Resumo

Neste trabalho estudamos a eficiência do Método de Galerkin na resolução de problemas e sistemas Elípticos lineares, não-lineares, variacionias e não-variacionais.

Abstract

In this work we study the Galerkin Method efficiency in solving of linear, nonlinear, variational and nonvariational Elliptic problems and Elliptic systems.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Aplicação do Método de Galerkin para Equações e Sistemas Elípticos

por

Tatiana Rocha de Souza

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Agosto/2005

Aplicação do Método de Galerkin para Equações e Sistemas Elípticos

por

Tatiana Rocha de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2005

Agradecimentos

Muito agradeço,

- à Deus por mais uma etapa vencida;

- aos meus pais Ronaldo e Teresa que apesar da distância sempre me apoiaram e acreditaram em mim;

- ao professor Daniel Cordeiro que por tanto tempo me suportou, por toda paciência, amizade e orientação;

- aos professores Jaime Alves Barbosa Sobrinho e Milton de Lacerda Oliveira por me avaliarem;

- à Vânia por ter me acolhido em sua residência, por toda ajuda e apoio;

- às minhas irmãs Thais e Thisciana que com carinho sempre me deram forças;

- à minha vó Tereza (*in memoriam*) pelo exemplo de vida;

- à todos os professores do DME/UFCG, entre eles, os professores Marco Aurélio Soares, Braúlio Maia e Aparecido Jesuino, pelas disciplinas que lecionaram e que contribuíram para minha formação. Em especial agradeço aos professores Claudianor Alves e Daniel Pellegrino pelos conselhos, pela amizade e por tanto me inspirarem;

- à Lindomberg que com tanta paciência me ajudou com os programas para a apresentação do trabalho;

- aos amigos da Bahia e Sergipe. Aos amigos de Campina Grande, em especial aos colegas Jesualdo (meu companheiro para todas as disciplinas), Juliana, Marta, Rosângela, Lya, Ana Cristina (companheiras de todas as horas), Moíses, Orlando, Aldo (sem eles não teríamos festa), Areli, Jacqueline, Hallyson (companheiros do almoço), Lino, Grayci, Thiciany, Lauriclécio, Antônio Gomes entre outros. Enfim, agradeço a todos que com amizade me fizeram amar este lugar;

- à todos os funcionários do DME/UFCG, entre eles, Dona Argentina, Valdir (que furou a greve para me ajudar), Marcelino, Sóstenes, Salete, Ivanilda, David e Severina;

- à CAPES pelo suporte financeiro.

Por fim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais Ronaldo e Teresa e às minhas irmãs Thais e Thisciana.

Conteúdo

Introdução

Ao longo deste trabalho estudaremos a eficácia do *Método de Galerkin* quando aplicado a problemas e sistemas elípticos, variacionais e não-variacionais.

Consideraremos sempre Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Nos depareremos com os seguintes problemas:

$$(S1)\begin{cases} -\Delta v + u = f_1, \Omega \\ \Delta u + v = f_2, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

$$(P)\begin{cases} -\Delta u - \lambda u + u^3 = f, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

com $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor para o problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

$$(S2)\begin{cases} -\Delta u = au^\alpha + f(x,u,v), \Omega \\ -\Delta v = bv^\beta + g(x,u,v), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

onde $a, b > 0$.

No **Capítulo 1** estudaremos o problema acoplado linear $(S1)$. Consideremos $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Por tratar-se de um caso linear, seremos levados a tentar usar o Teorema de Lax-Milgram.

Definiremos o operador linear e contínuo

$$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & T(\phi) = < f, \phi > = \int_\Omega (f_1\phi_1 + f_2\phi_2) \end{array}$$

e a forma bilinear

$$\begin{array}{llll} a : V \times V : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, \phi) & \longmapsto & a(\omega, \phi) = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u \phi_1 dx + \int_\Omega v \phi_2 dx, \end{array}$$

onde $\omega = (u, v)$ e $\phi = (\phi_1, \phi_2)$.

Provaremos que a é contínua, no entanto, não será possível mostrar a coercividade e, portanto, não poderemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram. Desta forma, introduziremos um método mais eficaz para este caso, o *método de Galerkin*, que é um método de aproximação de soluções fracas.

No *Método de Galerkin*, inicialmente trabalharemos num espaço de dimensão finita, onde podemos, enfim, aplicar o Teorema de Lax-Milgram. Em seguida mostraremos que a seqüência de soluções fracas aproximadas encontrada convergirá para a solução fraca do problema.

No **Capítulo 2**, trataremos do problema Variacional (P). Por ser não-linear, não seguiremos os mesmos passos do Capítulo 1, já que não conseguiremos definir o operador bilinear para este caso.

Na *Seção 2.1* provaremos alguns resultados técnicos necessários para a demonstração do teorema seguinte:

Teorema 1.1 *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ contínua, onde*

$$\langle f(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x; \quad |x| = R > 0$$

Então, existe x_0 tal que $|x_0| \leq R$ e $f(x_0) = 0$.

O estudo deste Teorema é de suma importância, já que será usado na aplicação do *Método de Galerkin* nos *Capítulos 2 e 3*.

Em seguida, faremos uma comparação entre o uso do Teorema do Passo da Montanha e do *Método de Galerkin* ao serem aplicados aos problemas:

$$(P^*) \begin{cases} -\Delta u - \lambda u + u^3 = 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

e

$$(P^{**}) \begin{cases} -\Delta u - \lambda u - u^3 = 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

com $\lambda < \lambda_1$.

Mostraremos que no problema (P^{*}) poderemos usar o *Método de Galerkin* e não poderemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha, enquanto que em (P^{**}) poderemos usar o Teorema do Passo da Montanha e não o *Método de Galerkin.*

No **Capítulo 3** mostraremos a existência de solução fraca para o sistema não-variacional $(S2)$.

Na *Seção 3.1* trabalharemos com o sistema aproximado:

$$\begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f(x,u,v) + \lambda\phi, \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g(x,u,v) + \lambda\phi, \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

onde $\lambda > 0$ e $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ com $\phi \geq 0$.

Na seção posterior, mostraremos, enfim, a existência da solução fraca do sistema (S2).

Por fim, estenderemos a aplicação do *Método de Galerkin*, estudando o sistema

$$(P_{\alpha,\beta}) \begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f(v), \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g(u), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

onde trataremos o caso supercrítico.

No **Apêndice A** enunciaremos os principais resultados utilizados durante nosso estudo.

Mostraremos no **Apêndice B** a prova de que o espaço $H_0^1(\Omega)$ admite uma *base Hilbertiana.*

E finalmente, no **Apêndice C**, desenvolveremos, para o caso $N = 3$, alguns dos resultados empregados nas demonstrações dos lemas e teoremas da *Seção 2.1* do *Capítulo 2.*

A seguir, estabeleceremos as notações usadas no decorrer no trabalho.

Notações:

0.1 *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Consideraremos* $L^p(\Omega)$ *como a classe de todos as funções mensuráveis a Lebesgue* u*, definidas sobre* Ω*, tal que*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty,$$

com norma $||\cdot||_{L^p(\Omega)}$ *definida por*

$$||u(x)||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

0.2 *Seja* $m \in \mathbb{N}$. *Denotaremos por* $W^{m,p}(\Omega)$ *os espaços de Sobolev, munido com a norma*

$$||u(x)||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_{1\leq|j|\leq m} \int_\Omega |D^j u|^p dx\right)^{1/p},$$

onde $j = (j_1, j_2, ..., j_n) \in \mathbb{N}^N$, $|j| = \sum_{r=1}^{n} j_r$ *e* $D^j = \dfrac{\partial^{|j|}}{\partial_{x_1}^{j_1}...\partial_{x_n}^{j_n}}$ *é o operador de derivação fraca.*

0.3 *Representaremos por* $H_0^1(\Omega)$ *o espaço* $W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{1,2}(\Omega)}}$, *munido da norma*

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2},$$

induzida pelo produto interno

$$< u, v >= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

0.4 *Denotaremos por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W^{m,p}(\Omega)$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *E ainda, por* $H_0^{-1}(\Omega)$, *o dual do* $H_0^1(\Omega)$.

0.5 *Consideremos o espaço de Hilbert,* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *com o produto interno:*

$$\langle (u, v), (\psi, \phi) \rangle = \int_\Omega (u\psi + v\phi)\, dx.$$

Para todo $\omega = (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *definiremos:*

$$||\omega||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \Big(||u||_{H_0^1(\Omega)} + ||v||_{H_0^1(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

0.6 *Geralmente, denotaremos as constantes por* C, C_i *e* k_i, *com* $i \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Teorema de Lax-Milgram versus Método de Galerkin

Neste capítulo mostraremos a existência e unicidade de solução fraca para um problema aclopado para um caso escalar usando o método de Galerkin. Inicialmente, tentaremos usar o Teorema de Lax-Migram.

1.1 As possibilidades do Teorema de Lax-Milgram

Vamos tentar aplicar o Teorema de Lax-Milgram (ver Apêndice A.1) para resolver o problema:

$$(S)\begin{cases} -\Delta v + u = f_1, \Omega \\ \Delta u + v = f_2, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Precisemos o que seja uma solução fraca para (S). No caso escalar, para:

$$\begin{cases} -\Delta v + u = f_1, \Omega \\ v = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

diremos que $v \in H_0^1(\Omega)$ será uma solução fraca quando:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx + \int_\Omega u\phi dx - \int_\Omega f_1 \phi dx = 0,\ \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Analogamente, $u \in H_0^1(\Omega)$ será solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta u + v = f_2, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

se satisfizer:

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx + \int_\Omega v\psi dx - \int_\Omega f_2 \psi dx = 0, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Somando (1.1) e (1.2) temos que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ satisfazem:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx + \int_\Omega u\phi dx + \int_\Omega v\psi dx - \int_\Omega f_1 \phi dx - \int_\Omega f_2 \psi dx = 0, \ \forall \psi, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, somos induzidos a definir que $\omega = (u, v) \in V$ será uma *solução fraca de (S)* se, para todo $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in V$,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u\phi_1 dx + \int_\Omega v\phi_2 dx = \int_\Omega f_1\phi_1 dx + \int_\Omega f_2\phi_2 dx. \tag{1.3}$$

Observação 1.1 *Posteriormente mostraremos que, caso definíssemos a solução fraca de (S) como $\omega = (u, v) \in V$ satisfazendo, para todo $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in V$:*

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 dx + \int_\Omega u\phi_2 dx + \int_\Omega v\phi_1 dx = \int_\Omega f_1\phi_2 dx + \int_\Omega f_2\phi_1 dx \ ,$$

continuaríamos não podendo usar o Teorema de Lax-Milgram. A definição que escolhemos facilitará o uso do Método de Galerkin.

Para aplicarmos o Teorema de Lax-Milgram devemos definir uma forma bilinear contínua e coerciva, $a : V \times V :\to \mathbb{R}$. Além disso, precisamos definir um operador linear contínuo, $T : V \to \mathbb{R}$, para concluírmos que existe uma $\omega \in V$ tal que:

$$T(\phi) = a(\omega, \phi), \ \forall \phi \in V.$$

Ou seja, que existe $\omega = (u, v) \in V$ tal que,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u\phi_1 dx + \int_\Omega v\phi_2 dx = \int_\Omega f_1\phi_1 dx + \int_\Omega f_2\phi_2 dx, \ \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in V.$$

Para este fim considere:

$$\begin{array}{rcl} a : V \times V : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, \phi) & \longmapsto & a(\omega, \phi) = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u\phi_1 dx + \int_\Omega v\phi_2 dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & T(\phi) =< f, \phi >= \int_\Omega (f_1\phi_1 + f_2\phi_2) \end{array}$$

Note que T é linear e a continuidade segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Apêndice A.2).

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, provaremos que $a(\cdot,\cdot)$ é contínuo. $\forall \omega, \phi \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|a(\omega,\phi)| &= \left|\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u\phi_1 dx + \int_\Omega v\phi_2 dx\right| \\
&= \left|< v, \phi_1 >_{H_0^1(\Omega)} - < u, \phi_2 >_{H_0^1(\Omega)} + < u, \phi_1 > + < v, \phi_2 >\right| \\
&\leq \left|< v, \phi_1 >_{H_0^1(\Omega)}\right| + \left|< u, \phi_2 >_{H_0^1(\Omega)}\right| + |< u, \phi_1 >| + |< v, \phi_2 >| \\
&\leq ||v||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)}||\phi_1||_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + ||v||_{L^2(\Omega)}||\phi_2||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||v||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)} + C_1||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + \\
&\quad + C_2||v||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_3\left(||v||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. + ||v||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
&\leq C_3\left(||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||u||_{H_0^1(\Omega)}\right)\left(||\phi_1||_{H_0^1(\Omega)} + ||\phi_2||_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
&\leq C_4\left(||v||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2}\left(||\phi_1||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||\phi_2||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&\leq C_4||\omega||_{H_0^1(\Omega)}||\phi||_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{1, C_1, C_2\}$.

No entanto, $a(\cdot,\cdot)$ não é coerciva, ou seja:

$$\nexists\, \alpha > 0 \text{ tal que } a(\omega,\omega) \geq \alpha||\omega||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
a(\omega,\omega) &= \int_\Omega \nabla v \nabla u dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uu dx + \int_\Omega vv dx \\
&= \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega v^2 dx \\
&= ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Caso a fosse coervivo,

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha\left(||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \quad \text{para algum } \alpha > 0. \qquad (1.5)$$

Fazendo $v = 0$ em (1.5) e usando a Desigualdade de Poincaré (ver Apêndice A.11), obteríamos,

$$\alpha||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq ||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq \beta||u||^2_{H_0^1(\Omega)},$$

de onde concluiríamos que as normas $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ e $||\cdot||_{H_0^1(\Omega)}$ seriam equivalentes, o que é um absurdo.

Observação 1.2 *Se tivéssemos definido a solução fraca segundo a Observação 1.1, definindo:*

$$\begin{array}{rcl} a : V \times V : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, \phi) & \longmapsto & a(\omega,\phi) = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 dx + \int_\Omega u\phi_2 dx + \int_\Omega v\phi_1 dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & T(\phi) =< f, \phi >= \int_\Omega (f_1\phi_2 + f_2\phi_1), \end{array}$$

continuaríamos tendo T, um operador linear e contínuo, e a, uma forma bilinear contínua. No entanto, quando fôssemos tentar mostrar a coercividade, teríamos:

$$\begin{array}{rcl} a(\omega,\omega) & = & \int_\Omega \nabla v \nabla v dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u dx + \int_\Omega uv dx + \int_\Omega vu dx \\ & = & \int_\Omega (\nabla v)^2 dx + \int_\Omega (\nabla u)^2 dx + 2\int_\Omega uv dx \\ & = & ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} - ||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + 2||u||^2_{L^2(\Omega)}.||v||^2_{L^2(\Omega)}, \end{array}$$

o que não implicaria a coercividade. Posteriormente, notaremos que, mesmo quando estivermos trabalhando com um espaço de dimensão finita (no Método de Galerkin), não teremos a mesma facilidade para concluirmos a coercividade quando aplicamos a Definição 1.3.

Conclusão: Para este sistema, não é possível usar o Teorema de Lax-Milgram. Passaremos para um método mais eficaz que apresentaremos no próximo parágrafo.

1.2 Método de Galerkin

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert separável, temos $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ também um espaço de Hilbert separável. Então, existe uma base ortonormal enumerável de V (ver Apêndice B.1), digamos:

$$\{e_1, e_2, ..., e_m, ...\}$$

tal que

$$V =< e_1, e_2, ..., e_m, ... >.$$

Defina, para $m > 0$:

$$V_m =< e_1, e_2, ..., e_m >,$$

com

$$||\cdot||_{V_m} = ||\cdot||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.$$

O Método de Galerkin consite nas seguintes etapas:

Etapa 1:

Provar a existência de uma seqüência $\omega_m \subset V_m$ tal que, para cada m:

$$a(\omega_m, \phi) = \langle f, \phi \rangle \,, \ \ \forall \phi \in V_m.$$

Etapa 2:

Mostrar que a seqüência de *soluções aproximadas*, $\{\omega_m\}$, é limitada em V, independentemente de m.

Etapa 3:

Da Etapa 2, segue que existe uma subseqüência de $\{u_m\}$ que converge fracamente. Mostrar que esta subseqüência converge fracamente para uma solução fraca do problema.

Vamos, agora, detalhar cada uma das etapas anteriores.

Etapa 1:

Como V_m é um espaço de dimensão finita, todas as normas definidas em V_m são equivalentes. Logo, as normas $||\cdot||_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ e $||\cdot||_{V_m}$ são equivalentes. Assim, para $\omega_m = (u_m, v_m)$ e $\phi_m = (\phi_m^1, \phi_m^2)$, definamos:

$$\begin{array}{rcl} a : V_m \times V_m : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_m, \phi_m) & \longmapsto & a(\omega_m,\phi_m) = \int_\Omega \nabla v_m \nabla \phi_m^1 dx - \int_\Omega \nabla u_m \nabla \phi_m^2 dx + \int_\Omega u_m \phi_m^1 dx + \int_\Omega v_m \phi_m^2 dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} T : V_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi_m & \longmapsto & T(\phi_m) = < f, \phi_m > = \int_\Omega (f_1 \phi_m^1 + f_2 \phi_m^2). \end{array}$$

Como já vimos, na Seção 1.1, T é um operador linear contínuo e a forma bilinear a também é contínua. Voltando ao problema da coercividade mencionado em (1.4), note agora que:

$$a(\omega_m, \omega_m) = \int u_m^2 dx + \int v_m^2 dx = ||u_m||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_m||^2_{L^2(\Omega)} = ||\omega_m||^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

e portanto,

$$a(\omega_m, \omega_m) \geq \alpha ||\omega_m||^2_{V_m},$$

mostrando a coercividade de a. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe $\omega_m = (u_m, v_m) \in V_m$ tal que

$$a(\omega_m, \phi) = < f, \phi >, \ \forall \phi \in V_m. \tag{1.6}$$

Etapa 2:

Para cada m, considere $\phi = (v_m, -u_m) \in V_m$, onde $\omega_m = (u_m, v_m) \in V_m$.

Por (1.6):

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Omega \nabla v_m \nabla v_m dx - \int_\Omega \nabla u_m \nabla(-u_m) dx + \int_\Omega u_m v_m dx + \int_\Omega v_m(-u_m) dx = \langle f, \phi \rangle \\
&\qquad \Rightarrow \textstyle\int_\Omega |\nabla v_m|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx = \int_\Omega f_1 v_m dx - \int_\Omega f_2 u_m dx \\
&\qquad \Rightarrow ||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)} = \textstyle\int_\Omega f_1 v_m dx - \int_\Omega f_2 u_m dx
\end{aligned}$$

Assim, Pelas Desigualdades de Hölder (ver Apêndice A.3) e de Poincaré (ver Apêndice A.11),

$$\begin{aligned}
||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq ||f_1||_{L^2(\Omega)} ||v_m||_{L^2(\Omega)} + ||f_2||_{L^2(\Omega)} ||u_m||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||f_1||_{L^2(\Omega)} C_1 ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||f_2||_{L^2(\Omega)} C_2 ||u_m||_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_1 ||f_1||_{L^2(\Omega)} ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} + C_1 ||f_1||_{L^2(\Omega)} ||u_m||_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + C_2 ||f_2||_{L^2(\Omega)} ||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + C_2 ||f_2||_{L^2(\Omega)} ||v_m||_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $C_3 = max\{1, C_1, C_2\}$, temos:

$$||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_3 \left(||f_1||_{L^2(\Omega)} + ||f_2||_{L^2(\Omega)} \right) \left(||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

Como $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ vale para todo $a, b \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} \right)^2 &\leq ||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_3 \left(||f_1||_{L^2(\Omega)} + ||f_2||_{L^2(\Omega)} \right) . \left(||u_m||_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

de onde, fazendo $C = 2C_3$:

$$||\omega_m||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(||f_1||_{L^2(\Omega)} + ||f_2||_{L^2(\Omega)} \right).$$

Portanto, $\{\omega_m\}$ é limitada em V, independentemente de m.

Etapa 3:

Como $\{\omega_m\}$ é limitado e V é um espaço reflexivo, a menos de subseqüência (ver Apêndice A.12), temos:

$$\omega_m \rightharpoonup \omega \quad \text{em} \quad V,$$

para alguma função $\omega \in V$.

Observe que para cada $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in V$, existe $\phi_i = (\phi_i^1, \phi_i^2) \in V_i$ tal que

$$\phi_i \to \phi \quad \text{em} \quad V, \quad \text{onde}$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{i} < \phi, e_j > e_j.$$

Fixe agora i, tal que $i \leq m$, donde $V_i \subseteq V_m$.

Logo, pela **Etapa 1**,

$$\exists \ \omega_m \in V_m; \quad a(\omega_m, \phi) =< f, \phi >, \quad \forall \phi \in V_m$$

e portanto,

$$a(\omega_m, \phi_i) =< f, \phi_i > . \tag{1.7}$$

Pelas imersões de Sobolev (ver Apêndice A.17):

$$\omega_m \rightharpoonup \omega \text{ em } V \quad \Rightarrow \quad \omega_m \to \omega \text{ em } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{1.8}$$

$$\phi_i \to \phi \text{ em } V \quad \Rightarrow \quad \phi_i \to \phi \text{ em } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{1.9}$$

Assim, usando (1.8) e (1.9), passando ao limite em (1.7), quando $m \to \infty$ e $i \to \infty$, mostraremos que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \phi_i^1 dx - \int_\Omega \nabla u_m \nabla \phi_i^2 dx + \int_\Omega u_m \phi_i^2 dx + \int_\Omega v_m \phi_i^2 dx = \int_\Omega f_1 \phi_i^1 dx + \int_\Omega f_2 \phi_i^2 dx$$

convege para

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx + \int_\Omega u \phi_1 dx + \int_\Omega v \phi_2 dx = \int_\Omega f_1 \phi_1 dx + \int_\Omega f_2 \phi_2 dx,$$

garantindo

$$a(\omega, \phi) =< f, \phi >, \ \forall \phi \in V, \tag{1.10}$$

de onde segue que ω é solução fraca de (P).

Mostremos as convergências acimas. Inicialmente, fixemos i e trabalhemos com o limite quando $m \to \infty$:

(1º Passo) objetivo: $\int_\Omega \nabla u_m \nabla \phi_i^2 dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_i^2 dx$.

Por definição de convergência fraca,

$$u_m \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; F(u_m) \to F(u),\; \forall F \in H_0^{-1}(\Omega).$$

Então, definindo

$$\begin{array}{rcl} F : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \hookrightarrow & F(u) =< u, \phi_1 >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 dx, \end{array}$$

como F é linear e contínuo, teremos

$$u_m \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; \int_\Omega \nabla u_m \nabla \phi_i^2 dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_i^2 dx.$$

De maneira equivalente, segue-se

$$v_m \rightharpoonup v \;\Rightarrow\; \int_\Omega \nabla v_m \nabla \phi_i^1 dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_i^1 dx.$$

(**2º Passo**) **objetivo:** $\int_\Omega u_m \phi_i^1 dx \to \int_\Omega u \phi_i^1 dx$.

Note que, pela Desigualdade de Hölder:

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_\Omega u_m \phi_i^1 dx - \int_\Omega u \phi_i^1 dx \right| & \leq & \int_\Omega |\phi_i^1||u_m - u| dx \\ & \leq & ||\phi_i^1||_{L^2(\Omega)} ||u_m - u||_{L^2(\Omega)}, \end{array}$$

donde, por (1.8) segue a convergência acima. Analogamente, mostra-se que

$$\int_\Omega v_m \phi_i^2 dx \to \int_\Omega v \phi_i^2 dx.$$

Assim, dos 1^o *e* 2^o *Passos*, passando o limite quando $m \to \infty$:

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \phi_i^1 dx - \int_\Omega \nabla u_m \nabla \phi_i^2 dx + \int_\Omega u_m \phi_i^2 dx + \int_\Omega v_m \phi_i^2 dx = \int_\Omega f_1 \phi_i^1 dx + \int_\Omega f_2 \phi_i^2 dx$$

converge para

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_i^1 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_i^2 dx + \int_\Omega u \phi_i^2 dx + \int_\Omega v \phi_i^2 dx = \int_\Omega f_1 \phi_i^1 dx + \int_\Omega f_2 \phi_i^2 dx \quad (1.11)$$

Agora, passemos ao limite em (1.11), quando $i \to \infty$:

(**3º Passo**) **objetivo:** $\int_\Omega u \phi_i^1 dx \to \int_\Omega u \phi_1 dx$.

Temos, pela Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u\phi_i^1 dx - \int_\Omega u\phi_i^1 dx\right| &\leq \int_\Omega |u||\phi_i^1 - \phi_1|dx \\ &\leq ||u||_{L^2(\Omega)}||\phi_i^1 - \phi_1||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde, por (1.9) segue a convergência acims. De maneira semelhante temos:

$$\int_\Omega v\phi_i^2 dx \to \int_\Omega v\phi_2 dx.$$

(**4º Passo**) **objetivo:**$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_i^2 dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx.$

Note que, pela Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_i^2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_2 dx\right| &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla \phi_i^2 - \nabla \phi_2|dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla(\phi_i^2 - \phi_2)|dx \\ &\leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\phi_i^2 - \phi_2)||_{L^2(\Omega)} \\ &= ||u||_{H_0^1(\Omega)}||\phi_i^2 - \phi_2||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e por (1.9) segue o resultado.

Analogamente,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi_i^1 dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_1 dx.$$

(**5º Passo**) **objetivo:** $\int_\Omega f_1\phi_i^1 dx \to \int_\Omega f_1\phi_1 dx.$

De fato, pela desigualdade de Hölder e por 1.9 ,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f_1\phi_i^1 dx - \int_\Omega f_1\phi_1 dx\right| &\leq \int_\Omega |f_1||\phi_i^1 - \phi_1|dx \\ &\leq ||f_1||_{L^2(\Omega)}||\phi_i^1 - \phi_1||_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

de onde segue a convergência.

De maneira análoga,

$$\int_\Omega f_2\phi_i^2 dx \to \int_\Omega f_2\phi_1 dx.$$

Portanto, pelos passos anteriores, segue (1.10). ■

1.3 Unicidade da solução

Proveremos a unicidade da solução do problema (S).

Sejam $\omega_1 = (u_1, v_1) \in V$ e $\omega_2 = (u_2, v_2) \in V$ duas soluções deste problema. Considere $\omega = \omega_1 - \omega_2 = (u_1 - u_2, v_1 - v_2) = (u, v) \in V$. Temos então:

$$\begin{aligned}
a(\omega,\phi) &= a(\omega_1-\omega_2,\phi)\\
&= a(\omega_1,\phi)-a(\omega_2,\phi)\\
&= <f,\phi> - <f,\phi>\\
&= 0
\end{aligned}$$

de onde segue:

$$a(\omega,\phi)=0, \;\; \forall \phi \in V.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
a(\omega,\omega) &= \int_\Omega \nabla v \nabla u dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega v^2 dx\\
&= \int_\Omega (u^2+v^2)dx\\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto,

$$u^2+v^2=0 \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad u=v=0 \;\; \text{q.t.p.} \;\; \text{em} \;\; \Omega$$

Assim, temos

$$\omega = 0 \;\; \text{q.t.p} \;\; \text{em} \;\; \Omega,$$

de onde concluímos que $\omega_1=\omega_2$.

Observação 1.3 *O Método de Galerkin também pode ser usado para resolver problemas, em particular, não-lineares, como o que estudaremos no Capítulo 2.*

Capítulo 2

Teorema do Passo da Montanha versus Método de Galerkin

Neste capítulo resolveremos o problema:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u - \lambda u + u^3 = f, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

com $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet para o operador Laplaciano.

Não poderemos usar os mesmos passos do Método de Galerkin do capítulo anterior, visto que, nosso problema não é linear e portanto não conseguiremos definir uma *forma bilinear*, $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, para aplicar o Teorema de Lax-Milgram.

Primeiramente demonstraremos alguns resultados técnicos, afim de demostrarmos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *contínua, onde*

$$\langle f(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall x; \quad |x| = R > 0.$$

Então, existe x_0 *tal que* $|x_0| \leq R$ *e* $f(x_0) = 0$.

Este teorema será usado na resolução do problema (P).

2.1 Preliminares

Lema 2.1 *Sejam $B = B(0,1)$ uma bola unitária, centrada no ponto zero em $\mathbb{R}^N$ e $f : B \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação de classe C^2. Seja $M(x)$ a matriz*

$$M(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{n\times(n-1)}$$

Considere $E_i(x)$ o determinante da matriz acima menos a i-ésima linha. Então:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Demostração: Para melhor entendimento, o caso particular $N = 3$ será demonstrado no Apêndice C. Para completude do texto, faremos a demonstração para o caso geral. Temos

$$E_i(x) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Para $i \neq j$, seja $C_{ij}(x)$ o determinante da matriz $M(x)$ retirado a i-ésima linha e sustituído a j-ésima linha:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\right)$$

por

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right).$$

Ou seja, para $j > i$:

$$C_{ij}(x) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Por construção, a linha

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x), \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x)\right)$$

é a i-ésima linha da matriz acima e a linha

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$$

é a (j-1)-ésima linha da matriz.

Assim (ver Apêndice A.19), permutando a (j-1)-ésima até a i-ésima linha, temos

$$C_{ij}(x) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = (-1)^{(j-1)-i} det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

e como

$$C_{ji}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

segue-se, para $j > i$ que

$$C_{ij}(x) = (-1)^{j-i-1} C_{ji}(x). \tag{2.1}$$

Além disso, ainda temos

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) = \sum_{j \neq i} C_{ij}(x).$$

Sendo

$$E_i(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

podemos reescrever

$$E_i(x) = det\left(\phi_1(x), \cdots, \phi_{i-1}(x), \phi_{i+1}(x), \cdots, \phi_n(x)\right)$$

onde

$$\phi_j(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

Portanto, pelo Apêndice A.21:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) &= \sum_{j=1}^{i-1} det\left(\phi_1(x), \cdots, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x), \cdots, \phi_{i-1}(x), \phi_{i+1}(x), \cdots, \phi_n(x)\right) \\
&+ \sum_{j=1+j}^{n} det\left(\phi_1(x), \cdots, \phi_{i-1}(x), \phi_{i+1}(x), \cdots, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x), \cdots, \phi_n(x)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}(x) + \sum_{j=1+1}^{n} C_{ij}(x) \\
&= \sum_{j \neq i} C_{ij}(x)
\end{aligned}$$

Desda forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\sum_{j<i} C_{ij}(x) + \sum_{j>i} C_{ij}(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j<i} (-1)^i C_{ij}(x) + \sum_{j>i} (-1)^i C_{ij}(x)\right).
\end{aligned}$$

Afirmação: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j<i} (-1)^i C_{ij}(x) + \sum_{j>i} (-1)^i C_{ij}(x)\right) = 0$

Consideremos $A = \displaystyle\sum_{j<i} (-1)^i C_{ij}(x)$ e $B = \displaystyle\sum_{j>i} (-1)^i C_{ij}(x)$.

Fixe $i = \{1, \cdots, n\}$.

Em A, fazendo $i = t$, para cada $1 \leq k < t$ fixo, temos

$$j = (i - k).$$

Por (2.1)

$$\begin{aligned}
(-1)^t C_{t(t-k)} &= (-1)^t (-1)^{(t-k)-t-1} C_{(t-k)t} \\
&= (-1)^t (-1)^{-k-1} C_{(t-k)t}
\end{aligned}$$

de onde segue-se

$$(-1)^t C_{t(t-k)} = -1(-1)^{t-k} C_{(t-k)t}. \tag{2.2}$$

Por outro lado, na soma em B, existem i e j tais que $i = t - k$ e $j = t$, donde

$$(-1)^i C_{ij} = (-1)^{t-k} C_{(t-k)t}. \tag{2.3}$$

Somando (2.2) com (2.3), obtemos

$$-1(-1)^{t-k} C_{(t-k)t} + (-1)^{t-k} C_{(t-k)t} = 0$$

ou seja, cada parcela do primeiro somatório se anula com algum parcela do segundo somatório.

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x)=0$$

$\blacksquare$

Teorema 2.2 *Não existe aplicação C^2, $f:\overline{B}\to\partial B=S=\{x\in\mathbb{R}^N;|x|=1\}$ tal que $f(x)=x$, $\forall x\in S$.*

Demostração: Suponha que exista $f:\overline{B}\to S$ tal que $f(x)=x$, $\forall x\in S$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} f:\overline{B} & \longrightarrow & S \\ x & \longmapsto & f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))=(x_1,\cdots,x_n) \end{array}$$

Observe que para todo $x\in\overline{B}$, $f(x)\in S$ e portanto $|f(x)|=1$.

Afirmação: Considerando

$$J(x)=det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

temos $J(x)\equiv 0$.

De fato, seja

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x)=|f(x)|^2=<f(x),f(x)>=\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x). \end{array}$$

Então, $\forall x\in\overline{B}$, $\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x)=|f(x)|^2=1$,

e ainda,

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}2f_i(x)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}=0,\quad \forall j=1,...,n.$$

Ou seja, para $j=1,...,n$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x)\ \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\right)\cdot\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}=0.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $f(x) \neq 0$, segue-se que

$$det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, $J(x) = 0$, como queríamos.

Note agora que

$$J(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J(x) = (-1)^{1+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x).det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} + \ldots +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x).det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x) \end{bmatrix}$$

E, por construção do $E_i(x)$, ainda podemos escrever $J(x)$ como:

$$J(x) = (-1)^{1+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)E_1(x) + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)E_n(x)$$

e portanto, $\forall x \in \overline{B}$

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)E_i(x).$$

Desda forma,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\overline{B}} J(x)dx \\
&= \int_{\overline{B}} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) E_i(x) \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{B}} (-1)^{i+1} \left(\frac{\partial f_1 E_i}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) f_1(x) \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{B}} \left((-1)^{i+1} \frac{\partial f_1 E_i}{\partial x_i}(x) \right) dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{B}} \left((-1)^{i+1}(-1) \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) f_1(x) \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{B}} \left((-1)^{i+1} \frac{\partial f_1 E_i}{\partial x_i}(x) \right) dx + \int_{\overline{B}} \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) f_1(x) \right) dx
\end{aligned}
$$

mas, pelo Lema C.1, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) = 0$,

daí

$$
0 = \int_{\overline{B}} J(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{B}} \left((-1)^{i+1} \frac{\partial f_1 E_i}{\partial x_i}(x) \right) dx. \tag{2.4}
$$

Vendo

$$
F = \big((-1)^{1+1} f_1 E_1, (-1)^{2+1} f_1 E_2, \ldots, (-1)^{n+1} f_1 E_n \big)
$$

temos que

$$
divF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_1 E_i}{\partial x_i}(x)
$$

e

$$
< F(x), x >= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i.
$$

Portanto, podemos reescrever (2.4) como:

$$
\int_{\overline{B}} divF dx = 0,
$$

Além disso, como para todo $x \in \partial\Omega$, $|x| = 1$, a normal unitária em x é o próprio x. Assim, pela igualdade acima e pelo Teorema do Divergente (ver Apêndice A.22), obtemos

$$
\int_{\overline{B}} divF dx = \int_{\partial B} < F(x), x > dS = 0,
$$

ou seja,

$$
0 = \int_{B} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) E_i(x) dx = \int_{\partial B} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i dS,
$$

de onde segue-se que

$$
\int_{S} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i dS = 0. \tag{2.5}
$$

Afirmação: O campo gradiente $\nabla\left(f_i(x)-x_i\right)$ é normal a S para cada $x \in S$.

De fato, Como por hipótese $f(x)=x$, temos $f_i(x)-x_i=0, \forall x \in S$. Considerando $h(x)=f_i(x)-x_i$ e $v=(x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$ o vetor tangente ao ponto x, temos $\nabla h(x)=0$ e portanto $\langle \nabla h(x), v\rangle = 0$, como queríamos demonstrar.

Recorde que $\forall x \in S$, $|x|=1$. Logo, a normal unitária em x é o próprio x. Então, para cada $x \in S$, existe $\lambda_i=\lambda_i(x)$ tal que

$$\nabla\left(f_i(x)-x_i\right)=\lambda_i x$$

ou seja, para cada $i=1,\ldots,n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f_i(x)-x_i),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_i}(f_i(x)-x_i),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(f_i(x)-x_i)\right)=$$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f_i(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x)-1,\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}f_i(x)\right)\\ &=(\lambda_i x_1,\ldots,\lambda_i x_i\ldots,\lambda_i x_n)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}\frac{\partial f_i}{\partial_j}(x)=\lambda_i x_j, \quad j\neq i\\ \frac{\partial f_i}{\partial_i}(x)=\lambda_i x_i+1,\end{cases}.$$

Assim,

$$M(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\end{bmatrix}$$

pode ser reescrito como

$$M(x)=\begin{bmatrix}\lambda_2 x_1 & \lambda_3 x_1 & \ldots & \lambda_n x_1\\ 1+\lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_2 & \ldots & \lambda_n x_2\\ \lambda_2 x_3 & 1+\lambda_3 x_3 & \ldots & \lambda_n x_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2 x_i & \lambda_3 x_i & \ldots & \lambda_n x_i\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2 x_n & \lambda_3 x_n & \ldots & 1+\lambda_n x_n\end{bmatrix}$$

e

$$E_i(x) = det \begin{bmatrix} \lambda_2 x_1 & \lambda_3 x_1 & \dots & \lambda_n x_1 \\ 1+\lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_2 & \dots & \lambda_n x_2 \\ \lambda_2 x_3 & 1+\lambda_3 x_3 & \dots & \lambda_n x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 x_{i-1} & \lambda_3 x_{i-1} & \dots & \lambda_n x_{i-1} \\ \lambda_2 x_{i+1} & \lambda_3 x_{i+1} & \dots & \lambda_n x_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 x_n & \lambda_3 x_n & \dots & 1+\lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

De onde segue-se

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}E_i(x)x_i = x_1 \qquad (2.6)$$

E desta forma, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_S \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_1(x)E_i(x)x_i dS &= \int_S f_1(x)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}E_i(x)x_i dS \\ &= \int_S f_1(x)x_1 dS \\ &= \int_S x_1^2 dS > 0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição por (2.5). Logo, segue o teorema. ■

2.1.1 Teorema de Brouwer para a bola

Teorema 2.3 *Seja $f : \overline{B} \to \overline{B}$ uma aplicação contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Demonstração: Suponha que f não tem ponto fixo. Então

$$f(x) - x \neq 0 \quad \forall x \in \overline{B}.$$

Portanto,

$$|f(x) - x| > 0 \quad \forall x \in \overline{B}. \qquad (2.7)$$

Definindo $h(x) = |f(x) - x|$, temos que h é contínua em $\overline{B}$. Logo, como $\overline{B}$ é compacto e

$$|h(x)| > 0 \qquad \forall x \in \overline{B},$$

pelo Teorema de Weierstrass (ver Apêndice A.23) existe $c > 0$ tal que

$$c = \min_{x\in\overline{B}} |h(x)| = \min_{x\in\overline{B}} |f(x) - x| \leq |f(x) - x|, \quad \forall x \in \overline{B},$$

o que implica que

$$c \leq |f(x) - x|, \quad \forall x \in \overline{B}.$$

Temos ainda, pelo Teorema de Aproximações de Weierstrass (ver apêndice A.24), que toda função f contínua, pode ser aproximada por uma função de classe C^2. Logo, considere $g : \overline{B} \to \overline{B}$, $g \in C^2$, tal que

$$|g(x) - f(x)| < \frac{c}{2}, \qquad \forall x \in \overline{B}.$$

Então,

$$|g(x) - x| \geq \frac{c}{2} > 0, \qquad \forall x \in \overline{B}.$$

Defina então,

$$h : \overline{B} \to S$$

tal que $h(x)$ é a interseção da reta que liga $g(x)$ à x com S.

Figura 2.1: representação do h(x)

Então, a equação da reta é dada por

$$h(x) = \lambda x + (1 - \lambda) g(x), \quad \lambda \geq 1 \quad e \quad |h(x)| = 1.$$

Como $g(x) \neq x \ \forall x \in \overline{B}$, pois $|g(x) - x| \geq \frac{c}{2} > 0, \quad \forall x \in \overline{B}$, a reta está bem definida e portanto $h(x)$ também.

Devemos então mostrar que h é de classe C^2, e usando o Teorema 2.2, concluíremos que

$$h(x) \neq x \qquad \forall x \in S,$$

o que é uma contradição com a construção. Logo, f tem um ponto fixo.

Mostremos então que $h \in C^2$.

Sendo

$$h(x) = \lambda x + (1-\lambda)g(x),$$

basta mostrar que $\lambda \in C^2$, já que $x, g \in C^2$.

Note que

$$\begin{aligned}
|h(x)|^2 &= \langle h(x), h(x)\rangle \\
&= \langle \lambda x + (1-\lambda)g(x), \lambda x + (1-\lambda)g(x)\rangle \\
&= \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, (1-\lambda)g(x)\rangle + \langle (1-\lambda)g(x), \lambda x\rangle + \\
&\quad + \langle (1-\lambda)g(x), (1-\lambda)g(x)\rangle \\
&= \lambda^2|x|^2 + (1-\lambda)\lambda \langle x, g(x)\rangle + (1-\lambda)\lambda \langle x, g(x)\rangle + \\
&\quad +(1-\lambda)^2 \langle g(x), g(x)\rangle \\
&= \lambda^2|x|^2 + 2(1-\lambda)\lambda \langle x, g(x)\rangle + (1-\lambda)^2 \langle g(x), g(x)\rangle .
\end{aligned}$$

Como $|h(x)| = 1$, temos

$$|h(x)|^2 = \lambda^2|x|^2 + 2(1-\lambda)\lambda \langle x, g(x)\rangle + (1-\lambda)^2 \langle g(x), g(x)\rangle = 1,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&\lambda^2|x|^2 + 2(1-\lambda)\lambda \langle x, g(x)\rangle + (1-\lambda)^2 \langle g(x), g(x)\rangle - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^2|x|^2 - 2\lambda^2 \langle x, g(x)\rangle + \lambda^2|g(x)|^2 + 2\lambda \langle x, g(x)\rangle - 2\lambda|g(x)|^2 + |g(x)|^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^2 \left(|x|^2 - 2\langle x, g(x)\rangle + |g(x)|^2\right) + 2\lambda \left(\langle x, g(x)\rangle - \langle g(x), g(x)\rangle\right) + |g(x)|^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^2 \left(\langle x - g(x), x - g(x)\rangle\right) + 2\lambda \langle x - g(x), g(x)\rangle + |g(x)|^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^2|x - g(x)|^2 + 2\lambda \langle x - g(x), g(x)\rangle + |g(x)|^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda = \frac{-2\langle x - g(x), g(x)\rangle \pm \sqrt{4\left(\langle x - g(x), g(x)\rangle\right)^2 - 4|x - g(x)|^2\left(|g(x)|^2 - 1\right)}}{2|x - g(x)|^2}.$$

Como $|g(x)| \leq 1$, segue $|g(x)|^2 - 1 \leq 0$, e portanto

$$\left(\langle x - g(x), g(x)\rangle\right)^2 \geq |x - g(x)|^2 \left(|g(x)|^2 - 1\right).$$

Logo

$$\sqrt{4\left(\langle x - g(x), g(x)\rangle\right)^2 - 4|x - g(x)|^2\left(|g(x)|^2 - 1\right)} \geq 0.$$

Pontanto, como λ está bem definida e é soma e produto de funções de classe C^2, segue que $\lambda \in C^2$, como queríamos. ■

Corolário 2.4 *Se $B_R = B(0,R)$, $R > 0$ e $f : \overline{B}_R \to \overline{B}_R$ é uma aplicação contínua, então f tem um ponto fixo.*

Demonstração:

Para cada $f : \overline{B}_R \to \overline{B}_R$, defina

$$\begin{aligned} g : \overline{B}_1 &\longrightarrow \overline{B}_1 \\ x &\longmapsto g(x) = \tfrac{1}{R} f(Rx). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 2.3 em g, temos que existe x_0 tal que $g(x_0) = x_0$. Daí,

$$\frac{1}{R} f(Rx_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(Rx_0) = Rx_0.$$

Logo, existe $y = Rx_0$ tal que $f(y) = y$, de onde segue que f tem um ponto fixo. ∎

2.1.2 Teorema de Brouwer para um compacto e convexo

Teorema 2.5 *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto e convexo, $f : K \to K$ uma aplicação contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Demostração: Sendo K compacto e convexo, existe $R > 0$ tal que $K \subset B_R$.

Seja:

$$\begin{aligned} P_K : \mathbb{R}^N &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto P_K(x) = \min_{z \in K} ||x - z||. \end{aligned}$$

$P_K(x)$ está bem definido por (A.7).

Figura 2.2: projeção de x em K

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f} : B_R &\longrightarrow B_R \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x) = f\left(P_K(x)\right). \end{aligned}$$

Note que $\forall x \in B_R$, $\tilde{f}(x) \in K$, e portanto

$$\tilde{f}(B_R) \subset K$$

Sendo $\tilde{f}$ composição de funções contínuas, já que f é contínua por hipótese e P_k é contínua por (A.8), podemos aplicar em $\tilde{f}$ o Corolário 2.4. Daí,

$$\exists x_0 \in B_R; \quad \tilde{f}(x_0) = x_0 \in B_R.$$

Como $\tilde{f}(B_R) \subset K$, $\tilde{f}(x_0) \in K$ e portanto, $x_0 \in K$.
Mas, se $x_0 \in K$, temos $P_K(x_0) = x_0$ e daí

$$x_0 = \tilde{f}(x_0) = f(P_K(x_0)) = f(x_0)$$

ou seja, $f(x_0) = x_0$, mostrando que f tem um ponto fixo. ■

2.1.3 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstremos finalmente o principal resultado desta seção, o Teorema 2.1.

Demonstração:

Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ contínua, onde $< f(x), x >\geq 0, \ \forall x; |x| = R > 0$. Suponha que não exista x_0 tal que $|x_0| \leq R$ e $f(x_0) = 0$, ou seja:

$$\forall x \in \overline{B}_R(0), \quad f(x) \neq 0.$$

Defina então,

$$\begin{array}{rcl} g : \overline{B}_R & \longrightarrow & \overline{B}_R \\ x & \longmapsto & g(x) = -\frac{R}{|f(x)|} f(x). \end{array}$$

g está bem definida pois $\forall x \in B_R, \quad f(x) \neq 0$.

Como f é contínua, segue que g é contínua. Então, usando o Corolário 2.4, existe $x_0 \in B_R$ tal que $g(x_0) = x_0$.

Logo

$$x_0 = -\frac{R}{|f(x_0)|} f(x_0)$$

$$\Rightarrow |x_0| = \left| -\frac{R}{|f(x_0)|} f(x_0) \right| = R > 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 < R^2 = |x_0|^2 &= < x_0, x_0 > \\ &= \langle x_0, g(x_0) \rangle \\ &= \left\langle x_0, -\tfrac{R}{|f(x_0)|} f(x_0) \right\rangle \\ &= -\tfrac{R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 < R^2 \leq 0,$$

o que é um absurdo. Logo existe o x_0 tal que $|x_0| \leq R$ e $f(x_0) = 0$, como queríamos.

■

2.2 Uma aplicação do Método de Galerkin para um caso não-linear

Discutiremos a existência de solução do problema:

$$(P) \left\{ \begin{array}{r} -\Delta u - \lambda u + u^3 = f, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{array} \right. .$$

onde $f \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \neq 0$ em um subconjunto de Ω de medida positiva.

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é *solução fraca* deste problema se:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx - \lambda \int_\Omega u \psi dx + \int_\Omega u^3 \psi dx = \int_\Omega f \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Teorema 2.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $N \leq 4$. Então existe pelo menos uma solução fraca de (P), com $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet para o operador Laplaciano.*

Demonstração:

Seja $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, \cdots\}$ uma base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ (ver apêndice B.1). Temos:

$$H_0^1(\Omega) = < \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, \cdots >.$$

Defina

$$W_m = < \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m >.$$

Etapa 1:

Mostraremos que existe um $u_m \in W_m$ satisfazendo:

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u_m v dx + \int_\Omega u_m^3 v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in W_m. \tag{2.9}$$

A igualdade acima basta ser verificada para $v = \omega_i$, onde $1 \leq i \leq m$. De fato, como para cada $v \in W_m$, existe $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^m$ tal que $v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \omega_i$, verificando a igualdade (2.9) para cada ω_i e multiplicando-a por cada ξ_i respectivamente, ao somá-las obteremos a igualdade para todo $v \in W_m$.

Para cada $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^m$, associamos um único $v \in W_m$ tal que $v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \omega_i$.

Defina:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \xi & \longmapsto & F(\xi) = (F_1(\xi), \cdots, F_m(\xi)) \end{array}$$

onde, para $i = 1, \cdots, m$:

$$F_i(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla \omega_i dx - \lambda \int_\Omega v \omega_i dx + \int_\Omega v^3 \omega_i dx - \int_\Omega f \omega_i dx.$$

Como $v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \omega_i$, então:

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi \rangle &= \sum_{i=1}^{m} (F_i(\xi))\, \xi_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\int_\Omega \nabla v \nabla \omega_i dx - \lambda \int_\Omega v \omega_i dx + \int_\Omega v^3 \omega_i dx - \int_\Omega f \omega_i dx \right) \xi_i \right] \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \xi_i \right) dx - \lambda \int_\Omega v \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \xi_i \right) dx + \\
&\quad + \int_\Omega v^3 \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \xi_i \right) dx - \int_\Omega f \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \xi_i \right) dx \\
&= \textstyle\int_\Omega \nabla v \nabla v dx - \lambda \int_\Omega v v dx + \int_\Omega v^3 v dx - \int_\Omega f v dx \\
&= \textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega v^4 dx - \int_\Omega f v dx \\
&\geq \textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega v^4 dx - \int_\Omega |f v| dx \\
&= \textstyle ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega v^4 dx - \int_\Omega |f v| dx \\
&\geq \textstyle ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega v^4 dx - ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega v^4 dx - ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}.$$

Mas, como para todo v

$$\int_\Omega v^4 dx \geq 0 \tag{2.10}$$

temos

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Pela caracterização de λ_1:

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0} \frac{||v||^2_{H^1_0(\Omega)}}{||v||^2_{L^2(\Omega)}},$$

obtemos,

$$||v||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} ||v||^2_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Em (2.11), analisemos quando $\lambda < 0$ e quando $0 \leq \lambda < \lambda_1$.

Se $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi\rangle &\geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \\
&\geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)} \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} ||v||_{H^1_0(\Omega)} \\
&\geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \tfrac{||f||_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{\lambda_1}} ||v||_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $||v||^2_{H^1_0(\Omega)} = |\xi|^2$, temos

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq |\xi|^2 - C|\xi|$$

onde $C = \frac{||f||_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{\lambda_1}}$.

Logo, para $|\xi| = R$, considerando $R > ||f||_{L^2(\Omega)} \lambda_1^{-1/2}$, segue-se que

$$\langle F(\xi), \xi\rangle > 0 \qquad \forall \xi; |\xi| = R.$$

Se $0 \leq \lambda < \lambda_1$, por (2.12) :

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi\rangle &\geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda ||v||^2_{L^2(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \\
&\geq ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{\lambda_1} ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - ||f||_{L^2(\Omega)} \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} ||v||_{H^1_0(\Omega)} \\
&\geq \left(1 - \tfrac{\lambda}{\lambda_1}\right) ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - \tfrac{||f||_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{\lambda_1}} ||v||_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\lambda < \lambda_1$ e $||v||^2_{H^1_0(\Omega)} = |\xi|^2$, segue

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq C_3 |\xi|^2 - C_4 |\xi|$$

onde $C_3 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$ e $C_4 = \frac{||f||_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{\lambda_1}}$.

Portanto, para $|\xi| = R$, considerando $R > ||f||_{L^2(\Omega)} \lambda_1^{-1/2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{-1}$, obtemos

$$\langle F(\xi), \xi\rangle > 0 \qquad \forall \xi; |\xi| = R$$

Assim, pelo Teorema 2.1, existe um $\xi^m = (\xi_i^m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$|\xi^m| \leq R \quad \text{e} \quad F(\xi^m) = 0. \tag{2.13}$$

Seja então,

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^m \omega_i.$$

Observe que $u_m \in W_m$ e que u_m satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u_m v dx + \int_\Omega u_m^3 v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{2.14}$$

De fato, pela definição de F, para cada $i = 1, ..., m$

$$F_i(\xi^m) = \int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_i dx - \lambda \int_\Omega u_m \omega_i dx + \int_\Omega u_m^3 \omega_i dx - \int_\Omega f \omega_i dx.$$

Por (2.13):

$$0 = \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi^m).\xi_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_i dx - \lambda \int_\Omega u_m \omega_i dx + \int_\Omega u_m^3 \omega_i dx - \int_\Omega f \omega_i dx \right).\xi_i,$$

de onde segue (2.14).

Além disso:

$$||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \sum_{i=m}^{m} \xi_i^m, \sum_{i=m}^{m} \xi_i^m \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = |\xi^m|^2,$$

Daí,

$$||u_m||_{H_0^1(\Omega)} = |\xi^m| \leq R.$$

Como R depende apenas de λ e f, ou seja, independe de m, segue-se que $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Etapa 2:

Sendo $\{u_m\}$ uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subseqüência (ver Apêndice A.12) temos

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

e das Imersões Compactas de Sobolev (ver Apêndice A.17), resulta que

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Etapa 3:

Seja $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $C_0^\infty(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$, temos $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, temos que, para algum α:

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i.$$

Além disso, existe $v_k \in W_k$ tal que

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k. \tag{2.15}$$

Note que $v_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \omega_i$.

Fixemos $k \leq m$ $(W_k \subseteq W_m)$.

Como na **Etapa 1** mostramos que existe $u_m \in W_m$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u_m v dx + \int_\Omega u_m^3 v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in W_m,$$

segue que, para o caso particular $v_k \in W_k \subseteq W_m$:

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v_k dx - \lambda \int_\Omega u_m v_k dx + \int_\Omega u_m^3 v_k dx = \int_\Omega f v_k dx \quad \forall v_k \in W_k.$$

Passando o limite quando $m \to \infty$ e depois quando $k \to \infty$, encontraremos que:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega u v dx + \int_\Omega u^3 v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por densidade, para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$ existe $\{v_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$v_n \longrightarrow \psi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Assim, como para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \int_\Omega u v_n dx + \int_\Omega u^3 v_n dx = \int_\Omega f v_n dx \quad \forall v_n \in C_0^\infty(\Omega).$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx - \lambda \int_\Omega u \psi dx + \int_\Omega u^3 \psi dx = \int_\Omega f \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

mostrando que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P).

Mostremos, a seguir, as convergências quando $m \to \infty$ e $k \to \infty$. A convergência quando $n \to \infty$ segue análoga. Inicialmente, fixemos o k e passemos o limite quando $m \to \infty$.

(1º Passo) objetivo: $\int_\Omega \nabla u_m \nabla v_k dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx.$

Por definição de convergência fraca,

$$u_m \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; F(u_m) \to F(u),\; \forall F \in H^{-1}(\Omega).$$

Considere então

$$\begin{array}{rcl} F : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \hookrightarrow & F(u) = < u, v_k >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx, \end{array}$$

como F é linear e contínuo, pela Desigualdade de Cauchy-Schartz, teremos

$$u_m \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; \int_\Omega \nabla u_m \nabla v_k dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx.$$

(2º Passo) objetivo: $\int_\Omega u_m v_k dx \to \int_\Omega u v_k dx.$

Pela Desigualdade de Hölder e como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$:

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_\Omega u_m v_k dx - \int_\Omega u v_k dx\right| & \leq & \int_\Omega |v_k||u_m - u| dx \\ & \leq & ||v_k||_{L^2(\Omega)}||u_m - u||_{L^2(\Omega)} \to 0. \end{array}$$

Agora, passando ao limite quando $k \to \infty$:

(3º Passo) objetivo:$\int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$

De (2.15):

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| & = & \left|\int_\Omega \nabla u \nabla \left(v_k - v\right) dx\right| \\ & \leq & \int_\Omega |\nabla u| \left|\nabla \left(v_k - v\right)\right| dx \\ & \leq & ||u||_{H_0^1(\Omega)}||v_k - v||_{H_0^1(\Omega)} \to 0. \end{array}$$

(4º Passo) objetivo: $\int_\Omega u v_k dx \to \int_\Omega u v dx.$

Pela Desigualdade de Hölder e como $v_k \to v$ em $L^2(\Omega)$:

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_\Omega u v_k dx - \int_\Omega u v dx\right| & \leq & \int_\Omega |u|.|v_k - v| dx \\ & \leq & ||u||_{L^2(\Omega)}||v_k - v||_{L^2(\Omega)} \to 0. \end{array}$$

(5º Passo) objetivo: $\int_\Omega f v_k dx \to \int_\Omega f v dx.$

De fato, pela desigualdade de Hölder e por 2.15 ,

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_\Omega f v_k dx - \int_\Omega f v dx\right| & \leq & \int_\Omega |f||v_k - v| dx \\ & \leq & ||f||_{L^2(\Omega)}||v_k - v||_{L^2(\Omega)} \to 0. \end{array}$$

Para mostrarmos que $\int_\Omega u_m^3 v_k dx \;\to\; \int_\Omega u^3 v dx$, passaremos o limite quando $m \to \infty$ e quando $k \to \infty$, conjuntamente.

(6º Passo) objetivo: $\int_\Omega u_m^3 v_k dx \to \int_\Omega u^3 v dx$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_m^3 v_k dx - \int_\Omega u^3 v dx\right| &\leq \int_\Omega |u_m^3 v_k - u^3 v|\, dx \\
&= \int_\Omega |u_m^3 v_k - u_m^3 v + u_m^3 v - u^3 v|\, dx \\
&= \int_\Omega |u_m^3 (v_k - v) + v(u_m^3 - u^3)|\, dx \\
&\leq \int_\Omega |u_m|^3 |(v_k - v)| dx + \int_\Omega |v||(u_m^3 - u^3)| dx
\end{aligned}$$

Afirmação 1: $\int_\Omega |u_m|^3 |(v_k - v)| dx \to 0.$

De fato, como estamos com $N \leq 4$, das Imersões Contínuas de Sobolev (ver Apêndice A.16),

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ \ 1 \leq p \leq 4.$$

Logo, aplicando a Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m|^3 |(v_k - v)| dx &\leq \left(\int_\Omega (|u_m|^3)^{\frac{4}{3}}\, dx\right)^{\frac{3}{4}} . \left(\int_\Omega |v_k - v|^4\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= ||u_m||^3_{L^4(\Omega)} . ||v_k - v||_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C_1 ||u_m||^3_{H_0^1(\Omega)} . ||v_k - v||_{H_0^1(\Omega)} \to 0.
\end{aligned}$$

Afirmação 2: $\int_\Omega |v||(u_m^3 - u^3)| dx \to 0.$

Sendo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, temos $v \in L^\infty(\Omega)$. Denotemos a norma em $L^\infty(\Omega)$ por:

$$||v||_\infty = \inf\{\alpha; |v(x)| \leq \alpha \ \ q.t.p.\}.$$

Portanto, pela Desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Poincaré:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v||(u_m^3 - u^3)| dx &\leq ||v||_\infty \int_\Omega |(u_m^3 - u^3)| dx \\
&\leq ||v||_\infty \int_\Omega |(u_m - u)(u_m^2 + u_m u + u^2)| dx \\
&\leq ||v||_\infty \int_\Omega |u_m - u| \left(|u_m|^2 + |u_m||u| + |u|^2\right) dx \\
&\leq C_1 ||v||_\infty \int_\Omega |u_m - u| \left(|u_m|^2 + |u|^2\right) dx \\
&= C_1 ||v||_\infty \left(\int_\Omega |u_m - u||u_m|^2 dx + \int_\Omega |u_m - u||u|^2 dx\right) \\
&\leq C_1 ||v||_\infty \left(\left(\int_\Omega |u_m - u|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_\Omega |u_m|^4\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_\Omega |u_m - u|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_\Omega |u|^4\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= C_1 ||v||_\infty \left(||u_m - u||_{L^2(\Omega)} \left(||u_m||^2_{L^4(\Omega)} + ||u||^2_{L^4(\Omega)}\right)\right) \to 0.
\end{aligned}$$

já que $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$.

Portanto, das **Afirmações 1** e **2**,

$$\left|\int_\Omega u_m^3 v_k dx - \int_\Omega u^3 v dx\right| \leq \int_\Omega |u_m|^3 |(v_k - v)| dx + \int_\Omega |v||(u_m^3 - u^3)| dx \to 0.$$

Segue então, dos passos anteriores que

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla v_k dx - \lambda \int_\Omega u_m v_k dx + \int_\Omega u_m^3 v_k dx = \int_\Omega f v_k dx \ \ \forall v_k \in W_k$$

converge para

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx + \int_\Omega u^3 v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

E da densidade de $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \int_\Omega u v_n dx + \int_\Omega u^3 v_n dx = \int_\Omega f v_n dx \quad \forall v_n \in C_0^\infty(\Omega)$$

converge, quando $n \to \infty$, para

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx - \lambda \int_\Omega u\psi dx + \int_\Omega u^3 \psi dx = \int_\Omega f \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

de onde segue que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema **(P)**. ■

2.3 Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha

No teorema a seguir usaremos as seguintes definições:

Definição 2.7 (Seqüência de Palais-Smale no nível c) (ver [4], p. 234)
Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X;\mathbb{R})$ onde X é um espaço normado. Dizemos que $\{x_n\}$ é uma seqüência do Tipo Palais-Smale no nível c*, denotada por $(P.S.)_c$, associada a J, se*

$$J(x_n) \to c \quad e \quad J'(x_n) \to 0.$$

Definição 2.8 (Condição de Palais-Smale) *Um funcional $J : X \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(X,\mathbb{R})$ é dito verificar a* Condição de Palais-Smale *, denotada por $(P.S.)$, se toda seqüência $(P.S.)_d$ com $d \in \mathbb{R}$ admite uma subseqüência fortemente convergente em X.*

Teorema 2.9 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X,\mathbb{R})$ que verifica a condição de Palais-Smale, $(P.S.)$. Suponhamos que φ verifica:*
(i) *$\varphi(0) = 0$;*
(ii) *Existem $r, \rho > 0$ tal que $\varphi(u) \geq r$ $\forall u \in S_\rho(0)$, ou seja, $\forall u; ||u|| = \rho$;*
(iii) *Existe $e \in \left(\overline{B_\rho(0)}\right)^c$ em X verificando $\varphi(e) < 0$, onde $\left(\overline{B_\rho(0)}\right)^c$ é o complementar da bola centrada em zero e raio ρ.*
Então, o funcional φ tem um ponto crítico no nível c dado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X); \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de solução fraca não-trivial para o problema:

$$(I)\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = u^3, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

com $\lambda < \lambda_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $N \leq 4$.

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é *solução fraca* de (I) se:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx - \lambda \int_\Omega u\psi dx = \int_\Omega u^3 \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Por se tratar de um problema Variacional, sabemos que uma solução fraca para (I) é um ponto crítico do funcional Energia (ou de Euler-Lagrange) associado ao funcional:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx. \end{array} \tag{2.17}$$

Observe que φ está bem definido, pois, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega u^2 dx < +\infty.$$

Além disso, das Imersões Contínuas de Sobolev (ver Apêndice A.16),

$$\frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx < +\infty,$$

pois, exite $C > 0$ tal que

$$||u||_{L^4(\Omega)} \leq C||u||_{H_0^1(\Omega)} < +\infty.$$

No Teorema do Passo da Montanha, considerando $X = H_0^1(\Omega)$ e definindo o funcional φ em (2.17), devemos mostrar que:

(I) $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$;

(II) $\varphi(0) = 0$;

(III) Existem $r, \rho > 0$ tal que $\varphi(u) \geq r$ $\forall u; ||u|| = \rho$;

(IV) Existe $e \in \left(\overline{B_\rho(0)}\right)^c$ verificando $\varphi(e) < 0$;

(V) φ verifica a Condição de Palais-Smale.

Daí, concluiremos que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ onde

$$\varphi(u_0) = c \geq r > 0 \tag{2.18}$$

e

$$\varphi'(u_0) = 0. \tag{2.19}$$

Como $\varphi(0) = 0$, temos que u_0 é um ponto crítico não trivial de φ por (2.18). Além disso, por (2.19):

$$\varphi'(u_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(u_0).v = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega uv dx - \int_\Omega u^3 v dx = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

portanto, u_0 é uma solução não trivial para o problema (I).

Verifiquemos então os itens **(I)**, **(II)**, **(III)** e **(IV)**.

(I) Inicialmente, mostraremos que $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que

$$\varphi'(u).h = \int_\Omega \nabla u \nabla h - \lambda \int_\Omega uh dx - \int_\Omega u^3 h dx. \tag{2.20}$$

Considere

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \varphi_2(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx \qquad \varphi_3(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega |u|^4 dx$$

Encontremos a *derivada de Gateaux* (ver Apêndice A.10) de cada funcional $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

(Parte 1)

Temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial h}(u) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_1(u+th) - \varphi_1(u)}{t} \\
&= \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\langle u+th, u+th\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{t} \\
&= \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega)} + 2t\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} + t^2\langle v,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{t} \\
&= \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0} 2\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} - t\langle v,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \textstyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_1(u+h)-\varphi_1(u)-\varphi_1'(u).h}{||h||} &= \frac{\frac{1}{2}\langle u+h,u+h\rangle-\frac{1}{2}\langle u,u\rangle-\langle u,h\rangle}{||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\langle u,u\rangle+\langle u,h\rangle\frac{1}{2}\langle h,h\rangle-\frac{1}{2}\langle u,u\rangle-\langle u,h\rangle}{||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{||h||^2_{H_0^1(\Omega)}}{||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= \frac{||h||_{H_0^1(\Omega)}}{2} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

é Fréchet Diferenciável (ver Apêndice A.9), com derivada

$$\varphi_1'(u).h = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx.$$

Mostremos então que φ_1' é contínua, ou seja,

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega) \;\Rightarrow\; \varphi_1'(u_n) \to \varphi_1'(u).$$

Veja que

$$||\varphi_1'(u_n) - \varphi_1'(u)||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} |\varphi_1'(u_n)h - \varphi_1'(u)h|.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
|\varphi_1'(u_n)h - \varphi_1'(u)h| &= \left|\langle u_n, h\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle u, h\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right|\\
&= \left|\langle u_n - u, h\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right|\\
&= \left|\int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla h dx\right|\\
&\leq \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|\, |\nabla h|\, dx\\
&\leq ||u_n - u||_{H_0^1(\Omega)}||h||_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
||\varphi_1'(u_n) - \varphi_1'(u)||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} |\varphi_1'(u_n)h - \varphi_1'(u)h|\\
&\leq \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} ||u_n - u||_{H_0^1(\Omega)} \to 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi_1'(u_n) \longrightarrow \varphi_1'(u)$$

como queríamos.

(Parte 2)

Analogamente mostremos que

$$\varphi_2(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx$$

é Fréchet diferenciável com derivada

$$\varphi_2'(u).h = \lambda \int_\Omega uhdx$$

e que $\varphi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega);\mathbb{R})$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial\varphi_2}{\partial h}(u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_2(u+th)-\varphi_2(u)}{t}\\
&= \tfrac{\lambda}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega |u+th|^2dx - \int_\Omega |u|^2}{t}dx\\
&= \tfrac{\lambda}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega \left(u^2+2tuh+t^2h^2-u^2\right)dx\\
&= \tfrac{\lambda}{2}\lim_{t\to 0}\int_\Omega \left(2uh+th^2\right)dx\\
&= \tfrac{\lambda}{2}\textstyle\int_\Omega (2uh)dx\\
&= \lambda \textstyle\int_\Omega (uh)dx
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial h}(u) = \lambda\int_\Omega uhdx$$

Além disso, quando $||h||_{H_0^1(\Omega)} \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_2(u+h)-\varphi_2(u)-\varphi_2'(u).h}{||h||_{H_0^1(\Omega)}} &= \frac{\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u+h|^2dx - \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \lambda\int_\Omega uhdx}{||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= \frac{\lambda}{2||h||_{H_0^1(\Omega)}}\textstyle\int_\Omega \left(u^2+2uh+h^2-u^2-2uh\right)dx\\
&= \frac{\lambda}{2||h||_{H_0^1(\Omega)}}\textstyle\int_\Omega h^2dx\\
&= \frac{\lambda||h||^2_{L^2(\Omega)}}{2||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&\le \lambda\frac{C_1||h||^2_{H_0^1(\Omega)}}{||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= \frac{\lambda C_1}{2}||h||_{H_0^1(\Omega)} \to 0.
\end{aligned}$$

Mostremos então que a derivada de Gateaux é contínua, ou seja,

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega) \;\Rightarrow\; \varphi_2'(u_n) \to \varphi_2'(u).$$

Observe que

$$\begin{aligned} ||\varphi_2'(u_n) - \varphi_2'(u)||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} |\varphi_2'(u_n)h - \varphi_2'(u)h| \\ &= \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} \left|\lambda \int_\Omega u_n h dx - \lambda \int_\Omega u h dx\right|. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left|\lambda \int_\Omega u_n h dx - \lambda \int_\Omega u h dx\right| &\leq \lambda \int_\Omega |u_n - u||h| dx \\ &\leq \lambda ||u_m - u||_{L^2(\Omega)} ||h||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \lambda C_1 ||u_m - u||_{H_0^1(\Omega)} ||h||_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\varphi_2'(u_n) - \varphi_2'(u)||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} \left|\lambda \int_\Omega u_n h dx - \lambda \int_\Omega u h dx\right| \\ &\leq C_1 \lambda \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1} ||u_n - u||_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\varphi_2'(u_n) \longrightarrow \varphi_2'(u).$$

(Parte 3)

Nos resta mostrar que

$$\varphi_3 \in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbb{R}).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(u) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_3(u+th) - \varphi_3(u)}{t} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega |u+th|^4 dx - \int_\Omega |u|^4}{t} dx \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t\to 0} \int_\Omega \left(4u^3 h + 4tu^2h^2 + 2tu^2h^3 + 4t^2uh^3 + t^3u^4\right) dx \\ &= \int_\Omega u^3 h dx + \frac{1}{4} \lim_{t\to 0} t \left(\int_\Omega (4u^2h + 2u^2h^2 + 4tuh^3 + t^2u^4) dx\right) \\ &= \int_\Omega u^3 h dx \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(u) = \int_\Omega u^3 h dx$$

Observe ainda que, quando $||h||_{H_0^1(\Omega)} \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_3(u+h)-\varphi_3(u)-\varphi_3'(u).h}{||h||_{H_0^1(\Omega)}} &= \frac{1}{4||h||_{H_0^1(\Omega)}}\left(\int_\Omega ((u+h)^4-u^4-4u^3h)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{4||h||_{H_0^1(\Omega)}}\left(\int_\Omega (u^4+4u^3h+6u^2h^2+4uh^3+h^4-u^4-4u^3h)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{4||h||_{H_0^1(\Omega)}}\left(\int_\Omega h^2\,(6u^2+4uh+h^2)\,dx\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_3(u+h)-\varphi_3(u)-\varphi_3'(u).h}{||h||_{H_0^1(\Omega)}} &\leq \frac{||h||^2_{L^2(\Omega)}||6u^2+4uh+h^2||_{L^2(\Omega}}{4||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&\leq C_1\frac{||h||^2_{H_0^1(\Omega)}||6u^2+4uh+h^2||_{L^2(\Omega}}{4||h||_{H_0^1(\Omega)}}\\
&= C_1\frac{||h||_{H_0^1(\Omega)}||6u^2+4uh+h^2||_{L^2(\Omega}}{4}\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Mostremos então que a derivada de Gateaux é contínua, isto é,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H_0^1(\Omega) \;\Rightarrow\; \varphi_3'(u_n)\rightarrow \varphi_3'(u).$$

Sendo

$$\begin{aligned}
|u_n^3-u^3|^{\frac{4}{3}} &\leq ||u_n|^3+|u|^3|^{\frac{4}{3}}\\
&\leq 2\,(\max\{|u_n|^3+|u|^3\})^{\frac{4}{3}}\\
&\leq 2\max\{|u_n|^4+|u|^4\}\in L^1(\Omega),
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice A.4)

$$||u_n^3-u^3||_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)}\longrightarrow 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_n^3hdx-\int_\Omega u^3hdx\right| &\leq \int_\Omega |u_n^3-u^3||h|dx\\
&\leq ||u_n^3-u^3||_{L^{\frac{4}{3}}}||h||_{L^4(\Omega)}\\
&\leq C_1||u_n^3-u^3||_{L^{\frac{4}{3}}}||h||_{H_0^1(\Omega)}\\
&\leq C_1||u_n^3-u^3||_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)}\rightarrow 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
||\varphi_3'(u_n)-\varphi_3'(u)|\,|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1}\left|\int_\Omega u_n^3hdx-\int_\Omega u^3hdx\right|\\
&\leq C_1\sup_{||h||_{H_0^1(\Omega)}=1}||u_n^3-u^3||_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)}\rightarrow 0
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\varphi_3'(u_n) \longrightarrow \varphi_3'(u).$$

Conclusão: Das **Partes 1, 2 e 3**, temos

$$\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$$

e

$$\varphi'(u).h = \int_\Omega \nabla u \nabla h - \lambda \int_\Omega uhdx - \int_\Omega u^3 hdx.$$

(II) De fato,

$$\varphi(0) = 0.$$

(III) Temos dois casos para analisar. Quando $\lambda < 0$ e $0 \leq \lambda < \lambda_1$.

Se $\lambda < 0$:

$$\frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

e se $0 \leq \lambda < \lambda_1$:

$$\frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1-\lambda_1 C_1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \tfrac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \tfrac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx \\ &= \tfrac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{4}||u||^4_{L^4(\Omega)} \\ &\geq \tfrac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}||u||^2_{H_0^1(\Omega)} - \tfrac{1}{4}C_2||u||^4_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

fazendo $\rho = ||u||_{H_0^1(\Omega)} > 0$, temos

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}\rho^2 - \frac{1}{4}C_2\rho^4.$$

Considerando $r = \frac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}\rho^2 - \frac{1}{4}C_2\rho^4$, queremos que

$$\frac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}\rho^2 - \frac{1}{4}C_2\rho^4 > 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\} - \frac{1}{4}C_2\rho^2 > 0$$

Assim, existem $\rho > 0$ e $r > 0$:

$$0 < \rho < \sqrt{\frac{2\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}}{C_2}}$$

e

$$r = \frac{1}{2}\min\{1, 1-\lambda_1 C_1\}\rho^2 - \frac{1}{4}C_2\rho^4$$

tais que

$$\varphi(u) \geq r > 0, \quad \forall u; ||u||_{H_0^1(\Omega)} = \rho.$$

(IV) Considere $t > 0$. Daí

$$\varphi(tv) = \frac{1}{2}t^2||v||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}t^2||v||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4}t^4||v||^4_{L^4(\Omega)}$$

Seja $\left(\overline{B_{\frac{\rho}{t_0}}(0)}\right)^c$ o complementar da bola de centro no ponto 0 e raio $\frac{\rho}{t_0}$. Fixe $v \in \left(\overline{B_{\frac{\rho}{t_0}}(0)}\right)^c$, com t_0 suficientemente grande $\left(t_0 > \sqrt{\frac{2\min\{1,1-\lambda_1 C_1\}}{C_2}}\right)$. Temos

$$\varphi(t_0 v) < 0$$

e

$$||t_0 v|| = t_0||v|| > t_0\frac{\rho}{t_0} = \rho$$

Portanto, para $e = t_0 v$, segue que $e \in \left(\overline{B_\rho}(0)\right)^c$ e $\varphi(e) < 0$, como queríamos.

(V) Seja $\{u_n\}$ uma seqüência tal que

$$(P.S.)_c \begin{cases} \varphi(u_n) \longrightarrow c & \text{em} \quad \mathbb{R} \\ \varphi'(u_n) \longrightarrow 0 & \text{em} \quad H^{-1}(\Omega) \end{cases}.$$

Provemos que existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\} \subseteq \{u_n\}$ convergente. Mostraremos inicialmente que $\{u_n\}$ é limitado.

Como

$$\varphi'(u).h = \int_\omega (\nabla u \nabla h - \lambda u h)\, dx - \int_\Omega u^3 h dx,$$

temos

$$\varphi'(u_n)u_n = ||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda||u_n||^2_{L^2(\Omega)} - ||u_n||^4_{L^4(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Além disso,

$$\varphi(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4}||u_n||^4_{L^4(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(u_n) - \tfrac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n \quad = \quad & \tfrac{1}{2}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{4}||u_n||^4_{L^4(\Omega)} + \\ & -\tfrac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{4}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{4}||u_n||^4_{L^4(\Omega)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(u_n) - \frac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n = \frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{4}||u_n||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Por outro lado,

$$\varphi(u_n) - \frac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n \leq \left|\varphi(u_n) - \frac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n\right|$$

e portanto,

$$\varphi(u_n) - \frac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n \leq |\varphi(u_n)| - \frac{1}{4}||\varphi'(u_n)||||u_n||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Uma vez que, por hipótese,

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c,$$

para n grande, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|\varphi(u_n)| \leq C_1.$$

E pela hipótese

$$\varphi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

para n grande, existe $C_2 > 0$ tal que

$$||\varphi'(u_n)|| \leq C_2.$$

Assim, por (2.23):

$$\varphi(u_n) - \frac{1}{4}\varphi'(u_n)u_n \leq C_1 + \frac{C_2}{4}||u_n||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, de (2.22) e (2.23):

$$\frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{4}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 + \frac{C_2}{4}||u_n||_{H_0^1(\Omega)}.$$

(Caso 1): $\lambda < 0$

Note que

$$\frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{4}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 + \frac{C_2}{4}||u_n||_{H_0^1(\Omega)}$$

de onde segue que

$$||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 4C_1 + C_2||u_n||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Suponha que $\{u_n\}$ não seja limitada. Então, existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\} \subseteq \{u_n\}$ tal que

$$||u_{n_j}||_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \infty.$$

Mas, por (2.24), teríamos

$$1 \leq \frac{4C_1}{||u_{n_j}||^2_{H_0^1(\Omega)}} + \frac{C_2}{||u_{n_j}||_{H_0^1(\Omega)}} \to 0$$

o que é um absurdo. Logo $\{u_n\}$ é limitada.

(Caso 2): $0 \leq \lambda < \lambda_1$

Observe que neste caso,

$$\frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{4\lambda_1}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{4}||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{4}||u_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 + \frac{C_2}{4}||u_n||_{H_0^1(\Omega)}$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)||u_n||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 + \frac{C_2}{4}||u_n||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.25}$$

E, analogamente ao **Caso 1**, se supormos que $\{u_n\}$ não é limitada, então existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\} \subseteq \{u_n\}$ tal que

$$||u_{n_j}||_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \infty.$$

Por (2.25), teríamos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \leq \frac{4C_1}{||u_{n_j}||^2_{H_0^1(\Omega)}} + \frac{C_2}{||u_{n_j}||_{H_0^1(\Omega)}} \to 0$$

o que é um absurdo, e mais uma vez segue que $\{u_n\}$ é limitada.

Afirmação: A seqüência $\{u_n\}$ tem uma subseqüência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$.

Sendo $\{u_n\}$ limitada e $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, a menos de subseqüência

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso, sabemos que

$$\int_\Omega u_m^2 dx \to \int_\Omega u^2 dx;$$
$$\int_\Omega u_m^4 dx \to \int_\Omega u^4 dx.$$

Logo, como por (2.21)

$$||u_n||_{H_0^1(\Omega)} = \lambda \int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega u_n^4 dx + \varphi'(u_n)u_n. \tag{2.26}$$

e

$$\varphi'(u_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(u_n)u_n \to 0$$

segue que, passando ao limite quando $n \to \infty$ em (2.26):

$$||u_n||^2_{H^1_0(\Omega)} = \lambda \int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega u_n^4 dx + \varphi'(u_n)u_n \to \lambda \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega u^4 dx = ||u||^2_{H^1_0(\Omega)},$$

já que

$$\varphi'(u)u \to 0.$$

Ou seja,

$$||u_n||_{H^1_0(\Omega)} \to ||u||_{H^1_0(\Omega)}.$$

Portanto, de (A.20), como

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1_0(\Omega)$$

$$||u_n||_{H^1_0(\Omega)} \to ||u||_{H^1_0(\Omega)}$$

segue que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1_0(\Omega).$$

como queríamos.

2.4 Método Variacional versus Método de Galerkin

Compararemos os problemas

$$(P^*) \begin{cases} -\Delta u - \lambda u + u^3 = 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

e

$$(P^{**}) \begin{cases} -\Delta u - \lambda u = u^3, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases},$$

com $\lambda < \lambda_1$.

Note que, tanto (P^*) quanto (P^{**}) são problemas Variacionais, onde os funcionais de Euler-Lagrange associados são dados por:

$$\begin{aligned} \varphi : H^1_0(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi : H^1_0(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

respectivamente.

O problema (P^*) é um caso particular do problema (P) da *Seção 2.2*, com $f = 0$. Logo, pode ser resolvido pelo Método de Galerkin, no entanto, não pode ser resolvido pelo Teorema do Passo da Montanha, visto que não satisfaz a hipótese **(III)**.
De fato, basta observar que, para $\lambda < 0$
não existe $e \in \left(\overline{B_\rho(0)}\right)^c$ verificando $\varphi(e) < 0$, já que

$$\varphi(u) \geq 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Já o problema (P^{**}) é um caso onde não podemos usar os passos do problema (P^*) para aplicar o Método de Galerkin. Voltando às etapas do Método de Galerkin na **Seção (2.2)**, a Condição (2.10) não será satisfeita, já que

$$-\frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx \leq 0, \quad \forall u.$$

Mas, como vimos na **Seção (2.3)**, este problema pode ser resolvido pelo Teorema do Passo da Montanha.

Capítulo 3

Sistema Elíptico não-variacional via Método de Galerkin

Neste capítulo estudaremos a existência de solução para o sistema elíptico não-variacional da forma

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f(x,u,v), \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g(x,u,v), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Analisaremos os seguintes casos:

(i)quando $\alpha, \beta \in (0,1)$;

(ii)quando $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in [1, 2^* - 1)$;

(iii)quando $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ e $\beta \in (0,1)$.

As funções $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções não-lineares, contínuas e de Lipschitz.

Inicialmente consideraremos o caso quando nessas funções os expoentes não ultrapassam o expoente $2^* - 1$, o caso subcríticos. Posteriormente consideraremos o caso supercrítico, onde este expoente é ultrapassado.

3.1 Sistema elíptico aproximado

Considere o sistema

$$(P)_\lambda \begin{cases} -\Delta u = au^\alpha + f(x,u,v) + \lambda\phi, \Omega \\ -\Delta v = bu^\beta + g(x,u,v) + \lambda\phi, \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é uma função não-negativa, não-nula, fixada e λ é um parâmetro positivo.

Diremos que $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é *solução fraca* de $(P)_\lambda$ se:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx = a\int_\Omega (u)^\alpha \omega dx + \int_\Omega f(x,u,v)\omega dx + \lambda \int_\Omega \phi\omega dx, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega) \tag{3.1}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx = b\int_\Omega (u)^\beta \psi dx + \int_\Omega g(x,u,v)\psi dx + \lambda \int_\Omega \phi\psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

No decorrer do texto, provaremos que a solução fraca de (P) será dada por $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, satisfazendo (3.1) e (3.2) quando $\lambda \to 0$.

Teorema 3.1.1 *Seja $(P)_\lambda$ com as seguintes condições:*
(H_0) $f(x,0,0) = g(x,0,0) = 0$
(H_1) $f(x,0,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *e* $g(x,u,0) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
(H_2) $\begin{array}{l} |f(x,u,v)| \leq k_1(|v|^p + |u|^q) \\ |g(x,u,v)| \leq k_2(|v|^p + |u|^q) \end{array}$ *onde* $p, q \in [1, 2^*-1]$, *para* $N > 2$.
Então existem a^*, b^*, λ^* números positivos, tais que:
(i) Se $\alpha, \beta \in (0,1)$, o problema $(P)_\lambda$ tem uma solução fraca para $(a,b,\lambda) \in (0,a^*) \times (0,b^*) \times (0,\lambda^*)$;
(ii) Se $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in [1, 2^*-1)$, o problema $(P)_\lambda$ tem uma solução fraca para $(a,b,\lambda) \in (0,a^*) \times (0,\infty) \times (0,\lambda^*)$;
(iii) Se $\alpha \in [1, 2^*-1)$ e $\beta \in (0,1)$, o problema $(P)_\lambda$ tem uma solução fraca para $(a,b,\lambda) \in (0,\infty) \times (0,b^*) \times (0,\lambda^*)$.
Ainda, se (u_λ, v_λ) é solução fraca de $(P)_\lambda$, segue uma das seguintes desigualdades:

$$u \geq a^{\frac{1}{1-\alpha}}\omega_1 \quad ou \quad v \geq b^{\frac{1}{1-\beta}}\omega_2 \quad em \quad \Omega$$

onde:

Se $\alpha \in (0,1)$, *denotaremos* ω_1 *a solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\alpha}, \Omega \\ u > 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Se $\beta \in (0,1)$, *denotaremos* ω_2 *a solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{\beta}, \Omega \\ v > 0, \Omega \\ v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Demonstração:

A princípio, demonstraremos apenas o caso (i), visto que os casos (ii) e (iii) seguem analogamente. Quando em alguma parte da demonstração a análise for diferenciada, faremos uma observação de como ela será feita em cada uma das situações. Seja $\Sigma = \{e_1, e_2, ..., e_m, ...\}$ uma base ortonormal de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (ver Apêndice B.1).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos

$$V_m = < e_1, e_2, ..., e_m >.$$

Consideraremos em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ a norma dada por

$$||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \left(||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Dado $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)$ considere a norma:

$$|\eta|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\eta_i|^2.$$

A idéia é:

(Etapa 1)

Para cada $m \in \mathbb{N}$ mostraremos que existem a^*, b^*, λ^* números positivos, independentes de m, tais que:

$$\forall\, (a,b,\lambda) \in (0,a^*) \times (0,\infty) \times (0,\lambda^*)$$

existe $(u_m, v_m) \in V_m \times V_m$ verificando:

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx = a \int_\Omega ({u_m}^+)^{\alpha} e_i dx + \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+) e_i dx + \lambda \int_\Omega \phi e_i dx \qquad (3.3)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_i dx = b\int_\Omega ({u_m}^+)^\beta e_i dx + \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+) e_i dx + \lambda \int_\Omega \phi e_i dx \qquad (3.4)$$

para todo $i = 1, ..., m$, onde $u^+ = max\{u, 0\}$ e $u^+ \in H_0^1(\Omega)$.

(Etapa 2)

Mostraremos que $\{u_m\}$, $\{v_m\}$ são limitadas em $H_0^1(\Omega)$. Logo, a menos de subseqüência (ver Apêndice A.12), tem-se:

$$u_m \rightharpoonup u \;\; em \;\; H_0^1(\Omega)$$
$$v_m \rightharpoonup v \;\; em \;\; H_0^1(\Omega)$$
$$u_m(x) \rightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$$
$$v_m(x) \rightarrow v(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$$

(Etapa 3)

Para cada $W, U \in H_0^1(\Omega)$, $W = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_i e_i$ e $U = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_i e_i$, existem $\omega_k, \psi_k \in V_k$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = W \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k = U.$$

Passando ao limite em (3.3) e (3.4) quando $m \longrightarrow \infty$ e depois quando $k \longrightarrow \infty$, concluíremos que $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução de $(P)_\lambda$.

Façamos com detalhes cada etapa citada.

(Etapa 1)

Considere

$$\begin{array}{cccl} F : \mathbb{R}^{2m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m} & \\ (\eta, \xi) & \hookrightarrow & F(\eta, \xi) = (F_1(\eta, \xi), F_2(\eta, \xi) ..., F_m(\eta, \xi), G_1(\eta, \xi), G_2(\eta, \xi) ..., G_m(\eta, \xi)) \end{array}$$

com

$$F_i(\eta, \xi) = \int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx - a\int_\Omega (u^+)^\alpha e_i - \int_\Omega f(x, u^+, v^+) e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx$$

e

$$G_i(\eta, \xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_i dx - b\int_\Omega (v^+)^\beta e_i - \int_\Omega g(x, u^+, v^+) e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx$$

onde

$$u = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i \in V_m \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i \in V_m$$

com

$$||u||^2 H_0^1(\Omega) =< \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i, \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i >= \sum_{i=1}^{m} {\eta_i}^2 = |\eta|^2$$

e

$$||v||^2 H_0^1(\Omega) =< \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i, \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i >= \sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2 = |\xi|^2.$$

Observe que $< F(\eta,\xi),(\eta,\xi) >$ é igual a:

$$\langle (F_1(\eta,\xi), F_2(\eta,\xi) ..., F_m(\eta,\xi), G_1(\eta,\xi), G_2(\eta,\xi) ..., G_m(\eta,\xi)), (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \rangle$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
< F(\eta,\xi),(\eta,\xi) > &= \sum_{i=1}^{m} F_i(\eta,\xi)\eta_i + \sum_{i=1}^{m} G_i(\eta,\xi))\xi_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx - a \int_\Omega (u^+)^\alpha e_i dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+) e_i dx + \right.\right. \\
&\left.\left. -\lambda \int_\Omega \phi e_i dx \right) \eta_i \right] + \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\int_\Omega \nabla v \nabla e_i dx - b \int_\Omega (v^+)^\beta e_i dx + \right.\right. \\
&\left.\left. - \int_\Omega g(x,u^+,v^+) e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx \right) \xi_i \right]
\end{aligned}$$

e como os operadores gradiente e integral são lineares:

$$\begin{aligned}
< F(\eta,\xi),(\eta,\xi) > &= \textstyle\int_\Omega \nabla u \nabla (\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i) dx - a \int_\Omega (u^+)^\alpha (\sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i) dx + \\
&\quad - \textstyle\int_\Omega f(x,u^+,v^+)(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i) dx - \lambda \int_\Omega \phi (\sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i) dx + \\
&\quad + \textstyle\int_\Omega \nabla v \nabla (\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i) dx - b \int_\Omega (v^+)^\beta (\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i) dx + \\
&\quad - \textstyle\int_\Omega g(x,u^+,v^+)(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i) dx - \lambda \int_\Omega \phi (\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i) dx \\
&= \textstyle\int_\Omega \nabla u \nabla u dx - a \int_\Omega (u^+)^\alpha u dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+) u dx - \lambda \int_\Omega \phi u dx + \\
&\quad + \textstyle\int_\Omega \nabla v \nabla v dx - b \int_\Omega (v^+)^\beta v dx - \int_\Omega g(x,u^+,v^+) v dx - \lambda \int_\Omega \phi v dx \\
&= \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - a \int_\Omega (u^+)^{\alpha+1} dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+) u dx - \lambda \int_\Omega \phi u dx + \\
&\quad + \textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - b \int_\Omega (v^+)^{\beta+1} dx - \int_\Omega g(x,u^+,v^+) v dx - \lambda \int_\Omega \phi v dx.
\end{aligned}$$

Vamos estimar inferiormente a expressão acima para usar o **Teorema 2.1**. Nas desigualdades que seguem, usaremos a continuidade das Imersões de Sobolev.

(I) Temos

$$u^+ \leq |u| \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega (u^+)^{\alpha+1} dx \leq \int_\Omega |u^+|^{\alpha+1} dx = ||u||^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \leq K_1 ||u||^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (v^+)^{\beta+1} dx \leq K_2 ||v||^{\beta+1}_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.6}$$

(II) Pela hipótese (H_2)

$$|f(x,u^+,v^+)| \leq K_1(|u^+|^q + |v^+|^p) \leq K_1(|u|^q + |v|^p),$$

assim

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u^+,v^+)udx &\leq \int_\Omega |f(x,u^+,v^+)||u|dx \\ &\leq K_1\int_\Omega (|u|^q + |v|^p)|u|dx \\ &\leq K_1\left[\int_\Omega |u|^{q+1}dx + \int_\Omega |v|^p|u|dx\right].\end{aligned}$$

Mas, pelas Desigualdades de Hölder e Poincaré:

(i) $\int_\Omega |u|^{q+1}dx = ||u||^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \leq M||u||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}$;

$$\begin{aligned}(ii)\ \int_\Omega |v|^p|u|dx &\leq \left(\int_\Omega (|v|^p)^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_\Omega (|u|)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &= ||v||^p_{L^{p+1}(\Omega)}||u||_{L^{p+1}(\Omega)} \\ &\leq N||v||^p_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)},\end{aligned}$$

de (i) e (ii), segue que

$$\begin{aligned}K_1\left[\int_\Omega |u|^{q+1}dx + \int_\Omega |v|^p|u|dx\right] &\leq K_1M||u||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)} + K_1N||v||^p_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq C_2(||u||^q_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^p_{H^1_0(\Omega)})||u||_{H^1_0(\Omega)}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega f(x,u^+,v^+)udx \leq C_2(||u||^q_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^p_{H^1_0(\Omega)})||u||_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega g(x,u^+,v^+)vdx \leq C_4(||u||^q_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^p_{H^1_0(\Omega)})||v||_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.8}$$

(III) Temos, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, pelo fato de $\phi \in C^\infty_0$ e pela Desigualdade de Poincaré,

$$\left|\int_\Omega \phi udx\right| = | < \phi, u > | \leq ||\phi||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \leq C_1||u||_{L^2(\Omega)} \leq C_2||u||_{H^1_0(\Omega)}, \tag{3.9}$$

portanto, voltando ao desenvolvimento de $< F(\eta,\xi),(\eta,\xi) >$, por (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9):

$$\begin{aligned}
< F(\eta,\xi),(\eta,\xi) > &= \int_\Omega |\nabla u|^2dx - a\int_\Omega (u^+)^{\alpha+1}dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+)udx - \lambda\int_\Omega \phi udx +\\
&\quad + \int_\Omega |\nabla v|^2dx - b\int_\Omega (v^+)^{\beta+1}dx - \int_\Omega g(x,u^+,v^+)vdx - \lambda\int_\Omega \phi vdx\\
&\geq ||u||^2_{H^1_0(\Omega)} - aC_1||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)} - C_2(||u||^q_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^p_{H^1_0(\Omega)})||u||_{H^1_0(\Omega)} +\\
&\quad -\lambda C_3||u||_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^2_{H^1_0(\Omega)} - C_4(||u||^q_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^p_{H^1_0(\Omega)})||v||_{H^1_0(\Omega)} +\\
&\quad -bC_5||v||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)} - \lambda C_6||v||_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Note agora que:

(IV) Por definição

$$||(u,v)||^2_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} = ||u||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^2_{H^1_0(\Omega)}; \tag{3.10}$$

(V) Além disso:

$$\begin{aligned}
||(u,v)||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} &= \left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\\
&= \left[\sqrt{||u||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^2_{H^1_0(\Omega)}}\right]^{\alpha+1}\\
&\geq \left[\sqrt{||u||^2_{H^1_0(\Omega)}}\right]^{\alpha+1},
\end{aligned}$$

ou seja:

$$||(u,v)||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \geq ||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.11}$$

De maneira análoga,

$$||(u,v)||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \geq ||u||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Sabemos que para todo $A, B \geq 0$, existe $M > 0$ tal que $(A+B)^2 \leq M(A^2+B^2)$. Logo:

(VI) Temos:

$$\begin{aligned}
||(u,v)||^2_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} &= (||u||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||v||^2_{H^1_0(\Omega)})\\
&\geq K(||u||_{H^1_0(\Omega)} + ||v||_{H^1_0(\Omega)})^2
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$||(u,v)||_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \geq C(||u||_{H^1_0(\Omega)} + ||v||_{H^1_0(\Omega)}). \tag{3.13}$$

(VII)

$$\begin{aligned}
||u+v||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} &= \left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{p+1}{2}}\\
&= \left[\left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^p\cdot\left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\geq \left[\sqrt{||u||^2_{H^1_0(\Omega)}}\right]^p\cdot\left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= ||u||^p_{H^1_0(\Omega)}\cdot\left(||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\geq ||u||^p_{H^1_0(\Omega)}M(||u||_{H^1_0(\Omega)}+||v||_{H^1_0(\Omega)}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$||u+v||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}\geq M||u||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+M||u||^p_{H^1_0(\Omega)}.||v||_{H^1_0(\Omega)} \tag{3.14}$$

Analogamente,

$$||(u,v)||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}\geq N||v||^q_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)}+N||v||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Voltando ao desenvolvimento feito em $\langle F(\eta,\xi),(\eta,,\xi)\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\langle F(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle &\geq ||u||^2_{H^1_0(\Omega)}-aC_1||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}-C_2(||u||^p_{H^1_0(\Omega)}+||v||^q_{H^1_0(\Omega)})||u||_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -\lambda C_3||u||_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}-C_4(||u||^p_{H^1_0(\Omega)}+||v||^q_{H^1_0(\Omega)})||v||_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -bC_5||v||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}-\lambda C_6||v||_{H^1_0(\Omega)}\\
&= ||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}-aC_1||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}-bC_5||v||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -\lambda C_3||u||_{H^1_0(\Omega)}-\lambda C_6||v||_{H^1_0(\Omega)}-C_2||u||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -C_4||u||^p_{H^1_0(\Omega)}||v||_{H^1_0(\Omega)}-C_2||v||^q_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)}-C_4||v||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $k_1=\max\{C_2,C_4\}$ e $k_2=\max\{C_3,C_6\}$, por (3.10), (3.11) (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), segue então que:

$$\begin{aligned}
\langle F(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle &\geq ||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}-aC_1||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}-bC_5||v||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -\lambda C_3||u||_{H^1_0(\Omega)}-\lambda C_6||v||_{H^1_0(\Omega)}-C_2||u||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -C_4||u||^p_{H^1_0(\Omega)}||v||_{H^1_0(\Omega)}-C_2||v||^q_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)}-C_4||v||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}\\
&\geq ||u||^2_{H^1_0(\Omega)}+||v||^2_{H^1_0(\Omega)}-aC_1||u||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}-bC_5||v||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -\lambda k_2(||u||_{H^1_0(\Omega)}+||v||_{H^1_0(\Omega)})-k_1\Big(||u||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad ||u||^p_{H^1_0(\Omega)}||v||_{H^1_0(\Omega)}\Big)-k_1\left(||v||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}+||v||^q_{H^1_0(\Omega)}||u||_{H^1_0(\Omega)}\right)\\
&\geq ||(u,v)||^2_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}-aC_1||(u,v)||^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -bC_5||(u,v)||^{\beta+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}-\lambda k_2\tfrac{1}{C}||(u,v)||_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}+\\
&\quad -k_1\tfrac{1}{M}||(u,v)||^{p+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}-k_1\tfrac{1}{N}||(u,v)||^{q+1}_{H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle F(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \quad \geq \quad & ||(u,v)||^2_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - aC_7||(u,v)||^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \\ & -C_8||(u,v)||^{p+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - C_9||(u,v)||^{q+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \\ & -bC_{10}||(u,v)||^{\beta+1}_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \lambda C_{11}||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Recorde que

$$||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = |(\eta,\xi)|.$$

Afirmação: Existem $a^*, b^*, \lambda^*, r, \rho_0 > 0$ tais que

$$\langle F(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle > 0 \quad \forall(\eta,\xi) \quad |(\eta,\xi)| = \rho_0$$

De fato, seja

$$||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)} = \rho.$$

Queremos que

$$\rho^2 - aC_6\rho^{\alpha+1} - C_7\rho^{p+1} - C_8\rho^{q+1} - bC_9\rho^{\beta+1} - \lambda C_{10}\rho > 0$$

ou seja,

$$\rho^2\left(1 - aC_6\rho^{\alpha-1} - C_7\rho^{p-1} - C_8\rho^{q-1} - bC_9\rho^{\beta-1} - \lambda C_{10}\rho^{-1}\right) > 0$$

como $\rho > 0$, queremos então que

$$1 - aC_6\rho^{\alpha-1} - C_7\rho^{p-1} - C_8\rho^{q-1} - bC_9\rho^{\beta-1} - \lambda C_{10}\rho^{-1} > 0. \tag{3.16}$$

Considere $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(\rho,a,b,\lambda) = 1 - aC_6\rho^{\alpha-1} - C_7\rho^{p-1} - C_8\rho^{q-1} - bC_9\rho^{\beta-1} - \lambda C_{10}\rho^{-1}.$$

Observe que

$$f(\rho,0,0,0) = 1 - C_7\rho^{p-1} - C_8\rho^{q-1}.$$

Como $p, q \in [1, 2^* - 1]$, temos $p - 1 \geq 0$ e $q - 1 \geq 0$. Assim, existe $\rho_0 > 0$, suficientemente pequeno tal que

$$C_7\rho_0^{p-1} + C_8\rho_0^{q-1} < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$1 - C_7\rho_0^{p-1} - C_8\rho_0^{q-1} > 0.$$

Portanto, existe $\rho_0 > 0$ tal que $f(\rho_0, 0, 0, 0) > 0$. E daí, da continuidade de f, existe uma vizinhança de $(\rho_0, 0, 0, 0)$ onde, para todo (ρ, a, b, λ) com

$$|\rho - \rho_0| < r, \quad |a| < a^*, \quad |b| < b^*, \quad |\lambda| < \lambda^*,$$

tem-se

$$f(\rho, a, b, \lambda) > 0.$$

Em particular, existem $a^*, b^*, \lambda^*, \rho_0$ e $r > 0$, de modo que,

$$\forall (a, b, \lambda) \in (0, a^*) \times (0, b^*) \times (0, \lambda^*), \quad \langle F(\eta, \xi), (\eta, \xi) \rangle > 0 \quad \forall (\eta, \xi); \quad |(\eta, \xi)| = \rho_0$$

Observação 3.1 *A demonstração para os casos $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in [1, 2^* - 1]$ e $\alpha \in [\,1,\ 2^* - 1\,]$ e $\beta \in (0, 1)$ são semelhantes a resolvida. De fato, note as seguintes observações:*

1. No caso (ii), voltando a (3.16), quando $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in [1, 2^* - 1)$, temos $p, q, \beta \in [1, 2^* - 1) \Rightarrow p - 1 \geq 0, q - 1 \geq 0$ e $\beta - 1 \geq 0$.
Logo, para ρ_0 é muito pequeno, segue-se que

$$C_7 \rho_0^{p-1} + C_8 \rho_0^{q-1} + b C_9 \rho_0^{\beta-1} < \frac{1}{2}$$

e portanto, considerando $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(\rho, a, b, \lambda) = 1 - a C_6 \rho^{\alpha-1} - C_7 \rho^{p-1} - C_8 \rho^{q-1} - b C_9 \rho^{\beta-1} - \lambda C_{10} \rho^{-1},$$

temos

$$f(\rho_0, 0, b, 0) = 1 - C_7 \rho_0^{p-1} - C_8 \rho_0^{q-1} - b C_9 \rho_0^{\beta-1} > 0.$$

Assim, existe $\rho_0 > 0$ tal que $f(\rho_0, 0, b, 0) > 0$. E daí, da continuidade de f, existe uma vizinhança de $(\rho_0, 0, b, 0)$ tal que, para todo (ρ, a, b, λ) com

$$|\rho - \rho_0| < r, \quad |a| < a^*, \quad |\lambda| < \lambda^*,$$

segue

$$f(\rho, a, b, \lambda) > 0.$$

Ou seja, existem a^*, λ^*, ρ_0 e $r > 0$, tais que para todo $(a, b, \lambda) \in (0, a^*) \times (0, \infty) \times (0, \lambda^*)$

$$\langle F(\eta, \xi), (\eta, \xi) \rangle > 0 \quad \forall (\eta, \xi); \quad |(\eta, \xi)| = \rho_0.$$

2. No caso (iii), quando $\beta \in (0,1)$ e $\alpha \in [1, 2^*-1)$, temos
$p, q, \alpha \in [1, 2^*-1) \Rightarrow p-1 \geq 0, q-1 \geq 0$ e $\alpha - 1 \geq 0$.
Logo, em (3.16), para ρ_0 muito pequeno

$$aC_6\rho^{\alpha-1} + C_7\rho^{p-1} + C_8\rho^{q-1} < \frac{1}{2}.$$

e portanto, considerando $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(\rho, a, b, \lambda) = 1 - aC_6\rho^{\alpha-1} - C_7\rho^{p-1} - C_8\rho^{q-1} - bC_9\rho^{\beta-1} - \lambda C_{10}\rho^{-1},$$

temos

$$f(\rho_0, a, 0, 0) = 1 - aC_6\rho^{\alpha-1} - C_7\rho_0^{p-1} - C_8\rho_0^{q-1} > 0.$$

Assim, existe $\rho_0 > 0$ tal que $f(\rho_0, a, 0, 0) > 0$. Da continuidade de f, existe uma vizinhança de $(\rho_0, a, 0, 0)$ tal que, para todo (ρ, a, b, λ) com

$$|\rho - \rho_0| < r, \quad |b| < b^*, \quad |\lambda| < \lambda^*,$$

segue

$$f(\rho, a, b, \lambda) > 0.$$

Ou seja, existem b^*, λ^*, ρ_0 e $r > 0$, tais que para todo $(a, b, \lambda) \in (0, \infty) \times (0, b^*) \times (0, \lambda^*)$

$$\langle F(\eta, \xi), (\eta, \xi) \rangle > 0 \quad \forall (\eta, \xi); \quad |(\eta, \xi)| = \rho_0.$$

Voltando à demonstração do Teorema (3.1.1), como acabamos de mostrar, existem $a^*,\ b^*,\ \lambda^*,\ r,\ \rho > 0$ tais que

$$\langle F(\eta, \xi), (\eta, \xi) \rangle > 0 \quad \forall (\eta, \xi) \quad |(\eta, \xi)| = \rho$$

Logo, pelo Teorema (2.1)
Existe $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ tal que $|(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})| \leq \rho$ com $F(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = (0, 0)$.

Considere $u_m = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i e_i \in V_m$ e $v_m = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\xi}_i e_i \in V_m$.
Assim, temos

$$(u_m, v_m) \in V_m \times V_m \quad \text{tal que} \quad ||(u_m, v_m)||_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = |(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})| \leq \rho.$$

Além disso, para todo $\omega \in V_m$:

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega dx = a \int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha \omega dx + \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+) \omega dx + \lambda \int_\Omega \phi \omega dx$$

e para todo $\psi \in V_m$

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi dx = b\int_\Omega ({u_m}^+)^\beta \psi dx + \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+)\psi dx + \lambda \int_\Omega \phi\psi dx$$

pois, $F(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = (0,0)$ implica, para cada $i = 1, ..., m$

$$F_i(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = (0,0) \quad \text{e} \quad G_i(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = (0,0)$$

de onde segue que

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx - a\int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha e_i dx - \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+)e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx = 0$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_i dx - b\int_\Omega ({u_m}^+)^\beta e_i dx - \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+)e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx = 0.$$

Portanto, para cada $\omega, \psi \in V_m$, $\omega = \sum_{i=1}^m \eta_i e_i \in V_m$ e $\psi = \sum_{i=1}^m \sigma_i e_i \in V_m$, temos

$$\sum_{i=1}^m \eta_i \left(\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx - a\int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha e_i dx - \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+)e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx \right) = 0$$

e

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \left(\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_i dx - b\int_\Omega ({u_m}^+)^\beta e_i dx - \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+)e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi e_i dx \right) = 0.$$

Pela linearidade da integral e do gradiente,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega \nabla u_m \nabla \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i e_i\right) dx - a\int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i e_i\right) dx + \\ &\textstyle - \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+) \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i e_i\right) dx - \lambda \int_\Omega \phi \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i e_i\right) dx = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega \nabla v_m \nabla \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i e_i\right) dx - b\int_\Omega ({u_m}^+)^\beta \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i e_i\right) dx + \\ &\textstyle - \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+) \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i e_i\right) dx - \lambda \int_\Omega \phi \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i e_i\right) dx = 0. \end{aligned}$$

de onde segue (3.3) e (3.4).

(Etapa 2)

Observe que

$$\rho \geq ||(u_m, v_m)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \sqrt{||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)}} \geq ||u_m||_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\rho \geq ||(u_m, v_m)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \sqrt{||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_m||^2_{H_0^1(\Omega)}} \geq ||v_m||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Como ρ independe de m, segue que $\{u_m\}$ e $\{v_m\}$ são limitados em $H_0^1(\Omega)$. Logo, a menos de subseqüência (ver Apêndice A.12):

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$v_m \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_m(x) \to u(x) q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$v_m(x) \to v(x) q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega$$

(Etapa 3)

Para cada $W, U \in H_0^1(\Omega)$, $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_i e_i$ e $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_i e_i$, existem $\omega_k, \psi_k \in V_k$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = W \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k = U.$$

Ver $\omega_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \tilde{\gamma}_i e_i$ e $\psi_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i e_i$.

Fixemos $k \leq m$. Assim, da **Etapa 1**, como $\omega_k, \psi_k \in V_k \subseteq V_m$,

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_k dx - a \int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha \omega_k dx - \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+) \omega_k dx - \lambda \int_\Omega \phi \omega_k dx = 0$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi_k dx - b \int_\Omega ({u_m}^+)^\beta \psi_k dx - \int_\Omega g(x, {u_m}^+, {v_m}^+) \psi_k dx - \lambda \int_\Omega \phi \psi_k dx = 0$$

Portanto, passando ao limite quando $m \to \infty$ e depois quando $k \to \infty$ nas igualdades acima, tem-se que existem $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla W dx - a \int_\Omega (u^+)^\alpha W dx - \int_\Omega f(x, u^+, v^+) W dx - \lambda \int_\Omega \phi W dx = 0, \ \ \forall W \in H_0^1(\Omega) \tag{3.17}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla U dx - b \int_\Omega (u^+)^\beta U dx - \int_\Omega g(x, u^+, v^+) U dx - \lambda \int_\Omega \phi U dx = 0, \ \ \forall U \in H_0^1(\Omega). \tag{3.18}$$

Ou seja, $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(u^+)^\alpha + f(x, u^+, v^+) + \lambda\phi, \Omega \\ -\Delta v = b(v^+)^\beta + g(x, u^+, v^+) + \lambda\phi, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

Mostremos as convergências citadas. Faremos a convergência apenas em (3.17). O caso (3.18) é análogo. Inicialmente fixemos o k e passemos o limite quando $m \to \infty$.

(1º Passo) objetivo: $\int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_k dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \omega_k dx$. Por definição de convergência fraca,

$$u_m \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad F(u_m) \rightharpoonup F(u),\ \forall F \in H^{-1}(\Omega)$$

Considere então

$$\begin{array}{rcl} F : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \hookrightarrow & F(u) = < u, \omega_k >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla \omega_k dx, \end{array}$$

como F é linear e contínuo pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos /vspace1cm

$$u_m \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_k dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \omega_k dx.$$

(2º Passo) objetivo: $\int_\Omega (u_m^+)^\alpha \omega_k dx \to \int_\Omega (u^+)^\alpha \omega_k dx$.

Como $u \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, das Imersões Compactas de Sobolev (ver Apêndice A.17),

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^q(\Omega),\ \ q \in [1, 2^*).$$

Por (A.12), a menos de subseqüência, para todo $q \in [1, 2^*)$

$$u_m(x) \to u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$|u_m(x)| \leq h(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \forall m, \quad \text{com} \quad h \in L^q(\Omega). \tag{3.20}$$

Além disso, como

$$u_m^+(x) = \max\{u_m(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$$

temos

$$\left(u_m^+(x)\right)^\alpha \omega_k(x) \to \left(u^+(x)\right)^\alpha \omega_k(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \Omega$$

e mais, por (3.20)

$$\begin{array}{rcl} |(u_m^+)^\alpha (x) \omega_k(x)| & \leq & |(u_m^+(x))|^\alpha |\omega_k(x)| \\ & \leq & |(u_m(x))|^\alpha |\omega_k(x)| \\ & \leq & h^\alpha(x) \omega_k(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}$$

onde $h \in L^q(\Omega)$.

Se mostrarmos que $h^\alpha \omega_k \in L^1(\Omega)$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice A.4), obteremos

$$\int_\Omega \left(u_m^+\right)^\alpha \omega_k \longrightarrow \int_\Omega \left(u^+\right)^\alpha \omega_k.$$

De fato,

considere $p \in [1, 2^*)$ tal que

$$p > \frac{2N}{N+2}\alpha. \tag{3.21}$$

Tanto para o caso $\alpha \in (0,1)$, quanto para o caso $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ temos $\alpha < 2^* - 1$ e portanto $\frac{2N}{N+2}\alpha < 2^*$. Logo

$$\begin{array}{rcl} \int_\Omega |h|^\alpha |\omega_k| & \leq & \left(\int_\Omega (|h|^\alpha)^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |\omega_k|^{\frac{p}{p-\alpha}}\right)^{\frac{p-\alpha}{p}} \\ & = & ||h||^\alpha_{L^p(\Omega)} ||\omega_k||_{L^{\frac{p}{p-\alpha}}(\Omega)} \end{array}$$

Note ainda que

$$1 \leq p < 2^* \quad \text{e} \quad 1 \leq \frac{p}{p-\alpha} < 2^*.$$

pois,

$$\begin{array}{rcl} \frac{p}{p-\alpha} < \frac{2N}{N-2} & \Leftrightarrow & p(N-2) < 2N(p-\alpha) \\ & \Leftrightarrow & pN - 2p < 2Np - 2N\alpha \\ & \Leftrightarrow & -pN - 2p < -2N\alpha \\ & \Leftrightarrow & p(N+2) > 2N\alpha \\ & \Leftrightarrow & p > \frac{2N}{N+2}\alpha. \end{array}$$

Além disso, é claro que $p \geq p - \alpha$ e $1 \leq p < 2^*$.

Portanto, p está bem definido e das Imersões Contínuas de Sobolev

$$||h||_{L^p(\Omega)} < \infty \quad \text{e} \quad ||\omega||_{L^{\frac{p}{p-\alpha}}(\Omega)} < \infty \quad .$$

mostrando que $h^\alpha \omega_k \in L^1(\Omega)$, de onde segue o resultado.

(**3º Passo**) **objetivo:** $\int_\Omega f(x, u_m^+, v_m^+)\omega_k dx \to \int_\Omega f(x, u_m^+, v_m^+)\omega_k dx$.

Temos que

$$f(x, u_m^+(x), v_m^+(x))\omega_k(x) \longrightarrow f(x, u^+(x), v^+(x))\omega_k(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega,$$

pois, por f ser lipschitz e das Imersões Contínuas de Sobolev:

$$\begin{aligned}|f(x,u_m^+(x),v_m^+(x))\omega_k(x)-f(x,u^+(x),v^+(x))\omega_k(x)| &\leq |f(x,u_m^+(x),v_m^+(x)) \\ &\quad -f(x,u^+(x),v^+(x))|\,|\omega_k(x)| \\ &\leq C_1\Big(||u_m^+(x)-u^+(x)||_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad +||v_m^+(x)-v^+(x)||_{H_0^1(\Omega)}\Big)\,|\omega_k(x)|\end{aligned}$$

Mas, como

$$u_m^+(x)\rightarrow u^+(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \text{e} \qquad v_m^+(x)\rightarrow v^+(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \Omega$$

segue o que queremos.

Além disso, pela hipótese (H_2):

$$\big|f(x,u_m^+(x),v_m^+(x))\omega_k(x)-f(x,u^+(x),v^+(x))\omega_k(x)\big|\leq C_2\left(|u_m^+(x)|^q+|v_m^+(x)|^p\right)|\omega_k(x)|.$$

Mostremos que

$$C_2|u_m^+(x)|^q|\omega_k(x)|\in L^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad C_2|v_m^+(x)|^p|\omega_k(x)|\in L^1(\Omega)$$

E pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêncice A.4) temos que

$$\int_\Omega f(x,u_m^+,v_m^+)\omega_k dx\rightarrow\int_\Omega f(x,u_m^+,v_m^+)\omega_k dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_m^+|^q|\omega_k|dx &\leq \int_\Omega |u_m|^q|\omega_k|dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|u_m|^q)^{\frac{s}{q}}\right)^{\frac{q}{s}}\left(\int_\Omega |\omega_k|^{\frac{s}{s-q}}\right)^{\frac{s-q}{s}} \\ &= ||u_m||^q_{L^s(\Omega)}||\omega_k||_{L^{\frac{s}{s-q}}(\Omega)}\end{aligned}$$

e, análogo ao **2º Passo**, em (3.21), considerando $s\in[1,2^*)$ tal que $s>q$ e $s>\frac{2N}{N+2}q$, concluímos que

$$(u_m^+)^q\omega_k\in L^1(\Omega)$$

e

$$(v_m^+)^p\omega_k\in L^1(\Omega),$$

mostrando o que queríamos.

Agora, passando ao limite, quando $k\rightarrow\infty$:

(4º Passo) objetivo: $\int_\Omega \nabla u^+\nabla\omega_k dx\rightarrow\int_\Omega \nabla u^+\nabla W dx$.

Temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla u^+\nabla\omega_k dx-\int_\Omega \nabla u^+\nabla W dx\right| &\leq \int_\Omega |\nabla u^+||\nabla(\omega_k-W)|dx \\ &\leq ||u^+||_{H_0^1(\Omega)}||\omega_k-W||_{H_0^1(\Omega)}\rightarrow 0.\end{aligned}$$

(5º Passo) objetivo: $\int_\Omega (u^+)^\alpha \omega_k dx \to \int_\Omega (u^+)^\alpha W dx$.

Como $\frac{N+2}{N-2} > \frac{N+2}{N}$, para $N > 2$, temos $\alpha < \frac{N+2}{N} \Leftrightarrow \frac{2}{2-\alpha} < \frac{2N}{N-2}$. Logo

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u^+)^\alpha \omega_k dx - \int_\Omega (u^+)^\alpha W dx\right| &\leq \int_\Omega |u^+|^\alpha . |\omega_k - W| dx \\
&\leq \int_\Omega |u|^\alpha . |\omega_k - W| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega (|u|^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_\Omega (|\omega_k - W|)^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq ||u||^\alpha_{L^2(\Omega)} ||\omega_k - W||_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}(\Omega)} \\
&\leq C_1 ||u||^\alpha_{L^2(\Omega)} ||\omega_k - W||_{H^1_0(\Omega)} \to 0.
\end{aligned}$$

(6º Passo) objetivo: $\int_\Omega f(x, u^+, v^+)\omega_k dx \to \int_\Omega f(x, u^+, v^+) W dx$.

Observe que

$$f(x, u^+(x), v^+(x))\omega_k(x) \to f(x, u^+(x), v^+(x))W(x)$$

pois

$$\left|f(x, u^+(x), v^+(x))\right| |\omega_k(x) - W(x)| \to 0.$$

Além disso,

$$\left|f(x, u^+(x), v^+(x))\omega_k(x)\right| \leq C_1 \left(|u^+(x)|^q + |v^+(x)|^p\right) |\omega_k(x)|.$$

Analogo ao (**2º Passo**), mostra-se que

$$(u^+)^q \omega_k \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \ (v^+)^p \omega_k \in L^1(\Omega),$$

e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue o resultado.

(7º Passo) objetivo: $\int_\Omega \phi \omega_k dx \to \int_\Omega \phi W dx$.

Temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \phi(\omega_k - W) dx\right| &= \left|\langle \phi, \omega_k - W\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq ||\phi||_{L^2(\Omega)} ||\omega_k - W||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1 ||\phi||_{L^2(\Omega)} ||\omega_k - W||_{H^1_0(\Omega)} \to 0
\end{aligned}$$

Portanto, dos **1º, 2º e 3º Passos**, passando ao limite quando $m \to \infty$, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \omega_k dx - a \int_\Omega ({u_m}^+)^\alpha \omega_k dx - \int_\Omega f(x, {u_m}^+, {v_m}^+)\omega_k dx - \lambda \int_\Omega \phi \omega_k dx = 0$$

converge para

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \omega_k dx - a \int_\Omega (u^+)^\alpha \omega_k dx - \int_\Omega f(x, u^+, v^+)\omega_k dx - \lambda \int_\Omega \phi \omega_k dx = 0.$$

Dos **4º, 5º, 6º e 7º Passos**, passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \omega_k dx - a\int_\Omega (u^+)^\alpha \omega_k dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+)\omega_k dx - \lambda\int_\Omega \phi\omega_k dx = 0$$

convergindo para

$$\int_\Omega \nabla u \nabla W dx - a\int_\Omega (u^+)^\alpha W dx - \int_\Omega f(x,u^+,v^+)W dx - \lambda\int_\Omega \phi W dx = 0$$

De maneira análoga ao passos anteriores, mostra-se que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi_k dx - b\int_\Omega ({v_m}^+)^\alpha \psi_k dx - \int_\Omega g(x,{u_m}^+,{v_m}^+)\psi_k dx - \lambda\int_\Omega \phi\psi_k dx = 0$$

converge para

$$\int_\Omega \nabla v \nabla U dx - b\int_\Omega (v^+)^\alpha U dx - \int_\Omega g(x,u^+,v^+)W dx - \lambda\int_\Omega \phi U dx = 0,$$

ou seja, $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é *solução fraca* do sistema (3.19).

Como $a, b, \lambda > 0$ e $\phi, f, g \geq 0$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, \Omega \\ -\Delta v \geq 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

e portanto, pelo *Princípio do Máximo Fraco* (ver Apêndice A.6),

$$u, v \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Afirmação: $u(x) > 0$ e $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

De fato, suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que ocorra um dos seguintes itens:

(i) $u(x_0) = 0$ e $v(x_0) \neq 0$

(ii) $u(x_0) \neq 0$ e $v(x_0) = 0$

(iii) $u(x_0) = 0$ e $v(x_0) = 0$

Se **(i)** ocorre, então, x_0 é ponto de mínimo em Ω e portanto

$$-\Delta u(x_0) \leq 0. \tag{3.22}$$

Além disso, por (3.19)

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_0) &= a(u^+(x_0))^\alpha + f(x_0, u^+(x_0), v^+(x_0)) + \lambda\phi(x_0) \\ &= f(x_0, 0, v^+(x_0)) + \lambda\phi(x_0). \end{aligned}$$

Mas, por (H_1)

$$v(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0, 0, v^+(x_0)) > 0,$$

logo,

$$-\Delta u(x_0) > 0. \tag{3.23}$$

Portanto, por (3.22) e (3.23)

$$0 < -\Delta u(x_0) \leq 0,$$

o que é um absurdo.

De maneira análoga mostra-se o caso **(ii)**.

Quando ocorre **(iii)**, pelo *Princípio do Máximo Forte* (ver Apêndice A.5) temos que $u \equiv 0$ e $v \equiv 0$. Neste caso (u, v) é a solução trivial, ou seja, para todo $x \in \Omega$:

$$-\Delta u(x) = au^{\alpha}(x) + f(x, u, v) + \lambda(x)\phi(x) = 0 \tag{3.24}$$

e

$$-\Delta v(x) = bv^{\beta}(x) + g(x, u, v) + \lambda(x)\phi(x) = 0. \tag{3.25}$$

Pela hipótese (H_0):

$$f(x, u, v) = g(x, u, v) = 0.$$

assim, por (3.24) e (3.25)

$$\lambda(x)\phi(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Como ϕ é não-nula, existe x_0 tal que $\phi(x_0) \neq 0$ e portanto:

$$\lambda(x_0) = 0$$

o que é um absurdo.

Logo, segue a afirmação e portanto $u^+ = u$ e $v^+ = v$. Desta forma, (u, v) é solução fraca de $(P)_\lambda$.

Além disso, as desigualdades

$$u \geq a^{\frac{1}{1-\alpha}}\omega_1 \quad \text{ou} \quad v \geq b^{\frac{1}{1-\beta}}\omega_2 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}$$

são verificadas em [2].

3.2 Existência de solução do Sistema

A existência de solução do Sistema (P) segue do Teorema seguinte.

Teorema 3.2.1 *Considere o sistema*

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f(x,u,v), \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g(x,u,v), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

tal que
(H_0) $f(x,0,0) = g(x,0,0) = 0$
(H_1) $f(x,0,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *e* $g(x,u,0) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
(H_2) $\begin{matrix} |f(x,u,v)| \leq k_1(|v|^p + |u|^q) \\ |g(x,u,v)| \leq k_2(|v|^p + |u|^q) \end{matrix}$ */ onde* $p, q \in [1, 2^* - 1]$*, para* $N > 2$.
Então existem a^* *e* b^* *números positivos tais que* (P) *tem uma solução onde:*
(i) Se $\alpha, \beta \in (0,1),\ a, b \in (0, a^*) \times (0, b^*)$;
(ii) Se $\alpha \in (0,1)$ *e* $\beta \in [1, 2^* - 1),\ a, b \in (0, a^*) \times (0, \infty)$;
(iii) Se $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ *e* $\beta \in (0,1),\ a, b \in (0, \infty) \times (0, b^*)$.
Além disso, se (u, v) *é solução fraca de* (P)*, segue uma das seguintes desigualdades:*

$$u(x) \geq a^{\frac{1}{1-\alpha}}\omega_1(x) \quad ou \quad v(x) \geq b^{\frac{1}{1-\beta}}\omega_2(x) \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega$$

onde:
Se $\alpha \in (0,1)$*, denotaremos* ω_1 *a solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\alpha}, \Omega \\ u > 0, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

Se $\beta \in (0,1)$*, denotaremos* ω_2 *a solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{\beta}, \Omega \\ v > 0, \Omega \\ v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração:

Para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, considere a solução fraca (u_λ, v_λ) de $(P)_\lambda$. Então

$$u_\lambda \geq a^{\frac{1}{1-\alpha}}\omega_1 > 0 \quad \text{ou} \quad v_\lambda \geq b^{\frac{1}{1-\beta}}\omega_2 > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.26}$$

Além disso,

$$||u_\lambda||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \quad \text{e} \quad ||v_\lambda||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \quad , \forall \lambda \in (0, \lambda^*),$$

pois, voltando ao **Teorema (2.2)**, tínhamos

$$u_m \rightharpoonup u_\lambda \quad \forall \lambda \in (0, \lambda^*)$$

e por (A.18)

$$||u_m||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho.$$

Assim,

$$||u_\lambda||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \quad \forall \lambda \in (0, \lambda^*).$$

De maneira análoga, temos

$$||v_\lambda||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \quad \forall \lambda \in (0, \lambda^*).$$

Seja então, $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \to 0$. Então,

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $\lambda_n \in (0, \lambda^*)$ e portanto,

$$||u_{\lambda_n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \quad \text{e} \quad ||v_{\lambda_n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho.$$

Logo, a menos de subseqüência,

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$v_{\lambda_n} \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_{\lambda_n}(x) \to u(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.27}$$

$$v_{\lambda_n}(x) \to v(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.28}$$

donde temos

$$u(x) \geq a^{\frac{1}{1-\alpha}} \omega_1(x) \quad \text{ou} \quad v(x) \geq b^{\frac{1}{1-\beta}} \omega_2(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.29}$$

Para todo $n \geq n_0$, sendo $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ solução fraca de $(P)_{\lambda_n}$,

$$\int_\Omega \nabla u_{\lambda_n} \nabla \omega dx - a \int_\Omega (u_{\lambda_n})^\alpha \omega dx - \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}) \omega dx - \lambda_n \int_\Omega \phi \omega dx = 0, \ \forall \omega \in H_0^1(\Omega) \tag{3.30}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_{\lambda_n} \nabla \psi dx - b \int_\Omega (v_{\lambda_n})^\beta \psi dx - \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}) \psi dx - \lambda_n \int_\Omega \phi \psi dx = 0, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.31}$$

Passando ao limite quando $\lambda_n \to 0$, temos, de maneira análoga à seção anterior, que (3.30) e (3.31) convergem para

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx - a\int_\Omega u^\alpha \omega dx - \int_\Omega f(x,u,v)\omega dx,\ \forall \omega \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx - b\int_\Omega v^\beta \psi dx - \int_\Omega f(x,u,v)\psi dx,\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

respectivamente. Logo, $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P) e portanto, para os mesmos a^* e b^* do Teorema anterior, segue que (P) tem uma solução onde:

(i) Se $\alpha, \beta \in (0,1),\ a,b \in (0,a^*) \times (0,b^*)$;

(ii) Se $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in [1, 2^* - 1),\ a,b \in (0,a^*) \times (0,\infty)$;

(iii) Se $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ e $\beta \in (0,1),\ a,b \in (0,\infty) \times (0,b^*)$.

Além disso, concluímos que a solução é não-trivial pois, por (3.26), (3.27) e (3.28), temos

$$u(x) \geq 0 \quad \text{ou} \quad v(x) \geq 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

E por (3.29):

$$u(x) > 0 \quad \text{ou} \quad v(x) > 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

3.3 Existência de solução do Sistema para um caso supercrítico

Nesta seção estudaremos o caso supercrítico.

considere o sistema

$$(P_{\alpha,\beta}) \begin{cases} -\Delta u = au^\alpha + f(v), \Omega \\ -\Delta v = bv^\beta + g(u), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}$$

A existência da solução fraca do problema $(P_{\alpha,\beta})$ é garantida através do Teorema seguinte.

Teorema 3.3.1 *Seja* $(P_{\alpha,\beta})$ *tal que*
(H_0) $f(0) = g(0) = 0$;
(H_1) $f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *e* $g(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

(H_2) $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t^r} = +\infty$ *e* $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{t^r} = +\infty$;
onde $r \in (1, 2^* - 1)$
(H_3)*Para algum* $\theta, \eta > 0$ *temos*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{2^*-1+\theta}} < +\infty \quad e \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t^{2^*-1+\eta}} < +\infty;$$

(H_4) *Existe* $\{M_n\}$ *com* $M_n \to +\infty$ *tal que*

$$\frac{f(t)}{t^r} \leq \frac{f(M_n)}{(M_n)^r} \quad se \quad t \in [0, M_n], \quad \forall n; r \in (0, 2^* - 1)$$

e

$$\frac{g(t)}{t^s} \leq \frac{g(M_n)}{(M_n)^s} \quad se \quad t \in [0, M_n], \quad \forall n; s \in (0, 2^* - 1)$$

Então existem a^*, b^*, γ_1 *e* γ_2 *números positivos tais que* $(P_{\alpha,\beta})$ *tem uma solução onde:*
(i) Se $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $a, b \in (0, a^*) \times (0, b^*)$ *e* $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$*;*
(ii) Se $\alpha \in (0, 1)$ *e* $\beta \in [1, 2^* - 1)$, $a, b \in (0, a^*) \times (0, \infty)$ *e* $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$ *com* $\beta < s$*;*
(iii) Se $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ *e* $\beta \in (0, 1)$, $a, b \in (0, \infty) \times (0, b^*)$ *e* $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$ *com* $\alpha < r$.

Observação 3.2 *Um exemplo de função onde seu expoente ultrapassa o expoente crítico tal que ela satisfaça todas as hipóteses acima é a função*

$$f(t) = t^{2^*-1+\frac{\theta}{2}}.$$

Demonstração:

Considere f_n e g_n tais que

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ f(t) & , \quad 0 \leq t \leq M_n \\ \dfrac{f(M_n)}{(M_n)^r} t^r & , \quad t \geq M_n \end{cases}$$

e

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ g(t) & , \quad 0 \leq t \leq M_n \\ \dfrac{g(M_n)}{(M_n)^s} t^s & , \quad t \geq M_n \end{cases}$$

onde escolhemos $r, s \in (1, 2^* - 1)$ verificando $(2^* - 1) - r < \theta$ e $(2^* - 1) - s < \theta$.

Agora, considere o sistema

$$(P_n)\begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f_n(v), \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g_n(u), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Nosso objetivo é encontrar uma solução (u_n, v_n) para (P_n) , onde, para n grande,

$$||u_n||_{L^{\infty}(\Omega)} \leq M_n \quad \text{e} \quad ||v_n||_{L^{\infty}(\Omega)} \leq M_n.$$

Daí, por construção das funções f_n e g_n, concluirmos que (u_n, v_n) é solução de $(P_{\alpha,\beta})$, visto que, nesta situação $f_n = f$ e $g_n = g$.

Seja

$$(P_{\lambda,n})\begin{cases} -\Delta u = au^{\alpha} + f_n(v) + \lambda\phi, \Omega \\ -\Delta v = bv^{\beta} + g_n(u) + \lambda\phi, \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Se mostrarmos que f_n e g_n satisfazem

$$|f_n(v)| \leq M_n^{2\theta}|v|^r \quad \text{e} \quad |g_n(u)| \leq M_n^{2\theta}|u|^s,$$

temos f_n e g_n estão abaixo do expoente crítico, já que $r, s \in (1, 2^* - 1)$, podendo então aplicar em $(P_{\lambda,n})$ o **Teorema 3.1.1**. De fato, escolhendo $r, s \in (1, 2^* - 1)$ verificando $(2^* - 1) - r < \theta$ e $(2^* - 1) - s < \theta$, temos:

$$(2^* - 1 + \theta) - (2\theta + r) < 0.$$

Assim, para n grande, por (H_4):

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &\leq \left| t^r \frac{f(M_n)}{(M_n)^r} \right| \\ &\leq |t|^r \frac{|f(M_n)|}{(M_n)^r} \frac{M_n^{2\theta}}{M_n^{2\theta}} \\ &= |t|^r M_n^{2\theta} \frac{|f(M_n)|}{(M_n)^{2\theta+r}} \\ &\leq |t|^r M_n^{2\theta} \frac{|f(M_n)|}{(M_n)^{2\theta}} \frac{M_n^{2^*-1+\theta}}{M_n^{2^*-1+\theta}} \\ &\leq |t|^r M_n^{2\theta} \frac{|f(M_n)|}{(M_n)^{2^*-1+\theta}} M_n^{(2^*-1+\theta)-(2\theta+r)} \end{aligned}$$

Mas, por (H_3):

$$\frac{|f(M_n)|}{(M_n)^{2^*-1+\theta}} < M; \quad M > 0,$$

e como $(2^* - 1 + \theta) - (2\theta + r) < 0$, quando $M_n \to \infty$:

$$M_n^{(2^*-1+\theta)-(2\theta+r)} \to 0.$$

Logo, para n grande

$$|f_n(t)| \leq |t|^r M_n^{2\theta}$$

e analogamente,

$$|g_n(t)| \leq M_n^{2\theta}|t|^s$$

Portanto, pelo **Teorema 3.1.1**, existem a_n^*, b_n^* e λ_n^*, números positivos, tais que $(P_{\lambda,n})$ tem solução, $(u_{\lambda,n}, v_{\lambda,n})$, onde $(a, b, \lambda) \in (0, a_n^*) \times (0, b_n^*) \times (0, \lambda_n^*)$. Além disso, para cada $n \in I\!N$

$$||u_{\lambda,n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho_n \ \text{ e } \ ||v_{\lambda,n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho_n.$$

No entanto, como, independente de n, $\{f_n\}$ é limitada por (H_2):

$$|f(t)| \leq K|t|^r; \ K > 0,$$

concluímos que existe ρ tal que

$$||u_{\lambda,n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho \ \text{ e } \ ||v_{\lambda,n}||_{H_0^1(\Omega)} \leq \rho.$$

Agora, aplicando o **Teorema 3.2.1**, passando ao limite quando $\lambda \to \infty$, concluímos que o limite fraco de $(u_{\lambda,n}, v_{\lambda,n})$, dito (u_n, v_n) é solução de (P_n).

Para simplificar notação, denotaremos (u_n, v_n) por (u, v) e

$$\widehat{f}(u, v) = au^\alpha + f_n(v) \ \text{ e } \ \widehat{g}(u, v) = bv^\beta + g_n(u),$$

ou seja, temos (u, v) solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \widehat{f}(u, v), \Omega \\ -\Delta v = \widehat{g}(u, v), \Omega \\ u, v > 0, \Omega \\ u = v = 0, \partial\Omega \end{cases}.$$

Mostraremos que

$$|\widehat{f}(u, v)| \leq C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r$$

e

$$|\widehat{g}(u,v)| \leq C_2 + |v|^s + (M_n)^{2\eta}|u|^s.$$

De fato,

(Caso 1): Se $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(u,v)| &= |au^\alpha + f_n(v)| \\ &\leq a|u|^\alpha + |f_n(v)| \\ &\leq a|u|^\alpha + (M_n)^{2\theta}|v|^r \\ &\leq C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r \end{aligned}$$

Figura 3.1: caso 1

(Caso 2): Se $\alpha \in [1, 2^* - 1)$

Como $\alpha < r$ temos

$$|\widehat{f}(u,v)| \leq C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r$$

Figura 3.2: caso 2

Logo, $\widehat{f} \in L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)$, pois das Imersões Contínuas de Sobolev (ver Apêndice A.16):

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widehat{|f|}^{\frac{2^*}{r}} dx &\leq \int_\Omega \left(C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r\right)^{\frac{2^*}{r}} dx \\ &\leq \int_\Omega k_1 C_1^{\frac{2^*}{r}} dx + k_2 \int_\Omega |u|^{2^*} dx + k_3 (M_n)^{2\theta\frac{2^*}{r}} \int_\Omega |v|^{2^*} dx \\ &= k_1 C_1^{\frac{2^*}{r}} |\Omega| + k_2 ||u||_{L^{2^*}}^{2^*} + k_3 (M_n)^{2\theta\frac{2^*}{r}} ||v||_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

De maneira análoga, concluímos que $\widehat{g} \in L^{\frac{2^*}{s}}(\Omega)$.

Do resultado do Apêndice A.14, segue que

$$u \in W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \ \text{ e } \ v \in W^{2,\frac{2^*}{s}}(\Omega)$$

com

$$||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \leq C_3 \left(||\widehat{f}||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} + ||u||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \right)$$

e

$$||v||_{W^{2,\frac{2^*}{s}}(\Omega)} \leq C_4 \left(||\widehat{g}||_{L^{\frac{2^*}{s}}(\Omega)} + ||v||_{L^{\frac{2^*}{s}}(\Omega)} \right).$$

Usando o Teorema das Imersões Contínuas e o fato de u e v serem limitadas em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \leq C_5(M_n)^{2\theta} \tag{3.32}$$

e

$$||v||_{W^{2,\frac{2^*}{s}}(\Omega)} \leq C_6(M_n)^{2\theta}. \tag{3.33}$$

Pois, como

$$||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \leq C_3 \left(||\widehat{f}||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} + ||u||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \right)$$

e

$$\begin{aligned} ||\widehat{f}||^{\frac{2^*}{r}}_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} &= \int_\Omega \widehat{|f|}^{\frac{2^*}{r}}\, dx \\ &\leq \int_\Omega C_1^{\frac{2^*}{r}}\, dx + \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx + (M_n)^{2\theta\frac{2^*}{r}} \int_\Omega |v|^{2^*}\, dx \\ &\leq K_1 + K_2 + K_3(M_n)^{2\theta\frac{2^*}{r}} \\ &\leq K_4(M_n)^{2\theta\frac{2^*}{r}} \end{aligned}$$

temos que

$$||\widehat{f}||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \leq K_5(M_n)^{2\theta},$$

e daí,

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} &\leq C_3 \left(||\widehat{f}||_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} + |u|_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \right) \\ &\leq C_3 K_5 (M_n)^{2\theta} + K_6 \\ &\leq C_5 (M_n)^{2\theta}. \end{aligned}$$

de onde segue (3.32). De maneira semelhante mostra-se (3.33).

Temos três casos para analisar.

(Caso 1) $\frac{2^*}{r} > \frac{N}{2}$

Neste caso, do resultado do Apêndice (A.15),

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

continuamente. Assim, existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_1||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \\ &\leq C_1C_5(M_n)^{2\theta} \\ &\leq C_7(M_n)^{2\theta} \end{aligned}$$

Fazendo $\theta < \frac{1}{2}$, temos para n grande

$$C_7(M_n)^{2\theta} < (M_n)$$

pois, por hipótese, $M_n \to \infty$, ou seja,

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ \forall n \geq n_0 \ \ M_n > C_7^{\frac{1}{1-2\theta}}$$

de onde segue a afirmação.

Portanto,

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{L^\infty(\Omega)}} \leq \mathbf{M_n}.$$

De maneira análoga, fazendo $\eta < \frac{1}{2}$, para n grande, segue que

$$||\mathbf{v}||_{\mathbf{L^\infty(\Omega)}} \leq \mathbf{M_n}.$$

Assim, voltando ao enunciado do teorema em questão, fazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, temos que (u, v) é solução fraca de $(P_{\alpha,\beta})$ para $(a, b) \in (0, a^*) \times (0, b^*)$ com $(\theta, \eta) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(Caso 2) $\frac{2^*}{r} = \frac{N}{2}$

Neste caso, pelo Apêndice (A.15)

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega), \quad \forall\, t \in \left(\frac{2^*}{r}, +\infty\right)$$

continuamente.

fixe $t \in \left(\frac{2^*}{r}, 2^*\right)$ com $\frac{t}{r} > 1$. Temos

$$\widehat{f} \in L^{\frac{t}{r}}$$

já que

$$\begin{aligned} ||\widehat{f}||^{\frac{t}{r}}_{L^{\frac{t}{r}}} &\leq \int_\Omega \left(C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r\right)^{\frac{t}{r}} dx \\ &\leq C_2 + \int_\Omega |u|^t dx + (M_n)^{2\theta\frac{t}{r}} \int_\Omega |v|^t dx \\ &= C_2 + ||u||^t_{L^t(\Omega)} + (M_n)^{2\theta\frac{t}{r}}||v||^t_{L^t(\Omega)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Do Apêndice A.14, segue que

$$u \in W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega)$$

com

$$||u||_{W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega)} \leq C_8 \left(||\widehat{f}||_{L^{\frac{t}{r}}(\Omega)} + ||u||_{L^{\frac{t}{r}}(\Omega)} \right)$$

Analogamente temos $v \in W^{2,\frac{2^*}{s}}(\Omega)$ com

$$||v||_{W^{2,\frac{t}{s}}(\Omega)} \leq C_9 \left(||\widehat{g}||_{L^{\frac{t}{s}}(\Omega)} + ||v||_{L^{\frac{t}{s}}(\Omega)} \right).$$

Como u e v são limitadas e do Teorema das Imersões Contínuas de Sobolev,

$$\begin{aligned}
||\widehat{f}||^{\frac{2^*}{r}}_{L^{\frac{2^*}{r}}(\Omega)} &\leq C_2 + \int_\Omega |u|^t dx + (M_n)^{2\theta\frac{t}{r}} \int_\Omega |v|^t dx \\
&\leq C_2 + C_3 + C_4 (M_n)^{2\theta\frac{t}{r}} \\
&\leq C_5 (M_n)^{2\theta\frac{t}{r}} \\
&\leq C_5 (M_n)^{2\theta}
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$||u||_{W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega)} \leq C_{10} (M_n)^{2\theta}.$$

Por outro lado, como

$$\frac{t}{r} > \frac{2^*}{r} = \frac{N}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t}{r} > \frac{N}{2}$$

recaímos no **(Caso 1)**, de onde segue que

$$W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

continuamente. Assim, existe $C_{11} > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$:

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{11} ||u||_{W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega)}$$

Considere $\theta < \frac{1}{2}$, temos então, para n grande

$$C_{12}(M_n)^{2\theta} < (M_n)$$

o que implica que

$$||u||_{W^{2,\frac{t}{r}}(\Omega)} \leq (M_n)$$

e portanto,

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq (M_n).$$

De maneira análoga, para $\eta < \frac{1}{2}$, concluímos que

$$||v||_{L^\infty(\Omega)} \leq (M_n).$$

Logo, (u_n, v_n) é solução de $(P_{\alpha,\beta})$ com

$$(a,b) \in (0,a^*) \times (0,b^*) \quad \text{ e } \quad (\theta,\eta) \in \left(0,\frac{1}{2}\right) \times \left(0,\frac{1}{2}\right).$$

(Caso 3) $\frac{2^*}{r} < \frac{N}{2}$

Neste caso, do Apêndice (A.15):

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1^*}(\Omega)$$

continuamente, onde $\frac{1}{p_1^*} = \frac{r}{2^*} - \frac{2}{N}$, ou seja, $p_1^* = \frac{2^*N}{Nr-2.2^*}$.
Assim, existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} ||u||_{L^{p_1^*}(\Omega)} &\leq C_1 ||u||_{W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega)} \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

e daí, temos que $u \in L^{p_1^*}(\Omega)$. Logo

$$\widehat{f} \in L^{\frac{p_1^*}{r}}(\Omega),$$

pois

$$\begin{aligned} |\widehat{f}|^{\frac{p_1^*}{r}}_{L^{\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)} &\leq \int_\Omega \left(C_1 + |u|^r + (M_n)^{2\theta}|v|^r\right)^{\frac{p_1^*}{r}} dx \\ &\leq \int_\Omega C_1 dx + \int_\Omega |u|^{p_1^*} dx + \int_\Omega (M_n)^{2\theta\frac{p_1^*}{r}} |v|^{p_1^*} dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

E pelo resultado do Apêndice A.14, segue que

$$u \in W^{2,\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)$$

com

$$||u||_{W^{2,\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)} \leq C_2 \left(||\widehat{f}||_{L^{\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)} + ||u||_{L^{\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)} \right)$$

de onde segue que

$$||u||_{W^{2,\frac{p_1^*}{r}}(\Omega)} \leq C_3 (M_n)^{2\theta}$$

De maneira análoga, temos $v \in W^{2,\frac{p_1^*}{s}}(\Omega)$ com

$$||v||_{W^{2,\frac{p_1^*}{s}}(\Omega)} \leq C_4 (M_n)^{2\theta}$$

Temos então os seguintes casos:

(I) Quando $\frac{p_1^*}{r} > \frac{N}{2}$.

(II) Quando $\frac{p_1^*}{r} = \frac{N}{2}$.

(III) Quando $\frac{p_1^*}{r} < \frac{N}{2}$.

Em **(I)** e **(II)** recaímos nos **(Caso 1)** e **(Caso 2)** respectivamente. Analisemos então **(III)**.

Se $\frac{p_1^*}{r} < \frac{N}{2}$, voltando ao Apêndice (A.15), temos:

$$W^{2,\frac{2^*}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2^*}(\Omega)$$

continuamente, onde $\frac{1}{p_2^*} = \frac{r}{P_1^*} - \frac{2}{N}$, ou seja, $p_2^* = \frac{P_1^* N}{Nr - 2.P_1^*}$.
Portanto, repetindo os passos do **(Caso 3)**, concluíremos que

$$u \in W^{2,\frac{p_2^*}{r}}(\Omega)$$

com

$$||u||_{W^{2,\frac{p_2^*}{r}}(\Omega)} \leq C_5(M_n)^{2\theta}$$

E de maneira análoga, $v \in W^{2,\frac{p_2^*}{s}}(\Omega)$ com

$$||v||_{W^{2,\frac{p_2^*}{s}}(\Omega)} \leq C_6(M_n)^{2\theta}.$$

Assim, voltamos a ter os seguintes casos para analisar:

(I) Quando $\frac{p_2^*}{r} > \frac{N}{2}$.

(II) Quando $\frac{p_2^*}{r} = \frac{N}{2}$.

(III) Quando $\frac{p_2^*}{r} < \frac{N}{2}$.

Afirmação:

(i) $p_{n+1}^* > \left(A_0^{n+1}\right) 2^*$ onde A_0 é uma constante;

(ii) $p_n^* \to \infty$.

Mostrada a afirmação acima, podemos concluir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$

$$\frac{p_n^*}{r} > \frac{N}{2}$$

e portanto, para todo $n > n_0$, recaíremos no **caso 1**, concluindo que

$$u \in W^{2,\frac{p_n^*}{r}}(\Omega)$$

com

$$||u||_{W^{2,\frac{p_n^*}{r}}(\Omega)} \leq C_7(M_n)^{2\theta}$$

e

$$v \in W^{2,\frac{p_n^*}{s}}(\Omega)$$

com

$$||v||_{W^{2,\frac{p_n^*}{s}}(\Omega)} \leq C_8(M_n)^{2\theta}.$$

como queríamos.

Demonstremos a afirmação por indução.

(Parte 1) Sabemos que $\frac{2^*}{r} > 1 \Leftrightarrow 2^* > r$.

(Parte 2) Sendo $\frac{p_1^*}{2^*} > 1$, temos

$$\frac{p_1^*}{2^*} = \frac{2^*N}{2^*(Nr - 2.2^*)} = \frac{2^*N}{2^*(Nr - 2.2^*)} > 1$$

ou seja,

$$N > Nr - 2.2^*$$

ou ainda,

$$r < \frac{N+2}{N-2}.$$

de onde segue que, existe $A_0 > 1$ tal que

$$p_1^* > A_0 2^*.$$

(Parte 3) Como $\frac{p_2^*}{p_1^*} > \frac{p_1^*}{2^*}$, temos

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_1^*N}{p_1^*(Nr - 2p_1^*)} = \frac{N}{Nr - 2p_1^*} > 1,$$

e portanto,

$$\frac{N}{Nr - 2p_1^*} > \frac{N}{Nr - 2.2^*} \quad \Leftrightarrow \quad Nr - 2.2^* > Nr - 2p_1^* \quad \Leftrightarrow \quad 2^* < p_1^*.$$

Logo,

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} > A_0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* > A_0 p_1^* > A_0^2.2^*.$$

(Parte 4) Suponha que

$$\frac{p_n^*}{p_{n-1}^*} > A_0.$$

Daí,

$$p_n^* > A_0^n 2^*.$$

(Parte 5) Devemos mostrar que

$$p_{n+1}^* > A_0^{n+1} 2^*.$$

De fato, como

$$\frac{p_n^*}{p_{n-1}^*} > A_0 > 1, \qquad p_n^* > A_0 p_{n-1}^* \qquad \text{e} \qquad p_n^* > p_{n-1}^*$$

Temos

$$p_{n+1}^* = \frac{p_n^* N}{Nr - 2P_n^*} > A_0 \frac{p_{n-1}^* N}{Nr - 2p_{n-1}^*}$$

de onde segue que

$$p_{n+1}^* > A_0 p_n^* > A_0 A_0^n 2^* \quad \Rightarrow \quad p_{n+1}^* > A_0^{n+1} 2^*.$$

Além disso, passando ao limite quando $n \to \infty$ temos,

$$p_n^* > A_0^n 2^* \to \infty,$$

mostrando o que queríamos.

Daí, existem a^*, b^*, γ_1 e γ_2 números positivos tais que $(P_{\alpha,\beta})$ tem uma solução onde:

(i) Se $\alpha, \beta \in (0,1)$, $a, b \in (0, a^*) \times (0, b^*)$ e $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$;

(ii) Se $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in [1, 2^* - 1)$, $a, b \in (0, a^*) \times (0, \infty)$ e $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$ com $\beta < s$;

(iii) Se $\alpha \in [1, 2^* - 1)$ e $\beta \in (0,1)$, $a, b \in (0, \infty) \times (0, b^*)$ e $(\theta, \eta) \in (0, \gamma_1) \times (0, \gamma_2)$ com $\alpha < r$.

Apêndice A

Resultados utilizados

Neste apêndice enunciaremos os principais resultados utilizados durante as demonstrações deste trabalho.

Teorema A.1 (Lax-Milgram) (ver [9], p. 89)

Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear verificando:

(i) $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M||u||.||v||, \ \forall u, v \in H;$$

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ é coercivo, ou seja, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha||u||^2, \ \ \forall u \in H;$$

Se $T : H \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, existe um único $u \in H$ satisfazendo:

$$a(u,v) = T(v), \ \ \forall v \in H.$$

Teorema A.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) (ver [20], p. 6)

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer $u, v \in V$:

$$| < u, v > | \leq ||u||||v||$$

Teorema A.3 (Desigualdade de Hölder) (ver [9], p. 56)

Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p > 1$. Então, $f.g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f.g| \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) (ver [9], p. 54)

Seja $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis. Suponha que:*
(i) $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω.
(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo* n, $|f(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω.
Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Teorema A.5 (Princípio do Máximo Forte) (ver [11], p. 15)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e* $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ *tal que* $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ *em* Ω *e suponha que existe um ponto* $y \in \Omega$ *tal que* $u(y) = \sup\limits_{\partial\Omega} u \left(\inf\limits_{\partial\Omega} u\right)$. *Então,* u *é constante.*

Teorema A.6 (Princípio do Máximo Fraco) (ver [11], p. 15)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e* $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ *tal que* $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ *em* Ω. *Então*

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Definição A.7 (ver [4], p. 111)

Sejam H *um espaço de Hilbert e* $K \subset H$ *um conjunto fechado convexo. Seja* $x \in H$. *Então existe um único* $y \in K$ *tal que*

$$||x - y|| = \min_{z \in K} ||x - z||.$$

Além disso, y *pode ser caracterizado por*

$$y \in K; \ < x - y, z - y > \leq 0, \ \forall z \in K.$$

Teorema A.8 (ver [4], p. 112)

Sejam H *um espaço de Hilbert,* $K \subset H$ *um conjunto fechado e convexo. Seja* $P_k : H \to K$ *uma aplicação* $x \mapsto y$ *de acordo com A.7. Então para* $x_1, x_2 \in H$, *temos*

$$||P_k x_1 - P_k x_2|| \leq ||x_1 - x_2||.$$

Definição A.9 (ver [4], p. 222)

Seja $J : X \to \mathbb{R}$ *um funcional. Dizemos que* J *é* Fréchet Diferenciável *no ponto* $u \in X$ *se existir* $L : X \to \mathbb{R}$, *funcional linear contínuo, verificando*

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - L(h)}{||h||_{H_0^1(\Omega)}} \to 0, \quad \text{quando} \ \ ||h||_{H_0^1(\Omega)} \to 0.$$

Definição A.10 (Deridade de Gateaux) *A derivada de Gateaux é dada por*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial J(u)}{\partial(.)} : X &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \lim_{t\to 0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t}. \end{aligned}$$

Observação A.1 *Todo funcional diferenciável à Fréchet é derivável no sentido de Gateaux.*

Teorema A.11 (Desigualdade de Poincaré) (ver [9], p. 174)

Seja Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$. *Então, existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$ *tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}, \ \ 1 \leq p < \infty.$$

Teorema A.12 (ver [9], p. 50)

Sejam E *um espaço de Banach reflexivo e* $\{x_n\}$ *uma seqüência limitada em* E. *Então existe uma subsqüência* $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$ *com*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad em \quad \Omega.$$

Teorema A.13 (ver [9], p. 58)

Seja $\{f_n\}$ *uma seqüência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $||f_n - f||_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então existe uma subseqüência* $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ *tal que:*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x) q.t.p \ \ em \ \ \Omega$;

(ii)$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) q.t.p. \ \ em \ \ \Omega, \ \ \forall k, \ \ com \ \ h \in L^p(\Omega)$.

Teorema A.14 (ver [11], p. 177)

Seja L *um operador Elíptico estrito em* Ω *com* $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c^i \in L^\infty(\Omega)$. *Se* $\partial\Omega \in C^{k+2}$ *e existe* $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ *com* $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *Então* $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ *e:*

$$||u||_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C \left(||u||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{W^{k+2}(\Omega)} + ||\varphi||_{W^{k+2,2}(\Omega)} \right).$$

Observação A.2 *No Teorema acima,* $Lu = a^{ij} D_{ij} u + (D_j a^{ij} + b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + du) = f$, *onde* $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *e* $D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Observação A.3 *Usaremos o resultado deste Teorema quando* a^{ij} *é a matriz identidade,* $b^i = c^i = 0$ *e* $\varphi = 0$.

Teorema A.15 (ver [4], p. 79)

Sejam $m \geq 1$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então:*

(i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii)se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para* $q \in [p, \infty)$;

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.16 (Teorema de Imersão contínua de Sobolev) (ver [14], p. 102)

Sejam Ω *um domínio suave em* $\mathbb{R}^N$, $m > 0$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$, *as imersões abaixo são contínuas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;
(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q \leq \infty$;
(iii) *Se* $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$;
(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega),\ 0 \leq \alpha \leq m - \frac{N}{p}$

onde denotamos por $C^j_\beta(\Omega)$ o espaço de banach das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^j tais que u e todas as suas derivadas até ordem j são limitadas na norma:

$$||u||_{C^j_\beta(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

Além disso, $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, $0 < \lambda \leq 1$, é o espaço de Banach das funções $u \in C^k_\beta(\mathbb{R}^N)$ tais que u e todas as suas derivadas até a ordem k são Hölder contínuas (Holderiana) com expoente λ(λ-Hölder contínua), isto é:

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty.$$

E a norma de $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$||u||_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^N)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Teorema A.17 (Teorema de Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov) (ver [14], p. 103)

Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$, as imersões abaixo são compactas:
(i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;
(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q \leq \infty$;
(iii) *Se* $m > \frac{N}{p}$;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ 1 \leq q \leq \infty W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega) W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega})$$

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\bar{\Omega}),\ 0 < \mu < m - \frac{N}{p}$

Teorema A.18 (ver [9], p. 35)

Sejam H um espaço de Banach $\{u_n\} \subset H$. Então valem:
(i) $u_n \rightharpoonup u$ em H se, e somente se, $F(u_n) \to F(u)$ $\forall F \in H'$;
(ii) Se $u_n \rightharpoonup u$ em H, então $||u|| \leq \liminf ||u_n||$.

Teorema A.19 (ver [22], p. 68)

Em uma matriz quadrática, uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante da matriz troca de sinal.

Teorema A.20 (ver [9], p. 52)

Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Para toda seqüência $\{u_n\} \subset X$, com

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad X$$

$$\limsup ||u_n|| \leq ||u||.$$

Segue-se que

$$u_n \rightarrow u \quad em \quad X.$$

Teorema A.21 *Sejam $f_1, ..., f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ caminhos diferenciáveis e $\varphi : \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação p-linear. Definindo*

$$\begin{array}{rcl} g : I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & g(t) = \varphi\left(f_1(t), ..., f_p(t)\right). \end{array}$$

Então, g é diferenciável e

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{p} \varphi\left(f_1(t), ..., f_i'(t), ..., f_p(t)\right).$$

Teorema A.22 (Teorema do Divergente) (ver [5], p. 17)

Sejam Ω um domínio limitado cuja $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1 e ν o vetor unitário normal a $\partial\Omega$. Para qualquer função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, dS$$

Teorema A.23 (Teorema de Weiestrass) (ver [19], p. 44)

Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitado e atinge seus extremos, ou seja, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$.

Teorema A.24 (Teorema de Aproximações de Weierstrass ou Stone-Weierstrass) (ver [20], p. 262)

Sejam M um espaço métrico compacto e $S \subset C(M, \mathbb{R})$ ($C(M, \mathbb{R})$ é o conjunto das funções contínuas $g : M \rightarrow \mathbb{R}$) um conjunto tal que para $x \neq y \in M$, existe $g \in S$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios nas funções de S.

Apêndice B

Base Hilbertiana

Uma das principais características do método de Galerkin é usar que H_0^1 admite uma base Hilbertiana.

Teorema B.1 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Antes da demonstração recordemos o que é base Hilbertiana e Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:

Base Hilbertiana

Chamaremos $\{e_n\}$ de base Hilbertiana de elementos em H (espaço de Hilbert) se:

$(i)|e_n| = 1, \quad \forall n, \quad (e_m, e_n) = 0, \quad \forall m, n, \quad \text{com} \quad m \neq n.$

(ii)O espaço vetorial gerado pelos en's é denso em H.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Temos que apartir de uma base qualquer de um espaço vetorial de dimensão finita podemos obter uma base ortonormal.

Seja uma base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$. Considere:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1$

$\vdots$

$w_n = v_n - \frac{<v_n,w_{n-1}>}{<w_{n-1},w_{n-1}>} w_{n-1} - ... - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1$

Agora, basta normalizar os en's, fazendo, para cada n:

$$e_n = \frac{w_n}{||w_n||}.$$

Portanto, apartir de $\{v_1, ..., v_n\}$ obtemos $\{e_1, ..., e_n\}$, uma base ortonormal.

Demostração do teorema:

Como H_0^1 é Hilbert separável, considere $\{v_k\}$ um subconjunto enumerável e denso de H_0^1.

Seja

$$F_k =< v_1, ..., v_k > .$$

Note que

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq ... \subseteq F_k \subseteq ...$$

onde a dimensão de cada F_k é finita.

Para cada F_k, através do Processo de Ortogonolização de Gram-Schmidt, considere uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_k\}$.

Como $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ é denso em H_0^1, segue, da construção:

$$\{e_1\} \subseteq \{e_1, e_2\} \subseteq ... \subseteq \{e_1, ..., e_k\} \subseteq ...$$

de onde concluímos que $\{e_1, ..., e_k, ...\}$ é uma base Hilbertiana para H_0^1.

$\blacksquare$

Apêndice C

Capítulo 2 - caso N=3

C.1 Lema 1

Enuciemos o Lema 1 do Capítulo 2, agora para o caso $N = 3$.

Lema C.1 *Seja $B = (0,1)$ uma bola unitária no $\mathbb{R}^3$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação de classe C^2. Seja $M(x)$ a matriz*

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Seja $E_i(x)$ o determinante da matriz acima menos a i-ésima linha. Então:

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Demostração:

Temos:

$$E_1(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)$$

$$E_2(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)$$

$$E_3(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)$$

sendo, para $i \neq j$, $C_{ij}(x)$ o determinante da matriz $M(x)$ retirado a i-ésima linha e sustituído a j-ésima linha:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\right)$$

por

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right),$$

Obtemos,

$$C_{12}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)$$

$$C_{13}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x)$$

$$C_{23}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x)$$

$$C_{21}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)$$

$$C_{31}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)$$

$$C_{32}(x) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x)$$

Observe que $C_{21} = C_{12}$, $C_{31} = -C_{13}$ e $C_{32} = C_{23}$

Note agora que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_1}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial}{x_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)\right) \\
&= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\
&= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \\
&= C_{12}(x) + C_{13}(x) \\
&= \sum_{j \neq 1} C_{1j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_2}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\
&= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\
&= C_{12}(x) + C_{23}(x) \\
&= C_{21}(x) + C_{23}(x) \\
&= \sum_{j \neq 2} C_{2j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_3}{\partial x_3}(x) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \\
&= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x).\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\
&= C_{31}(x) + C_{23}(x) \\
&= C_{31}(x) + C_{32}(x) \\
&= \sum_{j \neq 3} C_{3j}
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{3} (-1)^i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x) &= (-1)^1 \frac{\partial E_1}{\partial x_1}(x) + (-1)^2 \frac{\partial E_2}{\partial x_2}(x) + (-1)^3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3}(x) \\
&= -C_{12}(x) - C_{13}(x) + C_{21}(x) + C_{23}(x) - C_{31}(x) - C_{32}(x) \\
&= -C_{12}(x) - C_{13}(x) + C_{12}(x) + C_{23}(x) + C_{13}(x) - C_{23}(x) = 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

C.2 $\sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} E_i(x) x_i = x_1$

Mostraremos a igualdade (2.6) para o caso N=3.

Temos

$$E_1(x) = det \begin{bmatrix} 1+\lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_2 \\ \lambda_2 x_3 & 1+\lambda_3 x_3 \end{bmatrix} = (1+\lambda_2 x_2)(1+\lambda_3 x_3) - \lambda_3 x_2 \lambda_2 x_3 = \lambda_3 x_3 + 1 + \lambda_2 x_2;$$

$$E_2(x) = det \begin{bmatrix} \lambda_2 x_1 & \lambda_3 x_1 \\ \lambda_2 x_3 & 1+\lambda_3 x_3 \end{bmatrix} = (\lambda_2 x_1)(1+\lambda_3 x_3) - \lambda_3 x_1 \lambda_2 x_3 = \lambda_2 x_1;$$

$$E_3(x) = det \begin{bmatrix} \lambda_2 x_1 & \lambda_3 x_1 \\ 1+\lambda_2 x_2 & 1+\lambda_3 x_2 \end{bmatrix} = (\lambda_2 x_1)(1+\lambda_3 x_2) - (\lambda_3 x_1)(1+\lambda_2 x_2) = -\lambda_3 x_1.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}E_i(x)x_i = x_1 &= (\lambda_3 x_3 + 1 + \lambda_2 x_2) + (-1)^{2+1}(\lambda_2 x_1) + (-\lambda_3 x_1) \\
&= \lambda_3 x_3 x_1 + x_1 + \lambda_2 x_2 x_1 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_1 x_2 \\
&= x_1.
\end{aligned}$$

como queríamos.

Bibliografia

[1] C. O. Alves and D. G. de Figueiredo, *Nonvariational Elliptic Systems via Galerkin Methods*, Nonlinear Analysis, 47-57.

[2] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems* , J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[3] C. O. Alves, D. C. de Morais Filho and M. A. Souto, *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents*, Nonlinear Analysis 42 (2000), 771-787.

[4] S. Kesavan, *Topics in funcional analysis and applications*, John Wiley & Sons (1989).

[5] A. Giglioli, *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*,10º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1975).

[6] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[7] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York (1995).

[8] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Second Edition, Wiley.

[9] H. Brezis, *Analyse Fonnctionelle, Theorie et Applications*, Dunod (1999).

[10] O. kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et Appications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag (1993).

[11] D. Gilbarg and N. Trundinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag (2001).

[12] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag (1980).

[13] D. G. da Costa, *Tópicos em Análises não-linear e aplicações às Equações diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro (1986).

[14] D.G. de Figueiredo, *Equações Elípticas não lineares*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1977).

[15] D.G. de Figueiredo, *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília, Brasília (1963).

[16] M. P. do Carmo, *Differencial Geometry of curves and superfaces*, Pretice-Hall, Englewood cliffs (1976).

[17] E. Kreyzkig, *Introductory Funcional Analysis whit Applications*, Wiley, New York (1989).

[18] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1976).

[19] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1981).

[20] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2003).

[21] L. A. Medeiros, M. Milla Miranda, *Espaços de Sobolev*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (2000).

[22] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo , H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, 3ª edição, Harbra (1986). (2003).