
Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet e
Diversidade Espaço-Temporal em Canais Sujeitos ao
Desvanecimento Rayleigh Plano

Luiz Felipe de Queiroz Silveira

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação -
Comunicações

Prof. Francisco Marcos de Assis, Dr.
Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil
©Luiz Felipe de Queiroz Silveira, Maio de 2002



S587d Silveira, Luiz Felipe de Queiroz.
Desempenho de sistemas com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal em canais sujeitos ao desvanecimento rayleigh plano / Luiz Felipe de Queiroz Silveira. - Campina Grande, 2002.
131 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2002.
Referências.
"Orientação : Prof. Dr. Francisco Marcos de Assis".

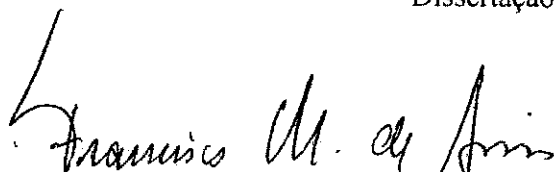
1. Sistemas de Comunicação. 2. Codificação Wavelet. 3. Diversidade Espaço-Temporal. 4. Canal com Desvanecimento. 5. Dissertação - Engenharia Elétrica. I. Assis, Francisco Marcos de. II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 621.391(043)

**DESEMPENHO DE SISTEMAS COM CODIFICAÇÃO WAVELET E DIVERSIDADE
ESPÁCIO-TEMPORAL EM CANAIS SUJEITOS AO DESVANECIMENTO
RAYLEIGH PLANO**

LUIZ FELIPE DE QUEIROZ SILVEIRA

Dissertação Aprovada em 06.05.2002



PROF. FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFPB
Orientador



PROF. HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, Dr., UFPE
Componente da Banca



PROF. JOÃO MARQUES DE CARVALHO, Ph.D., UFPB
Componente da Banca



PROF. JOSÉ EWERTON POMBO DE FARIAS, Dr., UFPB
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Maio - 2002

Dedicatória

Esta dissertação é dedicada a meus pais, pelo infinito amor e incentivos, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Agradecimentos

- A Deus, por tudo;
- Aos meus pais Luiz Gonzaga e Maria de Jesus, pelo infinito amor, incentivo e compreensão em todos os momentos;
- Aos meus irmãos Fernando, Junior e Cecília, que sempre me incentivaram;
- Ao professor Francisco Marcos de Assis, pela orientação, amizade, incentivo e ensinamentos;
- Aos amigos da graduação e do mestrado Madhavan, Sérgio, Netto, Flávio, Hallyson, Christian, Josemar, Towar, Karina, Ana Luísa, Scaico e Denis, pela amizade, companheirismo e momentos de descontração;
- Aos professores João Marques, Marcelo Sampaio, José Ewerton Farias e Bruno Albert, pelos ensinamentos e amizade;
- Aos amigos do LABCOM Edmar, Waslon e Galdino, do LTI Marcos Morais e da TIM Gustavo Maciel, pela amizade, sugestões e contribuições ao longo do trabalho;
- Aos demais professores do DEE-UFCG;
- A todos os funcionários do DEE-UFCG, em especial a Ângela, Ronaldo, Eleonora, Marcos e Pedro, pela amizade;
- A CAPES, pelo importante apoio financeiro.

Resumo

Em canais de comunicação móvel, os sinais trafegam entre o transmissor e o receptor através de múltiplos percursos, característica que causa profundas degradações nos sinais transmitidos. Esse fenômeno de alteração na intensidade do sinal recebido é usualmente denominado desvanecimento.

Com o objetivo de minimizar os efeitos destrutivos produzidos pela propagação por múltiplos percursos, utiliza-se geralmente técnicas de codificação de canal integradas a esquemas de transmissão em diversidade.

Neste trabalho são avaliados os desempenhos de alguns esquemas de codificação com matrizes de coeficientes wavelets, utilizados para transmissão de informação em canais de comunicação móvel. Os desempenhos desses esquemas são analisados em canais com ruído aditivo gaussiano branco e em canais com desvanecimento do tipo Rayleigh não-seletivo em frequência. Além disso, o impacto do efeito Doppler sobre os desempenhos desses esquemas também é investigado. Os resultados de simulação obtidos mostram que essa nova técnica de codificação pode ser promissora no combate aos efeitos do desvanecimento.

Abstract

In mobile communications channels, the multipath environment can strongly degrade the quality of signals at the receiver. This phenomenon changes the received signal strength and it is usually called fading.

Channel coding techniques together with diversity transmitting schemes are used to protect the transmitted information in order to minimizing the destructive effects of the multipath propagation.

In this work, the performance of some systems that use wavelet channel coding is studied. The performance of such systems are obtained over additive white Gaussian noise (AWGN) channels or flat fading channels. Additionally, the impact of the Doppler effect on the system performance is evaluated. Simulation results show that this novel technique should be suitable for combating the effects of fading in mobile communications channels.

Lista de Símbolos e Abreviaturas

- AWGN* - Additive White Gaussian Noise (*Ruído Aditivo Gaussiano Branco*)
ASK - Amplitude Shift Keying (*Modulação em Amplitude*)
 f_0 - Banda de coerência de um canal de comunicação
BPSK - Binary Phase Shift Keying (*Modulação em Fase Binária*)
BSC - Binary Symmetric Channel (*Canal Binário Simétrico*)
 $GF(q)$ - Campo de Galois q -ário
CSI - Channel State Information (*Canal com Estado Conhecido pelo Receptor*)
CCW - Codificação com wavelets (*WCC - Wavelet Channel Coding*)
 a_k^s - Coeficientes de uma matriz wavelet
 N_0 - Densidade espectral de potência do ruído gaussiano
 E_b - Energia de bit
 E_C - Energia média da constelação de sinais
 E_s - Energia do sinal
 $L_2(\mathbb{R})$ - Espaço vetorial de Hilbert
 $\varphi_{jk}(x)$ - Família de funções de escala
 $\psi_{jk}^s(x)$ - Família de funções wavelet
FPF - Filtro passa-faixa
 $Q(\cdot)$ - Função de erro
 g - Gênero de uma matriz de coeficientes wavelets
HMM - Hidden Markov Model (*Modelo de Markov Escondido*)
ISI - Inter-Symbol Interference (*Interferência Intersimbólica*)
MCW - Matriz de coeficientes wavelets (*WCM - Wavelet Coefficients Matrix*)
 f_D - Máximo desvio Doppler
 m - Ordem de uma matriz de coeficientes wavelets
PSK - Phase Shift Keying (*Modulação em Fase*)
 P_{erro} - Probabilidade de erro de bit

E_b/N_0 - Relação sinal-ruído de bit

$W[\mathbf{A}]$ - Sistema wavelet associado a matriz wavelet \mathbf{A}

R_s - Taxa da codificação wavelet

R_b - Taxa de bit

T_0 - Tempo de coerência de um canal de comunicação

T_s - Tempo de duração de um símbolo

$T(\mathbf{C})$ - Treliça de um código de bloco \mathbf{C}

σ^2 - Variância do ruído gaussiano

\mathbf{a} - Vetor de escala

\mathbf{b}^s - Vetores wavelets

WSS-US - Wide Sense Stationary - Uncorrelated Scattering (*Canal Descorrelacionado e Estacionário em Sentido Amplo*)

Lista de Figuras

2.1	Resposta de um canal com múltiplos percursos a um pulso, como função da posição da antena [21].	6
2.2	Funções de correlação e densidades espectrais de potência para um canal com múltiplos percursos.	7
2.3	Potência instantânea simulada de um canal com múltiplos percursos como função do tempo de observação.	12
2.4	Esquema de decomposição de um sinal em m bandas de frequências ortogonais.	18
2.5	Sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal. Neste esquema, o termo MCW_i corresponde a i -ésima linha da matriz de coeficientes wavelets.	19
3.1	Desempenho do sistema BPSK não codificado sobre um canal AWGN.	30
3.2	Desempenho do sistema BPSK não codificado sobre um canal com desvanecimento Rayleigh.	31
3.3	Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação PAM/ASK simulado com a $MCW 2 \times 8$ sobre um canal AWGN.	35
3.4	Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação PAM/ASK simulado com a $MCW 4 \times 16$ sobre um canal AWGN.	35
3.5	Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet sem diversidade.	36
3.6	Constelação APK.	38
3.7	Desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade, simulado com a $MCW 2 \times 8$ sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.	40
3.8	Desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade, simulado com a $MCW 4 \times 16$ sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.	41

3.9	Sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal.	43
3.10	Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.	46
3.11	Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.	47
3.12	Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh correlacionado.	48
3.13	Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh correlacionado.	49
4.1	Cadeia de Markov com cinco estados.	54
4.2	Modelo de Markov escondido para um sistema de bolas coloridas em urnas.	56
4.3	Constelações de sinais PSK.	60
4.4	Regiões de decisão suave para a recepção de sinais BPSK em canais Rayleigh, dado que a intensidade do desvanecimento Rayleigh é conhecido.	61
4.5	Modelos para o canal com desvanecimento Rayleigh plano com máximo desvio Doppler igual a 100 Hz.	66
5.1	Codificador convolucional com taxa $1/2$	73
5.2	Codificador convolucional com taxa $1/3$	75
5.3	Diagrama em treliça para o codificador convolucional da Figura 5.2.	75
5.4	Problema da decodificação convolucional.	76
5.5	Cálculo da métrica de percurso no algoritmo de Viterbi.	79
5.6	Sistema com codificação wavelet, códigos de Hamming e diversidade espácio-temporal.	80
5.7	Pares de símbolos wavelets gerados em intervalos de sinalização consecutivos pelas linhas das matrizes MCW 2×8 e 4×16	84
5.8	Treliça mínima do código de Hamming utilizado nas simulações.	85
5.9	Desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade espácio-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal com Doppler $f_D = 100$ Hz.	86

5.10	Desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal com Doppler $f_D = 100$ Hz.	87
A.1	Funções de escala para algumas matrizes wavelets de Daubechies.	105
B.1	Modelo em banda básica para um canal de comunicação.	110
B.2	Treliça trivial para o código (3,2).	120
B.3	Treliça mínima para o código (3,2).	121
B.4	Treliça para o código binário (5,3).	123
B.5	Treliça síndrome para o código (5,3).	123
B.6	Vértices parentes.	125
B.7	Treliça trivial para um código arbitrário com comprimento igual a 4.	126
B.8	Seqüência de passos para a construção de uma treliça mínima a partir de uma treliça trivial.	127

Lista de Tabelas

2.1	Exemplo de Codificação Wavelet	15
2.2	Esquema de transmissão com diversidade espaço-temporal	20
3.1	Esquema de transmissão com diversidade espaço-temporal	44
4.1	Intervalos de Quantização da Distribuição de probabilidades Rayleigh .	67
4.2	Matriz A	68
4.3	Matriz B	69
5.1	Mapeamento entre as palavras do código de Hamming (7,4) expurgado e os pares de símbolos gerados pelas linhas das matrizes MCW 2×8 e MCW 4×16	85

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Organização do trabalho	2
2	Codificação com Wavelets para Transmissão em Diversidade	4
2.1	Desvanecimento Rayleigh	5
2.1.1	Espalhamento temporal	7
2.1.2	Taxa de variação do canal	8
2.1.3	Simulação da Taxa de Desvanecimento Rayleigh	10
2.2	Matrizes de Coeficientes Wavelets	11
2.2.1	Matrizes Wavelets Utilizadas na Codificação	13
2.3	Algoritmo de Codificação com Wavelets	14
2.4	Decodificação Wavelet	16
2.5	Codificação Wavelet com Diversidade Espaço-Temporal	18
2.6	Distribuição dos Símbolos CCW	20
2.7	Taxa do Código e Taxa de Sinalização	22
2.7.1	Codificação sem Diversidade	22
2.7.2	Codificação com Diversidade	23
2.8	Conclusão	24
3	Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet	26
3.1	Sistema BPSK não Codificado	27
3.2	Desempenho da Codificação Wavelet em Canais AWGN	32
3.3	Desempenho do Sistema com Codificação Wavelet sem Diversidade em Canais com Desvanecimento Rayleigh	34
3.3.1	Resultados de Simulação	39

3.4	Desempenho do Sistema com Codificação Wavelet e Diversidade Espaço-Temporal em Canais com Desvanecimento Rayleigh	42
3.4.1	Resultados de Simulação	44
3.5	Conclusão	50
4	Modelos de Markov Escondidos para Canais de Comunicação Móvel	51
4.1	Modelos de Markov Escondidos	52
4.1.1	Processos de Markov Discretos	53
4.1.2	Elementos de um HMM	56
4.2	Canal Discreto com Desvanecimento Rayleigh Plano e Decisão Suave .	58
4.2.1	Modulador BPSK	59
4.2.2	Canal Rayleigh	59
4.2.3	Decodificação com Decisão Suave	60
4.3	Modelos de Markov Escondidos para Canais Rayleigh com Decisão Suave	62
4.4	Resultados de Simulação	65
4.5	Conclusão	70
5	Desempenho da Codificação Wavelet com Hamming e Diversidade Espaço-Temporal	71
5.1	Códigos Convolucionais	72
5.1.1	Diagrama em Treliça	74
5.2	O Algoritmo de Viterbi	76
5.3	Codificação Wavelet com Hamming e Diversidade Espaço-Temporal .	79
5.4	Resultados de Simulação	82
5.5	Conclusão	88
6	Conclusão	89
6.1	Perspectivas para trabalhos futuros	91
A	Matrizes e Sistemas Wavelets	93
A.1	As Matrizes Wavelets	94
A.2	Matrizes Wavelets de Haar	98
A.2.1	A Matriz de Haar Canônica	98
A.2.2	Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet	99
A.2.3	Produto Tensorial entre Matrizes de Haar	100

A.2.4	O Operador Extensão	101
A.3	Expansão Ortonormal Discreta	102
A.4	Funções Wavelets e de Escala	103
A.5	Sistemas Wavelet	104
A.6	Conclusão	107
B	Códigos de Bloco Lineares	108
B.1	Códigos de Bloco	109
B.2	Códigos de Bloco Lineares	114
B.2.1	A Matriz Geradora e a Matriz de Paridade	115
B.2.2	Códigos de Hamming	117
B.3	Treliça Mínima de Códigos de Bloco Lineares	118
B.3.1	Construção de Treliças Mínimas através da Matriz de Paridade de Códigos de Bloco Lineares	121
B.3.2	Propriedades da Treliça Mínima	122
B.4	Conclusão	126

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos tem-se observado um avanço tecnológico ímpar nas telecomunicações. Os sistemas de comunicação móvel, em particular os sistemas de telefonia celular, têm se destacado nessa nova era. Novas tecnologias surgem a cada instante e com elas, a possibilidade de implementação de novos serviços. A principal razão para tanto esforço tecnológico se deve a uma busca por sistemas que possibilitem fornecer serviços de excelente qualidade, a altas taxas de transmissão, em meio a um ambiente de comunicação altamente hostil que é o canal de comunicação móvel.

Esse canal de comunicação tem como característica principal a propagação por múltiplos percursos. O sinal recebido pelo terminal móvel é composto pela soma vetorial dos vários sinais oriundos de diferentes caminhos entre o transmissor e o receptor. Esses múltiplos percursos são formados pela reflexão e/ou difração do sinal transmitido em estruturas próximas ao receptor, tais como edifícios, árvores, etc.. A soma vetorial dos vários sinais dos múltiplos percursos pode resultar em uma interferência construtiva ou destrutiva no sinal recebido. Com o movimento, as estruturas em torno do receptor vão se modificando e, por consequência, as interferências passam constantemente da situação construtiva para a destrutiva, fazendo com que a intensidade do sinal recebido varie ao longo do tempo. Esse fenômeno de alteração na intensidade do sinal recebido é denominado desvanecimento por múltiplos percursos.

Nesse contexto, para que os efeitos destrutivos produzidos pelo canal de comunicação móvel sejam minimizados e se possa estabelecer uma comunicação com qualidade adequada, várias técnicas de codificação têm sido propostas [11], [19], [29], sendo algumas delas integradas a esquemas de transmissão em diversidade [1], [21] e [22].

A diversidade é uma técnica na qual réplicas de um sinal são combinadas na recepção

com o objetivo de se obter maior confiabilidade na detecção desse sinal. Essas réplicas são transmitidas sobre canais independentes, e portanto, são afetadas diferentemente (de maneira descorrelacionada) pelo canal. Dessa forma, quando uma dessas réplicas estiver em uma situação de desvanecimento profundo, será grande a probabilidade de que outras réplicas não estejam nessa situação. Assim, elas podem ser combinadas para fornecer ao processo de detecção um sinal mais confiável que aquele obtido se não houvesse réplicas não correlacionadas [37].

Dentre as várias técnicas de codificação existentes na literatura, a codificação wavelet apresenta-se como uma técnica promissora de combate aos efeitos do desvanecimento [6], [24], [31] e [38]. Essa codificação utiliza as linhas de uma matriz de coeficientes wavelets (MCW) para codificar os bits de informação. A codificação é baseada nas propriedades de ortogonalidade presentes nas linhas das MCW, denominadas de palavras-código. As vantagens da codificação wavelet resultam da combinação da ortogonalidade das palavras-código wavelets, do espalhamento dos símbolos de informação através dos símbolos wavelets e da habilidade de poder utilizar decodificação com decisão suave sobre os símbolos wavelets codificados.

Nesse trabalho, a codificação com wavelets é inicialmente combinada a um esquema de transmissão em diversidade. Explorando algumas características da codificação com wavelets, a diversidade pôde ser implementada sem aumento significativo da complexidade e sem diminuição da eficiência espectral do sistema. O desempenho da referida técnica, medido em termos da probabilidade de erro de bit, é analisado em canais AWGN e em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. Com base nos efeitos que o desvanecimento provoca no desempenho do sistema proposto, são realizadas algumas modificações visando a melhoria deste desempenho. Como resultado final, será obtido um sistema que apresenta um considerável ganho de desempenho em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh a um custo computacional moderado.

1.1 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada como segue:

No Capítulo 2 é apresentada uma caracterização do efeito do desvanecimento. Apresenta-se uma classificação dos distúrbios provocados pela propagação por múltiplos percursos, assim como, uma análise destes distúrbios no domínio do tempo e da frequência.

Posteriormente, as matrizes wavelets são definidas e suas principais propriedades, apresentadas. Ainda no Capítulo 2, a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelets é apresentada. Em seguida é proposto um sistema que integra a codificação com wavelets a um esquema de transmissão em diversidade. O final do Capítulo 2 é dedicado a uma análise da taxa de codificação e da taxa de sinalização do sistema proposto.

O Capítulo 3 apresenta uma análise do desempenho de sistemas com codificação wavelet com diversidade e sem diversidade sobre canais AWGN. Este Capítulo também apresenta o desempenho desses sistemas, obtido via simulação computacional, em canais com desvanecimento Rayleigh e efeito Doppler.

O Capítulo 4 é dedicado ao modelamento dos surtos de erros presentes nos canais de comunicação com desvanecimento Rayleigh e Doppler finito. Os modelos obtidos neste Capítulo são utilizados nas simulações realizadas no Capítulo 5.

No Capítulo 5 são apresentadas algumas modificações no sistema com codificação wavelet e diversidade para melhorar o desempenho do mesmo sobre canais com desvanecimento Rayleigh e Doppler finito. Resultados obtidos com a simulação do novo sistema também são apresentados neste Capítulo.

O trabalho termina com o Capítulo 6, um espaço dedicado às considerações finais e às perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Codificação com Wavelets para Transmissão em Diversidade

Nos sistemas de comunicações móveis, os sinais se propagam através de múltiplos percursos. Essa característica pode alterar de maneira significativa a qualidade do sinal, efeito que é denominado *desvanecimento*. Quando o desvanecimento compromete substancialmente a qualidade da transmissão, o uso de códigos combinados a esquemas de transmissão com diversidade é usualmente necessário [22]. Neste Capítulo é proposto um novo sistema que integra a codificação com matrizes de coeficientes wavelets a um esquema de transmissão com diversidade espaço-temporal.

A codificação com wavelets (Wavelet Channel Coding - WCC) é uma técnica de codificação relativamente recente e ainda pouco explorada, que utiliza as linhas de uma matriz de coeficientes wavelets (MCW) para codificar os bits de informação [6], [31] e [38]. A codificação é baseada nas propriedades de ortogonalidade entre as linhas das MCW, denominadas de palavras-código, que mantêm-se ortogonais quando deslocadas. As vantagens dessa técnica de codificação resultam da combinação da ortogonalidade das palavras-código wavelets, do espalhamento dos símbolos de informação através dos símbolos wavelets e da habilidade de poder utilizar decodificação com decisão suave sobre os símbolos wavelets codificados.

A integração dessa técnica de codificação ao esquema de diversidade espaço-temporal é conseguida utilizando-se algumas propriedades da codificação com matrizes wavelets. Neste esquema de diversidade, parcelas do sinal codificado são transmitidas em intervalos de tempo diferentes, através de dois canais estatisticamente independentes, sem aumento significativo de complexidade e sem diminuição da eficiência espectral do

sistema.

O restante deste Capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 2.1, o desvanecimento Rayleigh será caracterizado. Na Seção 2.2 são definidas as matrizes de coeficientes wavelets e apresentadas importantes propriedades dessas matrizes à codificação com wavelets. Na Seção 2.3 é apresentada a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelets. Na Seção 2.4, apresenta-se o processo de decodificação wavelet. Na Seção 2.5, é apresentada a técnica de codificação com wavelets integrada a um esquema de diversidade espaço-temporal. Na Seção 2.6, apresenta-se a distribuição de probabilidade dos símbolos WCC. Na Seção 2.7, discute-se a taxa de código e a taxa de sinalização para a codificação com wavelets. Finalmente, na Seção 2.8, são apresentadas algumas conclusões.

2.1 Desvanecimento Rayleigh

Nos sistemas de comunicações móveis, os sinais se propagam na atmosfera próxima do solo. Como consequência, a propagação dos sinais entre o transmissor e o receptor é realizada através de múltiplos percursos devido aos efeitos de difração e reflexão dos sinais ao longo de suas trajetórias. Este fenômeno causa flutuações na amplitude e fase dos sinais recebidos e é denominado de desvanecimento por múltiplos percursos, ou simplesmente de desvanecimento. Quando o desvanecimento é caracterizado por um número grande de raios refletidos, sem componentes do sinal em visada direta, ele é modelado por uma distribuição de probabilidades de Rayleigh. Quando há uma componente de visada direta dominante no sinal, o desvanecimento é caracterizado pela distribuição de Rice [37]. A distribuição de Rayleigh representa a distribuição de probabilidades associada ao pior caso de desvanecimento.

O desvanecimento pode se manifestar basicamente através de dois mecanismos, sendo eles: o espalhamento temporal do sinal e a taxa de variação do canal. O espalhamento temporal determina como o desvanecimento afeta o conteúdo espectral do sinal transmitido, e pode ser definido como seletivo ou não seletivo em frequência (plano). A taxa de variação do canal determina a velocidade de variação do canal ao longo do tempo, e pode ser classificada como lenta ou rápida. A Figura 2.1 ilustra as consequências de ambas as manifestações. Ela apresenta a resposta de um canal com múltiplos percursos em função do tempo, a um pulso transmitido.

Na Figura 2.1 distingue-se duas referências de tempo: o tempo de atraso τ e o tempo

de observação t . O tempo de atraso refere-se ao espalhamento temporal resultante da resposta ao impulso não-ótima do canal. O tempo de observação, entretanto, é relacionado a mobilidade da antena receptora. Note que, considerando uma velocidade de mobilidade constante, o tempo de observação produz uma indicação da variação do canal ao longo do tempo.

As Figuras 2.1 a-c mostram uma seqüência de perfis de potência de pulsos recebidos por uma antena que se move através de uma sucessão de pontos igualmente espaçados. Em cada um dos três casos mostrados, o padrão da resposta difere significativamente no tempo de atraso da maior componente do sinal, na quantidade de cópias do sinal, nas suas magnitudes e na potência total recebida.

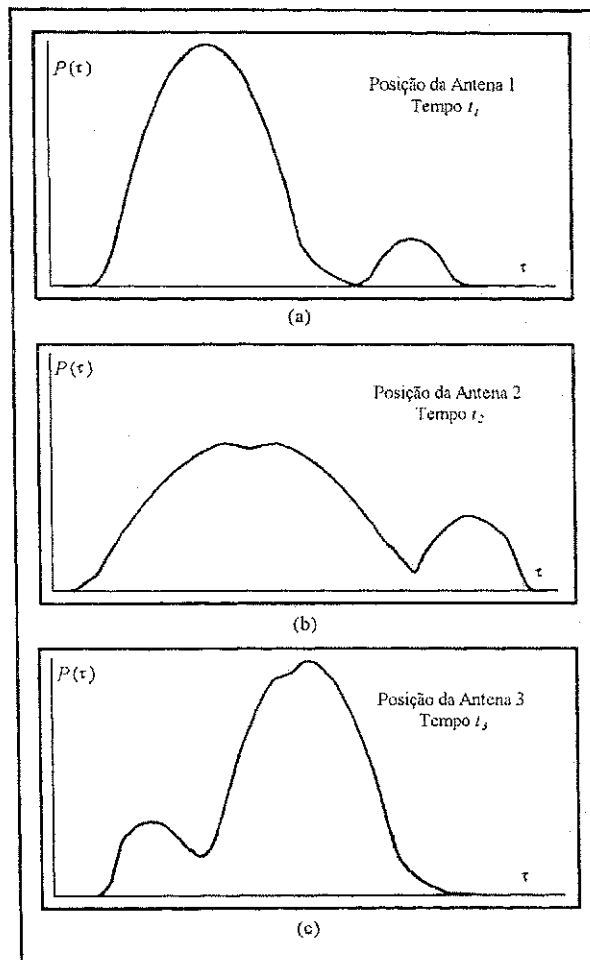


Figura 2.1: Resposta de um canal com múltiplos percursos a um pulso, como função da posição da antena [21].

A seguir, o espalhamento temporal e a taxa de variação do canal serão analisados mais detalhadamente no domínio do tempo e no domínio da frequência.

2.1.1 Espalhamento temporal

A Figura 2.2(a) ilustra o perfil de intensidade de múltiplos percursos $S(\tau)$ versus o tempo de atraso. Esta figura ajuda a responder a seguinte pergunta: Para um impulso transmitido, como a potência recebida varia com função do tempo de atraso τ ? Aqui, entende-se por *tempo de atraso*, a diferença entre o atraso da componente atual e o atraso da primeira componente do sinal a chegar no receptor.

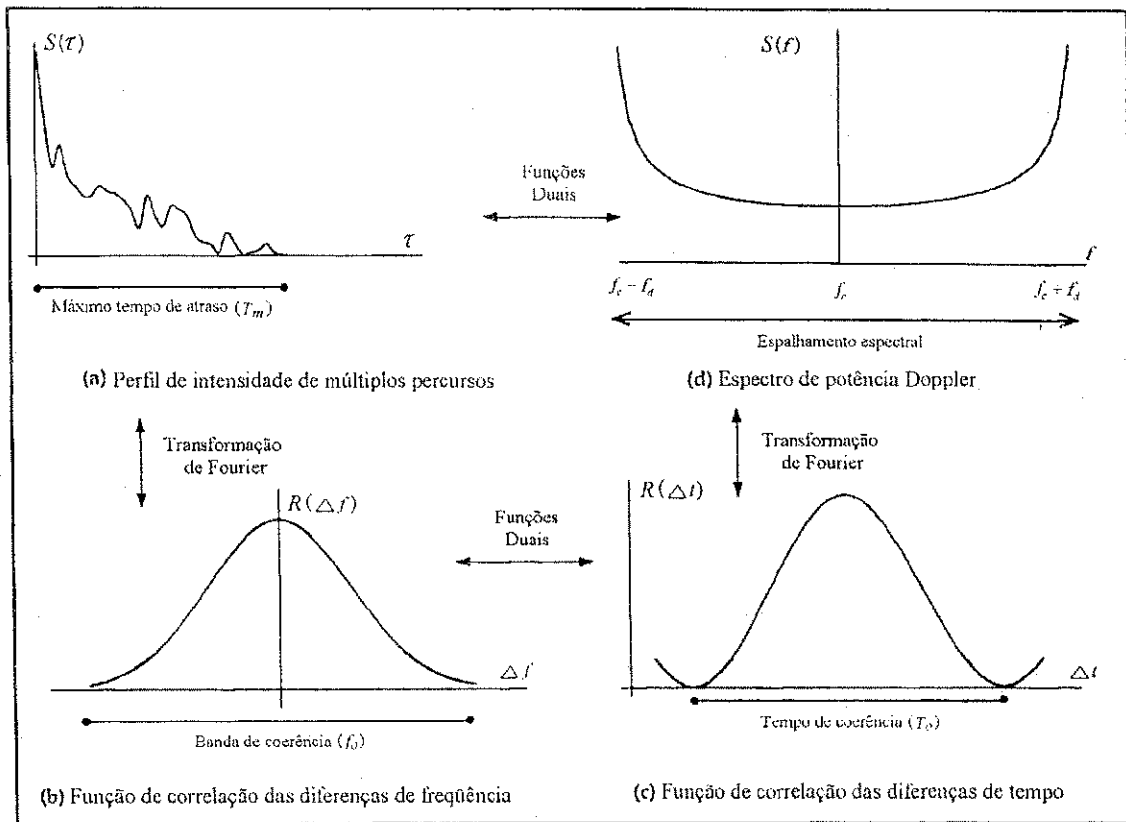


Figura 2.2: Funções de correlação e densidades espectrais de potência para um canal com múltiplos percursos.

Na transmissão de um simples impulso, o intervalo de tempo T_m entre a primeira e a última componente representa o *máximo tempo de atraso*, durante o qual a potência do sinal cai abaixo de um limite, relacionado ao nível de potência da componente mais

forte.

Em um canal de comunicação móvel, a relação entre o máximo tempo de atraso T_m e o tempo de sinalização T_s classifica o desvanecimento em duas categorias diferentes, sendo elas: o desvanecimento seletivo e o desvanecimento não seletivo em frequência (ou desvanecimento plano). Um canal apresenta desvanecimento seletivo se $T_m > T_s$. Neste caso, as componentes de múltiplos percursos de um símbolo se estendem além da duração do símbolo, ocasionando a interferência intersimbólica (ISI). Por outro lado, se $T_m < T_s$, o canal possui desvanecimento plano. Neste caso não há interferência intersimbólica, já que todas as componentes chegam ao receptor no mesmo intervalo de sinalização. Entretanto, ainda existe uma degradação de desempenho, visto que as fases das componentes podem se adicionar de forma destrutiva, reduzindo substancialmente a relação sinal-ruído.

Uma análise completamente análoga pode ser feita no domínio da frequência. Na Figura 2.2(b) é apresentada a função $R(\Delta f)$ denominada de *função de correlação entre as diferenças de frequências*. Esta função é a transformada de Fourier da função $S(\tau)$. Ela representa a correlação entre a resposta do canal a dois sinais, como função da diferença entre as frequências dos dois sinais.

O inverso do máximo tempo de atraso T_m é denominado de *banda de coerência*. A banda de coerência, denotada por f_0 , representa uma faixa de frequências sobre as quais, as componentes do sinal apresentam um alto valor de correlação. As componentes espectrais de um sinal dentro da banda de coerência do canal são afetadas de maneira similar, exibindo portanto o mesmo desvanecimento.

Do mesmo modo como foi definido no domínio temporal, um canal é dito seletivo em frequência quando $f_0 < 1/T_s$. Se o canal é seletivo em frequência, então as componentes do sinal fora da banda de coerência do canal são afetadas de maneira diferente das componentes contidas na banda de coerência do canal.

2.1.2 Taxa de variação do canal

Nos sistemas de comunicações móveis o canal é variante no tempo. Essa variação do canal resulta da mobilidade existente entre o transmissor e o receptor ao longo do tempo. Dessa forma, mesmo para um mesmo sinal transmitido, o receptor observa variações na amplitude e na fase do sinal recebido com o passar do tempo.

A Figura 2.2(c) ilustra a função $R(\Delta t)$, denominada de *função de correlação das*

diferenças de tempo. Esta função apresenta a autocorrelação da resposta do canal a uma senóide. Ela especifica se existe correlação entre a resposta do canal a uma senóide enviada no instante de tempo t_1 e a resposta do canal a uma senóide similar enviada no instante de tempo t_2 , com $\Delta t = t_2 - t_1$.

Se for considerado que a propagação dos sinais ocorre sobre o plano horizontal, e que a distribuição do ângulo de chegada dos sinais na antena receptora é uniforme no intervalo $[0, 2\pi)$, a função de autocorrelação $R(\Delta t)$ pode ser expressa por [36]

$$R(\Delta t) = \frac{E_0}{2} J_0 \left(\frac{2\pi \Delta t}{T_0} \right) \quad (2.1)$$

em que $E_0/2$ representa a potência média associada ao valor de retardo considerado, $J_0(\cdot)$ denota a função de Bessel de ordem zero e T_0 é o *Tempo de coerência de um canal*, definido como a média de tempo no qual a resposta do canal permanece invariante.

A função $R(\Delta t)$ e o parâmetro T_0 apresentam informações sobre a velocidade de variação do canal.

A variação do canal pode ser classificada como lenta ou rápida. O desvanecimento rápido ocorre quando $T_0 < T_s$, sendo T_s , o tempo de transmissão de um símbolo. No desvanecimento rápido, ocorre uma variação das características do canal enquanto um símbolo está se propagando, causando distorções na forma do pulso em banda básica, levando freqüentemente a um patamar de erro de transmissão irreduzível. Por outro lado, um canal apresenta desvanecimento lento quando $T_0 > T_s$. Neste caso, o tempo que o canal permanece invariante é longo se comparado ao tempo de duração da transmissão de um símbolo. O principal tipo de degradação do sinal em um canal com desvanecimento lento é a diminuição da razão sinal/ruído por períodos de tempo maiores, ocasionando um aumento no comprimento médio dos surtos de erros.

Uma caracterização análoga da variação do canal móvel pode ser realizada no domínio do deslocamento Doppler (ou da freqüência). Seja $S(f)$ a transformada de Fourier da função de autocorrelação $R(\Delta t)$. A função $S(f)$ é conhecida como espectro "clássico" ou de "Jakes", e pode ser expressa por

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D}\right)^2}}, & \text{se } |f| < f_D \\ 0, & \text{se } |f| \geq f_D, \end{cases} \quad (2.2)$$

em que f_D é denominado de *máximo desvio Doppler*, definido por

$$f_D = \frac{v}{\lambda_s} \quad (2.3)$$

sendo v a velocidade relativa entre o transmissor e o receptor.

A Figura 2.2(d) ilustra o espectro de Jakes $S(f)$ em função do deslocamento Doppler f . Esse espectro permite conhecer o espalhamento espectral que é imposto ao sinal como função da taxa de variação do canal.

O máximo desvio Doppler f_D e o tempo de coerência T_0 são inversamente relacionados. Dessa forma, o máximo desvio Doppler f_D (ou $1/T_0$) pode ser visto como a taxa de desvanecimento do canal. Sendo assim, considera-se que um canal tem desvanecimento rápido se a taxa de símbolos $1/T_s$ for menor que a taxa de desvanecimento f_D . Caso contrário, se $f_D < 1/T_s$, o desvanecimento é caracterizado como lento.

2.1.3 Simulação da Taxa de Desvanecimento Rayleigh

Neste trabalho, o tipo de desvanecimento considerado foi o Rayleigh. Existem duas estratégias para simular a taxa de desvanecimento Rayleigh. A primeira delas se baseia na geração de processos gaussianos complexos brancos, estatisticamente independentes entre si, com média nula. Posteriormente, estes processos são moldados através de uma filtragem no domínio do tempo ou da frequência, de acordo com o espectro Doppler desejado. A segunda abordagem utiliza a técnica de *Monte Carlo*, na qual a simulação procura aproximar o fenômeno físico de múltiplos percursos. Uma comparação dessas técnicas de simulação é apresentado em [10]. Nesse trabalho, optou-se pela técnica de Monte Carlo.

O canal, caracterizado pelo efeito de múltiplos percursos, pode ser modelado como um sistema linear variante no tempo. Sendo assim, para um sinal $s(t)$ transmitido através de um canal com propagação em múltiplos percursos, a envoltória complexa do sinal recebido $r(t)$ é dada por,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t; \tau) s(t - \tau) d\tau \quad (2.4)$$

em que $h(t; \tau)$ denota a resposta no instante t a um impulso aplicado em $t - \tau$.

A maioria dos trabalhos que utilizam modelos para a resposta ao impulso de canais de comunicações móveis adota o modelo WSS-US (*Wide Sense Stationary-Uncorrelated Scattering*), que especifica comportamentos estatísticos que um modelo particular deve atender. De acordo com o modelo WSS-US, para um determinado valor de retardo τ_0 , a resposta ao impulso $h(t; \tau)$ representa um processo estacionário em sentido amplo (WSS - *Wide Sense Stationary*). Além disso, admite-se que os processos $h(t; \tau_1)$ e

$h(t; \tau_2)$ sejam descorrelacionados para valores diferentes de retardo, $\tau_1 \neq \tau_2$ (US - *Uncorrelated Scattering*).

Adotando-se o modelo WSS-US, o canal pode ser caracterizado por uma função bidimensional conhecida como *função espalhamento*, que quantifica os espalhamentos realizados nos domínios do tempo e da frequência [26].

Utilizando a abordagem de Monte Carlo, o canal de comunicações é modelado para refletir a estrutura de múltiplos percursos, representada por uma superposição linear de N caminhos, sendo cada um deles caracterizado por uma amplitude a_n , por uma fase ν_n e por um retardo τ_n . Desta forma, a resposta ao impulso variante no tempo é dada por

$$h(t; \tau) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi\nu_n t} \delta(t - \tau_n) \quad (2.5)$$

É possível mostrar que o canal representado pela Equação 2.5 atende as especificações do modelo WSS-US, desde que as variáveis aleatórias a_n sejam estatisticamente independentes, com variâncias unitárias e que o par (ν_n, τ_n) seja extraído de uma função densidade de probabilidade conjunta, cuja forma é dada pela função espalhamento do canal que se deseja simular [17].

A Figura 2.3 apresenta a potência instantânea simulada de um canal de comunicação móvel não seletivo em frequência. O canal foi simulado pela técnica de Monte Carlo com $N = 20$, frequência de amostragem de 24,3 KHz e máximo desvio Doppler $f_D = 150\text{Hz}$. O tempo de observação do canal ilustrado na figura é igual a 0,04 segundos, ou 1000 símbolos com a frequência de amostragem adotada.

2.2 Matrizes de Coeficientes Wavelets

Nesta Seção, as matrizes de coeficientes wavelets serão definidas e as suas propriedades mais relevantes para a codificação com wavelets serão apresentadas. No apêndice A, essas matrizes poderão ser estudadas mais detalhadamente.

Considere a matriz $\mathbf{A} = (a_k^s)$ com $m \geq 2$ linhas (vetores) e mg colunas denotada

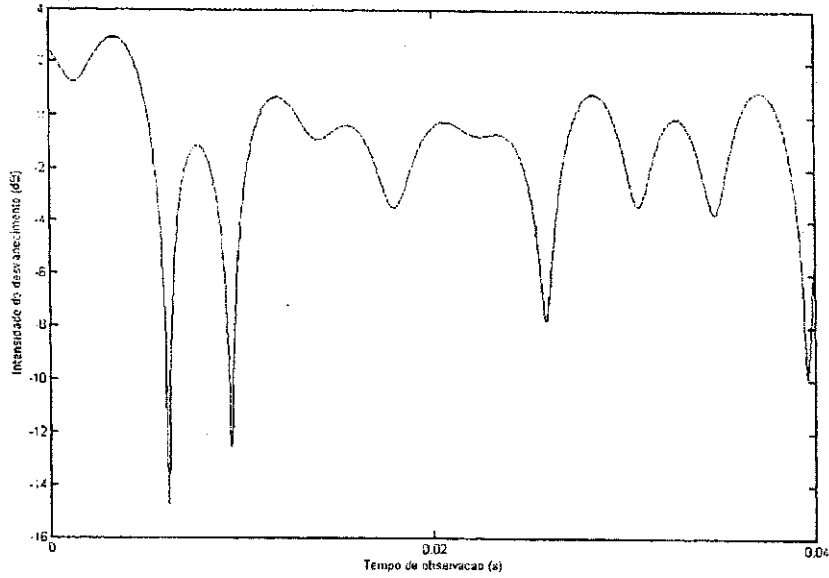


Figura 2.3: Potência instantânea simulada de um canal com múltiplos percursos como função do tempo de observação.

por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_{mg-1}^0 \\ a_0^1 & \dots & a_{mg-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \dots & a_{mg-1}^{m-1} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

com elementos no corpo dos números complexos ou dos números reais.

A matriz \mathbf{A} é denominada de *matriz wavelet* de ordem m e gênero g se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1 \quad (2.7)$$

$$\sum_k a_{k+ml}^{s'} \bar{a}_{k+ml}^s = m\delta_{s',s}\delta_{l,l} \quad (2.8)$$

em que

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.9)$$

As relações 2.7 e 2.8 são denominadas, respectivamente, de condições quadrática e linear das matrizes wavelets.

As matrizes wavelets de ordem m podem ser vistas como um banco de filtros digitais com multi-taxas, em que a primeira linha equivale a um filtro passa-baixas e as $m - 1$ linhas restantes equivalem a filtros passa-faixas. Dessa forma, para uma dada matriz wavelet, os elementos do vetor de escala e dos vetores wavelets são também chamados de coeficientes de filtro passa-baixas e coeficientes de filtros passa-faixas, respectivamente.

2.2.1 Matrizes Wavelets Utilizadas na Codificação

Nesta Seção será apresentado uma classe especial de matrizes wavelets, conhecidas como matrizes wavelets reais planas. Essas foram as matrizes utilizadas na codificação wavelet definida nesse trabalho.

Uma matriz wavelet plana possui a propriedade de que todos os seus elementos têm o mesmo valor absoluto. Quando os elementos de uma matriz wavelet plana são reais, ela é denominada de matriz wavelet real plana [31] e [38]. Similarmente, quando os elementos de uma matriz wavelet são números complexos com mesmo módulo, a matriz é denominada de matriz wavelet complexa plana. As matrizes wavelets reais planas com elementos normalizados em ± 1 satisfazem às condições quadrática e linear modificadas

$$\sum_k a_k^j = m\sqrt{g}\delta_{0,j}, \quad (2.10)$$

$$\sum_k a_{k+ml}^j a_{k+m'l'}^{j'} = mg\delta_{j,j'}\delta_{l,l'}. \quad (2.11)$$

A matriz wavelet real plana normalizada em ± 1 com dimensão 2×2 é igual a matriz de Haar expressa na Equação 2.12. Matrizes wavelets reais planas de ordens maiores e gênero 1 são também conhecidas como matrizes de Hadamard ou matrizes de Walsh.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

A seguir, são apresentadas as matrizes wavelets reais planas utilizadas nas simulações dos sistemas com codificação wavelet definidos neste trabalho.

Matriz wavelet real plana de ordem 2 e gênero 4:

Essa matriz wavelet foi obtida aplicando-se a operação de extensão, definida na Seção A.2.4, sobre a matriz de Haar de ordem $m = 2$ apresentada na Equação 2.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Matriz wavelet real plana de ordem 4 e gênero 4:

Essa matriz wavelet foi obtida pelo produto tensorial, definido na Seção A.2.3, entre duas matrizes de Haar de ordem $m = 2$, seguido por uma operação de extensão.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

2.3 Algoritmo de Codificação com Wavelets

Nesta Seção é apresentado o algoritmo de codificação com wavelets proposto por Tzannes em [31].

Apesar do algoritmo de codificação apresentado a seguir, poder ser implementado usando-se qualquer matriz de coeficientes wavelets (MCW), neste trabalho serão utilizadas apenas as matrizes MCW reais planas.

A Equação 2.8 é a propriedade fundamental das MCW que torna possível a codificação com wavelets. Esta equação assegura que as linhas de uma matriz MCW de ordem m são mutuamente ortogonais quando deslocadas de km , sendo k um inteiro positivo. Além disso, essa equação estabelece que cada linha é ortogonal a si mesma, deslocada de km , para $k > 0$.

No processo de codificação bit-a-bit com matrizes wavelets, cada bit de informação é mapeado em uma linha da MCW (observe neste ponto a similaridade existente entre a técnica de codificação com wavelets e a técnica de espalhamento espectral por seqüência direta). A construção de uma matriz de codificação de ordem m é realizada de modo a satisfazer as relações de ortogonalidade apresentadas na Equação 2.8. Dessa forma, as palavras-código wavelets podem ser somadas e sobrepostas, sem perder a ortogonalidade necessária na decodificação.

Para exemplificar o processo de codificação, considere um vetor mensagem $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ consistindo de uma seqüência de bits de informação x_i que pertencem ao conjunto $\{+1, -1\}$. Além disso, considere que no processo de codificação utilizou-se uma matriz MCW real plana com ordem $m = 2$ e gênero g , dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{2g-1}^0 \\ a_0^1 & \cdots & a_{2g-1}^1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Nesta matriz, \mathbf{a}^0 e \mathbf{a}^1 representam respectivamente, o vetor de escala e o vetor wavelet, ou em outras palavras, os coeficientes do filtro passa-baixas e do filtro passa-altas de um banco de filtros digitais com 2 bandas. Como as linhas de \mathbf{A} são mutuamente ortogonais quando deslocadas de duas posições ($m=2$), a propriedade da ortogonalidade entre os vetores \mathbf{a}^0 e \mathbf{a}^1 pode ser utilizada para codificar os bits de informação a uma taxa de 2 bits a cada $2k$ intervalos de sinalização, sendo $k \geq 1$ e inteiro. Neste esquema de codificação, os bits de informação gerados nos intervalos de sinalização com índices ímpares são codificados pela primeira linha da matriz (vetor de escala) e os bits de informação gerados nos intervalos de sinalização com índices pares são codificados pela segunda linha da matriz (vetor wavelet).

Esse procedimento de codificação está ilustrado na Tabela 2.1. Ele corresponde a uma codificação com máxima sobreposição das seqüências wavelets. Neste caso, a taxa da codificação wavelet é igual a 1 bit de informação por símbolo WCC.

Tabela 2.1: Exemplo de Codificação Wavelet

	1	2	3	...	$2g$	$2g + 1$...
x_1	$x_1 a_0^0$	$x_1 a_1^0$	$x_1 a_2^0$...	$x_1 a_{2g-1}^0$		
x_2	$x_2 a_0^1$	$x_2 a_1^1$	$x_2 a_2^1$...	$x_2 a_{2g-1}^1$		
x_3			$x_3 a_0^0$	$x_3 a_1^0$	$x_3 a_2^0$...	$x_3 a_{2g-1}^0$
x_4			$x_4 a_0^1$	$x_4 a_1^1$	$x_4 a_2^1$...	$x_4 a_{2g-1}^1$
\vdots					\vdots	\vdots	\ddots
	y_1	y_2	y_3	...	y_{2g}	y_{2g+1}	...

A seqüência dos intervalos de sinalização está localizada no quadro superior da tabela, enquanto que a seqüência dos respectivos símbolos codificados y_n está localizada no quadro inferior da tabela. A codificação de cada bit de informação x_i é apresentada na i -ésima linha abaixo do quadro superior da Tabela 2.1. Note que para n ímpar, a codificação é iniciada no i -ésimo intervalo de sinalização e, para n par, inicia-se no

$(i - 1)$ -ésimo intervalo de sinalização. Finalmente, o símbolo codificado y_n é o resultado da soma dos elementos da n -ésima coluna da Tabela 1.

O conjunto dos valores de y_n não está restrito aos valores ± 1 e depende dos valores de a_i^j . O símbolo a ser transmitido no i -ésimo pulso de relógio é dado por:

$$y_i = \sum_k x_{2k+1} a_{i-2k-1}^0 + x_{2k+2} a_{i-2k-1}^1. \quad (2.16)$$

A codificação com wavelets também pode ser representada pelo produto matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}_{MCW} \quad (2.17)$$

em que \mathbf{C}_{MCW} é uma matriz de codificação construída a partir da matriz MCW real plana de forma a satisfazer as relações de ortogonalidade apresentadas na Equação 2.8, \mathbf{x} é um vetor com os bits de informação que se deseja codificar e \mathbf{y} é o vetor com os símbolos wavelets codificados. A seguir será apresentado como exemplo, uma matriz \mathbf{C}_{MCW} construída a partir de uma matriz de coeficientes wavelets com ordem $m = 2$ e gênero g . Observe que o número de linhas da matriz \mathbf{C}_{MCW} é igual a dimensão do vetor de bits de informação que se deseja codificar.

$$\mathbf{C}_{MCW} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{2g-1}^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{2g-1}^1 \\ & & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{2g-1}^0 \\ & & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{2g-1}^1 \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

2.4 Decodificação Wavelet

Os bits da seqüência de mensagem são recuperados da seqüência de símbolos transmitidos por um correlator casado, através da ortogonalidade inerente entre os vetores linha da matriz wavelet. Um bit de informação x_i é identificado pelo sinal da saída da correlação entre a palavra-código wavelet e a seqüência de símbolos recebida. De acordo com o processo de geração dos símbolos codificados apresentado na Seção anterior, a saída do primeiro correlator casada com a palavra-código wavelet a_n^0 no instante de tempo i pode ser expressa por

$$z_i = \sum_{k=0}^{mg-1} y_{i-k} a_{(mg-1)-k}^0, \quad i = l \cdot mg, \quad l \geq 1 \quad (2.19)$$

De acordo com a Tabela 2.1, tem-se que

$$\begin{aligned}
z_i = & \sum_k \{ (x_{i-(mg-1)} a_k^0) a_k^0 + (x_{i-(mg-2)} a_k^1) a_k^0 + (x_{i-(mg-3)} a_{k-2}^0) a_k^0 + \\
& + (x_{i-(mg-4)} a_{k-2}^1) a_k^0 + \dots + (x_{i-1} a_{k-(mg-m)}^0) a_k^0 + \\
& + (x_i a_{k-(mg-m)}^1) a_k^0 \}, \quad i = l \cdot mg, \quad l \geq 1
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
z_i = & x_{i-(mg-1)} \sum_k a_k^0 a_k^0 + x_{i-(mg-2)} \sum_k a_k^1 a_k^0 + x_{i-(mg-3)} \sum_k a_{k-2}^0 a_k^0 + \\
& + x_{i-(mg-4)} \sum_k a_{k-2}^1 a_k^0 + \dots + x_{i-1} \sum_k a_{k-(mg-m)}^0 a_k^0 + \\
& + x_i \sum_k a_{k-(mg-m)}^1 a_k^0, \quad i = l \cdot mg, \quad l \geq 1.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Como a Equação 2.8 garante que as palavras-código wavelets são mutuamente ortogonais quando deslocadas de km , sendo k um inteiro positivo, assim como, cada palavra-código wavelet é ortogonal a si mesma, deslocada de km , para k inteiro não negativo, tem-se que todos os somatórios da Equação 2.21 se cancelam, exceto o primeiro. Assim, obtém-se

$$z_i = \sum_{k=0}^{mg-1} x_{i-(mg-1)} a_k^0 a_k^0 = mg x_{i-(mg-1)} \tag{2.22}$$

e o símbolo decodificado na ausência de ruído será -1 se $z_i = -mg$, ou, $+1$ se $z_i = +mg$.

A correlação do vetor de símbolos codificados y_n com o vetor escalonamento a^0 resultará na decodificação dos bits da mensagem com número de seqüência ímpar. Já a correlação dos símbolos codificados com o vetor wavelet a^1 resultará na decodificação dos bits da mensagem com número de seqüência par.

O atraso total do código é $mg-1$. Assim, o uso de palavras-código longas resulta em um aumento no tempo de atraso. Note entretanto, que este atraso ocorrerá apenas na decodificação do primeiro bit; após o primeiro bit ser decodificado, a cada m símbolos codificados, recebidos pelo decodificador, são produzidos m bits de informação.

No processo de decodificação são necessários mg correlatores. A decodificação ótima pode ser conseguida se decisões suaves são fornecidas pelo demodulador. Isto pode ser conseguido facilmente utilizando-se modulação PAM/ASK ou BPSK, entretanto deixa de ser trivial se for utilizado modulação MPSK ou FSK. A simplicidade computacional do processo de decodificação é uma das principais vantagens da codificação com wavelets.

2.5 Codificação Wavelet com Diversidade Espaço-Temporal

Nesta Seção será proposto um esquema de transmissão resistente ao desvanecimento que combina codificação com wavelets e diversidade espaço-temporal. A transmissão em diversidade é conseguida sem comprometer a eficiência espectral do sistema.

Considere o esquema apresentado na Figura 2.4. Neste esquema, a cada intervalo de sinalização T_s , o sinal de informação é decomposto em m bandas de frequências ortogonais por um banco de filtros digitais, antes de ser transmitido através do canal móvel. Em [5], o autor observou que este esquema poderia ser implementado através da codificação do sinal por uma matriz de coeficientes wavelets de dimensão $m \times mg$, pois as linhas da matriz wavelet formam um banco de filtros digitais com m bandas. Como foi visto na Seção 2.2, a primeira linha da matriz, formada pelos coeficientes do vetor de escala, corresponde a um filtro passa-baixas e as demais linhas da matriz, formadas pelos coeficientes dos vetores wavelets, correspondem a filtros passa-faixas.

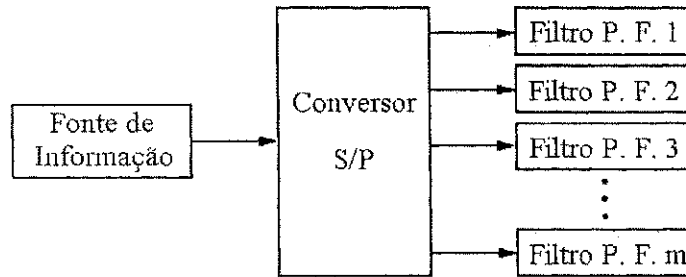


Figura 2.4: Esquema de decomposição de um sinal em m bandas de frequências ortogonais.

Para exemplificar esse esquema, considere o processo de codificação que utiliza a matriz MCW real plana de ordem $m = 2$ e gênero g , descrito na Seção 2.3. Nesta codificação, o símbolo transmitido no i -ésimo intervalo de sinalização é dado por:

$$y_i = \sum_k x_{2k+1} a_{i-2k-1}^0 + x_{2k+2} a_{i-2k-1}^1. \quad (2.23)$$

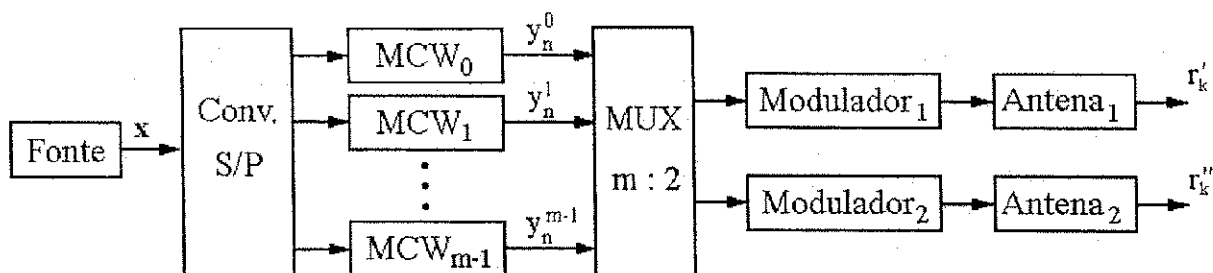


Figura 2.5: Sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal. Neste esquema, o termo MCW_i corresponde a i -ésima linha da matriz de coeficientes wavelets.

Separando a Equação 2.23 em dois somatórios, tem-se

$$y_i^1 = \sum_k x_{2k+1} a_{i-2k-1}^0 \quad (2.24)$$

$$y_i^2 = \sum_k x_{2k+2} a_{i-2k-1}^1 \quad (2.25)$$

Pode-se observar que cada símbolo y_i é formado pelo somatório de duas parcelas independentes. Na primeira delas, os bits de informação gerados nos intervalos ímpares são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do filtro passa-baixa e aqueles gerados nos intervalos pares são codificados através da multiplicação pelos coeficientes do filtro passa-alta. Este esquema pode ser generalizado para uma matriz MCW real plana com dimensão $m \times mg$ (neste trabalho foram consideradas apenas codificações wavelets realizadas por MCW's reais planas com m par). Neste caso, cada símbolo codificado é formado a partir do somatório de m parcelas.

Na Figura 2.5 é apresentado o sistema aqui proposto, que integra a codificação wavelet com diversidade espaço-temporal. Neste sistema, cada antena transmite $m/2$ parcelas y_i^j durante cada intervalo de sinalização T_s . Considera-se que as antenas estão suficientemente separadas, de forma a garantir que a transmissão em cada antena seja afetada por diferentes graus de desvanecimento (canais estatisticamente independentes). Nos intervalos de sinalização com índices ímpares, a primeira antena transmite, em $m/2$ instantes de transmissão distintos, os símbolos codificados pelas linhas pares da matriz MCW e a segunda antena, os símbolos codificados pelas linhas ímpares da matriz MCW. Nos intervalos de sinalização com índices pares, a primeira antena

transmite, em $m/2$ instantes de transmissão distintos, os símbolos codificados pelas linhas ímpares da matriz MCW e a segunda antena, os símbolos codificados pelas linhas pares da matriz MCW. Esse chaveamento entre as duas antenas a cada intervalo de sinalização assegura um incremento no ganho de diversidade. Para ilustrar esse procedimento, apresenta-se na Tabela 2.2 os símbolos transmitidos por cada antena nos três primeiros intervalos de sinalização.

Tabela 2.2: Esquema de transmissão com diversidade espaço-temporal

	Antena 1	Antena 2
1º Intervalo de sinalização	$y_0^1, y_0^3, \dots, y_0^{\frac{m}{2}+1}$	$y_0^0, y_0^2, \dots, y_0^{\frac{m}{2}}$
2º Intervalo de sinalização	$y_1^0, y_1^2, \dots, y_1^{\frac{m}{2}}$	$y_1^1, y_1^3, \dots, y_1^{\frac{m}{2}+1}$
3º Intervalo de sinalização	$y_0^1, y_0^3, \dots, y_0^{\frac{m}{2}+1}$	$y_0^0, y_0^2, \dots, y_0^{\frac{m}{2}}$

Note que neste esquema de transmissão, não há perda de eficiência espectral, visto que cada uma das m palavras-código ortogonais da matriz MCW codifica independentemente $1/m$ dos bits gerados pela fonte. Para o exemplo apresentado na Seção 2.3, metade dos bits são codificados pela primeira linha da matriz e a outra metade, pela segunda linha da matriz, de forma que os símbolos, y_i^1 e y_i^2 , gerados pelas duas palavras-código ortogonais, encontram-se separados em duas bandas espectrais, que juntas ocupam a mesma banda do símbolo y_i .

No receptor, para cada intervalo de sinalização i , as estimativas dos sinais transmitidos por cada antena nos $m/2$ instantes de transmissão são somadas e as estimativas dos símbolos y_i são então decodificados de acordo com o processo descrito na Seção 2.4.

2.6 Distribuição dos Símbolos CCW

Generalizando o processo de codificação apresentado na seção 2.3, para uma codificação com matriz MCW real plana de ordem m par e gênero g , observa-se que os símbolos codificados y_i assumem, em cada intervalo de sinalização, um dos $mg + 1$ valores apresentados abaixo:

$$y_i \in \{-mg, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, mg\} \quad (2.26)$$

Considerando que os bits de informação são equiprováveis, os símbolos codificados

são binomialmente distribuídos de acordo com a função densidade de probabilidade

$$\Pr(y_i = 2k - mg) = \binom{mg}{k} 0,5^{mg}, \quad 0 \leq k \leq mg. \quad (2.27)$$

A partir da Equação 2.27, pode-se mostrar que os símbolos codificados têm média igual a

$$\mathbb{E}[y_i] = \sum_{k=0}^{mg} (2k - mg) \binom{mg}{k} 0,5^{mg} = 0 \quad (2.28)$$

e variância

$$\sigma_y^2 = \mathbb{E}[y^2] = \sum_{k=0}^{mg} (2k - mg)^2 \binom{mg}{k} 0,5^{mg} = mg \quad (2.29)$$

Para o sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal apresentado na seção 2.5, os símbolos y_i^j em cada uma das m sub-bandas, podem assumir um dos $g + 1$ valores apresentados abaixo:

$$y_i^j \in \{-g, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, g\} \quad (2.30)$$

Considerando ainda que os símbolos de informação são equiprováveis, os símbolos codificados y_i^j , em cada sub-banda, seguem a distribuição de probabilidade binomial

$$\Pr(y_i^j = 2k - g) = \binom{g}{k} 0,5^g, \quad 0 \leq k \leq g \quad (2.31)$$

e apresentam média igual a

$$\mathbb{E}[y_i^j] = \sum_{k=0}^g (2k - g) \binom{g}{k} 0,5^g = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.32)$$

e variância dada por

$$\sigma_{y^j}^2 = \sum_{k=0}^g (2k - g)^2 \binom{g}{k} 0,5^g = g, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.33)$$

2.7 Taxa do Código e Taxa de Sinalização

Nesta Seção serão apresentados a taxa do código e a taxa de sinalização para os esquemas de codificação wavelet com diversidade e sem diversidade.

2.7.1 Codificação sem Diversidade

A técnica de codificação com matrizes wavelets possui a capacidade de codificar bits de informação à taxas variáveis. Nesta técnica, a taxa da codificação wavelet, tanto para o sistema sem diversidade quanto para o sistema com diversidade, varia em função do nível de sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet. A máxima sobreposição ocorre quando o deslocamento entre linhas idênticas é igual a m (ver Equação 2.18 para o caso de $m = 2$). Nesta condição, a taxa da codificação wavelet é igual a 1, ou seja, um bit de informação por símbolo codificado. Entretanto, pode-se conseguir taxas de codificação tão pequenas quanto $1/g$, variando a sobreposição das seqüências wavelets; no limite, quando a taxa do código wavelet é $1/g$, as seqüências wavelets não são sobrepostas, mas adjacentes.

Em uma codificação sem diversidade com máxima sobreposição, se for admitido que os bits de informação são gerados a uma taxa de R_b bits/seg, então a taxa da codificação wavelet será igual a $R_s = R_b$ símbolos/seg. Se um símbolo codificado é transmitido no mesmo intervalo de tempo que um bit de informação é gerado pela fonte, a codificação com palavras-código longas não compromete a taxa de transmissão. Entretanto, a utilização de palavras-código longas na codificação aumenta a variância dos símbolos, de acordo com a Equação 2.29, e o número dos possíveis valores dos símbolos codificados, de acordo com a Equação 2.26.

A taxa de sinalização pode ser definida como o número de bits de canal transmitidos em cada intervalo de sinalização. A taxa de sinalização para uma codificação sem diversidade com máxima sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet é dada pela equação

$$R = \frac{1}{\log_2(mg + 1)} \quad (2.34)$$

Variando a sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet é possível variar a taxa de sinalização do canal. Isto ocorre porque o número de valores na distribuição dos símbolos codificados diminui, quando o nível de sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet é reduzido.

2.7.2 Codificação com Diversidade

Para o sistema com diversidade apresentado na Seção 2.5, com matriz MCW real plana de dimensão $m \times mg$ e máxima sobreposição das seqüências wavelets, a taxa de sinalização em cada uma das duas antenas é dada por,

$$R = \frac{2}{m \log_2(g + 1)} \quad (2.35)$$

A variação da sobreposição das palavras-código na matriz de codificação wavelet permite variar a taxa de sinalização. Entretanto existe outra forma de alterar a taxa de sinalização. Isto pode ser conseguido limitando o esquema de modulação a um número de níveis menor que o número de símbolos codificados. De acordo com a Seção 2.6, a codificação sem diversidade, realizada por uma matriz de codificação construída com a máxima sobreposição das seqüências wavelets produz $mg + 1$ símbolos codificados. Se for considerado um esquema de modulação que leva em consideração apenas os símbolos mais prováveis, dados pela Equação 2.27, a taxa de sinalização é reduzida. Esse procedimento é equivalente a reduzir o número de símbolos codificados através do truncamento dos símbolos com pequena probabilidade de ocorrência. Por exemplo, uma codificação sem diversidade, com máxima sobreposição das seqüências wavelets, realizada por uma matriz MCW real plana com ordem $m = 2$ e gênero $g = 4$, gera símbolos com os seguintes valores,

$$-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \quad (2.36)$$

A taxa de sinalização dessa codificação é $1/\log_2 9$. Esse sistema requer um esquema de modulação 9-ário na transmissão. Entretanto, se os símbolos ± 8 , com probabilidade de ocorrência da ordem de 10^{-3} , forem substituídos pelos símbolos ± 6 (que são os símbolos mais próximos em módulo e sinal), pode-se utilizar um esquema de modulação 7-ário para transmitir os 7 símbolos de maior probabilidade. Esse procedimento reduz a taxa de sinalização do canal para $1/\log_2 7$. Um procedimento idêntico pode ser utilizado para reduzir a taxa de sinalização de um sistema com codificação wavelet e diversidade.

Note que deve haver um compromisso entre o número máximo de símbolos que podem ser truncados e a capacidade de correção de erros da codificação com wavelets. Devido a redundância inerente da codificação wavelet, a degradação de desempenho provocada pelo truncamento dos símbolos com probabilidades de ocorrência inferiores

a 10^{-4} é, em geral, irrelevante quando comparada ao ganho de desempenho conseguido pela utilização de esquemas de modulação com um número menor de sinais.

2.8 Conclusão

Neste Capítulo foi apresentada a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelets. As principais propriedades da codificação com wavelets são apresentadas a seguir:

1. A codificação com wavelets é uma classe recente de algoritmos de codificação.
2. A codificação com wavelets pode ser aplicada na forma de codificação de bloco ou na forma de codificação em treliça.
3. As palavras-código wavelets são estritamente ortogonais.
4. A codificação WCC permite codificação com taxa igual a 1 bit de informação por símbolo wavelet.
5. O sistema de codificação WCC permite decodificação robusta com decisão suave.
6. Os códigos WCC podem ser arbitrariamente longos.
7. Os códigos WCC podem ser eficientemente codificados e decodificados com circuitos VLSI.
8. Em sistemas com codificação WCC, a sincronização pode ser conseguida através de medições sobre a correlação cruzada. Essa propriedade é muito interessante e vale ser investigada em trabalhos futuros.
9. Estudos analíticos e simulações por computador mostram que a codificação WCC apresenta o mesmo desempenho do BPSK coerente sobre canais com ruído aditivo gaussiano branco. Entretanto, em canais com desvanecimento plano, a codificação WCC supera o desempenho do BPSK com ganhos que dependem do comprimento da palavra-código wavelet utilizada na codificação. Este ganho de codificação é resultado da ortogonalidade intrínseca das palavras-código wavelets e do espalhamento no tempo dos bits de informação ao longo dos símbolos wavelets codificados.

Também foi discutido neste Capítulo um esquema de transmissão que utiliza algumas propriedades da codificação com matrizes wavelets para conseguir uma transmissão em diversidade, sem diminuição da eficiência espectral do sistema.

Nos próximos Capítulos, serão apresentados alguns sistemas que utilizam a codificação wavelet integrada a esquemas de transmissão com diversidade ou sem diversidade. Os desempenhos desses sistemas, obtidos em termos da probabilidade de erros de bits, serão avaliados em relação ao desempenho de um sistema de referência.

Capítulo 3

Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet

Neste Capítulo será apresentado o sistema com codificação wavelet, proposto inicialmente em [31], assim como o primeiro sistema proposto neste trabalho, que integra a codificação wavelet a um esquema de transmissão em diversidade espaço-temporal. Os desempenhos de ambos os sistemas serão avaliados em dois tipos de canais de comunicação: em canais sujeitos apenas ao ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) e em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência com Doppler.

Para auxiliar na avaliação do desempenho de ambos os sistemas, será utilizado o sistema BPSK não codificado como sistema de referência. A escolha deste sistema de referência é apropriada, visto que ele apresenta a mesma eficiência espectral dos sistemas com codificação wavelet.

O restante deste Capítulo está organizado como segue: na Seção 3.1, será apresentado o sistema BPSK não codificado com o seu respectivo desempenho em canais AWGN e em canais AWGN com desvanecimento. Na Seção 3.2, será apresentado o desempenho do sistema com codificação wavelet em canais com ruído AWGN. Na Seção 3.3, será apresentado o sistema com codificação wavelet sem diversidade e o seu respectivo desempenho em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh. Na Seção 3.4, será apresentado o sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal e o seu respectivo desempenho em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh. Por fim, na Seção 3.5 serão apresentadas algumas conclusões.

3.1 Sistema BPSK não Codificado

Nesta Seção será apresentado o desempenho, através de expressões analíticas e simulação computacional, de um sistema não-codificado com modulação BPSK em canais AWGN e canais com desvanecimento Rayleigh.

A modulação digital é o processo de mapeamento de símbolos digitais em formas de onda compatíveis com as características do canal [37], [39]. De forma geral, o mapeamento é feito tomando-se blocos de $k = \log_2 M$ símbolos digitais de informação em um intervalo de tempo. Para cada bloco, o modulador seleciona uma das $M = 2^k$ formas de onda analógicas com energia finita, que será transmitida através do canal.

Na modulação PSK (*Phase Shift Keying*), os sinais são representados pela forma de onda

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta_m), \quad 0 < t \leq T_s \quad (3.1)$$

em que A é a amplitude do sinal, T_s é o intervalo de sinalização e

$$\theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}, \quad m = 1, \dots, M \quad (3.2)$$

são as possíveis fases da portadora a ser transmitida.

Nas simulações realizadas durante esse trabalho, os sinais foram representados pelos seus equivalentes passa baixa. Um sinal PSK $s_m(t)$ pode ser representado em termos de seu equivalente passa baixa $\hat{s}_m(t)$ como segue,

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \operatorname{Re}[Ae^{j\theta_m} e^{j2\pi f_c t}] \\ &= \operatorname{Re}[\hat{s}_m(t) e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sendo assim, o equivalente passa-baixa $\hat{s}_m(t)$ de um sinal PSK é dado por

$$\hat{s}_m(t) = Ae^{j\theta_m}, \quad 0 < t \leq T_s \quad (3.4)$$

O desempenho do sistema BPSK não codificado será apresentado em termos da probabilidade de erro de bit P_{erro} versus a razão sinal-ruído E_b/N_0 do sistema. Essa razão sinal-ruído (SNR) pode ser obtida a partir da SNR de um sistema PSK genérico, calculada para $M = 2$.

A seguir, será desenvolvida uma expressão para a SNR de um sistema PSK não codificado sobre um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). Como será

visto posteriormente, essa expressão será de grande utilidade nas simulações, já que ela envolverá todos os parâmetros do sistema simulado.

Inicialmente, calcula-se a energia de um sinal PSK transmitido durante um intervalo de sinalização T_s . Essa energia pode ser calculada, em termos do equivalente passa baixa do sinal, como segue,

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} |\hat{s}_m(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} A^2 dt \\ &= \frac{1}{2} A^2 T_s \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considerando que são transmitidos $\log_2 M$ bits em cada intervalo de sinalização, a energia média por bit recebido é igual a

$$E_b = \frac{A^2 T_s}{2 \log_2 M} \quad (3.6)$$

A seguir será obtida uma expressão para a potência do ruído. Considere inicialmente que o ruído AWGN tem uma largura de banda igual a B Hz. Dessa forma, sua densidade espectral de potência pode ser calculada por,

$$S(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & \text{se } |f| < B \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.7)$$

A partir da Equação 3.7, a autocorrelação do ruído pode ser calculada como segue:

$$R(\tau) = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \quad (3.8)$$

A potência do ruído é, então, calculada por

$$\sigma^2 = R(0) = N_0 B \quad (3.9)$$

O ruído será descorrelacionado caso $R(\tau) = 0$, ou seja, quando $\tau = 1/2B$.

Desde que não é possível trabalhar com sinais contínuos em uma simulação, deve-se realizar a amostragem do sinal e do ruído. Cada intervalo de sinalização T_s é dividido em N_a intervalos de amostragem com duração T_a , ou seja,

$$T_s = N_a T_a \quad (3.10)$$

O ruído deve ser amostrado de forma que as amostras sejam descorrelacionadas, ou seja, T_a deve ser igual a $1/2B$.

Dessa forma, a partir das Equações 3.6, 3.9 e 3.10, a SNR do sistema é calculada como segue

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{A^2 T_s}{2N_0 \log_2 M} = \frac{A^2 T_a N_a}{2N_0 \log_2 M}$$

desde que $T_a = 1/2B$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{A^2 N_a}{4N_0 B \log_2 M} \\ &= \frac{N_a A^2}{4\sigma^2 \log_2 M} \end{aligned} \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 relaciona todos os parâmetros envolvidos na simulação. Nas simulações realizadas, utilizou-se $N_a = 16$, desde que um número maior de amostras não altera significativamente o resultado da simulação, e normalizou-se a variância do ruído em 1, ou seja, $\sigma^2 = 1$. Considerando a razão sinal-ruído expressa em dB, a expressão que relaciona a amplitude do sinal transmitido com a razão sinal-ruído que se deseja simular é dada por

$$A = \sqrt{\frac{10^{(E_b/N_0(\text{dB}))/10} \log_2 M}{4}} \quad (3.12)$$

Em sistemas simples, como o aqui apresentado, é possível obter analiticamente a expressão para a probabilidade de erro de bit. Particularmente, para o sistema PSK binário ($M = 2$), também denominado de BPSK, a probabilidade de erro de bit, em canais AWGN, é dada por [37],

$$P_{\text{erro}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (3.13)$$

em que

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad (3.14)$$

A Figura 3.1 apresenta as curvas de desempenho, obtidas analiticamente e por simulação, do sistema BPSK não codificado sobre um canal AWGN. Pode-se observar que as curvas são praticamente idênticas, o que valida o procedimento de simulação utilizado nesse trabalho.

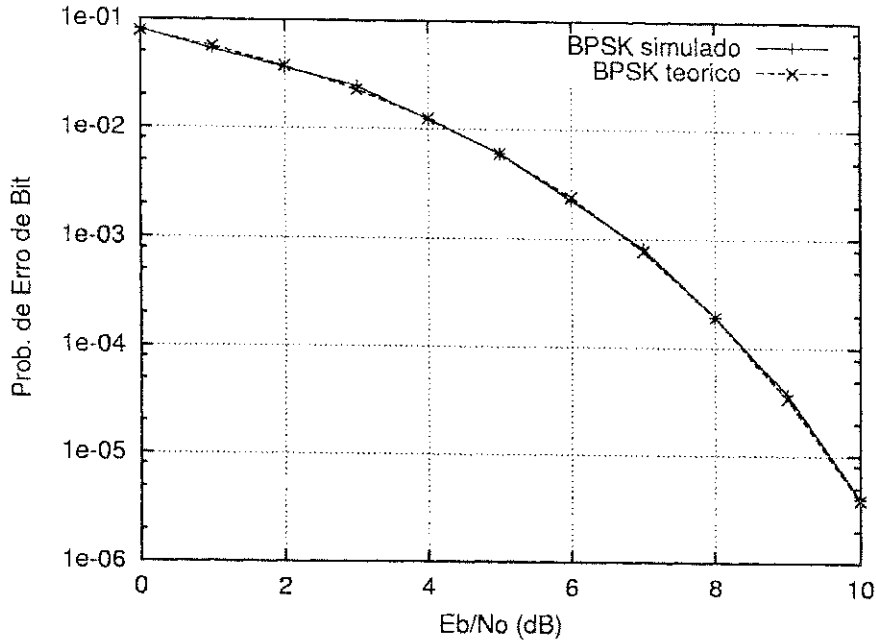


Figura 3.1: Desempenho do sistema BPSK não codificado sobre um canal AWGN.

A seguir será investigado o desempenho do sistema BPSK não codificado sobre um canal com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh.

O equivalente passa baixa de um sinal PSK afetado por um canal com desvanecimento Rayleigh pode ser expresso por,

$$\hat{r}_m(t) = \alpha A e^{j\theta_m}, \quad 0 < t \leq T_s \quad (3.15)$$

sendo o fator multiplicativo α uma variável aleatória com distribuição Rayleigh

$$f_\alpha(\alpha) = 2\alpha e^{-\alpha^2}, \quad \alpha > 0 \quad (3.16)$$

e densidade espectral de potência dada pela Equação 2.2.

Dessa forma, a energia média por bit transmitido sobre um canal com desvanecimento Rayleigh é igual a

$$E_b = \frac{\mathbb{E}[\alpha^2] A^2 T_s}{2 \log_2 M} \quad (3.17)$$

Observe que a energia de bit média é alterada pelo desvanecimento através do parâmetro $\mathbb{E}[\alpha^2]$. Nas simulações $\mathbb{E}[\alpha^2] = 1$ e o comportamento do sistema é avaliado em função da razão sinal-ruído média E_b/N_0 .

A razão sinal-ruído do sistema PSK não codificado sobre um canal com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh pode ser obtida seguindo-se o mesmo procedimento apresentado anteriormente para o canal sem desvanecimento. Essa relação é dada por

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{\mathbb{E}[\alpha^2] N_a A^2}{4\sigma^2 \log_2 M} \quad (3.18)$$

A expressão analítica da probabilidade de erro de bit de um sistema BPSK não codificado sobre um canal com ruído aditivo gaussiano branco e desvanecimento Rayleigh é dada por [37],

$$P_{erro} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{E_b/N_0}{1 + E_b/N_0}} \right) \quad (3.19)$$

A Figura 3.2 apresenta as curvas de desempenho, obtidas analiticamente e por simulação, do sistema BPSK não codificado sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh. Observa-se que o resultado via simulação coincide com o resultado analítico, validando, assim, o procedimento de simulação utilizado.

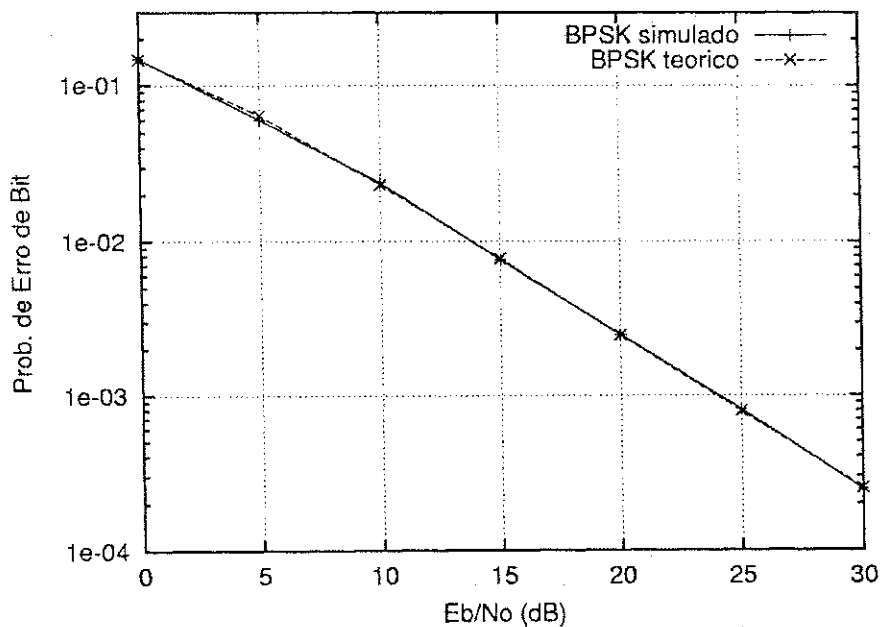


Figura 3.2: Desempenho do sistema BPSK não codificado sobre um canal com desvanecimento Rayleigh.

3.2 Desempenho da Codificação Wavelet em Canais AWGN

Nesta Seção, serão apresentados expressões analíticas e resultados obtidos por simulação para o desempenho da codificação wavelet com máxima sobreposição da matriz de codificação em canais com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). O esquema de modulação utilizado foi o PAM/ASK.

Na modulação PAM/ASK (*Pulse Amplitude Modulation/Amplitude Shift Keying*) k bits de informação são mapeados em uma das $M = 2^k$ formas de onda analógicas de energia finita apresentadas abaixo:

$$s_m(t) = A_m g(t) \cos(2\pi f_c t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad (3.20)$$

em que T_s é o intervalo de sinalização de um símbolo, $g(t)$ é um pulso dado por

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s, \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \quad (3.21)$$

e A_m representa as amplitudes das formas de onda que carregam a informação digital, podendo ser expressa por

$$A_m = (2m - 1 - M), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.22)$$

De acordo com as Equações 3.3 e 3.20, o equivalente passa baixa de um sinal PAM/ASK é dado por,

$$\hat{s}_m(t) = A_m g(t) \quad (3.23)$$

A energia média da constelação PAM/ASK pode ser calculada por

$$\bar{E}_s = \sum_{m=1}^M \Pr(s_m) E_m \quad (3.24)$$

em que $\Pr(s_m)$ é a probabilidade de ocorrência de cada símbolo s_m e E_m é a energia de cada um dos M sinais PAM/ASK durante um intervalo de sinalização T_s , sendo dada por,

$$E_m = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} |\hat{s}_m(t)|^2 dt = \frac{A_m^2 T_s}{2} \quad (3.25)$$

Como foi visto na Seção 2.6, os símbolos de canal gerados pela codificação wavelet sem diversidade pertencem a um conjunto com $mg + 1$ valores possíveis, de acordo com a Equação 2.26, quando uma matriz MCW real plana de ordem m e gênero g é utilizada na codificação. Também foi visto que a variância média dos símbolos wavelets é igual a mg , de acordo com a Equação 2.29, quando os bits de informação são equiprováveis. Quando a modulação PAM/ASK é utilizada, os símbolos codificados y_n são mapeados em formas de onda com amplitudes iguais a y_n . Sendo assim, as energias dessas formas de onda são proporcionais a y_n^2 , portanto, a energia média do sinal é igual a mg .

Considere uma transmissão de símbolos wavelets sobre um canal AWGN. Os símbolos corrompidos pelo ruído podem ser expressos por

$$\omega_j = y_j + n_j \quad (3.26)$$

em que y_j representa o símbolo wavelet transmitido e n_j , uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância $N_0/2$, representa a componente do ruído. Dessa forma, os símbolos na saída do decodificador wavelet (correlator) são representados por

$$z_i = S_i + R_i \quad (3.27)$$

em que S_i e R_i correspondem, respectivamente, a soma de todas as mg componentes do sinal e do ruído na saída do decodificador.

Desde que n_i é um ruído gaussiano branco com média nula e variância $N_0/2$, a componente R_i também tem média nula e variância dada por

$$E[R_i^2] = mg \frac{N_0}{2} \quad (3.28)$$

Dessa forma, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_{erro} = \frac{1}{2} \Pr(S_i + R_i > 0 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) + \frac{1}{2} \Pr(S_i + R_i < 0 \mid x_{i-(mg-1)} = +1)$$

$$P_{erro} = \frac{1}{2} \Pr(R_i > mg \mid x_{i-(mg-1)} = -1) + \quad (3.29)$$

$$+ \frac{1}{2} \Pr(R_i < -mg \mid x_{i-(mg-1)} = +1) \quad (3.30)$$

Desde que o termo do ruído R_i é independente de $x_{i-(mg-1)}$, a probabilidade de erro

de bit P_{erro} pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
 P_{erro} &= \Pr(R_i > mg) \\
 &= Q\left(\frac{mg}{\sqrt{mgN_0/2}}\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{\frac{2mg}{N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

A partir da Equação 2.29, a Equação 3.31 pode ser expressa por

$$P_{erro} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \tag{3.32}$$

em que E_b representa a energia média transmitida sobre o canal por bit de informação.

De acordo com a Equação 3.32, em canais AWGN, um sistema com codificação wavelet com máxima sobreposição das palavras-código e modulação PAM/ASK atinge o mesmo desempenho, em termos da probabilidade de erro de bit, que sistemas com modulação antipodal (PAM/ASK binária, BPSK) sem codificação, independente do comprimento das palavras-código wavelets utilizadas na codificação. Esses resultados são comprovados nas Figuras 3.3 e 3.4, que ilustram as curvas obtidas a partir da simulação do sistema com matrizes MCW de dimensão 2×8 e 4×16 .

Entretanto, como será apresentado posteriormente, em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh, os sistemas com codificação wavelet superam o desempenho dos sistemas com modulação antipodal sem codificação. Deve-se ter em vista que a comparação entre o sistema com codificação wavelet e sistemas antipodais é apropriada, visto que ambos apresentam a mesma eficiência espectral.

3.3 Desempenho do Sistema com Codificação Wavelet sem Diversidade em Canais com Desvanecimento Rayleigh

O sistema com codificação wavelet sem diversidade, ilustrado na Figura 3.5, foi proposto inicialmente em [31].

Neste sistema, os bits equiprováveis gerados pela fonte são codificados por uma matriz MCW real plana de dimensão $m \times mg$ de acordo com o procedimento apresentado na Seção 2.3.

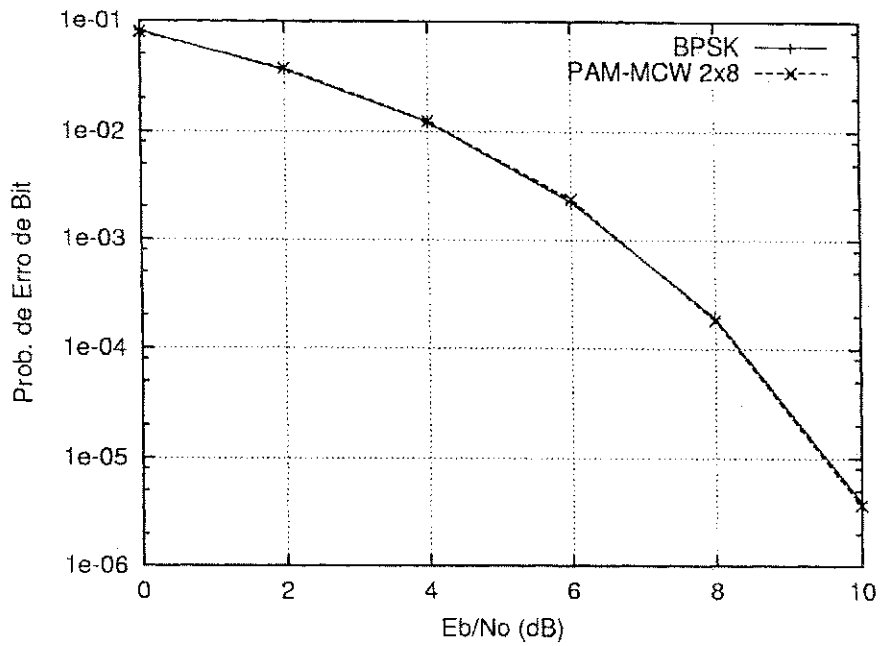


Figura 3.3: Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação PAM/ASK simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN.

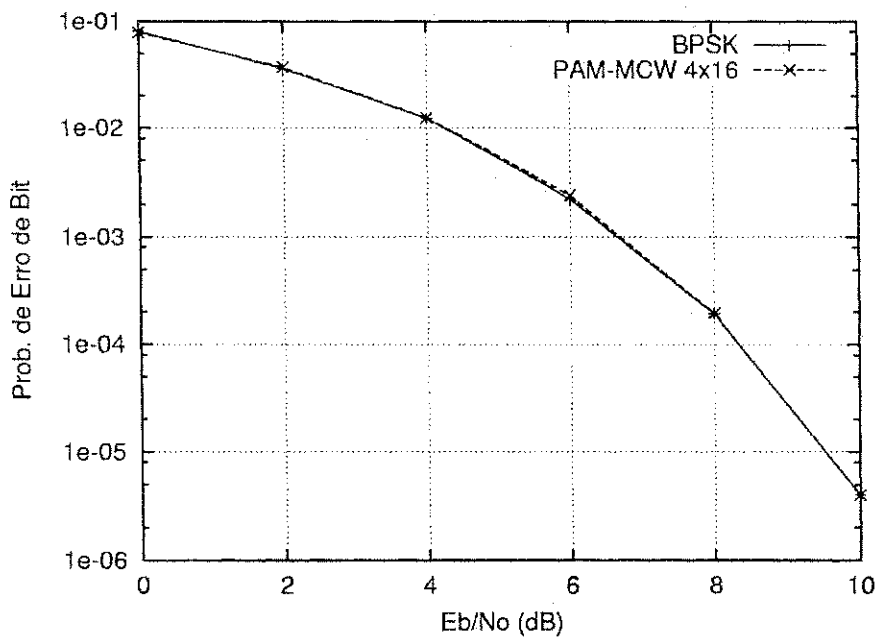


Figura 3.4: Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação PAM/ASK simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN.

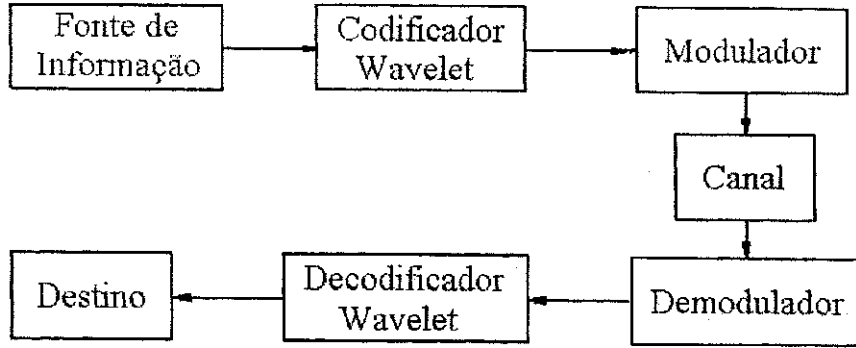


Figura 3.5: Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet sem diversidade.

Em seguida, os símbolos codificados são mapeados em uma constelação PAM-PSK, também denominada de constelação APK, com $mg + 1$ pontos. Esse tipo de modulação foi escolhido devido a natureza multinível da constelação, que combina perfeitamente com os sinais multiníveis da codificação wavelet. Os sinais APK podem ser representados por

$$s_i(t) = A_i p(t) \cos[2\pi f_c t + \theta_i], \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad (3.33)$$

em que $p(t)$ é um pulso com energia unitária, f_c é a frequência da portadora, T_s é o intervalo de sinalização e $\{A_i, \theta_i; 1 \leq i \leq mg + 1\}$ são as respectivas amplitudes e fases das portadoras que modulam os símbolos codificados.

A partir das Equações 3.3 e 3.33, pode-se obter o equivalente passa baixa de um sinal APK, dado por

$$\hat{s}_i(t) = A_i p(t) e^{j\theta_i} \quad (3.34)$$

Observa-se a partir da Equação 3.34, que os pontos na constelação APK ficam completamente caracterizados pelo conjunto $\{A_i, \theta_i; 1 \leq i \leq mg + 1\}$.

A energia de um sinal APK pode ser calculada a partir do seu equivalente passa baixa como segue.

$$E_{s_i} = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} |\hat{s}_i(t)|^2 dt = \frac{A_i T_s}{2} \quad (3.35)$$

A partir da Equação 3.35, pode-se calcular a energia média da constelação APK

por,

$$E_C = \sum_{i=1}^{mg+1} \Pr(s_i) E_{s_i} \quad (3.36)$$

em que $\Pr(s_i)$ é a probabilidade de ocorrência do sinal $s_i(t)$. Desde que cada sinal $s_i(t)$ representa um símbolo codificado, a distribuição de probabilidade dos sinais APK é obtida pela distribuição binomial na Equação 2.27.

Da mesma forma que no sistema BPSK não codificado, o sistema com codificação wavelet e modulação APK transmite um símbolo por bit de informação. Logo, a energia média por bit é igual a energia média da constelação, ou seja,

$$E_b = E_C \sum_{i=1}^{mg+1} \Pr(s_i) E_{s_i} \quad (3.37)$$

Nas simulações, foram utilizadas constelações com energia média por bit igual a 1.

A constelação APK foi construída levando-se em consideração as probabilidades de ocorrência dos símbolos codificados, a diversidade de componentes dos seus pontos e a maximização da distância euclidiana entre os pontos da mesma.

O mapeamento dos símbolos codificados nos sinais da constelação foi realizado de forma que símbolos de mesmo módulo mas de sinais contrários fossem mapeados em sinais antipodais; além disso, os símbolos codificados com maiores probabilidades de ocorrência foram mapeados nos sinais de menor energia da constelação. Esse procedimento possibilitou um acréscimo na distância euclidiana entre os pontos da constelação, mantendo-se a energia média unitária da constelação.

A Figura 3.6 ilustra uma constelação APK utilizada na modulação dos símbolos gerados pela codificação wavelet com matriz MCW de dimensão 2×4 . Nesta codificação, os possíveis símbolos codificados pertencem ao conjunto

$$y_i \in \{-4, -2, 0, 2, 4\} \quad (3.38)$$

Após a modulação, o sinal APK é enviado para a antena e transmitido.

No modelo do canal de comunicação adotado, assume-se que o sinal transmitido é afetado por um desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência e pelo ruído aditivo gaussiano branco. Dessa forma, a representação em banda básica do sinal recebido é dada por

$$r(t) = \alpha(t)s_i p(t) + n(t) \quad (3.39)$$

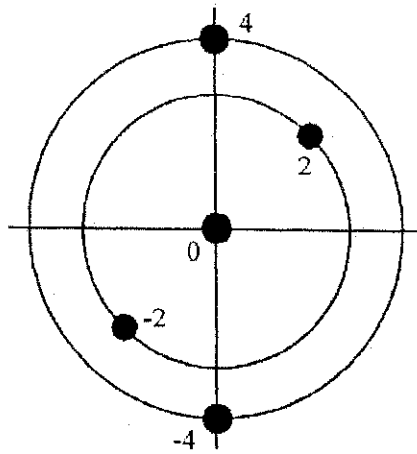


Figura 3.6: Constelação APK.

Na Equação 3.39, s_i é um sinal APK transmitido no instante de sinalização T_s ; $p(t)$ é um pulso limitado em banda com energia unitária; o fator multiplicativo $\alpha(t)$ representa a resposta impulsional do canal no instante de tempo t , considerada constante durante o intervalo de sinalização T_s e $n(t)$ é o ruído gaussiano branco complexo com média nula e densidade espectral de potência igual a $N_0/2$ por dimensão.

Como na Seção 3.1, $\alpha(t)$ é modelado por um processo gaussiano complexo estacionário em sentido amplo com densidade espectral de potência dada por

$$G(f) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{f}{f_D})^2}}, & \text{se } |f| < f_D \\ 0, & \text{se } |f| \geq f_D \end{cases} \quad (3.40)$$

em que f_D é o máximo desvio doppler.

Na recepção, considera-se que o receptor tem informação perfeita sobre o estado do canal, conhecendo o exato valor do desvanecimento Rayleigh. O objetivo aqui é o de avaliar o efeito do desvanecimento correlacionado sobre o sistema com codificação wavelet, aspecto que ainda não foi considerado na literatura. Em trabalhos futuros pode-se combinar os esquemas aqui discutidos com técnicas de estimação de canal.

Na demodulação, o sinal recebido $r(t)$ é convertido em um vetor bidimensional $r_i = r_{i_f} + r_{i_q}$, por um filtro casado. A representação vetorial do sinal recebido r_i é dada por,

$$r_i = \alpha_i s_i + z_i \quad (3.41)$$

sendo $s_i = s_{i_f} + s_{i_q}$ a representação vetorial do sinal APK e z_i um vetor complexo cujas componentes são variáveis aleatórias gaussianas independentes.

O bloco decisor calcula então a distância euclidiana entre o sinal recebido r_i e cada um dos $mg + 1$ sinais (vetores) s_i da constelação, ponderados pelo fator de desvanecimento α_i . O sinal da constelação que corresponder a menor distância euclidiana, será a estimativa do sinal transmitido, ou seja,

$$\tilde{s}_i = \min_{s_i} |r_i - \alpha_i s_i|^2 \quad (3.42)$$

A partir das estimativas dos sinais \tilde{s}_i , obtém-se as estimativas dos símbolos y_i modulados. As estimativas dos símbolos y_i são então decodificadas de acordo com o processo descrito na Seção 2.4.

3.3.1 Resultados de Simulação

Nas Figuras 3.7 e 3.8 são apresentados os resultados obtidos com a simulação do sistema com codificação wavelet sem diversidade, ilustrado na Figura 3.5. A fim de se realizar uma análise imparcial do desempenho deste sistema, utilizou-se um sistema de referência com a mesma eficiência espectral do sistema analisado. Neste sistema de referência, os bits de informação são modulados com modulação BPSK e também são transmitidos por uma única antena ($L=1$). O sistema com codificação wavelet foi simulado utilizando-se as matrizes MCW's reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 apresentadas, respectivamente, nas Equações 2.13 e 2.14. Tanto o desempenho do sistema com codificação wavelet quanto o desempenho do sistema de referência foi avaliado em um canal com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh descorrelacionado (desvanecimento com desvio Doppler infinito). Do ponto de vista do sistema com codificação wavelet, esse canal descorrelacionado pode ser obtido idealmente por um entrelaçamento perfeito dos símbolos wavelets codificados. Posteriormente, os sistemas com codificação wavelet propostos neste trabalho também serão analisados sob o efeito da correlação presente nos canais de comunicação móvel.

A Figura 3.7 ilustra as curvas de desempenho do sistema de referência e do sistema com codificação wavelet, simulado com a MCW de dimensão 2×8 . A partir das curvas observa-se que o sistema com codificação wavelet simulado com a MCW 2×8 apresenta um desempenho inferior ao desempenho do sistema de referência para valores de SNR's inferiores a 15 dB. Entretanto, para valores de SNR's superiores a 15 dB, o desempenho

do sistema codificado supera gradativamente o desempenho do sistema de referência. Em particular, para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-3} e 10^{-4} , verifica-se que o sistema com codificação apresenta ganhos de desempenho de aproximadamente 2 dB e 4 dB, respectivamente.

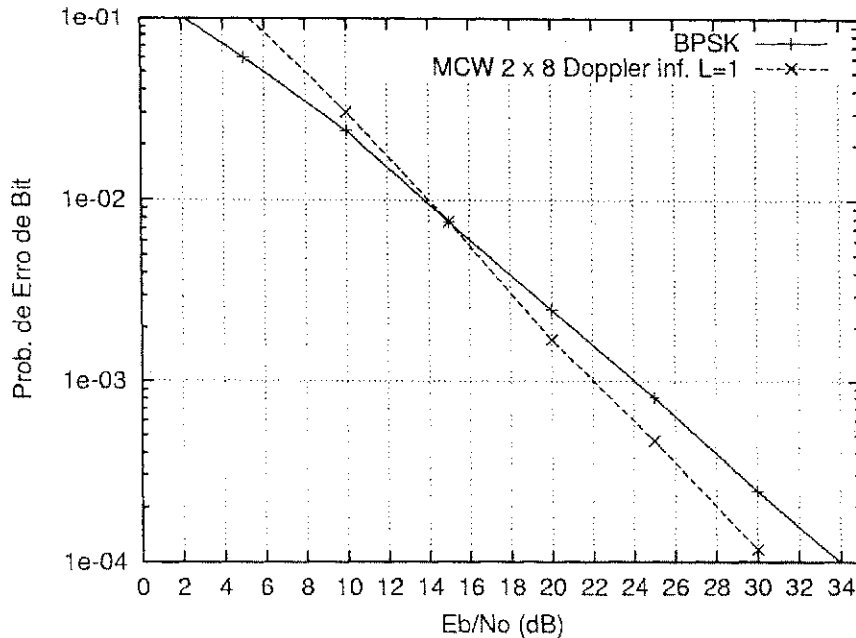


Figura 3.7: Desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh descorrelacionado.

Na Figura 3.8 apresenta-se as curvas de desempenho do sistema de referência e do sistema com codificação wavelet, simulado com a MCW de dimensão 4×16 . Neste caso, pode-se observar que o desempenho do sistema codificado supera o desempenho do sistema de referência para valores de SNR's superiores a 12 dB. Em particular, para a probabilidade de erro de bit em torno de 10^{-4} , verifica-se que o desempenho do sistema com codificação foi aproximadamente 9 dB superior ao desempenho do sistema de referência.

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8 para o sistema com codificação wavelet, pode-se observar que o ganho de codificação do sistema aumenta a medida que o mesmo é simulado com MCW reais planas de dimensões maiores. Este fato pode ser explicado como segue. Quanto maior for a dimensão da MCW, maior será o comprimento das palavras-código wavelets utilizadas na codificação, e

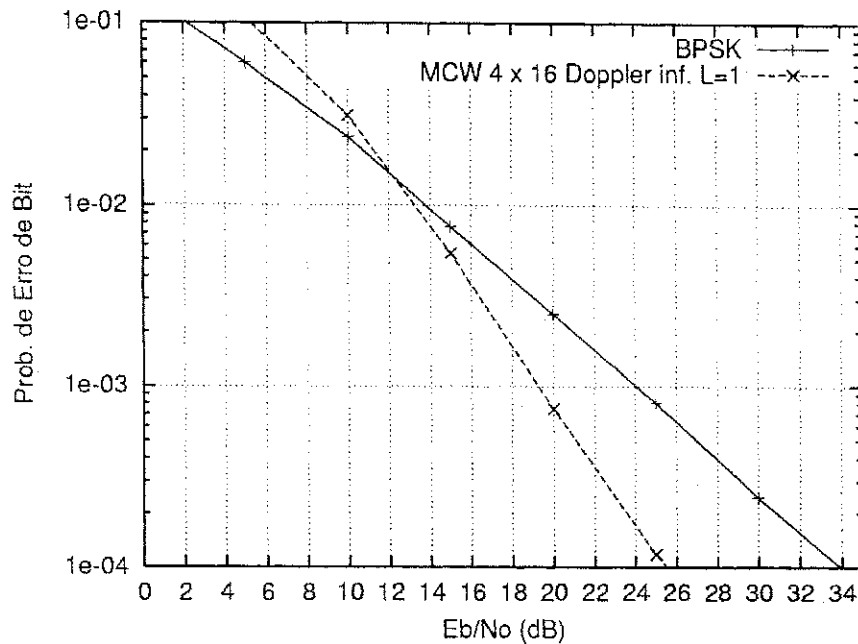


Figura 3.8: Desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.

conseqüentemente, maior será o espalhamento dos bits de informação ao longo dos símbolos wavelets codificados. Esse espalhamento dos bits de informação pode ser visto como uma forma de diversidade temporal intrínseca à codificação wavelet, e justifica em parte, o ganho de codificação conseguido pelo sistema, em canais sujeitos ao desvanecimento plano.

Por outro lado, quanto maior for a dimensão da MCW utilizada na codificação wavelet, maior será o número de possíveis símbolos codificados, de acordo com a Equação 2.26, o que conduz a um aumento do número de pontos da constelação APK utilizada na modulação. O acúmulo de pontos na constelação implica, por sua vez, em uma degradação de desempenho do sistema. Para minimizar essa degradação, pode-se realizar o truncamento dos símbolos codificados com pequenas probabilidades de ocorrência, conforme mencionado na Seção 2.7. Particularmente, as curvas de desempenho apresentadas nesta Seção foram obtidas truncando-se, durante as simulações, os símbolos codificados com probabilidades de ocorrência inferiores a 10^{-4} .

Deve ficar claro, entretanto, que os ganhos de codificação obtidos com a utilização de MCW maiores sempre superam as eventuais degradações de desempenho provoca-

das pelo acúmulo de pontos nas constelações. Isso é possível devido ao aumento da redundância conseguida pela utilização dessas matrizes na codificação wavelet.

Finalmente, observe que os resultados apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8 foram obtidos para matrizes de coeficientes wavelets com dimensões relativamente pequenas. Em [5], [31], pode-se encontrar simulações realizadas com matrizes maiores.

3.4 Desempenho do Sistema com Codificação Wavelet e Diversidade Espaço-Temporal em Canais com Desvanecimento Rayleigh

Na Seção 3.3 foi apresentado o desempenho de um sistema com codificação wavelet sem diversidade sobre canais AWGN com desvanecimento Rayleigh. Nesta Seção, será proposto um sistema que utiliza a codificação wavelet em conjunto com um esquema de diversidade espaço-temporal. Como será observado nos resultados de simulação apresentados no final desta Seção, o sistema com diversidade proposto apresenta um considerável ganho de desempenho em relação ao sistema sem diversidade, sobre um canal de comunicação com desvanecimento Rayleigh, sobretudo quando o desvanecimento for decorrelacionado entre intervalos de sinalização consecutivos (canal com entrelaçamento perfeito).

A Figura 3.9 apresenta o sistema proposto, que integra a codificação wavelet com um esquema de diversidade espaço-temporal.

Neste sistema, a fonte de informação gera uma seqüência x_n de bits de informação independentes e igualmente distribuídos (**i.i.d.**) que são enviados ao codificador wavelet.

O codificador utiliza uma matriz MCW real plana de dimensão $m \times mg$ para codificar os bits de informação em símbolos wavelets y_n . A matriz de codificação é construída com máxima sobreposição das palavras-código wavelets. Logo, a taxa de codificação desse sistema é igual a 1 bit/símbolo, ou seja, um bit de informação por símbolo codificado y_n . A cada intervalo de sinalização T_s , um símbolo y_n é gerado na saída do codificador wavelet. De acordo com a Seção 2.5, cada símbolo wavelet y_n é formado por m parcelas (símbolos) y_n^i , cada uma proveniente da codificação dos bits de informação por uma das m palavras-código ortogonais wavelets (linhas da matriz MCW). Desde que as parcelas y_n^i encontram-se separadas em m bandas espectrais ortogonais,

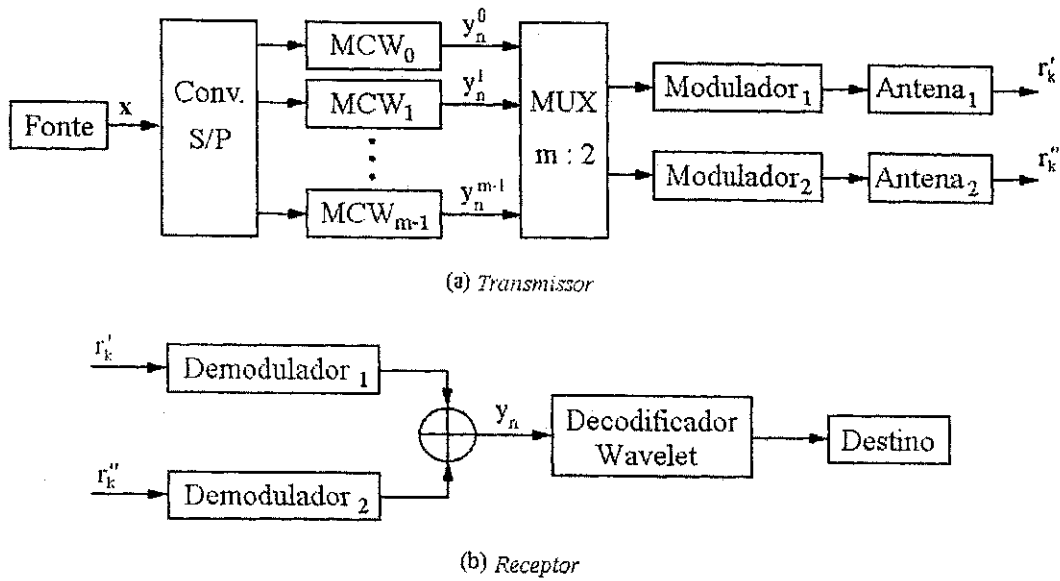


Figura 3.9: Sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal.

elas podem ser moduladas e transmitidas independentemente, sem perda na eficiência espectral do sistema.

O esquema de transmissão em diversidade foi implementado de acordo com o procedimento descrito na Seção 2.5. Neste esquema, em cada intervalo de sinalização T_s , metade dos símbolos y_n^i são transmitidos pela primeira antena e a metade restante dos símbolos são transmitidos pela segunda antena. Dessa forma, cada antena transmite, durante um intervalo de sinalização nT_s , $m/2$ símbolos y_n^i em $m/2$ retardos de transmissão consecutivos. Nos intervalos de sinalização com índices ímpares, a primeira antena transmite os símbolos codificados pelas linhas pares da matriz MCW e a segunda antena, os símbolos codificados pelas linhas ímpares da matriz MCW. Nos intervalos de sinalização com índices pares ocorre uma inversão nessa ordem de transmissão, ou seja, a primeira antena transmite os símbolos codificados pelas linhas ímpares da matriz MCW e a segunda antena, os símbolos codificados pelas linhas pares da matriz MCW. Esse procedimento de transmissão encontra-se ilustrado na Tabela 3.1.

A modulação dos símbolos y_n^i é mais uma vez realizada por sinais APK. Todos os m símbolos y_n^i são modulados por uma mesma constelação APK. A constelação é formada por g vetores (sinais), que representam os possíveis símbolos y_n^i codificados, de acordo com a Equação 2.30. Ela foi construída levando-se em consideração os mesmos critérios adotados na Seção 3.3, ou seja, a maximização da distância euclidiana entre os pontos

Tabela 3.1: Esquema de transmissão com diversidade espácio-temporal

	Antena 1	Antena 2
1º Intervalo de sinalização	$y_0^1, y_0^3, \dots, y_0^{\frac{m}{2}+1}$	$y_0^0, y_0^2, \dots, y_0^{\frac{m}{2}}$
2º Intervalo de sinalização	$y_1^0, y_1^2, \dots, y_1^{\frac{m}{2}}$	$y_1^1, y_1^3, \dots, y_1^{\frac{m}{2}+1}$
3º Intervalo de sinalização	$y_0^1, y_0^3, \dots, y_0^{\frac{m}{2}+1}$	$y_0^0, y_0^2, \dots, y_0^{\frac{m}{2}}$

da mesma, a diversidade de componentes entre os seus pontos, as probabilidades de ocorrência dos símbolos y_n^i , descritas pela Equação 2.31, e a normalização da energia média dos seus pontos em 1.

O modelo do canal de comunicação aqui adotado é idêntico ao utilizado no sistema sem diversidade. Dessa forma, considera-se que os sinais APK, que modulam os símbolos y_n^i , são afetados pelo ruído aditivo gaussiano branco com média nula e densidade espectral de potência igual a $N_0/2$ por dimensão e por um desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência com DEP dada pela Equação 3.40. Admite-se ainda que o desvanecimento tem energia média unitária e amplitude constante durante o intervalo de sinalização.

Considera-se também que as antenas transmissoras na estação base estão suficientemente espaçadas uma da outra, de forma a garantir que os dois canais de comunicação, criados entre as antenas transmissoras e a antena receptora, possuam intensidades de desvanecimento estatisticamente independentes entre si.

Na recepção, admite-se que o receptor consegue estimar perfeitamente o estado do canal (*CSI-channel state information*). Os m sinais APK, recebidos em cada intervalo de sinalização T_s , são convertidos para as suas representações vetoriais por um banco de filtros casados. A partir da representação vetorial dos m sinais, um circuito decisor escolhe a estimativa ótima para cada sinal transmitido, segundo o critério da menor distância euclidiana entre cada vetor recebido e os pontos (vetores) da constelação. De posse das estimativas dos sinais APK transmitidos, obtém-se as estimativas dos símbolos y_n^i que foram modulados por esses sinais. As estimativas dos símbolos y_n^i são então somadas e decodificadas de acordo com o processo descrito na Seção 2.4.

3.4.1 Resultados de Simulação

Nas Figuras 3.10 e 3.11 são apresentados os resultados obtidos com a simulação do sistema com codificação wavelet e diversidade espácio-temporal, ilustrado na Figura 3.9,

sobre um canal com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh descorrelacionado. Essas Figuras também ilustram as curvas de desempenho do sistema BPSK não-codificado e do sistema com codificação wavelet sem diversidade ($L=1$), que são utilizadas como referência para avaliar o desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal proposto. Os sistemas com codificação wavelet foram, mais uma vez, simulados com as matrizes MCW reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 apresentadas, respectivamente, nas Equações 2.13 e 2.14.

A Figura 3.10 ilustra as curvas de desempenho do sistema BPSK não-codificado e dos sistemas codificados com diversidade e sem diversidade, simulados com a MCW de dimensão 2×8 . Pode-se observar a partir das curvas que o sistema com codificação wavelet e diversidade apresenta um desempenho superior ao desempenho do sistema BPSK para valores de SNR's maiores que 11 dB. Em particular, para probabilidades de erros de bit da ordem de 10^{-3} , verifica-se que o sistema com codificação wavelet e diversidade apresenta um ganho de desempenho de aproximadamente 5,5 dB em relação ao desempenho obtido pelo sistema BPSK. Além disso, também é possível verificar a partir das curvas apresentadas, que o sistema com codificação wavelet e diversidade possui um desempenho consideravelmente superior ao desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade. Em particular, para probabilidades de erros de bit da ordem de 10^{-3} e de 10^{-4} , verifica-se que o sistema codificado com diversidade apresenta ganhos de desempenhos de 3,5 dB e 6 dB, respectivamente, em relação ao desempenho do sistema com codificação wavelet sem diversidade.

Esse ganho de desempenho, conseguido pelo sistema com diversidade, ocorre basicamente em função de dois fatores principais, sendo eles:

- O ganho de diversidade conseguido com a transmissão dos símbolos codificados através de dois canais estatisticamente independentes.
- A diminuição do número de pontos da constelação utilizada na modulação por um fator de aproximadamente m (em que m é o número de linhas da matriz MCW utilizada), de acordo com as Equações 2.26 e 2.30, o que leva a um aumento na distância euclidiana média entre os pontos da constelação e conseqüentemente, a uma diminuição do número de erros de demodulação.

Na Figura 3.11 apresenta-se as curvas de desempenho do sistema BPSK não-codificado e dos sistemas codificados com diversidade e sem diversidade, simulados com a MCW de dimensão 4×16 . A partir das curvas pode-se observar mais uma vez

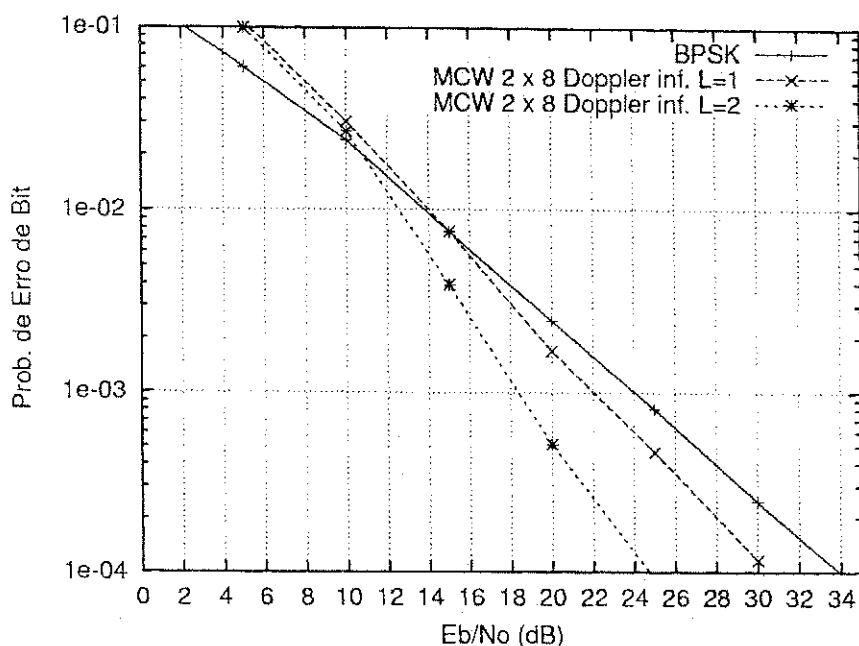


Figura 3.10: Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh descorrelacionado.

o bom desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal tanto em relação ao sistema BPSK não-codificado quanto em relação ao sistema codificado sem diversidade. Mais especificamente, verifica-se que para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-3} , o desempenho do sistema codificado com diversidade apresenta ganhos de 8,5 dB e 4 dB em relação, respectivamente, ao sistema BPSK não-codificado e ao sistema com codificação wavelet sem diversidade.

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11 para o sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, verifica-se que o desempenho do mesmo também é proporcional a dimensão da MCW utilizada na codificação. Em particular, para a taxa de erros de bit 10^{-4} , verifica-se que o sistema simulado com a MCW de ordem $m = 4$ e gênero $g = 4$ apresenta um ganho de desempenho de aproximadamente 6,5 dB em relação ao desempenho do sistema simulado com a MCW de ordem $m = 2$ e gênero $g = 4$.

Todos os resultados apresentados até o momento foram obtidos considerando-se um canal com desvanecimento Rayleigh descorrelacionado, ou seja, considerando-se que os sistemas simulados conseguiram entrelaçar perfeitamente os símbolos codificados. A

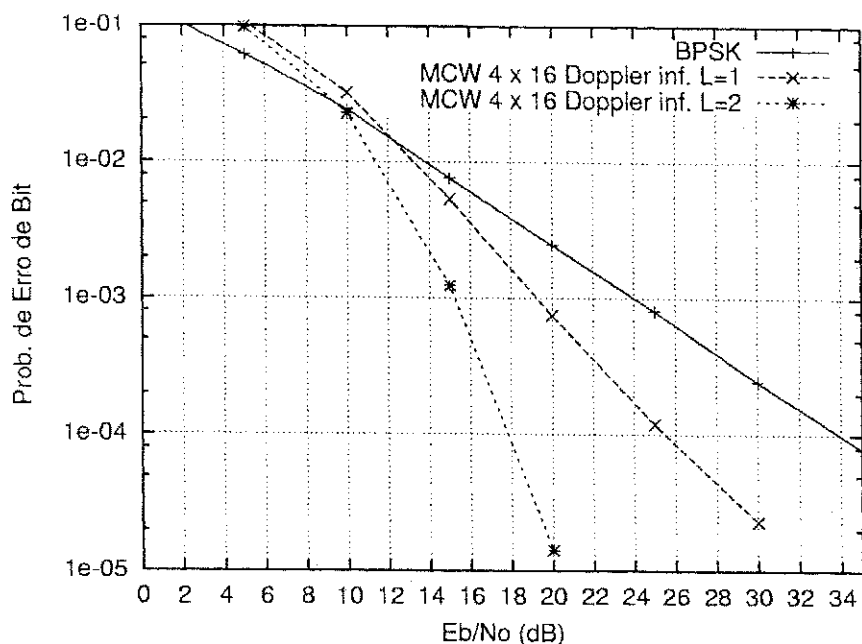


Figura 3.11: Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado.

seguir, serão apresentados alguns resultados que possibilitarão analisar a influência do efeito Doppler finito, presente nos canais de comunicação móvel, sobre os sistemas com codificação wavelet.

As Figuras 3.12 e 3.13 ilustram os resultados obtidos com a simulação do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal sobre um canal com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh correlacionado. Estritamente falando, esses resultados foram obtidos considerando-se o máximo desvio Doppler $f_D = 150$ Hz e a taxa de transmissão igual a 24300 símbolos por segundo. Para auxiliar a análise da influência do Doppler finito, as Figuras 3.12 e 3.13 também apresentam as curvas de desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade, sobre um canal com desvanecimento decorrelacionado (Doppler infinito) e do sistema BPSK não-codificado, que serão utilizadas como referência.

Observe inicialmente, a partir das Figuras 3.10 e 3.12 que o desempenho do sistema BPSK não-codificado não sofreu qualquer alteração provocada pela correlação presente nas amostras do desvanecimento. Este resultado é evidente, visto que o sistema considerado não apresenta qualquer esquema de codificação ou de diversidade que possa ser

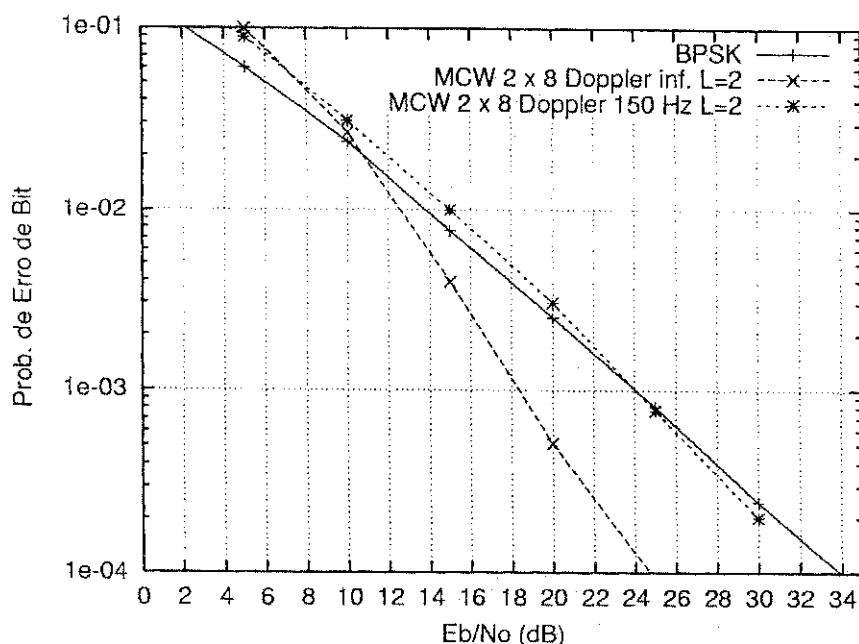


Figura 3.12: Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh correlacionado.

afetado pelos surtos de erros presentes nos canais com memória. O mesmo não pode ser dito para os sistemas com codificação wavelet. Desde que o desempenho conseguido por esta codificação é devido principalmente a diversidade temporal intrínseca do código, este desempenho sofre uma degradação natural provocada pelos surtos de erros do canal, já que, em geral, o comprimento médio dos surtos é maior que o espalhamento temporal dos bits de informação codificados.

Na Figura 3.12 apresenta-se as curvas de desempenho do sistema BPSK não-codificado e do sistema com codificação wavelet e diversidade, simulado com a MCW de dimensão 2×8 tanto em um canal com memória (Doppler 150 Hz) quanto em um canal sem memória (Doppler inf.). Pode-se verificar a partir das curvas que o desempenho do sistema com codificação, simulado com a MCW 2×8 no canal com máximo desvio Doppler $f_D = 150$ Hz, apresenta um desempenho inferior ao desempenho do sistema BPSK para valores de SNR's inferiores a 24 dB. Além disso, para valores de SNR's superiores a 24 dB, o ganho de desempenho obtido com o sistema codificado é desprezível quando comparado ao custo computacional do mesmo. Entretanto, pode-se conseguir resultados melhores quando o sistema é simulado com matrizes de coeficientes wave-

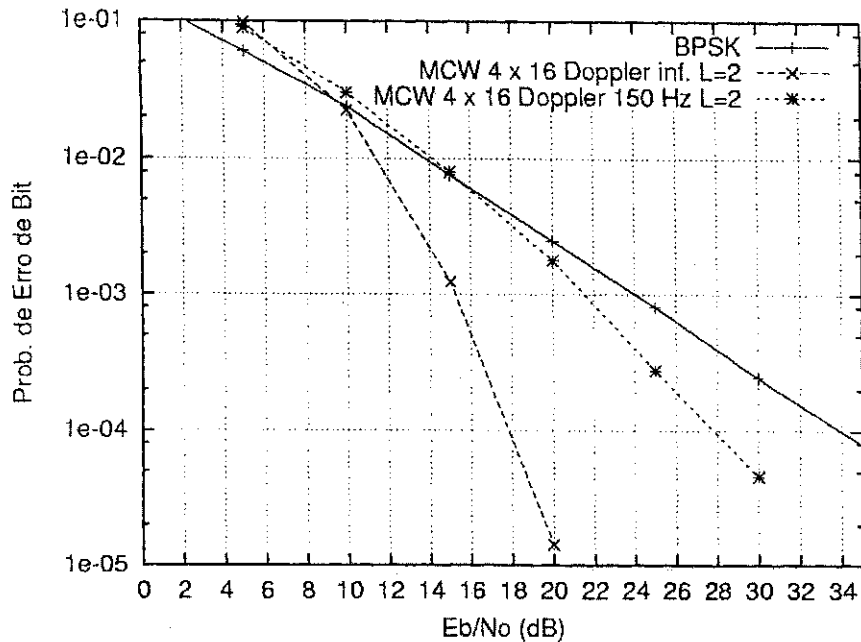


Figura 3.13: Desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal AWGN com desvanecimento Rayleigh correlacionado.

lets maiores. Para exemplificar essa afirmação, considere os resultados apresentados a seguir.

A Figura 3.13 ilustra o desempenho do sistema BPSK não-codificado e do sistema com codificação wavelet e diversidade, simulado com a MCW de dimensão 4×16 em canais com memória (Doppler 150 Hz) e sem memória (Doppler inf.). A partir das curvas, verifica-se novamente uma queda acentuada no desempenho do sistema quando o mesmo é simulado em um canal com coeficientes de desvanecimento correlacionados. Neste caso entretanto, o sistema simulado com a MCW 4×16 possui um desempenho superior ao desempenho do sistema BPSK para valores de SNR's maiores que 15 dB. Em particular, para uma probabilidade de erro de bit em torno de 10^{-4} , o desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade apresenta um ganho de aproximadamente 6 dB em relação ao desempenho do sistema BPSK quando simulado em um canal com desvanecimento Rayleigh e máximo desvio Doppler $f_D = 150$ Hz.

3.5 Conclusão

Neste Capítulo foram apresentados alguns sistemas que utilizam a codificação wavelet integrada a esquemas de transmissão com diversidade ou sem diversidade. Os desempenhos desses sistemas, obtidos em termos da probabilidade de erro de bit, foram analisados em canais com ruído aditivo gaussiano branco e em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência.

Inicialmente se constatou, por meio de simulações computacionais e analiticamente, que em canais AWGN, a codificação wavelet com modulação PAM/ASK e taxa igual a 1 bit/símbolo apresenta o mesmo desempenho que sistemas com modulação antipodal (PAM/ASK binária, BPSK), independente do comprimento das palavras-código wavelets utilizadas na codificação.

Entretanto, pôde-se observar que em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh com Doppler infinito, tanto o sistema com codificação wavelet sem diversidade quanto o sistema com diversidade apresentaram excelentes ganhos de desempenho quando comparados ao sistema BPSK não-codificado, sendo que os melhores resultados foram obtidos para o esquema com diversidade. Além disso, também se verificou que os ganhos de desempenho obtidos em canais com desvanecimento encontram-se diretamente relacionados a dimensão da MCW utilizada na codificação wavelet.

Também pôde-se verificar neste Capítulo, que o sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal apresenta uma queda de desempenho quando simulado em canais com desvanecimento Rayleigh com amostras correlacionadas. No Capítulo 5 serão realizadas algumas modificações sobre o referido sistema visando a melhoria de seu desempenho sobre esses canais.

Capítulo 4

Modelos de Markov Escondidos para Canais de Comunicação Móvel

O canal de comunicação móvel, como mencionado anteriormente, provoca fortes variações na amplitude dos sinais transmitidos através dele. Este comportamento, usualmente denominado de desvanecimento, tem por conseqüência gerar surtos de erros na saída do receptor. Se o período do bit for muito menor que a duração média do desvanecimento, a probabilidade de erros nas detecções de bits adjacentes a um determinado bit será maior se tal bit for detectado incorretamente. Dessa forma, a hipótese do canal sem memória não pode ser assumida para um canal de comunicação móvel real, já que existe uma dependência entre a probabilidade de erros em um dado momento e os erros gerados nos momentos anteriores.

Para representar adequadamente a distribuição de erros em um canal de comunicação digital real, Gilbert propôs um modelo para os erros do canal baseado em uma cadeia de Markov com dois estados [8]. O primeiro estado E_1 representa um canal binário simétrico BSC_1 com uma probabilidade de erro p_1 igual a zero, enquanto que o segundo estado representa um canal binário simétrico BSC_2 com uma probabilidade de erro p_2 diferente de zero. A distribuição de probabilidades dos erros é influenciada pelas probabilidades de transição $P_{i,j}$ de um estado, em um dado instante de tempo, para o estado subsequente.

O modelo de Gilbert, assim como vários outros que o sucederam, tem como objetivo modelar a ocorrência de erros de decisão brusca (erros binários) nos canais de comu-

nicação móvel [7], [8], e [13]. É largamente conhecido que o uso da decodificação com decisão suave permite um ganho de decodificação adicional [28], [37] e [40]. Entretanto, houve aparentemente pouco interesse até o momento, no modelamento das saídas de decisão suave associadas aos canais de comunicação com memória. Uma possível justificativa para esse fato é a necessidade de se utilizar uma técnica de modelamento um pouco mais refinada para modelar essas saídas suaves, o que conduz a um pequeno aumento na complexidade final da técnica empregada.

Neste Capítulo, será apresentada uma técnica para a obtenção de modelos para canais de comunicação com decisão suave na saída do receptor. Essa técnica de modelamento faz uso das idéias centradas nos modelos de Markov escondidos (HMM's). Os modelos obtidos por esta técnica podem ser visto como uma generalização do modelo de Gilbert [28]. Esses modelos serão utilizados posteriormente nas simulações apresentadas no próximo Capítulo.

O restante deste Capítulo será organizado como segue: na Seção 4.1, serão apresentados os fundamentos dos modelos de Markov escondidos e alguns exemplos. Na Seção 4.2, o canal discreto com desvanecimento Rayleigh plano e decisão suave será definido. Na Seção 4.3, o canal discreto definido na Seção 4.2 será modelado com a técnica aqui abordada. Na Seção 4.4, são apresentados alguns resultados obtidos por simulação. Finalmente na Seção 4.5, serão apresentadas algumas conclusões.

4.1 Modelos de Markov Escondidos

Apesar dos modelos de Markov escondidos (*Hidden Markov Models* - HMMs) terem sido estudados inicialmente entre os anos 60 e 70, somente nos últimos anos eles vêm se tornando mais populares. Existem algumas razões para este fato. A principal delas afirma que isto ocorreu porque a teoria básica dos modelos de Markov escondidos foi inicialmente publicada em jornais matemáticos, os quais não eram divulgados entre os pesquisadores da área de engenharia.

Os modelos HMMs são amplamente utilizados para modelar processos físicos reais. Isto se deve principalmente porque eles são muito bem estruturados matematicamente e conseqüentemente, podem formar uma base teórica para uso em várias aplicações. Além disso, os modelos trabalham muito bem para um amplo grupo de aplicações práticas, quando utilizados apropriadamente. Neste trabalho, os modelos de Markov escondidos serão utilizados para modelar os canais de comunicações móveis.

Os modelos de Markov escondidos podem ser definidos como um processo estocástico caracterizado por dois mecanismos inter-relacionados. Um modelo HMM tem um número finito de estados e um conjunto de funções aleatórias, cada uma associada a um estado diferente do modelo. Para instantes de tempo discretos, considera-se que o processo está em um determinado estado e uma seqüência de observações é gerada pela função aleatória associada a este estado. A transição entre os estados segue por sua vez um outro processo estocástico. O observador vê somente a saída da função aleatória associada com cada estado e não pode observar diretamente em qual estado a cadeia de Markov se encontra; segue deste fato a denominação de modelo de Markov escondido [4] e [20].

4.1.1 Processos de Markov Discretos

Nesta seção será feita uma revisão da teoria de cadeias de Markov discretas e apresentado o conceito de estados “escondidos”. A teoria será ilustrada com um exemplo clássico, o sistema de bolas em urnas.

Considere um sistema que pode ser descrito durante qualquer intervalo de tempo por um estado de um conjunto de N estados distintos S_1, S_2, \dots, S_N , como ilustrado na Figura 4.1 (nesta Figura $N = 5$). Em intervalos de tempo discretos $t = 1, 2, \dots$, o sistema sofre uma mudança de estado (podendo inclusive voltar para o mesmo estado) de acordo com um conjunto de probabilidades associado ao estado. Em princípio, uma completa descrição probabilística do sistema acima poderia requerer especificações do estado corrente, assim como, de todos os estados anteriores. Para o caso de uma cadeia de Markov discreta de primeira ordem, a probabilidade do sistema transitar para algum estado depende somente deste estado e do estado anterior, ou seja,

$$P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i, q_{t-2} = S_k, \dots] = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i] = a_{ij}^{(t)} \quad (4.1)$$

em que q_t denota o estado atual no instante t .

Se for considerado que o processo é invariante no tempo, a cadeia de Markov é dita estacionária e as probabilidades de transição em um passo podem ser definidas por constantes (independentes do tempo t) como segue,

$$a_{ij} = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i], \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (4.2)$$

Além disso, se for possível transitar de um determinado estado da cadeia para

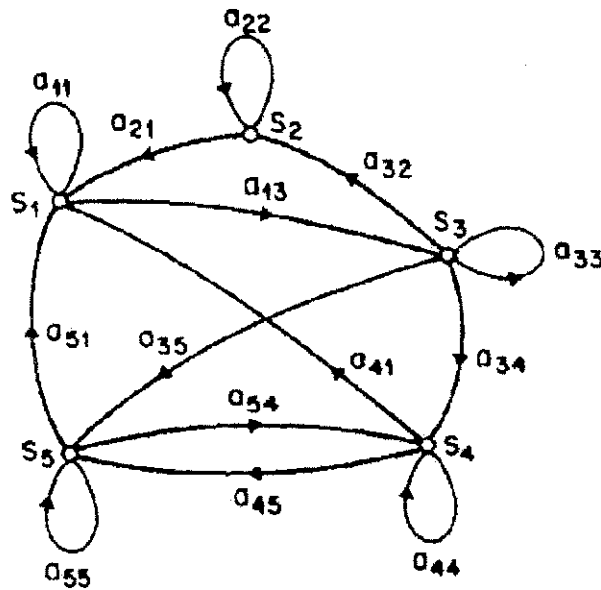


Figura 4.1: Cadeia de Markov com cinco estados.

qualquer outro estado em uma seqüência finita de passos, então a cadeia de Markov é dita irredutível.

O processo estocástico acima pode ser denominado de *modelo de Markov aparente* desde que a saída do processo corresponde a um evento físico observável (o próprio estado). Para fixar esse conceito considere o exemplo a seguir.

Exemplo 1 Modelo de Markov com 3 Estados para o Tempo: *Considere que todo dia as 10:00 hrs. o tempo observado coincide com um dos seguintes estados:*

Estado 1: *Tempo Chuvoso*

Estado 2: *Tempo Nublado*

Estado 3: *Tempo Ensolarado*

Admitindo-se que a matriz de transição de estados é

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

qual é a probabilidade (de acordo com o modelo) do tempo nos próximos 4 dias obedecer a seqüência "sol-sol-chuva-nublado"?, ou seja, deseja-se saber a probabilidade da

seqüência $O = \{S_3, S_3, S_1, S_2\}$ ocorrer. Essa probabilidade pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} P(O|\text{Modelo}) &= P[S_3, S_3, S_1, S_2|\text{Modelo}] \\ &= P[S_3] \cdot P[S_3|S_3] \cdot P[S_1|S_3] \cdot P[S_2|S_1] \\ &= \pi_3 \cdot a_{33} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que a notação $\pi_i = P[q_1 = S_i]$, $1 \leq i \leq N$ é utilizada para denotar as probabilidades iniciais dos estados.

Sabendo que a cadeia de Markov \mathbf{A} é irredutível, a sua distribuição de probabilidades iniciais $\Pi = \{\pi_i\}$ é estacionária, podendo ser calculada por,

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi \cdot \mathbf{A} \\ \Pi &= [0,18 \quad 0,27 \quad 0,55] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dessa forma, a probabilidade da seqüência $O = \{S_3, S_3, S_1, S_2\}$ ocorrer é dada por,

$$\begin{aligned} P(O|\text{Modelo}) &= \pi_3 \cdot a_{33} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \\ &= 0,55 \cdot 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 \\ &= 1,32 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Até agora foram considerados modelos de Markov nos quais cada estado corresponde a um evento (físico) observável. Esse modelo é muito restrito e não pode ser aplicado em muitos problemas de interesse. A seguir o conceito de modelos de Markov será estendido para incluir o caso em que a observação é uma função probabilística do estado, dessa forma, o modelo resultante (denominado de modelo de Markov escondido) passa a ser caracterizado por um duplo processo estocástico consistindo de um processo estocástico fundamental (escondido), que determina as transições de estado, mas que só pode ser observado indiretamente através de outro processo estocástico que produz a seqüência de observações. Para esclarecer esses conceitos, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 2 Modelo para o sistema de bolas em urnas: Considere o sistema de bolas em urnas da Figura 4.2. Suponha que existem N urnas em uma sala. Dentro de cada urna existe um grande número de bolas coloridas. Além disso, considere que existem M cores distintas de bolas. O processo físico para se obter a seqüência de observação é apresentado a seguir. Um gênio está na sala, e de acordo com algum processo estocástico, ele escolhe uma urna inicial. A partir dessa urna, uma bola é escolhida aleatoriamente, e sua cor é anotada como sendo a primeira observação. A bola é então recolocada na sua urna. Uma nova urna é então selecionada a partir de

um processo estocástico associado a primeira urna, e o processo de seleção da bola é repetido. Todo esse processo gera uma seqüência de observação finita de cores, que pode ser modelada como a saída de um HMM.

É óbvio que o HMM mais simples que pode ser usado para modelar esse processo é um que associe a cada estado uma urna específica, e a cada urna, uma distribuição de probabilidades de cores. A escolha da urna é regida pela matriz de transição de estados do HMM.

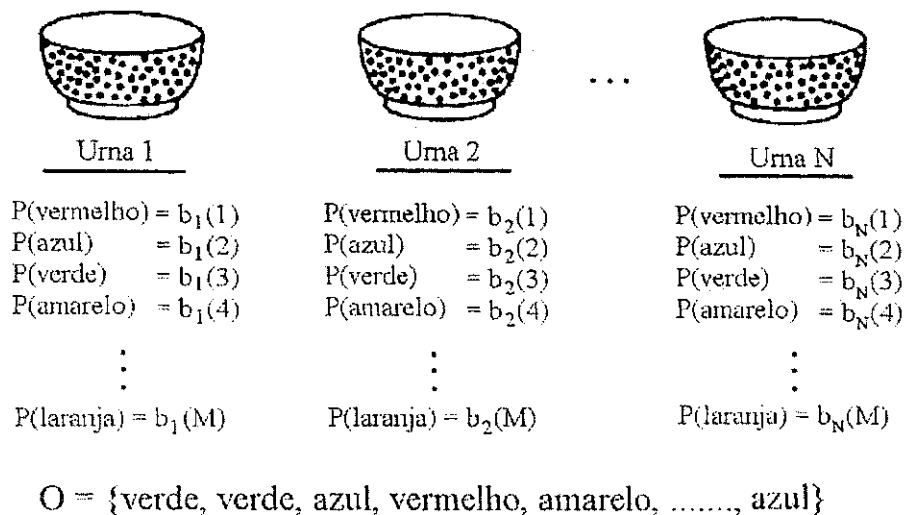


Figura 4.2: Modelo de Markov escondido para um sistema de bolas coloridas em urnas.

4.1.2 Elementos de um HMM

Um HMM pode ser caracterizado pelos seguintes parâmetros:

1. N , número de estados do modelo. Apesar de não ser uma regra geral, existem algumas aplicações práticas nas quais os estados do modelo possuem significações físicas. Por exemplo, no sistema de bolas em urnas, os estados correspondem as urnas. Geralmente os estados são interconectados de tal forma que um estado pode ser alcançado a partir de qualquer outro estado (neste caso, o modelo é denominado de ergódico); entretanto podem existir outras interconexões de estados. Estados individuais são denotados como $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, e o estado no tempo t como q_t .

2. M , número de observações distintas de símbolos por estado, ou seja, o tamanho do alfabeto de símbolos. Os símbolos correspondem a saída física do sistema modelado. Por exemplo, no sistema de bolas em urnas, os símbolos correspondem às cores das bolas selecionadas a partir das urnas. Símbolos individuais são denotados como $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$.

3. $A = \{a_{ij}\}$, matriz de transição de estados, em que a_{ij} é a probabilidade de ocorrer uma transição do estado S_i no tempo $t - 1$ para o estado S_j , ou seja,

$$a_{ij} = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i], \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (4.7)$$

Para o modelo no qual um estado pode ser alcançado a partir de qualquer outro estado da cadeia em uma única transição, têm-se que $a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$. Entretanto pode ocorrer para alguns HMMs, que a_{ij} seja igual a zero para um ou mais pares (ij) .

4. $B = \{b_j(k)\}$, matriz de probabilidades de símbolos no estado j . Indica a probabilidade de observar no instante t o símbolo v_k em um dado estado S_j , ou seja,

$$b_j(k) = P[v_k \text{ em } t | q_t = S_j], \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq N \\ 1 \leq k \leq M \end{array} \quad (4.8)$$

5. $\pi = \{\pi_i\}$, distribuição inicial do estados. Indica a probabilidade de iniciar o processo no estado $q_t = S_i$ para $t = 1$, ou seja,

$$\pi_i = P[q_1 = S_i], \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.9)$$

Para valores apropriados de N , M , A , B e π , o HMM pode ser utilizado para gerar seqüências de observações equivalentes às produzidas pelo sistema físico real que está sendo modelado. Considere a seqüência

$$O = O_1 O_2 \dots O_T \quad (4.10)$$

em que cada observação O_t é um dos símbolos em V e T é o número total de observações na seqüência. O HMM pode ser utilizado para gerar a seqüência descrita na Equação 4.10 como segue:

1. Escolhe-se um estado inicial $q_1 = S_i$ de acordo com a distribuição inicial dos estados π .

2. Faz $t \leftarrow 1$.
3. Escolhe-se $O_t = v_k$ de acordo com a distribuição de probabilidades dos símbolos do estado S_i , ou seja, de acordo com $b_i(k)$.
4. Transita-se para um novo estado $q_{t+1} = S_j$ de acordo com a distribuição de probabilidades de transição de estados para o estado S_i , ou seja, de acordo com a_{ij} .
5. Faz $t \leftarrow t + 1$; e retorna para o Passo 3 se $t < T$; caso contrário termina-se o processo.

Dessa forma o HMM fica completamente caracterizado a partir das especificações dos parâmetros do modelo (N e M), da especificação dos símbolos de observação e das especificações das matrizes de probabilidades A , B e π . Por conveniência utiliza-se a notação compacta

$$\lambda = (A, B, \pi) \tag{4.11}$$

para indicar o conjunto completo dos parâmetros do modelo.

Em geral, os parâmetros do modelo (N e M), a sua estrutura (ergódico, etc.), e os símbolos de observação são escolhidos empiricamente e dependem basicamente do sinal que está sendo modelado, já que, infelizmente, não existem regras ou formas analíticas para essas escolhas [20].

4.2 Canal Discreto com Desvanecimento Rayleigh Plano e Decisão Suave

Nesta seção será definido o canal discreto que será modelado na próxima seção. Denomina-se aqui canal discreto, o bloco constituído por um modulador BPSK, pelo canal com desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência e por um decodificador com decisão suave. A seguir, serão caracterizados cada um desses elementos.

4.2.1 Modulador BPSK

Como já mencionado na Seção 3.1, os sinais PSK são representados pelas formas de onda

$$s_m(t) = Ag(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m), \quad (4.12)$$

em que

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s, \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \quad (4.13)$$

representa o pulso utilizado, T_s é o intervalo de sinalização de um símbolo, A é a amplitude do sinal e

$$\theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M} \quad \text{com } m = 1, \dots, M \quad (4.14)$$

são as possíveis fases da portadora a ser transmitida.

As formas de onda $s_m(t)$ podem ser representadas como uma combinação linear de duas senóides ortonormais, ou seja,

$$s_m(t) = As_{m1}g(t) \cos(2\pi f_c t) + As_{m2}g(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.15)$$

Dessa forma, os sinais PSK podem ser representados pelas componentes s_{m1} e s_{m2} em diagramas bidimensionais, como ilustrado na Figura 4.3, denominados de constelações. Cada ponto na constelação representa um bloco com $k = \log_2 M$ bits de informação.

Neste trabalho, adotou-se a modulação PSK com $M = 2$, denominada também de modulação PSK binária, ou simplesmente de modulação BPSK.

4.2.2 Canal Rayleigh

Como mencionado anteriormente, o modelo de propagação por múltiplos percursos resulta no efeito do desvanecimento. O fenômeno de desvanecimento é provocado principalmente pela variação aleatória na fase de cada percurso. A soma de vários sinais com fases aleatórias pode resultar num sinal total recebido com amplitude próxima de zero ou num sinal com amplitude alta, dependendo dos valores das fases ao longo do tempo.

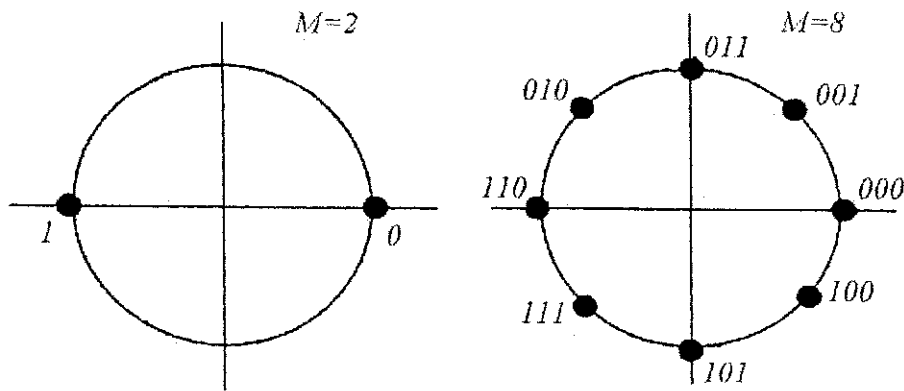


Figura 4.3: Constelações de sinais PSK.

Dessa forma, no canal Rayleigh aqui adotado, o sinal transmitido além de ser afetado por um ruído aditivo gaussiano, também tem a sua amplitude modificada ao longo do tempo por um ruído multiplicativo. Sendo assim, dado que o sinal x foi transmitido, o sinal recebido y é dado por

$$y = \alpha x + n. \quad (4.16)$$

Como apresentado na seção 2.1.3, o fator multiplicativo α será simulado pelo método de Monte Carlo e atende ao modelo WSS-US. Em particular, α é modelado por um processo estacionário em sentido amplo com distribuição de probabilidade Rayleigh

$$f_{\alpha}(\alpha) = 2\alpha e^{-\alpha^2}, \quad \alpha > 0 \quad (4.17)$$

e densidade espectral de potência dada pela Equação 2.2.

Considerando que n representa um ruído gaussiano branco com média nula e densidade espectral de potência constante e igual a $N_0/2$, a distribuição de probabilidade do símbolo recebido y é dada por

$$p(y|\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha x)^2}{N_0}\right) \quad (4.18)$$

Note que se N_0 for conhecido, essa distribuição depende apenas de dois parâmetros, sendo eles: o sinal transmitido x e a amplitude do desvanecimento α .

4.2.3 Decodificação com Decisão Suave

Admitindo-se uma transmissão BPSK, em que $x \in \{+1, -1\}$, sobre o canal Rayleigh descrito pela Equação 4.18, obtém-se a distribuição de probabilidade ilustrada na Fi-

gura 4.4. A distribuição do símbolo recebido y é dada por

$$p(y|\alpha, x = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y \mp \alpha)^2}{N_0}\right) \quad (4.19)$$

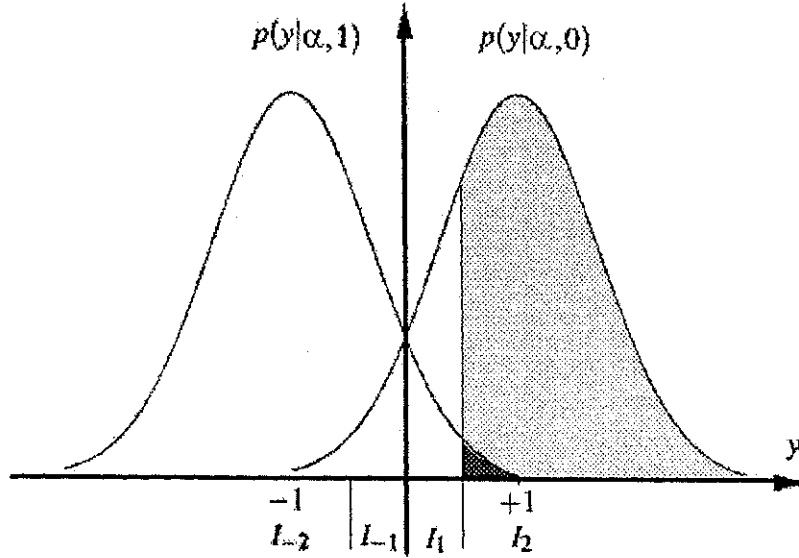


Figura 4.4: Regiões de decisão suave para a recepção de sinais BPSK em canais Rayleigh, dado que a intensidade do desvanecimento Rayleigh é conhecido.

Note que o eixo y na Figura 4.4 foi quantizado em quatro intervalos I_j , $j \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Considere que após a transmissão de um símbolo x , o valor recebido de y pertence ao intervalo I_2 . A probabilidade de receber este valor quando um $+1$ foi transmitido é

$$\int_{I_2} p(y|\alpha, x = +1) dy \equiv \text{região hachurada de cinza na Figura 4.4,} \quad (4.20)$$

e a probabilidade que um -1 foi transmitido é

$$\int_{I_2} p(y|\alpha, x = -1) dy \equiv \text{região hachurada de preto na Figura 4.4} \quad (4.21)$$

Se o valor recebido de y pertence ao intervalo I_2 , é muito mais provável que um $+1$ tenha sido transmitido do que um -1 , visto que a integração sobre o intervalo I_2 é maior para a curva $p(y|\alpha, x = +1)$ do que para a curva $p(y|\alpha, x = -1)$. A medida da *confiabilidade* de uma decisão pode ser expressa pela função [40]

$$\ln p(y|x) \sim \text{sign}(y)|y|. \quad (4.22)$$

O sinal de y pode ser considerado para a tomada de uma decisão brusca e a sua magnitude pode ser interpretada como a confiabilidade dessa decisão. Quando ambos os tipos de informação são incorporados a decodificação, esta passa a ser denominada de decodificação com decisão suave.

Dessa forma, no decodificador com decisão suave o receptor tira vantagem de informações adicionais geradas pelo circuito decisor. Em vez de simplesmente associar um $+1$ ou um -1 a cada símbolo recebido, uma decodificação mais flexível é conseguida quantizando a região de decisão em mais de dois intervalos, abrangendo desde a região de um -1 altamente provável até a região de um $+1$ altamente provável. Sendo assim, valores intermediários são atribuídos aos sinais com um nível de “decisão” pouco confiável. Esta técnica de decodificação pode melhorar consideravelmente o ganho de codificação dos sistemas de comunicações [40].

4.3 Modelos de Markov Escondidos para Canais Rayleigh com Decisão Suave

Nesta seção será desenvolvido um modelo de estados finitos para o canal discreto com desvanecimento Rayleigh apresentado na seção anterior. A técnica de modelamento utilizada se fundamenta nos modelos de Markov escondidos, discutidos anteriormente, para representar a distribuição de surtos de erros dos canais móveis.

Como mencionado na seção 4.1.2, o modelo de Markov escondido HMM é caracterizado pela equação:

$$\lambda = (A, B, \pi) \quad (4.23)$$

em que A é a distribuição de probabilidade para a transição de estados ou matriz de transição de estados, B é a distribuição de probabilidade das observações e π é a matriz de distribuição inicial dos estados.

Os parâmetros em λ serão estimados a partir da simulação do canal discreto com desvanecimento Rayleigh e decisão suave. Nesta simulação, os bits de informação são modulados, por um modulador BPSK, e transmitidos através de um canal com desvanecimento Rayleigh plano. Durante todo o intervalo de sinalização, se considera constante a amplitude do desvanecimento. No receptor, os símbolos BPSK são demodulados de acordo com um esquema de recepção com decisão suave, composto por

quatro regiões de decisão. A Figura 4.4 ilustra esse esquema. Para cada uma das decisões suaves realizadas, associa-se um símbolo da seguinte forma:

- Se o símbolo $+1$ for transmitido pelo modulador e o símbolo recebido cair na região de decisão I_2 , ou se o símbolo -1 for transmitido e o símbolo recebido cair na região de decisão I_{-2} , então haverá uma demodulação correta e o circuito decisor irá gerar o símbolo de acerto K_0 .
- Se o símbolo $+1$ for transmitido pelo modulador e o símbolo recebido cair na região de decisão I_{-2} , ou se o símbolo -1 for transmitido e o símbolo recebido cair na região de decisão I_2 , então haverá um erro na demodulação e o circuito decisor irá gerar o símbolo de erro K_1 .
- Se o símbolo recebido cair na região $I_{\pm 1}$, então supõe-se um grau de incerteza alto sobre o símbolo transmitido e o circuito decisor irá gerar o símbolo de apagamento K_2 .

Estritamente falando, o modelo que será obtido nesta seção irá modelar a seqüência de observações $K_i, i = 0, 1$ e 2 , ou seja, a seqüência dos eventos que podem ocorrer na demodulação, sendo eles, respectivamente, o acerto, o erro ou o apagamento. É evidente que a ocorrência desses eventos só depende do desvanecimento e do ruído do canal.

A seguir será mostrado como os parâmetros do modelo HMM representados pela Equação 4.23 podem ser estimados a partir da simulação do canal discreto.

Como foi visto na seção 4.1.1, o modelo de Markov escondido é caracterizado por um duplo processo estocástico, consistindo de um processo estocástico fundamental (escondido), que determina as transições de estado, mas que só pode ser observado indiretamente através de outro processo estocástico, que produz a seqüência de observações. Desde que os símbolos de observação nesse modelo são os eventos $K_i, i = 0, 1$ ou 2 , e que esses só são influenciados pelo desvanecimento e pelo ruído do canal, segue que o processo estocástico escondido deve estar relacionado ao processo de desvanecimento Rayleigh e cada estado da cadeia deve refletir alguma informação sobre esse desvanecimento. Tendo isto em vista, optou-se por quantizar o fator multiplicativo Rayleigh, que caracteriza o desvanecimento do canal, em um número finito de intervalos e associar cada um desses intervalos a um estado na cadeia de Markov.

Dessa forma, a matriz de transição de estados A referenciada na Equação 4.23 pode ser encontrada através do seguinte procedimento.

Ao longo da simulação do canal discreto, observa-se as transições do fator multiplicativo Rayleigh realizadas de um intervalo da f.d.p. Rayleigh para o intervalo seguinte. Se o tempo de observação for suficientemente longo, aproximadamente 10^6 intervalos de sinalização, pode-se estimar as probabilidades de transição de estados. Essas probabilidades determinam unicamente a matriz A na Equação 4.23. Neste ponto, a vantagem dessa técnica de modelamento, através da simulação do canal discreto, fica evidente, desde que o uso do simulador permite observar diretamente a seqüência de estados ao longo da simulação, eliminando assim, qualquer ambigüidade a respeito da estrutura do HMM capaz de modelar o desvanecimento Rayleigh.

A matriz A pode ser determinada como segue. Considere que a f.d.p. Rayleigh é quantizada em N intervalos (ou estados) σ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Considere também que ao longo de um intervalo de observação de T bits de comprimento, a intensidade do desvanecimento faz α_{kl} transições de um determinado estado σ_k para um outro estado σ_l , em que $k, l = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Além disso, ao longo do intervalo de observação T , α_k transições são realizadas no total a partir do estado σ_k . Então,

$$a_{kl} = \frac{\alpha_{kl}}{\alpha_k} \quad (4.24)$$

e desta forma, todos os elementos da matriz A podem ser estimados. Portanto, através da quantização do fator multiplicativo do desvanecimento, a matriz A pode ser encontrada como função única da taxa de desvanecimento e o seu cálculo não sofre nenhuma influência da amplitude do sinal.

A seguir, será descrito o procedimento utilizado para a determinação de B , a matriz que contém a distribuição de probabilidade das observações para cada estado da cadeia de Markov. Como já mencionado, o conjunto dos símbolos de observação, levado em consideração para a construção do modelo, é formado pelos símbolos de decisão suave K_i , definidos anteriormente.

Durante a simulação, o estado que o canal ocupa em cada intervalo de sinalização é conhecido, assim como o símbolo que foi transmitido e o que foi demodulado. Portanto, ao longo de todo o intervalo de observação T , pode-se determinar o número de vezes que um particular estado é visitado, como também o símbolo K_i gerado pelo circuito decisor para cada visita desse estado. Dessa forma, ao final da simulação do canal discreto, pode-se estimar as probabilidades de ocorrência de todos os símbolos K_i para cada estado da cadeia. Essas probabilidades determinam a matriz B na Equação 4.23. O cálculo da matriz B é realizado como segue.

Considere que ao longo de todo o intervalo de observação, o símbolo de observação K_i ocorre $\beta_j(K_i)$ vezes dentro do estado σ_j , em que $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Além disso, o estado σ_j é visitado β_j vezes ao longo de todo o período de observação. Os elementos da matriz B podem então ser determinados por

$$b_j(K_i) = \frac{\beta_j(K_i)}{\beta_j} \quad (4.25)$$

Os elementos $b_j(K_i)$ da matriz B são determinados unicamente pelo nível do sinal na recepção. Portanto a taxa de desvanecimento não tem nenhuma influência sobre esses valores. As Equações 4.24 e 4.25 são conhecidas como as fórmulas de reestimação de Baum-Welch [20].

No modelamento de canais de comunicações a distribuição inicial dos estados π na Equação 4.23 é dispensável devido principalmente ao longo tempo de observação do canal físico. A partir dos parâmetros do modelo, um simulador de surtos de erros pode ser obtido. A seqüência de erros gerada é similar a observada no canal de comunicação móvel modelado.

4.4 Resultados de Simulação

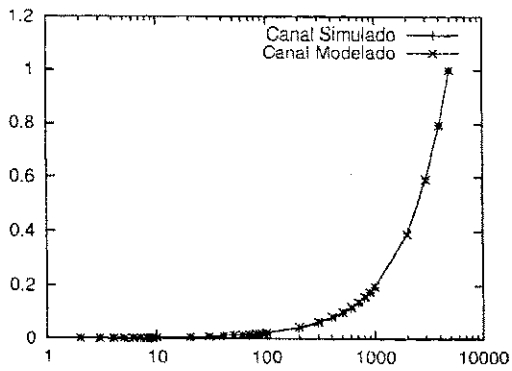
As Figuras 4.5 (a)-(e) mostram os resultados obtidos com a técnica de modelamento de canal aqui utilizada. Essas Figuras apresentam uma comparação entre as distribuições de surtos de erros geradas pelo canal modelado e pelo canal simulado. Para o cálculo dessas distribuições, admite-se que os surtos sempre começam e terminam com um evento de erro ou de apagamento e ocorrem quando $\delta > \delta_0$, em que δ_0 é um valor de limiar e

$$\delta = \frac{\sum_{j=1}^l m_j}{l} \quad (4.26)$$

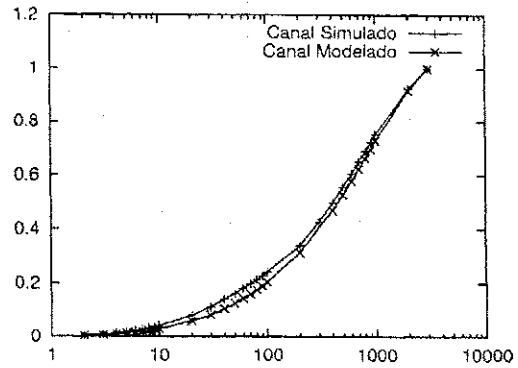
sendo l o comprimento do surto [28]. Aqui, m_j é um peso associado a cada evento K_i , sendo igual a 0 para K_0 , 1 para K_1 e 0.5 para K_2 . O valor do limiar δ_0 utilizado foi igual a 0.1.

O canal modelado possui desvanecimento Rayleigh com máximo desvio Doppler f_D igual a 100 Hz. Nas simulações utilizou-se uma taxa de sinalização igual a 24,3 kbits/s. Foram obtidos modelos para SNR's variando de 0 a 20 dB.

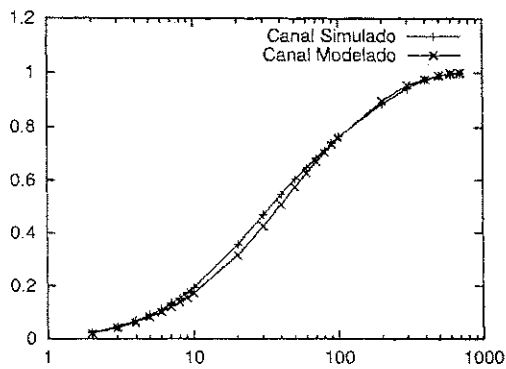
As Tabelas 4.2 e 4.3 apresentam, respectivamente, as matrizes A e B para cada um dos modelos obtidos. A partir dessas Tabelas pode-se observar que o canal ficou bem



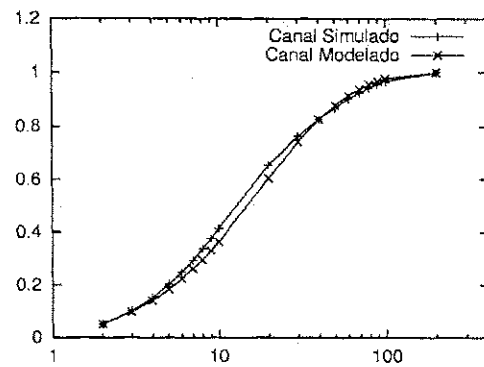
(a) SNR igual a 0 dB



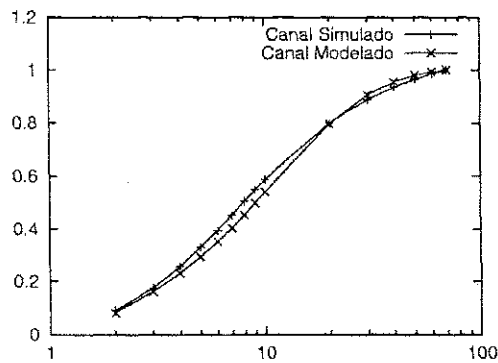
(b) SNR igual a 5 dB



(c) SNR igual a 10 dB



(d) SNR igual a 15 dB



(e) SNR igual a 20 dB

Figura 4.5: Modelos para o canal com desvanecimento Rayleigh plano com máximo desvio Doppler igual a 100 Hz.

modelado com HMM's de 5 estados. Os intervalos de quantização σ_j , $j = 0, 1, \dots, 4$, do fator multiplicativo Rayleigh, foram determinados empiricamente e encontram-se na Tabela 4.1. Os valores contidos nas Tabelas 4.1-4.3 apresentam o número de dígitos necessários para manter a precisão do modelo.

Pôde-se observar a partir das simulações, que esta técnica de modelamento apresenta uma certa deficiência na obtenção de modelos de canais com razão sinal-ruído elevada. Isto se deve a menor quantidade de surtos de erros nesses canais de comunicação, dificultando, portanto, a estimação dos parâmetros do modelo. Para superar esse problema deve-se aumentar o intervalo total de observação, o que conduz a um aumento no tempo de simulação. Esse problema não afeta apenas essa técnica de modelamento. Na verdade ele pode ser encontrado em qualquer outra técnica de modelamento baseada na observação das seqüências de erros geradas pelo canal real [18].

Tabela 4.1: Intervalos de Quantização da Distribuição de probabilidades Rayleigh

SNR (dB)	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	[0.0; 0.55)	[0.55; 1.1)	[1.1; 1.4)	[1.4; 2.0)	[2.0; 3.0)
5	[0.0; 0.55)	[0.55; 1.45)	[1.45; 1.65)	[1.65; 2.0)	[2.0; 3.0)
10	[0.0; 0.34)	[0.34; 1.62)	[1.62; 1.8)	[1.80; 2.2)	[2.2; 3.0)
15	[0.0; 0.2)	[0.2; 1.22)	[1.22; 1.573)	[1.573; 2.17)	[2.17; 3.0)
20	[0.0; 0.115)	[0.115; 0.73)	[0.73; 1.0)	[1.0; 2.0)	[2.0; 3.0)

Tabela 4.2: Matriz A

SNR (dB)	σ_k σ_j	0	1	2	3	4
0	0	0.983113	0.016883	0.000000	0.000004	0.000000
	1	0.009428	0.982638	0.007934	0.000000	0.000000
	2	0.000000	0.021564	0.965745	0.012691	0.000000
	3	0.000000	0.000000	0.016487	0.980666	0.002847
	4	0.000000	0.000000	0.000000	0.021365	0.978635
5	0	0.983540	0.016460	0.000000	0.000000	0.000000
	1	0.006807	0.990225	0.002968	0.000000	0.000000
	2	0.000000	0.031622	0.949113	0.019265	0.000000
	3	0.000000	0.000020	0.022916	0.969929	0.007134
	4	0.000000	0.000000	0.000000	0.021090	0.978910
10	0	0.970501	0.029413	0.000038	0.000019	0.000029
	1	0.003741	0.994707	0.001519	0.000028	0.000005
	2	0.000028	0.035071	0.945573	0.019328	0.000000
	3	0.000133	0.000866	0.022920	0.971117	0.004964
	4	0.000165	0.000661	0.000000	0.024971	0.974202
15	0	0.948208	0.051608	0.000132	0.000026	0.000026
	1	0.002680	0.993142	0.004104	0.000064	0.000010
	2	0.000041	0.020252	0.970289	0.009411	0.000007
	3	0.000039	0.000988	0.017642	0.979186	0.002145
	4	0.000000	0.000411	0.000137	0.023262	0.976190
20	0	0.911420	0.088486	0.000039	0.000055	0.000000
	1	0.002871	0.985964	0.011130	0.000034	0.000001
	2	0.000002	0.020039	0.962619	0.017340	0.000000
	3	0.000001	0.000043	0.010685	0.988287	0.000984
	4	0.000000	0.000061	0.000043	0.021300	0.978596

Tabela 4.3: Matriz B

SNR (dB)	Estado σ_j	Probabilidade de Acerto $b_j(K_0)$	Probabilidade de Apagamento $b_j(K_2)$	Probabilidade de Erro $b_j(K_1)$
0	0	0.613947	0.146590	0.239463
	1	0.820586	0.088314	0.091099
	2	0.937853	0.036845	0.025302
	3	0.978762	0.013799	0.007439
	4	0.997560	0.001726	0.000714
5	0	0.741436	0.111575	0.146988
	1	0.968374	0.019122	0.012504
	2	0.999897	0.000086	0.000017
	3	1.000000	0.000000	0.000000
	4	1.000000	0.000000	0.000000
10	0	0.769165	0.102899	0.127936
	1	0.991597	0.005359	0.003044
	2	1.000000	0.000000	0.000000
	3	1.000000	0.000000	0.000000
	4	1.000000	0.000000	0.000000
15	0	0.779646	0.100453	0.119901
	1	0.997024	0.001910	0.001066
	2	1.000000	0.000000	0.000000
	3	1.000000	0.000000	0.000000
	4	1.000000	0.000000	0.000000
20	0	0.792016	0.093782	0.114201
	1	0.998292	0.001087	0.000621
	2	1.000000	0.000000	0.000000
	3	1.000000	0.000000	0.000000
	4	1.000000	0.000000	0.000000

4.5 Conclusão

Neste Capítulo, os processos de desvanecimento que ocorrem nos canais de comunicações móveis foram estudados e os seus efeitos foram caracterizados. A partir de um sistema de simulação composto por um modulador BPSK, pelo canal AWGN com desvanecimento e por um demodulador com decisão suave, foi possível obter modelos para os surtos de erros provocados pelo processo de desvanecimento do canal. Os modelos foram obtidos por meio de uma técnica de modelamento que faz uso das idéias centrais nos modelos de Markov escondidos (HMM's). A partir dos resultados apresentados na seção anterior, fica evidente que a técnica de modelamento utilizada é eficaz e os modelos obtidos por ela são confiáveis. Uma vantagem adicional dessa técnica de modelamento é a sua capacidade de modelar também surtos de erros binários gerados na saída de um demodulador com decisão brusca.

A partir dos modelos obtidos neste Capítulo, foram construídos geradores de surtos de erros. As seqüências de erros geradas são similares as seqüências observadas no canal de comunicação móvel modelado. Esses geradores foram utilizados em algumas simulações apresentadas no próximo Capítulo, para analisar o desempenho de um sistema com codificação wavelet lá proposto.

Capítulo 5

Desempenho da Codificação Wavelet com Hamming e Diversidade Espaço-Temporal

No Capítulo 3, constatou-se que o desempenho de um sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal, sobre um canal de comunicação com desvanecimento Rayleigh, piora a medida que aumenta o grau de correlação entre as amostras do desvanecimento. Esse comportamento é uma consequência direta do aumento no comprimento médio dos surtos de erros, provocados por uma variação mais lenta do canal ao longo do tempo.

Para aumentar a robustez do sistema com codificação wavelet e diversidade, em canais com surtos de erros mais intensos, acrescentou-se ao mesmo uma nova etapa de codificação. Estritamente falando, utilizou-se códigos de Hamming para codificar os símbolos wavelets antes de transmití-los através do canal. É óbvio que esse ganho de robustez, conseguido com a codificação de Hamming, teve como custo a diminuição da eficiência espectral do sistema, entretanto, frente aos bons resultados obtidos com o novo sistema, esse custo se justifica.

O ganho de desempenho obtido com esse novo sistema, que utiliza a codificação wavelet em conjunto com códigos de Hamming e diversidade, será medido em relação ao desempenho de um sistema de referência com eficiência espectral semelhante a do sistema proposto. O sistema de referência escolhido utiliza a codificação convolucional com decodificação de Viterbi. Esse sistema foi escolhido por já ter sido citado como opção para transmissão em canais com surtos de erros [11] e [19].

O restante deste Capítulo está organizado como segue: na Seção 5.1 será apresentada uma introdução aos códigos convolucionais. Na Seção 5.2 será apresentado o algoritmo de decodificação de Viterbi. Este algoritmo será utilizado tanto na decodificação do código convolucional presente no sistema de referência, quanto na decodificação dos códigos de Hamming utilizados para codificar os símbolos wavelets. Na Seção 5.3 será apresentado o sistema aqui proposto, que integra a codificação wavelet com códigos de Hamming e diversidade espaço-temporal. Na Seção 5.4 serão apresentados os resultados obtidos pela simulação computacional do sistema proposto. Finalmente, na Seção 5.5, serão apresentadas algumas conclusões.

5.1 Códigos Convolucionais

Os códigos convolucionais foram estudados inicialmente por Elias¹ em 1955. Ele mostrou que pode ser introduzido redundância em uma seqüência de dados a partir do uso de um registrador de deslocamento linear. Em 1967 Viterbi propôs um revolucionário algoritmo de decodificação para códigos convolucionais. Em 1969, Omura mostrou tratar-se de um método de Programação Dinâmica. Em 1973, Forney demonstrou que o algoritmo de Viterbi tratava-se de um decodificador de máxima verossimilhança (MLD), o que favoreceu a rápida difusão dos códigos convolucionais.

Um codificador convolucional converte uma seqüência de dados, não importando o seu comprimento, em uma simples palavra-código. A Figura 5.1 ilustra um codificador convolucional típico com taxa 1/2. A taxa deste codificador é calculada a partir do fato que existem dois bits de saída para cada bit de entrada do codificador. Em geral, um codificador com k entradas e n saídas apresenta taxa k/n .

Na Figura 5.1, a seqüência binária de dados $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ é aplicada à entrada de um registrador de deslocamento. A partir dos bits de entrada e dos valores armazenados no registrador é criado um par de seqüências de dados codificados $\mathbf{y}^{(0)} = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots)$ e $\mathbf{y}^{(1)} = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots)$. Estas seqüências de saída podem ser combinadas para criar uma única seqüência de saída $\mathbf{y} = (y_0^{(0)}y_0^{(1)}, y_1^{(0)}y_1^{(1)}, y_2^{(0)}y_2^{(1)}, \dots)$. \mathbf{y} é a palavra-código convolucional.

¹Peter Elias faleceu em 7 de dezembro de 2001. Em mais de 50 anos de estudos teóricos, Peter Elias contribuiu com vários trabalhos fundamentais à Teoria da Informação [3].

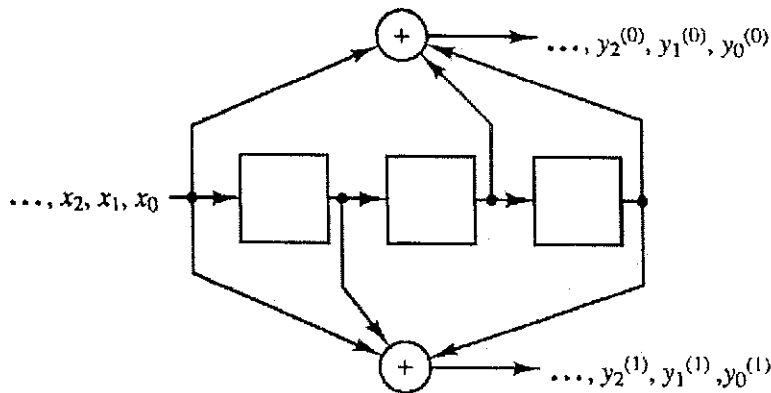


Figura 5.1: Codificador convolucional com taxa 1/2.

Exemplo 3 Codificação Convolucional:

O codificador com taxa 1/2 da Figura 5.1 é usado para codificar a seqüência de informação $\mathbf{x} = (10110)$. Obtém-se as seguintes seqüências codificadas de saída:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)} &= (10001010), \\ \mathbf{y}^{(1)} &= (11111110). \end{aligned}$$

A palavra-código convolucional correspondente à entrada $\mathbf{x} = (10110)$ é então

$$\mathbf{y} = (11, 01, 01, 01, 11, 01, 11, 00)$$

As vírgulas são usadas para indicar os blocos de bits que são gerados no mesmo intervalo de tempo.

Após toda a seqüência \mathbf{x} ter entrado no codificador, introduz-se uma seqüência de zeros para que, no final do processo de codificação, o conteúdo do registrador seja nulo. Esta é uma condição necessária para se efetuar a decodificação dessa classe de códigos pelo algoritmo que será apresentado posteriormente.

Como existem três elementos de memória no codificador da Figura 5.1, cada bit de entrada pode afetar no máximo 4 bits de saída. Em geral, uma seqüência de dados de entrada $\mathbf{x}^{(i)}$ codificada por um codificador convolucional passa através de um registrador de deslocamento com m_i elementos de memória. A quantidade de elementos de memória determina a extensão na qual um bit de entrada afeta diretamente a seqüência de dados de saída.

O comprimento de restrição K de um código convolucional é o número máximo de bits em uma seqüência de saída que podem ser afetados por qualquer bit de entrada, ou seja,

$$K := 1 + \max_i m_i. \quad (5.1)$$

A memória total M de um código convolucional é definido como o número total de elementos de memória no codificador, ou seja,

$$M = \sum_{i=0}^{K-1} m_i \quad (5.2)$$

A memória total de um codificador tem um forte impacto na complexidade do decodificador de Viterbi, como será visto adiante.

5.1.1 Diagrama em Treliça

Um código convolucional pode ser representado por um diagrama em treliça como segue.

Considere o codificador da Figura 5.2. Este codificador, com taxa 1/3, contém dois elementos de memória binários que podem assumir coletivamente um entre quatro possíveis estados. Estes estados são designados por $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ e são associados ao conteúdo dos elementos de memória como apresentado abaixo.

$$\begin{aligned} S_0 &\leftrightarrow (00), & S_2 &\leftrightarrow (01) \\ S_1 &\leftrightarrow (10), & S_3 &\leftrightarrow (11) \end{aligned} \quad (5.3)$$

O diagrama em treliça associado a esse codificador é apresentado na Figura 5.3. Esse diagrama pode ser interpretado da seguinte forma. Considere que o codificador encontra-se no estado (XY) . Se o bit de entrada for 0, o codificador transita para o estado $(0X)$. Se o bit de entrada for 1, o codificador transita para o estado $(1X)$. Os ramos sólidos representam as transições de estado ocorridas com a chegada do bit 1, enquanto que os ramos tracejados representam as transições de estado ocorridas com a chegada do bit 0. Os ramos da treliça são rotulados pelos bits emitidos pelo codificador a cada transição. Observe que a representação do codificador através do diagrama em treliça permite a análise do comportamento funcional do codificador ao longo do tempo.

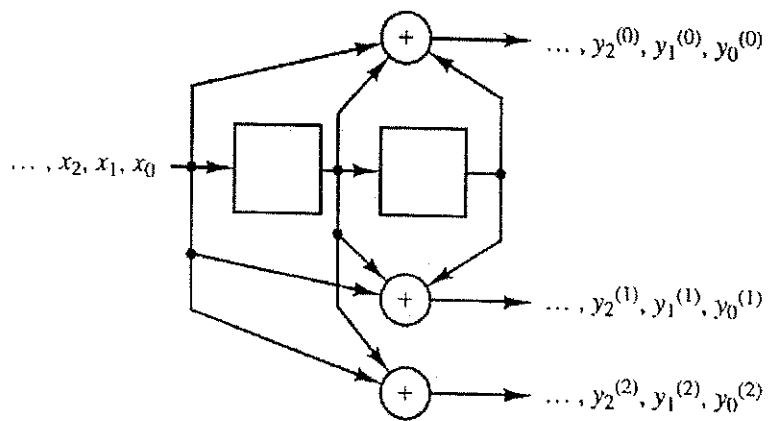


Figura 5.2: Codificador convolucional com taxa 1/3.

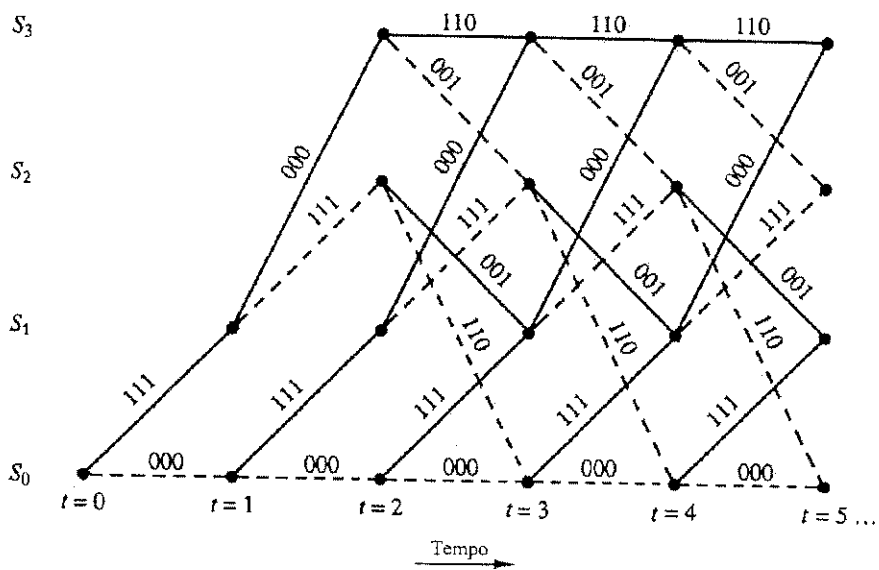


Figura 5.3: Diagrama em treliça para o codificador convolucional da Figura 5.2.

Cada palavra-código convolucional é associada a um único caminho no diagrama em treliça, iniciando e terminando no estado S_0 . O estado final será sempre S_0 devido a seqüência de zeros com comprimento m introduzida ao final de cada palavra de informação que se deseja codificar. A estrutura em treliça permite alguns exercícios de contagem que levam a alguns resultados úteis. Considere um codificador convolucional genérico (n, k) com memória total M e ordem máxima de memória m . O diagrama em treliça associado tem 2^M nós em cada nível, ou incremento de tempo t . Existem 2^k ramos deixando cada nó, um ramo para cada combinação possível dos bits de entrada. Depois do instante $t = m$, existem 2^k ramos chegando em cada nó. Dada uma seqüência de entrada com $k \cdot L$ bits, sendo L um número inteiro positivo qualquer, o diagrama em treliça deverá ter $L + m$ níveis, o primeiro e o último nível iniciando e terminando, respectivamente, no estado S_0 . Desta forma, existirão 2^{kL} caminhos distintos através da treliça, cada um correspondendo a uma palavra-código convolucional de comprimento $n(L + m)$.

O diagrama em treliça dos códigos convolucionais possibilita a decodificação por máxima-verossimilhança das palavras-código transmitidas através do algoritmo de Viterbi, que será apresentado a seguir.

5.2 O Algoritmo de Viterbi

Considere o problema de decodificação apresentado na Figura 5.4. Uma seqüência de informação x é codificada numa palavra-código convolucional y , que é transmitida através de um canal ruidoso. O decodificador recebe o vetor r e gera uma estimativa y' da palavra-código transmitida.

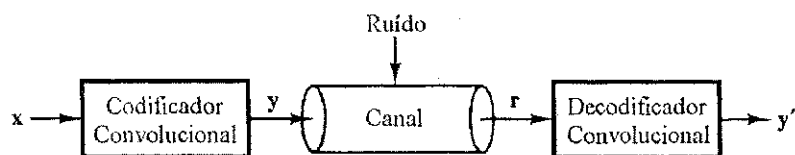


Figura 5.4: Problema da decodificação convolucional.

O decodificador de máxima verossimilhança seleciona, por definição, a estimativa que maximiza a probabilidade $p(\mathbf{r}|\mathbf{y}')$.

Um codificador convolucional com taxa k/n recebe k bits de entrada e gera n bits de saída a cada deslocamento de seus registradores. Supondo uma seqüência de entrada x composta de L blocos de k bits, tem-se

$$\mathbf{x} = \left(x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k-1)}, x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k-1)}, x_{L-1}^{(0)}, \dots, x_{L-1}^{(k-1)} \right) \quad (5.4)$$

A seqüência de saída y consistirá de L blocos de n bits mais m blocos adicionais, sendo m o número de células do registrador de deslocamento mais longo, necessário para deixar o registrador de deslocamento no estado inicial.

$$\mathbf{y} = \left(y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}, y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}, y_{L+m-1}^{(0)}, \dots, y_{L+m-1}^{(n-1)} \right) \quad (5.5)$$

A versão ruidosa da palavra-código transmitida chega ao receptor e o decodificador de máxima verossimilhança gera uma estimativa y' da seqüência transmitida. As seqüências \mathbf{r} e \mathbf{y}' são representadas abaixo.

$$\mathbf{r} = \left(r_0^{(0)}, r_0^{(1)}, \dots, r_0^{(n-1)}, r_1^{(0)}, r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(n-1)}, r_{L+m-1}^{(0)}, \dots, r_{L+m-1}^{(n-1)} \right) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{y}' = \left(y_0'^{(0)}, y_0'^{(1)}, \dots, y_0'^{(n-1)}, y_1'^{(0)}, y_1'^{(1)}, \dots, y_1'^{(n-1)}, y_{L+m-1}'^{(0)}, \dots, y_{L+m-1}'^{(n-1)} \right) \quad (5.7)$$

Assumindo que o ruído que afeta um dado bit é independente do ruído que afeta os outros bits, tem-se

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}|\mathbf{y}') &= \prod_{i=0}^{L+m-1} \left[p(r_i^{(0)}|y_i'^{(0)}) p(r_i^{(1)}|y_i'^{(1)}) \dots p(r_i^{(n-1)}|y_i'^{(n-1)}) \right] \\ &= \prod_{i=0}^{L+m-1} \left(\prod_{j=0}^{n-1} p(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)}) \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

A Equação 5.8 é denominada de função de verossimilhança de \mathbf{y}' . Como a função logarítmica é monotonicamente crescente, a estimativa que maximiza $p(\mathbf{r}|\mathbf{y}')$ também maximiza $\log p(\mathbf{r}|\mathbf{y}')$. Aplicando o logaritmo em cada lado da Equação 5.8 tem-se a função logarítmica de verossimilhança.

$$\log p(\mathbf{r}|\mathbf{y}') = \sum_{i=0}^{L+m-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \log p(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)}) \right) \quad (5.9)$$

No algoritmo de Viterbi utiliza-se a notação $M(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)})$, denominada de métrica, para a função $\log p(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)})$. Dessa forma a Equação 5.9 pode ser expressa por

$$M(\mathbf{r}|\mathbf{y}') = \sum_{i=0}^{L+m-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} M(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)}) \right) \quad (5.10)$$

A Equação 5.10 é chamada de *métrica de percurso*.

No algoritmo de decodificação, é necessário medir a contribuição na métrica de percurso feita por um percurso parcial. Assim, defini-se a k -ésima métrica parcial de percurso como sendo a métrica referente aos k -ésimos primeiros ramos pelos quais o percurso passa,

$$M^k(\mathbf{r}|\mathbf{y}') = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} M(r_i^{(j)}|y_i'^{(j)}) \right) \quad (5.11)$$

Os diagramas em treliça podem ser usados para o cálculo das métricas de percurso no algoritmo de Viterbi. Nesse algoritmo, cada nó da treliça é designado por um número. Esse número é a métrica parcial do percurso que inicia no estado S_0 no instante de tempo $t = 0$ e termina no referido nó. A designação de números aos nós da treliça é feita até que se chegue a um ponto da rotina no qual mais de um percurso entre num mesmo nó. Neste caso escolhe-se o percurso que tenha a maior métrica parcial entre todos os percursos que chegam àquele nó (a maior métrica é a que maximiza a função logarítmica de verossimilhança). O percurso com a maior métrica é o sobrevivente, enquanto que os outros são não sobreviventes e devem ser eliminados nos passos subseqüentes. Observando a Figura 5.5, o rótulo Z pode ser determinado da seguinte forma.

$$Z = \max \left\{ \left[X + M(r_t^{(0)}|0) + M(r_t^{(1)}|0) + M(r_t^{(2)}|0) \right], \right. \\ \left. \left[Y + M(r_t^{(0)}|1) + M(r_t^{(1)}|1) + M(r_t^{(2)}|1) \right] \right\}. \quad (5.12)$$

O algoritmo termina quando todos os nós da treliça forem rotulados e os sobreviventes determinados. Percorrendo o caminho inverso a partir do último nó da treliça (estado S_0 no instante de tempo $t = L + m$) obtém-se um único percurso, pois apenas um percurso pode sobreviver como entrada para cada nó. Este percurso é o percurso de máxima verossimilhança.

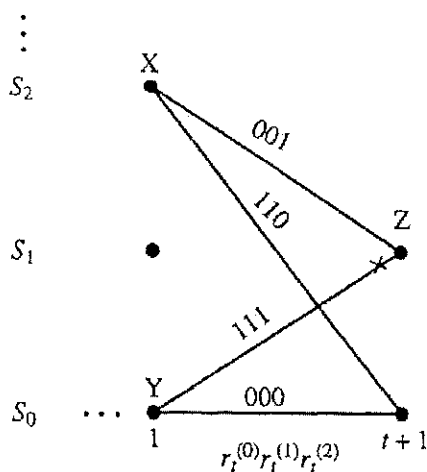


Figura 5.5: Cálculo da métrica de percurso no algoritmo de Viterbi.

5.3 Codificação Wavelet com Hamming e Diversidade Espaço-Temporal

Nesta seção será apresentado o sistema que integra a codificação wavelet com códigos de Hamming e diversidade espaço-temporal. Esse sistema é semelhante ao sistema proposto na seção 3.4, com a diferença que agora os símbolos wavelets são codificados por um código de Hamming antes de serem transmitidos. Além disso, as etapas de modulação e demodulação também sofreram algumas modificações. A seguir, o sistema proposto será detalhadamente descrito.

Considere o sistema apresentado na Figura 5.6. Neste sistema, a seqüência dos bits de informação gerados pela fonte passa por um conversor S/P antes de ser enviada ao codificador wavelet. Se a codificação wavelet for realizada por uma matriz MCW com m linhas, então a seqüência serial dos bits gerados pela fonte deve ser convertida em m seqüências paralelas pelo conversor S/P. Cada uma dessas seqüências é codificada por uma linha da matriz MCW real plana de acordo com o procedimento de codificação apresentado na seção 2.5. Dessa forma, para um esquema de codificação com máxima sobreposição das palavras-código wavelets, a cada intervalo de sinalização nT , do codificador são gerados m símbolos wavelets y_n^i , $1 \leq i \leq m$.

Na codificação de Hamming, cada par de símbolos (y_n^i, y_{n+1}^i) , $1 \leq i \leq m$, gerados em dois intervalos de sinalização consecutivos por cada uma das linhas da matriz MCW,

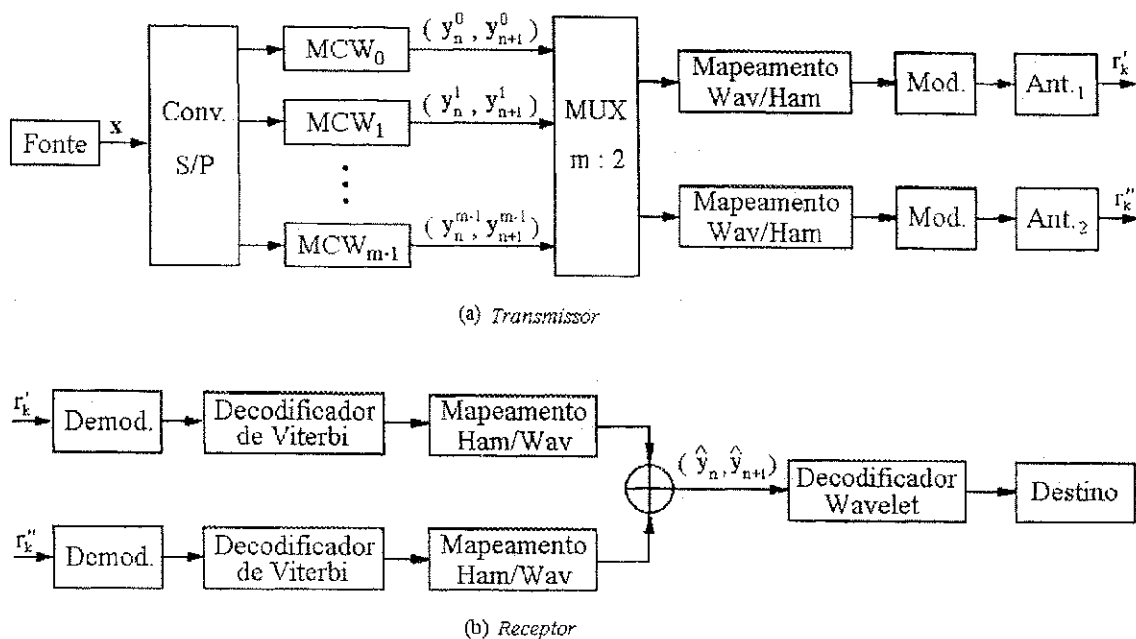


Figura 5.6: Sistema com codificação wavelet, códigos de Hamming e diversidade espaço-temporal.

é mapeado em uma palavra-código de Hamming c com comprimento de n símbolos. Desde que a codificação wavelet tem taxa igual a 1 bit de informação por símbolo wavelet, segue que a taxa de codificação total do sistema será igual a $R_T = 2/n$ bits de informação por símbolo de canal.

As m palavras de Hamming são moduladas por sinais BPSK com energia unitária, e transmitidas pelas antenas através de dois canais estatisticamente independentes. Considera-se que em cada canal, os sinais são afetados pelo ruído aditivo gaussiano branco com média nula e densidade espectral de potência igual a $N_0/2$ por dimensão e por um desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência com energia média unitária e densidade espectral de potência dada pela Equação 3.40. Considera-se também que a amplitude do desvanecimento permanece constante em cada intervalo de sinalização do canal.

No receptor, os símbolos BPSK são demodulados de acordo com um esquema de recepção com decisão suave, composto por quatro regiões de decisão. Esse esquema de recepção está ilustrado na Figura 4.4.

Na simulação desse sistema, optou-se por utilizar um modelo de Markov escondido (HMM) para modelar os surtos de erros gerados pelo **bloco** constituído pelo modula-

dor BPSK, pelo canal AWGN com desvanecimento Rayleigh e pelo demodulador com decisão suave. O procedimento utilizado para modelar os surtos de erros gerados por esse **bloco**, denominado aqui de canal discreto, foi apresentado na seção 4.3.

Nesse modelamento, o canal discreto é representado por uma cadeia de Markov com um número finito de estados. Cada estado da cadeia reflete o comportamento do canal para um determinado nível de desvanecimento. Dessa forma, a cada estado da cadeia, é associada uma distribuição de probabilidades para os eventos de acertos, erros e apagamentos que podem ocorrer quando o canal entra naquele estado. A transição entre os estados da cadeia é regida por um processo estocástico que modela o processo de desvanecimento do canal. Tanto as distribuições de probabilidades de acertos, erros e apagamentos para cada estado da cadeia quanto o processo estocástico que governa a transição de estados compõem os parâmetros do modelo.

A partir dos parâmetros do modelo, pode-se obter simuladores de surtos de erros. A seqüência de erros gerada por cada simulador é similar a observada no canal discreto modelado. Como no sistema proposto a transmissão é realizada através de dois canais independentes, é necessário utilizar na simulação dois simuladores de surtos, um para cada canal. Os dois simuladores utilizam os mesmos parâmetros do modelo HMM obtido, mas são executados paralelamente para garantir a independência entre os canais. Durante a simulação do sistema, a seqüência de símbolos transmitida por cada antena é corrompida pela seqüência de erros gerada pelo simulador de surtos correspondente àquela antena.

Na recepção, as palavras de Hamming corrompidas pelos erros do canal são decodificadas através de um decodificador de Viterbi com decisão suave. O algoritmo de decodificação se baseia na treliça mínima do código utilizado, para gerar uma estimativa \hat{c} para a palavra-código de Hamming transmitida.

Durante as simulações, considera-se que o decodificador de Viterbi conhece perfeitamente o estado que o canal ocupa na cadeia de Markov em cada intervalo de transmissão. Para cada um desses estados, o decodificador de Viterbi utiliza uma métrica de decodificação diferente, calculada durante cada intervalo de transmissão por [11]:

$$M_j(r_l|c'_l) = \begin{cases} \log_2 b_j(K_0) & \text{se } r_l = c'_l \\ \log_2 b_j(K_1) & \text{se } r_l \neq c'_l \text{ e } r_l \neq 2 \\ \log_2 b_j(K_2) & \text{se } r_l = 2 \end{cases} \quad (5.13)$$

em que j denota o estado atual que o canal ocupa na cadeia de Markov, r_l representa o símbolo recebido pelo decodificador, c'_l representa o símbolo esperado da palavra de

Hamming e $b_j(K_i)$, $i = 0, 1$ ou 2 , representa, respectivamente, as probabilidades de acerto, de erro, ou de apagamento para cada estado j da cadeia, estimadas na etapa de modelamento do canal.

Um procedimento semelhante de decodificação foi utilizado em [19].

Após a decodificação das m palavras de Hamming transmitidas, obtém-se as estimativas dos m pares de símbolos consecutivos (y_n^i, y_{n+1}^i) , $1 \leq i \leq m$, codificados por essas palavras. As estimativas dos símbolos que correspondem a um mesmo intervalo de codificação são somadas, formando as estimativas dos símbolos y_n e y_{n+1} . Essas estimativas são então enviadas ao decodificador wavelet, que segue o procedimento descrito na seção 2.4 para gerar as estimativas dos bits de informação transmitidos.

5.4 Resultados de Simulação

Nesta Seção serão apresentados os resultados obtidos com a simulação do sistema ilustrado na Figura 5.6, que integra as codificações wavelet e Hamming a um esquema de transmissão com diversidade ($L=2$). O ganho de desempenho obtido com este novo sistema será medido em relação ao desempenho de dois sistemas de referências que possuem a mesma eficiência espectral do sistema proposto, sendo eles: um sistema com codificação convolucional e um sistema com codificações wavelet e Hamming sem diversidade espacial ($L=1$). No sistema com codificação convolucional foi utilizado um código com taxa $R = 1/3$ e polinômios geradores $g_1 = 5$, $g_2 = 7$ e $g_3 = 7$. A distância livre para este código é igual a 8 [37]. O sistema com codificações wavelet e Hamming sem diversidade espacial difere do sistema proposto neste Capítulo apenas pela ausência do esquema de diversidade espacial. Neste sistema, os sinais modulados são transmitidos através de um único canal de comunicação.

Os sistemas com codificações wavelet e Hamming foram simulados com as matrizes MCW's reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 apresentadas, respectivamente, nas Equações 2.13 e 2.14.

Nas simulações aqui realizadas, optou-se por utilizar simuladores de surtos de erros construídos a partir dos parâmetros apresentados na seção 4.4 para o HMM do canal de comunicação adotado. As seqüências de erros geradas pelos simuladores são similares as observadas no canal modelado. Neste caso, o canal modelado é afetado pelo ruído aditivo gaussiano branco com média nula e variância igual a $N_0/2$ por dimensão e por um desvanecimento Rayleigh plano correlacionado com máximo desvio Doppler

$f_D = 100$ Hz. A taxa de transmissão utilizada em todos os sistemas é igual a 24300 símbolos por segundo.

Tanto o sistema com codificação convolucional quanto os sistemas com codificações wavelet e Hamming utilizam um decodificador de Viterbi com decisão suave para conseguir estimativas de máxima verossimilhança para as palavras-código recebidas. As métricas de decodificação usadas pelo decodificador de Viterbi são apresentadas na Equação 5.13.

Neste ponto, recorde que no sistema com codificações wavelet e Hamming existe um mapeamento entre pares de símbolos wavelets e palavras pertencentes a um determinado código de Hamming. Para que se possa escolher o código de Hamming apropriado para o sistema proposto, deve-se inicialmente conhecer o número de todas as possíveis combinações de símbolos wavelets (y_n^i, y_{n+1}^i) que podem ser geradas, em intervalos de sinalização consecutivos, por cada linha da MCW utilizada na codificação wavelet. Essas combinações foram obtidas por meio de simulação computacional para as matrizes MCW 2×8 e MCW 4×16 e se encontram na Figura 5.7 com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Desde que os possíveis símbolos wavelets y_n^i gerados por cada linha dessas matrizes MCW's durante um intervalo de sinalização, pertencem ao conjunto $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$, de acordo com a Equação 2.30, então, a princípio seria esperado 25 possíveis combinações (pares) de símbolos wavelets gerados pelas linhas das matrizes MCW 2×8 e 4×16 em dois intervalos de sinalização consecutivos. Note entretanto a partir da Figura 5.7, que isto não ocorre. Na verdade, as linhas de cada MCW considerada geram 9 pares de símbolos wavelets diferentes a cada dois intervalos de sinalização consecutivos do codificador.

De posse do número total de possíveis combinações (pares) de símbolos wavelets, pode-se escolher o código de Hamming apropriado para a etapa de mapeamento do sistema. No caso aqui considerado, existem 9 pares de símbolos wavelets que podem ser gerados pelas linhas das matrizes MCW. O menor código de Hamming com um número suficiente de palavras-código para possibilitar o mapeamento dos pares de símbolos wavelets é o código de Hamming (7,4). Neste ponto pode-se determinar a taxa de codificação do sistema proposto. Desde que os pares de símbolos wavelets são mapeados em palavras-código com comprimento $n = 7$, então de acordo com a seção 5.3, o sistema proposto possui uma taxa de codificação igual a $R = 2/7$. Dessa forma, pode-se concluir que os sistemas com codificações wavelet e Hamming com diversidade

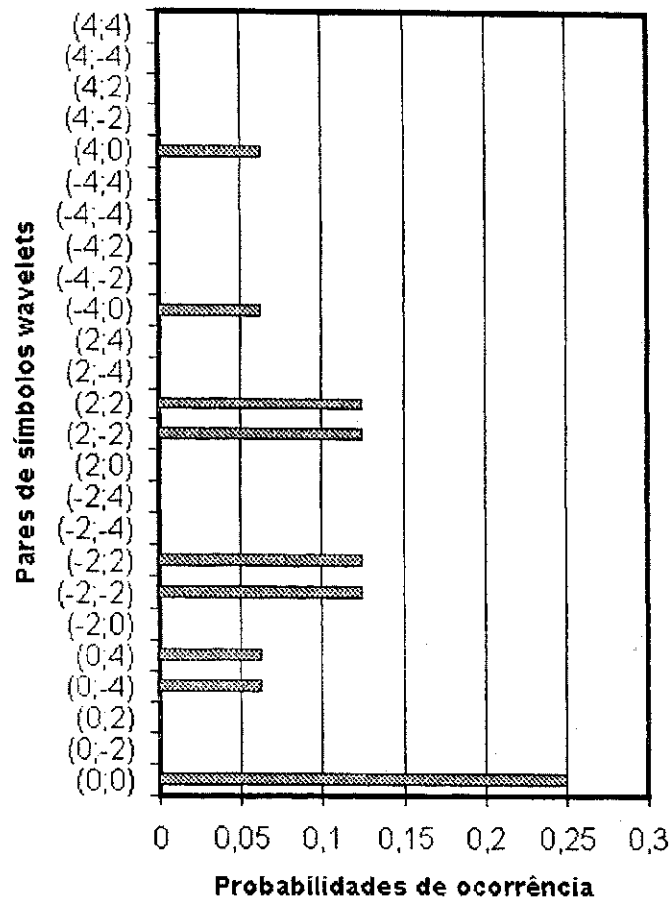


Figura 5.7: Pares de símbolos wavelets gerados em intervalos de sinalização consecutivos pelas linhas das matrizes MCW 2×8 e 4×16 .

e sem diversidade possuem praticamente a mesma eficiência espectral do sistema com codificação convolucional.

O código de Hamming (7,4) possui 16 palavras-código e portanto algumas delas não foram utilizadas. Na Tabela 5.1 apresenta-se o código de Hamming expurgado que foi utilizado na codificação dos pares de símbolos wavelets, assim como o respectivo mapeamento realizado nessa etapa de codificação.

Como foi dito na seção 5.3, o algoritmo de Viterbi se baseia na treliça mínima do código utilizado, para gerar uma estimativa \hat{c} para a palavra-código de Hamming transmitida. A treliça mínima para o código ilustrado na Tabela 5.1 foi construída através do algoritmo apresentado na seção B.3.2 e está ilustrada na Figura 5.8.

A Figura 5.9 ilustra as curvas de desempenho do sistema com codificação convo-

Tabela 5.1: Mapeamento entre as palavras do código de Hamming (7,4) expurgado e os pares de símbolos gerados pelas linhas das matrizes MCW 2×8 e MCW 4×16 .

Pares de símbolos (y_n^i, y_{n+1}^i)	Palavras de Hamming do código (7,4) expurgado
(0;0)	0101010
(0;-4)	0000000
(0;4)	0001111
(-2;-2)	0110011
(-2;2)	0111100
(2;-2)	1010101
(2;2)	1011010
(-4;0)	1100110
(4;0)	1101001

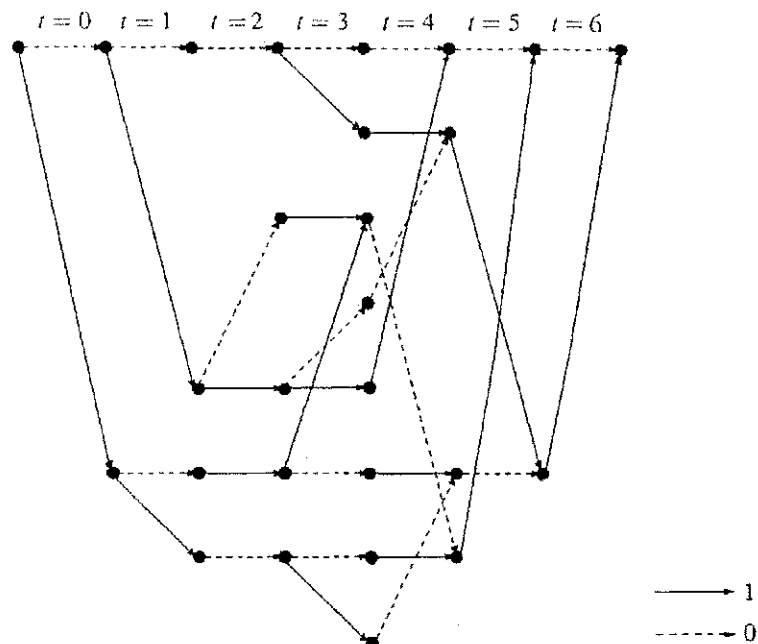


Figura 5.8: Treliça mínima do código de Hamming utilizado nas simulações.

lucional e dos sistemas com codificações wavelet e Hamming com diversidade e sem diversidade, simulados com a MCW de dimensão 2×8 . A partir dessas curvas pode-se observar que o sistema com codificações wavelet e Hamming sem diversidade espacial simulado com a MCW 2×8 apresenta praticamente o mesmo desempenho do sistema com codificação convolucional, em especial para valores de SNR's superiores a 10 dB. Também pode ser verificado a partir das curvas que a introdução do esquema de diversidade no sistema com codificações wavelet e Hamming proporciona um ganho de desempenho bastante significativo. Em particular, para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-2} e 10^{-3} , observa-se que o sistema proposto, que combina as codificações wavelet e Hamming a um esquema de diversidade espaço-temporal, consegue ganhos de desempenho de aproximadamente 3.5 dB e 5.5 dB, respectivamente, em relação ao desempenho do sistema com codificação convolucional.

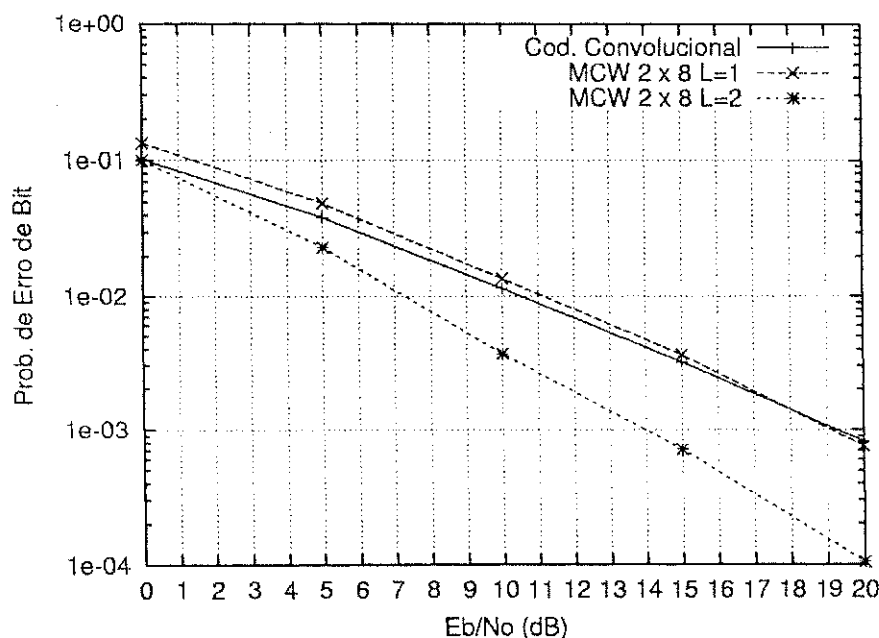


Figura 5.9: Desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 2×8 sobre um canal com Doppler $f_D = 100$ Hz.

Na Figura 5.10 apresenta-se as curvas de desempenho do sistema com codificação convolucional e dos sistemas com codificações wavelet e Hamming com diversidade e sem diversidade, simulados com a MCW de dimensão 4×16 . Pode-se observar a partir dessas curvas que o desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming

sem diversidade supera o desempenho do sistema com codificação convolucional para valores de SNR's maiores que 3 dB. Em particular, para valores de probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-2} e 10^{-3} , verifica-se que o sistema com codificações wavelet e Hamming sem diversidade apresenta ganhos de desempenho de 2.5 dB e 5.5 dB, respectivamente, em relação ao desempenho do sistema com codificação convolucional. Para o sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade espaço-temporal, os ganhos de desempenho conseguidos são ainda maiores. Mais especificamente, verifica-se que para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-3} , o sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade consegue ganhos de desempenho de aproximadamente 4 dB e 9.5 dB em relação, respectivamente, ao sistema com codificações wavelet e Hamming sem diversidade e ao sistema com codificação convolucional.

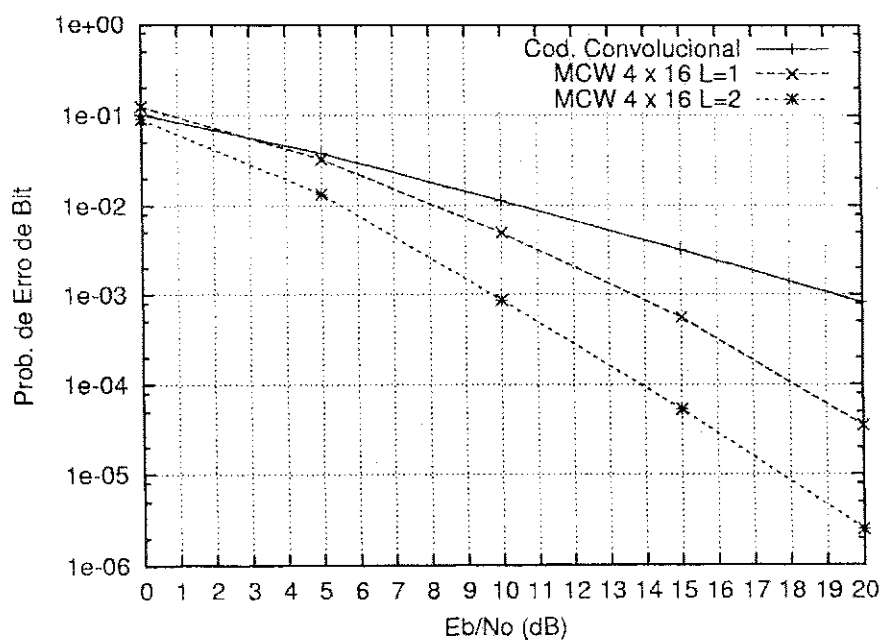


Figura 5.10: Desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming e diversidade espaço-temporal, simulado com a MCW 4×16 sobre um canal com Doppler $f_D = 100$ Hz.

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 5.9 e 5.10 para os sistemas com codificações wavelet e Hamming, verifica-se mais uma vez que quanto maior for a dimensão da MCW utilizada na simulação, maior será o ganho de desempenho conseguido pelo sistema.

5.5 Conclusão

Neste Capítulo foram realizadas algumas modificações no sistema com codificação wavelet e diversidade espaço-temporal a fim de melhorar o seu desempenho em canais com memória. O novo sistema, que combina a codificação wavelet com códigos de Hamming e diversidade, apresenta uma eficiência espectral inferior a eficiência do sistema com codificação wavelet e diversidade, entretanto, os ganhos de desempenho obtidos com esse novo sistema justificam essa diminuição na eficiência espectral.

Além disso, pôde-se observar que o desempenho do sistema com codificações wavelet e Hamming também está diretamente relacionado ao comprimento das palavras-código wavelets utilizadas nas simulações. Esta característica dos sistemas com codificação wavelet é muito importante, visto que ela deixa margem para se conseguir ganhos de desempenho ainda maiores a custo de um aumento relativamente pequeno na complexidade computacional desses sistemas.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi avaliado o desempenho de alguns esquemas com codificação wavelet utilizados para transmissão de informação em canais de comunicação móvel.

Inicialmente, apresentou-se uma caracterização do ambiente onde ocorre a transmissão, definindo-se as perturbações que o meio provoca nos sinais transmitidos. Em seguida, as técnicas de codificação e decodificação com matrizes de coeficientes wavelets foram apresentadas. A técnica de codificação com wavelets foi combinada a esquemas de transmissão com diversidade e sem diversidade, formando assim, os primeiros sistemas apresentados neste trabalho a terem seus desempenhos avaliados. Os desempenhos desses sistemas, obtidos em termos da probabilidade de erro de bit, foram analisados em canais caracterizados apenas pelo ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) e em canais com desvanecimento do tipo Rayleigh não-seletivo em frequência.

Através de simulações computacionais e de desenvolvimentos analíticos, verificou-se inicialmente que, em canais AWGN, sistemas com codificação wavelet e modulação PAM/ASK apresentam o mesmo desempenho que sistemas com modulação antipodal sem codificação. Este resultado já era esperado, visto que o principal ganho de desempenho conseguido com a codificação wavelet é devido ao espalhamento dos bits de informação ao longo dos símbolos wavelets codificados, ou seja, à diversidade temporal intrínseca da codificação wavelet, o que não tem qualquer efeito sobre o ruído aditivo branco que caracteriza este canal.

Entretanto, foi verificado através de resultados obtidos utilizando simulação computacional, que em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh com Doppler infinito, tanto o sistema com codificação wavelet sem diversidade quanto o sistema com diversidade apresentaram bons resultados, sendo que os melhores resultados foram obtidos

pelo sistema com codificação wavelet e diversidade.

O ganho de desempenho conseguido com este esquema de transmissão se deve principalmente a dois fatores. O primeiro deles e também o mais importante é o aumento de diversidade, sobretudo de diversidade espacial, obtido com este esquema de transmissão. O segundo fator é a redução do número de sinais (pontos) na constelação necessários para modular os símbolos wavelets codificados. Essa redução permite aumentar a distância euclidiana média entre os pontos da constelação sem alterar a energia média da mesma.

O desempenho do sistema com codificação wavelet e diversidade também foi avaliado em canais com desvanecimento Rayleigh com Doppler finito, constatando-se uma queda de desempenho neste caso. Para aumentar a robustez desse sistema em canais com Doppler finito, algumas modificações foram realizadas. Essas modificações consistiram basicamente em incluir uma codificação de Hamming após a codificação wavelet, assim como, em substituir a modulação APK por uma modulação BPSK. O ganho de robustez conseguido com a codificação de Hamming, teve como custo a diminuição da eficiência espectral do sistema, entretanto, os bons resultados obtidos com o novo sistema justificaram esse custo.

Fazendo uma análise geral dos resultados apresentados neste trabalho conclui-se que as novas técnicas aqui propostas, são promissoras em vista da ortogonalidade inerente entre as palavras-código wavelets e do espalhamento dos bits de informação ao longo dos símbolos wavelets codificados.

Embora este texto não tenha dado ênfase, uma parte significativa do tempo despendido neste trabalho foi consumida no desenvolvimento das simulações dos sistemas. Todas as simulações foram desenvolvidas em linguagem C para o ambiente LINUX. Além disso, houve uma preocupação constante de se utilizar uma quantidade de dados suficiente para se obter curvas precisas de desempenho. Estritamente falando, para avaliar o desempenho dos sistemas nos canais com Doppler infinito (canais descorrelacionados), foram realizadas simulações com

$$N_{\text{Total}} = 100 * \frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \quad (6.1)$$

transmissões.

Já para avaliar o desempenho dos sistemas nos canais com Doppler finito (canais correlacionados), o número total de bits transmitidos, utilizado para fazer o levanta-

mento de cada curva de desempenho, obedeceu a relação

$$N_{\text{Total}} = L * N_{\text{Bloco}} \quad (6.2)$$

em que

$$L = 10 * \left(\frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \right)^{1/2} \quad (6.3)$$

é o número de realizações de canais estatisticamente independentes e

$$N_{\text{Bloco}} = 100 * \left(\frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

é o número de bits transmitidos para cada realização de canal.

Além disso, em todas as simulações realizadas neste trabalho foi admitido que o receptor sempre tinha o conhecimento perfeito do estado do canal. O objetivo aqui foi o de avaliar o impacto da correlação da resposta ao impulso do canal sobre o desempenho dos sistemas propostos. Em trabalhos futuros pode-se combinar os esquemas aqui discutidos com técnicas de estimação de canal.

6.1 Perspectivas para trabalhos futuros

Como continuação das atividades de pesquisa realizadas podem ser citadas as seguintes sugestões:

- Integrar os esquemas discutidos neste trabalho com técnicas de estimação de canal de forma a avaliar o desempenho desses esquemas na presença de erros de estimação;
- Avaliar o desempenho da codificação wavelet com outras famílias de matrizes e comparar esse desempenho com o obtido pela utilização de matrizes wavelets reais planas;
- Avaliar o desempenho da codificação wavelet com taxas de codificação inferiores a 1 bit/símbolo, através da variação do nível de sobreposição das linhas da MCW na matriz de codificação;
- Analisar o desempenho dos esquemas aqui discutidos com outros modelos de canais de comunicação, como modelos com desvanecimento seletivo em frequência,

inclusão de interferência intersimbólica, com distribuições de desvanecimento diferentes da Rayleigh, entre outros;

- Avaliar o desempenho da codificação wavelet integrada a outros esquemas de transmissão em diversidade, como esquemas de diversidade temporal com entrelaçamento;
- Encontrar outras configurações de constelações mais eficientes que a constelação APK, utilizada na modulação dos símbolos wavelets codificados.

Apêndice A

Matrizes e Sistemas Wavelets

A matriz wavelet é uma generalização das matrizes ortogonais quadradas ou matrizes unitárias para uma grande classe de matrizes retangulares. Uma matriz wavelet é a representação matricial dos coeficientes de filtros associados às funções de escala e wavelets de um dado sistema wavelet. Portanto, cada matriz wavelet contém a informação necessária para definir um sistema wavelet associado. Várias propriedades analíticas dos sistemas wavelets dependem das propriedades algébricas das matrizes wavelets. Desde que os coeficientes associados à função de escala, formam um filtro passa-baixas e os coeficientes associados às funções wavelets formam filtros passa-faixa, tem-se que as matrizes wavelets podem ser consideradas como bancos de filtros digitais com multi-taxas [38].

Os primeiros sistemas wavelets foram introduzidos por Alfred Haar, em 1910. Os sistemas wavelets de Haar foram generalizados para dimensões e ordens maiores, a partir dos quais as matrizes wavelets de Haar foram definidas. Há um mapeamento das matrizes wavelets nas matrizes de Haar de mesma ordem e assim, a classificação das matrizes wavelets pode ser reduzida a classificação de sua matriz de Haar associada. Várias são as matrizes wavelets usadas na matemática aplicada e no processamento de sinais. Como exemplo, pode-se citar: as matrizes de transformada de Fourier discreta, as matrizes de transformada do cosseno discreta, as matrizes de Walsh e Hadamard, matrizes de Rademacher, e matrizes de Chebyshev [38]. Todas estas matrizes são unitárias (ortogonais se forem reais). A noção das matrizes de Haar oferece um ponto de vista unificado das diversas aplicações das matrizes citadas.

O restante deste apêndice é organizado como segue: Na Seção A.1 será apresentada a definição de matrizes wavelets, seus fundamentos, propriedades elementares e alguns

exemplos. Na Seção A.2, as matrizes wavelets são caracterizadas a partir de suas respectivas matrizes de Haar. Na Seção A.3 define-se a expansão de funções discretas em séries finitas de coeficientes wavelets. Uma importante propriedade apresentada nessa seção estabelece que toda a energia de uma função discreta, expandida em coeficientes wavelets, fica concentrada nos próprios coeficientes da série finita. Na Seção A.4 as funções de escala e wavelets serão definidas a partir dos coeficientes das matrizes wavelets. Na Seção A.5, os sistemas wavelets serão definidos a partir de suas matrizes wavelets correspondentes. Finalmente, na Seção A.6 são apresentadas algumas conclusões.

A.1 As Matrizes Wavelets

Seja \mathbb{F} um corpo do conjunto \mathbb{C} dos números complexos. O corpo \mathbb{F} pode ser definido no conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, \mathbb{R} dos números reais, no próprio conjunto dos números complexos ou em algum conjunto algébrico. Considere uma matriz $\mathbf{A} = (a_k^s)$, com $m \geq 2$ linhas (vetores) de comprimento possivelmente infinito, dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cdots & a_{-1}^0 & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ \cdots & a_{-1}^1 & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{-1}^{m-1} & a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

em que m é definido como a *ordem* da matriz e cada elemento $a_k^s \in \mathbb{F}$ e $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. São definidas submatrizes \mathbf{A}_l de \mathbf{A} de dimensão $m \times m$ da forma

$$\mathbf{A}_l = (a_{l+m+r}^s), \quad r = 0, \dots, m-1, \quad s = 0, \dots, m-1 \quad (\text{A.2})$$

para $l \in \mathbb{Z}$. Assim, a matriz \mathbf{A} pode ser expressa em termos de blocos de matrizes na forma

$$\mathbf{A} = (\dots, \mathbf{A}_{-1}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots), \quad (\text{A.3})$$

em que, por exemplo,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{m-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Da teoria de variáveis complexas, a partir da matriz \mathbf{A} , pode ser construída uma série de potências

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_l z^l, \quad (\text{A.5})$$

denominada de série de Laurent da matriz [38]. $\mathbf{A}(z)$ também pode ser escrita como uma matriz $m \times m$ tendo como elementos os coeficientes da série de Laurent

$$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} \sum_k a_{mk}^0 z^k & \dots & \sum_k a_{mk+m-1}^0 z^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{mk+r}^s z^k & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{mk}^{m-1} z^k & \dots & \sum_k a_{mk+m-1}^{m-1} z^k \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

sendo também denotada de matriz de Laurent de \mathbf{A} . Ambas as representações A.5 e A.6 serão denominadas de representações de Laurent da matriz \mathbf{A} .

Supondo que há um número finito de matrizes não-nulas na Equação A.5, tem-se que

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=N_1}^{N_2} \mathbf{A}_l z^l, \quad (\text{A.7})$$

considerando que \mathbf{A}_{N_1} e \mathbf{A}_{N_2} são matrizes não-nulas. Seja $g = N_2 - N_1 + 1$ o número de termos não nulos da série representada pela Equação A.7, denominado de *gênero* da matriz \mathbf{A} .

Finalmente, é definida a adjunta $\tilde{\mathbf{A}}(z)$ da matriz de Laurent $\mathbf{A}(z)$ por

$$\tilde{\mathbf{A}}(z) = \mathbf{A}^*(z^{-l}) = \sum_l \mathbf{A}_l^* z^{-l}, \quad (\text{A.8})$$

em que $\mathbf{A}_l^* = \overline{\mathbf{A}}^t$ é a transposta conjugada da matriz \mathbf{A}_l .

Supondo que \mathbf{A} tem m linhas e possivelmente, um número infinito de colunas, a matriz \mathbf{A} é denominada de matriz wavelet de ordem m se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$\mathbf{A}(z) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(z) = mI, \quad (\text{A.9})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (\text{A.10})$$

em que $\delta_{s,0}$ é o delta de Kronecker.

Na maioria das vezes, o número de colunas da matriz \mathbf{A} é finito. Nesses casos, a matriz wavelet \mathbf{A} terá uma dimensão finita $m \times mg$, em que g , como dito antes, é o gênero da matriz \mathbf{A} . O gênero pode ser visto como o número de blocos de matrizes $m \times m$ que formam a matriz \mathbf{A} .

O conjunto de todas as matrizes wavelets de ordem m e gênero g será representado por $WM(m, g; \mathbb{F})$. Geralmente \mathbb{F} forma um corpo nos números reais ou nos complexos.

A Equação A.9 tem uma representação equivalente em termos dos coeficientes da matriz wavelet \mathbf{A} , dada por

$$\sum_k a_{k+ml}^{s'} \bar{a}_{k+ml}^s = m \delta_{s',s} \delta_{l,l}. \quad (\text{A.11})$$

As relações A.9 e A.10 ou equivalentemente A.11 e A.10 são denominadas, respectivamente, de condições quadrática e linear das matrizes wavelets. A condição quadrática assegura que as linhas de uma matriz wavelet $\mathbf{A} = (a_k^s) = (a_0^s, \dots, a_{mg-1}^s)$ têm comprimento igual a \sqrt{m} e que são ortogonais mesmo quando deslocadas por um múltiplo arbitrário de m . O vetor \mathbf{a}^0 é denominado de vetor de escala e cada um dos vetores \mathbf{a}^s , $1 < s < m$, é denominado de vetor wavelet. A condição de linearidade ou de escalonamento, dada pela Equação A.10, estabelece que a soma dos elementos do vetor de escala é igual a ordem m da matriz wavelet, enquanto que, a soma dos elementos de cada vetor wavelet é igual a zero. As matrizes wavelets de ordem m podem ser vistas como um banco de filtros digitais com m -bandas, em que a primeira linha equivale a um filtro passa-baixas e as $m-1$ linhas restantes equivalem a filtros passa-faixa. Dessa forma, para uma dada matriz wavelet, os elementos do vetor de escala e dos vetores wavelets são também chamados de coeficientes de filtro passa-baixas e coeficientes de filtros passa-faixa, respectivamente.

Dada uma matriz wavelet com gênero finito, $a_k^s \neq 0$, para $0 \leq k < mg$, suas linhas serão representadas por

$$a_k := a_k^0 \quad b_k^s := a_k^s, \quad (\text{A.12})$$

em que $0 < s < m$ e $0 \leq k < mg$. Dessa forma, os vetores de escala e wavelets serão denotados, respectivamente por:

$$\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{m-1}) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{b}^s = (b_0^s, \dots, b_{m-1}^s) \quad (\text{A.14})$$

A seguir serão apresentados alguns exemplos simples de matrizes wavelets [38].

Exemplo 4 Matrizes de Haar de ordem 2: *As matrizes abaixo, denominadas de matrizes de Haar, são as únicas matrizes wavelets quadradas de ordem 2 com coeficientes reais*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

De forma geral, uma matriz de Haar com elementos complexos é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Exemplo 5 Matriz Wavelet de Daubechies de ordem 2 e gênero 2: *A matriz D_2*

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & -3 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

é uma das matrizes de ordem 2 descobertas por Daubechies [38].

Exemplo 6 Matriz Wavelet de ordem 2 e gênero 2: *Seja $a_k(\theta)$, as componentes de uma família de vetores de escala*

$$a_0(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \cos \left[\theta + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{A.18})$$

$$a_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \cos \left[\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{A.19})$$

$$a_2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2} \cos \left[\theta + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{A.20})$$

$$a_3(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2} \cos \left[\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{A.21})$$

em que $0 \leq \theta < 2\pi$ e o correspondente vetor wavelet associado $b_k(\theta) = (-1)^{k+1} a_{3-k}(\theta)$.

Então a matriz

$$A := \begin{pmatrix} a_0(\theta) & a_1(\theta) & a_2(\theta) & a_3(\theta) \\ b_0(\theta) & b_1(\theta) & b_2(\theta) & b_3(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

é uma família de matrizes wavelets de ordem 2 e gênero 2 definida por um único parâmetro θ , segundo as relações a_k e b_k . A matriz D_2 é um caso especial deste exemplo para $\theta = \pi/6$.

A.2 Matrizes Wavelets de Haar

O conjunto das matrizes wavelets com gênero igual a 1 é de especial importância na teoria das wavelets. Este conjunto é denotado por

$$H(m; \mathbb{F}) = MW(m, 1; \mathbb{F}). \quad (\text{A.23})$$

Os elementos de $H(m; \mathbb{F})$ são denominados de matrizes wavelets de Haar de ordem m . A importância das matrizes de Haar na teoria das wavelets se deve ao fato que essas matrizes são capazes de caracterizar todas as demais matrizes wavelets. Nas subseções seguintes são discutidas algumas propriedades das matrizes de Haar e algumas operações que possibilitam a construção de matrizes de maior dimensão a partir de matrizes de menor dimensão.

A.2.1 A Matriz de Haar Canônica

Seja $U(m)$ o conjunto unitário de ordem m , formado por todas as matrizes complexas U de dimensão $m \times m$, em que, $U^*U = I$ [38].

Teorema 1 *Uma matriz complexa H $m \times m$ é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix} H, \quad (\text{A.24})$$

em que $U \in U(m-1)$ é uma matriz unitária e H é a matriz de Haar canônica de ordem m , definida por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -(m-1)\sqrt{\frac{1}{m-1}} & \sqrt{\frac{1}{m-1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sqrt{\frac{1}{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s\sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \cdots & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} & \sqrt{\frac{m}{2}} & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

em que $s = (m - k)$ e $k = 0, 1, \dots, m - 1$ são os números das linhas da matriz.

Lema 7 *Seja $H = (h_r^s)$ uma matriz de Haar. Então,*

$$h_r := h_r^0 = 1, \quad 0 \leq r \leq m. \quad (\text{A.26})$$

Corolário 8 *Sejam \mathbf{H}' , $\mathbf{H}'' \in H(m; \mathbb{C})$ duas matrizes de Haar. Então, existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in U(m-1)$ de modo que*

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{pmatrix} \mathbf{H}'' . \quad (\text{A.27})$$

Corolário 9 *Seja \mathbf{A} uma matriz wavelet real, ou seja, $a_k^s \in \mathbb{R}$, então \mathbf{A} é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{H}, \quad (\text{A.28})$$

em que $\mathbf{O} \in O(m-1)$ é uma matriz ortogonal e \mathbf{H} é a matriz de Haar canônica de ordem m .

A.2.2 Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet

Considere \mathbf{A} uma matriz wavelet e seja $\mathbf{A}(z)$ sua matriz de Laurent. Defina a matriz de Haar característica $\chi(\mathbf{A})$ da matriz wavelet \mathbf{A} por:

$$\chi(\mathbf{A}) := \mathbf{A}(1). \quad (\text{A.29})$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre as matrizes wavelets e as matrizes de Haar.

Teorema 2 *Se $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $\chi(\mathbf{A}) \in H(m; \mathbb{F})$, ou seja, χ é um mapeamento bem definido de matrizes wavelets de ordem m em matrizes de Haar de ordem m*

$$MW(m, g; \mathbb{F}) \xrightarrow{\chi} H(m; \mathbb{F}). \quad (\text{A.30})$$

Prova. Os elementos da matriz $\mathbf{H} = \chi(\mathbf{A})$ são da forma

$$h_s^r = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r. \quad (\text{A.31})$$

A matriz \mathbf{H} deve satisfazer as condições A.9 e A.10 que definem uma matriz wavelet. Pela condição da linearidade e usando A.31, é obtido

$$\sum_{s=0}^{m-1} h_s^r = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^r = m\delta_{r,0}. \quad (\text{A.32})$$

A condição quadrática para $\mathbf{H} = \chi(\mathbf{A})$ segue da condição quadrática geral, dada pela Equação A.9, calculada em $z = 1$. ■

Corolário 10 *Seja \mathbf{A} uma matriz wavelet de ordem m e $\chi(\mathbf{A})$ a matriz de Haar característica da matriz \mathbf{A} . Então, existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in U(m-1)$ de modo que*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad (\text{A.33})$$

é uma matriz wavelet cuja matriz de Haar característica $\chi(\mathbf{B})$ é a matriz de Haar canônica, e

$$\chi(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \chi(\mathbf{A}). \quad (\text{A.34})$$

A.2.3 Produto Tensorial entre Matrizes de Haar

O produto tensorial entre duas matrizes de Haar resulta em outra matriz de Haar.

Teorema 3 *Se $\mathbf{A} \in H(m'; \mathbb{F})$ e $\mathbf{B} \in H(m''; \mathbb{F})$, então*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in H(m'm''; \mathbb{F}). \quad (\text{A.35})$$

O teorema acima será ilustrado com um exemplo. Seja $m' = m'' = 2$ e

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_0^1 & b_1^1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 & a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 & a_0^0 b_1^1 & a_1^0 b_0^1 & a_1^0 b_1^1 \\ a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 & a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^1 & a_0^1 b_1^1 & a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Aplicando o produto tensorial na matriz de Haar

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

e definindo

$$\mathbf{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathbf{H} \otimes \cdots \otimes \mathbf{H}}_{n \text{ fatores}}, \quad (\text{A.39})$$

então, $\mathbf{H}^{\otimes n}$ é uma matriz de Haar de ordem 2^n e também um exemplo de uma classe especial de matrizes de Hadamard.

Para $n = 2$ é obtido

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \\ -1 \times 1 & -1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ -1 \times (-1) & -1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{H} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

A.2.4 O Operador Extensão

Através do operador extensão uma matriz wavelet de maior gênero é construída a partir de uma matriz wavelet de menor gênero, ou seja, é feito um mapeamento de uma matriz de menor gênero em uma matriz de maior gênero. De forma a simplificar a apresentação da operação de extensão, serão consideradas apenas matrizes wavelets de ordem par. Assim, defina o operador extensão para a matriz $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, como

$$E : MW(m, g) \rightarrow MW(m, 4g). \quad (\text{A.43})$$

Denotando por \mathbf{a}^i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ as linhas da matriz \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

define-se a operação extensão $m \times 4m$ de \mathbf{A} por

$$E(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^0 & -\mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 & -\mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} & \mathbf{a}^{m-2} & -\mathbf{a}^{m-1} \\ \mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} & -\mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

Teorema 4 *Se $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $E(\mathbf{A}) \in MW(m, 4g; \mathbb{F})$.*

O operador E pode ser aplicado repetidamente sobre uma matriz wavelet, obtendo-se assim, matrizes wavelets com dimensões cada vez maiores.

Corolário 11 *Seja n um inteiro positivo. Se m é par e $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{F})$, então $E^n(\mathbf{A}) \in WM(m, 4^n g; \mathbb{F})$.*

A.3 Expansão Ortonormal Discreta

Qualquer função discreta pode ser representada por uma série finita de coeficientes wavelets.

Teorema 5 *Seja $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ uma função arbitrária definida sobre os inteiros, e seja \mathbf{A} uma matriz wavelet de posto m e gênero g . Então f tem uma única expansão em termos da matriz \mathbf{A} , expressa por*

$$f(n) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^\tau \bar{a}_{n+mk}^\tau \quad (\text{A.46})$$

em que

$$c_k^\tau = \frac{1}{m} \sum_n f(n) \bar{a}_{n+mk}^\tau \quad (\text{A.47})$$

A expansão em matriz wavelet é localmente finita; ou seja, para um determinado n , somente uma quantidade finita de termos na série são diferentes de zero.

A expansão ortonormal discreta é um dos principais elos de ligação entre a teoria matemática das wavelets e suas aplicações práticas.

Teorema de Parseval

O teorema de Parseval afirma que a energia de uma função discreta expandida em uma série de coeficientes wavelets fica totalmente concentrada nos coeficientes da série.

Teorema 6 *Se*

$$f(n) = \sum_{0 \leq r < m} \sum_l c_l^r a_{ml+n}^r, \quad (\text{A.48})$$

então

$$\|f\|^2 = m \left\{ \sum_{0 \leq r < m} \sum_l |c_l^r|^2 \right\}. \quad (\text{A.49})$$

Desde que a expansão em matriz wavelet é localmente finita, a função pode ser eficientemente representada por um número finito de coeficientes wavelets.

A.4 Funções Wavelets e de Escala

Para qualquer matriz wavelet $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbf{C})$, existe uma *função de escala* $\varphi(x)$ e $m - 1$ *funções wavelets* $\psi^1(x), \dots, \psi^{m-1}(x)$ definidas no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, em que \mathbb{R} é o conjunto dos números reais [38]. Uma função $f(x)$ definida em \mathbb{R} pertence ao espaço $L^2(\mathbb{R})$ se $|f(x)|^2$ for integrável, ou seja,

$$\int_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (\text{A.50})$$

As funções de escala e wavelets satisfazem relações específicas, definidas em termos da matriz wavelet \mathbf{A} , como segue:

Considere a equação

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k) \quad (\text{A.51})$$

em que a_k^0 é o vetor de escala de uma matriz wavelet $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbf{C})$.

Esta equação é chamada de *equação de escala* associada a matriz wavelet $\mathbf{A} = (a_k^s)$. Se $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ é uma solução dessa equação, então φ é chamada de *função de escala* associada a matriz \mathbf{A} . Da mesma forma, pode-se definir as *funções wavelets* $\{\psi^1(x), \dots, \psi^{m-1}(x)\}$ associadas a matriz \mathbf{A} e a função de escala φ pela equação

$$\psi^s(x) := \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s \varphi(mx - k) \quad (\text{A.52})$$

O teorema a seguir estabelece que cada matriz wavelet possui apenas uma função de escala com suporte compacto.

Teorema 7 *Seja $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{C})$ uma matriz wavelet. Então existe uma única função $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:*

- (a) φ satisfaz a Equação A.51;
- (b) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$;
- (c) $\text{supp } \varphi \subset [0, (g-1) \left(\frac{m}{m-1}\right) + 1]$.

Na prática, pode-se obter uma solução aproximada para a Equação A.51 como segue. Seja

$$\varphi^0 := \chi_{[0,1]} \quad (\text{A.53})$$

uma função característica, definida por

$$\chi_K = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

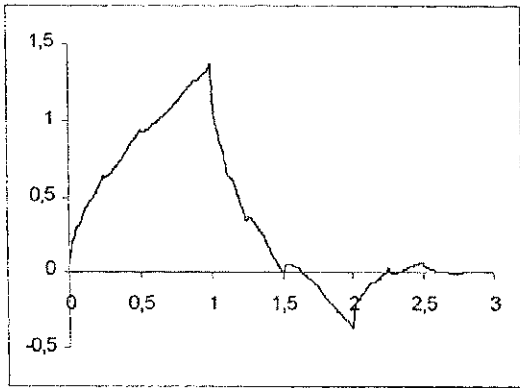
A partir da Equação A.53, pode-se obter aproximações sucessivas para a função de escala definida pela Equação A.51 através da equação recursiva:

$$\varphi^\nu(x) := \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^{\nu-1}(mx - k) \quad (\text{A.55})$$

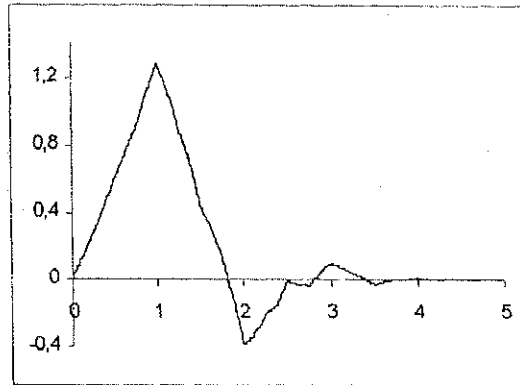
A seqüência $\varphi^\nu(x)$ converge para a solução $\varphi(x)$ quando $\nu \rightarrow \infty$ [38]. Uma vez obtida a função de escala aproximada, as funções wavelets podem ser calculadas pela Equação A.52. Dessa forma, pode-se obter, para qualquer matriz wavelet \mathbf{A} , as correspondentes funções wavelets e de escala. A Figura A.1 apresenta as funções de escala para algumas matrizes wavelets de Daubechies [34].

A.5 Sistemas Wavelet

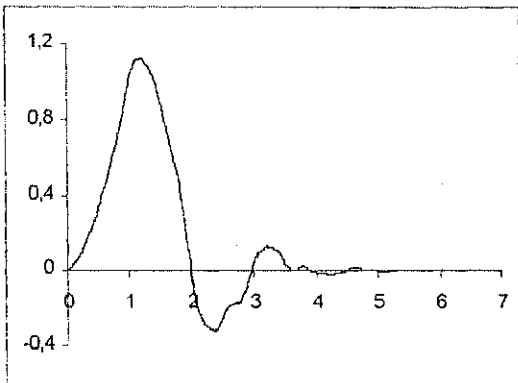
Considere uma matriz wavelet \mathbf{A} de posto m , e seja φ e ψ^s , $s = 1, \dots, m-1$, as respectivas funções de escala e wavelets associadas a essa matriz. Para $k, j \in \mathbb{Z}$, defina-se



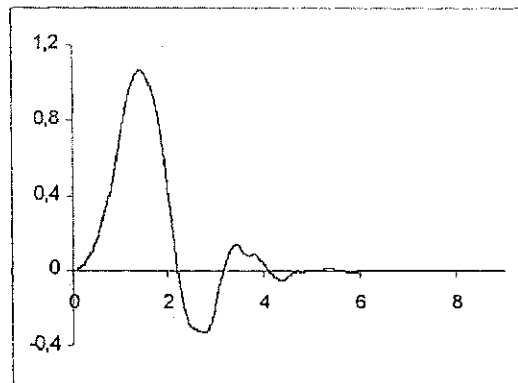
(a) MCW com $m=2$ e $g=2$



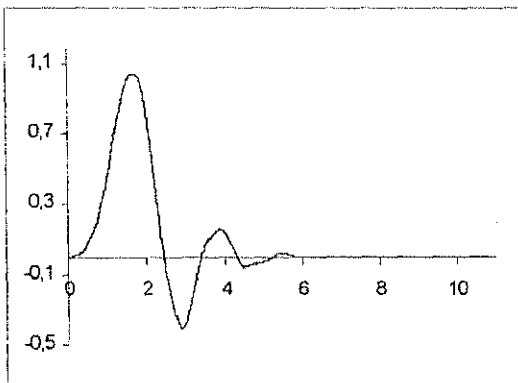
(b) MCW com $m=2$ e $g=3$



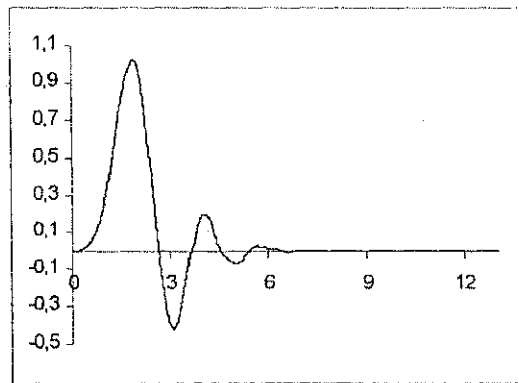
(c) MCW com $m=2$ e $g=4$



(d) MCW com $m=2$ e $g=5$



(e) MCW com $m=2$ e $g=6$



(f) MCW com $m=2$ e $g=7$

Figura A.1: Funções de escala para algumas matrizes wavelets de Daubechies.

$$\varphi_{jk}(x) := m^{j/2}\varphi(m^jx - k), \quad (\text{A.56})$$

$$\psi_{jk}^s(x) := m^{j/2}\psi^s(m^jx - k), \quad s = 1, \dots, m-1. \quad (\text{A.57})$$

As Equações A.56 e A.57 representam uma família de funções geradas a partir de translações e escalonamentos das funções wavelets e de escala fundamentais. O *sistema wavelet* $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$, associado a matriz wavelet \mathbf{A} , pode então ser definido como o conjunto de funções

$$\mathbb{W}[\mathbf{A}] := \{\varphi_k(x), k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\psi_{jk}^s(x), j, k \in \mathbf{Z}, j \geq 0, s = 1, \dots, m-1\}. \quad (\text{A.58})$$

em que,

$$\varphi_k(x) := \varphi_{0k}(x) \quad (\text{A.59})$$

Teorema 8 *Considere a matriz $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbf{C})$, o sistema wavelet $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ associado a \mathbf{A} , e uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$. Existe uma expansão convergente em média quadrática em L^2 da forma*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}^s \psi_{jk}^s(x), \quad (\text{A.60})$$

sendo os coeficientes expressos por

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_k(x) dx, \quad (\text{A.61})$$

$$d_{jk}^s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{jk}^s(x) dx. \quad (\text{A.62})$$

Para a maioria das matrizes wavelets, o sistema wavelet $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ é um sistema ortonormal completo e conseqüentemente uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Entretanto, para algumas matrizes wavelets, o sistema $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ não forma uma base ortonormal, embora o Teorema 8 continue válido [38]. Nestes casos, o sistema $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ forma um *suporte compacto* para $L^2(\mathbb{R})$. A definição de suporte compacto é uma generalização da definição de base. No suporte compacto, os elementos não precisam ser linearmente independentes para que uma expansão, como definida no Teorema 8, permaneça válida. A definição formal de suporte compacto será apresentada a seguir.

Seja \mathbb{H} um espaço de Hilbert e $\{h_\alpha\}$ um conjunto definido em \mathbb{H} . Então $\{h_\alpha\}$ forma um suporte compacto de \mathbb{H} se,

$$f = c \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \langle h_\alpha, f \rangle h_\alpha \quad (\text{A.63})$$

para cada $f \in \mathbb{H}$ e algum $c \in \mathbb{R}^+$.

Observa-se então que o suporte compacto tem a *propriedade da reconstrução perfeita*; ou seja, cada $f \in \mathbb{H}$ pode ser reconstruído a partir de suas projeções $\langle h_\alpha, f \rangle$ sobre o suporte compacto de acordo com a Equação A.63. Claramente uma base ortonormal para \mathbb{H} tem esta propriedade (com $c = 1$). Para a maioria das aplicações, a propriedade da reconstrução perfeita é mais importante que a ortonormalidade.

A.6 Conclusão

Neste apêndice, as matrizes wavelets foram definidas e algumas de suas propriedades foram apresentadas. Um enfoque especial foi dado às matrizes wavelets de Haar, visto que a codificação wavelet discutida neste trabalho utiliza uma classe de matrizes construídas a partir das matrizes de Haar. As duas ferramentas matemáticas utilizadas neste trabalho, para construção das matrizes wavelets empregadas na codificação, também foram definidas, sendo elas: a operação de extensão e o produto tensorial de matrizes.

Além disso, também foi discutido neste apêndice, a relação unívoca entre cada matriz wavelet e o seu respectivo sistema wavelet associado. Essa relação fica evidente na medida que cada sistema wavelet é construído a partir dos coeficientes de sua respectiva matriz wavelet.

Apêndice B

Códigos de Bloco Lineares

Em 1948 Shannon publicou um artigo intitulado *A Mathematical Theory of Communication* no qual definiu as bases dos atuais sistemas de comunicações digitais. As funções de entropia, discriminação e informação mútua definidas nesse artigo, bem como os importantes conceitos de capacidade de canal e taxa de distorção de uma fonte levam a definição de dois tipos distintos de códigos.

- **Códigos de fonte:** Os códigos de fonte são utilizados para remover as redundâncias que ocorrem naturalmente em qualquer fonte de informação, e assim possibilitam representar a informação de forma mais compacta.
- **Códigos de canal:** Os códigos de canal são utilizados para aumentar a imunidade das informações ao ruído. Isto é realizado através da introdução de uma redundância controlada nos dados que serão transmitidos através do canal, fornecendo ao receptor a capacidade de detectar e possivelmente corrigir os erros causados pelo ruído do canal de comunicação.

As próximas seções desse apêndice abordarão uma classe particular de códigos de canal, denominados de códigos de bloco lineares. O restante deste apêndice é organizado como segue:

Na Seção B.1, serão discutidas algumas propriedades dos códigos de bloco. O conceito de distância mínima será desenvolvido e utilizado para caracterizar a capacidade de um determinado código de detectar e corrigir erros. Na Seção B.2, os códigos de bloco lineares serão definidos. Um enfoque especial será dado aos códigos de Hamming, visto que eles foram utilizados em um dos esquemas de codificação apresentados no final desse trabalho. Na Seção B.3 será definida uma representação em treliça para

os códigos de bloco lineares. Essa representação torna possível a decodificação dessa classe de códigos através do algoritmo de Viterbi de máxima-verossimilhança. Por fim, na Seção B.4 serão apresentadas algumas conclusões.

B.1 Códigos de Bloco

Um código de bloco \mathbf{C} consiste de um conjunto de M palavras-código $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{M-1}\}$. Cada palavra-código é representada por $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$. Se as coordenadas em \mathbf{c} assumem valores em $\text{GF}(q)$ (um corpo finito com q elementos), então o código \mathbf{C} é denominado de código q -ário.

O processo de codificação nessa classe de códigos consiste em segmentar a seqüência de dados em blocos e mapear esses blocos nas palavras-código em \mathbf{C} . Esse mapeamento é geralmente um-a-um, de forma que o processo de codificação possa ser revertido no receptor, recuperando o bloco de dados original.

Se os símbolos na seqüência de dados assumem valores em $\text{GF}(q)$, então o conjunto de todas as possíveis k -úplas $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_{k-1})$ formam um espaço vetorial sobre $\text{GF}(q)$ contendo q^k vetores. Da mesma forma, o conjunto de todas as possíveis n -úplas sobre $\text{GF}(q)$ forma um espaço vetorial sobre $\text{GF}(q)$ contendo q^n vetores. Sendo assim, existem blocos com n símbolos que não estão associados a qualquer bloco de dados e portanto, não são palavras-código. O código \mathbf{C} contém redundância se o número de palavras-código for menor que o número de possíveis blocos com n símbolos. A redundância r é expressa por:

$$r = n - \log_q M \quad (\text{B.1})$$

Se $M = q^k$, então r é calculado pela diferença $r = (n - k)$ entre o comprimento da palavra-código e o comprimento do bloco de dados. A redundância é também freqüentemente expressa em termos da taxa do código.

Definição 12 Taxa de um código de bloco

Seja M o número de palavras-código com comprimento n em um código \mathbf{C} . A taxa de \mathbf{C} é calculada por

$$R = \frac{\log_q M}{n} \quad (\text{B.2})$$

A taxa do código será calculada por $R = k/n$ para aqueles casos em que $M = q^k$.

Durante a transmissão, o canal produz distorções nas palavras-código. Essas distorções podem ser modeladas por um processo aditivo, conforme ilustrado na Figura B.1.

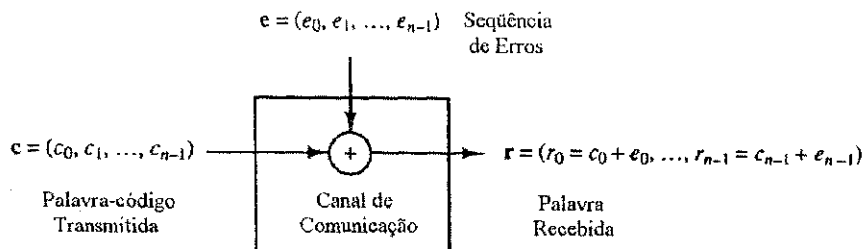


Figura B.1: Modelo em banda básica para um canal de comunicação.

Na recepção, geralmente o decodificador de canal tem como primeira tarefa a detecção de erros. Para isso, o decodificador analisa se a palavra recebida é uma palavra-código. Se a palavra recebida não for uma palavra-código, o decodificador assume que um ou mais erros ocorreram na transmissão.

Nem todos os padrões de erros podem ser detectados no decodificador. Para isso, basta que os erros na transmissão alterem a palavra-código transmitida para uma outra palavra-código válida. Dado que uma palavra-código c foi transmitida, existem $(M - 1)$ palavras-código diferentes de c que podem chegar no receptor e, portanto, existem $(M - 1)$ padrões de erros não detectáveis em qualquer código C .

O decodificador pode reagir a um erro detectado com uma das seguintes ações:

- Solicitar uma retransmissão da palavra-código;
- Sinalizar a palavra como sendo incorreta;
- Tentar corrigir os erros na palavra recebida.

A primeira estratégia listada acima é denominada **pedido de repetição automática (ARQ)**, sendo muito utilizada em sistemas de transferência de dados que prezam por uma alta confiabilidade nas informações recebidas.

A segunda opção é usualmente referenciada como *muting*. Ela é típica de aplicações que não disponibilizam de tempo suficiente para permitir a retransmissão da informação, e que consideram melhor atribuir um valor mudo a palavra recebida que tentar corrigir os erros da transmissão.

A última opção é referenciada como **correção direta de erros (FEC)**. Essa estratégia utiliza estruturas algébricas e aritméticas para determinar a palavra mais provável de ter sido enviada dentre as palavras-código válidas.

É possível que um decodificador **FEC** encontre para um determinado padrão de erros, uma palavra-código diferente daquela que foi realmente transmitida. Neste caso, é dito que o decodificador cometeu um **erro de decodificação**. Apesar do padrão de erros, que causa o erro de decodificação, poder ser detectado, não é possível detectar o próprio erro de decodificação. Usualmente, o número de padrões de erros que causam erros de decodificação é maior que o número de padrões de erros que não são detectáveis. Na verdade, se o código é escolhido cuidadosamente, os padrões de erros mais prováveis de ocorrer irão alterar as palavras-código transmitidas de tal forma que as palavras recebidas sejam consideradas não válidas.

Definição 13 Peso de uma palavra-código ou de um padrão de erros

O peso de uma palavra-código ou de um padrão de erros é o número de coordenadas diferentes de zero na palavra-código ou no padrão de erros.

O peso da palavra-código \mathbf{c} é usualmente denotado por $W(\mathbf{c})$.

Considere os blocos $\mathbf{v} = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ e $\mathbf{w} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. A “distância” $d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ entre esses dois blocos pode ser definida pela **distância de Hamming**, como segue:

Definição 14 Distância de Hamming

A distância de Hamming entre os blocos \mathbf{v} e \mathbf{w} é o número de coordenadas nas quais os dois blocos se diferem.

$$d_{\text{Hamming}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\{i | \nu_i \neq \omega_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}| \quad (\text{B.3})$$

em que $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto.

A distância de Hamming permite caracterizar as capacidades de correção e de detecção de erros dos códigos de bloco como função da **distância mínima** do código, definida como segue.

Definição 15 Distância mínima de um código de bloco

A distância mínima de um código de bloco \mathbf{C} é a menor distância de Hamming entre todos os pares distintos das palavras-código em \mathbf{C} .

Recorde que os únicos padrões de erros que não podem ser detectados são aqueles que transformam a palavra-código transmitida em uma outra palavra-código válida. Considere um código com distância mínima d_{\min} . Cada palavra transmitida desse código difere em no mínimo d_{\min} coordenadas de qualquer outra palavra do código. Sendo assim, para que um padrão de erros não possa ser detectado, devem ocorrer no mínimo d_{\min} erros nos símbolos da palavra-código transmitida.

Um código com distância mínima d_{\min} pode detectar todos os padrões de erros com pesos menores ou iguais a $(d_{\min} - 1)$.

Note porém que um determinado código pode detectar também padrões de erros com pesos $W \geq d_{\min}$. A afirmativa acima fornece simplesmente um limite sobre o peso para o qual pode-se detectar *todos* os padrões de erros.

Os sistemas **FEC** têm por meta a minimização da probabilidade de erros de decodificação. Seja $p(\mathbf{r}|\mathbf{c})$ a probabilidade do decodificador receber a palavra \mathbf{r} sabendo que a palavra-código transmitida foi \mathbf{c} . Através da identificação da palavra-código \mathbf{c}_i que maximiza $p(\mathbf{r}|\mathbf{c} = \mathbf{c}_i)$, o decodificador consegue minimizar a probabilidade de erro, provido que $p(\mathbf{c}) = \text{cte}$. Os decodificadores que seguem esse princípio são denominados de **decodificadores de máxima verossimilhança** [40].

A probabilidade condicional $p(\mathbf{r}|\mathbf{c})$ é igual a probabilidade de ocorrência do padrão de erros $\mathbf{e} = (\mathbf{r} - \mathbf{c})$ dado que \mathbf{c} foi transmitido. Se for considerado que os padrões de erro mais prováveis são aqueles que possuem pesos W mais baixos (no canal **BSC** isto se verifica facilmente), então a palavra-código \mathbf{c}_i que maximiza $p(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i)$ é a palavra-código que minimiza $d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i) = W(\mathbf{r} - \mathbf{c})$. Dessa forma, a palavra-código transmitida de máxima verossimilhança é aquela que possui a menor distância de Hamming da palavra recebida \mathbf{r} . Um decodificador que opera sobre este princípio comete um **erro de decodificação** se a palavra recebida está mais próxima de uma palavra-código incorreta do que da palavra-código correta. Pela definição, as palavras-código incorretas estão no mínimo a uma distância d_{\min} da palavra-código correta. Sendo assim, os erros de decodificação somente poderão ocorrer se os padrões de erros introduzidos pelo canal tiverem pesos maiores ou iguais a $d_{\min}/2$. Isto também pode ser dito como segue.

Um código com distância mínima d_{\min} pode corrigir todos os padrões de erros com pesos menores ou iguais a $[(d_{\min} - 1)/2]$.

$[(d_{\min} - 1)/2]$ é o limite superior sobre o peso para o qual pode-se corrigir *todos* os

padrões de erros. Algumas vezes é possível corrigir $(\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor + 1)$ erros ou mais em certos blocos.

A capacidade de correção de erros de um código de bloco C também pode ser analisada sob uma perspectiva geométrica. Considere uma esfera de raio t contendo todos os vetores, pertencentes a um espaço vetorial n -dimensional sobre $GF(q)$, que podem ser recebidos por um decodificador e que estão a uma distância de Hamming $d_{\text{Hamming}} \leq t$ de uma determinada palavra-código de C . Define-se como o volume $V_q(n, t)$ dessa esfera, denominada de **esfera de Hamming**, o número de vetores que ela contém. Esse volume pode ser calculado como segue [40],

$$V_q(n, t) = \sum_{j=0}^t \binom{n}{j} (q-1)^j \quad (\text{B.4})$$

Se um vetor recebido r cai dentro de uma esfera de Hamming, o decodificador seleciona a palavra-código c que está no centro da esfera como sendo a palavra transmitida. Se o vetor recebido cai em uma região entre as várias esferas de decodificação, o decodificador de máxima verossimilhança seleciona a palavra-código mais próxima como sendo a palavra transmitida.

Um problema importante é determinar o número máximo de palavras-código $A_q(n, d_{\min})$ com comprimento fixo n e distância mínima d_{\min} que podem ser escolhidas a partir de um espaço vetorial n -dimensional sobre $GF(q)$. Este problema também pode ser formulado em função da redundância r do código como segue: Qual é a menor redundância requerida para um código q -ário de comprimento n com capacidade de corrigir t erros? O Teorema 9 responde essa questão.

Teorema 9 *Um código q -ário de comprimento n com capacidade de corrigir t erros deve possuir uma redundância r que satisfaça*

$$r \geq \log_q V_q(n, t) \quad (\text{B.5})$$

Prova. Cada uma das M palavras-código em C está associada a uma esfera de Hamming de raio t . As esferas não se sobrepõem, e portanto o volume total das esferas associadas a C não pode exceder o número total de vetores no espaço de todas as possíveis palavras recebidas. Segue então que $M \cdot V_q(n, t) \leq q^n$ logo, $q^n/M \geq V_q(n, t)$. Isto implica que $r = n - \log_q M \geq \log_q V_q(n, t)$. ■

São poucos os códigos que satisfazem o Teorema 9 com igualdade. Tais códigos são denominados de **códigos perfeitos**.

B.2 Códigos de Bloco Lineares

Considere um código de bloco \mathbf{C} consistindo de M palavras $\{(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})\}$ com coordenadas em $\text{GF}(q)$. \mathbf{C} é um código q -ário linear se e somente se \mathbf{C} forma um sub-espço vetorial sobre $\text{GF}(q)$.

Definição 16 Dimensão de um código linear

A *dimensão* de um código linear é a dimensão do seu correspondente sub-espço vetorial.

Um código linear de comprimento n e dimensão k é geralmente referenciado como um código (n, k) . Um código (n, k) com símbolos em $\text{GF}(q)$ possui um total de q^k palavras-código de comprimento n .

Os códigos lineares possuem algumas propriedades interessantes [40], sendo elas:

1. A combinação linear de qualquer conjunto de palavras-código é uma palavra-código. Uma consequência disso é que qualquer código linear possui um vetor nulo.
2. A distância mínima de um código linear é igual ao menor peso do código.

Prova. A distância mínima do código é calculada por

$$d_{\min} = \min_{c, c' \in \mathbf{C}, c \neq c'} d(c, c') = \min_{c, c' \in \mathbf{C}, c \neq c'} W(c - c').$$

Desde que o código é linear, tem-se que $c'' = (c - c')$ é uma palavra-código e portanto

$$d_{\min} = \min_{c'' \in \mathbf{C}, c'' \neq 0} W(c'')$$

■

3. Os padrões de erros que não podem ser detectados por um código linear são independentes da palavra-código transmitida e pertencem ao conjunto das palavras-código não nulas.

Prova. Seja c uma palavra-código transmitida e c' a palavra-código recebida incorretamente. O correspondente padrão de erros $e = c - c'$ deve ser uma palavra-código pela primeira propriedade e conseqüentemente não pode ser detectado. ■

B.2.1 A Matriz Geradora e a Matriz de Paridade

Seja $\mathbf{m} = m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$ um bloco com k símbolos de informação codificado em uma palavra-código \mathbf{c} . A operação de codificação realizada por um codificador de bloco linear pode ser representada por

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}\mathbf{G} \quad (\text{B.6})$$

sendo \mathbf{G} , denominada de matriz geradora para o código \mathbf{C} , definida por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Note que qualquer palavra-código é simplesmente uma combinação linear dos vetores $\{\mathbf{g}_i\}$ de \mathbf{G} , isto é,

$$\mathbf{c} = (m_0, m_1, \dots, m_{k-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k-1} \end{bmatrix} = m_0\mathbf{g}_0 + m_1\mathbf{g}_1 + \cdots + m_{k-1}\mathbf{g}_{k-1} \quad (\text{B.8})$$

Desde que o código linear (n, k) com q^k palavras-código é um sub-espço de dimensão k , os vetores $\{\mathbf{g}_i\}$ da matriz geradora \mathbf{G} devem ser linearmente independentes, ou seja, eles devem gerar um subespaço de dimensão k . Em outras palavras, os vetores $\{\mathbf{g}_i\}$ formam uma base para o código (n, k) . Note que o conjunto de vetores da base não é único, e portanto, \mathbf{G} também não é única. Observe também que a ordem da matriz \mathbf{G} é k , desde que o subespaço tem dimensão k .

Qualquer matriz geradora de um código (n, k) pode ser transformada, através de operações sobre as linhas (e permutações sobre as colunas), em uma "forma sistemática",

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n-k} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn-k} \end{array} \right] \quad (\text{B.9})$$

em que \mathbf{I}_k é a matriz identidade $k \times k$ e \mathbf{P} é uma matriz $k \times (n - k)$ que determina os $n - k$ bits redundantes.

Observe que uma matriz geradora na forma sistemática gera um código de bloco linear no qual os primeiros k bits de cada palavra-código são idênticos aos bits de informação codificados e os $n - k$ bits restantes de cada palavra-código são combinações lineares dos k bits de informação. Esses $n - k$ bits redundantes são denominados de *bits de paridade*. O código (n, k) resultante é chamado de código sistemático.

Um código (n, k) gerado a partir de uma matriz \mathbf{G} que não está na forma sistemática é chamado de código não sistemático. Entretanto, desde que toda matriz geradora é equivalente a uma matriz geradora na forma sistemática, os dois códigos lineares (n, k) gerados pelas duas matrizes geradoras equivalentes também são equivalentes. Então, cada código linear (n, k) é equivalente a um código linear sistemático (n, k) .

Associado ao subespaço vetorial de dimensão k de qualquer código linear \mathbf{C} , existe um subespaço dual com dimensão $n - k$. Tal subespaço define o *código dual* \mathbf{C}^\perp associado ao código \mathbf{C} . O código dual \mathbf{C}^\perp é um código linear $(n, n - k)$ com q^{n-k} vetores-código. A matriz geradora para o código dual \mathbf{C}^\perp , denominada de matriz de paridade \mathbf{H} , consiste de $n - k$ vetores-código linearmente independentes pertencentes ao subespaço dual do código \mathbf{C} . Qualquer palavra-código \mathbf{c} do código $\mathbf{C}(n, k)$ é ortogonal a qualquer palavra-código no código dual $\mathbf{C}^\perp(n, n - k)$. Sendo assim, as palavras-código do código $\mathbf{C}(n, k)$ são ortogonais as linhas da matriz de paridade, ou seja,

$$\mathbf{c}\mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

em que $\mathbf{0}$ denota um vetor linha nulo com $n - k$ elementos e \mathbf{c} é uma palavra-código do código (n, k) . Desde que as linhas de \mathbf{G} pertencem ao código (n, k) , tem-se que

$$\mathbf{G}\mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

em que $\mathbf{0}$ é agora uma matriz $k \times (n - k)$ com elementos nulos.

A matriz de paridade \mathbf{H} correspondente a uma matriz geradora \mathbf{G} na forma sistemática, é dada por:

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{P}' | \mathbf{I}_{n-k}] \quad (\text{B.12})$$

A matriz de paridade de um código fornece uma forma conveniente de se determinar a distância mínima do código.

Teorema 10 *Considere um código de bloco linear \mathbf{C} com matriz de paridade \mathbf{H} . A distância mínima de \mathbf{C} é igual ao menor número de colunas distintas em \mathbf{H} que somadas produzem o vetor nulo.*

Prova. Desde que $\mathbf{c}\mathbf{H}' = \mathbf{0}$, as colunas de \mathbf{H} são linearmente dependentes. Seja \mathbf{c}_j uma palavra-código de peso mínimo de um código linear (n, k) . A palavra-código \mathbf{c}_j deve satisfazer a condição $\mathbf{c}_j\mathbf{H}' = \mathbf{0}$. Desde que o peso mínimo é igual a distância mínima, segue que a matriz \mathbf{H} possui d_{\min} colunas linearmente dependentes. ■

A partir do Teorema 10 pode-se afirmar que não mais que $d_{\min} - 1$ colunas de \mathbf{H} são linearmente independentes. Sabendo que a ordem de \mathbf{H} é no máximo $n - k$, segue que $n - k \geq d_{\min} - 1$. Portanto, d_{\min} possui um limite superior dado por

$$d_{\min} \leq n - k + 1 \quad (\text{B.13})$$

Este limitante é conhecido como *cota de Singleton*. Códigos que atingem esta cota são conhecidos como **MDS** (*Maximum-Distance Separable*).

B.2.2 Códigos de Hamming

Os códigos de Hamming formaram a primeira classe de códigos de canal amplamente difundidos. A primeira aplicação desses códigos foi no controle de erros das transmissões telefônicas a longa distância [40].

Os parâmetros de desempenho dos códigos de Hamming binários são tipicamente expressos como função do número de símbolos de redundância, aqui denotado por m . São eles:

Comprimento do código:	$n = 2^m - 1$
Número de símbolos de informação:	$k = 2^m - m - 1$
Número de símbolos de paridade:	$n - k = m$
Capacidade de correção de erros:	$t = 1$

As matrizes de paridade para os códigos de Hamming binários são muito fáceis de construir. Para um código de Hamming de comprimento $2^m - 1$, a matriz de paridade é formada por colunas construídas a partir de todas as m -úplas binárias não nulas. O código de Hamming (7,4) pode, por exemplo, ser definido pela matriz de paridade apresentada na Equação abaixo.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

A ordem das colunas é arbitrária; um outro arranjo ainda define um código de Hamming (7,4), embora diferente do código associado a matriz de paridade apresentada acima. A matriz de paridade na Equação B.14 foi projetada especificamente para descrever um código sistemático. A correspondente matriz geradora apresentada na Equação B.15 mostra claramente que os bits de informação ocupam as primeiras 4 coordenadas de cada palavra-código.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Uma análise da matriz de paridade acima mostra que o menor número de m -úplas binárias distintas que somadas produzem o vetor nulo é sempre três, e portanto $d_{\min} = 3$, pelo Teorema 10. De forma geral, todos os códigos de Hamming possuem $d_{\min} = 3$ e são capazes de corrigir apenas um erro em cada palavra-código transmitida.

Será mostrado a seguir que os códigos de Hamming são códigos perfeitos, ou seja, satisfazem o limite de Hamming com igualdade (ver Teorema 9).

Teorema 11 *Todos os códigos de Hamming são perfeitos.*

Prova. Todos os códigos perfeitos satisfazem a igualdade,

$$r = \log_q V_q(n, t) \quad (\text{B.16})$$

em que r é o número de bits de redundância e $V_q(n, t)$ é o volume da esfera de Hamming apresentado na Equação B.4.

Para um código binário $(2^m - 1, 2^m - m - 1)$ com $t = 1$, o volume da esfera de Hamming pode ser calculado por:

$$V_2(2^m - 1, 1) = \sum_{j=0}^1 \binom{2^m - 1}{j} = 2^m \quad (\text{B.17})$$

Desde que $r = n - k = m$, o Teorema fica provado. ■

B.3 Treliça Mínima de Códigos de Bloco Lineares

Nesta seção será definida uma representação em treliça para os códigos de bloco lineares. A vantagem dessa representação é a possibilidade de realizar uma decodificação

por máxima-verossimilhança das palavras-código transmitidas, utilizando-se o algoritmo de Viterbi. A decodificação de códigos de bloco através do algoritmo de Viterbi foi introduzida inicialmente por Jack Wolf. A desvantagem dessa técnica de decodificação está relacionada a dificuldade de se obter representações em treliça para códigos longos, desde que a complexidade dessas representações geralmente aumentam exponencialmente com o comprimento do código. Dessa forma, a utilização do algoritmo de Viterbi para decodificar códigos de bloco somente é viável quando tais códigos são curtos.

A decodificação através do algoritmo de Viterbi é realizada por meio de operações de adição e comparação. Sendo assim, para minimizar a complexidade de decodificação, deve-se construir uma treliça apropriada para o código de interesse. A seguir, a treliça mínima será definida e posteriormente suas propriedades serão descritas. Será mostrado também que existe apenas uma *única* treliça mínima para qualquer código linear. Por fim, será apresentado um algoritmo, baseado na matriz de paridade dos códigos de bloco, para a construção de treliças mínimas.

Definição 17 Treliça:

Uma treliça $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de comprimento n é um grafo orientado com um conjunto de vértices (nós ou estados) \mathcal{V} e um conjunto de ramos \mathcal{E} .

O conjunto \mathcal{V} pode ser particionado em $n + 1$ subconjuntos:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{t=0}^n \mathcal{V}_t, \quad (\text{B.18})$$

em que \mathcal{V}_t é o conjunto de vértices no nível t .

Um ramo e é uma conexão de um vértice no nível t a um vértice no nível $t + 1$. Cada ramo e é rotulado por um símbolo $c(e)$ pertencente ao corpo $GF(q)$. Os vértices no nível $t = 0$ e $t = n$ são casos especiais definidos como a raiz $\mathcal{V}_0 = \{\nu_A\}$ e a meta $\mathcal{V}_n = \{\nu_B\}$, respectivamente. Em outras palavras, ν_A é o primeiro vértice da treliça e ν_B é o último vértice.

Um caminho na treliça é uma seqüência de ramos $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ que conecta um vértice ν a um outro ν' . Cada caminho e é referenciado por um vetor $\mathbf{c}(e) = (c(e_1), \dots, c(e_m)) \in GF(q)^m$, cujas componentes são os rótulos dos ramos individuais.

Considere $\mathbf{C}(n, k)$, um código de bloco linear de comprimento n definido sobre o corpo $GF(q)$ com $M = q^k$ palavras-código $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_M\}$. Uma treliça $T(\mathbf{C})$ é chamada de *treliça do código* \mathbf{C} se as seguintes condições forem satisfeitas:

- Cada caminho e de ν_A a ν_B é associado a um vetor $c(e)$ pertencente ao código C .
- Para cada palavra-código c , existe no mínimo um caminho de ν_A a ν_B .

Existem várias representações em treliça para um dado código C .

Uma importante propriedade dessas treliças é que não existem trajetórias paralelas de ν_A a ν_B com o mesmo vetor $c(e)$. O exemplo a seguir ilustra a representação trivial em treliça de um código C .

Exemplo 18 Treliça trivial de um código (3,2): *Considere o código*

$$C(3, 2) = \{(000), (011), (110), (101)\}, \quad (B.19)$$

a treliça trivial é obtida quando as palavras-código são mapeadas em caminho paralelos, como ilustrado na Figura B.2. A treliça tem $|\mathcal{V}| = 10$ vértices e $|\mathcal{E}| = 12$ ramos.

Outra possível treliça para este código é apresentada na Figura B.3, com $|\mathcal{V}| = 6$ vértices e $|\mathcal{E}| = 8$ ramos. Será mostrado posteriormente que esta treliça é mínima e portanto não existe outra treliça com um número menor de vértices e ramos.

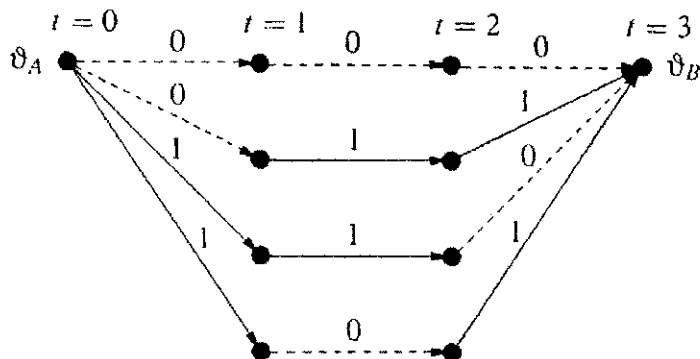


Figura B.2: Treliça trivial para o código (3,2).

Definição 19 Treliça mínima:

A treliça mínima de um código $C(n, k)$ é uma treliça com um número mínimo de vértices $|\mathcal{V}|$.

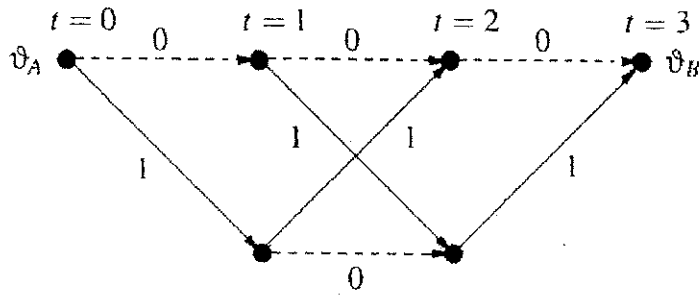


Figura B.3: Treliça mínima para o código (3,2).

A complexidade computacional do algoritmo de Viterbi é diretamente relacionada ao número de vértices \mathcal{V} e de ramos \mathcal{E} da treliça T utilizada na decodificação. Dessa forma, para minimizar essa complexidade, a treliça do código deve ter um número mínimo de ramos e de vértices. Posteriormente será mostrado que a treliça mínima de um código linear minimiza simultaneamente $|\mathcal{V}|$ e $|\mathcal{E}|$.

B.3.1 Construção de Treliças Mínimas através da Matriz de Paridade de Códigos de Bloco Lineares

A construção de uma treliça mínima através da matriz de paridade de um código linear é baseada no conceito de treliça das síndromes, apresentado a seguir:

Treliça das síndromes

Seja $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$, a matriz de paridade de um código \mathbf{C} , com \mathbf{h}_i sendo a i -ésima coluna de \mathbf{H} . Dessa forma, cada palavra-código $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ satisfaz a equação de paridade

$$c_1 \mathbf{h}_1 + \dots + c_n \mathbf{h}_n = \mathbf{0} \quad (\text{B.20})$$

Pode-se dividir o vetor \mathbf{c} com relação a um parâmetro t em duas partes como segue:

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (\mathbf{c}_t^A | \mathbf{c}_t^B) = (\mathbf{a} | \mathbf{b}) = (\{c_1, \dots, c_t\} | \{c_{t+1}, \dots, c_n\}) \quad (\text{B.21})$$

O vetor $\mathbf{c}_t^A = \mathbf{a}$ é denominado de cabeçalho de \mathbf{c} enquanto que o vetor $\mathbf{c}_t^B = \mathbf{b}$ é denominado de cauda.

Isto corresponde à partição $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_t^A | \mathbf{H}_t^B)$ da matriz de paridade.

Denomina-se de *treliça das síndromes* uma treliça que possui seus vértices (estados) referenciados pela síndrome parcial $\sigma_t(\mathbf{c})$ dada por:

$$\forall \mathbf{c} \in \mathbf{C} : \sigma_t(\mathbf{c}) = c_1 \mathbf{h}_1 + \dots + c_t \mathbf{h}_t = \mathbf{c}_t^A \cdot (\mathbf{H}_t^A)', \quad t = 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{B.22})$$

Dessa forma, o número de vértices (estados) $|\mathcal{V}_t|$ no nível t em uma treliça das síndromes é igual ao número de diferentes vetores $\sigma_t(\mathbf{c})$. No nível $t = 0$, a treliça possui apenas um vértice referenciado por $\sigma_0 = \mathbf{0}$, ou seja, por um vetor coluna com $n - k$ zeros.

A obtenção de uma treliça das síndromes através da matriz de paridade será exemplificado a seguir:

Exemplo 20 Treliça das síndromes: *Considere um código (5, 3) representado pela seguinte matriz de paridade:*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Inicialmente, para cada $t = 0, \dots, n-1$, calcula-se todos os vértices \mathcal{V}_{t+1} no nível $t+1$ a partir dos vértices \mathcal{V}_t através da relação recursiva:

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t + \alpha \mathbf{h}_{t+1}, \quad \forall \alpha \in GF(q), \quad \forall \sigma_t \in \mathcal{V}_t \quad (\text{B.24})$$

O vértice σ_t é conectado ao vértice σ_{t+1} por um ramo rotulado por α . Para a matriz da Equação B.23, obtém-se, através desse procedimento, a treliça na Figura B.4. Segue das Equações B.20 e B.22 que $\sigma_n(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{c} \in \mathbf{C}$. Dessa forma, toda palavra-código \mathbf{c} deve ter um caminho de ν_A a ν_B na treliça. Sendo assim, cada vértice que não tem um caminho até ν_B pode ser excluído com todos os seus ramos. Através deste método, obtém-se a única treliça das síndromes do código, ilustrada na Figura B.5.

Teorema 12 *A treliça das síndromes de um código linear é mínima.*

A prova do Teorema 12 pode ser encontrada em [33].

B.3.2 Propriedades da Treliça Mínima

Seja $B_t(\mathbf{a})$ o conjunto de todas as possíveis caudas \mathbf{b} com cabeçalho \mathbf{a} , tal que $\mathbf{c} = (\mathbf{a}|\mathbf{b})$ pertença a um código \mathbf{C} arbitrário, ou seja,

$$B_t(\mathbf{a}) = \{\mathbf{c}_t^B | \mathbf{c} = (\mathbf{c}_t^A | \mathbf{c}_t^B) \in \mathbf{C}, \mathbf{c}_t^A = \mathbf{a}\}. \quad (\text{B.25})$$

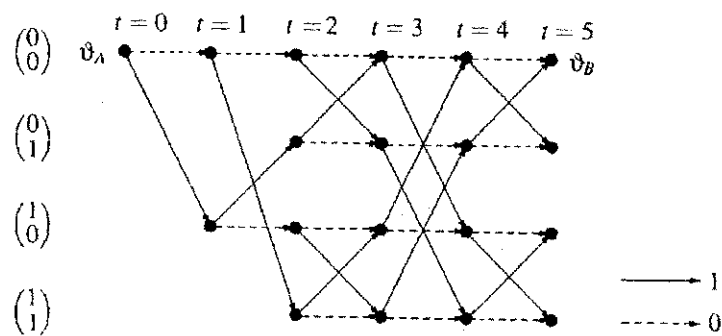


Figura B.4: Treliça para o código binário (5,3).

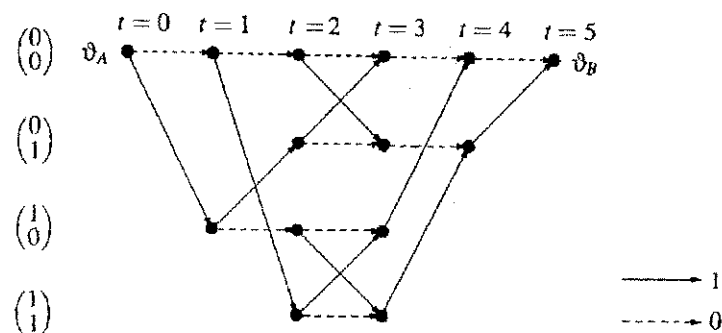


Figura B.5: Treliça síndrome para o código (5,3).

O conjunto $A_t(\mathbf{b})$ de todos os cabeçalhos \mathbf{a} com uma mesma cauda \mathbf{b} pode ser definido de maneira análoga.

Lema 21 Separabilidade: *Considere \mathbf{a} e $\tilde{\mathbf{a}}$, dois diferentes cabeçalhos de um código linear C . Os conjuntos $B_t(\mathbf{a})$ e $B_t(\tilde{\mathbf{a}})$ são idênticos se $\sigma_t(\mathbf{a}) = \sigma_t(\tilde{\mathbf{a}})$ e disjuntos se $\sigma_t(\mathbf{a}) \neq \sigma_t(\tilde{\mathbf{a}})$. Um resultado similar é obtido para os conjuntos $A_t(\mathbf{b})$ e $A_t(\tilde{\mathbf{b}})$.*

De acordo com o Lema 21 apenas as palavras-código \mathbf{c} que têm o conjunto de caudas em comum (ou a mesma síndrome $\sigma_t(\mathbf{c})$) podem passar através de um mesmo vértice ν no nível t (se a treliça em questão for uma treliça das síndromes, então as palavras-código com a mesma síndrome $\sigma_t(\mathbf{c})$ sempre passam por um mesmo vértice no nível t). Define-se $\sigma_t(\mathbf{c})$ como o estado do vértice ν , $\sigma(\nu) \equiv \sigma_t(\mathbf{c})$. Note que o estado $\sigma_t(\mathbf{c})$ pode ser calculado a partir do cabeçalho \mathbf{c}_t^A ou da cauda \mathbf{c}_t^B .

Dois vértices ν_1 e ν_2 no nível t são chamados de *equivalentes* se $\sigma(\nu_1) = \sigma(\nu_2)$. Vértices equivalentes podem ser agrupados em um único vértice ν . Uma treliça que

possui dois vértices equivalentes, ν_1 e ν_2 , pode ser reduzida a uma outra treliça, como segue: Todos os ramos conectados a ν_1 e ν_2 devem ser conectados ao vértice comum ν e os ramos paralelos que surgirem devem ser excluídos da treliça. Este procedimento está ilustrado nas Figuras B.2 e B.3.

A treliça de um código que não tem vértices equivalentes é denominada de *canônica*. Portanto, a treliça canônica de um código linear é uma treliça que possui todas as palavras-código \mathbf{c} com estado $\sigma_t(\mathbf{c})$ passando através de um mesmo vértice. Conclui-se então que a treliça canônica de um código linear coincide com a treliça das síndromes do código após um reordenamento dos vértices.

A treliça canônica tem um número mínimo de vértices $|\mathcal{V}|$. O contrário também é verdade, ou seja, uma treliça com $|\mathcal{V}|$ mínimo é canônica.

Teorema 13 *A treliça de um código linear é mínima se e somente se é canônica.*

Este teorema afirma novamente que a treliça das síndromes de um código é uma treliça mínima, já que ela é canônica.

O teorema abaixo afirma que a treliça mínima de um código linear possui não somente o menor número de vértices $|\mathcal{V}|$, como também o menor número de ramos $|\mathcal{E}|$. Portanto a complexidade de decodificação de um código usando o algoritmo de Viterbi é mínima se a treliça do código for mínima.

Teorema 14 *Considere a treliça mínima (canônica) $\tilde{T} = (\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{E}})$ de um código linear \mathbf{C} e uma treliça que não é mínima $T = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ também do código \mathbf{C} . Então:*

$$(i) |\tilde{\mathcal{V}}| < |\mathcal{V}| \quad e \quad (ii) |\tilde{\mathcal{E}}| < |\mathcal{E}|. \quad (\text{B.26})$$

Para a prova deste teorema considere a definição abaixo:

Definição 22 **Vértices parentes:**

Os vértices $\nu', \nu'' \in \mathcal{V}_t$ no nível t são chamados de parentes se eles estão conectados a um vértice comum ν , no nível $t - 1$ ou $t + 1$, por ramos e' e e'' rotulados pelo mesmo símbolo $c(e') = c(e'') = \alpha$, como ilustrado na Figura B.6.

É claro que dois ou mais vértices parentes podem ser reduzidos a um único vértice.

Lema 23 **Vértices parentes:** *Uma treliça de um código linear é mínima (canônica), se e somente se ela não contém vértices parentes.*

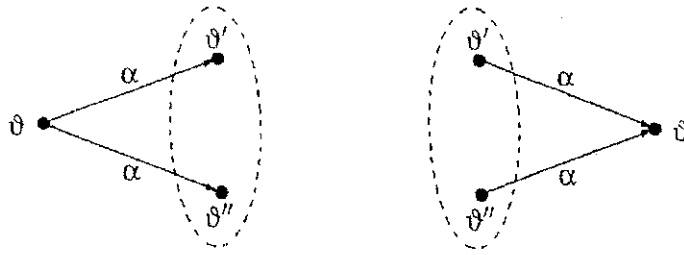


Figura B.6: Vértices parentes.

Prova do Teorema 14 Considere um algoritmo que a cada passo, um par de vértices parentes da treliça (quando existem) sejam agrupados em um único vértice, criando-se uma nova treliça. No caso de não haver vértices parentes, a treliça é mínima de acordo com o Lema 23. Se uma treliça $T(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ não é mínima, então existe no mínimo um par de vértices parentes. Para cada passo do algoritmo, tem-se que:

- O número de vértices da treliça é reduzido de 1, portanto a inequação (i) do Teorema 14 fica provada.
- O número de ramos da treliça é reduzido de no mínimo 1 (> 1 se existirem transições paralelas), o que corresponde a condição (ii) do Teorema 14.

■

Será apresentado a seguir um algoritmo capaz de construir uma treliça mínima a partir de qualquer treliça arbitrária [15].

Algoritmo para a construção de uma treliça mínima

A partir de uma treliça T arbitrária de um código $C(n, k)$,

- Agrupa-se em um único vértice, todos os vértices parentes no nível t , $t = 1, \dots, n - 1$, isto é, todos os ramos que partem de vértices no nível $t - 1$ e que possuem a mesma referência $c(e)$.
- Agrupa-se em um único vértice todos os vértices parentes no nível t , $t = n - 1, \dots, 1$, isto é, todos os ramos que partem de vértices no nível $t + 1$ e que possuem a mesma referência $c(e)$.
- A treliça resultante é mínima.

O próximo exemplo ilustra esse algoritmo.

Exemplo 24 Algoritmo para a construção de uma treliça mínima: A Figura B.7 apresenta a treliça trivial de um código com comprimento 4 e distância mínima 2. Na Figura B.8 apresenta-se os passos do algoritmo para a obtenção da treliça mínima do código considerado.

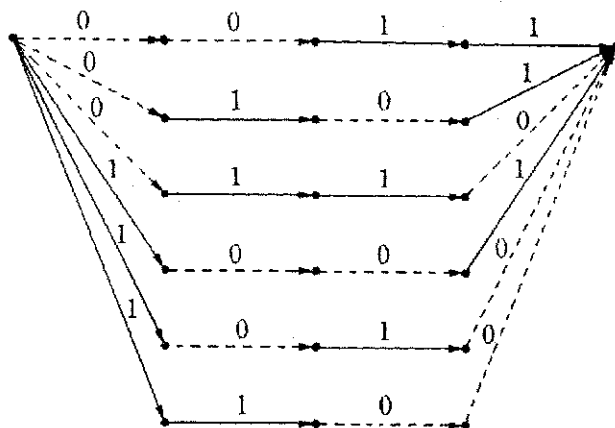


Figura B.7: Treliça trivial para um código arbitrário com comprimento igual a 4.

B.4 Conclusão

Neste apêndice foram apresentados alguns conceitos relacionados à codificação de canal, mais especificamente à codificação realizada por códigos de bloco lineares e à representação em treliça para esses códigos. Neste contexto, foi dada uma especial atenção ao código de Hamming, visto que este código foi utilizado em um dos sistemas de comunicação propostos neste trabalho. A decodificação do código de Hamming utilizado nesse sistema, foi realizada através do algoritmo de Viterbi de máxima verossimilhança, que se baseou na treliça mínima do código, para gerar as estimativas das palavras de Hamming transmitidas.

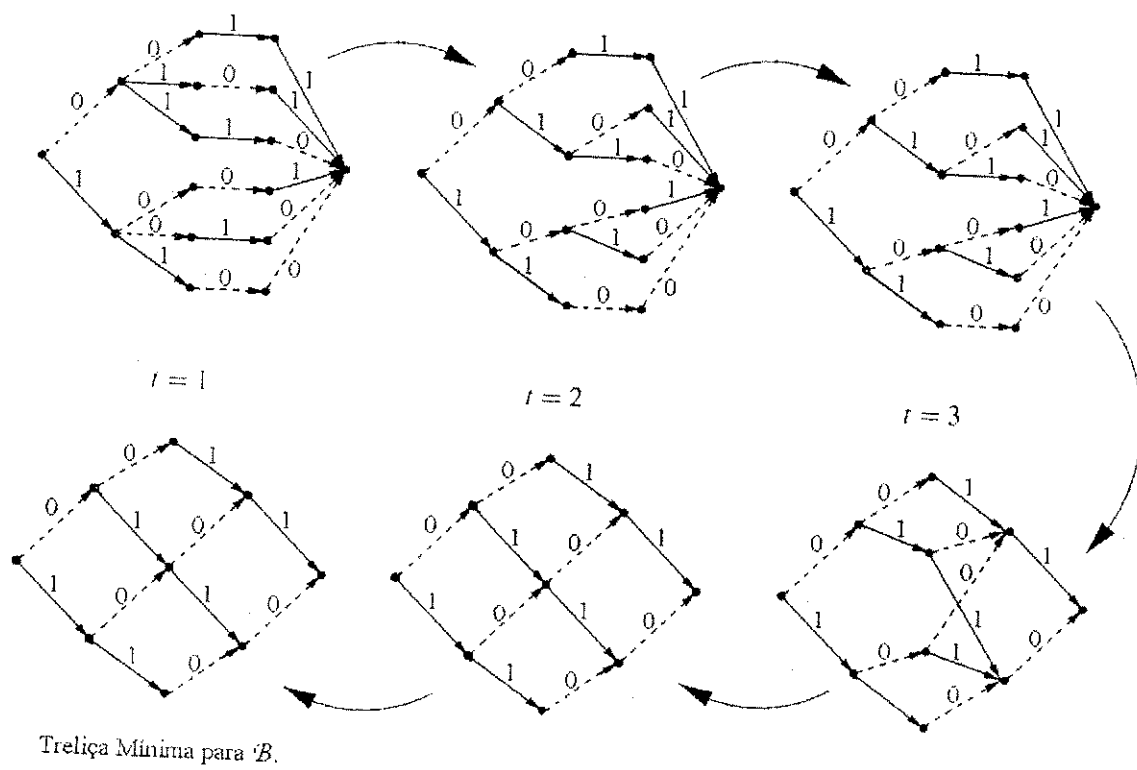


Figura B.8: Sequência de passos para a construção de uma treliça mínima a partir de uma treliça trivial.

Bibliografia

- [1] Assis, F. M. e Sousa, E. S. "Rotated constellation MC-CDMA systems". *Global Telecommunications Conference - GLOBECOM '99*, vol. 1b, pp. 996-1001, 1999.
- [2] Buchanan, K.; Fudge, R. e Xia, H.. "IMT-2000: Service provider's perspective". *IEEE Communications Magazine*, pp. 8-13, Agosto 1997.
- [3] Elias, P. "Obituário". *IEEE Information Theory Society Newsletter*, vol. 52, no. 1, Março 2002.
- [4] Fechine, J. M. "Verificação de locutor utilizando modelos de Markov escondidos (HMMs) de densidades discretas". *Dissertação de Mestrado/DEE-UFPB*, Abril 1994.
- [5] Ferreira, G. M. "Codificação de canal usando wavelets em sistemas de comunicação com diversidade sujeitos ao desvanecimento Rayleigh". *Dissertação de Mestrado/DEE-UFPB*, Agosto 2000.
- [6] Ferreira, G. M.; Lopes, W. T. A. e Assis, F. M. "Codificação wavelet aplicada a sistemas com diversidade espacial sobre canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh". *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2000*, Setembro 2000.
- [7] Fritchman, B. D. "A binary channel characterization using partitioned Markov chains". *IEEE Transactions Information Theory*, vol. IT-13, no. 2, pp. 221-227, Abril 1967.
- [8] Gilbert, E. N. "Capacity of a burst-noise channel". *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 1253-1265, Setembro 1960.
- [9] Gowda, C. H.; Annampedu, V. e Viswanathan, R. "Diversity combining in antenna array base station receiver for DS/CDMA system". *IEEE Communications Letters*, vol. 2, no. 7, Julho 1998.

- [10] Guimarães, A. G.; Silva, C. J. A.; Galdino, J. F. e Pinto, E. L. "Comparação de desempenho de Simuladores de Canais com Desvanecimento Rápido". *XV SBT*, pp. 426-430, 1997.
- [11] Hagerauer, J. "Viterbi decoding of convolutional codes for fading and burst channels". *Proceedings in Zurich Seminar on Digital Communications*, pp. G2.1-G2.7, 1980.
- [12] Heller, P.; Resnikoff, H. L. e Wells Jr., R. O. "Wavelet matrices and the representation of discrete functions". In C. K. Chui, editor, *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, pp. 15-50. Academic Press, Cambridge, MA, 1992.
- [13] Kanal, L. N. e Sastry, A. R. K. "Models for channels with memory and their applications to error control". *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, pp. 724-744, Julho 1978.
- [14] Lopes, W. T. A. "Transmissão de imagens e sinais de voz quantizados vetorialmente em canais com desvanecimento". *Dissertação de Mestrado/DEE-UFPB*, Agosto 1999.
- [15] Lucas, R.; Bossert, M. e Breitbach, M. "Iterative soft decision decoding of linear binary block codes". *Proceedings of the IEEE Int. Symp. on Information Theory and Its Applications*, Canada, 1996.
- [16] Mallat, S. G. "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, Julho 1989.
- [17] Muller, A. "Simulation of Multipath Fading Channels Using the Monte Carlo Method". *IEEE International Conference - ICC'94, SUPERCOMM/ICC '94*, Conference Record, 'Serving Humanity Through Communications.', vol. 3, pp. 1536-1540, 1994.
- [18] Pimentel, C. e Blake, I. F. "Modeling burst channels using partitioned Fritchman's Markov models". *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 47, no. 3, pp. 885-899, Agosto 1998.

- [19] Pimentel, C. e Rêgo, L. C. "Analysis of Soft Decision Decoding of Interleaved Convolutional Codes over Burst Channel". *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 3, pp. 1090-1094, 1999.
- [20] Rabiner, L. R. "A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition". *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, pp. 257-286, Fevereiro 1989.
- [21] Silva, G. A. "Contribuições para Análise de Desempenho de Sistemas de Transmissão em Diversidade por Codificação Espaço-Temporal e o projeto de Sequências para Espalhamento Espectral Usando Códigos Algébrico-Geométricos". *Tese de Doutorado*, Universidade Federal da Paraíba, 2001.
- [22] Silva, G. A. e Assis, F. M. "Using space-time TCM with rotated constellations for transmission over mobile communications channels". *Electronic Letters*, vol. 35, no. 6, pp. 454-455, Março 1999.
- [23] Silva, V. M. e Sousa, E. S. "Fading-resistant transmission from several antennas". *Proc. of 6th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, pp. 1218-1222, 1995.
- [24] Silveira, L. F. Q.; Galdino, J. F.; Ferreira, G. M. e Assis, F. M. "Desempenho da codificação wavelet em sistemas com diversidade sobre canais sujeitos ao desvanecimento plano e rápido". *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBRT 2001*, Setembro 2001.
- [25] Silveira, L. F. Q. e Assis, F. M. "Desempenho da codificação wavelet com Hamming e diversidade espaço-temporal sobre canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh". *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica - SBMO 2002*, Abril 2002.
- [26] Sklar, B. "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part I: Characterization". *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 7, pp. 90-100, Julho 1997.
- [27] Sklar, B. "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part II: Mitigation". *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 7, pp. 102-109, Julho 1997.

- [28] Swarts, F. e Ferreira, H. C. "Markov characterization of channels with soft decision outputs". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 41, no. 5, Maio 1993.
- [29] Tepe, K. E. e Anderson, J. B. "Turbo coding behavior in Rayleigh fading channels without perfect interleaving". *Military Communications Conference - MILCOM*, vol. 2, pp. 1157-1164, 2001.
- [30] Trott, M. D.; Wornell, G. W. e Narula, A. "Performance limits of coded diversity methods for transmitter antenna arrays". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2418-2433, Novembro 1999.
- [31] Tzannes, M. A. e Tzannes, M. C. "Bit-by-bit channel coding using wavelets". *Proceedings of the IEEE GLOBECOM'92*, pp. 684-688, Abril 1992.
- [32] Winters, J. H. e Gitlin, R. D. "The impact of antenna diversity on the capacity of wireless Communications Systems". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1740-1751, Fevereiro/Março/Abril 1994.
- [33] Bossert, M. "Channel Coding for Telecommunications". *John Wiley & Sons*, Ed. 1, England, 1999.
- [34] Burrus, C. S.; Gopinath, R. A. e Guo, H. "Introduction to Wavelet and Wavelet Transforms." *Prentice-Hall, Inc.*, 1998.
- [35] Haykin, S. S. "Digital Communications". *John Wiley & Sons*, 1988. ISBN 0-471-62947-2.
- [36] Parsons, J. D. "The Mobile Radio Propagation Channel". *John Wiley*, 1992.
- [37] Proakis, J. G. "Digital Communications". *McGraw-Hill*, New York, 1989.
- [38] Resnikoff, H. L. e Wells Jr., R. O. "Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information". *Springer-Verlang*, 1998. ISBN 0-387-98383-X.
- [39] Sklar, B. "Digital Communications". *Prentice-Hall, Inc.*, Ed. 1, 1990.
- [40] Wicker, S. B. "Error Control Systems for Digital Communication and Storage". *Prentice Hall*, Ed. 1, New Jersey, 1995.