Motor Drives." Conf. Rec. IEEE/IAS Annual Meeting, Oct, 1987.

dc
enc
de
E
)
C
O
I
A
S
E
A
T