

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica**

**Uma Nova Abordagem para a Análise  
de Arranjos de Antenas com Parâmetros  
Aleatórios**

Aluno: Wamberto J. L. Queiroz  
Orientador: Marcelo S. Alencar, Ph.D.

Maio de 2004

# UMA NOVA ABORDAGEM PARA A ANÁLISE DE ARRANJOS DE ANTENAS COM PARÂMETROS ALEATÓRIOS

Wamberto J. L. Queiroz

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Marcelo Sampaio Alencar, PhD

Campina Grande, Paraíba, Brasil

© Wamberto J. L. Queiroz, Maio de 2004



Q3m

Queiroz, Wamberto Jose Lira de

Uma nova abordagem para a análise de arranjos de antenas com parametros aleatorios / Wamberto Jose Lira de Queiroz. - Campina Grande, 2004.

181 f.

Tese (Doutorado em Engenharia Eletrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Arranjos de Antenas - Parametros Aleatorios 2. Antenas Adaptativas 3. Cancelamento de Interferencia 4. Sistemas em Diversidade 5. Tese I. Alencar, Marcelo Sampaio de II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB) III. Título


CDU 631.395(043)

UMA NOVA ABORDAGEM PARA ANÁLISE DE ARRANJOS DE ANTENAS COM  
PARÂMETROS ALEATÓRIOS

WAMBERTO JOSÉ LIRA DE QUEIROZ

Tese Aprovada em 18.06.2004


PROF. MARCELO SAMPAIO DE ALENCAR, Ph.D., UFCG  
Orientador



PROF. CELSO DE ALMEIDA, Dr., UNICAMP  
Componente da Banca



PROF. JOÃO CESAR MOURA MOTA, Dr., UFC  
Componente da Banca



PROF. ADAILDO GOMES D'ASSUNÇÃO, Dr., UFRN  
Componente da Banca



PROF. GLAUCO FONTGALLAND, Dr., Colaborador DEE/UFCG  
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE – PB  
JUNHO - 2004



## Agradecimentos

Neste ponto, tenho o prazer de agradecer a todos os que deram suas contribuições para a realização desse trabalho

- A Deus, por tudo e sempre;
- Aos meus pais, Vanda Lira de Queiroz e José Velozo de Queiroz, pelo apoio, incentivo e força;
- Ao meu orientador Marcelo Sampaio de Alencar, que tem me acompanhado desde a graduação, pela sua orientação, disponibilidade, dedicação durante todo o trabalho e pela sua amizade;
- A Fabricio G. S. Silva, que se mostrou um bom parceiro de trabalho e contribuiu com valiosas discussões;
- Aos professores do DEE pela minha formação na graduação;
- Aos amigos Daniel, Felipe, Karina, Leonardo e Suzete;
- Aos amigos Wasllon, Ronaldo, Rinaldo e Paulo Marcio;
- Ao CNPq pelo financiamento do trabalho;
- Aos funcionários da COPELE e do DEE.

*"Sei que meu trabalho é uma gota no oceano, mas sem ele, o oceano seria menor."*

Madre Teresa de Calcutá.

## Resumo

Nesta tese é proposta uma nova abordagem para o projeto de arranjos lineares de antenas, bem como sua aplicação na melhoria de desempenho de sistemas de comunicações móveis. Além dos métodos clássicos de projeto, que são tratados de forma introdutória, para que se possa ter uma base teórica para os tópicos tratados nos capítulos seguintes, são apresentadas propostas de projetos de arranjos lineares considerando a possibilidade da aleatoriedade nos parâmetros do arranjo. São apresentadas, neste caso, quatro novas configurações de arranjos lineares. Na primeira configuração proposta, a distância  $d$  entre os elementos isotrópicos é fixa e a amplitude dos coeficientes de excitação desses elementos é modelada por uma variável aleatória com distribuição uniforme. Na segunda configuração, as amplitudes de excitação dos elementos são determinadas e a distância entre eles é escolhida aleatoriamente em um intervalo apropriado, ou seja, a distância pode variar entre dois valores dados em termos do comprimento de onda. No terceiro caso, tanto a distância entre os elementos quanto a amplitude dos coeficientes de excitação são escolhidas aleatoriamente. Na quarta configuração, a fase e a direção de varredura do feixe principal irradiado é aleatória em uma determinada região em volta da antena.

Para as três primeiras configurações foi calculado o desvio padrão do fator de arranjo, que fornece um limitante para a variação de amplitude do diagrama de irradiação. A partir de uma escolha adequada dos parâmetros do arranjo, pode-se mostrar que tais estruturas fornecem os diagramas de irradiação pré-definidos. As demais contribuições da tese são propostas de aplicações de arranjos de antenas para a melhoria de desempenho de enlaces de comunicações. Um exemplo dessas aplicações é o uso de arranjo circular no cancelamento de interferência usando métodos de decomposição em subespaços. Outras contribuições são a obtenção de expressões analíticas para o cálculo dos coeficientes de correlação espacial para o arranjo circular, a obtenção de expressões fechadas para a potência de interferência mútua no modelo de canal de baixo-*rank*, a avaliação da capacidade do canal, em termos de número de usuários, por meio de arranjos linear e circular e o estudo de arranjos compactos em sistemas com diversidade espacial.

## Abstract

This thesis presents a study for the problem of designing linear antenna arrays, as well as its applications on the performance improvement of mobile communication systems. Besides the classical methods, which are presented in an introductory way, to establish theoretical grounds for the topics that are treated in the following chapters, proposals for linear arrays, which have random parameters, are presented. Four new configurations for linear arrays are proposed. In the first proposed configuration, the distance  $d$  between the elements is fixed and the amplitude of the driving coefficients is modeled as a uniformly distributed random variable. In the second configuration, the driving amplitudes at the elements are fixed and the distance between them is chosen from an appropriate interval, this is, the distance is allowed to change between two given values, as a fraction of the wavelength. In the third case, the distance between the elements as well as the amplitude of the driving coefficients are chosen randomly. In the fourth configuration, the scanning array direction is taken at random. In this case, the main antenna beam randomly scans a certain space area around the antenna.

For the first three configurations the standard ratio for the array factor was computed, and it provides an upper limit for the antenna radiation pattern. If the antenna parameters can be adequately chosen, one can show that those structures proved good radiation patterns. The other contributions from the thesis are proposals for the use of antenna arrays to improve the performance of communication links. On such example is the use of the circular array to cancel interference using subspace decomposition methods. Other contributions are the derivation of closed-form expressions for the computation of spatial correlation coefficients for the circular array, the derivation of closed-form expressions for the mutual interference power for the low-rank channel, the evaluation of the channel capacity, in terms of number of users, and the study of compact arrays for space diversity.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	3
1.2	Objetivo . . . . .	4
1.3	Organização do Texto . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Antenas Inteligentes</b>	<b>6</b>
2.1	Introdução . . . . .	6
2.2	Fundamentação Teórica . . . . .	7
2.3	Estruturas Básicas . . . . .	10
2.3.1	Antena com dois elementos . . . . .	10
2.3.2	Antena linear com $N$ elementos: espaçamento e amplitude uniformes . . . . .	11
2.3.3	Arranjo linear com espaçamento uniforme e amplitude não-uniforme . . . . .	16
2.3.4	Método da expansão binomial . . . . .	18
2.3.5	Método da expansão polinomial . . . . .	19
2.3.6	Método dos coeficientes aleatórios . . . . .	21
2.4	Sistemas Adaptativos com Antenas . . . . .	22
2.4.1	Uso do algoritmo LMS . . . . .	26
2.4.2	Algoritmo LMS irrestrito . . . . .	27
2.4.3	Algoritmo LMS restrito . . . . .	30
2.4.4	Algoritmo RLS . . . . .	32
2.4.5	Outros algoritmos . . . . .	35
2.5	Métodos Baseados em Auto-análise . . . . .	38
2.6	Aplicações das Antenas Inteligentes . . . . .	38
2.7	Múltiplo Acesso por Divisão no Espaço (SDMA): A Evolução das Antenas Inteligentes	39
2.7.1	Métodos baseados em diversidade . . . . .	40
2.7.2	Métodos baseados no chaveamento dos lóbulos irradiados . . . . .	41
2.7.3	Métodos baseados no uso de antenas inteligentes . . . . .	41
2.7.4	Modelo matemático fundamental . . . . .	42

2.7.5	Princípio de funcionamento da SDMA . . . . .	43
2.8	Considerações em Relação ao Custo das Antenas Inteligentes . . . . .	44
2.9	Revisão Bibliográfica . . . . .	45
2.10	Conclusão . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Análise de Arranjos com Parâmetros Aleatórios</b>	<b>48</b>
3.1	Introdução . . . . .	48
3.2	Fundamentação Teórica . . . . .	49
3.3	Cálculo de Diretividade . . . . .	55
3.4	Cálculo de Parâmetros de Projeto . . . . .	59
3.4.1	Eficiência de feixe irradiado . . . . .	60
3.5	Arranjos com Varredura Aleatória . . . . .	62
3.6	Cálculo da Variância do Fator de Arranjo . . . . .	65
3.7	Arranjos Aperiódicos . . . . .	69
3.7.1	Arranjos assimétricos com excitação aleatória e equiprovável . . . . .	69
3.7.2	Arranjos simétricos com excitação aleatória e equiprovável . . . . .	70
3.8	Conclusão . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Cancelamento de Interferência por Meio de Auto-análise</b>	<b>76</b>
4.1	Introdução . . . . .	76
4.1.1	Definição do sistema autocancelador . . . . .	77
4.1.2	A fase de pré-processamento . . . . .	80
4.2	Problema com Direções Aleatórias para os Sinais de Interferência . . . . .	83
4.3	Problema com Aleatoriedades na Estrutura do Arranjo . . . . .	86
4.4	Cancelamento de Interferência com Arranjo Circular . . . . .	89
4.5	Conclusão . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Estudo do Canal Direcional</b>	<b>94</b>
5.1	Introdução . . . . .	94
5.2	Modelo do Meio de Transmissão . . . . .	95
5.3	Cálculo dos Coeficientes de Correlação . . . . .	98
5.3.1	Funções de correlação do arranjo linear . . . . .	98
5.4	Funções de Correlação do Arranjo Circular . . . . .	101
5.5	Avaliação Numérica da Correlação Espacial . . . . .	104
5.5.1	Resultados para o arranjo linear . . . . .	104
5.5.2	Resultados para o arranjo circular . . . . .	108
5.6	Conclusão . . . . .	112

<b>6</b>	<b>Controle de Interferência com Arranjos de Antenas</b>	<b>113</b>
6.1	Introdução . . . . .	113
6.2	Modelo do Problema . . . . .	114
6.3	Controle de Interferência no Canal de Baixo- <i>rank</i> . . . . .	117
6.3.1	Distribuição gaussiana para os ângulos de chegada . . . . .	118
6.3.2	Distribuição uniforme para os ângulos de chegada . . . . .	120
6.4	Resultados Numéricos . . . . .	122
6.5	Obtenção da fdp de $I(\phi_i, \phi_j)$ . . . . .	126
6.6	Avaliação da Capacidade de um Sistema CDMA por Meio da Correlação Espacial . . .	132
6.6.1	Modelo do canal estudado . . . . .	132
6.6.2	Modelamento do problema . . . . .	133
6.7	Resultados . . . . .	138
6.8	Conclusão . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Uso de Arranjos de Antenas em Sistemas com Diversidade</b>	<b>144</b>
7.1	Introdução . . . . .	144
7.2	Receptor com Razão Máxima de Combinação . . . . .	145
7.3	Estatísticas de Desvanecimento com Distribuição de Nakagami . . . . .	149
7.4	Avaliação da Probabilidade de Erro Média de Símbolos . . . . .	156
7.5	Resultados . . . . .	158
7.5.1	Arranjo Linear com Distribuição Uniforme . . . . .	158
7.6	Conclusão . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>162</b>
8.1	Contribuições do trabalho . . . . .	164
8.2	Propostas de continuação do trabalho . . . . .	165
<b>A</b>	<b>Acoplamento Eletromagnético</b>	<b>166</b>
A.1	Estudo dos Efeitos do Acoplamento Mútuo . . . . .	166
A.1.1	Impedância de um dipolo isolado . . . . .	166
A.1.2	Impedância mútua entre dipolos . . . . .	168
A.2	Efeito do Acoplamento Mútuo em Arranjos de Antenas . . . . .	172
A.2.1	Parâmetros que afetam o acoplamento mútuo . . . . .	172
A.2.2	Formas de quantificar o acoplamento . . . . .	173

# Lista de Figuras

2.1	Geometria de um arranjo de dois elementos posicionados ao longo do eixo $z$ . . . . .	10
2.2	Representação do campo distante de $N$ elementos isotrópicos posicionados ao longo do eixo $z$ . . . . .	12
2.3	Diagrama de irradiação no plano de elevação (plano E) de um arranjo linear uniforme com elementos ao longo do eixo $z$ e $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ . . . . .	13
2.4	Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação (plano E) de um arranjo linear uniforme com elementos ao longo do eixo $z$ e $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ . . . . .	14
2.5	Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação (E) de um arranjo linear de 11 elementos posicionados no eixo $z$ com espaçamentos $d_1 = 0, 15\lambda$ e $d_2 = \lambda/2$ , $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ , $\theta_{1_0} = 0^\circ$ e $\theta_{2_0} = 55^\circ$ . . . . .	15
2.6	Configurações de conjuntos de elementos de antenas . . . . .	16
2.7	Diagrama representativo de um arranjo linear igualmente espaçado com $N$ elementos. . . . .	16
2.8	Arranjo de amplitudes não-uniformes de número (a) par e (b) ímpar de elementos. . . . .	17
2.9	Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação E de um arranjo com excitação binomial. . . . .	19
2.10	Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação de um arranjo de antenas com coeficientes de excitação obtidos a partir dos coeficientes de um polinômio de Dolph-Tschebyscheff de ordem 9 e $R_0 = 26$ dB. . . . .	21
2.11	Diagramas de irradiação normalizados no plano de elevação de um arranjo linear com parâmetros aleatórios. . . . .	22
2.12	Sistema de coordenadas para análise de sistemas adaptativos. . . . .	23
2.13	Representação de um arranjo linear com $N$ elementos. . . . .	24
2.14	Resposta de um arranjo linear de 10 elementos para uma SNR=30dB. . . . .	26
2.15	Representação de um arranjo linear de $N$ elementos com algoritmo recursivo acoplado. . . . .	26
2.16	Convergência das variantes (a) LMS Normalizado e (b) $\alpha$ -LMS, em função do número de amostras de treinamento $N_a$ , para uma SNR=30dB. . . . .	28
2.17	Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativo de 5 elementos posicionados no eixo $x$ para $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0.2$ e $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0.1$ . . . . .	29

2.18	Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativo de 5 elementos posicionados ao longo do eixo $x$ para $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0.2$ e $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0.1$ , em função do número de amostras de treinamento. . . . .	29
2.19	Curva de convergência da potência do ruído de saída de um arranjo adaptativo com 10 elementos, usando o LMS restrito recursivo. . . . .	31
2.20	Curva de convergência da potência do ruído de saída de um arranjo linear adaptativo com 10 elementos usando o LMS restrito estruturado. . . . .	32
2.21	Curva do erro quadrático médio do RLS para $\zeta = 0.6$ e $\delta = 0.004$ em função das amostras de treinamento $N_a$ . . . . .	34
2.22	Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativa de 5 elementos disposto ao longo do eixo $x$ com $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0.25$ e $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0.1$ , usando o RLS com $\zeta = 0.6$ e $\delta = 0.004$ , para diferentes valores de amostras de treinamento $N_a$ . . . . .	34
2.23	Estrutura de um cancelador adaptativo múltiplo. . . . .	35
2.24	Resposta de um cancelador adaptativo com 3 arranjos de 5 elementos posicionados no plano $x - y$ , usando o algoritmo RLS com $\zeta = 0,6$ e $\delta = 0,004$ , para uma $SNR = 30dB$ e um número de amostras de treinamento igual a 20. . . . .	36
2.25	Curvas de erro quadrático médio do RLS usado no ajuste do cancelador múltiplo com 3 arranjos e $\zeta = 0,6$ e $\delta = 0,004$ , para uma $SNR = 30dB$ e um número de amostras de treinamento $N_a$ igual a 20. . . . .	36
2.26	Diagrama de um sistema típico de antenas inteligentes. . . . .	42
3.1	Diagrama de irradiação normalizado no plano $y - z$ , ou plano de elevação, de uma arranjo linear com elementos uniformemente espaçado ao longo do eixo $z$ . . . . .	51
3.2	Diagrama de irradiação médio, no plano $y - z$ , de um arranjo linear com 10 elementos distribuídos ao longo do eixo $z$ , com amplitude dos coeficientes de excitação dados pelo polinômio de Tschebyscheff e espaçamento $d$ entre os elementos uniforme em $[0, 25; 0, 45]\lambda$ , $[0, 00; 1, 00]\lambda$ e $[0, 0; 0, 50]\lambda$ . . . . .	53
3.3	Diagrama de irradiação médio, no plano de elevação, de um arranjo linear com $N = 2M$ elementos distribuídos simetricamente ao longo eixo $z$ , com amplitude dos coeficientes de excitação uniforme em $[0, 25; 0, 50]$ e espaçamento $d$ entre os elementos uniforme em $[0, 15; 0, 50]\lambda$ . . . . .	54
3.4	Diagramas de irradiação médio, no plano de elevação, de uma arranjo linear com elementos ao longo do eixo $z$ , usando parâmetros aleatórios. . . . .	55
3.5	Distribuição das amostras de $D_0$ para um arranjo linear com 12 elementos, considerando coeficientes de excitação aleatórios e uniformemente distribuídos em $[0, 25; 0, 50]$ , e espaçamento $d$ entre os elementos igual a $\lambda/2$ . . . . .	58
3.6	Distribuição das amostras de $D_0$ para um arranjo linear com 12 elementos, considerando coeficientes de excitação aleatórios e uniformemente distribuídos em $[0, 25; 0, 50]$ , e espaçamento $d$ entre os elementos aleatório em $[0, 25; 0, 50]\lambda$ . . . . .	58



3.7	Modelo de um lóbulo diretivo, orientado ao longo dos eixos $y$ e $z$ . . . . .	61
3.8	Eficiência de feixe irradiado de um arranjo linear simétrico, com coeficientes de excitação obtidos por expansão polinomial, para diferentes valores do número de elementos e em função do ângulo $\theta_2$ . . . . .	63
3.9	Diagrama de irradiação no plano de elevação de uma arranjo linear de 12 elementos posicionados ao longo do eixo $z$ , com $d = \lambda/2$ e varredura aleatória no intervalo $[-\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{16}]$ . . . . .	65
3.10	Desvio padrão do fator de arranjo de um arranjo linear simétrico com amplitude dos coeficientes de excitação tal que $a_n \sim U[a_l; a_r]$ . . . . .	66
3.11	Desvio padrão do fator de arranjo linear com $2M$ elementos e parâmetros aleatórios. . . . .	68
3.12	Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear assimétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo $z$ , para diferentes valores do número de elementos $N$ . . . . .	72
3.13	Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear assimétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo $z$ , para diferentes valores do número de elementos $N$ e com amplitude de excitação chaveada aleatoriamente entre 0, 0,5 e 1,0. . . . .	73
3.14	Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear simétrico e aperiódico, com elementos posicionado ao longo do eixo $z$ , para diferentes valores do número de elementos $M$ e com espaçamento $d = \lambda/2$ . . . . .	73
3.15	Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear simétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo $z$ , para diferentes valores do número de elementos $M$ com coeficientes de excitação tomando valores equiprováveis no conjunto $0, \frac{1}{2}, 1$ . . . . .	74
4.1	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos posicionados ao longo do plano $x - y$ , com 3 fontes de interferência. . . . .	80
4.2	Estrutura de um arranjo linear com espaçamento $d$ entre os elementos e com ângulo de chegada aleatório das fontes de interferência. . . . .	83
4.3	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , com 3 fontes de interferência de direções aleatoriamente distribuídas no intervalo $[0, \pi]$ . . . . .	85
4.4	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação aleatória $\rho$ de média nula e variância $\sigma_\rho^2 = 0.0015$ . . . . .	87
4.5	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos, com 3 fontes de interferência de direções conhecidas e parâmetros não-perturbados. . . . .	88
4.6	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação aleatória $\rho$ de média nula e variância $\sigma_\rho^2 = 0.0000625$ . . . . .	89

4.7	Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação da distância $d$ no intervalo $[d - 0.05, d + 0.05]$ . . . . .	90
4.8	Resposta do autocancelador: Arranjo linear versus arranjo circular, ambos com 5 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , $d = \lambda/2$ , $ka = 5\pi$ . Os ângulos de chegada dos sinais de interferência são $5^\circ$ , $35^\circ$ , $50^\circ$ e o ângulo de chegada do sinal desejado é $80^\circ$ . . . . .	91
4.9	Resposta do autocancelador: Arranjo linear versus arranjo circular, ambos com 5 elementos isotrópicos ao longo do plano $x - y$ , $d = \lambda/2$ , $\beta a = 5\pi$ , mas com uma diferença entre os ângulos de chegada de $5^\circ$ , ou seja $15^\circ$ , $25^\circ$ , $30^\circ$ e ângulo desejado $\phi_d = 35^\circ$ . . . . .	92
5.1	Vista superior de um modelo de canal direcional com difusores locais. . . . .	95
5.2	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o segundo elemento em um arranjo linear com 8 elementos, com direção do <i>cluster</i> principal $\phi_o = 0^\circ$ , usando distribuição uniforme. . .	105
5.3	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo linear com 8 elementos, com direção do <i>cluster</i> principal $\phi_o = 45^\circ$ , usando distribuição uniforme. . .	105
5.4	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quinto elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição co-senoidal com $Q = 1$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . . . .	106
5.5	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição co-senoidal com $Q = 3$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . .	107
5.6	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quarto elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com $\phi_o = 0^\circ$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ . . . . .	107
5.7	Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o sétimo elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com $\phi_o = 90^\circ$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ . . . . .	108
5.8	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o segundo elemento em um arranjo circular com 8 elementos, com direção do <i>cluster</i> principal $\phi_o = 0^\circ$ , usando distribuição uniforme. . .	109
5.9	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo circular com 8 elementos, com distribuição do <i>cluster</i> principal $\phi_o = 60^\circ$ , usando distribuição uniforme. . .	109
5.10	Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando a distribuição co-senoidal com $Q = 2$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . .	110
5.11	Gráficos da correlação espacial entre o quarto e o sétimo elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando a distribuição co-senoidal com $Q = 3$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . . . .	110
5.12	Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com $\phi_o = 0^\circ$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ . . .	111
5.13	Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com $\phi_o = 90^\circ$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ . . .	111

6.1	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função do espaçamento entre os elementos do arranjo e do número de elementos para o caso em que a excitação aleatória é usada. . . . .	116
6.2	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função do espaçamento entre os elementos do arranjo e da forma de excitação dos elementos do arranjo para $N = 2M = 8$ . . . . .	116
6.3	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\phi_o$ , considerando-se $\sigma_\phi = 20^\circ$ , excitação binomial e distribuição gaussiana. . . . .	122
6.4	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ , considerando-se $\phi_o = 45^\circ$ , excitação binomial e distribuição gaussiana. . . . .	123
6.5	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\phi_o$ , considerando-se $\sigma_\phi = 20^\circ$ , excitação polinomial e distribuição gaussiana. . . . .	123
6.6	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\sigma_\phi$ , considerando-se $\phi_o = 45^\circ$ , excitação polinomial e distribuição gaussiana. . . . .	124
6.7	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\phi_o$ , considerando-se $\Delta = 20^\circ$ , excitação binomial e distribuição uniforme. . . . .	124
6.8	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\Delta$ , considerando-se $\phi_o = 45^\circ$ , excitação binomial e distribuição uniforme. . . . .	125
6.9	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\phi_o$ , considerando-se $\Delta = 20^\circ$ , excitação polinomial e distribuição uniforme. . . . .	125
6.10	Curvas de $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ em função de $d/\lambda$ para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo $x$ , para diferentes valores de $\Delta$ , considerando-se $\phi_o = 45^\circ$ , excitação polinomial e distribuição uniforme. . . . .	126
6.11	Distribuição das amostras da variável aleatória $I(\phi_i, \phi_j)$ , considerando-se um arranjo linear simétrico com $2M$ elementos distribuídos ao longo do eixo do arranjo, com excitação polinomial e relação de amplitudes $R_0$ . . . . .	129
6.12	Histograma da variável $G_2$ , para um arranjo linear simétrico com 8 elementos, $d = \lambda/2$ e $R_0 = 26$ dB, 10 células e 20 usuários por célula. . . . .	131
6.13	Histograma da variável $G_1 + G_2$ , para um arranjo linear simétrico com 10 elementos, $d = \lambda/2$ e $R_0 = 26$ dB, 18 células e 60 usuários por célula. . . . .	131
6.14	Aglomerado celular com 8 células adjacentes. . . . .	133

6.15	Ganho de interferência em função da direção do <i>cluster</i> de sinais refletidos $\phi_o$ em um arranjo linear com $N = 6$ elementos e $d = \lambda/2$ . . . . .	139
6.16	Ganho de interferência em função da direção do <i>cluster</i> de sinais refletidos $\phi_o$ em um arranjo linear com $N = 10$ elementos e $d = \lambda/2$ . . . . .	139
6.17	Ganho de interferência em função do desvio padrão angular $\sigma_\phi$ em um arranjo linear com $N = 10$ elementos e $d = \lambda/2$ . . . . .	140
6.18	Ganho de interferência em função de $d/\lambda$ em um arranjo linear com $N = 10$ elementos e $\sigma_\phi = 30^\circ$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . . . .	141
6.19	Ganho de interferência em função de $a/\lambda$ em um arranjo circular com $N = 8$ elementos para diferentes valores de $\phi_o$ e $\sigma_\phi$ . . . . .	142
6.20	Ganho de interferência em função de $\sigma_\phi$ em um arranjo circular com $N = 8$ elementos e $a = 3\lambda$ , para diferentes valores de $\phi_o$ . . . . .	142
7.1	Sistema de recepção coerente com diversidade . . . . .	146
7.2	Sistema de recepção com razão máxima de combinação. . . . .	147
7.3	Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com $N$ elementos, $d = \lambda/4$ e $\phi_o = 45^\circ$ . . . . .	158
7.4	Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com $N = 4$ elementos, $d = \lambda/4$ para dois valores de $\Delta$ e $\phi_o = 45^\circ$ . . . . .	159
7.5	Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com $N = 4$ elementos, $d = \lambda/4$ para dois valores de $\Delta$ e $\phi_o = 45^\circ$ . . . . .	160
7.6	Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo circular com $N = 4$ elementos, para dois valores do raio $a$ e dos parâmetros $\sigma_\phi$ e $\phi_o$ . . . . .	160
A.1	Dois dipolos paralelos de comprimentos arbitrários . . . . .	169

# Lista de Tabelas

6.1	Desvio padrão da interferência mútua entre usuários ativos em um modelo de célula circular, em função do método de excitação e do número de elementos do arranjo linear simétrico com antena isotrópica. . . . .	118
6.2	Estimativas $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ , com seus respectivos intervalos de confiança, para $R_0 = 20$ dB e $d = \lambda/2$ . . . . .	130
6.3	Estimativas $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ , com seus respectivos intervalos de confiança, para $R_0 = 26$ dB e $d = \lambda/2$ . . . . .	130
6.4	Número de usuários em um modelo de canal baixo <i>rank</i> , em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo linear na estação radiobase de cada célula. . . . .	140
6.5	Número máximo de usuários em um modelo de canal baixo <i>rank</i> , em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo linear na estação radiobase de cada célula. . . . .	141
6.6	Número máximo de usuários em um modelo de canal baixo <i>rank</i> , em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo circular na estação radiobase de cada célula. . . . .	143

---

# Lista de Abreviaturas

BER	taxa de erro de bit ( <i>bit error rate</i> )
CDMA	múltiplo acesso por divisão em código ( <i>code division multiple access</i> )
CBPSK	modulação binária coerente por chaveamento de fase ( <i>coherent binary phase-shift keying</i> )
CBFSK	modulação binária coerente por chaveamento de frequência ( <i>coherent binary frequency-shift keying</i> )
CIR	relação portadora interferência ( <i>carrier-to-interference ratio</i> )
CINR	relação portadora (interferência mais ruído) ( <i>carrier-to-interference plus noise ratio</i> )
CMA	algoritmo de módulo de constante ( <i>constant modulus algorithm</i> )
DBPSK	modulação binária diferencial por chaveamento de fase ( <i>differential binary phase-shift keying</i> )
DOA	direção de chegada ( <i>direction of arrival</i> )
DQPSK	modulação diferencial em quadratura por chaveamento de fase ( <i>differential quadrature phase shift keying</i> )
DSP	densidade espectral de potência
FDMA	múltiplo acesso por divisão em frequência ( <i>frequency division multiple access</i> )
fdp	função densidade de probabilidade
FER	taxa de erro de <i>frame</i> ( <i>frame error ratio</i> )
FSK	modulação por chaveamento de frequência ( <i>frequency shift keying</i> )
GPS	sistema de posicionamento global ( <i>global position system</i> )
GSM	sistema global de comunicações móveis ( <i>global system for mobile communications</i> )
IS-136	padrão interino 136 ( <i>interim standard 136</i> )
IS-95	padrão interino 95 ( <i>interim standard 95</i> )
LES	arranjo linear igualmente espaçado ( <i>linear equally spaced</i> )
LMS	<i>least mean square</i>
MIMO	sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas ( <i>multi input multi output systems</i> )

---

MRC	razão máxima de combinação ( <i>maximal ratio combining</i> )
MSK	<i>minimum shift keying modulation</i>
NBPSK	modulação binária ortogonal não-coerente por chaveamento de frequência ( <i>noncoherent binary orthogonal frequency shift keying</i> )
PCN	redes de comunicações pessoais ( <i>personal communications network</i> )
PCS	serviços de comunicações pessoais ( <i>personal communications service</i> )
PSK	modulação por chaveamento de fase ( <i>phase shift keying</i> )
RLS	algoritmo recursivo de quadrados mínimos ( <i>recursive least squares</i> )
SDMA	múltiplo acesso por divisão em espaço ( <i>space division multiple access</i> )
SINR	relação sinal-(interferência mais ruído) ( <i>signal-to-interference plus noise ratio</i> )
SIR	relação sinal interferência ( <i>signal-to-interference ratio</i> )
SNR	relação sinal ruído ( <i>signal-to-noise ration</i> )
TDMA	múltiplo acesso por divisão no tempo ( <i>time division multiple access</i> )
UHF	frequência ultra alta ( <i>ultra high frequency</i> )
VHF	frequência muito alta ( <i>very high frequency</i> )
WLL	enlaces locais sem fio ( <i>wireless local loop</i> )

# Lista de Símbolos

$E_r$	vetor campo elétrico resultante
$E_1$	vetor campo elétrico do dipolo 1
$E_2$	vetor campo elétrico do dipolo 2
$\mathbf{a}(\theta)$	vetor de direcionamento do campo resultante
$\eta_0$	impedância intrínseca do espaço livre
$\lambda$	comprimento de onda
$k$	número de onda ou constante de onda
$\theta_0$	diferença de fase na corrente de excitação dos elementos
$I_0$	intensidade de corrente elétrica constante
$r_1$	distância entre o dipolo 1 e o ponto de observação do campo
$r_2$	distância entre o dipolo 2 e o ponto de observação do campo
$l_d$	comprimento dos dipolos do arranjo
$d$	distância entre os elementos do arranjo
$AF(\theta)$	notação genérica para fator de arranjo
$N$	número de elementos total de um arranjo
$2M$	número de elementos em um arranjo linear simétrico
$\mathbf{a}_r$	vetor unitário na direção do ponto de observação do campo
$\mathbf{a}_x$	vetor unitário na direção do eixo $x$
$a_n$	amplitude de excitação do $n$ -ésimo elemento do arranjo
$\gamma$	ângulo entre os vetores $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_x$
$u_m(t)$	frente de onda plana amostrada no elemento $m$
$AF_{2M}(\theta)$	fator de arranjo de um arranjo simétrico com $2M$ elementos
$AF_{2M+1}(\theta)$	fator de arranjo de um arranjo simétrico com $2M + 1$ elementos
$T_m(z)$	polinômio de Dolph-Tschebyscheff de ordem $m$
$R_0$	razão entre maior e menor valor em um diagrama de radiação
$x \sim U(a; b)$	$x$ é uniformemente distribuído entre $a$ e $b$ , $a > b > 0$
$\mathbf{w}_o$	vetor de coeficientes ótimos
$w_n$	$n$ -ésimo componente de um vetor de pesos $\mathbf{w}_o$
$Z^{-1}$	Representação em transformada $Z$ de um atraso discreto
$\phi_i$	ângulo azimutal de chegada de componentes de interferência
$\phi_d$	ângulos azimutal de chegada de componentes de sinal desejado



$\xi$	multiplicador de Lagrange
$g$	ganho máximo na direção de $\phi_d$
$e(n)$	erro de treinamento em algoritmo adaptativo
$d(n)$	amostra de seqüência de treinamento
$N_a$	número de amostras de treinamento
$\mathbf{R}$	matriz de correlação
$r_{m,n}$	elementos da matriz de correlação $\mathbf{R}$
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$J$	$n$ -ésima amostra da função de custo $J$
$\nabla J$	gradiente da função de custo $J$
$\sigma_\eta^2$	variância de ruído gaussiano branco aditivo
$\mu$	coeficiente de ajuste da rapidez de convergência algoritmo do LMS
$\alpha$	$\sigma$ parâmetros de ajuste da rapidez de convergência do algoritmo do $\alpha$ -LMS
$\hat{\mu}$	parâmetro de ajuste da rapidez de convergência do algoritmo LMS normalizado
$\mathbf{Q}$	matriz usada no cálculos dos coeficientes do algoritmo LMS restrito
$\mathbf{g}_r$	estimativa não viciada do gradiente do algoritmo LMS restrito
$\mathbf{g}_R$	estimativa do gradiente do algoritmo LMS restrito recursivo
$\mathbf{g}_e$	estimativa do gradiente do algoritmo LMS estruturado
$\mathbf{P}$	estimativa da inversa da matriz de correlação do algoritmo RLS
$\mathbf{k}$	vetor de ganho do algoritmo RLS
$\delta$	constante de inicialização da matriz $\mathbf{P}$
$\zeta$	constante de ajuste da rapidez de convergência do RLS
$a_l$	extremo inferior do intervalo no qual $a_n$ pode variar
$a_r$	extremo superior do intervalo no qual $a_n$ pode variar
$E[x]$	valor esperado da variável $x$
$d_l$	extremo inferior do intervalo no qual $d_n$ pode variar
$d_r$	extremo superior do intervalo no qual $d_n$ pode variar
$U$	notação genérica para intensidade de radiação
$U_d$	intensidade de radiação em uma direção desejada
$U_0$	intensidade de radiação omnidirecional
$U_{\max}$	intensidade de radiação máxima
$D_0$	diretividade de um arranjo de antenas
$\mathbf{c}$	vetor de coeficientes de excitação do arranjo
$\mathbf{f}$	vetor de amostras de $AF_{2M}(\theta)$ , não ponderadas por $\mathbf{c}$

$F$	matrix resultante do produto $f(\theta)f(\theta)^T$
$f_{m,n}$	elementos da matrix $F$
$B$	matriz triangular inferior usada no cálculo de $D_0$
$\theta_n$	notação para ponto de nulo de um diagrama de radiação
$\theta_h$	notação para ponto de queda de 3 dB em um diagrama de radiação
$\theta_m$	notação para o ângulo em que o diagrama de radiação atinge valor máximo
$\Theta_h$	largura do feixe principal no ponto de queda de 3dB
$\mathcal{E}$	eficiência de radiação em uma região em forma de cone
$\theta_l$	ângulo inferior do intervalo angular em um arranjo de varredura aleatória
$\theta_r$	ângulo superior do intervalo angular em um arranjo de varredura aleatória
$\sigma_{AF}(\theta)$	desvio padrão no fator de arranjo com parâmetros aleatórios
$\text{Var}(x)$	variância da variável aleatória $x$
$s$	vetor obtido tomando-se o valor esperado das amostras de $f$
$N_i$	número de fontes de sinal de interferência
$N_d$	número de fontes de sinal desejado
$A$	matriz formada por vetores de direcionamento
$A_i$	matriz de direcionamento de sinais indesejados
$A_d$	matriz de direcionamento de sinais desejados
$E_i$	subespaço de interferência na teoria de auto-análise
$E_\eta$	subespaço do ruído na teoria de auto-análise
$v$	vetor projetado na direção do subespaço do ruído
$v_0$	vetor de coeficientes ótimos projetado na direção $E_\eta$
$g$	vetor de ganhos associados a sinais desejados
$C$	matriz de pré-processamento espacial do arranjo linear
$C_c$	matriz de pré-processamento espacial do arranjo circular
$\tilde{\theta}_n$	posição do $n$ -ésimo elemento de um arranjo circular
$R_i$	matriz de correlação $R$ pré-processada
$G$	matriz obtida a partir do produto $CC^H$
$\lambda_g$	autovalor generalizado da matriz $R_i$
$e_g$	autovetor generalizado da matriz $R_i$
$Q_i$ $Q_\eta$	bases ortonormais da teoria de auto-análise
$Q_u$ $V_u$	matrizes unitárias ortogonais da teoria de auto-análise
$s_l$	$l$ -ésima amostra de sinal captado nos elementos de um arranjo
$\sigma_s^2$	variância do processo estocástico que representa $s_l$

---

$J_n(x)$	função de Bessel de primeiro tipo e ordem $n$
$\mathbf{U}$	matriz formada pelo produto de $\mathbf{E}_\eta$ e sua transposta conjugada
$\varrho$	variável aleatória gaussiana para modelar a perturbação na distância $d$ em um arranjo
$\sigma_\varrho^2$	variância da variável aleatória $\varrho$
$\varsigma$	perturbação na distância $d$ entre os elementos do arranjo
$a$	raio do arranjo linear de elementos
$\phi_o$	direção média do <i>cluster</i> principal de um canal direcional
$S_t$	dispersão temporal em um canal de comunicações móveis
$S_\phi$	dispersão angular em um canal de comunicações móveis direcional
$\sigma_\phi$	desvio padrão angular da distribuição $p_g(\phi)$
$B_f$	largura de faixa de um filtro de recepção casado com o formato do sinal transmitido
$r$	distância tomada radialmente em volta da estação móvel em um <i>cluster</i> circular
$R$	raio do cluster de difusores locais
$r_{MS}$	distância entre a estação radiobase e a estação móvel
$p_u(\phi)$	fdp uniforme dos ângulos de chegada, com definição limitada
$p_c(\phi)$	fdp co-senoidal dos ângulos de chegada, com definição limitada
$p_g(\phi)$	fdp gaussiana dos ângulos de chegada, com definição limitada
$\Delta$	abertura angular do canal direcional para a distribuição uniforme
$Q$	Expoente de ajuste da fdp co-senoidal $p_c(\phi)$
$k_2$ $k_3$	parâmetros de ajuste da área das fdps $p_c(\phi)$ e $p_g(\phi)$
$\rho_u(m, n)$	coeficiente de correlação espacial para a distribuição uniforme
$\rho_c(m, n)$	coeficiente de correlação espacial para a distribuição co-senoidal
$\rho_g(m, n)$	coeficiente de correlação espacial para a distribuição gaussiana
$N_o$	constante de normalização da potência de interferência mútua
$I(\phi_i, \phi_j)$	potência de interferência mútua
$P_{out}$	probabilidade de exclusão ( <i>outage</i> )
$G_1$	SIR interna à célula do usuário desejado
$G_2$	SIR externa à célula do usuário desejado
$\nu$	fator de atividade de voz
$N_u$	número de usuários por célula em um sistema celular
$N_c$	número de células em um sistema celular
$L$	ganho de processamento de um sistema celular com CDMA
$P_o$	limitante inferior para a taxa de erro de frame, necessária ao bom desempenho do sistema
$R_s$	relação (energia por bit)-(energia da interferência mais ruído)

---

$\varphi_j$	$j$ -ésima variável com distribuição de Bernoulli e probabilidade de sucesso $\nu$
$\Phi_X(\omega)$	função característica de uma variável aleatória $X$
$F(x)$	função cumulativa de probabilidade de uma variável aleatória $X$
$\tau_{k,i}$	atraso de propagação do $k$ -ésimo usuário no $i$ -ésimo percurso
$\alpha_{k,i}$	atenuação sofrida pelo $k$ -ésimo usuário do $i$ -ésimo percurso
$L_k$	número de percursos visto pelo $k$ -ésimo usuário de um canal direcional
$\mathbf{b}_k$	assinatura espacial do $k$ -ésimo usuário de um canal direcional
$G(N)$	ganho de interferência de uma arranjo de antenas em um canal direcional
$f$	denotação para fator de reuso
$\chi$	denotação para fator de carga
$N_{u_0}$	número de usuários na célula $C_0$ em um sistema celular
$N_{u_m}$	número máximo de usuários na célula $C_0$ em um sistema móvel
$\gamma_p$	valor de SINR para qual o número de usuários suportados em um sistema é máximo
$N_f$	dimensão do espaço de funções ortonormais para decomposição de um sinal $s(t)$
$\vartheta_n(t)$	$n$ -ésima função ortonormal para decomposição de um sinal $s(t)$
$\mathbf{s}_k$	vetor $N_f$ dimensional formado por amostras do sinal $s(t)$
$E_s$ $T_s$	energia de símbolo e tempo de símbolo
$\frac{E_0}{2}$	densidade espectral de potência do ruído branco
$r_k$	variável de decisão do $k$ -ésimo símbolo transmitido
$\mathbf{n}_{lk}$	vetor de amostras de ruído na saída de um sistema com diversidade
$\gamma_{b_k}$	SNR por bit para o $k$ -ésimo símbolo em um sistema com diversidade
$\gamma_s$	SNR por símbolo em um sistema com diversidade
$\Sigma$	matriz de covariância da distribuição gaussiana multivariável
$W(\Sigma, m)$	distribuição central de Wishart com $m$ graus de liberdade
$\det(\mathbf{A})$	determinante de uma matriz $\mathbf{A}$
$\text{tr}(\mathbf{A})$	traço de uma matriz $\mathbf{A}$
$r_d$	raio de um dipolo
$C$	número ou constante de Euler

# Capítulo 1

## Introdução

A difusão de informações por meio de ondas eletromagnéticas vem influenciando a comunicação entre seres humanos desde o ano em que o cientista inglês James Clerk Maxwell (1831-1879) as previu. No ano de 1864, o então professor de física experimental da universidade de Cambridge, Inglaterra, demonstrou teoricamente a provável existência de tais fenômenos sem constatação prática e foi o primeiro a estabelecer o conceito fundamental de ondas eletromagnéticas por dedução matemática. Do seu trabalho, resultaram as famosas Equações de Maxwell que indicavam a existência dessas ondas, que mais tarde (1886) foram constatadas pelo físico alemão Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894) [1].

Após Maxwell, muitos outros pesquisadores despertaram para o desenvolvimento de elementos irradiantes e deram início à revolução das telecomunicações que existe no século atual. No ano de 1901, o cientista Guglielmo Marconi realizou a primeira transmissão eletromagnética através do Atlântico, enviando sinais de Poldhu, em Cornwall, Inglaterra, para St. John's, Newfoundland. Por quatro décadas a tecnologia de antenas ficou restrita a elementos irradiantes formados por fios e a intervalos de frequência na faixa UHF. Só após a Segunda Guerra Mundial que novos elementos, como aberturas e refletores, foram introduzidos, aumentando o desempenho das estruturas anteriores. Um fator importante para essa nova era das antenas foi a invenção de fontes de microondas, como o magnetron. Entre as décadas de sessenta e oitenta, os avanços na arquitetura dos computadores trouxeram a promessa de novo impulso para o desenvolvimento das antenas na década seguinte. Essa promessa foi cumprida com o surgimento de métodos numéricos que permitiram que estruturas complexas pudessem ser projetadas com mais precisão.

À medida que os sistemas de comunicações foram evoluindo e a necessidade por novos serviços começou a aumentar, as pesquisas começaram a ser direcionadas para a busca de novas estruturas radiantes mais eficientes. Uma categoria de antenas que ultimamente vem recebendo bastante atenção são as antenas inteligentes. Nessa categoria de antena, a potência irradiada é direcionada para locais especí-

ficos por meio de estruturas de elementos irradiantes, conhecidas como arranjos, de forma otimizada. Essas estruturas têm sido propostas na setorização e projeto de sistemas celulares e na melhoria de desempenho de alguns sistemas de comunicações.

Vários elementos de antenas podem ser arranjados no espaço e interconectados para produzir padrões de irradiação direcional. Configurações desse tipo, com múltiplos elementos irradiantes, são referidos como arranjos de antenas. Geralmente, essas configurações são formadas pelo agrupamento de muitas antenas de pequenas dimensões, para que se possa obter um nível de desempenho semelhante ao obtido com uma única antena de grandes dimensões. Nesse caso, os problemas mecânicos associados com uma única antena de grandes dimensões se transformam em problemas elétricos associados ao conjunto de pequenas antenas agrupadas em arranjo. Esses problemas, entretanto, tendem a desaparecer devido ao avanço na tecnologia de dispositivos de estado-sólido, minimizando os custos de implementação das antenas. Os arranjos de antenas fornecem capacidade única de direcionamento do feixe irradiado por meio do ajuste da fase da corrente de excitação em cada elemento. Esses arranjos são referidos como arranjos controlados por fase e encontram muitas aplicações [2].

O conceito de arranjos controlados por fase foi inicialmente proposto em 1889, mas o primeiro arranjo prático só veio surgir em 1906. A introdução de equipamentos de rádio de ondas curtas em 1920 tornou possível o uso de arranjos de antenas com dimensões razoáveis, surgindo a partir daí uma maneira conveniente de se obter um padrão de irradiação diretivo para sistemas de comunicações. Durante a Segunda Guerra Mundial, os arranjos de antenas operando nas faixas de VHF e UHF foram usados em sistemas de radar. Atualmente, esses arranjos estão encontrando aplicações em várias outras sub-áreas das telecomunicações.

Os arranjos podem ser encontrados em diferentes configurações geométricas, sendo a mais comum a configuração linear em que os elementos são dispostos ao longo de uma linha reta. Existem ainda a configuração planar, em que os elementos são dispostos em uma grade quadrilátera, a configuração circular na qual os elementos são dispostos igualmente espaçados ao longo de um círculo de raio  $a$  e uma classe emergente que são os arranjos conformais. Nessa última configuração, os elementos são dispostos em superfícies não-planares, como na parte externa de veículos, aviões e iates.

As estruturas em arranjo oferecem muitas vantagens em relação às configurações usuais. Nas antenas parabólicas, por exemplo, o direcionamento do feixe irradiado é feito juntamente com toda a estrutura mecânica da antena, enquanto nos arranjos esse direcionamento é feito em tempo real na velocidade de processamento dos dispositivos eletrônicos do arranjo, simplesmente ajustando-se os parâmetros de excitação dos elementos.

A área de estudo das antenas, se equiparada aos circuitos eletrônicos, pode ser dividida em implementações analógicas e digitais. Geralmente as antenas com distribuição de corrente com excitação

contínua são equiparadas à parte analógica dos circuitos eletrônicos e devem ser analisadas por meio de integrais que são geralmente mais complexas de avaliar, enquanto que os arranjos equivalem à parte digital dos circuitos e podem ser analisados por meio dos somatórios que representam o fator de arranjo. O diagrama de irradiação de um arranjo é caracterizado pelos tipos de elementos individuais, por sua orientação, por seu posicionamento, pela fase e pela amplitude das correntes de excitação de cada elemento. Controlando os parâmetros comuns a esses elementos é então possível controlar a irradiação emitida por essas estruturas com um maior grau liberdade e de forma mais prática e segura.

## 1.1 Motivação

O diagrama de irradiação de um único elemento irradiante é geralmente largo e com baixa diretividade e em muitas aplicações são necessárias antenas com altos ganhos direcionais (diretividade). Existem várias situações nas quais antenas com essa característica diretiva são mais apropriadas. Como exemplo, considere uma área rural com relevo acidentado, de modo que dificulte a instalação das configurações convencionais. Nessa situação, uma antena diretiva instalada em um ponto geográfico apropriado, tendo seu feixe principal direcionado para a concentração dos usuários, satisfaz às necessidades locais evitando a perda de potência irradiada para as áreas impróprias à permanência de usuários. Um outro exemplo são as áreas residenciais costeiras. Nessas áreas, a redução na perda de potência pode ser significativa se o feixe irradiado por uma antena diretiva for direcionado para a área povoada, evitando que regiões despovoadas sejam cobertas por feixes eletromagnéticos.

Enlaces terrestres com essas características são mais eficientemente projetados usando-se antenas diretivas e especificamente as configurações em arranjo, por serem mais versáteis, tanto mecanicamente quanto eletricamente. Nesses arranjos, os elementos individuais são excitados por correntes elétricas cujas amplitudes ao longo do eixo do arranjo têm geralmente distribuição uniforme, polinomial ou binomial [1]. Nesses três casos clássicos, as amplitudes das correntes associadas a cada elemento são projetadas e em seguida os elementos são igualmente espaçados a uma distância uniforme  $d = \lambda/2$  uns dos outros. Se um diagrama de radiação com uma outra forma, mais ou menos diretivo, for necessário, todas as amplitudes das correntes de excitação precisarão ser recalculadas para que o arranjo possua os novos requisitos de projeto. Como será mostrado posteriormente, os arranjos tornam-se mais ou menos diretivos de acordo com o número de elementos excitados. Nos casos em que o padrão irradiado precisa ser moldado em tempo real, de modo a atender com rapidez os requisitos do sistema no qual está inserido, é mais apropriado o uso de estruturas que permitam reconfiguração dos parâmetros de forma rápida e eficiente.

Essa eficiência com a qual os arranjos de antenas ajustam seu padrão de irradiação é chamada

de inteligência. Assim, antenas inteligentes podem ser definidas como sendo estruturas de arranjos que fazem ajuste de seus parâmetros de modo a modelar o padrão de irradiação de forma mais eficiente possível. A busca por novos métodos de ajuste desses parâmetros e por estruturas com feixes irradiados mais eficientes pode ser vista, no contexto do que foi discutido anteriormente, como uma motivação para o desenvolvimento deste trabalho. A proposta dos métodos apresentados é justificada pela análise matemática e numérica dos resultados obtidos e se mostra apropriada e eficiente como contribuição para melhorar o desempenho dos sistemas que usam a tecnologia das antenas inteligentes.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é mostrar uma nova abordagem para análise de arranjos de antenas, visando a obtenção de diagramas de irradiação com valores apropriados de diretividade e com baixas amplitudes dos lóbulos (feixes) secundários, e de novas aplicações de arranjos lineares e circulares em modelos de canais móveis. Na primeira parte do trabalho, especificamente, são propostas estruturas com formas de excitação aleatória e com posicionamento aleatório dos elementos ao longo do eixo do arranjo. As estruturas podem ser projetadas de modo a ter o comportamento médio das configurações obtidas tomando-se as amplitudes de excitação dos elementos do arranjo como sendo realizações de um processo aleatório. Sob um outro ponto de vista, arranjos com características aleatórias podem também ser vistos como estruturas com perturbações tanto em seus coeficientes de excitação quanto no posicionamento de seus elementos. As duas análises são feitas ao longo do texto e é mostrado, por meio dos diagramas de irradiação, a eficiência dos métodos propostos. Seguindo o contexto de aleatoriedade associada ao projeto dessas estruturas, é proposta uma nova forma de análise dos arranjos esparsos. Nesses arranjos, conhecidos na língua inglesa como *Thinned Arrays*, a excitação dos elementos está presente ou não de modo que, diferentemente das outras configurações lineares, a distância entre os elementos possa ser maior que  $\lambda/2$ .

Na segunda parte do trabalho são propostas algumas aplicações nas quais os métodos e as estruturas propostas podem ajudar a melhorar a capacidade e o desempenho dos enlaces de alguns sistemas de comunicações. Embora o estudo desenvolvido na primeira parte do trabalho seja para arranjos lineares, são propostas algumas aplicações para os arranjos circulares. As aplicações são propostas basicamente para o cancelamento de interferência e para o aumento de capacidade de sistemas setorizados e mostram o quanto as estruturas em arranjo podem ser promissoras nos sistemas de comunicações modernos.



### 1.3 Organização do Texto

O texto está organizado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta uma introdução geral a respeito de arranjos de antenas, dos principais tipos de configurações e introduz a proposta do uso de parâmetros aleatórios no projeto dessas estruturas. São analisados também o uso de algoritmos adaptativos como o LMS e o RLS no ajuste de padrões de irradiação, e são mostradas as principais vantagens e desvantagens associadas a essa tecnologia. O capítulo é encerrado com uma revisão bibliográfica das principais contribuições para a área.

O Capítulo 3 propõe e apresenta o desenvolvimento matemático necessário ao projeto de arranjos com parâmetros aleatórios e à obtenção das principais figuras de mérito usadas em tais projetos. Na segunda parte do capítulo, é feita uma introdução aos arranjos aperiódicos dentro do contexto discutido ao longo do capítulo.

O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento matemático necessário ao estudo da aplicação de arranjos de antenas no cancelamento de interferência usando decomposição em subespaços. É apresentado um estudo do efeito do uso parâmetros aleatórios no desempenho do método de cancelamento e é proposto o uso de arranjo circular para melhorar o seu desempenho.

Há uma pausa na seqüência dos capítulos anteriores e são mostrados no Capítulo 5 as expressões obtidas para o cálculo dos coeficientes de correlação espacial entre os elementos do arranjo. A seqüência de exposição é retomada no Capítulo 6 com a proposta do uso de arranjos simétricos no cancelamento de interferência no modelo de canal apresentado.

O Capítulo 7 mostra o desenvolvimento matemático necessário à obtenção de expressões fechadas para a probabilidade de erro de símbolos em um ambiente Nakagami considerando-se receptor de razão máxima de combinação e arranjos de antena linear e circular. O texto é então encerrado com as conclusões, principais contribuições e propostas de continuidade do trabalho.

O Apêndice A complementa o texto sobre projeto de arranjos lineares com conceitos introdutórios e informações adicionais sobre o efeito do acoplamento eletromagnético.

# Capítulo 2

## Antenas Inteligentes

### 2.1 Introdução

O projeto de sistemas inteligentes é geralmente desenvolvido a partir de observações de modelos e seres vivos encontrados na natureza e uma das estruturas mais estudadas pelo homem é o próprio cérebro. Nesse estudo, são usados tanto conhecimentos a respeito da parte física quanto da parte psicológica do cérebro e com base na forma como o homem raciocina e organiza suas idéias básicas, são propostos algoritmos com algumas características de inteligência. Em relação às antenas inteligentes, tem-se conhecimento a respeito da estrutura física das antenas e de muitos algoritmos de processamento de sinais que podem ser utilizados em conjunto com os elementos da parte física. O que permite o surgimento de estruturas inteligentes é justamente a pesquisa por algoritmos e métodos de projeto eficientes. Para entender como projetar essas antenas, é necessário antes conhecer a parte física à qual se pretende adicionar inteligência. Com o intuito de fornecer esse conhecimento introdutório, o capítulo inicia com uma explanação dos princípios básicos dessa tecnologia e em seguida são apresentados os benefícios e algumas das configurações mais usadas.

O conceito de arranjo é desenvolvido a partir de uma estrutura simples com apenas dois elementos e é então estendido para estruturas lineares mais genéricas. Como um dos objetivos do trabalho é o projeto de arranjos com parâmetros aleatórios, são mostrados neste capítulo, como motivação, resultados numéricos obtidos considerando-se parâmetros como espaçamento e amplitude de excitação aleatórios. Embora o estudo de algoritmos adaptativos não seja objetivo do trabalho, o texto abre um breve parêntese para introduzir a forma como algoritmos clássicos como o RLS e o LMS [3] podem ser usados no ajuste dos coeficientes de excitação dessas antenas. Com esses algoritmos são analisados fatores como complexidade, tempo de convergência e resposta dos coeficientes ajustados ao sinal de entrada. A última seção do texto faz uma análise da relação custo/benefício que deve ser levada em

consideração na implantação dos projetos.

## 2.2 Fundamentação Teórica

Os primeiros sistemas de comunicações foram desenvolvidos usando sistemas de antenas fixas, com configurações especialmente projetadas para alcançar determinadas especificações de projeto, sem que houvesse, entretanto, um ajuste dinâmico de suas estruturas para reagir às mudanças de tráfego do sistema. Para suprimir essas dificuldades, têm sido estudados os chamados *sistemas de antenas inteligentes*, que são conjuntos de elementos de antenas dispostos geometricamente em arranjos, com processadores associados aos elementos. Os sinais irradiados por esses elementos são combinados para formar um padrão de irradiação, que pode ser direcionado, por meio de técnicas de processamento digital de sinais ou circuitos RF (Rádio Freqüência), para a unidade móvel ou fixa do assinante. Isso permite que essas antenas focalizem o equipamento de RF de um assinante particular, enquanto minimizam o impacto do ruído, interferência e outros efeitos que possam degradar a qualidade do sinal.

Quando se melhora a qualidade do sinal transmitido, pode-se ter informação mais confiável, ou simplesmente ter mais informação com a mesma confiabilidade. Os sistemas de antenas inteligentes podem contribuir para isso tanto aumentando o número de usuários que o sistema de comunicações pode manipular quanto expandindo o número de serviços que o sistema pode fornecer a um mesmo número de usuários. Alguns dos benefícios que essa tecnologia pode trazer são:

- Aumento da área de cobertura do campo irradiado e maior capacidade de penetração em edifícios: Essas antenas podem aumentar a área de cobertura por meio de um aumento no ganho da antena da estação radiobase.
- Diminuição dos custos de implantação do sistema de comunicações: Os sistemas de comunicações geralmente são projetados para reunir certos requisitos. Com poucos usuários no sistema, um número suficiente de estações radiobase deve ser implantado para fornecer cobertura em áreas críticas. À medida que mais usuários são adicionados à rede, a capacidade do sistema pode ser aumentada diminuindo o raio de cobertura da estação radiobase e adicionando mais células à rede. Nesse caso, a receita obtida com os novos usuários pode cobrir custos de instalação de células adicionais. Além do mais, na instalação dos sistemas celulares convencionais, as estações radiobase são implantadas para reunir certos requisitos de projeto sem que haja o suporte financeiro proveniente da venda dos futuros serviços prestados pela operadora do sistema. As antenas inteligentes podem minimizar esse custo pelo controle do raio de cobertura da antena, que nesse

caso pode ser mais efetivo. Entretanto, os custos adicionais decorrentes dessa tecnologia devem ser levados em consideração na avaliação dos benefícios econômicos.

- O sistema torna-se mais robusto e menos sensível: Quando usadas juntas com sistemas CDMA (Acesso Múltiplo por Divisão em Código), que geralmente requerem um complexo controle de potência para assegurar que todos os sinais que chegam na estação radiobase estejam aproximadamente no mesmo nível de potência, as antenas inteligentes podem ajudar a isolar os sinais do enlace de subida dos diferentes usuários, reduzindo os requisitos de controle de potência ou eliminando os impactos do controle de potência imperfeito. Os sistemas CDMA também são sensíveis à distribuição geográfica dos usuários nas células e nesse caso, as antenas inteligentes podem redirecionar sua área de cobertura para atender as áreas geográficas com maior densidade temporária de usuários.
- A qualidade dos enlaces pode ser melhorada por meio do gerenciamento de multipercursos: Um dos tipos de degradação que o efeito de multipercursos pode causar na informação transmitida é o desvanecimento ou dispersão no tempo. Nesse caso, essas antenas podem diminuir essa degradação ou simplesmente explorar a diversidade inerente aos múltiplos percursos.
- Aumento de capacidade - Uma das principais razões para o crescente interesse nessa tecnologia é o aumento de capacidade em termos de número de usuários. Em áreas geográficas densamente populosas, os sistemas móveis são normalmente limitados pela interferência mútua dos usuários. Isso significa que a relação sinal/interferência (SIR) é menor que a relação sinal/ruído (SNR). As antenas adaptativas nesse caso tentam, simultaneamente, aumentar o nível do sinal recebido e diminuir o nível de interferência.

Em sistemas TDMA o aumento da SIR permite geralmente uma diminuição da distância de reuso de frequência, permitindo a diminuição do número de células por *cluster* e o aumento de capacidade. Sistemas CDMA, como o IS-95 e UMTS, são mais limitados pela interferência do que o sistema TDMA, porque a principal fonte de perturbação do sistema é a soma dos sinais dos outros usuários, devido aos códigos de espalhamento não serem, na prática, idealmente ortogonais.

- Novos Serviços - Com essas novas antenas, a rede de comunicações terá informações precisas a respeito da localização dos usuários, permitindo que novos serviços, como chamadas de emergência e notificações em pontos específicos possam ser realizados. Poder-se-ia, por exemplo, receber pelo aparelho celular uma lista dos produtos em promoção de um determinado

supermercado ou loja, à medida que o aparelho móvel circulasse nas proximidades desses estabelecimentos.

- Segurança - É mais difícil interceptar uma conexão quando as antenas inteligentes são usadas, porque nesse caso o interceptor teria que se posicionar na mesma direção que o usuário visto pela estação radiobase.
- Redução do Número de Percursos de Propagação - O uso de antenas de lóbulos magnéticos estreitos pode, alguma vezes, reduzir o número de múltiplos percursos. Essa redução depende do cenário em volta do meio de propagação e nem sempre é significativa.
- SDMA (Acesso Múltiplo por Divisão em Espaço): Essas antenas também podem ser usadas para separar os sinais espacialmente, permitindo que vários usuários compartilhem a mesma fonte espectral, dado que eles são espacialmente separáveis na estação radiobase. Isso permite que múltiplos usuários operem na mesma célula, no mesmo espaço de tempo/frequência. Desde que essa técnica permite que mais usuários sejam alocados em uma faixa espectral limitada, ela pode aumentar a capacidade do sistema em termos de número de usuários.

Sabe-se que os sistemas de antenas inteligentes combinam elementos de antenas com unidades de processamento de sinais que otimizam dinamicamente a recepção e os diagramas de irradiação em resposta ao ambiente no qual o sinal é transmitido. Essas unidades de processamento são estruturadas em quatro seções principais:

1. Estimativa da direção de chegada (*Direction of Arrival*, DOA) – A partir de dados obtidos pela estação radiobase no enlace de subida, o número de frentes de onda e suas respectivas direções de chegada são estimadas.
2. Classificação da DOA – No passo seguinte, são identificadas as frentes de onda que são originadas por usuários do sistema. Um sistema de identificação decide se uma determinada frente de onda pertence a um usuário ou constitui uma interferência em relação a um dado usuário.
3. Rastreamento – As direções de chegada dos usuários são rastreadas para que se tenha maior confiabilidade de estimativa dessas direções.
4. Modelamento – Finalmente, um algoritmo é usado para modelar e direcionar o feixe irradiado pela antena na direção desejada.

Dessas quatro etapas de processamento, apenas a parte de modelamento será estudada ao longo do texto. Por constituírem áreas de grande interesse atual, outras fontes de referência podem ser encontradas para as demais áreas de estudo por exemplo em [4].

## 2.3 Estruturas Básicas

### 2.3.1 Antena com dois elementos

Nesta seção é analisada a configuração mais usual de arranjo de antenas, que é a disposição linear dos elementos da antena. Inicialmente, será considerado o caso em que dois dipolos horizontais infinitesimais são posicionados ao longo do eixo  $z$ , conforme mostra a Figura 2.1.

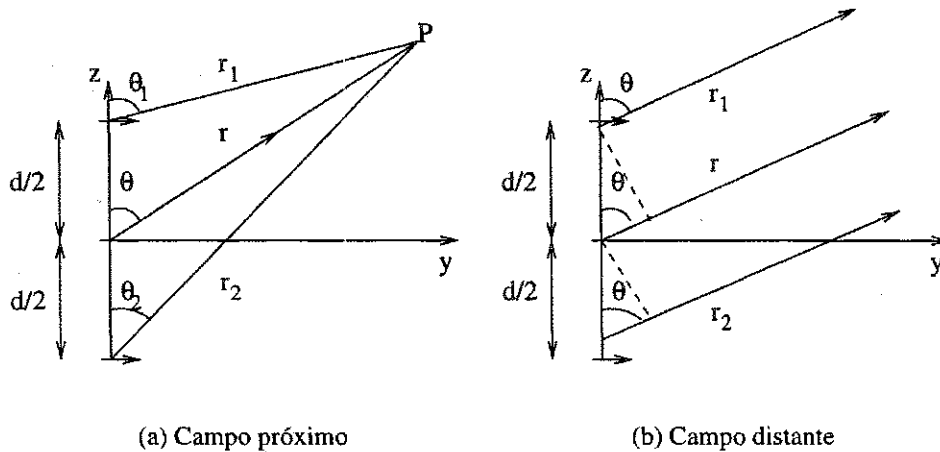


Figura 2.1: Geometria de um arranjo de dois elementos posicionados ao longo do eixo  $z$ .

Dessa forma, o campo total resultante  $\mathbf{E}_r$  irradiado pelos dois elementos infinitesimais, admitindo acoplamento eletromagnético nulo entre eles, pode ser escrito no plano  $y - z$  como [1]

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{a}}_\theta \frac{j\eta_0 k I_0 l_d}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-j(kr_1 - \beta/2)}}{r_1} \cos(\theta_1) + \frac{e^{-j(kr_2 + \beta/2)}}{r_2} \cos(\theta_2) \right\}, \quad (2.1)$$

em que  $\beta$  é a diferença na fase da corrente de excitação dos elementos,  $\eta_0$  é a impedância intrínseca do espaço livre e vale aproximadamente  $120\pi\Omega$ ,  $I_0$  é uma intensidade de corrente elétrica constante,  $l_d$  é o comprimento dos elementos e  $k$  é o número de onda.

Assumindo uma observação do campo elétrico  $\mathbf{E}_r$  em um ponto distante do arranjo, pode-se considerar  $\theta \approx \theta_1 \approx \theta_2$  e as seguintes aproximações para as variações de fase de  $\mathbf{E}_r$

$$\begin{cases} r \approx \frac{d}{2} \cos(\theta) + r_1 \\ r_2 \approx \frac{d}{2} \cos(\theta) + r. \end{cases} \quad (2.2)$$

Adicionalmente  $r_1 \approx r \approx r_2$  para as variações de amplitude. Desse modo, tem-se que

$$\mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{a}}_\theta \frac{j\eta_0 k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} 2 \cos(\theta) \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos(\theta) + \beta) \right]. \quad (2.3)$$

Pode-se ver pela Equação 2.3 que o campo resultante  $\mathbf{E}_r$  é o campo de um dipolo

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_\theta j\eta_0 \frac{k I_0 l_d e^{-j\beta r}}{4\pi r} \cos(\theta) \quad (2.4)$$

multiplicado pelo termo

$$AF(\theta) = 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos(\theta) + \beta) \right], \quad (2.5)$$

que é chamado de fator do arranjo e é uma função da geometria do arranjo e da fase da corrente de excitação dos elementos  $\beta$ . Tem-se portanto que

$$\mathbf{E}(\text{resultante}) = \mathbf{E}(\text{único elemento}) \cdot (\text{fator do arranjo}). \quad (2.6)$$

Essa regra é válida para um número qualquer de elementos idênticos e é conhecida como regra de multiplicação de padrões. Apesar da regra ter sido ilustrada para um arranjo com dois elementos, ela também é válida para arranjos com um número qualquer de elementos idênticos que não tenham necessariamente magnitude e fase de excitação e/ou espaçamento idênticos.

### 2.3.2 Antena linear com $N$ elementos: espaçamento e amplitude uniformes

Considera-se agora o caso em que  $N$  elementos são dispostos, igualmente espaçados, ao longo do eixo  $z$ , conforme mostra a Figura 2.2. É assumido que esses elementos têm a mesma amplitude de excitação, mas têm uma diferença de fase  $\beta$  entre eles. Esse tipo de arranjo é conhecido como arranjo linear uniforme e o fator de arranjo pode ser obtido considerando os elementos como fontes isotrópicas.

O fator de arranjo, nesse caso, de acordo com [1], pode ser escrito no plano  $y - z$  como

$$AF(\theta) = 1 + e^{+j(kd \cos(\theta) + \beta)} + e^{+j2(kd \cos(\theta) + \beta)} + \dots + e^{+j(N-1)(kd \cos(\theta) + \beta)} = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd \cos(\theta) + \beta)}, \quad (2.7)$$

ou ainda

$$AF(\theta) = e^{j[(N-1)/2](kd \cos(\theta) + \beta)} \frac{\text{sen} \left( \frac{N}{2} (kd \cos(\theta) + \beta) \right)}{\text{sen} \left( \frac{(kd \cos(\theta) + \beta)}{2} \right)}. \quad (2.8)$$

No diagrama da Figura 2.2, o ângulo  $\gamma$  entre um vetor  $\mathbf{a}_z$  na direção do eixo do arranjo e um vetor radial indo da origem até o ponto de observação,  $\mathbf{a}_r$ , é tal que

$$\cos(\gamma) = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{a}_x \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \mathbf{a}_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) + \mathbf{a}_z \cos(\theta)) = \cos(\theta) \rightarrow \gamma = \theta. \quad (2.9)$$

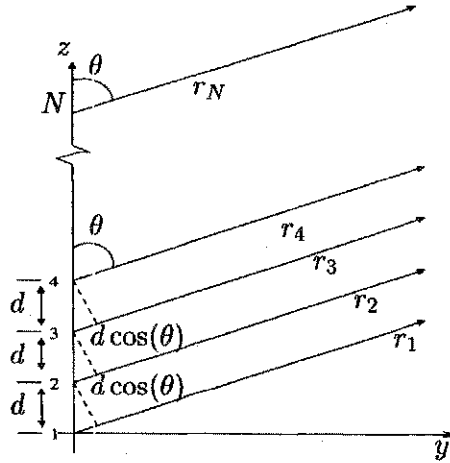


Figura 2.2: Representação do campo distante de  $N$  elementos isotrópicos posicionados ao longo do eixo  $z$ .

Dessa forma, a expressão para o fator de arranjo dada na Equação 2.7 poderia ser escrita em termos de  $\gamma$  como

$$AF(\theta) = 1 + e^{+j(kd \cos(\gamma) + \beta)} + e^{+j2(kd \cos(\gamma) + \beta)} + \dots + e^{+j(N-1)(kd \cos(\gamma) + \beta)} = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd \cos(\gamma) + \beta)}. \quad (2.10)$$

Para o caso em que os elementos do arranjo estão dispostos ao longo do eixo  $x$  ou  $y$ , tem-se que

$$\cos(\gamma) = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot (\mathbf{a}_x \sin(\theta) \cos(\phi) + \mathbf{a}_y \sin(\theta) \sin(\phi) + \mathbf{a}_z \cos(\theta)) = \sin(\theta) \cos(\phi). \quad (2.11)$$

Dessa forma,  $\gamma = \cos^{-1}(\sin(\theta) \cos(\phi))$  e o fator de arranjo, de acordo com a Equação 2.8, pode ser escrito como

$$AF(\theta, \phi) = e^{j[(N-1)/2](kd \sin(\theta) \cos(\phi) + \beta)} \frac{\text{sen} \left( \frac{N}{2} (kd \sin(\theta) \cos(\phi) + \beta) \right)}{\text{sen} \left( \frac{1}{2} (kd \sin(\theta) \cos(\phi) + \beta) \right)}. \quad (2.12)$$

Em muitas aplicações é desejável ter irradiação máxima em uma direção normal ao eixo do arranjo. Para o fator de arranjo mostrado na Equação 2.8, o máximo é obtido tomando o valor absoluto de  $AF(\theta)$  e fazendo

$$kd \cos(\theta) + \beta = 0. \quad (2.13)$$

Desde que é desejável ter o máximo direcionado para  $\theta = 90^\circ$ , então

$$kd \cos(\theta) + \beta|_{\theta=90^\circ} = 0 \Rightarrow \beta = 0. \quad (2.14)$$

Desse modo, para se ter o máximo do fator de arranjo de um arranjo linear uniforme normal ao eixo do arranjo, é necessário que a fase de excitação de todos os elementos seja a mesma. Para que o máximo do fator de arranjo seja orientado ao longo do eixo do arranjo é necessário que

$$kd \cos(\theta) + \beta|_{\theta=0^\circ} = 0 \Rightarrow \beta = -kd \quad (2.15)$$



ou que

$$kd \cos(\theta) + \beta|_{\theta=180^\circ} = 0 \Rightarrow \beta = kd. \quad (2.16)$$

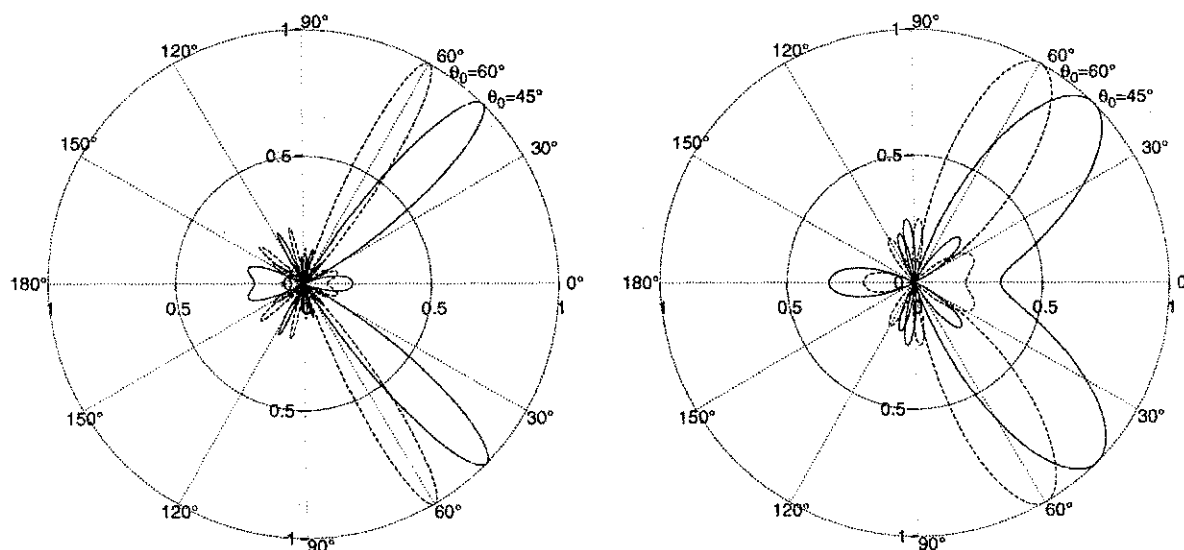
Quando é desejável ter o máximo irradiado orientado na direção  $\theta_0$  ( $0^\circ \leq \theta_0 \leq 180^\circ$ ), tem-se

$$kd \cos(\theta) + \beta|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \beta = -kd \cos(\theta_0). \quad (2.17)$$

Nas Figuras 2.3-2.5 a seguir, o valor absoluto da do fator de arranjo da Equação 2.8 é traçado para diferentes valores de parâmetros. Ao se considerar o fator de arranjo da Equação 2.8, fica assumido que os elementos do arranjo estão dispostos ao longo do eixo  $z$ .

Considerando um arranjo linear com 11 elementos, um espaçamento  $d = \lambda/2$  obtém-se o diagrama de radiação normalizado da Figura 2.3(a). Como se pode perceber neste diagrama, a direção dos lóbulos principais do arranjo mudam de acordo com o valor de  $\beta$ .

Considerando o mesmo arranjo linear, só que com 5 elementos e com os mesmos parâmetros mostrados no caso anterior, pode-se perceber na Figura 2.3(b) um começo de distorção nos lóbulos principais. É portanto, por meio do ajuste desses parâmetros que se pode aumentar o alcance e a largura dos lóbulos principais e diminuir os lóbulos secundários que podem representar interferência para outros usuários ou perdas de potência.

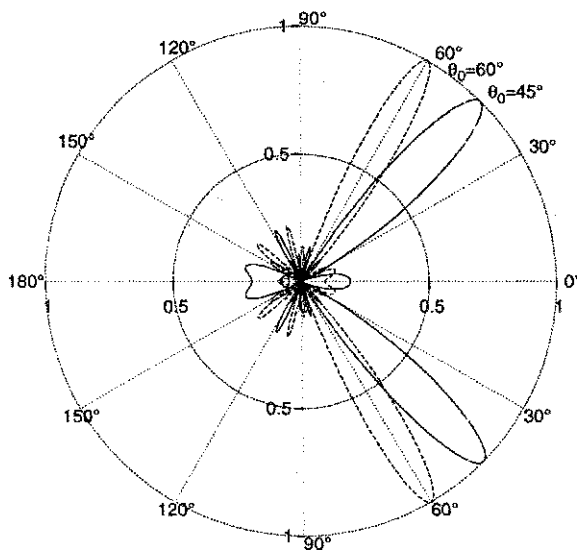


(a) Diagrama de irradiação normalizado de um arranjo de 11 elementos com  $d = \lambda/2$ .

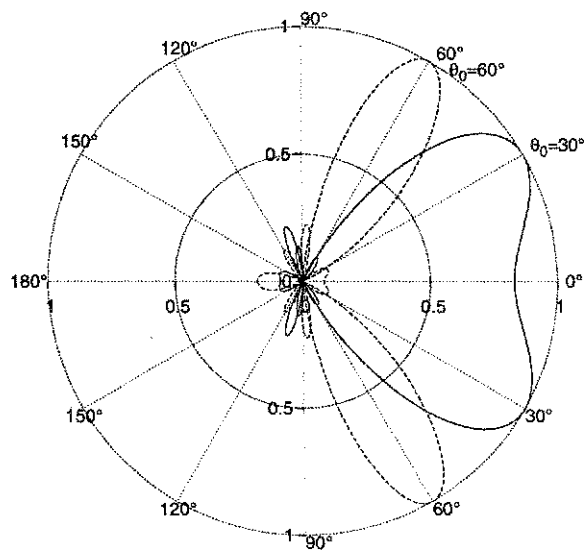
(b) Diagrama de irradiação normalizado de um arranjo de 5 elementos com  $d = \lambda/2$ .

Figura 2.3: Diagrama de irradiação no plano de elevação (plano E) de um arranjo linear uniforme com elementos ao longo do eixo  $z$  e  $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ .

Em geral, o desempenho de um arranjo de elementos de antenas é determinado por vários fatores. O tamanho do arranjo, determinado pelo espaçamento entre os elementos, determina o ganho máximo que pode ser obtido no diagrama. Por outro lado, o número de elementos determina o número de *graus de liberdade* que se pode ter no projeto desses diagramas. Em geral, essas duas grandezas estão relacionadas e dependendo dos valores que assumem podem aumentar ou diminuir a interferência em outros usuários. Na Figura 2.4(a) pode-se perceber que há um estreitamento nos lóbulos principais para  $d = \lambda/2$  e  $N = 11$ , enquanto na Figura 2.4(b) há um alargamento dos lóbulos principais para  $d = 0,225\lambda$ . É portanto possível controlar a diretividade dos lóbulos principais por meio do controle da abertura da antena.



(a) Diagrama de irradiação normalizado de um arranjo de 11 elementos e um espaçamento  $d = \lambda/2$ .



(b) Diagrama de irradiação normalizado de um arranjo de 11 elementos e um espaçamento  $d = 0,225\lambda$ .

Figura 2.4: Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação (plano E) de um arranjo linear uniforme com elementos ao longo do eixo  $z$  e  $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ .

Na Figura 2.5 são mostrados os diagramas de irradiação de uma antena com  $d_1 = 0,15\lambda$  e  $d_2 = \lambda/2$ . Percebe-se que para o espaçamento  $d_1 = 0,15\lambda$  o lóbulo principal é bem mais largo que no caso em que  $d_2 = \lambda/2$  é usado. Um caso como esse poderia ser usado, por exemplo, pelo transmissor de uma estação radiobase de um sistema CDMA para transmitir os sinais piloto universal, canais de sincronismo e canais de *paging* usando o lóbulo mais largo, que cobre uma área maior, enquanto os canais de tráfego individuais seriam direcionados para os locais necessários.

Um tipo de problema que surge em ambientes com muitos obstáculos em volta das fontes trans-

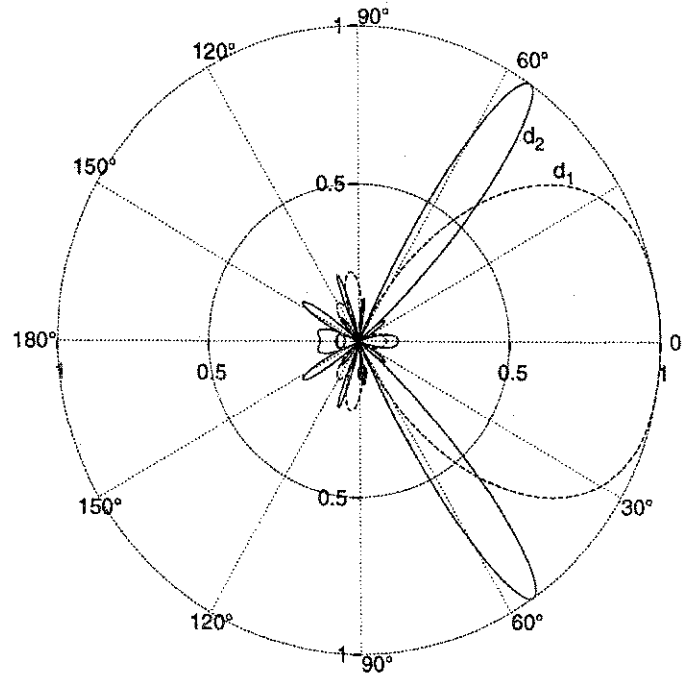


Figura 2.5: Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação (E) de um arranjo linear de 11 elementos posicionados no eixo  $z$  com espaçamentos  $d_1 = 0,15\lambda$  e  $d_2 = \lambda/2$ ,  $\beta = -kd \cos(\theta_0)$ ,  $\theta_{10} = 0^\circ$  e  $\theta_{20} = 55^\circ$ .

missoras é o inevitável efeito do espalhamento do sinal transmitido por múltiplos percursos presentes no meio de propagação, fazendo com que diferentes componentes de um mesmo sinal cheguem ao receptor com diferentes atrasos de tempo. Os sinais transmitidos em um lóbulo largo sofrem mais reflexões e refrações do que os sinais transmitidos nos lóbulos mais estreitos, que são mais diretos e conseqüentemente menos vulneráveis às reflexões e refrações. Isso faz com que esses sinais encontrem diferentes tipos de canais, ou seja, os sinais do lóbulo largo têm pela frente um canal com múltiplos percursos enquanto que os sinais do lóbulo estreito têm pela frente um canal com uma visada direta ou com poucos percursos. Essa diferença nos canais faz com que haja uma distorção na relação entre a fase da portadora do sinal piloto e a fase da portadora dos sinais de tráfego. Uma forma de contornar esse problema é incorporar a proposta do CDMA2000, usando sinais pilotos auxiliares [5]. Os sinais pilotos auxiliares podem ser alocados de diferentes maneiras, como por exemplo, usados por muitos assinantes dentro de um lóbulo fixo, de ampla área de cobertura. Nos sistemas adaptativos de ajuste de enlace de descida, esses pilotos podem ser associados a grupos de assinantes que compartilham um mesmo lóbulo ou podem ser associados a um único assinante.

Em geral, os elementos do arranjo podem ser dispostos em outras configurações, como pode ser visto na Figura 2.6, entretanto as configurações mais utilizadas são a linear e a planar, que inclui os arranjos circular e retangular.

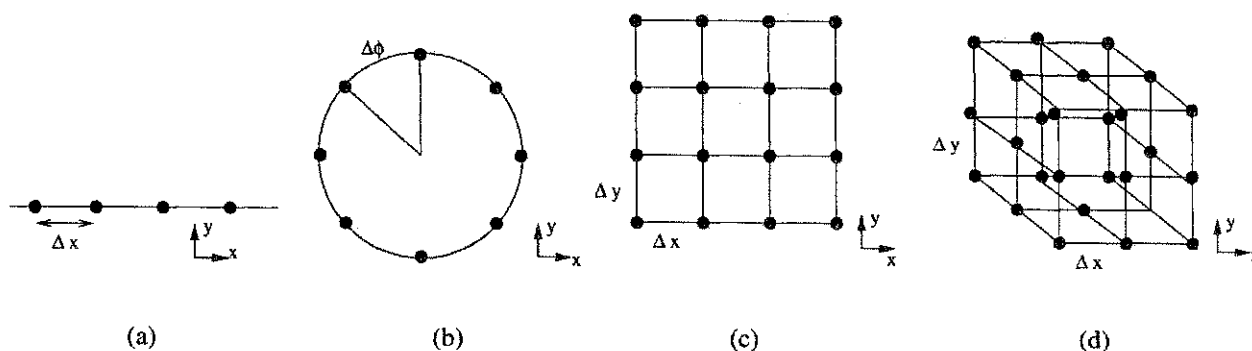


Figura 2.6: Configurações de conjuntos de elementos de antenas

Um arranjo linear igualmente espaçado com  $N$  elementos pode ser também representado, no modo de recepção, pelo diagrama da Figura 2.7. Nesta figura, os coeficientes  $a_m$  representam as amplitudes de excitação dos elementos do arranjo e  $u_m(t)$  representa uma frente de onda plana amostrada no elemento  $m$ , chegando ao arranjo com direções  $(\phi, \theta)$ .

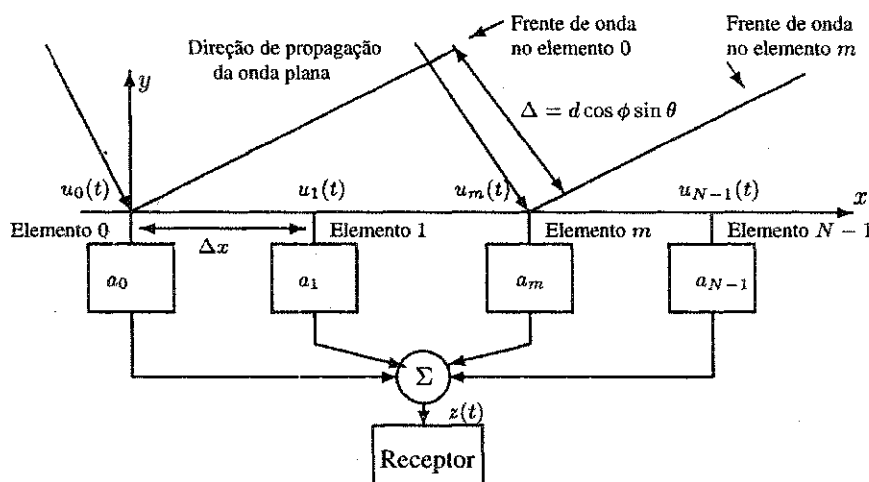


Figura 2.7: Diagrama representativo de um arranjo linear igualmente espaçado com  $N$  elementos.

### 2.3.3 Arranjo linear com espaçamento uniforme e amplitude não-uniforme

Nesta subsecção será analisada uma configuração formada por um número par,  $2M$ , de elementos isotrópicos posicionados simetricamente ao longo do eixo  $z$  e com um espaçamento entre elementos igual a  $d$ . Isso significa que as amplitudes das correntes de excitação de  $M$  elementos posicionados de um lado do centro geométrico do arranjo são iguais às amplitudes dos elementos posicionados do outro lado.

Um diagrama representando duas configurações de arranjo linear simétrico é mostrado nas Figuras 2.8(a) e 2.8(b). A Figura 2.8(a) representa  $2M$  elementos dispostos ao longo do centro da linha do

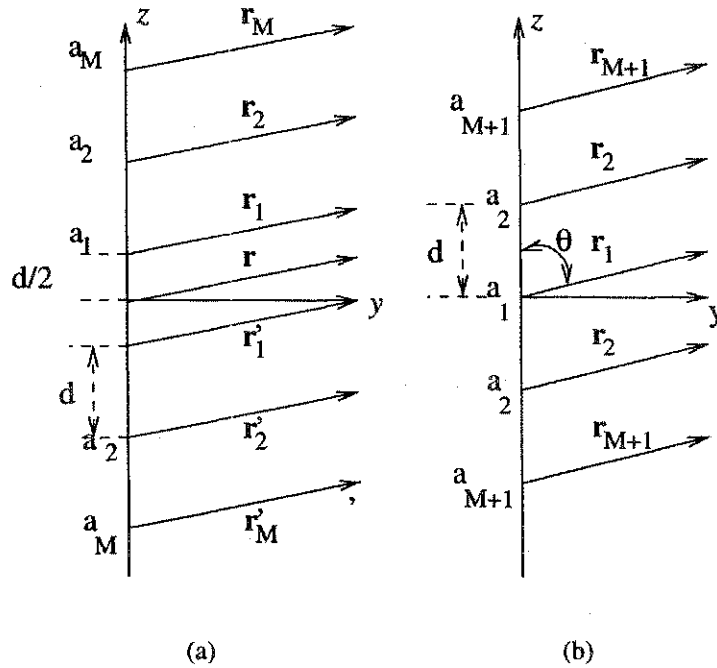


Figura 2.8: Arranjo de amplitudes não-uniformes de número (a) par e (b) ímpar de elementos.

arranjo. É assumido que a distribuição da amplitude dos coeficientes de excitação dos elementos  $a_n$  é simétrica ao longo da origem, de modo que

$$\begin{aligned}
 AF_{2M}(\theta) &= a_1 e^{+j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{+j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &+ a_M e^{+j[(2M-1)/2]kd \cos \theta} \\
 &+ a_1 e^{-j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{-j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &+ a_M e^{-j[(2M-1)/2]kd \cos \theta}
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

se reduz à forma normalizada

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right]. \quad (2.19)$$

Se o número total de elementos do arranjo for ímpar,  $2M + 1$ , conforme a Figura 2.8(b), o fator de arranjo passa a ser escrito como

$$\begin{aligned}
 AF_{2M+1}(\theta) &= 2a_1 + a_2 e^{+jkd \cos \theta} + a_3 e^{+j2kd \cos \theta} + \dots + a_{M+1} e^{+jMkd \cos \theta} \\
 &+ a_2 e^{-jkd \cos \theta} + a_3 e^{-j2kd \cos \theta} + \dots + a_{M+1} e^{-jMkd \cos \theta}
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

que pode ser simplificado para

$$AF_{2M+1}(\theta) = \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos[(n-1)kd \cos \theta]. \quad (2.21)$$

### 2.3.4 Método da expansão binomial

Tendo sido determinado o fator de arranjo, pode-se agora obter os valores dos coeficientes  $a_n$  [1], [2]. Uma forma de obter esses coeficientes é usando os coeficientes binomiais da expansão da série

$$(1+x)^{m-1} = 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}x^3 + \dots \quad (2.22)$$

que são dados por

$$\begin{array}{rcccccccc} m=1 & & & & & & & & 1 \\ m=2 & & & & & & & & 1 & 1 \\ m=3 & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ m=4 & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ m=5 & & & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ m=6 & & & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ m=7 & & & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ m=8 & & & & & & & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ m=9 & & & & & & & & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\ m=10 & & & & & & & & 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \end{array} \quad (2.23)$$

Desse modo, se os valores de  $m$  representam o número de coeficientes de excitação dos dipolos, então as correspondentes amplitudes  $a_n$  dos coeficientes são dadas por

1.  $2M = m = 2 \rightarrow a_1 = 1$
2.  $2M = m = 4 \rightarrow a_1 = 3 \quad a_2 = 1$
3.  $2M = m = 6 \rightarrow a_1 = 10 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 1$
4.  $2M = m = 10 \rightarrow a_1 = 126 \quad a_2 = 84 \quad a_3 = 36 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = 1$ .

Na Figura 2.9(a) é mostrado o diagrama de irradiação normalizado de um arranjo linear com 10 elementos e com coeficientes de excitação binomiais. Pode-se perceber pela figura que houve completa eliminação dos lóbulos secundários para  $d = \lambda/2$  e  $d = \lambda/4$ . Em relação às configurações anteriores, o uso de coeficientes binomiais implica em lóbulos principais mais largos e portanto menos diretivos. Uma característica indesejável dessa configuração é a grande variação de amplitude dos diferentes

coeficientes de excitação  $a_n$ , principalmente nos arranjos com grande número de elementos. Essa característica faz com que o arranjo tenha uma baixa eficiência e seja pouco usado na prática.

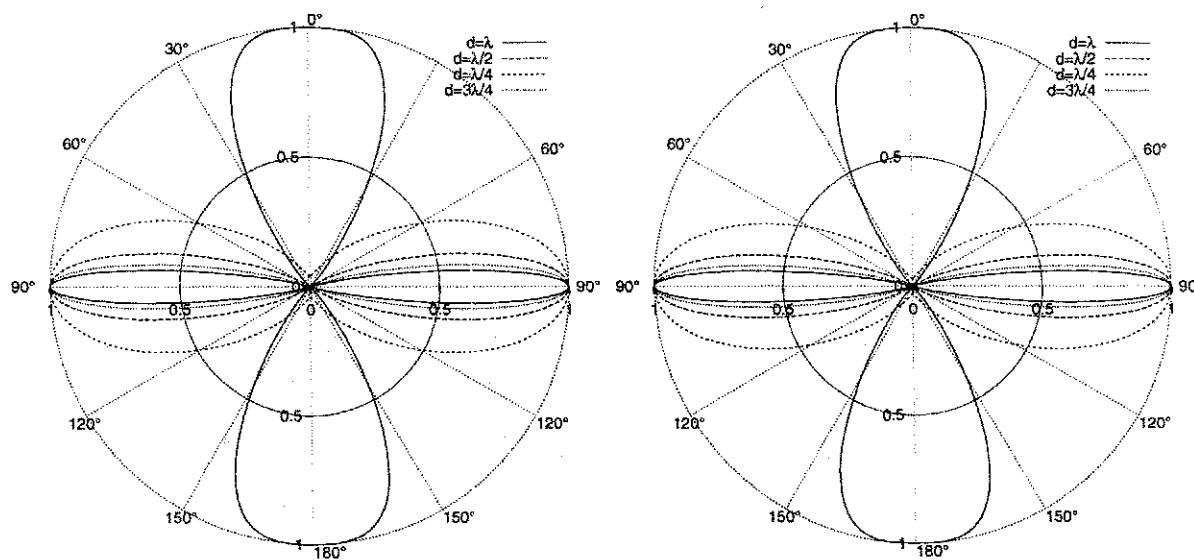
Quando o número de coeficientes de excitação é ímpar então

$$1. 2M + 1 = m = 3 \rightarrow 2a_1 = 2 \quad a_2 = 1$$

$$2. 2M + 1 = m = 5 \rightarrow 2a_1 = 6 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 1$$

$$3. 2M + 1 = m = 11 \rightarrow 2a_1 = 252 \quad a_2 = 210 \quad a_3 = 120 \quad a_4 = 45 \quad a_5 = 10 \quad a_6 = 1.$$

Na Figura 2.9(b) pode-se ver o diagrama de irradiação de um arranjo com 11 elementos distribuídos ao longo do eixo  $z$ . Percebe-se que em ambos os casos, número de elementos par e ímpar, não há lóbulos secundários para valores apropriados de  $d$ . Percebe-se que para  $d = \lambda$  há um grande lóbulo secundário perpendicular ao lóbulo principal.



(a) Diagrama de irradiação normalizado para o espaçamento  $d = \lambda$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $d = \lambda/4$  e  $d = 3\lambda/4$  e um número par de elementos,  $N=10$ .

(b) Diagrama de irradiação normalizado para o espaçamento  $d = \lambda$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $d = \lambda/4$  e  $d = 3\lambda/4$  e um número ímpar de elementos,  $N=11$ .

Figura 2.9: Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação  $E$  de um arranjo com excitação binomial.

### 2.3.5 Método da expansão polinomial

Uma outra forma de obter os coeficientes de excitação das configurações ilustradas nas Figuras 2.8(a) e 2.8(b) é substituindo os termos em co-seno das expressões do fator de arranjo pelos coeficientes do





6. Escrever o fator de arranjo em termos dos coeficientes obtidos no passo 5.

Após a obtenção dos coeficientes pode-se traçar o diagrama de irradiação, como o mostrado na Figura 2.10

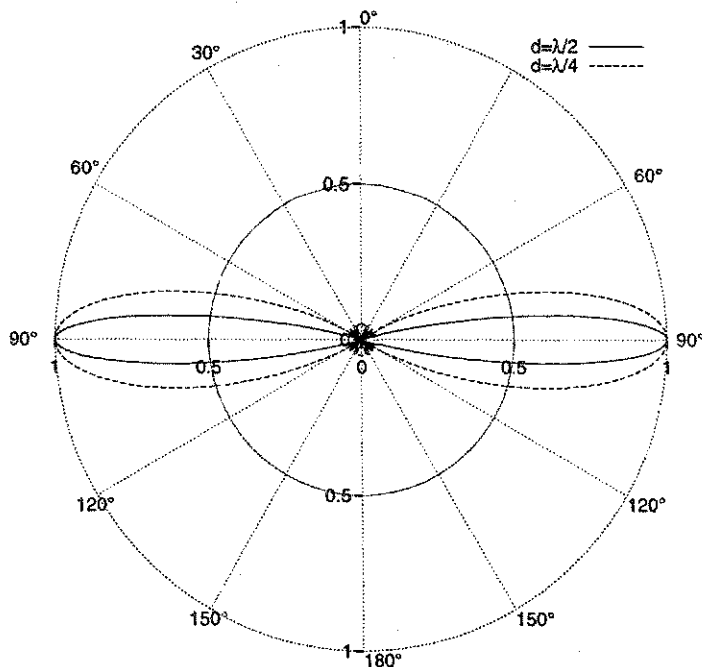


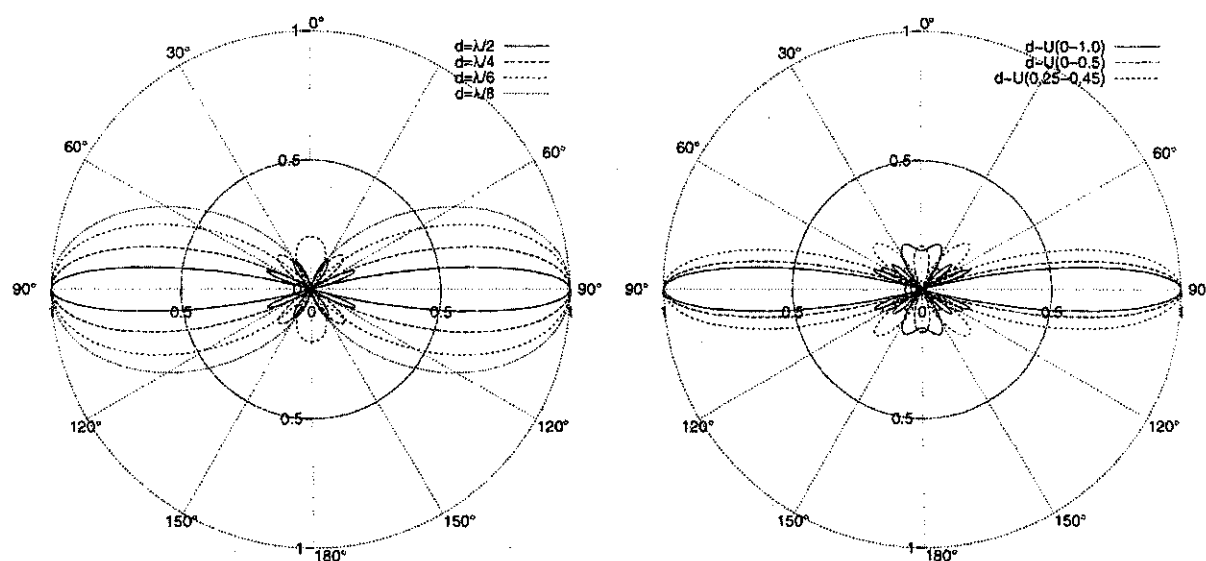
Figura 2.10: Diagrama de irradiação normalizado no plano de elevação de um arranjo de antenas com coeficientes de excitação obtidos a partir dos coeficientes de um polinômio de Dolph-Tschebyscheff de ordem 9 e  $R_0 = 26$  dB.

Pode-se perceber que os coeficientes do polinômio permitem uma boa conformação do diagrama de irradiação, à custo de certo processamento em tempo real, que consiste na resolução de um sistema de equações lineares de ordem  $\frac{m+1}{2}$  ou na utilização do método de Barbieri para o cálculo dos coeficientes  $a_n$  [1], [6].

### 2.3.6 Método dos coeficientes aleatórios

Um método alternativo para o projeto de arranjos lineares com  $N = 2M$  elementos simetricamente distribuídos ao longo do eixo do arranjo, como mostrado na Figura 2.8(a), é usar coeficientes uniformemente distribuídos em um intervalo adequado e com espaçamento fixo entre elementos. Essa é uma das propostas desta tese e será visto, por exemplo, que uma das vantagens dessa configuração de arranjo em relação ao arranjo binomial é a possibilidade de haver apenas uma pequena variação entre os valores dos coeficientes de excitação. Poder-se-ia ainda sugerir que, tanto os coeficientes de excitação quanto o espaçamento entre os elementos fossem escolhidos aleatório. Os diagramas das duas

situações propostas são mostrados na Figura 2.11. Na Figura 2.11(a) são mostradas as curvas do fator de arranjo de uma antena com 8 elementos (distribuídos ao longo do eixo do arranjo) com amplitudes de excitação uniformemente distribuídas no intervalo  $[M; 2M]$  e com valores de espaçamento entre elementos iguais a  $d_1 = \lambda/2$ ,  $d_2 = \lambda/4$ ,  $d_3 = \lambda/6$  e  $d_4 = \lambda/8$ . Na Figura 2.11(b) são mostrados os diagramas de irradiação considerando-se que tanto o espaçamento quanto os coeficientes de excitação são aleatórios, para o caso de um arranjo com  $N = 8$  elementos distribuídos simetricamente ao longo do centro do arranjo. em que a notação  $x \sim U(a; b)$  indica que  $x$  é um número aleatório uniformemente



(a) Diagrama de irradiação médio normalizado de um arranjo com amplitude de excitação aleatória para valores de espaçamento  $d = \lambda/2$ ,  $d = \lambda/4$ ,  $d = \lambda/6$  e  $d = \lambda/8$ , e um número par de elementos,  $N = 2M = 8$ .

(b) Diagrama de irradiação médio normalizado de um arranjo com amplitude dos coeficientes de excitação e espaçamento  $d$  aleatórios e para o número de elementos  $N = 2M + 1 = 9$ .

Figura 2.11: Diagramas de irradiação normalizados no plano de elevação de um arranjo linear com parâmetros aleatórios.

distribuído no intervalo de  $a$  até  $b$ .

## 2.4 Sistemas Adaptativos com Antenas

Os chamados sistemas adaptativos de antenas, são na verdade configurações de arranjos com processadores numéricos associados aos elementos do arranjo. Esses processadores controlam a amplitude e a fase da corrente elétrica nos elementos do arranjo e o fazem de forma recursiva, geralmente por meio

de treinamento, visando maximizar a qualidade do sinal de saída. Antes de explicar alguns algoritmos recursivos, é interessante analisar o projeto de um arranjo do ponto de vista do método de Wiener [7]. O projeto consiste no cálculo de um vetor de coeficientes ótimos  $w_o$ , de modo que a resposta do arranjo a esses coeficientes apresente uma atenuação nos sinais que chegam ao arranjo com ângulo de chegada diferente do ângulo desejado azimutal  $\phi_d$ . Nos problemas tratados nesta seção, o arranjo está posicionado no plano  $x - y$ . A Figura 2.12 ilustra um sistema de coordenadas simplificado para esse caso.

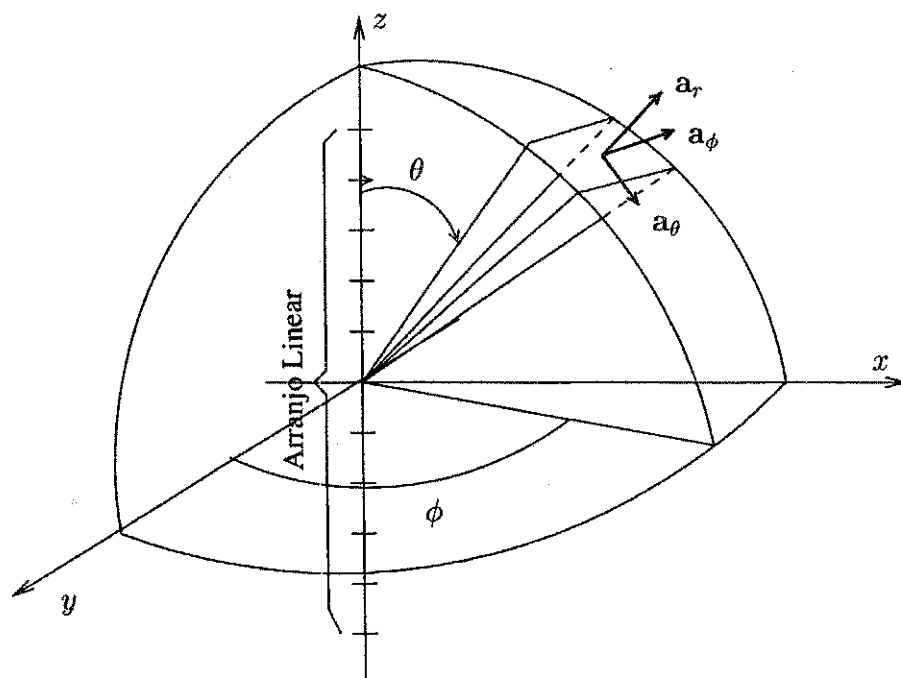


Figura 2.12: Sistema de coordenadas para análise de sistemas adaptativos.

Para facilitar a análise desse problema, é interessante representar a estrutura formada pelo arranjo, por um diagrama semelhante ao ilustrado na Figura 2.13. Nesta figura, os valores dos coeficientes associados aos elementos do arranjo são representados pelos termos  $w_n$  e o termo  $Z^{-1}$  representa o atraso que uma onda plana sofre ao se deslocar entre os elementos igualmente espaçados do arranjo linear com  $N$  elementos.

Como um exemplo da obtenção de um vetor de pesos ótimo  $w_o$ , considere o caso em que se deseja eliminar um determinado sinal de interferência, que chega na unidade de recepção com um ângulo de chegada  $\phi_i$ . Neste caso, deseja-se atenuar os componentes de interferência captados nos elementos do arranjo e processar os componentes desejados que chegam com um ângulo de chegada  $\phi_d$ . Essa tarefa constitui um problema de otimização restrita, que pode ser estabelecido da seguinte forma:

Considere uma onda plana, representada por  $u(n) = e^{jnkdsen\phi_d}$ , chegando ao arranjo linear repre-

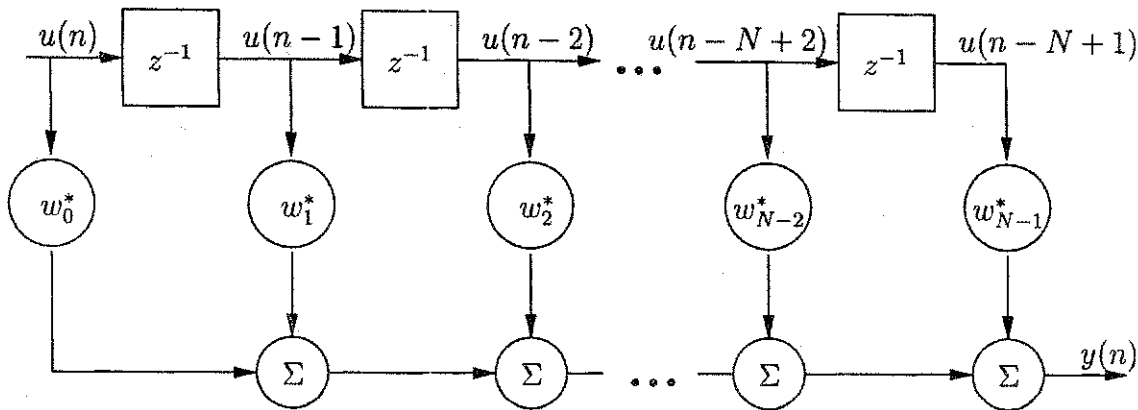


Figura 2.13: Representação de um arranjo linear com  $N$  elementos.

sentado na Figura 2.7 com um ângulo de incidência  $\phi_d$ . Nesse caso, a saída do conjunto adaptativo pode ser escrita como

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} w_m^* u(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} w_m^* e^{j(n-m)kdsen\phi_d} = u_0(n) \sum_{m=0}^{N-1} w_m^* e^{-jmkdsen\phi_d}, \quad (2.27)$$

em que  $u_0(n)$  é a onda plana captada pelo elemento posicionado no início do arranjo. Para que a saída dessa estrutura forneça um ganho  $g$  às amostras captadas provenientes de ondas que chegam com ângulo de chegada  $\phi_d$ , é necessário que

$$\sum_{m=0}^{N-1} w_m^* e^{-jmkdsen\phi_d} = g, \quad (2.28)$$

em que  $g$  tem valor complexo. Para resolver esse problema de otimização é necessário uso de multiplicadores de Lagrange, de modo que a função de custo a ser obtida em termos desses multiplicadores seja dada por

$$\begin{aligned} J &= |y(n)|^2 + \Re \left[ \xi^* \left( \sum_{n=0}^{N-1} w_n^* e^{-jkdsen(\phi_d)n} - g \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w_n^* w_m r(n-m) + \Re \left[ \xi^* \left( \sum_{n=0}^{N-1} w_n^* e^{-jkdsen(\phi_d)n} - g \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 2.29 é a potência de saída do sistema, o segundo termo é a restrição linear e  $r(n-m)$  é a correlação entre as amostras de sinais no instante discreto  $n-m$ . O vetor de coeficientes  $w_0$  é obtido aplicando-se o gradiente  $\nabla$  à função  $J$  e igualando o resultado a zero. Fazendo isto, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_n r(n-m) = \frac{-\xi^*}{2} e^{-jkdsen(\phi_d)n}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.30)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o = -\frac{\xi^*}{2}\mathbf{a}(\phi_d), \quad (2.31)$$

em que  $\mathbf{R}$  é a matriz de correlação  $N \times N$  das amostras de  $u(n)$ ,  $\mathbf{w}_o$  é o vetor de coeficientes ótimos e  $\mathbf{a}(\phi_d)$  é o vetor de direcionamento do sinal desejado,

$$\mathbf{a}(\phi_d) = [ 1 \quad e^{-jkdsen(\phi_d)} \quad \dots \quad e^{-j(N-1)kdsen(\phi_d)} ]^T. \quad (2.32)$$

Da Equação 2.31, tem-se que

$$\mathbf{w}_o = -\frac{\xi^*}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\phi_d), \quad (2.33)$$

assumindo que  $\mathbf{R}$  seja não-singular, que é uma consideração justificada pelo fato de, na prática, o sinal tomado na saída de cada elemento da antena incluir um componente de ruído térmico modelado como ruído gaussiano branco.

Tomando a transposição hermitiana nos dois lados da Equação 2.33 e pós-multiplicando o resultado por  $\mathbf{a}(\phi_d)$ , obtém-se

$$\mathbf{w}_o^H \mathbf{a}(\phi_d) = -\frac{\xi}{2} \mathbf{a}^H(\phi_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\phi_d), \quad (2.34)$$

na qual foi assumido que  $(\mathbf{R}^{-1})^H = \mathbf{R}^{-1}$ , pelo fato do processo que gera a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  ser gaussiano, e como consequência,  $\mathbf{R}$  ser hermitiana. Sabendo que o termo  $\mathbf{a}^H(\phi_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\phi_d)$  é um escalar e que  $\mathbf{w}_o^H \mathbf{a}(\phi_d) = g$  tem-se, a partir da Equação 2.33,

$$\mathbf{w}_o = \frac{g^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\phi_d)}{\mathbf{a}^H(\phi_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\phi_d)}. \quad (2.35)$$

Na Figura 2.14 é mostrada a resposta de um arranjo com 10 elementos posicionados ao longo do plano  $x - y$ , obtida pelo cálculo dos pesos ótimos usando a Equação 2.35. A matriz de correlação  $\mathbf{R}_{10 \times 10}$  foi estimada usando-se  $10^5$  amostras do sinal de entrada  $u(t)$  com amostras de ruído gaussiano branco de média nula e variância  $\sigma_n^2$  adicionadas. Para este arranjo, o sinal que chega com direção de chegada no plano horizontal, tal que  $\text{sen}(\phi) = 0, 2$ , recebe um ganho unitário. Os sinais que chegam ao arranjo com ângulos de chegada diferentes são atenuados.

Percebe-se pela Equação 2.35 a limitação numérica desse procedimento, devido à necessidade de se calcular a inversa da matriz de correlação  $\mathbf{R}^{-1}$ . À medida que o tamanho da matriz  $\mathbf{R}$  aumenta, o esforço computacional também aumenta.

O método analisado acima é chamado de Método da Variância Mínima e, para superar as limitações, geralmente numéricas, desse método, são usados algoritmos recursivos como o LMS e o RLS, analisados detalhadamente na referência [7], que convergem para uma estimativa dos pesos ótimos de forma recursiva.

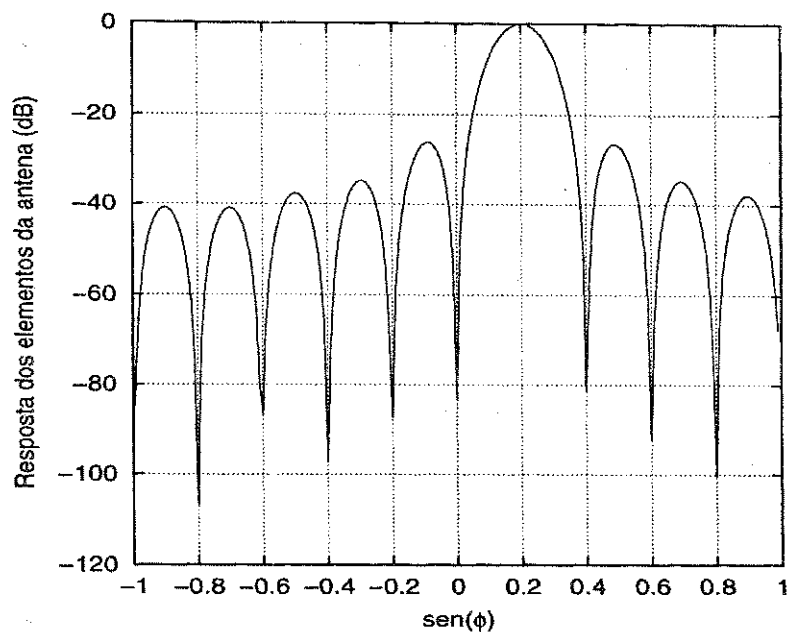


Figura 2.14: Resposta de um arranjo linear de 10 elementos para uma SNR=30dB.

### 2.4.1 Uso do algoritmo LMS

Quando um arranjo linear é usado em conjunto com um algoritmo recursivo para controlar a amplitude e a fase da corrente de excitação dos elementos, o conjunto arranjo-algoritmo pode ser representado por um diagrama semelhante ao da Figura 2.15. Os termos  $Z^{-1}$  e  $w_n$  têm o mesmo significado dos termos correspondentes na Figura 2.13 e o bloco denominado algoritmo adaptativo usa um algoritmo supervisionado para ajustar o valor dos coeficientes  $w_n$ .

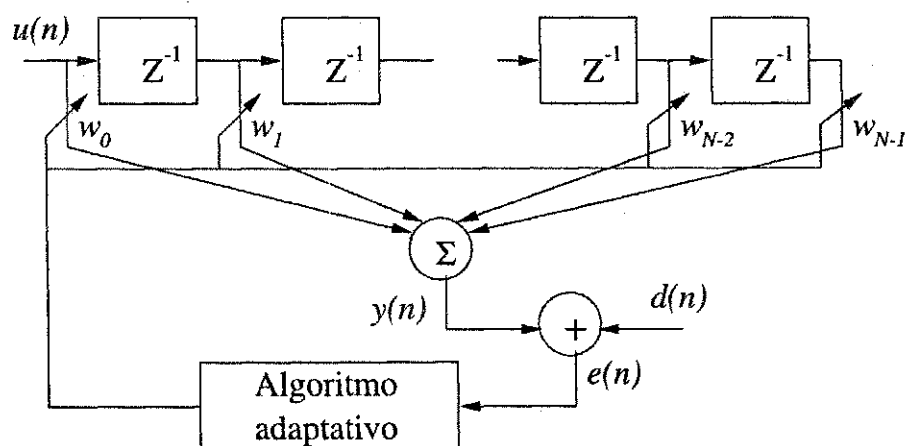


Figura 2.15: Representação de um arranjo linear de  $N$  elementos com algoritmo recursivo acoplado.

O primeiro algoritmo analisado é o LMS. O uso do algoritmo LMS na estimação de coeficientes óti-

mos encontra inúmeras aplicações e seu estudo tem despertado um considerável interesse. O algoritmo é referido como LMS restrito quando os seus coeficientes são ajustados sujeitos a alguma restrição em cada iteração e é referido como LMS irrestrito quando os seus coeficientes não sofrem restrições.

## 2.4.2 Algoritmo LMS irrestrito

O LMS calcula os seus coeficientes em cada iteração estimando o gradiente da superfície de erro quadrático médio e ajustando os novos valores na direção oposta à do gradiente, por um pequeno valor. A constante que determina o incremento dado aos coeficientes é normalmente referida como o tamanho do passo de ajuste, e, dependendo do seu valor, o processo converge para um conjunto de valores ótimos, referidos também como pesos ótimos. As equações do algoritmo LMS convencional irrestrito são dadas por

$$\begin{aligned} y(n) &= \hat{\mathbf{w}}^H(n)\mathbf{u}(n) \\ e(n) &= d(n) - y(n) \\ \hat{\mathbf{w}}(n+1) &= \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu\mathbf{u}(n)e^*(n). \end{aligned} \quad (2.36)$$

e fornecem respectivamente a saída do sistema ilustrado na Figura 2.15, o erro de estimação e a equação de ajuste recursivo dos coeficientes. O termo  $d(n)$  representa uma amostra de treinamento no instante  $n$  e o parâmetro  $\mu$  controla a convergência dos coeficientes para um valor próximo ao fornecido pela Equação 2.35. A seguir são mostradas mais duas versões do LMS irrestrito que são respectivamente o  $\alpha$ -LMS e o LMS normalizado.

O LMS normalizado é uma variação do LMS convencional que usa um passo de tamanho variável à cada iteração e evita a estimação dos autovalores da matriz de correlação dos dados de entrada para a seleção do valor máximo permissível para o tamanho do passo de ajuste. Essa variação do LMS, geralmente tem desempenho melhor e menor sensibilidade em relação ao LMS convencional. Uma outra variação do LMS que é menos sensível às variações do sinal de entrada é o  $\alpha$ -LMS, que possui um passo de ajuste de convergência de tamanho variável e leva em consideração o passo da iteração anterior.

Nas Figuras 2.16(a) e 2.16(b) são mostradas as curvas de convergência de duas versões do LMS que são o LMS normalizado e o  $\alpha$ -LMS [7]. Os parâmetros de convergência do LMS normalizado e do  $\alpha$ -LMS são dados respectivamente por

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = \frac{\mu}{\sigma_n}, \quad (2.37)$$

em que  $\sigma_n$  é dado por

$$\sigma_n = \alpha|u_0(n)|^2 + (1 - \alpha)\sigma_{n-1}. \quad (2.38)$$

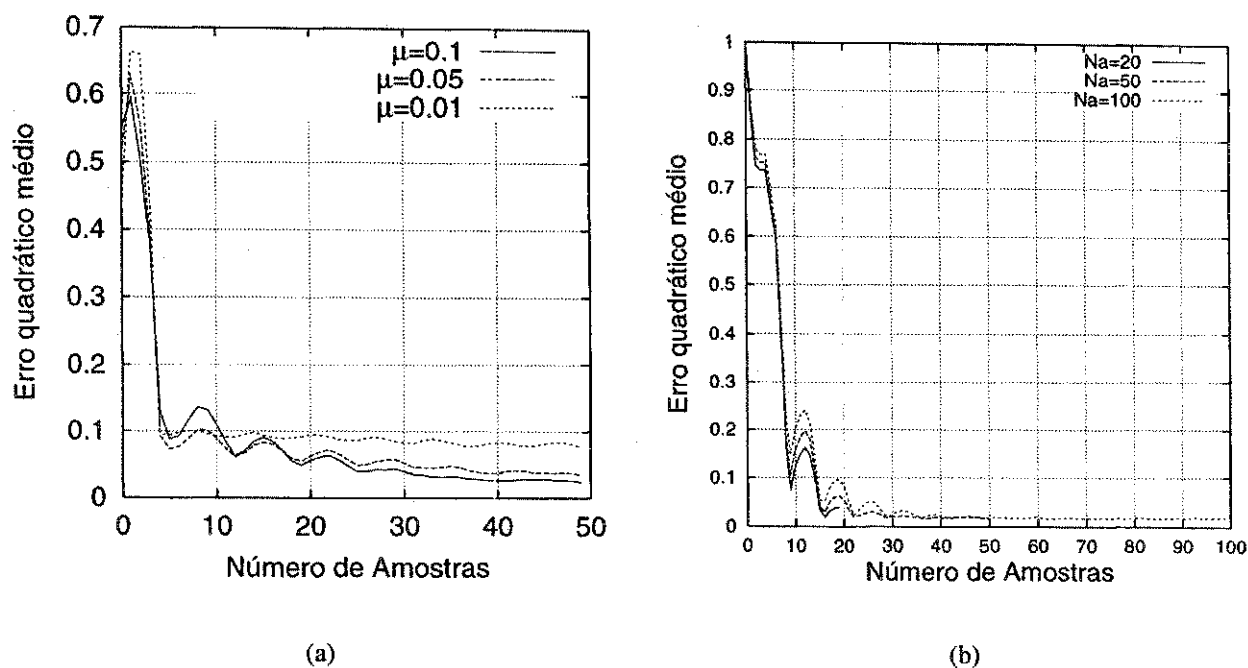


Figura 2.16: Convergência das variantes (a) LMS Normalizado e (b)  $\alpha$ -LMS, em função do número de amostras de treinamento  $N_a$ , para uma SNR=30dB.

Na obtenção da curva da Figura 2.16(b) foi usado  $\alpha = 10^{-5}$  e  $\mu = 0.1$  e pode-se observar que com um número de amostras em torno de 20 a 30 já se obtém uma considerável redução no erro quadrático médio. Para obtenção dessas curvas foi utilizado o sinal

$$u(n) = A_1 e^{jnkdsen(\phi_{i1})} + A_2 e^{jnkdsen(\phi_{i2})} + \eta(n), \quad (2.39)$$

em que o primeiro termo no lado direito da Equação 2.39 corresponde ao sinal de interesse, o segundo termo corresponde a um sinal de interferência e o terceiro termo é uma amostra de ruído gaussiano de valor complexo com média nula e variância  $\sigma_\eta^2$ . Na Figura 2.17 é mostrada a resposta de uma estrutura adaptativa, semelhante à mostrada na Figura 2.15, com um arranjo linear de  $N = 5$  elementos posicionado no plano  $x - y$ , com coeficientes obtidos pelo algoritmo  $\alpha$ -LMS usando-se os parâmetros da curva da Figura 2.16(b). A resposta dos coeficiente do arranjo, após o algoritmo recursivo entrar em regime permanente, é dada por  $20 \log |\hat{\mathbf{w}}_o^H \mathbf{a}(\phi)|^2$ . Nas curvas mostradas na Figura 2.17 foi considerado  $d = \lambda/2$ .

Já na Figura 2.18 é mostrada a resposta da estrutura adaptativa em função do número de amostras  $N_a$  usadas para o treinamento. Pode-se perceber por essa figura que é possível obter uma boa atenuação no sinal de interferência com um número de amostras de treinamento em torno de 20 a 50 amostras.



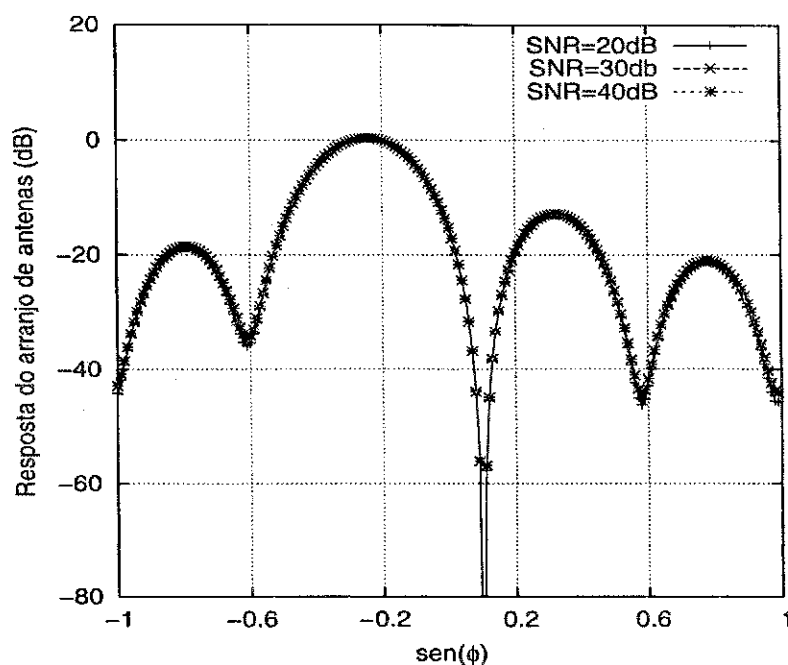


Figura 2.17: Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativo de 5 elementos posicionados no eixo  $x$  para  $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0.2$  e  $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0.1$ .

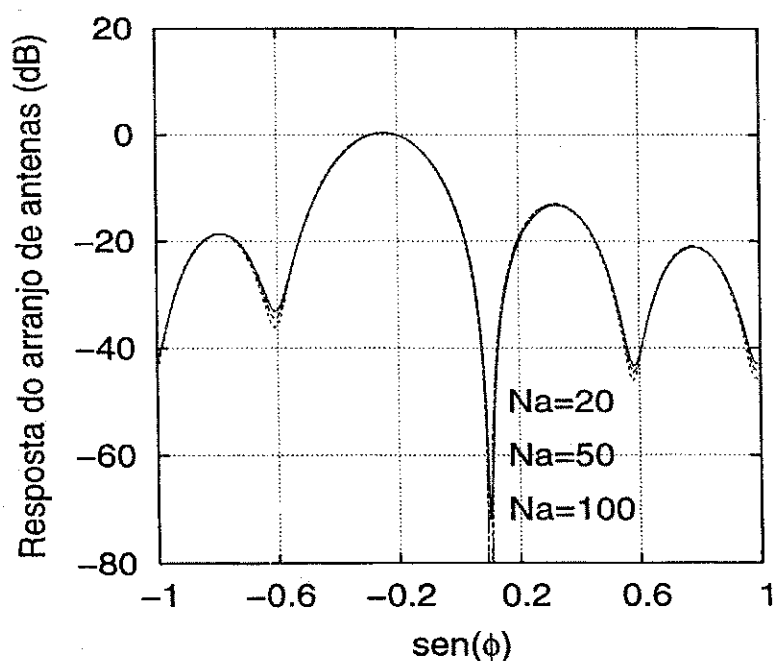


Figura 2.18: Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativo de 5 elementos posicionados ao longo do eixo  $x$  para  $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0.2$  e  $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0.1$ , em função do número de amostras de treinamento.

### 2.4.3 Algoritmo LMS restrito

O algoritmo LMS restrito, para determinação do vetor de pesos ótimos, é escrito na forma

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{Q}\{\mathbf{w}(n) - \mu \mathbf{g}_r(\mathbf{w}(n))\} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}}, \quad (2.40)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^H}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}}, \quad (2.41)$$

$\mathbf{a}$  é um vetor de direcionamento e  $\mathbf{g}_r(\mathbf{w}(n))$  é uma estimativa não viciada do gradiente da superfície de potência  $\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n)$ , com respeito a  $\mathbf{w}(n)$ , após a  $n$ -ésima iteração e  $\mathbf{R}$  é uma matriz de correlação. O algoritmo é “restrito” porque em cada iteração ele atende à restrição  $\mathbf{w}^H(n)\mathbf{a} = 1$ , pra todo  $n$ . O gradiente de  $\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n)$  com respeito a  $\mathbf{w}(n)$  é dado por

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}(n)} = 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n). \quad (2.42)$$

Quando a saída do processador adaptativo é acessível, a estimativa usual do gradiente é feita multiplicando-se as amostras de saída do arranjo  $\mathbf{x}$ , pela saída do processador  $y^*(\mathbf{w}(n))$  de modo a obter

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{w}(n)) = 2\mathbf{x}(n+1)y^*(\mathbf{w}(n)), \quad (2.43)$$

que é uma estimativa não-polarizada.

A segunda versão de algoritmo LMS restrito constitui o caso em que a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  é estimada recursivamente. Essa versão é chamada de LMS restrito recursivo e nesse caso  $\mathbf{g}_R(\mathbf{w}(n))$  denota a estimativa do gradiente que é dada por

$$\mathbf{g}_R(\mathbf{w}(n)) = 2\mathbf{R}(n+1)\mathbf{w}(n), \quad (2.44)$$

em que

$$\mathbf{R}(n+1) = \frac{n\mathbf{R}(n) + \mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^H(n+1)}{n+1}. \quad (2.45)$$

Da Equação 2.45 sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}(n) = \mathbf{R}$ , de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{g}_R(\mathbf{w}(n)) = 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n)$ . Pode-se mostrar [3] que a covariância do gradiente estimado nos casos 2.43 e 2.44 é dada respectivamente por

$$V_{\mathbf{g}_r(\mathbf{w}(n))} = 4\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n)\mathbf{R} \quad (2.46)$$

e

$$V_{\mathbf{g}_R(\mathbf{w}(n))} = \frac{4}{(n+1)^2} \mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n)\mathbf{R}, \quad (2.47)$$

o que mostra que a covariância do gradiente estimado pelo método recursivo decai por um fator  $(n+1)^2$  à medida que o número de iterações aumenta. Na Figura 2.19 é mostrada a curva de convergência da

potência do ruído de saída de um arranjo linear de 10 elementos respectivamente para  $\sigma_\eta^2 = 0,01$ ,  $\sigma_\eta^2 = 0,1$  e  $\sigma_\eta^2 = 1,0$  e, de acordo com o gráfico, pode-se perceber que o algoritmo minimiza a potência de saída à medida que o conjunto de pesos do algoritmo converge para o valor ótimo.

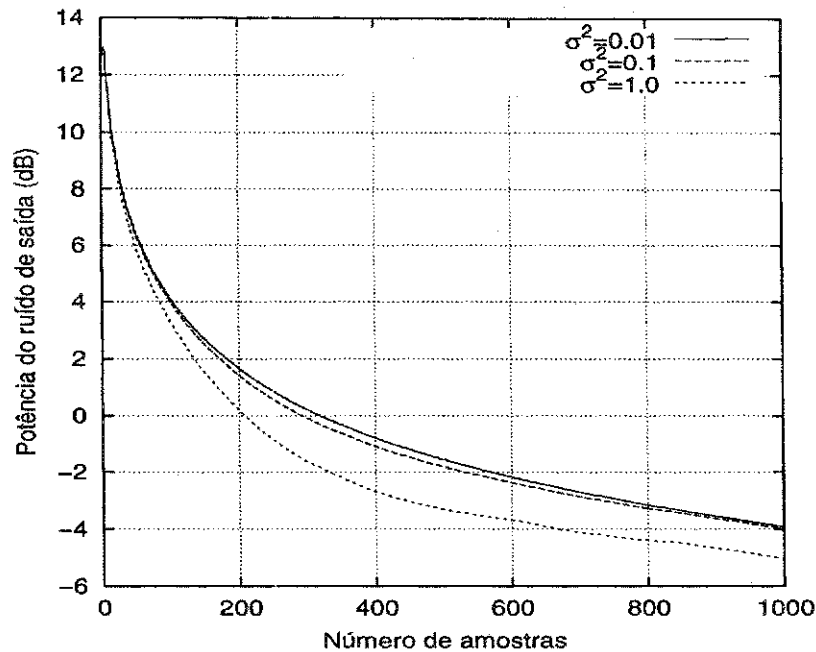


Figura 2.19: Curva de convergência da potência do ruído de saída de um arranjo adaptativo com 10 elementos, usando o LMS restrito recursivo.

A terceira versão de algoritmo LMS restrito é o LMS estruturado. O gradiente usado nesse algoritmo é calculado estimando-se a matriz de correlação das amostras do arranjo e restringindo-a a ter a forma de uma matriz de Toeplitz. O uso dessa restrição resulta em uma melhor estimativa dos pesos que o algoritmo LMS restrito padrão. A estimativa do gradiente do LMS estruturado é dada por

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{w}(n)) = 2\tilde{\mathbf{R}}(n+1)\mathbf{w}(n), \quad (2.48)$$

com  $\tilde{\mathbf{R}}(n)$  dada por

$$\tilde{\mathbf{R}}(n+1) = \frac{n\tilde{\mathbf{R}}(n) + \hat{\mathbf{R}}(n+1)}{n+1} \quad (2.49)$$

e  $\hat{\mathbf{R}}(n)$  dada por

$$\hat{\mathbf{R}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{r}_0(n) & \hat{r}_1(n) & \cdots & \hat{r}_{N-1}(n) \\ \hat{r}_1^*(n) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{r}_1(n) \\ \hat{r}_{N-1}^*(n) & \cdots & \hat{r}_1^*(n) & \hat{r}_0(n) \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

em que

$$\hat{r}_i(n) = \frac{1}{N_i} \sum_l x_l(n) x_{l+i}^*(n), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.51)$$

e  $N_i = N - i$  [3].

Na Figura 2.20 é mostrada a convergência da potência do ruído de saída da mesma estrutura linear do caso anterior à medida que os pesos da estrutura tendem para um valor próximo do valor ótimo.

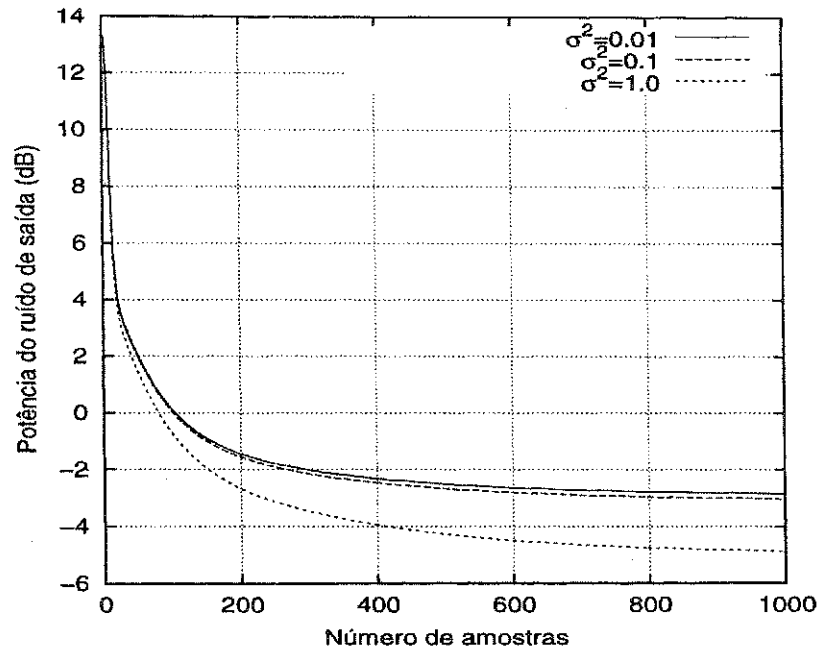


Figura 2.20: Curva de convergência da potência do ruído de saída de um arranjo linear adaptativo com 10 elementos usando o LMS restrito estruturado.

#### 2.4.4 Algoritmo RLS

Sabe-se que a convergência do LMS depende dos autovalores [7] da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  e, portanto, se a razão entre o maior e o menor autovalor de  $\mathbf{R}$  for grande, o LMS terá uma convergência muito lenta. Esse problema pode ser resolvido usando-se o algoritmo RLS, cujas equações são listadas a seguir.

Inicialização do Algoritmo

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \delta^{-1} \mathbf{I}, & \delta &= \text{pequena constante positiva.} \\ \hat{\mathbf{w}}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para cada instante discreto  $n = 1, 2, \dots$ , calcule:

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\zeta^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}{1 + \zeta^{-1}\mathbf{u}^H(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)} \quad (2.53)$$

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n-1)\mathbf{u}(n) \quad (2.54)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \hat{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{k}(n)e^*(n) \quad (2.55)$$

$$\mathbf{P}(n) = \zeta^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \zeta^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{P}(n-1), \quad (2.56)$$

em que  $\zeta$  é uma constante que literalmente representa o fator de esquecimento do algoritmo e determina basicamente a natureza da função de custo a ser minimizada. Lembrando que o objetivo do RLS é minimizar a função

$$\mathcal{E}(n) = \sum_{i=1}^n \zeta^{n-1} |e(i)|^2, \quad (2.57)$$

em que  $e(i)$  é o erro de estimação do algoritmo na  $i$ -ésima iteração. O caso em que  $\zeta = 1$  corresponde ao método dos mínimos quadrados e nesse caso o algoritmo tem memória infinita. A matriz  $\mathbf{P}$   $N \times N$  e o vetor  $\mathbf{k}$   $N \times 1$  são referidos respectivamente como matriz de correlação inversa e vetor de ganho do algoritmo.

Na Figura 2.21 são mostradas curvas de convergência do RLS em função do número de amostras de treinamento, para uma SNR=30dB, enquanto que na Figura 2.22 é mostrada a resposta do conjunto de elementos da antena com os pesos já ajustados.

Em um caso mais geral, um cancelador múltiplo pode ser projetado como ilustrado na Figura 2.23. Nesta figura, é ilustrado um banco de  $L$  arranjos de antenas com  $N$  elementos cada. Pode-se ver que o  $i$ -ésimo arranjo tem seus pesos ajustados pelo  $i$ -ésimo processador adaptativo, denotado na figura como P.A. $_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . Cada processador dispõe de uma seqüência de treinamento  $d_i$  cujo comprimento depende do algoritmo utilizado no ajuste dos pesos. As amostras de treinamento podem ser enviadas intercaladas com os dados, em intervalos de tempo diferentes, no caso de sistemas TDMA, ou podem ser transmitidas como códigos ortogonais em paralelo com os dados em caso de sistemas CDMA.

Nas Figuras 2.24 e 2.25 são ilustradas a resposta de um cancelador múltiplo para o caso de 3 arranjos adaptativos com  $N = 5$  elementos cada e as respectivas curvas de convergência de erro quadrático médio do algoritmo da cada processador. O ajuste dos pesos dos arranjos foi feito pelo algoritmo RLS e o modelo de uma amostra de sinal recebida  $s(n)$ , considerando o número de fontes de sinais conhecido, é escrito como

$$s(n) = Ai_1 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_1})} + Ai_2 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_2})} + Ai_3 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_3})} + \eta(n). \quad (2.58)$$

De acordo com a Equação 2.58, o termo  $Ai_1 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_1})}$  representa uma interferência para os sinais  $Ai_2 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_2})}$  e  $Ai_3 e^{jn\beta d \text{sen}(\phi_{i_3})}$  e assim sucessivamente. Desse modo, cada arranjo do cancelador

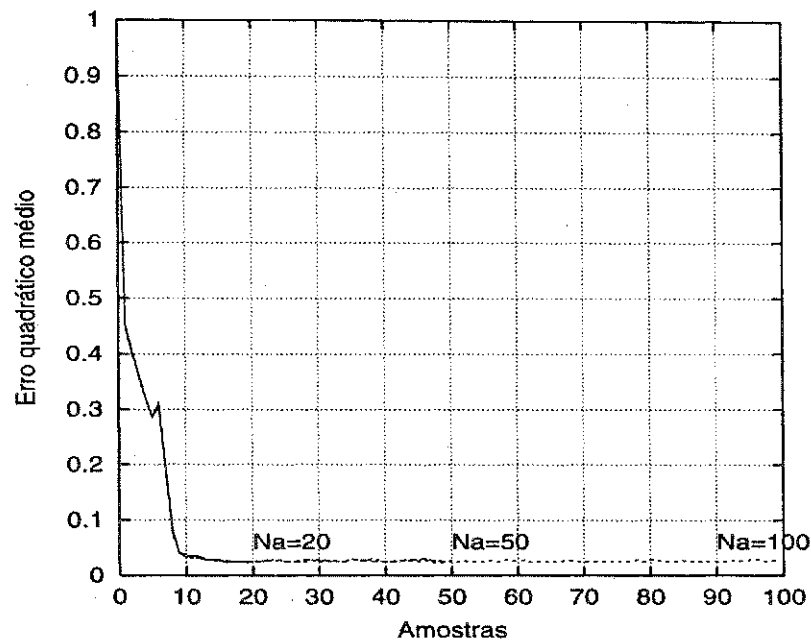


Figura 2.21: Curva do erro quadrático médio do RLS para  $\zeta = 0.6$  e  $\delta = 0.004$  em função das amostras de treinamento  $N_a$ .

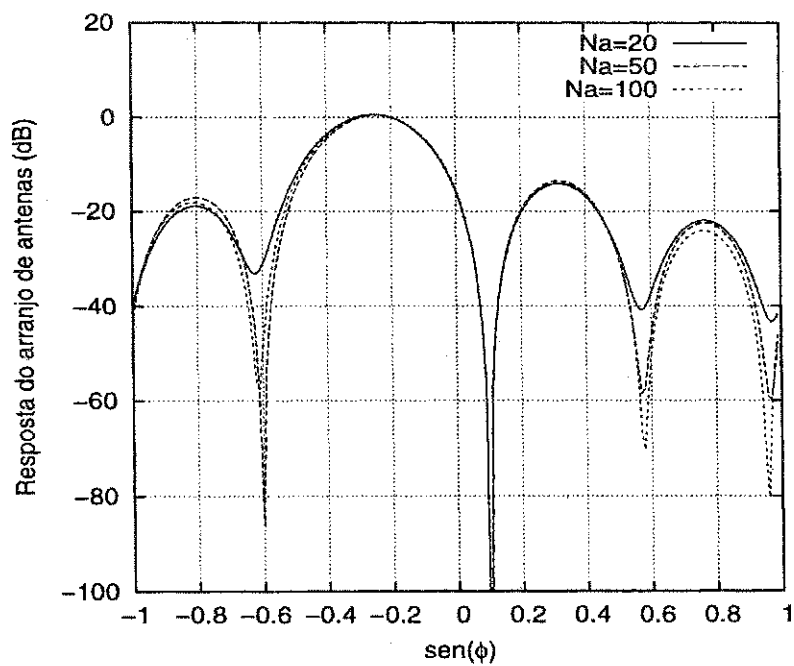


Figura 2.22: Resposta de uma estrutura de arranjo adaptativa de 5 elementos disposto ao longo do eixo  $x$  com  $\text{sen}(\phi_{i1}) = -0.25$  e  $\text{sen}(\phi_{i2}) = 0.1$ , usando o RLS com  $\zeta = 0.6$  e  $\delta = 0.004$ , para diferentes valores de amostras de treinamento  $N_a$ .

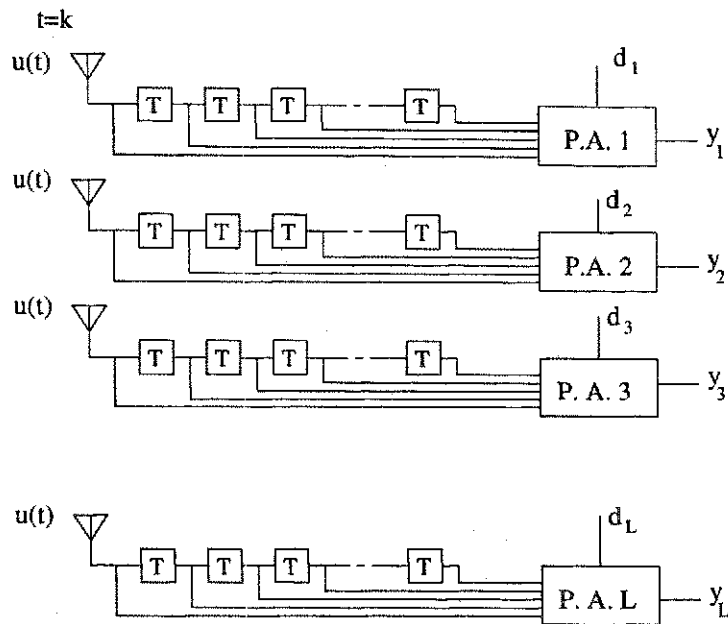


Figura 2.23: Estrutura de um cancelador adaptativo múltiplo.

múltiplo deve ser correlacionado com um dos componentes do sinal  $s(n)$ , captado pelo arranjo no instante  $t = n$ , e decorrelacionado com os demais componentes. O componente  $\eta(n)$  representa uma amostra de ruído gaussiano branco complexo de média nula e variância  $\sigma_\eta^2$ .

De acordo com as Figuras 2.23 e 2.24, o processador adaptativo P.A.1 fornece ganho unitário para o componente de sinal que têm ângulo de chegada tal que  $\text{sen}(\phi_{i_1}) = -0,2$  e atenua os outros dois componentes, que representam interferência para o processador P.A.1. Da mesma forma o processador P.A.2 fornece ganho unitário ao componente de sinal com ângulo de chegada tal que  $\text{sen}(\phi_{i_2}) = 0,4$  e atenua os outros dois componentes que representam interferência para P.A.2. Por último, P.A.3 fornece ganho unitário ao componente com ângulo de chegada tal que  $\text{sen}(\phi_{i_3}) = 0,8$  e atenua os demais componentes.

Apesar de exigir um esforço computacional maior que o LMS, o algoritmo RLS se apresenta como uma boa alternativa para ser usado em sistemas de antenas adaptativas que fazem ajuste dos coeficientes de forma supervisionada, pois sua convergência mais rápida exige menos amostras de treinamento para obtenção dos coeficientes ótimos.

## 2.4.5 Outros algoritmos

Existem ainda mais dois algoritmos que também merecem ser citados entre os algoritmos adaptativos clássicos. São os algoritmos CMA (*constant modulus algorithm*) e o método do gradiente conjugado.

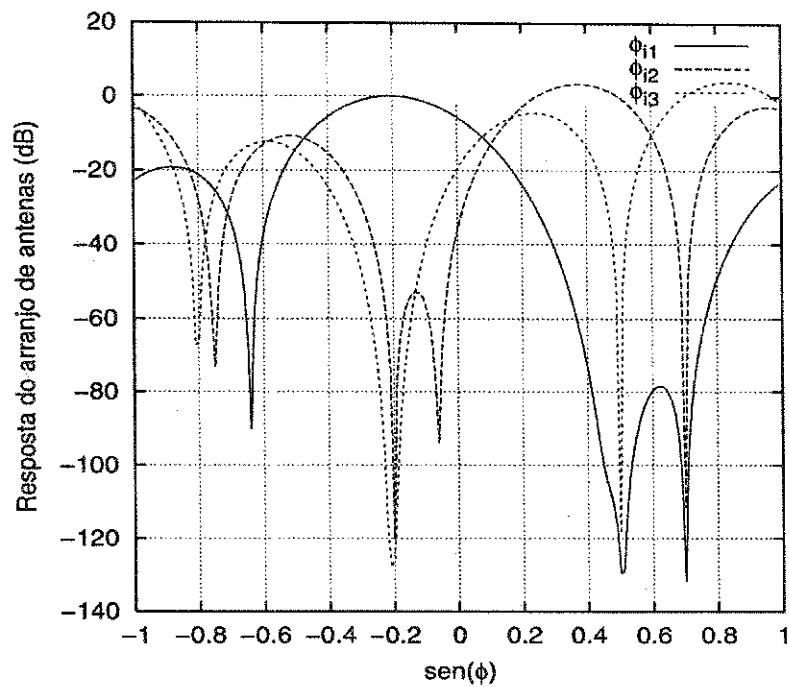


Figura 2.24: Resposta de um cancelador adaptativo com 3 arranjos de 5 elementos posicionados no plano  $x-y$ , usando o algoritmo RLS com  $\zeta = 0,6$  e  $\delta = 0,004$ , para uma  $SNR = 30dB$  e um número de amostras de treinamento igual a 20.

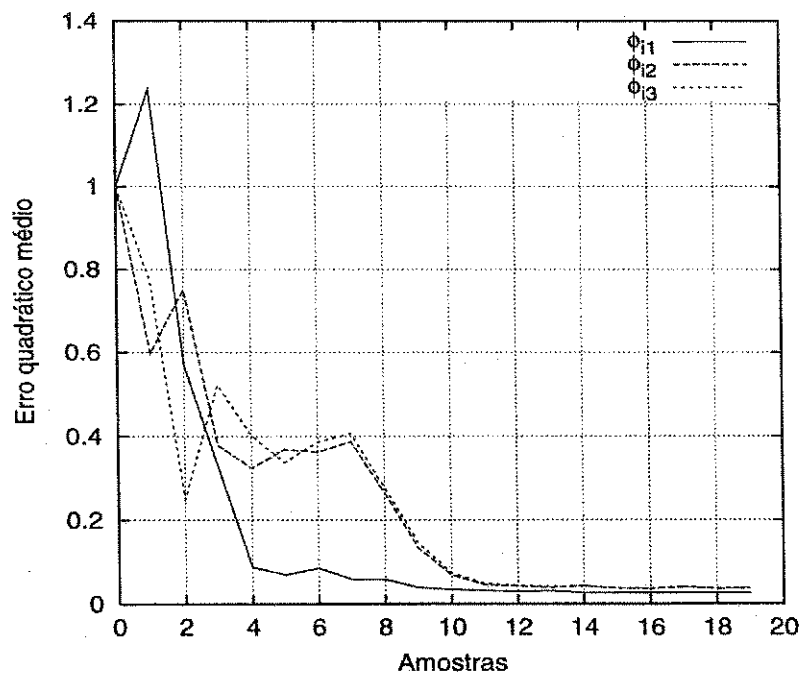


Figura 2.25: Curvas de erro quadrático médio do RLS usado no ajuste do cancelador múltiplo com 3 arranjos e  $\zeta = 0,6$  e  $\delta = 0,004$ , para uma  $SNR = 30dB$  e um número de amostras de treinamento  $N_a$  igual a 20.



O CMA ajusta seus pesos minimizando a função de custo [8–10].

$$J = \frac{1}{2} E [ (|y(n)|^2 - y_0^2)^2 ] \quad (2.59)$$

usando a equação

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \mathbf{g}(\mathbf{w}(n)), \quad (2.60)$$

em que  $y(n) = \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n+1)$  é a saída do arranjo após a  $n$ -ésima iteração,  $y_0$  é a amplitude desejada na ausência de interferência e  $\mathbf{g}(\mathbf{w}(n))$  denota uma estimativa do gradiente da função de custo.

O outro método, mais utilizado na resolução de sistemas de equações da forma  $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$ , ajusta seus coeficientes com base em um vetor residual  $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{w}$  que denota um erro entre o sinal desejado e a saída do arranjo em cada iteração. O método é inicializado com uma suposição inicial  $\mathbf{w}(0)$  dos coeficientes para obter um erro inicial  $\mathbf{e}(0)$  e um vetor de direção inicial  $\mathbf{a}(0)$ . As equações de ajuste dos pesos são dadas por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu(n)\mathbf{a}(n), \quad (2.61)$$

em que o passo de ajuste  $\mu(n)$  é dado por

$$\mu(n) \triangleq \frac{|\mathbf{A}^H \mathbf{e}(n)|^2}{|\mathbf{A}^H \mathbf{a}(n)|^2} \quad (2.62)$$

e os valores de  $\mathbf{e}(n)$  e  $\mathbf{a}(n)$  são ajustados pelas Equações

$$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{e}(n) + \mu(n)\mathbf{A}\mathbf{a}(n) \quad (2.63)$$

e

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{A}^H \mathbf{e}(n+1) - \alpha(n)\mathbf{a}(n), \quad (2.64)$$

com

$$\alpha(n) \triangleq \frac{|\mathbf{A}^H \mathbf{e}(n+1)|^2}{|\mathbf{A}^H \mathbf{e}(n)|^2}, \quad (2.65)$$

em que a matriz  $\mathbf{A}$  corresponde à matriz de correlação  $\mathbf{R}$ .

Estes exemplos foram colocados para mostrar como esses sistemas de antenas podem, a partir de informações fornecidas pelos centros de controle dos sistemas de comunicações, usar métodos adaptativos para ajustar os lóbulos eletromagnéticos a serem irradiados. Novos algoritmos têm sido desenvolvidos com aplicações para TDMA e CDMA [11] e existe ainda uma ampla classe de algoritmos não-supervisionados que realizam as operações de ajuste sem seqüências de treinamento e se baseiam nas estatísticas do sinal recebido para ajustarem o vetor de processamento espacial.

## 2.5 Métodos Baseados em Auto-análise

Auto-análise, ou o que é também chamado de técnica de super-resolução, foi inicialmente proposta na estimação de ângulos de chegada, e, posteriormente passou a ser usada no cancelamento de interferências. O cancelador de super-resolução, que é baseado na estrutura da matriz de autocorrelação, tem propriedades únicas que o torna vantajoso em algumas aplicações. Por exemplo, um sinal de interferência intencional ou um sinal “quase amigável” poderia ser prejudicial mesmo tendo uma baixa potência. Nesse caso, o cancelador poderia ser mais útil se colocasse nulos mais profundos na direção do sinal indesejado ao invés de minimizar a soma combinada das interferências e potências do ruído de *background* como no caso dos canceladores convencionais.

Em um sistema de antenas adaptativas convencionais para cancelamento de interferência, é usual assumir que o arranjo é composto de elementos igualmente espaçados. Essa estrutura de arranjo, cujos elementos são assumidos idênticos, forma a conhecida estrutura de arranjo regular uniforme e é com base nessa estrutura regular que se pode avaliar a aplicação do método de auto-análise no cancelamento de sinais indesejados. Os métodos baseados na decomposição em subespaços serão estudados mais adiante junto com as propostas de aplicações.

## 2.6 Aplicações das Antenas Inteligentes

Serão considerados alguns benefícios da aplicação dessas antenas em sistemas como o IS-136, GSM TDMA e IS-95 CDMA. O sistema IS-136 tem 3 usuários por canal, com 162 símbolos por intervalo de tempo, usando uma modulação  $\pi/4$  DQPSK (*Differential Quaternary Phase Shift Keying*) a uma taxa de 48,6 kb/s. Um equalizador é usado para lidar com o espalhamento por atrasos acima de um tempo de símbolo. Uma seqüência de sincronização de 14 símbolos, que está presente em cada *slot* de tempo, é usada para o treinamento do equalizador, mas pode ser usada também para ajuste dos coeficientes associados à antena adaptativa [12]. Devido à rapidez do desvanecimento, o canal pode mudar severamente em um *slot* de tempo, sendo necessário o ajuste dos pesos em cada *slot*.

O sistema GSM, por outro lado, tem 8 usuários por canal com 156,25 bits por *slot* de tempo, usando uma modulação GMSK (*Gaussian Filtered Minimum Shift Keying*) a uma taxa de 270,833 kb/s. Devido à alta taxa de dados, o equalizador deve operar com atraso de decisão por vários símbolos, e desse modo essa estrutura é mais complicada que no IS-136. Entretanto, nas taxas de desvanecimento dos canais de rádio típicos, o canal não muda significativamente em um *slot* de tempo, de modo que o equalizador e o processador da antena adaptativa precisam reajustar os pesos somente uma vez por *frame* (uma seqüência de sincronização de 26 símbolos está presente em cada *slot* de tempo). No

GSM o processamento conjunto espacial-temporal é mais complexo devido a maior complexidade do equalizador [13].

O sistema IS-95 (CDMA) permite múltiplos usuários simultaneamente em cada canal de 1,25 MHz, com uma taxa original de 8 kb/s por usuário e um ganho de processamento igual a 128. Um receptor RAKE, que combina versões atrasadas do sinal CDMA, contorna os problemas com espalhamento por atrasos e fornece ganho de diversidade. No caso do CDMA, como já foi citado antes, os códigos de espalhamento podem servir de sinais de referência para o cálculo dos pesos das antenas adaptativas. Vale apenas citar que o IS-95 foi originalmente desenvolvido usando o codificador de voz (*vocoder*) IS-96A, com uma taxa de voz de 8,6 kbps. As taxas de processamento desse sistema original são chamadas de Conjunto de Taxas 1 (*Rate Set 1*) e foram mudadas posteriormente para um chamado Conjunto de Taxas 2 (*Rate Set 2*), para ficarem compatíveis com a taxa de voz de 13 kbps do novo *vocoder* CDG-13, desenvolvido pelo grupo de desenvolvimento CDG, hoje conhecido como *cdmaOne*. Uma prática comum no sistema IS-95 é incluir também o impacto da codificação convolucional no ganho de processamento. No conjunto de taxas original, que usa um codificador convolucional de razão 1/3 no enlace reverso, o ganho de processamento é igual a 128 [5]. Para o Conjunto de Taxas 2 é usado o codificador de razão 1/2 e nesse caso o ganho de processamento é aproximadamente 85. Neste texto, a menos que seja especificado o contrário, será considerado o ganho de processamento igual a 128 e os parâmetros referentes ao padrão original.

## 2.7 Múltiplo Acesso por Divisão no Espaço (SDMA): A Evolução das Antenas Inteligentes

O espaço é uma das últimas fronteiras quando se pensa nas próximas gerações de sistemas de comunicações sem fio. O aumento do nível de influência desses sistemas em nossas vidas diárias irá necessitar de significativa redução de custos e de considerável aumento de capacidade, benefícios que uma exploração apropriada da dimensão espacial pode oferecer. Essa é uma das razões para o significativo número de companhias que têm surgido para fornecer produtos baseados nessa idéia. A diversidade de técnicas varia daquelas baseadas em sistemas de lóbulos chaveados àquelas baseadas em sistemas completamente adaptativos.

No lado das técnicas adaptativas está a tecnologia SDMA. Essa tecnologia emprega arranjos de antenas e técnicas de processamento de sinais multi-dimensionais para prover significativo aumento de capacidade e qualidade de muitos sistemas de comunicações móveis. É uma tecnologia especialmente apropriada para os sistemas de comunicações que fornecem os denominados serviços de comunicações

peçoais. Arranjos de antenas associados a métodos adaptativos de processamento de sinais na estação radiobase aumentam o alcance de cobertura, a capacidade e a eficiência de entroncamento do sistema, permitindo o desenvolvimento de projetos com custos reduzidos usando células de moderadas a grandes dimensões.

Na maioria dos sistemas de telecomunicações atuais, um dos principais objetivos é vender o produto oferecido por preços razoáveis. O produto, nesse caso, é a transmissão de informações. De um ponto de vista técnico, a transmissão de informações requer recursos na forma de potência e largura espectral. Geralmente, taxas de transmissão elevadas necessitam de potência elevada ou de uma largura de faixa independente do meio. Enquanto a transmissão na parte cabeada dos enlaces pode ser feita independentemente para cada enlace, o mesmo não acontece na transmissão sem fio. Enquanto as fibras óticas, por exemplo, são excelentes no confinamento da maior parte da informação ou energia transmitida, em uma região pequena do espaço (o cabo ótico), a transmissão sem fios é bem menos eficiente. Transmissão confiável sobre distâncias relativamente curtas requer uma grande quantidade de energia transmitida, espalhada sobre uma grande região do espaço. Dessa energia transmitida, somente uma pequena porção é captada nas estruturas de recepção, a maior parte dessa energia é considerada interferência para outros usuários em potencial do sistema. É basicamente esse aspecto da ineficiência da comunicação sem fio que é levado em consideração pela tecnologia SDMA.

Como o nome indica, a tecnologia SDMA explora a informação coletada na dimensão espacial, em adição à dimensão temporal, para fornecer significativo aumento de desempenho na transmissão sem fio. Várias técnicas para explorar a dimensão espacial têm sido desenvolvidas, incluindo sistemas setorizados mais refinados e microcélulas. Como a eficiência de entroncamento tem sido um assunto bastante discutido, uma atenção especial tem sido dada ultimamente a técnicas mais avançadas, desde o chaveamento de lóbulos irradiados a métodos totalmente adaptativos.

### **2.7.1 Métodos baseados em diversidade**

Uma das primeiras tentativas de tratar as dificuldades impostas pelo canal de comunicações móveis foi por meio de duas antenas idênticas separadas por vários comprimentos de onda, cada uma equipada com receptores convencionais. A idéia básica por trás de tal projeto é que, em meios de propagação complexos, existe espalhamento suficiente das ondas eletromagnéticas irradiadas para praticamente descorrelacionar os sinais captados por antenas suficientemente afastadas. A importância disso é que a probabilidade de que os sinais captados em ambas as antenas se torne extremamente fraco, ao mesmo tempo, é muito pequena e a seleção do sinal mais forte sempre irá aumentar a qualidade da recepção. Apesar dessas técnicas ainda estarem em uso, elas não aumentam o alcance ou a capacidade dos sis-

temas de comunicação, fazem apenas uso do espalhamento presente no meio de transmissão para tratar o efeito do desvanecimento no enlace reverso.

### 2.7.2 Métodos baseados no chaveamento dos lóbulos irradiados

Como uma extensão do conceito de microcélulas, a tecnologia de chaveamento de lóbulos irradiados tem sido estudada como uma possível solução para as necessidades de aumento de alcance e capacidade. O projeto de sistemas baseados nessa tecnologia envolve o uso de arranjos de antenas com alto ganho, lóbulo principal estreito no ponto de queda de 3 dBs, equipamentos de *hardware* para o processamento dos sinais digitais e/ou de rádio frequência e *softwares* para selecionar qual o lóbulo ou setor do espaço deve ser usado na comunicação com cada usuário. Para contornar os problemas relacionados à eficiência de entroncamento de pequenas células, um conjunto de recursos de rádio tem sido estudado pelos propositores dessa tecnologia. Adicionalmente, muitos dos tópicos relacionados aos canais de acesso e controle necessitam de atenção especial, bem como as mudanças necessárias no enlace direto. Enquanto as primeiras soluções para tratar tais problemas datam de 1970, quando sistemas setorizados em seis regiões geográficas de mesma área foram desenvolvidos, os novos métodos de processamento digital de sinais podem fornecer soluções para os desafios enfrentados pelos lóbulos irradiados nos ambientes com características variantes no tempo.

### 2.7.3 Métodos baseados no uso de antenas inteligentes

No outro extremo da gama tecnológica está a tecnologia SDMA. Essa tecnologia emprega arranjos de antenas, componentes de *hardware* digital e de rádio frequência e métodos de processamento multidimensional para fornecer aumento de capacidade e de desempenho em muitos sistemas de comunicações. É uma tecnologia especialmente apropriada para os sistemas celulares atuais e para os sistemas da próxima geração, conhecidos também como Redes de Comunicações Pessoais (PCN), Serviços de Comunicações Pessoais (PCS) e Enlaces Locais sem Fio (WLL).

Os arranjos de antenas, associados com as técnicas de processamento digital de sinais, permitem o desenvolvimento de projetos com custos reduzidos, além dos outros benefícios mencionados anteriormente. Em adição a esses benefícios imediatos, a flexibilidade dessa tecnologia também permite a criação de novos serviços de valor agregado, que podem fornecer uma significativa vantagem competitiva para as operadoras que oferecem o serviço. A SDMA não é restrita a qualquer formato particular de modulação ou protocolo de interface aérea e é compatível com a maioria dos formatos atuais de interfaces.

Além dos arranjos e métodos de processamento de sinal, também são usados algoritmos para fazer

o uso eficiente dos recursos do sistema (algoritmos de alocação de canal). A Figura 2.26 mostra um diagrama ilustrando um sistema de antenas inteligentes típico, usando o processador © IntelliCell da ArrayComm, Inc.

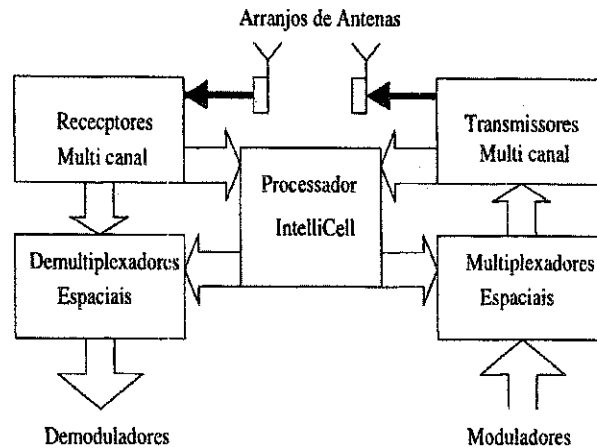


Figura 2.26: Diagrama de um sistema típico de antenas inteligentes.

## 2.7.4 Modelo matemático fundamental

Apesar dos detalhes relacionados aos algoritmos por trás dessa tecnologia estarem além do propósito desse texto, uma breve descrição do modelo dos dados e suas implicações pode ajudar na apreciação da nova tecnologia e de seus benefícios. A idéia fundamental é que, usando arranjos de antenas com técnicas de estimação de parâmetros e processamento de sinais, não somente contribuições para contornar os impactos do canal de transmissão podem ser obtidas, como também estratégias para recepção e transmissão de sinais no mesmo canal podem ser desenvolvidas.

Por questões de simplicidade, considere um arranjo linear uniforme formado por  $N$  elementos de antena isotrópica, com espaçamento entre elementos igual a  $d$ . O ângulo de chegada de uma onda plana, em relação ao eixo do arranjo, é denotado por  $\phi$ . Considere também que os sinais transmitidos satisfazem a condição de faixa estreita, ou seja, o inverso da faixa de coerência dos sinais transmitidos é muito menor que o intervalo de tempo necessário para uma frente de onda se propagar ao longo do arranjo. Desse modo, denotando o  $i$ -ésimo componente complexo do sinal em banda base  $s_i(t)$ , com ângulo de chegada  $\phi_i$ , a saída complexa em banda base do arranjo,  $y(t)$ , pode ser escrita como

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a(\phi_i) s_i(t) + \eta(t), \quad (2.66)$$

em que

$$a(\phi) = [e^{jkd \cos(\phi)} \dots e^{j(i-1)kd \cos(\phi)}]^T \quad (2.67)$$

e  $\eta(t)$  representa o ruído branco de média nula. A variável  $y(t)$  ainda pode ser escrita como

$$y(t) = \mathbf{A}s(t) + \eta(t) \quad \mathbf{A} = [ \mathbf{a}(\phi_1) \quad \mathbf{a}(\phi_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\phi_N) ]. \quad (2.68)$$

Quando a matriz  $\mathbf{A}$  é de *rank* completo, ambos os ângulos de chegada e os sinais  $s_i(t)$  podem ser estimados a partir de  $y(t)$ . Devido ao fato dos ângulos de chegada  $\phi_i$  também serem dependentes do tempo,  $y(t)$  é geralmente processado à parte, para produzir estimativas periódicas dos ângulos de chegada que servem de entrada para os algoritmos de rastreamento dos usuários. Apesar desse exemplo simples ter considerado uma estrutura de arranjo linear, a SDMA não se restringe a tal estrutura e estruturas de arranjos mais complexas podem ser empregadas. Enquanto a regularidade das estruturas de arranjos lineares leva a simplificações nos algoritmos, configurações mais complexas levam a algoritmos mais complicados e a maiores requisitos computacionais. Independente da estrutura do arranjo, é importante que o modelo matemático dos dados tenha forma geométrica simples que permita o uso de técnicas apropriadas de processamento não-linear.

### 2.7.5 Princípio de funcionamento da SDMA

A tecnologia SDMA é um novo método de múltiplo acesso por meio do qual a capacidade dos sistemas de comunicações móveis existentes pode aumentar de forma econômica e eficiente. Baseado na tecnologia de arranjos adaptativos de antenas, a dimensão espacial do sistema existente passa a ser explorada por meio da formação de feixes eletromagnéticos independentes em cada um dos canais originais. Esse aumento de capacidade pode ser alcançado se a energia eletromagnética, em vez de ser transmitida e recebida omnidirecionalmente, for direcionada individualmente para os usuários do sistema. Essa operação de direcionamento é feita na estação radiobase por meio de algoritmos adaptativos de controle e permite rastrear os usuários móveis ao longo da área de alcance da antena. Dessa forma, um mesmo canal de rádio pode ser compartilhado por múltiplos usuários se os feixes irradiados puderem ser formados com a restrição de haver minimização da relação (potência da portadora)-(potência da interferência) ( $C/I$ ) para cada um dos usuários.

Os requisitos da relação ( $C/I$ ) podem ser traduzidos em duas condições. A primeira é que os usuários que compartilham o mesmo canal de rádio concomitantemente devem estar localizados em posições angulares diferentes, vistos pela estação radiobase. A segunda restrição é que, sob condições reais, os arranjos de antenas usados na implementação SDMA só possam atenuar os sinais de usuários, dentro do mesmo canal e da mesma célula, e que estejam acima de um determinado nível de potência. As diferentes regiões do espaço cobertas pelos feixes irradiados pelas antenas podem ser servidas pela mesma faixa de frequência, no caso de se usar sistemas como o TDMA ou CDMA, ou ainda podem ser servidas por faixas diferentes de frequência, no caso do FDMA.

A SDMA permite que os usuários compartilhem o meio de transmissão por meio de seu posicionamento espacial. Todos os usuários do sistema devem ter informações em tempo real de sua posição espacial e a área geográfica na qual estão localizados é dividida em áreas menores nas quais existe um mapeamento entre as divisões no espaço e as divisões na largura de faixa disponível. No caso das redes temporárias, formadas por veículos, por exemplo, há a necessidade de um acurado sistema de posicionamento dos veículos. Erros de posicionamento podem fazer com que um usuário tente acessar a faixa espectral destinada a um outro usuário. Atualmente, o sistema de posicionamento global (GPS) é o mais usado por oferecer uma boa precisão. Essa precisão depende do ambiente em torno do veículo e das condições climáticas. Em áreas urbanas, os receptores GPS têm seu desempenho comprometido pelo efeito da propagação por múltiplos percursos.

Adicionalmente aos problemas de posicionamento, os efeitos da propagação por múltiplos percursos dão surgimento a uma demanda por controle dinâmico da potência transmitida por cada unidade móvel no enlace reverso, para prevenir que qualquer usuário particular eleve o nível de interferência para os outros usuários. Como a potência de transmissão de cada usuário é limitada pelo consumo da bateria de sua unidade móvel, é necessário um limite na intensidade do controle de potência aplicado ao enlace reverso. Se a antena da estação radiobase for projetada para filtrar espacialmente o sinal de cada usuário desejado, de forma a maximizar a sua potência recebida, então o enlace reverso de cada usuário é melhorado com a diminuição da interferência. Dessa forma, antenas adaptativas na estação radiobase diminuem alguns dos principais problemas do enlace reverso.

Na técnica SDMA, todos os usuários do sistema podem estar aptos a se comunicar simultaneamente, usando o mesmo canal de tráfego. Em adição, um sistema de antenas adaptativas bem projetado, deve ser capaz de rastrear componentes individuais de multipercurso e combiná-los de forma otimizada para maximizar a potência recebida de cada usuário. No caso ideal, antenas adaptativas com feixe principal de largura infinitesimal e capacidade de rastreamento infinita implementariam uma técnica SDMA ideal, provendo um canal de transmissão sem interferência alguma. Na prática, entretanto, antenas com essas características ideais não são realizáveis, mas estruturas com diretividade moderada podem ser projetadas. Dessa forma, um dos fatores limitantes do desempenho dessa técnica é a qualidade de projeto das antenas.

## **2.8 Considerações em Relação ao Custo das Antenas Inteligentes**

Apesar dos benefícios das antenas inteligentes serem muitos, existem também as desvantagens e custos que devem ser avaliados em relação aos ganhos.



- Complexidade do transceptor - Os transceptores das estações radiobase que usam antenas adaptativas são mais complexos que os transceptores das estações convencionais e a antena necessita de uma acurada calibração, feita em tempo real, para cada um dos seus elementos. Além do mais, o controle do diagrama de irradiação é um processo computacionalmente intensivo, no caso de serem usadas antenas adaptativas, e exige em todas as estações radiobase o uso de poderosos processadores numéricos.
- Gerenciamento de Recursos - Embora essas antenas sejam usadas para controle de enlaces de rádio, o seu uso implica na demanda por novas funções na rede, como funções de gerenciamento de recursos e de mobilidade. Quando uma nova conexão está para ser estabelecida ou transferida para uma outra estação radiobase, a nova estação deve ter informação angular para encontrar a unidade móvel. Isso pode ser feito deixando a estação radiobase varrer a célula continuamente à procura de novas conexões para *handover* ou por meio de uma sistema de posicionamento externo como o GPS. Uma outra possibilidade é fazer com que a rede use informação direcional da célula atual para fazer uma estimativa adequada da nova célula para a qual o *handover* deve ser realizado.
- Tamanho físico - Um outro fator que deve também ser levado em consideração é o tamanho das antenas, já que tipicamente são necessários vários elementos na antena para se obter um ganho razoável. Tipicamente, têm sido usadas antenas com um número de 6 a 10 elementos para ambientes externos. O espaçamento entre elementos da antena varia de 0,4 a 0,5 comprimentos de onda, significando que uma antena de 8 elementos teria aproximadamente 1,2 m de largura em uma frequência de 900 MHz e 60 cm em 2 GHz.

## 2.9 Revisão Bibliográfica

Embora o conceito de antenas inteligentes seja recente, a teoria por trás das configurações em arranjo é bem mais antiga. O que há de novo é a aplicação de novos métodos de processamento de sinais que permitem o desenvolvimento de soluções que seriam impraticáveis sem os atuais processadores numéricos e sem o atual nível de desenvolvimento dos dispositivos de estado sólido.

As primeiras contribuições significativas para o projeto de estruturas em arranjo foram dadas por W. W. Hansen e J. R. Woodyard em seu artigo clássico publicado no jornal *IRE Procs.* em março de 1938 [14]. Nesse artigo são estabelecidas, por exemplo, as condições para que um arranjo tenha ganho máximo nas direções  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$ . Essas condições ficaram conhecidas como condições de Hansen-Woodyard e os arranjos projetados com essa característica são chamados de *end-fire arrays*.

Mais tarde, em 1943, S. A. Schelkunoff publicou *Uma Teoria Matemática dos Arranjos Lineares* pelo *Bell System Journal* [15]. Nesse trabalho, Schelkunoff propôs analisar a expressão matemática do fator de arranjo como um polinômio no plano complexo e a partir dessa expressão fazer o posicionamento dos pontos de nulo do diagrama de irradiação.

Três anos mais tarde, em 1946, C. L. Dolph publicou um trabalho no *Procs. IRE and Waves* propondo uma distribuição de corrente que otimizasse a relação entre largura do lóbulo principal e o nível dos lóbulos secundários em arranjos lineares tipo *broadside*. Nesse método, a amplitude da distribuição de corrente de cada elemento do arranjo é obtida a partir da expansão do polinômio de Tschebyscheff e os arranjos assim projetados ficaram conhecidos como arranjos de Dolph-Tschebyscheff [16].

Uma outra forma de projeto semelhante, foi patenteada nos Estados Unidos por J. S. Stone e ficou conhecida como Método da Expansão Binomial, em que as amplitudes das correntes de excitação dos elementos do arranjo correspondem aos coeficientes da expansão de um binômio elevado a  $m$ . Seguindo essa linha de desenvolvimento, foi publicado em 1972 um artigo intitulado *Propriedades de Radiação do Arranjo Binomial* [17].

Dando continuidade ao trabalho de Dolph, foram publicados, respectivamente em 1952 e 1953, dois trabalhos no jornal *Procs. IRE* mostrando métodos para o cálculo dos coeficientes de excitação e da largura de faixa dos arranjos calculados por expansão polinomial [6] [18] e em 1968 C. J. Drane publicou um interessante trabalho mostrando o cálculo aproximado de parâmetros como diretividade e largura de feixe para grandes estruturas excitadas pelo método de Dolph [19]. Dois anos depois, em julho de 1970, foi publicado no jornal *Radio Science* uma contribuição para o projeto de arranjos planares. O artigo de B. J. Forman [20] trazia uma expressão matemática para o cálculo da diretividade de arranjos planares.

Ainda na década de 60, começaram a surgir outros trabalhos relacionando a transformada  $Z$  ao projeto de arranjos lineares. Impulsionados pelo trabalho de Schelkunoff surgiram interessantes trabalhos consolidando a transformada  $Z$  como ferramenta de projeto, como por exemplo em [21]. Já no começo da década de 70, 1971, surge o trabalho de Dennis J. Gausshell propondo a síntese de arranjos lineares por meio da transformada  $Z$  [22].

No ano seguinte surge um outro interessante trabalho intitulado *Comparison Between the Peak Sidelobe of Random Array and Algorithmically Designed Aperiodic Arrays* [23]. Para o tipo de arranjo analisado, já conhecido à época como *Thinned Array*, foi proposta uma análise do comportamento médio da estrutura assumindo que excitação de alguns dos elementos pudesse ser simplesmente ligada ou desligada de forma aleatória. Esse tipo de configuração voltou a ser avaliada mais tarde em 1997 em [24], sem no entanto ter sido proposto um tratamento matemático.

Nas décadas seguintes, soluções já existentes foram rerepresentadas para o mesmo problema. Co-

meçaram a ser publicados artigos propondo o uso de algoritmos adaptativos como os clássicos LMS, RLS e suas versões melhoradas para a conformação do diagrama de irradiação *beamforming*. Sintetizando todas as publicações anteriores foi publicado em 1997 o artigo de cinquenta e duas páginas de Godara [3]. Nesse extenso tutorial, pode-se encontrar uma apresentação unificada de diversos algoritmos e métodos usados para *beamforming*, estimação de ângulos de chegada e número de fontes, além de uma valiosa referência bibliográfica com mais de quinhentas referências.

Ainda no ano de 1997 é proposto por Keen-Keong Yan e Yilong Lu o uso de algoritmos genéticos (GAS) para a redução de lóbulos laterais em diagramas de irradiação de estruturas lineares [25]. Nos anos seguintes, 1998 e 1999, são propostas aplicações dos GAS para correção de falhas nos elementos do arranjo e como forma de reorganizar os elementos em sub-arranjos [26], [27]. No ano 2000, a décima sétima conferência de ciências do rádio, realizada no Egito, trouxe um artigo propondo o uso de redes neurais com funções de base radiais no projeto de arranjos controlados por fase. O uso de redes neurais nesse contexto foi pioneiramente apresentado um ano antes em um simpósio do IEEE [28], [29].

Tão importantes quanto as contribuições dadas no sentido de consolidar e desenvolver a teoria relacionada ao projeto de arranjos, foram as propostas de aplicações dessa teoria. Além do tutorial de Godara [3], que traz um considerável apanhado de referências nas quais são apresentadas diferentes aplicações, o tutorial [4] também traz uma descrição unificada de vários algoritmos e uma extensa referência bibliográfica.

## 2.10 Conclusão

Neste capítulo foi feita uma revisão teórica às antenas inteligentes, bem como analisado seu crescente potencial de aplicação nos sistemas de comunicações modernos. Inicialmente foram mostradas algumas configurações de arranjos usuais e foi visto como diferentes conjuntos de parâmetros fornecem diferentes diagramas de irradiação. Foram vistos também os vários benefícios que essas antenas podem trazer, como aumento de capacidade do sistema, aumento de área de cobertura e a diminuição da interferência causada por outros usuários. Adicionalmente, foram apresentados alguns algoritmos adaptativos que podem ser usados no ajuste dos coeficientes de excitação dos elementos, aspectos da tecnologia SDMA e uma resumida revisão bibliográfica.

## Capítulo 3

# Análise de Arranjos com Parâmetros Aleatórios

### 3.1 Introdução

Já bastante consolidada, a teoria de arranjos de antenas tem dado aos pesquisadores a oportunidade de estudar sua aplicação em conjunto com os métodos mais recentes de processamento de sinais, com o objetivo de obter diagramas de irradiação controláveis de acordo com informações trocadas entre os usuários de um determinado sistema de comunicações e a estação radiobase. Para tanto, o processamento numérico realizado na estação radiobase precisa ser rápido e eficiente. Desse modo, são necessários bons algoritmos para que, com base nas estimativas de direção de chegada e no número de fontes de chegada, os feixes irradiados pelo arranjo possam ser direcionados para um ponto desejado, em resposta às necessidades de um determinado usuário. Um apanhado geral dos métodos mais recentes e mais usados para estimação de ângulo de chegada pode ser encontrado na referência [4].

Depois que o número de sinais que chegam ao arranjo, juntamente com sua direção de chegada, são estimados, são usados métodos numéricos que dêem a melhor forma possível ao feixe irradiado. O objetivo desse modelamento é evitar a perda de potência irradiada em lóbulos secundários, melhorar a eficiência da antena e aumentar a diretividade. Uma maneira de controlar esse diagrama de irradiação é ajustando parâmetros tais como espaçamento entre os elementos do arranjo, a amplitude dos coeficientes de excitação e a direção de varredura do arranjo. Na literatura, por exemplo, são propostos diferentes métodos para obtenção desses coeficientes, como o método baseado na utilização dos coeficiente do polinômio de Dolph-Tschebyscheff e o método baseado nos coeficientes obtidos a partir da distribuição binomial [1].

O estudo apresentado neste capítulo é feito considerando que as observações do campo irradiado

pela antena sejam feitas em pontos distantes do arranjo e que esses coeficientes sejam dispostos simetricamente ao longo da origem do eixo do arranjo, como mostrado nas Figuras 2.8(a) e 2.8(b).

## 3.2 Fundamentação Teórica

A idéia por trás do estudo de parâmetros aleatórios no projeto de arranjos lineares, surgiu de forma intuitiva, a partir da observação da densidade espectral de potência (DSP) de alguns processos estocásticos, como os que surgem do estudo de alguns esquemas de códigos digitais de linha e de modulação digital [44]. Nesses processos, a DSP resultante tem uma grande similaridade com os diagramas de irradiação, traçados em coordenadas cartesianas, dos arranjos estudados. Por meio do ajuste de alguns parâmetros, é possível controlar a forma da DSP desses esquemas de modulação para melhor adequar o sinal transmitido ao meio de transmissão. De forma similar, pode-se ajustar alguns parâmetros dos arranjos de modo a controlar os feixes irradiados.

É analisada a seguir a viabilidade de três configurações de arranjo linear, considerando a forma do diagrama irradiação, de acordo com os valores dos coeficientes de excitação e a disposição dos elementos no eixo do arranjo. Será considerado primeiro um arranjo com um número par  $N = 2M$  de elementos isotrópicos posicionados simetricamente ao longo da origem do eixo  $z$ , como mostrado na Figura 2.8.

Considerando o espaçamento entre os elementos do arranjo constante, que a amplitude dos coeficientes de excitação é simetricamente distribuída ao longo da origem do eixo do arranjo e que as observações do campo irradiado são feitas em um ponto distante do arranjo, pode-se reescrever a expressão matemática para o fator de arranjo com um número par de elementos como

$$AF_{2M}(\theta) = a_1 e^{j\frac{kd}{2}\cos(\theta)} + a_2 e^{j\frac{3kd}{2}\cos(\theta)} + \dots + a_n e^{j\frac{(2M-1)kd}{2}\cos(\theta)} + a_1 e^{-j\frac{kd}{2}\cos(\theta)} + a_2 e^{-j\frac{3kd}{2}\cos(\theta)} + \dots + a_n e^{-j\frac{(2M-1)kd}{2}\cos(\theta)}, \quad (3.1)$$

que também pode ser escrito em uma forma normalizada como

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \left( \frac{2n-1}{2} \right) kd \cos(\theta) \right], \quad (3.2)$$

em que  $a_n$  são os coeficientes de excitação do arranjo,  $k$  é o número de onda,  $k = 2\pi/\lambda$ , e  $d$  é a distância entre os elementos do arranjo.

Se o número de elementos isotrópicos do arranjo for ímpar,  $N = 2M + 1$ , como mostrado na Figura 2.8(b), então o fator de arranjo é escrito como

$$AF_{2M+1}(\theta) = 2a_1 + a_2 e^{jkd\cos(\theta)} + a_3 e^{j2kd\cos(\theta)} + \dots + a_{M+1} e^{j2Mkd\cos(\theta)} + a_2 e^{-jkd\cos(\theta)} + a_3 e^{-j2kd\cos(\theta)} + \dots + a_n e^{-j2Mkd\cos(\theta)}, \quad (3.3)$$

ou em uma forma normalizada

$$AF_{2M+1}(\theta) = \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos[(n-1)kd \cos(\theta)]. \quad (3.4)$$

Só para lembrar, visto que esse assunto já foi tratado no Capítulo 2, as duas formas mais usadas para obtenção dos coeficientes de excitação são por meio da extração dos coeficientes da expansão binomial de uma função do tipo  $f(x) = (1+x)^{m-1}$  e por meio da utilização dos coeficientes do polinômio de Dolph-Tschebyscheff. No primeiro caso, os coeficientes positivos da expansão binomial para diferentes valores de  $m$  formam o conhecido triângulo de Pascal, e, se os valores de  $m$  são usados para representar o número de elementos do arranjo, então os coeficientes da expansão representam as amplitude relativas dos elementos. No segundo caso, considerando  $kd \cos(\theta) = u$ , os termos  $\cos(\theta)$  nas Equações 3.2 e 3.4 podem ser expandidos em série de co-senos com um único argumento igual a  $u$ . Assim, tem-se por exemplo, para  $m = 9$  que

$$\cos(mu) = 256 \cos(u)^9 - 576 \cos(u)^7 + 432 \cos(u)^5 - 120 \cos(u)^3 + 9 \cos(u), \quad (3.5)$$

forma um polinômio de Dolph-Tschebyscheff de ordem 9, que pode ainda ser reescrito como

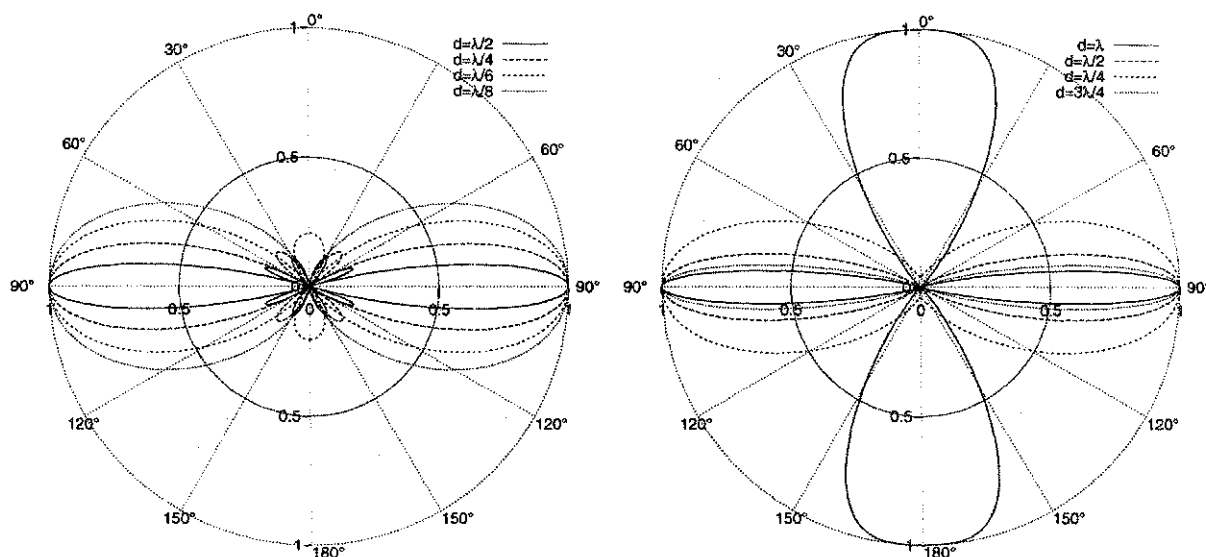
$$T_9(z) = 256z^9 - 576z^7 + 432z^5 - 120z^3 + 9z, \quad \text{em que } z = \cos(u). \quad (3.6)$$

Neste capítulo, em vez de usar uma forma determinística para encontrar os coeficientes de excitação, seus valores são assumidos como variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo  $[a_l; a_r]$ , em que  $a_l$  e  $a_r$  são respectivamente, o menor e o maior valor assumidos pelos coeficientes de excitação. A notação  $a_n \sim U[a_l; a_r]$  indica que a variável aleatória  $a_n$  é uniformemente distribuída no intervalo  $[a_l; a_r]$ .

Quando se trata de coeficientes de excitação aleatórios, é interessante trabalhar com um fator de arranjo médio e, nesse caso, sua expressão matemática é obtida tomando o valor esperado da expressão do fator de arranjo, que nesse contexto passa a ser uma variável aleatória, ou seja

$$\begin{aligned} E[AF_{2M}(\theta)] &= E \left[ \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{2n-1}{2} kd \cos(\theta) \right] \right] \\ &= \sum_{n=1}^M E[a_n] \cos \left[ \frac{2n-1}{2} kd \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{(a_l + a_r)}{2} \sum_{n=1}^M \cos \left[ \frac{2n-1}{2} kd \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{(a_l + a_r)}{4} \frac{\text{sen}(M kd \cos(\theta))}{\text{sen}(\frac{kd}{2} \cos(\theta))}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na Figura 3.1(a) é mostrado o diagrama de irradiação normalizado do fator de arranjo obtido na Equação 3.7, enquanto na Figura 3.1(b) é mostrado o diagrama de irradiação obtido pelo método de expansão binomial. Percebe-se por estas figuras que o método proposto apresenta diagrama similar ao método de expansão binomial, com a vantagem de não apresentar grandes variações na amplitude dos coeficientes de excitação dos elementos do arranjo. Isso faz com que a eficiência da antena aumente e ela tenha maior utilidade prática.



(a) Arranjo com 8 elementos distribuídos ao longo da origem do eixo  $z$ , com amplitude dos coeficientes de excitação uniformemente distribuída no intervalo  $[8; 16]$  e espaçamento  $d$  entre os elementos igual a  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ,  $\lambda/6$  e  $\lambda/8$ .

(b) Arranjo com 11 elementos distribuídos ao longo da origem do eixo do arranjo, com amplitude dos coeficientes de excitação dada pela expansão binomial e com distância  $d$  entre os elementos iguais a  $\lambda$ ,  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$  e  $3\lambda/4$ .

Figura 3.1: Diagrama de irradiação normalizado no plano  $y - z$ , ou plano de elevação, de uma arranjo linear com elementos uniformemente espaçado ao longo do eixo  $z$ .

Em adição à aleatoriedade dos coeficientes de excitação, a distância entre os elementos do arranjo também pode ter comportamento similar. Nesse caso, poder-se-ia usar um modelo probabilístico para a distância entre os elementos, para controlar a forma do diagrama de irradiação. Assumindo que a distância  $d$  é uniformemente distribuída no intervalo  $[d_r; d_l]$ , o fator de arranjo médio é obtido tomando-

se o valor esperado do fator de arranjo, ou seja

$$\begin{aligned}
E[AF_{2M}(\theta)] &= E\left[\sum_{n=1}^M a_n \cos\left[\frac{2n-1}{2}kd_n \cos(\theta)\right]\right] \\
&= \sum_{n=1}^M a_n E\left[\cos\left[\frac{(2n-1)}{2}kd_n \cos(\theta)\right]\right] \\
&= \sum_{n=1}^M a_n \int_{d_l}^{d_r} \cos\left(\frac{(2n-1)}{2}k \cos(\theta)d_n\right) p(d_n) d_{d_n} \\
&= \frac{1}{d_r - d_l} \sum_{n=1}^M a_n \left(d_r \frac{\text{sen}\left(\frac{(2n-1)}{2}k \cos(\theta)d_r\right)}{\frac{(2n-1)}{2}k \cos(\theta)d_r} - d_l \frac{\text{sen}\left(\frac{(2n-1)}{2}k \cos(\theta)d_l\right)}{\frac{(2n-1)}{2}k \cos(\theta)d_l}\right) \\
&= \frac{1}{d_r - d_l} \sum_{n=1}^M a_n (d_r \text{Sa}((2n-1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n-1)u_l)), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

em que  $u_r = \frac{k}{2} \cos(\theta)d_r$ ,  $u_l = \frac{k}{2} \cos(\theta)d_l$  e  $\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ .<sup>1</sup>

Percebe-se pela Equação 3.8, que os coeficientes  $a_n$  ficam livres para receber valores atribuídos por meio de qualquer método. Poder-se-ia então usar os coeficientes da expansão do polinômio de Dolph-Tschebyscheff para a obtenção do fator de arranjo e nesse caso ter-se-ia o diagrama de irradiação mostrado na Figura 3.2. A distribuição binomial não é usada por causa da desvatagem já citada.

Como pode ser visto na Figura 3.2, é possível ter um bom controle do diagrama de irradiação apenas controlando o espaçamento entre os elementos do arranjo. No caso de usar o polinômio de Tschebyscheff, tem-se total eliminação dos lóbulos laterais quando  $d \sim U[0, 25; 0, 45]\lambda$  e um curioso comportamento quando  $d \sim U[0, 00; 0, 50]\lambda$ . Pode-se concluir, portanto, que a variação aleatória do espaçamento entre os elementos suaviza o diagrama de irradiação. Apesar de intervalos como  $d \sim U[0, 00; 0, 50]\lambda$ , nos quais a extremidade esquerda é nula, fornecerem diagramas de irradiação razoáveis, devem ser evitados nos projetos. Posteriormente, no Apêndice A, será mostrado que tal situação seria inconcebível na prática se o acoplamento mútuo for considerado.

O terceiro caso a ser considerado é aquele em que tanto a amplitude dos coeficientes de excitação quanto a distância entre os elementos é aleatória, ou seja  $a \sim U[a_l; a_r]$  e  $d \sim U[d_l; d_r]$  respectivamente. Nesse caso, o fator de arranjo médio pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
E[AF_{2M}(\theta)] &= E\left[\sum_{n=1}^M a_n \cos\left[\frac{(2n-1)}{2}kd_n \cos(\theta)\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^M \cos\left[\frac{(2n-1)}{2}kd_n \cos(\theta)\right]\right) p(a_n, d_n) d_{a_n} d_{d_n}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sa(x) também é denotada por sinc(x) na literatura. Alguns autores definem  $\text{Sa}(x) = \text{sen}(\pi x)/(\pi x)$



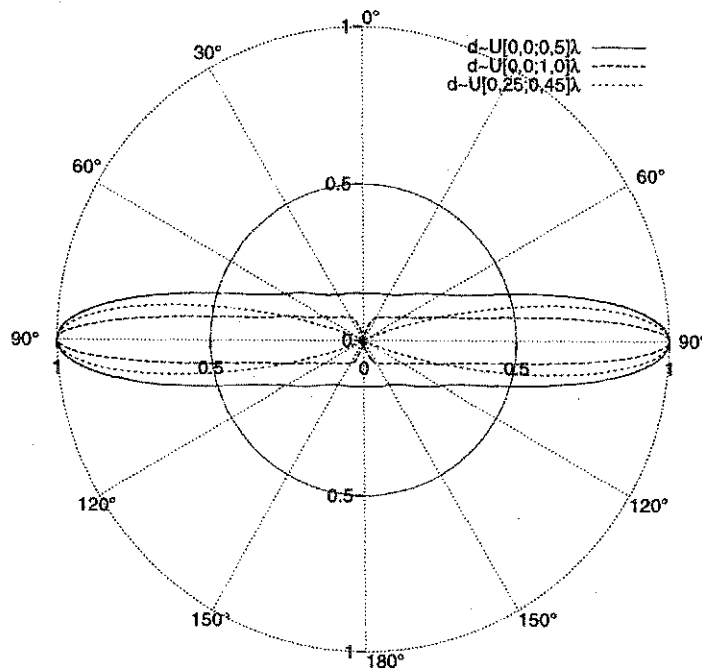


Figura 3.2: Diagrama de irradiação médio, no plano  $y - z$ , de um arranjo linear com 10 elementos distribuídos ao longo do eixo  $z$ , com amplitude dos coeficientes de excitação dados pelo polinômio de Tschebyscheff e espaçamento  $d$  entre os elementos uniforme em  $[0, 25; 0, 45]\lambda$ ,  $[0, 00; 1, 00]\lambda$  e  $[0, 0; 0, 50]\lambda$ .

Considerando que  $a_n$  e  $d_n$  sejam variáveis aleatórias independentes, tem-se que

$$p(a_n, d_n) = p(a_n)p(d_n) = \begin{cases} \frac{1}{(a_r - a_l)(d_r - d_l)}, & \text{se } a_l < a_n < a_r \text{ e } d_l < d_n < d_r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.10)$$

e portanto

$$\begin{aligned} E[AF_{2M}(\theta)] &= \frac{1}{(a_r - a_l)(d_r - d_l)} \int_{d_l}^{d_r} \int_{a_l}^{a_r} \left( \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} k d_n \cos(\theta) \right] \right) d a_n d d_n \\ &= \frac{(a_r + a_l)}{2(d_r - d_l)} \sum_{n=1}^M \int_{d_l}^{d_r} \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} k d_n \cos(\theta) \right] d d_n \\ &= \frac{(a_r + a_l)}{2(d_r - d_l)} \sum_{n=1}^M \left[ d_r \text{Sa} \left( \frac{(2n-1)}{2} k d_r \cos(\theta) \right) - \right. \\ &\quad \left. d_l \text{Sa} \left( \frac{(2n-1)}{2} k d_l \cos(\theta) \right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo  $u_r = \frac{k d_r \cos(\theta)}{2}$  e  $u_l = \frac{k d_l \cos(\theta)}{2}$  tem-se

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \frac{(a_r + a_l)}{2(d_r - d_l)} \sum_{n=1}^M [d_r \text{Sa}((2n-1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n-1)u_l)]. \quad (3.11)$$

Os dois somatórios em 3.11 ainda podem ser representados por integrais indefinidas da seguinte forma

$$\frac{2}{u_r} \sum_{n=1}^M \frac{\text{sen}(2n-1)u_r}{(2n-1)} = \frac{1}{u_r} \int \frac{\text{sen}2Mu_r}{\text{sen}(u_r)} du_r \quad (3.12)$$

e

$$\frac{2}{u_l} \sum_{n=1}^M \frac{\text{sen}(2n-1)u_l}{(2n-1)} = \frac{1}{u_l} \int \frac{\text{sen}2Mu_l}{\text{sen}(u_l)} du_l, \quad (3.13)$$

de modo que  $E[AF_{2M}(\theta)]$  pode ser escrito na forma integral

$$E[AF_{2M}] = \frac{(a_r + a_l)}{4(d_r - d_l)} \left( \frac{d_r}{u_r} \int \frac{\text{sen}(2Mu_r)}{\text{sen}(u_r)} du_r - \frac{d_l}{u_l} \int \frac{\text{sen}(2Mu_l)}{\text{sen}(u_l)} du_l \right). \quad (3.14)$$

Quando os parâmetros  $d_n$  e  $a_n$  são distribuídos em um intervalo apropriado, os diagramas de irradiação médio, em coordenadas cartesianas, são similares aos ilustrados na Figura 3.3.

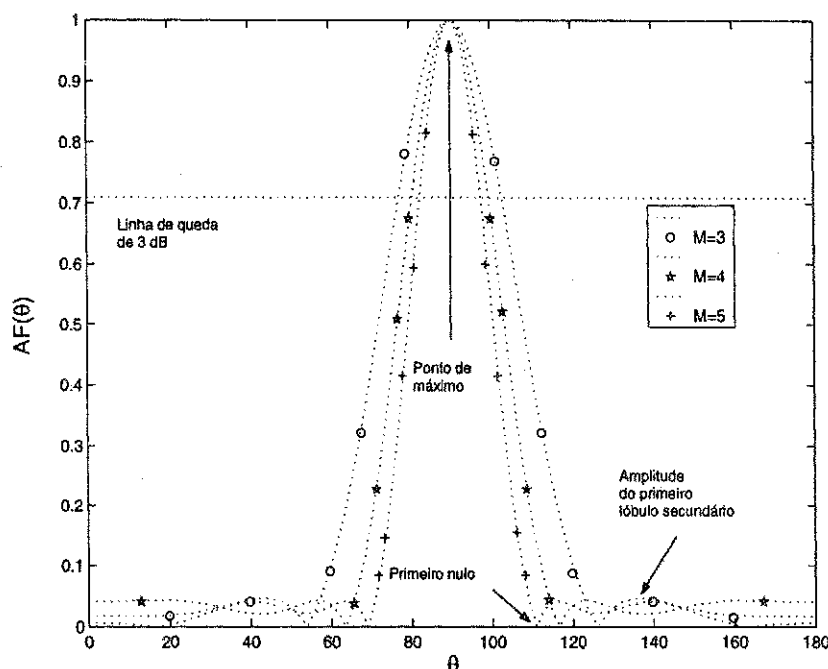
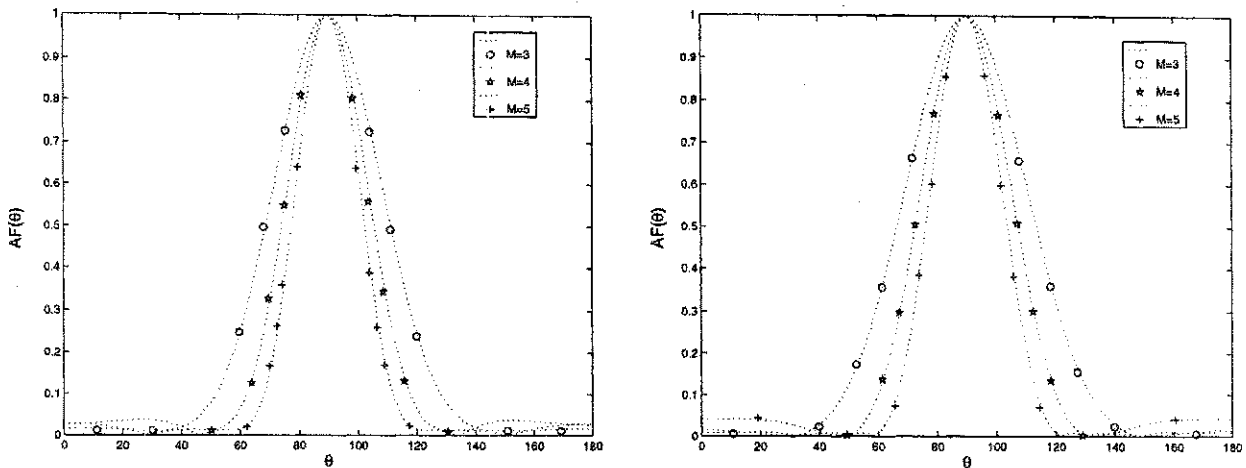


Figura 3.3: Diagrama de irradiação médio, no plano de elevação, de um arranjo linear com  $N = 2M$  elementos distribuídos simetricamente ao longo eixo  $z$ , com amplitude dos coeficientes de excitação uniforme em  $[0, 25; 0, 50]$  e espaçamento  $d$  entre os elementos uniforme em  $[0, 15; 0, 50]\lambda$ .

Na Figura 3.3, estão indicados alguns parâmetros no diagrama de irradiação que são controlados por meio do ajuste dos parâmetros do arranjo. São ajustados, geralmente, a largura do feixe principal no ponto de queda de 3 dB, a relação entre a amplitude do principal lóbulo secundário e a amplitude do lóbulo principal, e a diretividade do arranjo. Na Figura 3.4 são mostrados os diagramas de irradiação médio com amplitudes dos lóbulos secundários bem reduzidas.



(a) Diagrama de irradiação médio de um arranjo linear com  $N = 2M$  elementos distribuídos simetricamente ao longo da origem do eixo do arranjo, com amplitude dos coeficientes de excitação uniforme em  $[0, 25; 0, 50]$  e espaçamento  $d$  entre os elementos uniforme em  $[0, 15; 0, 45]\lambda$ .

(b) Diagrama de irradiação médio de um arranjo linear com  $N = 2M$  elementos distribuídos simetricamente ao longo da origem do eixo do arranjo, com amplitude dos coeficientes de excitação uniforme em  $[0, 25; 0, 50]$  e espaçamento  $d$  entre os elementos uniforme em  $[0, 15; 0, 40]\lambda$ .

Figura 3.4: Diagramas de irradiação médio, no plano de elevação, de uma arranjo linear com elementos ao longo do eixo  $z$ , usando parâmetros aleatórios.

### 3.3 Cálculo de Diretividade

Um importante parâmetro que é usado no projeto de antenas é a diretividade. Esse parâmetro é definido como a razão entre a intensidade de irradiação  $U_d$  em uma dada direção e a intensidade de irradiação  $U_0$  de uma antena isotrópica e é dado por

$$D_0 = \frac{U_d}{U_0}, \quad (3.15)$$

em que  $U_0$  é dada por

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta) \sin(\theta) d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi U(\theta) \sin(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Quando a direção desejada não é especificada, é assumida a direção na qual o diagrama de irradiação atinge maior intensidade. Nesse caso,  $U_d = U_{\max} = AF^2|_{\theta=\theta_0}$ . Para facilitar o cálculo desse parâmetro, um método diferente é usado neste capítulo. Por exemplo, no caso de um arranjo linear simétrico com

um número  $N = 2M$  de elementos, o fator de arranjo pode ser escrito na forma matricial como

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos(\theta) \right] = \mathbf{c}^T \mathbf{f}(\theta), \quad (3.17)$$

em que

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(1u \cos(\theta)) \\ \cos(3u \cos(\theta)) \\ \cos(5u \cos(\theta)) \\ \vdots \\ \cos((2M-1)u \cos(\theta)) \end{bmatrix}, \quad u = \frac{kd}{2}. \quad (3.18)$$

Dessa forma, a intensidade de irradiação  $U(\theta)$  pode ser escrita simplesmente como

$$U(\theta) = [AF(\theta)]^2 = [(\mathbf{c}^T \mathbf{f}(\theta))(\mathbf{c}^T \mathbf{f}(\theta))] = [\mathbf{c}^T \mathbf{f}(\theta) \mathbf{f}^T(\theta) \mathbf{c}]. \quad (3.19)$$

O produto  $\mathbf{f}(\theta) \mathbf{f}^T(\theta)$  resulta em uma matriz  $\mathbf{F}(\theta)$ ,  $M \times M$ , cujos elementos,  $f_{m,n}$ , são tais que

$$f_{m,n} = \begin{cases} \cos^2((2m-1)u \cos(\theta)) & m = n \\ \cos((2m-1)u \cos(\theta)) \cos((2n-1)u \cos(\theta)) & m \neq n \end{cases}, \quad (3.20)$$

Aplicando então a integral da Equação 3.16 à Equação 3.19, tem-se que a intensidade  $U_0$  pode ser escrita como

$$U_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{R} \mathbf{c}, \quad (3.21)$$

em que os elementos da matriz  $\mathbf{R}$  são dados por

$$r_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \text{Sa}(2u(2m-1))), & m = n \\ \frac{1}{2}(\text{Sa}(2u(m+n-1)) + \text{Sa}(2u(m-n))), & m \neq n \end{cases}, \quad (3.22)$$

em que  $u = \frac{kd}{2}$  e  $\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ . A notação  $\mathbf{R}$  continuou sendo usada na Equação 3.20 porque  $\mathbf{R}$ , neste caso, pode ser visto também como uma matriz de correlação espacial.

Em um arranjo linear simétrico, o valor máximo atingido pelo fator de arranjo ocorre em  $\theta = 90^\circ$ . Dessa forma, a intensidade máxima de irradiação é dada por

$$U_{\max} = [AF(\theta)]^2|_{\theta=90^\circ} = \left( \sum_{n=1}^M a_n \right)^2. \quad (3.23)$$

O somatório ao quadrado em 3.23 também pode ser escrito em uma forma matricial compacta de modo que

$$\left( \sum_{n=1}^M a_n \right)^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c}, \quad (3.24)$$

em que a matriz  $\mathbf{B}$  é da forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Dessa forma, a diretividade de um arranjo linear simétrico pode ser escrita em uma forma compacta, para qualquer tipo de excitação não aleatória

$$D_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{R} \mathbf{c}}. \quad (3.26)$$

Quando se considera parâmetros aleatórios no arranjo linear, torna-se muito complicado obter uma expressão matemática fechada para a diretividade média. Uma forma alternativa de analisar o comportamento desse parâmetro é por meio de aproximação de fdp. É possível mostrar numericamente, que a diretividade pode ser aproximada por uma fdp gaussiana com média  $\hat{\mu}$  e variância  $\hat{\sigma}^2$ . Um exemplo de aproximação é mostrado na Figura 3.5. Esta figura representa o histograma de uma realização com  $10^4$  amostras de  $D_0$ . Ao lado é mostrada uma curva de ajustabilidade, ou seja, as amostras aleatórias de  $D_0$  são traçadas ao longo da reta que une o primeiro e terceiro quartil da distribuição normal com parâmetros  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$ . Quanto mais próximas as amostras estiverem da reta, mais a sua distribuição se aproxima de uma distribuição normal. Na Figura 3.5 a amplitude dos coeficientes foi considerada aleatória e a distância entre os elementos foi considerada fixa; e pode-se perceber que as amostras de  $D_0$  aderem totalmente à reta nos intervalo  $[11, 50; 1, 75]$ , que é onde a maioria das amostras se concentram.

Na Figura 3.5, os valores de  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$ , junto com seus respectivos intervalos de confiança são dados por

$$\begin{cases} \hat{\mu} : & 11,637 < 11,638 < 11,639 \\ \hat{\sigma}^2 : & 0,0507 < 0,0514 < 0,0522 \end{cases} \quad (3.27)$$

e a diretividade média  $E[D_0]$ , neste caso, é igual ao parâmetros  $\hat{\mu}$ .

Quando ambos, distância  $d$  entre elementos e coeficientes de excitação são aleatórios, pode-se também obter uma boa aproximação para a distribuição de  $D_0$ . Os gráficos dessa aproximação são mostrados na Figura 3.6, para um arranjo linear com 12 elementos. Para este segundo caso, as estimativas de  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$ , junto com seus intervalos de confiança, são dadas por

$$\begin{cases} \hat{\mu} : & 7,5546 < 7,5622 < 7,5697 \\ \hat{\sigma}^2 : & 0,3814 < 0,3867 < 0,3921 \end{cases} \quad (3.28)$$

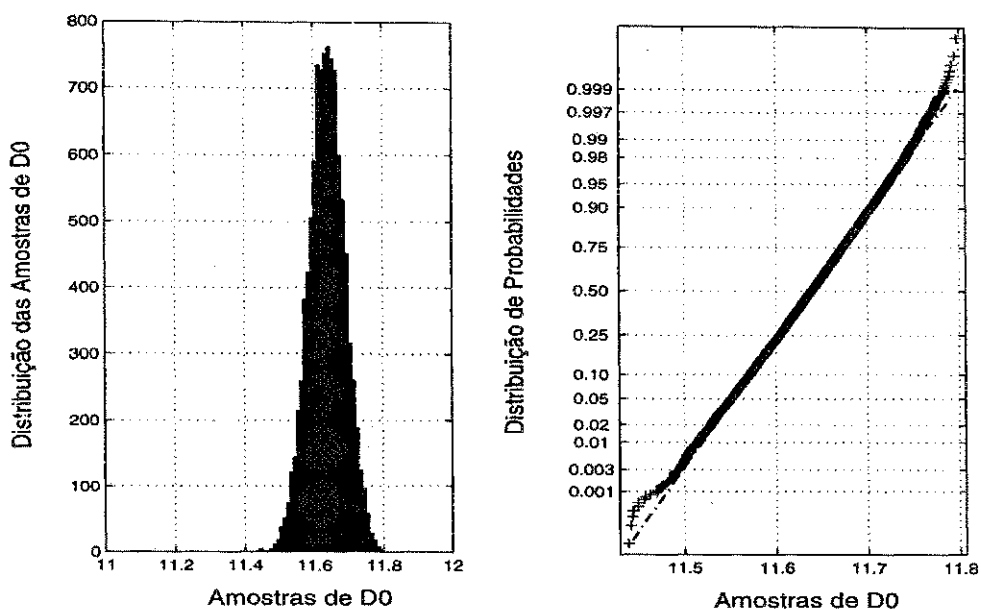


Figura 3.5: Distribuição das amostras de  $D_0$  para um arranjo linear com 12 elementos, considerando coeficientes de excitação aleatórios e uniformemente distribuídos em  $[0, 25; 0, 50]$ , e espaçamento  $d$  entre os elementos igual a  $\lambda/2$ .

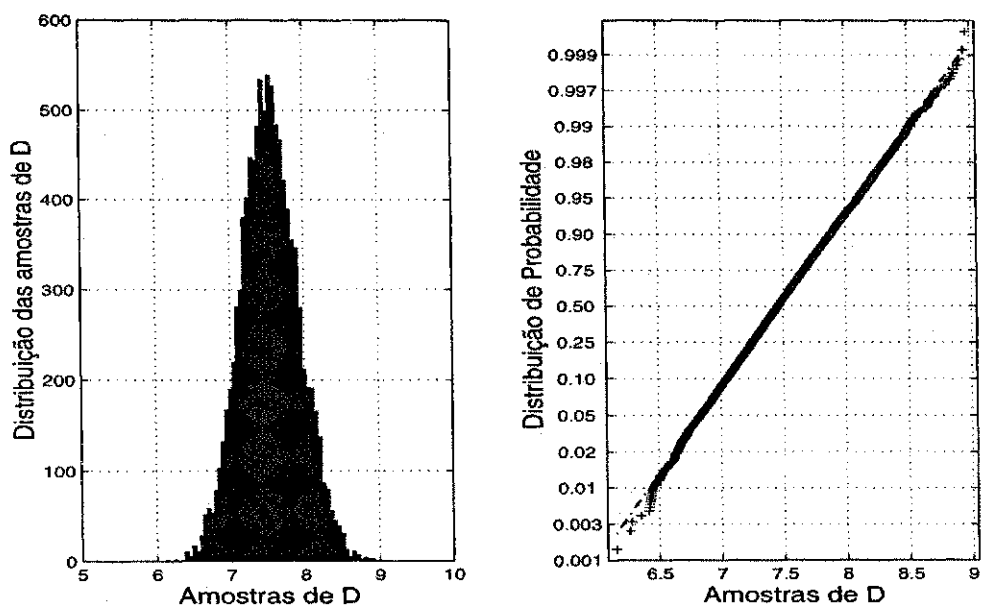


Figura 3.6: Distribuição das amostras de  $D_0$  para um arranjo linear com 12 elementos, considerando coeficientes de excitação aleatórios e uniformemente distribuídos em  $[0, 25; 0, 50]$ , e espaçamento  $d$  entre os elementos aleatório em  $[0, 25; 0, 50]\lambda$ .

### 3.4 Cálculo de Parâmetros de Projeto

Na seção anterior foi mostrado o cálculo da diretividade de arranjos com parâmetros aleatórios. Nesta seção são considerados mais alguns parâmetros. O primeiro a ser analisado é o ponto de nulo,  $\theta_n$ , ou seja o ângulo em que o diagrama de irradiação assume valor nulo. No caso do fator de arranjo com coeficientes de excitação aleatórios e  $d$  fixo esse valor é obtido simplesmente igualando a Equação 3.7 a zero, ou seja

$$\frac{(a_l + a_r) \operatorname{sen}(Mkd \cos(\theta))}{4 \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} \cos(\theta)\right)} = 0, \quad (3.29)$$

cuja solução é  $\theta = \theta_n = m\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Considerando ainda a mesma configuração de arranjo da Equação 3.7 tem-se que o ponto de queda de 3dB, ou de meia potência, acontece quando

$$E[AF_{2M}(\theta)] = 10^{-\frac{3}{20}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3.30)$$

ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}\left(2M\frac{kd}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right)} \approx \frac{2\sqrt{2}}{a_r + a_l}, \quad (3.31)$$

ou ainda em uma forma que possa permitir o uso de valores tabelados,

$$\frac{\operatorname{sen}\left(2M\frac{kd}{2} \cos \theta\right)}{2M\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right)} \approx \frac{\sqrt{2}}{M(a_r + a_l)}, \quad (3.32)$$

em que os ângulos assim obtidos serão denotados  $\theta_h$ .

O valor máximo assumido pelo fator de arranjo dado em 3.7 é obtido fazendo

$$Mkd \cos \theta = \pm n\pi, \quad (3.33)$$

pois  $\operatorname{sen}(Mx)/(M\operatorname{sen}(x)) = 1$  quando  $x = 0$ . Desse modo tem-se que o ângulo  $\theta_m$  no qual o fator de arranjo médio assume seu valor máximo é

$$\theta_m \approx \cos^{-1}\left(\pm \frac{n\pi}{Mkd}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.34)$$

Devido à complexidade do fator de arranjo da Equação 3.8, não é possível obter expressões algébricas para o ponto de nulo e o ponto de queda de 3 dB. Esses parâmetros só podem ser obtidos numericamente.

Em relação ao fator de arranjo médio mostrado na Equação 3.14, pode-se fazer as seguintes aproximações: Considerando que  $u_r$  e  $u_l$  assumam valores pequenos tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2}{u_r} \sum_{n=1}^M \frac{\operatorname{sen}((2n-1)u_r)}{(2n-1)} &= \frac{1}{u_r} \int \frac{\operatorname{sen}(2Mu_r)}{\operatorname{sen}(u_r)} du_r \approx \frac{2M}{u_r} \int \frac{\operatorname{sen}(2Mu_r)}{2Mu_r} du_r \\ \frac{2}{u_l} \sum_{n=1}^M \frac{\operatorname{sen}((2n-1)u_l)}{(2n-1)} &= \frac{1}{u_l} \int \frac{\operatorname{sen}(2Mu_l)}{\operatorname{sen}(u_l)} du_l \approx \frac{2M}{u_l} \int \frac{\operatorname{sen}(2Mu_l)}{2Mu_l} du_l \end{aligned}$$

Fazendo  $2Mu_r = u$  e  $2Mu_l = v$ , ontém-se

$$\begin{aligned} \frac{2}{u_r} \sum_{n=1}^M \frac{\text{sen}((2n-1)u_r)}{(2n-1)} &\approx \frac{2M}{u} \text{Si}(u) \approx 2M \frac{\text{Si}(Mkd_r \cos(\theta))}{Mkd_r \cos(\theta)} \\ \frac{2}{u_l} \sum_{n=1}^M \frac{\text{sen}((2n-1)u_l)}{(2n-1)} &\approx \frac{2M}{v} \text{Si}(v) \approx 2M \frac{\text{Si}(Mkd_l \cos(\theta))}{Mkd_l \cos(\theta)}. \end{aligned}$$

Dessa forma tem-se que

$$E[AF_{2M}(\theta)] \approx \frac{M(a_r + a_l)}{2(d_r - d_l)} \left\{ d_r \frac{\text{Si}(Mkd_r \cos(\theta))}{Mkd_r \cos(\theta)} - d_l \frac{\text{Si}(Mkd_l \cos(\theta))}{Mkd_l \cos(\theta)} \right\}. \quad (3.35)$$

O primeiro ponto de nulo  $\theta_n$  do diagrama de irradiação é o valor no qual  $E[AF_{2M}(\theta)] = 0$ . O ponto de máximo desse fator desse diagrama de irradiação ocorre em  $\theta = 90^\circ$  e é igual a  $\frac{M(a_r + a_l)}{2}$ . Dessa forma, no ponto de queda de 3 dB  $\theta_h$ ,  $E[AF_{2M}(\theta)]$  vale  $\frac{M(a_r + a_l)}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Dessa forma, o ponto do diagrama de irradiação em que há uma queda de 3 dB em relação ao valor máximo é obtido resolvendo-se a Equação

$$\text{Si}(Mkd_r \cos(\theta_h)) - \text{Si}(Mkd_l \cos(\theta_h)) = \frac{Mk}{2} (d_r - d_l) \sqrt{2} \cos(\theta_h). \quad (3.36)$$

O valor da lagura do lóbulo principal no ponto de queda de 3 dB pode ser então dado por

$$\Theta_h \approx 2 \left| \frac{\pi}{2} - \theta_h \right|. \quad (3.37)$$

Um outro parâmetro que também pode ser usado na avaliação do desempenho de um arranjo de antenas é a eficiência de irradiação em uma determinada região angular. Esse parâmetro será tratado na próxima seção.

### 3.4.1 Eficiência de feixe irradiado

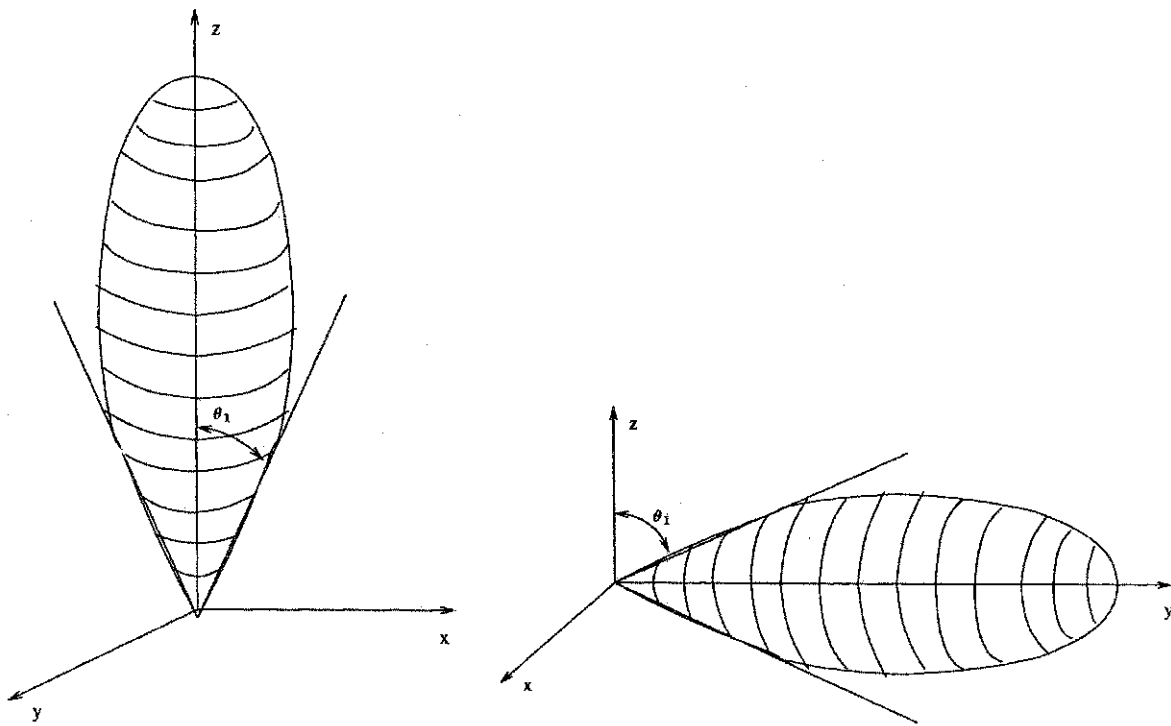
A eficiência de um feixe irradiado é definida como a razão entre a potência transmitida em uma região angular cônica e a potência transmitida omnidirecionalmente. De acordo com a referência [1], a eficiência de um feixe irradiado, com seu máximo orientado ao longo do eixo  $z$ , como mostrado na Figura 3.7, é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} U(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi} \quad (3.38)$$

enquanto que para um lóbulo orientado ao longo do eixo  $y$  é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} U(\theta, \phi) \text{sen}(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi U(\theta, \phi) \text{sen}(\theta) d\theta d\phi}. \quad (3.39)$$





(a) Lóbulo diretivo de uma antena, direcionado ao longo do eixo  $z$

(b) Lóbulo diretivo de uma antena, direcionado ao longo do eixo  $y$

Figura 3.7: Modelo de um lóbulo diretivo, orientado ao longo dos eixos  $y$  e  $z$

Tomando o caso em que o feixe principal está direcionado ao longo do eixo  $y$ , a eficiência de feixe radiado  $\mathcal{E}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = \frac{\int_{\theta_1}^{\pi/2} (\mathbf{c}^T \mathbf{F}(\theta) \mathbf{c}) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} (\mathbf{c}^T \mathbf{F}(\theta) \mathbf{c}) \sin(\theta) d\theta} = \frac{\mathbf{c}^T \left( \int_{\theta_1}^{\pi/2} \mathbf{F}(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \mathbf{c}}{\mathbf{c} \left( \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \mathbf{c}} \quad (3.40)$$

Fazendo

$$\mathbf{E} = \int_{\theta_1}^{\pi/2} \mathbf{F}(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (3.41)$$

a eficiência  $\mathcal{E}$  pode ser reescrita em uma forma matricial como

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{E} \mathbf{c}}{\mathbf{c} \mathbf{R} \mathbf{c}}, \quad (3.42)$$

em que os elementos da matriz  $\mathbf{E}$ ,  $e_{m,n}$ , são da forma

$$e_{m,n} = \begin{cases} \frac{\cos \theta_1}{2} \{1 + \text{Sa}((2m-1)kd \cos \theta_1)\}, & m = n \\ \frac{\cos \theta_1}{2} \{\text{Sa}(kd(m+n-1) \cos \theta_1) + \text{Sa}(kd(m-n) \cos \theta_1)\}, & m \neq n \end{cases} \quad (3.43)$$

e os elementos da matriz  $\mathbf{R}$  são dados na Equação 3.22.

No caso de arranjos lineares cujos lóbulos principais são posicionados ao longo do eixo dos  $y$ , no quais o valor máximo do lóbulo radiado ocorre perpendicular ao eixo do arranjo, a integração interna no numerador da Equação 3.39 também pode ser feita no intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$ , em que  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_n$ , em que  $\theta_n$  é o primeiro ponto de nulo do diagrama de radiação. Dessa forma, a eficiência de radiação é avaliada apenas no lóbulo principal e os elementos da matriz  $\mathbf{E}$  pode ser escritos como

$$e_{m,n} = \begin{cases} \frac{\cos \theta_1}{2} \{1 + \text{Sa}((2m-1)kd \cos(\theta_1))\} \\ -\frac{\cos \theta_2}{2} \{1 + \text{Sa}((2m-1)kd \cos(\theta_2))\}, & m = n \\ \frac{\cos \theta_1}{2} \{\text{Sa}(kd(m+n-1) \cos(\theta_1)) + \text{Sa}(kd(m-n) \cos(\theta_1))\} \\ -\frac{\cos(\theta_2)}{2} \{\text{Sa}(kd(m+n-1) \cos(\theta_2)) + \text{Sa}(kd(m-n) \cos(\theta_2))\}, & m \neq n \end{cases} \quad (3.44)$$

Para as três configurações propostas até agora, com expressões do fator de arranjo reescritas na notação abaixo,

$$E[AF1_{2M}(\theta)] = \frac{(a_l + a_r)}{2} \sum_{n=1}^M \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} \beta d \cos \theta \right]$$

$$E[AF2_{2M}(\theta)] = \frac{1}{d_r - d_l} \sum_{n=1}^M a_n (d_r \text{Sa}((2n-1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n-1)u_l))$$

$$E[AF3_{2M}(\theta)] = \frac{(a_r + a_l)}{(d_r - d_l)} \sum_{n=1}^M (d_r \text{Sa}((2n-1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n-1)u_l)),$$

a eficiência de feixe radiado é dada respectivamente por

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (E[AF1_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi (E[AF1_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (E[AF2_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi (E[AF2_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta}$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (E[AF3_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi (E[AF3_{2M}(\theta)])^2 \sin \theta d\theta},$$

em que  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ + \theta_n$  e  $\theta_n$  é o primeiro ponto do nulo do diagrama de irradiação. Um exemplo de curva de eficiência de feixe irradiado para um arranjo linear com coeficientes calculados por meio do método de Dolph-Tschebyscheff é mostrado na Figura 3.5.

Basicamente, esses são os parâmetros necessários ao projeto de um arranjo de antenas que atenda às necessidades do sistema de comunicações no qual ele está inserido. Como se pode perceber, nem sempre é possível obter expressões fechadas para tais parâmetros e a complexidade dessas expressões depende da configuração do arranjo.

### 3.5 Arranjos com Varredura Aleatória

Nas últimas seções foram estudados apenas os casos de arranjos nos quais o lóbulo principal é direcionado ao longo do eixo principal ou perpendicular a esse eixo. Essas configurações recebem

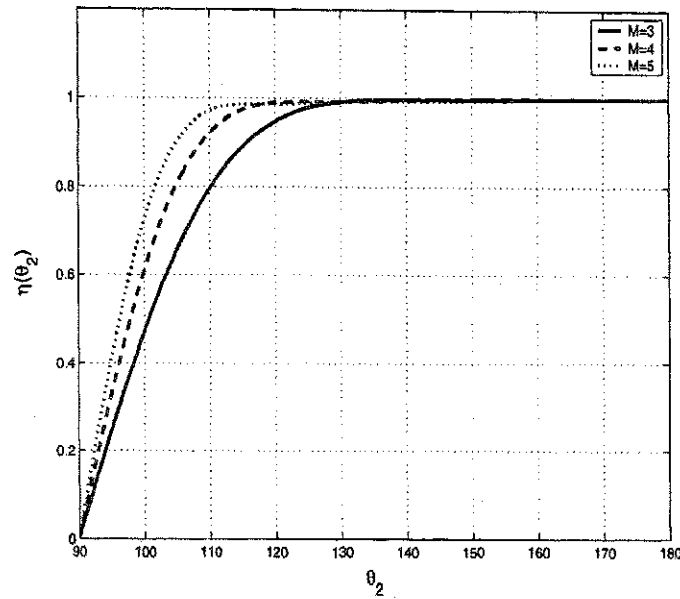


Figura 3.8: Eficiência de feixe irradiado de um arranjo linear simétrico, com coeficientes de excitação obtidos por expansão polinomial, para diferentes valores do número de elementos e em função do ângulo  $\theta_2$ .

os respectivos nomes de *end-fire array* e *broad-side array*. Nesta seção, serão analisados os casos de arranjos em que o lóbulo principal é direcionado em uma determinada região angular segundo uma distribuição uniforme. São obtidas expressões matemáticas para o fator de arranjo resultante e em seguida é avaliado o diagrama de irradiação resultante.

É considerada aqui uma estrutura de arranjo semelhante àquelas analisadas nas seções anteriores, com a amplitude de excitação dos elementos simetricamente distribuída ao longo do arranjo. Nesse tipo de configuração, quando se leva em consideração o acúmulo progressivo de fase de elemento para elemento do arranjo, obtém-se o fator de arranjo na forma [1]

$$\begin{aligned}
 AF_{2M}(\theta) = & a_1 e^{+j\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \beta)} + a_2 e^{+j\frac{3}{2}(kd \cos \theta + \beta)} + \dots \\
 & a_M e^{+j\frac{(2M-1)}{2}(kd \cos \theta + \beta)} + \\
 & a_1 e^{-j\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \beta)} + a_2 e^{-j\frac{3}{2}(kd \cos \theta + \beta)} + \dots \\
 & a_M e^{-j\frac{(2M-1)}{2}(kd \cos \theta + \beta)}
 \end{aligned}$$

ou ainda em uma forma mais compacta

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right]. \quad (3.45)$$

O valor máximo do diagrama de irradiação ocorre quando

$$kd \cos \theta + \beta \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -kd \cos \theta_0. \quad (3.46)$$

Nesse caso, o fator de arranjo passa a ser escrito como

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd(\cos \theta - \cos \theta_0) \right]. \quad (3.47)$$

Para obter o diagrama de irradiação médio quando o lóbulo principal varre aleatoriamente uma determinada região angular, é conveniente primeiro desenvolver a Equação 3.47 como a seguir

$$AF_{2M}(\theta) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta_0 \right] + \sum_{n=1}^M a_n \sin \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \sin \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta_0 \right].$$

Admitindo que  $\theta_0$  seja uniformemente distribuído em  $[\theta_l, \theta_r]$  e tomando o valor esperado de  $AF_{2M}(\theta)$  nesse intervalo, tem-se que

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \sum_{n=1}^M a_n I_c(n) \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] + \sum_{n=1}^M a_n I_s(n) \sin \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right], \quad (3.48)$$

em que  $I_c(n)$  e  $I_s(n)$  são dados respectivamente por

$$I_c(n) = \frac{1}{\theta_r - \theta_l} \int_{\theta_l}^{\theta_r} \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta_0 \right] d\theta_0 \quad (3.49)$$

e

$$I_s(n) = \frac{1}{\theta_r - \theta_l} \int_{\theta_l}^{\theta_r} \sin \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta_0 \right] d\theta_0. \quad (3.50)$$

O fator de arranjo  $E[AF_{2M}(\theta)]$  pode ainda ser escrito como

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \sum_{n=1}^M c_n \sin \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta + \Phi(n) \right], \quad (3.51)$$

em que

$$c_n = a_n \sqrt{I_c^2(n) + I_s^2(n)} \quad (3.52)$$

e

$$\Phi(n) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{I_c(n)}{I_s(n)} \right). \quad (3.53)$$

Na Figura 3.9 a seguir é mostrado o diagrama de irradiação de um arranjo linear de 12 elementos, com varredura aleatória no intervalo  $[\theta_l; \theta_r]$

Percebe-se pela Figura 3.9 que o diagrama de irradiação se mantém com intensidade máxima em todo o intervalo  $[-\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{16}]$ . As estruturas com varredura aleatória podem encontrar aplicações tanto em sistemas de radar quanto em sistemas de telecomunicações e os mecanismos usados para a excitação dos elementos do arranjo podem ser os mesmos dos casos estudados anteriormente. Desde que

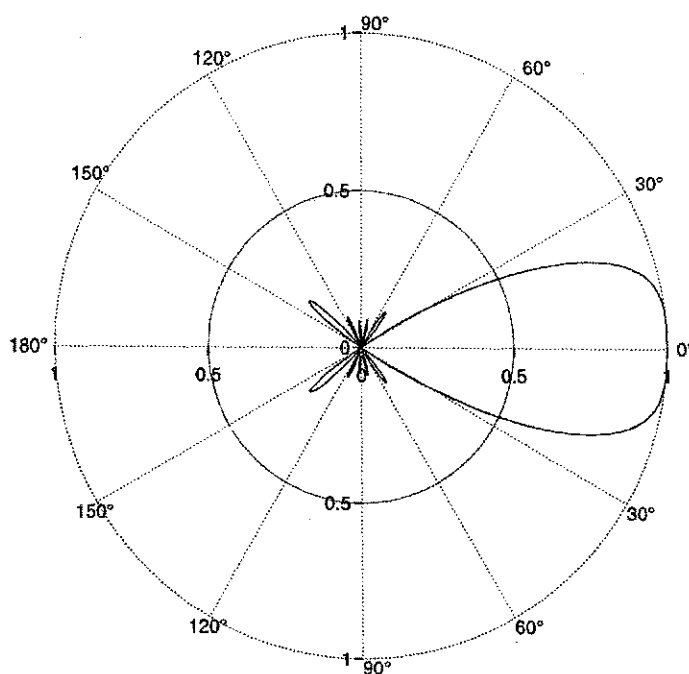


Figura 3.9: Diagrama de irradiação no plano de elevação de uma arranjo linear de 12 elementos posicionados ao longo do eixo  $z$ , com  $d = \lambda/2$  e varredura aleatória no intervalo  $[-\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{16}]$ .

a varredura do feixe irradiado deve ser feita de forma contínua, o sistema deve ser capaz de variar continuamente a fase entre os elementos do arranjo. Na prática, isso poderia ser feito usando-se deslocadores de fase à base de diodos ou de núcleos de ferrite. Para os deslocadores à base de ferrite o deslocamento de fase seria controlado pelo campo magnético do núcleo de ferrite. Esse campo, por sua vez, seria controlado pela intensidade de corrente que circula pela bobina em volta da ferrite. Para os deslocadores que usam diodos, o deslocamento de fase poderia ser feito por um comando digital por meio de um conversor analógico-digital.

### 3.6 Cálculo da Variância do Fator de Arranjo

Quando se assume que os parâmetros do arranjo podem ter comportamento aleatório, a expressão do fator de arranjo passa a ser vista como uma variável aleatória com um comportamento médio. Na verdade, as expressões mostradas nas seções anteriores fornecem o comportamento médio do diagrama de irradiação obtido quando os parâmetros do arranjo variam em um determinado intervalo. Levando-se em consideração essa variação, o fator de arranjo passa a variar entre dois limitantes, ou seja

$$E[AF(\theta)] - \sigma_{AF}(\theta) < E[AF(\theta)] < E[AF(\theta)] + \sigma_{AF}(\theta), \quad (3.54)$$

em que  $\sigma_{AF}(\theta)$  é dado por

$$\sigma_{AF}(\theta) = \sqrt{E[AF^2(\theta)] - E^2[AF(\theta)]}. \quad (3.55)$$

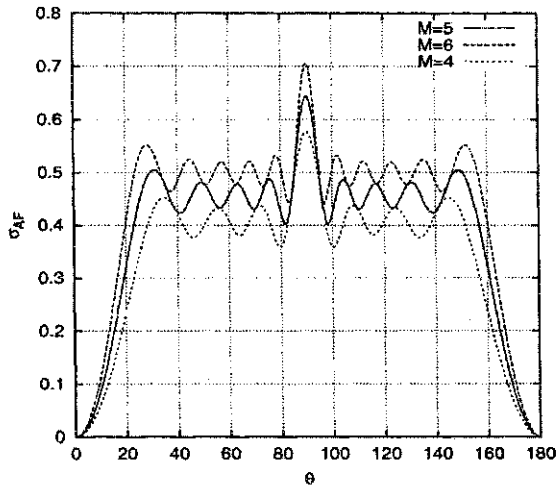
Para o caso de se usar arranjos simétricos com  $N = 2M$  e  $N = 2M + 1$  elementos, as expressões para  $\sigma_{AF_{2M}}$  e  $\sigma_{AF_{2M+1}}$  podem ser obtidas pelo desenvolvimento da Equação 3.55. Considerando que os coeficientes de excitação do arranjo têm distribuição uniforme,  $a_n \sim U[a_l; a_r]$ , tem-se que

$$\sigma_{AF_{2M}}(\theta) = (a_r - a_l) \sqrt{\frac{M}{24} \left[ 1 + \frac{\text{sen}(2Mkd \cos \theta)}{2M \text{sen}(kd \cos \theta)} \right]} \quad (3.56)$$

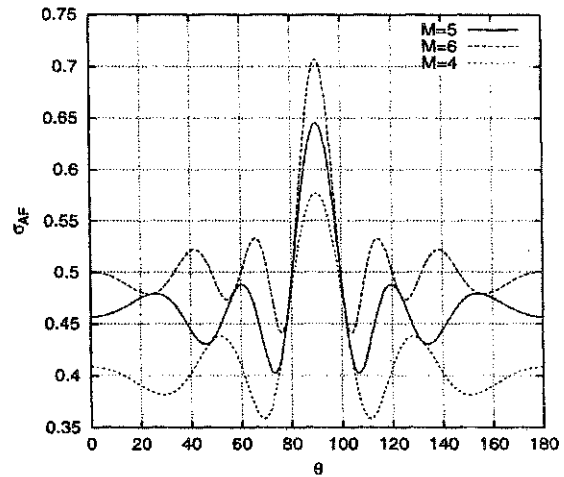
e

$$\sigma_{AF_{2M+1}}(\theta) = (a_r - a_l) \sqrt{\frac{M+1}{24} \left[ 1 + \frac{\text{sen}((2M+1)kd \cos \theta)}{(2M+1)\text{sen}(kd \cos \theta)} \right]}, \quad (3.57)$$

ou seja, os desvios padrão  $\sigma_{AF_{2M}}(\theta)$  e  $\sigma_{AF_{2M+1}}(\theta)$  são proporcionais à diferença de amplitudes dos coeficientes de excitação  $(a_r - a_l)$ . O comportamento dessas expressões é mostrado nas Figuras 3.10(a) e 3.10(b).



(a) Arranjo linear uniforme com  $d = \lambda/2$ .



(b) Arranjo linear uniforme com  $d = \lambda/4$ .

Figura 3.10: Desvio padrão do fator de arranjo de um arranjo linear simétrico com amplitude dos coeficientes de excitação tal que  $a_n \sim U[a_l; a_r]$ .

No caso das estruturas com distância entre elementos aleatória, mostrou-se pela Equação 3.8 que o fator de arranjo médio de um arranjo com  $2M$  elementos pode ser escrito como

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \frac{1}{d_r - d_l} \sum_{n=1}^M a_n (d_r \text{Sa}((2n-1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n-1)u_l)), \quad (3.58)$$

Fazendo

$$\psi_n(u_r, u_l) = \frac{d_r}{d_r - d_l} \text{Sa}((2n - 1)u_r) - \frac{d_l}{d_r - d_l} \text{Sa}((2n - 1)u_l) \quad (3.59)$$

tem-se

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \sum_{n=1}^M a_n \psi_n(u_r, u_l). \quad (3.60)$$

A variância pode então ser escrita como

$$\text{Var}(AF_{2M}(\theta)) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M a_n^2 [\psi_n(2u_r, 2u_l) - 2\psi_n^2(u_r, u_l)]. \quad (3.61)$$

No caso em que tanto a distância entre os elementos do arranjo quanto a amplitude dos coeficientes de excitação são variáveis aleatórias, mostrou-se pela Equação 3.11 que o fator de arranjo médio de um arranjo com  $2M$  elementos pode ser escrito como

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \frac{a_r + a_l}{2(d_r - d_l)} \sum_{n=1}^M [d_r \text{Sa}((2n - 1)u_r) - d_l \text{Sa}((2n - 1)u_l)], \quad (3.62)$$

que pode ser então escrito em termos da Equação 3.59 na forma

$$E[AF_{2M}(\theta)] = \frac{(a_r + a_l)}{2} \sum_{n=1}^M \psi_n(u_r, u_l). \quad (3.63)$$

Seguindo então o mesmo procedimento do caso anterior, obtém-se que a variância em função de  $\theta$  pode ser escrita como

$$\text{Var}(AF_{2M}(\theta)) = \frac{2}{3} \left( \bar{a}^2 - \frac{a_l a_r}{4} \right) \left[ M + \sum_{n=1}^M \psi_n(2u_l, 2u_r) \right] - \bar{a}^2 \sum_{n=1}^M \psi_n^2(u_l, u_r), \quad (3.64)$$

em que  $\bar{a} = (a_l + a_r)/2$ .

Os gráficos que mostram o comportamento do desvio padrão  $\sigma_{AF}(\theta)$ , respectivamente para os fatores de arranjo médios das Equações 3.58 e 3.62, podem ser vistos nas Figuras 3.11(a) e 3.11(b).

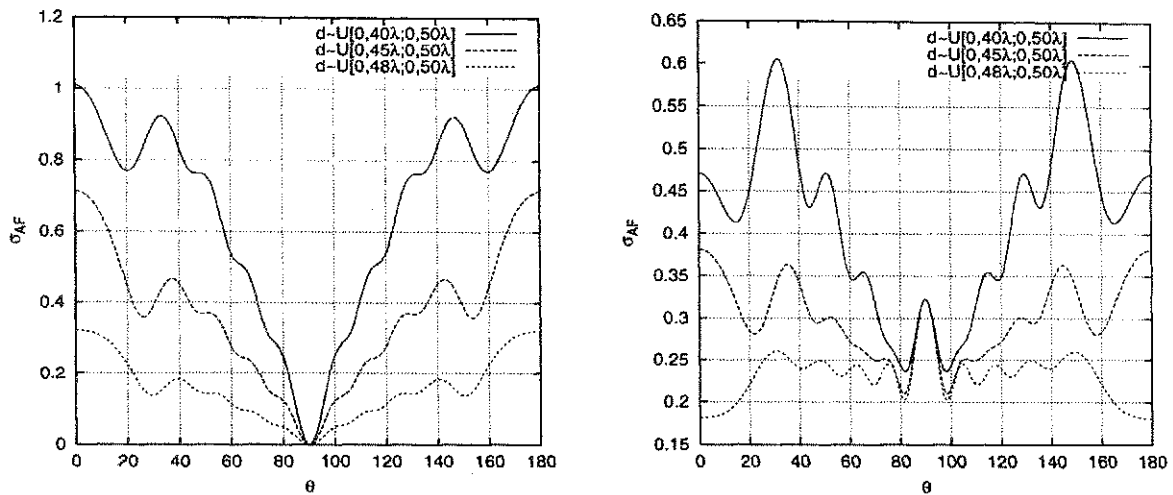
Como se pode perceber novamente pelas Figuras 3.11(a) e 3.11(b), o espaçamento entre os elementos é que determina o nível de variância que pode ocorrer no diagrama de irradiação projetado usando os procedimentos propostos neste capítulo.

A variância ainda poderia ser escrita em uma forma matricial mais compacta. Nesse caso, ter-se-ia que

$$AF_{2M}(\theta) = \mathbf{c}^T \mathbf{f}(\theta), \quad (3.65)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T &= [ \cos(ud_1) \quad \cos(3ud_2) \quad \cdots \quad \cos((2M - 1)ud_M) ] \\ \mathbf{c}^T &= [ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_M ], \end{aligned} \quad (3.66)$$



(a) Arranjo linear com coeficientes de excitação determinísticos e espaçamento aleatório entre elementos.

(b) Arranjo linear com coeficientes de excitação e espaçamento entre elementos aleatórios.

Figura 3.11: Desvio padrão do fator de arranjo linear com  $2M$  elementos e parâmetros aleatórios.

em que  $u = k \cos(\theta)/2$  e  $d_n \sim U[d_l; d_r]$ . Tem-se portanto que o fator de arranjo médio pode ser escrito como

$$E[AF_{2M}(\theta)] = E[\mathbf{c}^T \mathbf{f}] = \mathbf{c}^T \mathbf{s}, \quad (3.67)$$

em que  $\mathbf{s} = E[\mathbf{f}]$ .

Para que se possa obter uma expressão para a variância do fator de arranjo, devido à variação no espaçamento entre os seus elementos, precisa-se desenvolver os seguintes valores esperados

$$E[AF_{2M}^2] = E[(\mathbf{c}^T \mathbf{f})(\mathbf{c}^T \mathbf{f})] = \mathbf{c}^T E[\mathbf{f}\mathbf{f}^T] \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{R}_{cc} \mathbf{c} \quad (3.68)$$

e

$$E^2[AF_{2M}(\theta)] = (\mathbf{c}^T \mathbf{s})(\mathbf{c}^T \mathbf{s}) = \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c}. \quad (3.69)$$

A variância pode então ser escrita como

$$\text{Var}(AF_{2M}(\theta)) = \mathbf{c}^T \mathbf{R}_{cc} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{S} \mathbf{c} = \mathbf{c}^T (\mathbf{R}_{cc} - \mathbf{S}) \mathbf{c}, \quad (3.70)$$

em que  $\mathbf{S} = \mathbf{s}\mathbf{s}^T$ , os elementos das matrizes  $\mathbf{R}_{cc}$  e  $\mathbf{S}$  são dados por

$$R_{cc}(m, n) = \begin{cases} \psi_m(u_l, u_r) \psi_n(u_l, u_r), & m \neq n \\ \frac{1}{2} [1 + \psi_m(2u_l, 2u_r)], & m = n \end{cases} \quad (3.71)$$



e

$$S(m, n) = \begin{cases} \psi_m(u_r, u_l)\psi_n(u_r, u_l), & m \neq n \\ \psi_m^2(u_l, u_r), & m = n \end{cases} \quad (3.72)$$

e a função  $\psi_n(u_r, u_l)$  é dada na Equação 3.59. Desse modo, os elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{cc} - \mathbf{S}\mathbf{S}^T$  são dados por

$$R_n = \frac{1}{2} [1 + \psi_n(2u_r, 2u_l)] - \psi_n^2(u_r, u_l) \quad (3.73)$$

e os outros elementos fora da diagonal são nulos.

### 3.7 Arranjos Aperiódicos

No estudo de arranjos lineares percebeu-se que é possível retirar a excitação de alguns elementos sem prejudicar as características do diagrama de irradiação desejado. Essa ação, de simplesmente retirar a alimentação de alguns elementos e de outros não, resulta em economia tanto de potência, quanto de tempo de vida útil da estrutura. Em outros casos, entretanto, percebeu-se ser possível controlar e até melhorar as características de irradiação do arranjo, simplesmente ligando e desligando os elementos do arranjo de alguma forma orientada por algoritmos ou aleatória. Nas referências [23] e [24] são analisados alguns casos desses arranjos, também chamados de aperiódicos, sem que, no entanto, tenha sido proposto algum modelamento matemático. Apenas resultados de simulações foram obtidos.

Essa categoria de arranjo parece ser prática e promissora, pois, aparentemente, é necessária apenas uma operação de chaveamento para controlar a alimentação dos seus elementos. Uma forma de excitação seria, por exemplo, assumir que os elementos fossem ligados e desligados de forma aleatória e equiprovável. Nesse caso, tanto a configuração simétrica quanto a assimétrica poderiam ser usadas.

#### 3.7.1 Arranjos assimétricos com excitação aleatória e equiprovável

O que caracteriza um arranjo assimétrico é o fato de que as amplitudes de excitação dos elementos não são simetricamente distribuídas ao longo do arranjo. No caso dessas estruturas serem aperiódicas, significa que essa excitação pode ou não estar presente. Ou seja, alguns elementos podem ser simplesmente desligados. A expressão do fator de arranjo de uma estrutura assimétrica com  $N$  elementos é dada por

$$AF_N(\theta) = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)(kd \cos \theta + \beta)} \quad (3.74)$$

e no caso em que a excitação dos elementos tem comportamento aleatório, essa expressão representa uma soma de variáveis aleatórias com uma determinada distribuição de probabilidade. Devido a essa

natureza aleatória, torna-se mais apropriado falar em comportamento médio do diagrama de irradiação, como já foi comentado antes. Uma grandeza também usada para avaliar o diagrama de irradiação é a intensidade de irradiação, que no caso analisado nesta seção tem um comportamento médio denotado por  $E[U(\theta)]$  e escrito como

$$\begin{aligned} E[U(\theta)] &= E[AF_N(\theta)^2] = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E[a_n a_m] e^{j(n-1)(kd \cos \theta + \beta)} e^{j(m-1)(kd \cos \theta + \beta)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N R(m, n) e^{j(m+n-2)kd(\cos \theta - \cos \theta_0)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

em que  $\beta = -kd \cos \theta_0$  é o acúmulo de fase ao longo dos elementos do arranjo e  $R(m, n)$  é uma função de correlação entre os elementos, que pode ser escrita como

$$R(m, n) = E[a_m a_n] = \begin{cases} E[a_m^2] & \text{se } m = n \\ E[a_m]E[a_n] & \text{se } m \neq n \end{cases}, \quad (3.76)$$

no caso das variáveis  $a_n$  serem independentes. Pode-se também assumir que o chaveamento dos elementos ao longo do arranjo seja feito de forma dependente, ou seja o estado de um determinado elemento dependendo do estado do elemento anterior.

### 3.7.2 Arranjos simétricos com excitação aleatória e equiprovável

No caso dos arranjos simétricos com  $N = 2M$  elementos, a intensidade de irradiação média mostrada na seção anterior pode ser escrita como

$$E[U(\theta)] = E \left[ \left( \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \right) \left( \sum_{m=1}^M a_m \cos \left[ \frac{(2m-1)}{2} kd \cos \theta \right] \right) \right] \quad (3.77)$$

que pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned} E[U(\theta)] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M R(n, m) \cos((n+m-1)kd \cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M R(n, m) \cos((n-m)kd \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.78)$$

em que a função de correlação  $R(m, n)$  é dada pela Equação 3.76. A partir das Equações 3.74 e 3.77, pode-se analisar alguns casos de estruturas aperiódicas. No primeiro caso analisado os elementos são ligados e desligados com distribuição de probabilidade dada por

$$P(a_n = 0) = \frac{1}{2} = P(a_n = 1). \quad (3.79)$$

Dessa forma, o valor esperado  $E[a_n^2]$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E[a_n^2] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ N \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{2} + N \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

e o valor esperado  $E[a_n]$  pode ser dado por

$$\begin{aligned} E[a_n] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ N \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + N \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Usando esses dois resultados, pode-se escrever a função de correlação  $R(m, n)$  como

$$R(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ \frac{1}{4}, & m \neq n \end{cases} \quad (3.82)$$

e a intensidade de irradiação média pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E[U(\theta)] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \cos^2[(2n-1)u \cos \theta] \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M \cos[2(m+n-1)u \cos \theta] \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M \cos[2(m-n)u \cos \theta], \end{aligned} \quad (3.83)$$

em que  $u = \frac{kd}{2}$ .

Um outro caso de chaveamento da excitação dos elementos que também fornece bons resultados é o caso no qual a distribuição de probabilidade dos coeficientes de excitação é tal que

$$P(a_n = 0) = P(a_n = 0, 5) = P(a_n = 1) = \frac{1}{3}, \quad (3.84)$$

ou seja, a excitação dos elementos é chaveada de forma equiprovável entre três valores de modo que os valores esperados  $E[a_n^2]$  e  $E[a_n]$  possam ser dados respectivamente por

$$E[a_n^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ N \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{3} + N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + N \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{12} \quad (3.85)$$

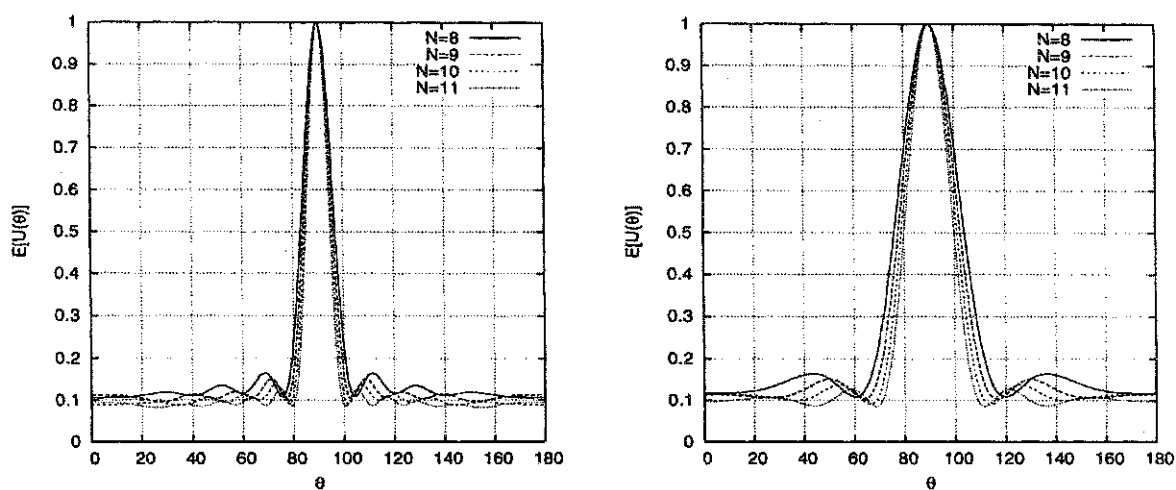
e

$$E[a_n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ N \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + N \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{2}. \quad (3.86)$$

Dessa forma, a função de correlação passa a ser escrita como

$$R(m, n) = \begin{cases} \frac{5}{12}, & m = n \\ \frac{1}{4}, & m \neq n. \end{cases} \quad (3.87)$$

Usando estes resultados, pode-se obter alguns exemplos da suavização e diminuição dos lóbulos secundários nas Figuras 3.12(a) e 3.12(b) que ilustram a intensidade de irradiação de um arranjo linear aperiódico. A excitação de cada um dos elementos é chaveada de forma independente e equiprovável entre 0 e 1. Dessa forma, uma amplitude de excitação nula significa um elemento desligado do arranjo e uma amplitude unitária significa um elemento ligado.



(a) Arranjo linear aperiódico com espaçamento  $d = \lambda/2$ .

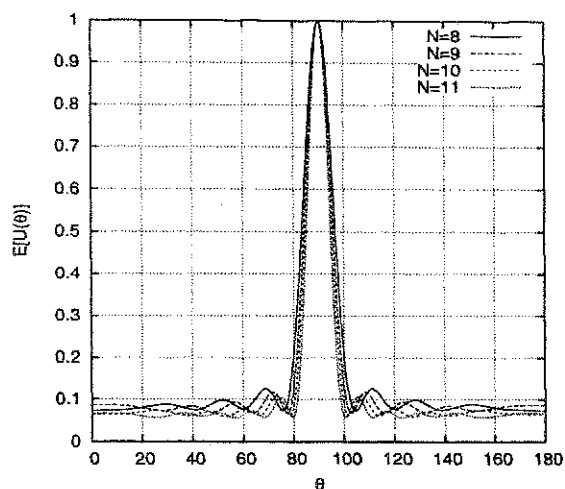
(b) Arranjo linear aperiódico com espaçamento  $d = \lambda/4$ .

Figura 3.12: Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear assimétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo  $z$ , para diferentes valores do número de elementos  $N$ .

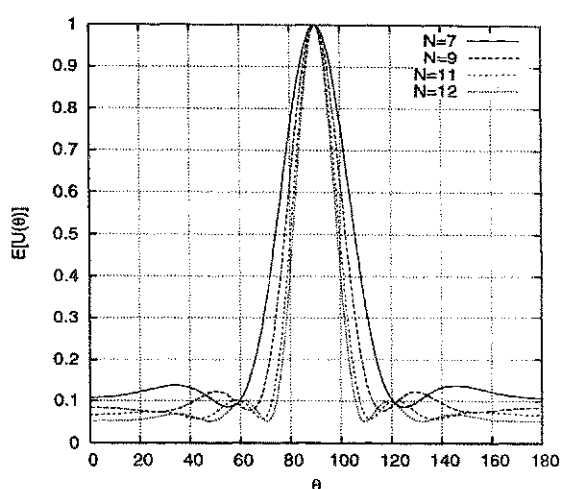
Fazendo o chaveamento das amplitudes de excitação entre três valores, por exemplo 0, 0,5 e 1,0, também de forma independente e equiprovável, pode-se obter um desempenho melhor do que o caso chaveado entre apenas dois valores de excitação. Na Figura 3.13 é mostrada a intensidade média de irradiação para um arranjo assimétrico com amplitudes de excitação chaveadas entre 0, 0,5 e 1. Observa-se nas Figuras 3.13(a) e 3.13(b) que há uma considerável diminuição nos lóbulos secundários usando-se esse método de excitação.

Usando a disposição simétrica dos elementos ao longo do eixo do arranjo, tem-se os padrões de irradiação mostrados na Figura 3.14.

Percebe-se pelas Figuras 3.12 e 3.13, que no caso assimétrico a atenuação nos lóbulos secundários tende a 0, 1 ou a 20 dB abaixo do valor máximo do lóbulo principal, podendo também chegar a 16, 48

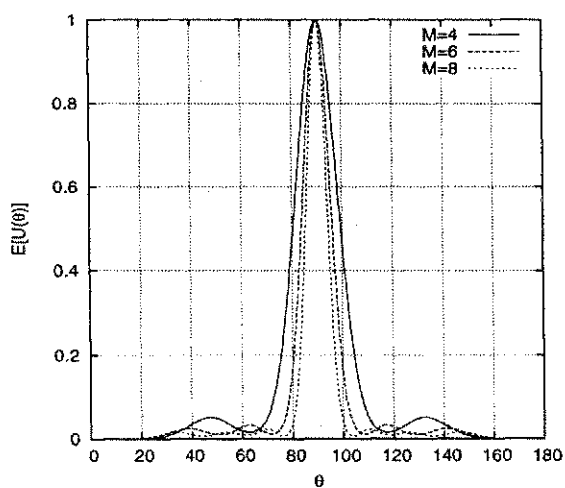


(a) Arranjo assimétrico com espaçamento  $d = \lambda/2$ .

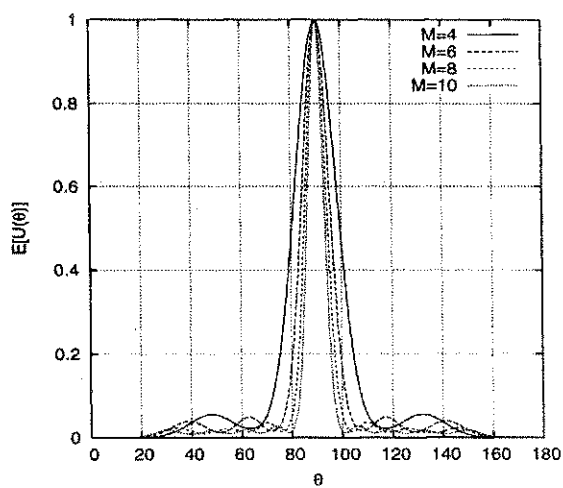


(b) Arranjo assimétrico com espaçamento  $d = \lambda/4$ .

Figura 3.13: Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear assimétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo  $z$ , para diferentes valores do número de elementos  $N$  e com amplitude de excitação chaveada aleatoriamente entre 0, 0,5 e 1, 0.



(a) Arranjo simétrico com excitação chaveada entre 0 e 1.

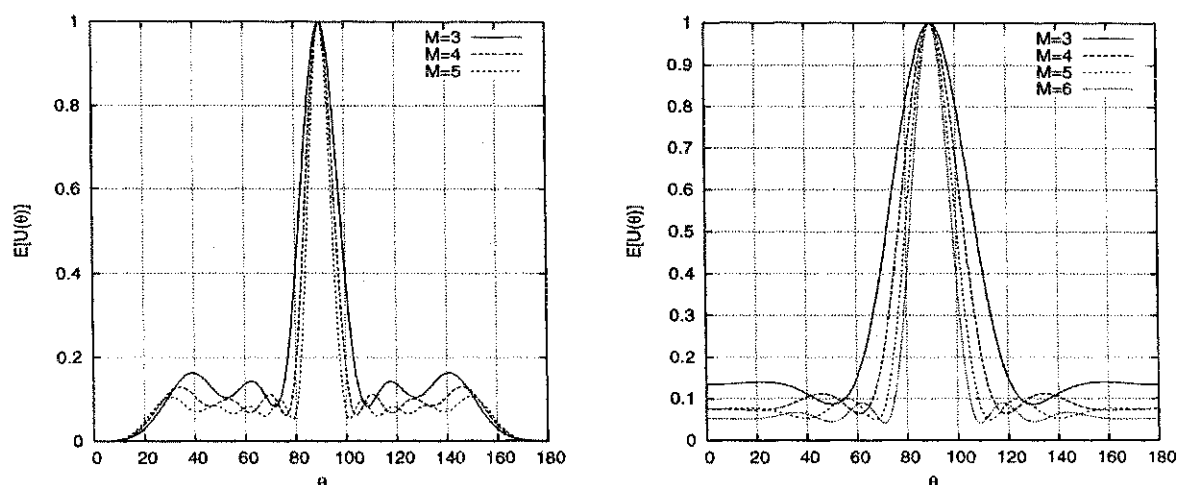


(b) Arranjo simétrico com excitação chaveada entre 0, 0,5 e 1, 0.

Figura 3.14: Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear simétrico e aperiódico, com elementos posicionado ao longo do eixo  $z$ , para diferentes valores do número de elementos  $M$  e com espaçamento  $d = \lambda/2$ .

dB, dependendo do número de elementos. No caso simétrico a amplitude dos lóbulos secundários tende a zero e quando  $M = 4$ , o valor máximo do primeiro lóbulo secundário atinge 26 dB abaixo máxima do lóbulo principal.

Se os elementos forem acionados sempre a partir de uma das extremidades do arranjo, pode-se impor uma certa dependência entre os elementos, de modo que a excitação do elemento seguinte dependa da excitação do elemento anterior. Um exemplo desse caso pode se visto nas Figuras 3.15, em que a excitação dos elementos é comutada equiprovavelmente entre 0, 0,5 e 1, 0. O estado do elemento seguinte sempre depende do estado do elemento anterior.



(a) Arranjo simétrico com espaçamento  $d = \lambda/2$ .

(b) Arranjo simétrico com espaçamento  $d = 0,25\lambda$ .

Figura 3.15: Diagrama de irradiação normalizado, no plano de elevação, de um arranjo linear simétrico e aperiódico, com elementos dispostos ao longo do eixo  $z$ , para diferentes valores do número de elementos  $M$  com coeficientes de excitação tomando valores equiprováveis no conjunto  $0, \frac{1}{2}, 1$ .

Percebe-se claramente pelas Figura 3.15(a) e 3.15(b), que a dependência na amplitude dos coeficientes de excitação tem praticamente o mesmo efeito no diagrama de irradiação que os casos com independência.

### 3.8 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a fundamentação matemática necessária ao projeto de arranjos lineares usando-se tanto amplitude de excitação quanto espaçamento entre elementos aleatório. Duas estruturas de arranjo linear foram consideradas: os arranjos simétricos e os assimétricos e pôde-se

perceber, por meio dos resultados numéricos, que é possível conseguir bons resultados em termos de diagrama de irradiação e até mesmo melhorar o diagrama de irradiação obtido por meio de algum método clássico. Verificou-se também ser possível especificar alguns dos parâmetros necessários ao projeto dos arranjos e que em termos de complexidade computacional as estruturas propostas são mais apropriadas. Embora as estruturas de arranjos aperiódicos já sejam conhecidas, propôs-se o uso de um tratamento matemático para o diagrama de irradiação resultante e o uso de diferentes distribuições de probabilidade para as amplitudes de excitação. Em todos os casos apresentados percebeu-se ser possível suavizar os lóbulos secundários e em alguns casos foi possível conseguir lóbulos com atenuações de mais de 26dB em relação à amplitude máxima do lóbulo principal. Em todos os casos deve haver comprometimento entre o desvio padrão  $\sigma_{AF}(\theta)$  e o acoplamento eletromagnético.

## Capítulo 4

# Cancelamento de Interferência por Meio de Auto-análise

### 4.1 Introdução

A partir deste capítulo, começa-se a analisar algumas propostas de aplicações das estruturas em arranjo no combate à interferência. Para esse propósito, são usados tanto os arranjos lineares quanto os arranjos circulares e o primeiro método estudado é o método da auto-análise. Além da introdução do método, que já é conhecido na literatura, são analisados os efeitos de perturbações, modeladas por variáveis aleatórias, na capacidade de cancelamento de interferência do método, é analisado o uso do arranjo circular como uma alternativa para contornar as falhas do arranjo linear e é analisado o desempenho do método quando se considera que os ângulos de chegada dos sinais de interferência são modelados por uma distribuição de probabilidade uniforme.

O método de autoanálise, ou método de super-resolução, tem sido extensivamente usado na estimação de direção de chegada, mas sua aplicação no cancelamento de interferências só foi proposto posteriormente. Esse método é baseado na auto-estrutura da matriz de correlação de saída do arranjo de antenas e tem propriedades que o torna vantajoso em algumas aplicações. Uma dessas aplicações será analisada neste capítulo e consiste na eliminação de sinais de interferência que chegam ao arranjo sob ângulos de incidência quaisquer e vindas de pontos distantes do arranjo. Esse cancelamento de interferência é feito usando a grande capacidade que o método tem de impor grandes atenuações, ou colocar nulos profundos, nos sinais indesejados.

Na estrutura do autocancelador já conhecida, é admitido que as direções de chegada das fontes de interferência e das fontes de sinais desejados sejam conhecidas. Geralmente, existe um estágio de estimação dos ângulos de chegada e do número de fontes de sinais incidentes, anterior à estimação



da matriz de correlação. No caso do arranjo linear é também admitido que a distância  $d$  entre os elementos do arranjo é fixa e igual a  $\lambda/2$ . Mas o que dizer do comportamento do autocancelador quando são atribuídas aleatoriedades aos parâmetros do modelo do sinal e da antena? Poder-se-ia admitir, por exemplo, que o ângulo de chegada das fontes de interferência tivesse distribuição aleatória dependente do modelo usado para o canal de comunicações e que a distância entre os elementos do arranjo sofresse pequenas variações. Em um arranjo de antenas, essas variações poderiam ser atribuídas à ação de fatores externos como variações de temperatura, o que levaria a expansão ou à compressão das dimensões dos elementos, à ação dos ventos, que causaria um desalinhamento nos elementos ou ainda à própria fadiga do material que compõe o arranjo.

Um outro problema que surge quando se estuda esse método é verificado quando os ângulos de chegada dos sinais incidentes se tornam muito próximos. Nesse caso, o método deixa de atender uma parte das especificações de projeto e sofre uma queda de desempenho.

#### 4.1.1 Definição do sistema autocancelador

Seja  $L$  o número de ondas planas que chegam a um arranjo linear com ângulos azimutais de chegada  $\phi_l$ , ( $l = 1, 2, \dots, L$ ). As fontes  $s_l$  dessas ondas planas são consideradas processos aleatórios faixa-estreita, decorrelacionados e de média nula. Se o número de elementos do arranjo é igual a  $N$ , então a  $n$ -ésima amostra de saída do arranjo é dada por

$$x_n = \sum_{l=1}^L s_l e^{-j(n-1)kdsen(\phi_l)} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1)$$

em que  $\eta_n$  representa a  $n$ -ésima amostra de ruído gaussiano aditivo, assumido decorrelacionado de elemento para elemento do arranjo, de média nula e variância  $\sigma_\eta^2$ . A Equação 4.1 pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}, \quad (4.2)$$

em que  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_L]$  é uma matriz  $N \times L$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_l &= [ 1 \ e^{-jkdsen(\phi_l)} \ e^{-j2kdsen(\phi_l)} \ \dots \ e^{-j(N-1)kdsen(\phi_l)} ]^T \\ \mathbf{s}^T &= [ s_1 \ s_2 \ s_3 \ \dots \ s_L ] \\ \boldsymbol{\eta}^T &= [ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \dots \ \eta_N ] \end{aligned}$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é chamada de matriz de direcionamento dos sinais incidentes no arranjo e suas colunas são divididas em vetores de direcionamento dos sinais desejados e dos sinais interferentes. Dessa forma, a Equação 4.2 pode ser reescrita como

$$\mathbf{x} = [\mathbf{A}_i \ \mathbf{A}_d]\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}. \quad (4.3)$$

Se o vetor de amostras  $\mathbf{x}$  fosse passado diretamente para o autocancelador, todos os sinais desejados seriam eliminados juntamente com os sinais interferentes. Dessa forma, nas aplicações práticas, é necessária uma etapa de pré-processamento das amostras tomadas nos elementos do arranjo. Esse pré-processamento faz uma transformação do espaço original do vetor  $\mathbf{x}$  para um espaço que não altera as características estatísticas de  $\mathbf{x}$ , mas que impede que as informações a respeito de  $\mathbf{A}_d$  sejam eliminadas.

Tanto no cancelamento de interferência quanto na determinação de ângulos de chegada, a matriz de correlação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$  tem um papel importante, já que é a partir de seus autovalores e autovetores que são obtidos os pesos ótimos do autocancelador. Uma característica importante dessa matriz é que ela é Hermitiana e portanto seus autovalores distintos geram autovetores ortogonais entre si. Dessa forma, subespaços formados a partir das colunas de  $\mathbf{R}$  são ortogonais. Naturalmente, a característica hermitiana  $\mathbf{R}$  vem do fato que o processo estocástico da Equação 4.3 é gaussiano [7].

A matriz  $\mathbf{A}_i$ , mostrada na Equação 4.3, também é definida como subespaço de interferência e é formada por  $N_i$  vetores de direcionamento das fontes de interferência. Esses vetores de direcionamento têm portanto a mesma direção do subespaço da interferência. Seja  $\mathbf{E}_i = [ \mathbf{e}_l, l = 1, 2, \dots, N_i ]$  a matriz formada pelos  $N_i$  autovetores correspondentes aos  $N_i$  maiores autovalores de  $\mathbf{R}$  e seja  $\mathbf{E}_\eta = [ \mathbf{e}_l, l = N_i + 1, \dots, N ]$  a matriz formada pelos  $N - N_i$  autovetores correspondentes aos  $N - N_i$  menores autovalores de  $\mathbf{R}$ , chamada de subespaço do ruído. Sabendo que o subespaço do ruído é ortogonal ao subespaço da interferência, para obter o cancelamento total do sinal de interferência deve-se projetar o vetor de pesos ótimos na direção subespaço do ruído  $\mathbf{E}_\eta$ , de modo que

$$\mathbf{w}_0^H \mathbf{E}_i = 0, \quad (4.4)$$

ou seja, o vetor de pesos ótimos deve ser projetado para ser ortogonal ao subespaço da interferência. Isso pode ser feito simplesmente definindo o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  como o produto interno entre um vetor  $\mathbf{v}$  e o subespaço do ruído.

Desse modo, desde que o subespaço  $\mathbf{E}_i$  é uma extensão do subespaço  $\mathbf{A}_i$ , tem-se que  $\mathbf{w}_0^H \boldsymbol{\kappa} = 0$  para qualquer  $\boldsymbol{\kappa}$  no subespaço da interferência  $\mathbf{A}_i$  e em particular para qualquer um dos vetores de direcionamento dos sinais de interferência. Isso significa que esse cancelador eliminará todos os sinais de interferência independentemente da potência do ruído aditivo. Essa característica é o que é realmente denominada de super-resolução.

A partir deste ponto é assumido que o vetor de amostras  $\mathbf{x}$  na Equação 4.2 já passou por uma fase de pré-processamento e portanto já sofreu uma transformação para um outro espaço matricial. Essa transformação é feita por meio de uma matriz de pré-processamento e será analisada posteriormente, apenas para informar o leitor. Com base nessa consideração, a matriz de correlação  $\mathbf{R}$  passa a ser

escrita como

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_i E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]\mathbf{A}_i^H + \sigma_\eta^2 \mathbf{I}. \quad (4.5)$$

Multiplicando a Equação 4.3 por  $\mathbf{w}^H$  e  $\mathbf{w}$  tem-se

$$\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}_i^H \mathbf{w} + \sigma_\eta^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} \quad (4.6)$$

que é na verdade a potência de saída do arranjo. Se  $\mathbf{w}$  for definido no subespaço do ruído, que é ortogonal ao subespaço  $\mathbf{A}_i$ , então a potência de saída do sinal desejado será anulada e a potência resultante será a soma das potências dos sinais de interferência mais ruído. Dessa forma, minimizar a potência de saída do arranjo é equivalente a minimizar a variância do ruído na saída do arranjo.

Deseja-se portanto obter um conjunto de coeficientes  $\mathbf{v}_0$  sob as seguintes restrições

$$\min \quad \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (4.7)$$

$$\text{sujeito a } \quad \mathbf{w}^H \mathbf{A}_d = \mathbf{g}^H \quad (4.8)$$

$$\text{e } \quad \mathbf{w} = \mathbf{E}_\eta \mathbf{v}_0, \quad (4.9)$$

em que  $\mathbf{A}_d = [ \mathbf{a}_{d_1} \quad \mathbf{a}_{d_2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{d_p} ]$ ,  $\mathbf{a}_{d_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  são as direções desejadas pré-definidas e  $\mathbf{g}^H = [ g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_p ]$  são os ganhos pré-associados ao diagrama de radiação do arranjo nas direções de  $\mathbf{a}_{d_i}$ . De fato, a condição dada na Equação 4.9 reflete a restrição de que o vetor de coeficientes ótimos esteja no subespaço  $\mathbf{E}_\eta$  e portanto seja ortogonal a  $\mathbf{E}_i$ , como é necessário para que haja super-resolução. Substituindo 4.9 em 4.7 e 4.8, tem-se que encontrar o vetor de pesos ótimos  $\mathbf{v}_0$  que atenda às restrições

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{v}^H \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{R} \mathbf{E}_\eta \mathbf{v} \\ \text{sujeito a } & \mathbf{v}^H \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{A}_d = \mathbf{g}^H. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esse problema pode ser resolvido por meio de multiplicadores de Lagrange, escrevendo-se a função  $f(\mathbf{v}, \xi)$

$$g(\mathbf{v}, \xi) = \sigma_\eta^2 \mathbf{v}^H \mathbf{U} \mathbf{v} - \xi (\mathbf{v}^H \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{A}_d - \mathbf{g}^H), \quad (4.11)$$

derivando-a com relação a  $\mathbf{v}$  e  $\xi$  e igualando o resultado a zero. Dessa forma, encontra-se que o vetor de pesos ótimos  $\mathbf{v}_0$  pode ser dado por

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_{1d} (\mathbf{A}_{1d}^H \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_{1d})^{-1} \mathbf{g}, \quad (4.12)$$

em que  $\mathbf{U} = \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{R} \mathbf{E}_\eta$ ,  $\mathbf{A}_{1d} = \mathbf{E}_\eta \mathbf{A}_d$  e foi usado o fato de que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}^{-1}$  são Hermitianas.

Na Figura 4.1 é mostrada, como um exemplo, a resposta de um arranjo linear com os coeficientes ótimos obtidos de acordo com a teoria de auto-análise. O sinal considerado consiste da soma de  $N_i$

componentes de interferência, e, no  $l$ -ésimo instante discreto de tempo este sinal, captado em um arranjo de  $N$  elementos, com distância  $d = \lambda/2$ , pode ser escrito como

$$s_l = \sum_{n=1}^{N_i} a_n e^{-j(l-1)\pi \text{sen}(\phi_n)} + \eta_l, \quad (4.13)$$

em que  $a_n$  e  $\phi_n$  são a amplitude e o ângulo de chegada do  $n$ -ésimo sinal de interferência. É assumido que o sinal recebido já passou pela etapa de pré-processamento e que os ângulos de chegada dos sinais desejados são conhecidos.

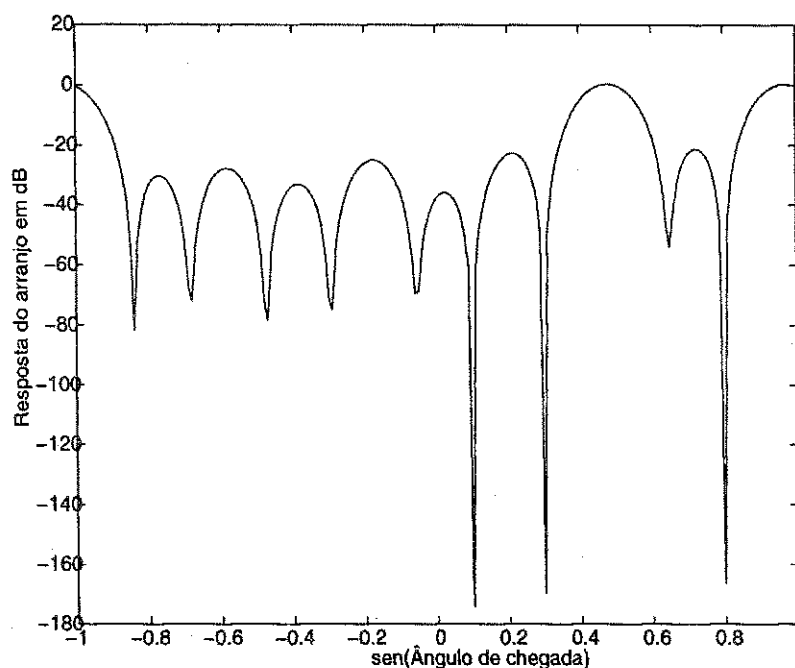


Figura 4.1: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos posicionados ao longo do plano  $x - y$ , com 3 fontes de interferência.

Percebe-se pela Figura 4.1 que o autocancelador coloca nulos bem profundos<sup>1</sup> na direção dos sinais indesejados,  $\text{sen}(\phi_1) = 0.1$ ,  $\text{sen}(\phi_2) = 0.3$  e  $\text{sen}(\phi_3) = 0.8$ , e dá um ganho unitário na direção dos sinais desejados,  $\text{sen}(\phi_{d_1}) = 0.50$  e  $\text{sen}(\phi_{d_2}) = 0.95$ .

#### 4.1.2 A fase de pré-processamento

A fase de pré-processamento é necessária para que se possa separar os sinais de interferência dos sinais desejados. Nessa etapa, é definida uma matriz  $\mathbf{C}$  que faz uma filtragem espacial do vetor de amostras  $\mathbf{x}(t)$ , tomado nos elementos do arranjo, para que se possa então obter a matriz de correlação

<sup>1</sup>O termo “nulos profundos” significa grandes atenuações nas direções dos sinais indesejados.

só com os sinais de interferência. A matriz  $\mathbf{C}$  tem dimensões  $(N - N_d) \times N$  e quando aplicada ao vetor de amostras de entrada  $\mathbf{x}$ , faz surgir as seguintes variáveis:

- A matriz de correlação espacial  $\mathbf{R}_i = \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{C}^H$  com dimensões  $(N - N_d) \times (N - N_d)$
- O vetor  $\mathbf{x}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}$  com dimensão  $(N - N_d) \times 1$
- A matriz de direcionamento  $\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}_i$  com dimensões  $(N - N_d) \times N_d$ .

No caso de um arranjo linear, considerando-se apenas um sinal desejado, a matriz  $\mathbf{C}$   $(N - N_d) \times N$  pode ser escrita como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -z_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -z_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

em que  $z_1 = e^{-j\beta d \sin \phi_1}$ . No caso de um arranjo circular de raio  $r$  e com  $N$  elementos pode-se adiantar que a matriz de pré-processamento, para apenas um sinal desejado, pode ser escrita como

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} z_{l,1} & -z_{l,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z_{l,2} & -z_{l,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{l,3} & -z_{l,4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_{l,4} & -z_{l,5} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & z_{l,N-1} & -z_{l,N} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

em que  $z_{m,n} = e^{jkr \cos(\phi_m - \tilde{\theta}_n)}$  e  $\tilde{\theta}_n$  é a posição de cada elemento no arranjo. Mais detalhes a respeito do cancelamento de interferência com arranjo circular serão apresentados posteriormente. A seção prossegue com a obtenção dos subespaços da matriz  $\mathbf{R}_i$ . Esses subespaços passam a ser formados pelos autovetores generalizados de  $\mathbf{R}_i$ , denotados por  $\mathbf{e}_g$  e devem satisfazer a relação  $\mathbf{R}_i \mathbf{e}_g = \lambda_g \mathbf{G} \mathbf{e}_g$ , em que  $\mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{C}^H$ . A decomposição da matriz  $\mathbf{R}_i$  tem as seguintes características

- $\mathbf{R}_i$  possui  $N - N_d - N_i$  autovalores generalizados iguais a  $\sigma_\eta^2$
- Os autovetores associados aos  $N - N_d - N_i$  autovalores generalizados formam um subespaço  $\tilde{\mathbf{E}}_\eta$  ortogonal à matriz de direcionamento  $\tilde{\mathbf{A}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_\eta \perp \tilde{\mathbf{A}}_i$ .

- O subespaço da interferência é obtido a partir das colunas de  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$ , em que  $\tilde{\mathbf{E}}_i$  é uma matriz formada pelos autovetores correspondentes aos  $N_i$  autovalores generalizados dominantes de  $\mathbf{R}_i$ .

O vetor de coeficientes após o pré-processamento é então obtido a partir das restrições

$$\begin{cases} \min & \mathbf{w}^H \mathbf{R}_\eta \mathbf{w} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{w}^H \mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i = 0, \\ & \text{e } \mathbf{w}^H \mathbf{d}_1 = 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

em que  $\mathbf{R}_\eta = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}$ .

Para que se possa obter o vetor de pesos ótimos que atenda às restrições em 4.16 é necessário antes fazer uma decomposição em valor singular (SVD) da matriz  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$  tal que

$$\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{Q}_u \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}_u^H = [\mathbf{Q}_i \quad \mathbf{Q}_\eta] \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}_u^H, \quad (4.17)$$

em que  $\mathbf{Q}_u$  e  $\mathbf{V}_u$  são matrizes unitárias, ortogonais e de dimensões  $(N - N_d) \times (N - N_d)$  e  $N_i \times N_i$ , respectivamente, e  $\Sigma_i$  é uma matriz diagonal formada por valores singulares de  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$ . As partições  $\mathbf{Q}_i$  e  $\mathbf{Q}_\eta$  têm respectivamente  $N_i$  e  $N - N_d - N_i$  colunas ortogonais. Ainda de acordo com a Álgebra Linear, as matrizes  $\mathbf{Q}_i$  e  $\mathbf{Q}_\eta$  formam duas bases ortonormais tais que

1.  $\mathbf{Q}_i$  é uma base ortonormal ao espaço coluna da matriz  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$
2.  $\mathbf{Q}_\eta$  é uma base ortonormal ao espaço coluna da matriz  $(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i)^\perp$ .

A matriz  $\mathbf{Q}_i$  forma uma base ortonormal para gerar o espaço coluna da matriz  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$  e a matriz  $\mathbf{Q}_\eta$  forma uma base ortonormal para gerar um espaço coluna ortogonal ao espaço coluna gerado pela matriz  $\mathbf{Q}_i$ . Tem-se dessa forma que um vetor de pesos  $\mathbf{w}$  projetado na base  $\mathbf{Q}_\eta$  cancela completamente os sinais com direções indesejadas contidos no subespaço de interferência gerado por  $\mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}_i$ .

Projetando-se o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  na direção da base ortonormal  $\mathbf{Q}_\eta$  tem-se que o vetor de pesos resultante  $\mathbf{u}_\eta$  pode ser escrito como  $\mathbf{u}_\eta = \mathbf{Q}_\eta^H \mathbf{w}$  e conseqüentemente  $\mathbf{w} = \mathbf{Q}_\eta \mathbf{u}_\eta$ . Usando este resultado, a Equação 4.16 pode ser escrita como

$$\begin{cases} \min & \sigma_\eta^2 \mathbf{u}_\eta^H \mathbf{u}_\eta \\ \text{sujeito a} & \mathbf{u}_\eta^H \mathbf{Q}_\eta^H \mathbf{a}_d = 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Usando então o método de Lagrange e assumindo que  $\mathbf{a}_d$  seja o vetor de direcionamento do sinal desejado, obtém-se que

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{Q}_\eta \mathbf{Q}_\eta^H \mathbf{a}_d}{\|\mathbf{Q}_\eta^H \mathbf{a}_d\|^2}. \quad (4.19)$$

A fase de processamento, embora necessária, só é implementada em aplicações práticas. Para efeito de avaliação do desempenho das estruturas, é suficiente assumir que os sinais já tenham passado por ela que é também conhecida, do ponto de vista de energia, como filtragem de branqueamento.

## 4.2 Problema com Direções Aleatórias para os Sinais de Interferência

Nesta seção é analisado o comportamento do autocancelador quando se considera que os ângulos dos sinais de interferência têm distribuição de probabilidade uniforme.

Mais uma vez, é admitido que o vetor de amostras tomado nos elementos de um arranjo linear de  $N$  elementos já passou pela fase de pré-processamento. As amostras de sinais desse vetor são representadas pela soma de amostras de processos estocásticos decorrelacionados, de média nula e variância  $\sigma_s^2$ . As amostras de ruído aditivo em cada elemento também são representadas por um processo gaussiano de média nula e variância  $\sigma_\eta^2$ . Essa consideração proporciona uma simplificação na notação e desenvolvimento matemático e permite escrever as amostras tomadas no arranjo como

$$x_n = \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{-j(n-1)kd \cos(\phi_l)} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.20)$$

em que  $E[s_l s_l^*] = \sigma_s^2$ ,  $E[\eta_n \eta_n^*] = \sigma_\eta^2$ , é admitido que o número de fontes de sinais interferentes é conhecido e igual a  $N_i$  e que os ângulos de chegada desses sinais indesejados são variáveis aleatórias independentes entre os elementos do arranjo e com distribuição uniforme no intervalo  $[0; \pi]$ , como mostrado na Figura 4.2.

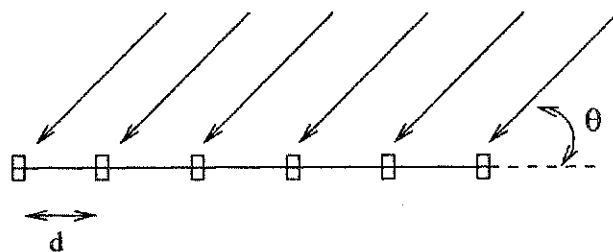


Figura 4.2: Estrutura de um arranjo linear com espaçamento  $d$  entre os elementos e com ângulo de chegada aleatório das fontes de interferência.

As amostras  $x_n$  podem ainda ser escritas como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{N_i} s_l \\ \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{-jkd \cos(\phi_l)} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{-j(N-1)kd \cos(\phi_l)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Com base nessas considerações, a matriz de correlação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{xx}^H]$  pode ser escrita como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\sqrt{N_i\sigma_s}}\right)^2 & J_0(kd) & J_0(2kd) & \cdots & J_0((N-1)kd) \\ J_0(kd) & 1 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\sqrt{N_i\sigma_s}}\right)^2 & J_0(kd) & \cdots & J_0((N-2)kd) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_0((N-1)kd) & J_0((N-2)kd) & J_0((N-3)kd) & \cdots & 1 + \left(\frac{\sigma_\eta}{\sqrt{N_i\sigma_s}}\right)^2 \end{bmatrix} N_i\sigma_s^2, \quad (4.22)$$

em que  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Os elementos de  $\mathbf{R}$ , denotados por  $r_{m,n}$ , ainda podem ser escritos na forma

$$r_{m,n} = \begin{cases} N_i\sigma_s^2 J_0(|m-n|kd), & m \neq n \\ N_i\sigma_s^2 + \sigma_\eta^2, & m = n \end{cases}, \quad (4.23)$$

em que  $|x|$  representa valor absoluto de  $x$ .

Para o caso em que há apenas uma fonte de interferência, pode-se tomar o vetor de direcionamento médio como sendo

$$\bar{\mathbf{a}}_i = [1 \quad J_0(kd) \quad \cdots \quad J_0((N-1)kd)]^T, \quad (4.24)$$

que é o valor esperado do vetor de direcionamento  $\mathbf{a}_i$ , dado por

$$\mathbf{a}_i = \left[ 1 \quad e^{-jkd \cos(\phi)} \quad \cdots \quad e^{-j(N-1)kd \cos(\phi)} \right]. \quad (4.25)$$

Como foi considerada apenas uma fonte de interferência, o autovetor de  $\mathbf{R}$  que corresponde ao subespaço de interferência está na direção de  $\bar{\mathbf{a}}_i$  e desse modo pode-se considerar simplesmente que  $\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{a}}_i$ , ou seja o subespaço do sinal é formado apenas pelo vetor de direcionamento médio  $\bar{\mathbf{a}}_i$ . Desse modo os  $N-1$  autovetores que formam o subespaço do ruído podem ser obtidos, de forma sistemática, tomando-se vetores que sejam ortogonais a  $\mathbf{e}_1$ .

Dessa forma, um possível conjunto completo de autovetores da matriz  $\mathbf{R}$  pode ser escrito como na Equação 4.26 a seguir. Já a matriz  $\mathbf{U} = \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{E}_\eta$  pode ser obtida simplesmente multiplicando-se a matriz  $\mathbf{E}_\eta$ , formada pelos  $N-1$  autovetores de  $\mathbf{R}$ , pela sua transposta

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ J_0(kd) \\ J_0(2kd) \\ \vdots \\ J_0((N-1)kd) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{J_0(kd)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{J_0(kd)}{J_0(2kd)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \frac{J_0((N-2)kd)}{J_0((N-1)kd)} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$



A matriz  $U$  pode ser escrita como

$$U = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{1}{J_0(kd)}\right)^2 & -\frac{1}{J_0(kd)} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{J_0(kd)} & 1 + \left(\frac{J_0(kd)}{J_0(2kd)}\right)^2 & -\frac{J_0(kd)}{J_0(2kd)} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{J_0(kd)}{J_0(2kd)} & 1 + \left(\frac{J_0(2kd)}{J_0(3kd)}\right)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{J_0((N-1)kd)}{J_0((N-2)kd)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \left(\frac{J_0((N-2)kd)}{J_0((N-1)kd)}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Tomando-se, por exemplo, o caso em que o número de fontes de interferência  $N_i = 3$ , o número de elementos do arranjo é  $N = 10$  e o espaçamento entre os elementos do arranjo  $d = \lambda/4$ , tem-se a seguinte resposta do autocancelador mostrada na Figura 4.3 para os casos em que  $\text{sen}(\phi_{d_1}) = 0,35$  e  $\text{sen}(\phi_{d_2}) = 0,90$ .

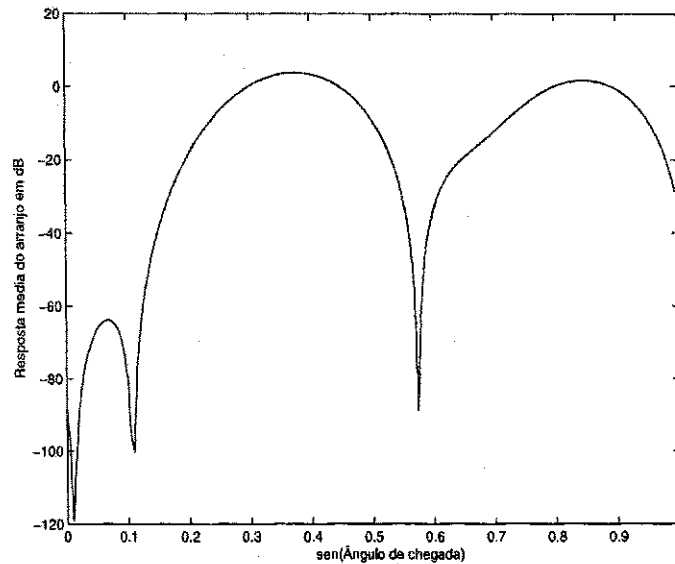


Figura 4.3: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x - y$ , com 3 fontes de interferência de direções aleatoriamente distribuídas no intervalo  $[0, \pi]$ .

Como se pode perceber na Figura 4.3, embora as direções de chegada das fontes de interferência tenham distribuição aleatória, o autocancelador atenda às restrições nas direções desejadas  $\text{sen}(\phi_{d_1}) = 0,35$  e  $\text{sen}(\phi_{d_2}) = 0,90$ . Na próxima seção são considerados os casos em que as variações nas distâncias entre os elementos do arranjo são modeladas como variáveis aleatórias.

### 4.3 Problema com Aleatoriedades na Estrutura do Arranjo

Considere agora o caso em que a distância  $d$  entre os elementos do arranjo sofre uma pequena variação modelada por uma variável aleatória gaussiana  $\varrho$  de média nula e variância  $\sigma_\varrho^2$ . O modelo matemático do problema passaria a ser dado por

$$x_n = \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{-j(n-1)(d+\varrho)k\text{sen}(\phi_l)} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.27)$$

Sabendo que  $s_l$  é um processo descorrelacionado de média nula e que as amostras de ruído gaussiano modeladas por  $\eta_n$  são independentes de elemento para elemento do arranjo, tem-se que as amostras da matriz de correlação nesse caso, após a fase de pré-processamento, podem ser escritas como

$$r_{mn} = \begin{cases} N_i \sigma_s^2 + \sigma_\eta^2, & m = n \\ \sigma_s^2 \sum_{l=1}^{N_i} \exp(j(m-n)d\text{sen}\phi_l) \exp\left[-\left(\frac{(m-n)\sigma_\varrho \text{sen}\phi_l}{\sqrt{2}}\right)^2\right], & m > n \\ r_{mn}^*, & m < n \end{cases} \quad (4.28)$$

em que  $r_{mn}^*$  é o complexo conjugado do elemento  $r_{mn}$  da matriz  $\mathbf{R}$ .

Considerando novamente uma única fonte de interferência e tomando um vetor de direcionamento médio dado pelo valor esperado do vetor de direcionamento

$$\mathbf{a}_i = \left[ 1 \quad e^{-jk(d+\varrho)\text{sen}\phi} \quad \dots \quad e^{-j(N-1)k(d+\varrho)\text{sen}\phi} \right] \quad (4.29)$$

tem-se que

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \left[ 1 \quad zu \quad z^2 u^4 \quad \dots \quad z^{N-1} u^{(N-1)^2} \right], \quad (4.30)$$

em que  $z = \exp(-jk d \text{sen}(\phi))$  e  $u = \exp\left[-\left(\frac{k\sigma_\varrho}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$ .

Do mesmo modo que na Equação 4.29, pode-se tomar o autovetor do subespaço do sinal  $\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{a}}_i$  e os outros  $N - 1$  autovetores do subespaço do ruído como sendo vetores ortogonais a  $\mathbf{e}_1$ , que podem ser escritos como

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ z^* u^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ z^* u^{-3} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ z^* u^{-(2n-3)} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

em que  $n = 2, 3, \dots, N$  e a matriz  $\mathbf{U} = \mathbf{E}_\eta^H \mathbf{E}_\eta$  é dada por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 + u^{-2} & -zu^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -z^*u^{-1} & 1 + u^{-6} & -zu^{-3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z^*u^{-3} & 1 + u^{-10} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & zu^{-(2N-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + u^{-2(2N-3)} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Na Figura 4.4 é mostrada a distorção na resposta do autocancelador quando uma variável aleatória  $\varrho$  de média nula e variância  $\sigma_\varrho^2 = 0.0015$  é somada à distância  $d = \lambda/2$  entre os elementos do arranjo.

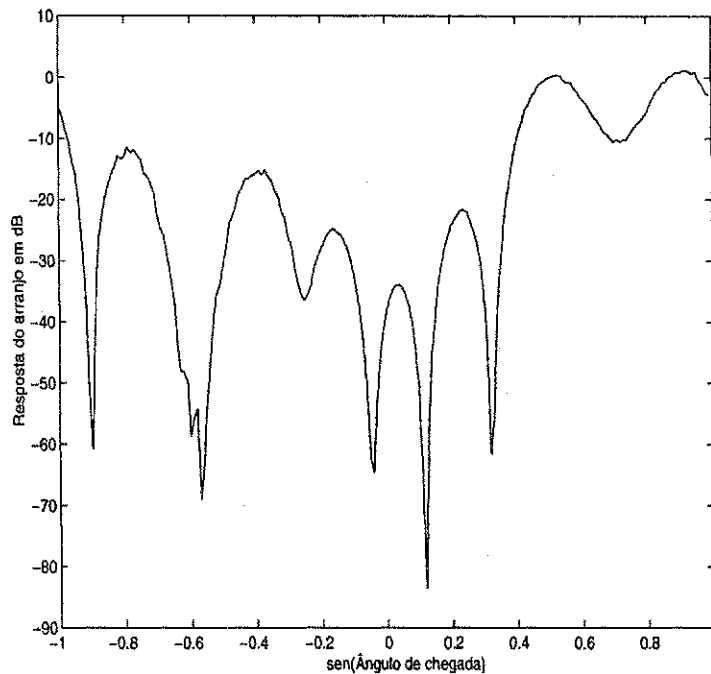


Figura 4.4: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x-y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação aleatória  $\varrho$  de média nula e variância  $\sigma_\varrho^2 = 0.0015$ .

Como se pode perceber na Figura 4.4, para um valor de variância pequeno,  $\sigma_\varrho^2 = 0.0015$ , o autocancelador apresenta uma pequena atenuação das 3 fontes de sinais de interferência que chegam ao arranjo com ângulos de chegada dados de modo que  $\text{sen}\phi_{i_1} = 0.10$ ,  $\text{sen}\phi_{i_2} = 0.30$  e  $\text{sen}\phi_{i_3} = 0.80$ . Nas 2 fontes de sinais desejados que chegam com ângulos de incidência tais que  $\text{sen}\phi_{d_1} = 0.50$  e  $\text{sen}\phi_{d_2} = 0.95$  o autocancelador apresenta ganho predeterminado de 0dB. Há portanto uma queda de desempenho em relação à estrutura de parâmetros não-perturbados com resposta mostrada na Figura 4.5.

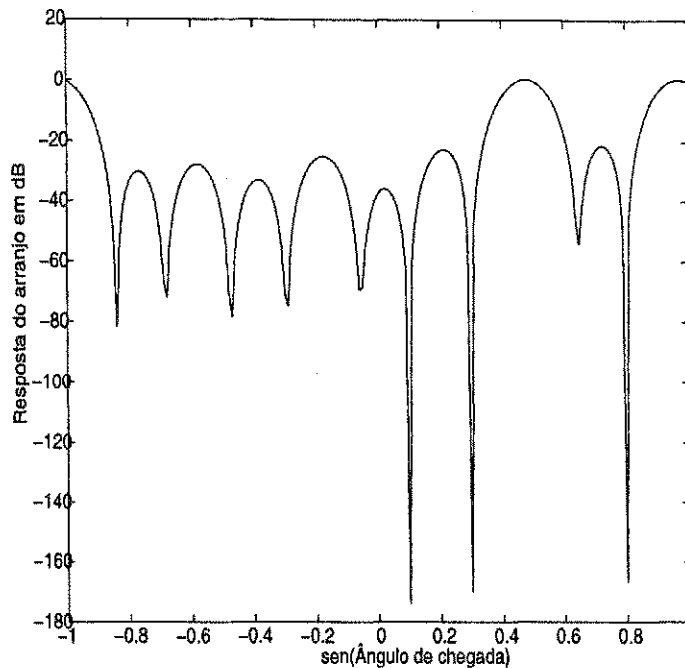


Figura 4.5: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos, com 3 fontes de interferência de direções conhecidas e parâmetros não-perturbados.

Na Figura 4.6 é mostrada a resposta do autocancelador quando a variância da variável  $\varrho$  é diminuída para  $\sigma_{\varrho}^2 = 0.0000625$ .

Como se pode perceber na Figura 4.6, a resposta do autocancelador começa a se aproximar da resposta mostrada na Figura 4.5 à medida que a variância da perturbação  $\varrho$  diminui.

O último caso a ser considerado é aquele em que a distância  $d$  entre os elementos sofre uma pequena variação uniforme no intervalo  $[d - \varsigma, d + \varsigma]$ . Essa seria uma outra forma de modelar fatores como variações de dimensão do arranjo causada por fadiga do material que compõe a estrutura da antena, variações de dimensão causada por dilatação ou compressão do comprimento da antena, devido a temperatura e outras causas. Nesse caso, o modelo de sinal na saída do arranjo pode ser escrito como

$$x_n = \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{-j(n-1)k d \text{sen}(\phi_l)} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.33)$$

e os novos coeficientes da matriz de correlação  $\mathbf{R}$ , após o pré-processamento, seriam dados por

$$r_{mn} = \begin{cases} N_i \sigma_s^2 + \sigma_{\eta}^2, & m = n \\ \sigma_s^2 \sum_{l=1}^{N_i} S_{mn}(l), & m > n \\ r_{mn} = r_{nm}^*, & m < n \end{cases}, \quad (4.34)$$

em que

$$S_{mn}(l) = \text{Sa}((m-n)k\varsigma \text{sen}\phi_l) \exp(-j(m-n)k d \text{sen}\phi_l).$$

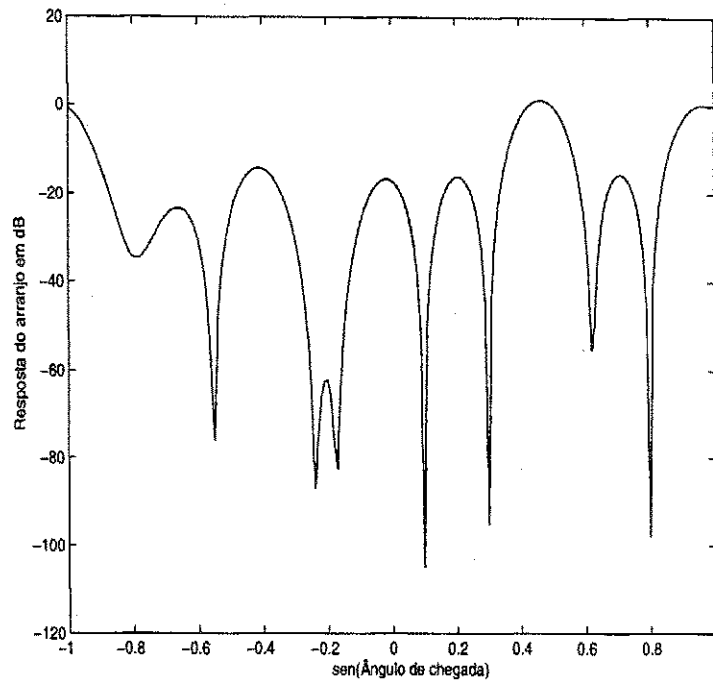


Figura 4.6: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x - y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação aleatória  $\rho$  de média nula e variância  $\sigma_\rho^2 = 0.0000625$ .

Procedendo em relação à obtenção da matriz  $\mathbf{U}$  da mesma forma que nos dois casos anteriores, chega-se ao conjunto de pesos ótimos do autocancelador. Na Figura 4.7 é mostrada a resposta do autocancelador para o caso em que  $d$  sofre uma pequena variação no intervalo  $[d - \varsigma, d + \varsigma]$  para  $\varsigma = 0.05$ .

Como pode ser visto na Figura 4.7, há uma queda de desempenho quando  $d$  sofre uma pequena variação e a capacidade do autocancelador de colocar nulos profundos nas direções indesejadas começa a ficar comprometida em relação à estrutura sem perturbação. Na tentativa de tornar a estrutura de autocancelamento mais robusta a distúrbios, como os citados acima, são estudadas outras configurações de arranjo, como o arranjo circular, proposto na próxima seção junto com o método de autoanálise.

## 4.4 Cancelamento de Interferência com Arranjo Circular

Considere um arranjo com um número  $N$  de elementos regularmente distribuídos ao longo de um círculo de raio  $a$  e na posição angular  $\hat{\theta}_n = 2\pi \left(\frac{n}{N}\right)$ . É mostrado nesta seção que essa estrutura pode ser usada na implementação do método de auto-análise e que seu uso não altera o procedimento de decomposição da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  nos subespaços do ruído e da interferência. Nessa nova configuração, altera-se apenas a forma da matriz de direcionamento  $\mathbf{A}$ .

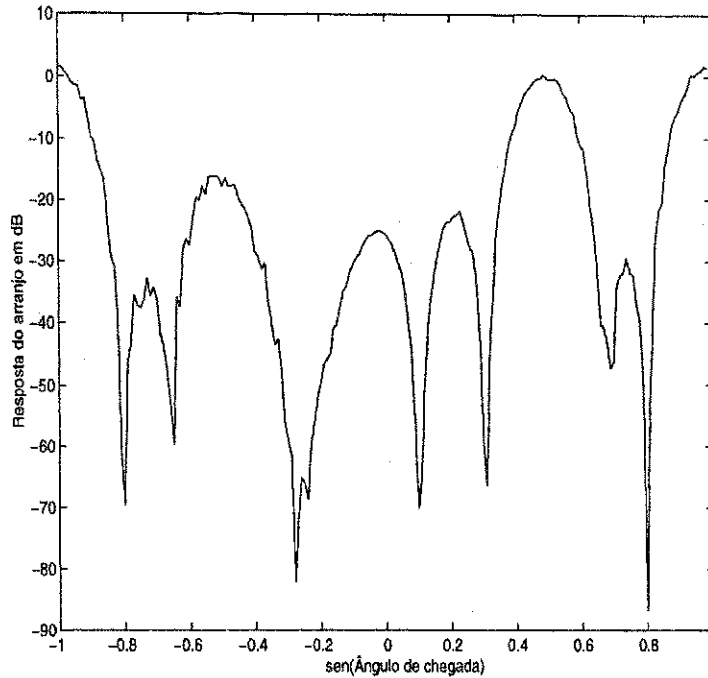


Figura 4.7: Resposta de um autocancelador usando um arranjo linear de 10 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x - y$ , com 3 fontes de interferência e com uma variação da distância  $d$  no intervalo  $[d - 0.05, d + 0.05]$ .

Assumindo que um número  $N_i$  de sinais chegue ao arranjo circular com um ângulo chegada  $\phi_l$ , tem-se que as amostras de sinais tomadas em cada elemento podem ser modeladas por

$$x_n = \sum_{l=1}^{N_i} s_l e^{j\beta a \cos(\phi_l - \tilde{\theta}_n)} + \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.35)$$

em que as amostras  $s_l$  representam processos faixa-estreita de média nula e decorrelacionados de elemento para elemento do arranjo. A variável  $\eta_n$  representa a  $n$ -ésima amostra de ruído gaussiano de média nula e variância  $\sigma_\eta^2$  adicionada às amostras de sinais captadas nos elementos do arranjo.

A Equação 4.35 pode ser escrita em uma notação matricial como

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}, \quad (4.36)$$

em que  $\mathbf{s}^T = [s_1 \ \dots \ s_{N_i}]$ ,  $\boldsymbol{\eta}^T = [\eta_1 \ \dots \ \eta_N]$  e  $\mathbf{A}$  é a matriz de direcionamento  $N \times L$  dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{jka \cos \varphi_{1,1}} & e^{jka \cos \varphi_{2,1}} & \dots & e^{jka \cos \varphi_{L,1}} \\ e^{jka \cos \varphi_{1,2}} & e^{jka \cos \varphi_{2,2}} & \dots & e^{jka \cos \varphi_{L,2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{jka \cos \varphi_{1,N}} & e^{jka \cos \varphi_{2,N}} & \dots & e^{jka \cos \varphi_{L,N}} \end{bmatrix},$$

em que  $\varphi_{n,m} = (\phi_n - \tilde{\theta}_m)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_i$  e  $m = 1, 2, \dots, N$ .

A matriz de correlação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$  tem um papel importante no problema e, admitindo que já tenha passado pela fase de pré-processamento, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \\ &= \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}_i^H + \sigma_\eta^2 \mathbf{I},\end{aligned}\quad (4.37)$$

em que  $\mathbf{S} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]$  é uma matriz diagonal cujos elementos são iguais a  $\sigma_s^2$ .

O procedimento para obter os coeficientes ótimos do autocancelador é similar ao procedimento usado para obter os coeficientes da estrutura com arranjo linear. Tem-se basicamente que obter os subespaços dos sinais de interferência e do ruído e confinar o vetor de coeficientes do autocancelador no subespaço do ruído denotado por  $\mathbf{E}_\eta$ . Com este procedimento pode-se obter os resultados mostrados na Figura 4.8 a seguir. Nesta figura é mostrado um caso comportado, em que existe um espaço angular regular entre os ângulos de chegada, ou seja os ângulos de chegada dos sinais de interferência são  $5^\circ$ ,  $35^\circ$  e  $50^\circ$  e o ângulo do sinal desejado é  $80^\circ$ . A relação ruído/interferência (INR) foi assumida 10 dB.

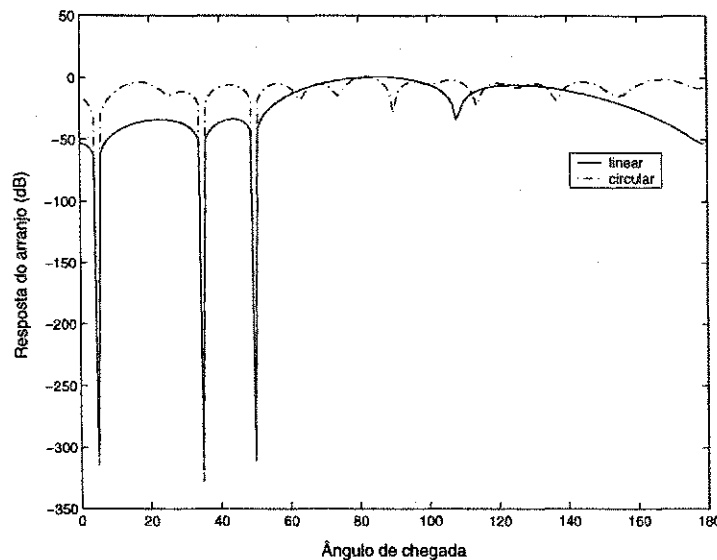


Figura 4.8: Resposta do autocancelador: Arranjo linear versus arranjo circular, ambos com 5 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x - y$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $ka = 5\pi$ . Os ângulos de chegada dos sinais de interferência são  $5^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $50^\circ$  e o ângulo de chegada do sinal desejado é  $80^\circ$ .

Como pode ser visto na Figura 4.8, ambas as estruturas apresentam um bom comportamento em relação ao cumprimento das restrições. No segundo caso, em que a diferença entre os ângulos de chegada é reduzida para  $5^\circ$ , a resposta dos arranjos passa a se comportar como ilustrado na Figura 4.9.

Como pode ser visto na Figura 4.9, as restrições impostas são atendidas, mas qualquer outro sinal que chegue com ângulo de chegada próximo ( $< 5^\circ$ ) ao ângulo do sinal desejado recebe um ganho acima do valor máximo permitido. Esse ganho acima de um valor unitário é uma falha numérica do arranjo

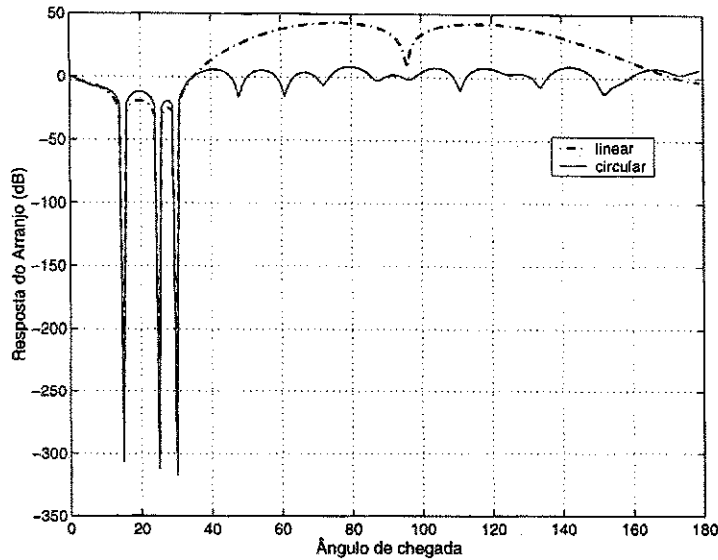


Figura 4.9: Resposta do autocancelador: Arranjo linear versus arranjo circular, ambos com 5 elementos isotrópicos ao longo do plano  $x - y$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $\beta a = 5\pi$ , mas com uma diferença entre os ângulos de chegada de  $5^\circ$ , ou seja  $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$  e ângulo desejado  $\phi_d = 35^\circ$ .

linear e o inviabiliza para ser usado em sistemas de comunicações no cancelamento de interferência. Pode-se verificar por avaliação numérica que para diferenças de ângulos de chegada maiores ou iguais que  $5^\circ$ , o auto-cancelador com ambas as estruturas de arranjo de antenas tem desempenho normal. Para diferenças de ângulos de chegada igual ou menor que  $5^\circ$  o auto-cancelador implementado com arranjo circular atende às especificações de projeto, não fornecendo ganho acima do valor unitário.

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo foi feita uma análise da resposta do autocancelador em situações em que os parâmetros do modelo matemático do arranjo de antenas, usado em conjunto com esse autocancelador, apresentam perturbações aleatórias. Inicialmente, mostrou-se que a direção das fontes de interferência que chegam ao arranjo pode ser aleatória e para o caso em que é uniformemente distribuída no intervalo  $[0, \pi]$  os elementos da matriz de correlação são dados na Equação 4.22. Nesse caso, embora o autocancelador apresente uma queda de desempenho em relação à profundidade das atenuações, ele é capaz de dá um ganho aos sinais na direção desejada e dar uma considerável atenuação aos sinais que chegam em outras direções. Em seguida foram analisados dois casos de perturbação na estrutura do arranjo que podem ser atribuídos a fatores como fadiga do material que compõe o arranjo, variação da dimensão dos elementos do arranjo e conseqüentemente da distância entre eles em função de mudanças de temperatura e efeitos de desalinhamento causados, por exemplo, pela ação do vento. Essas variações na



---

distância  $d$  entre os elementos, foram modeladas por uma variável aleatória  $\varrho$  de média nula e variância  $\sigma_\varrho^2$  somada ao espaçamento  $d$  e por uma variação de  $d$  em um intervalo  $[d - \varsigma, d + \varsigma]$ . Nos dois casos foi visto que, mesmo para valores bem pequenos de  $\varrho$  e  $\varsigma$ , o autocancelador teve uma considerável perda de desempenho em relação à estrutura não-perturbada. Além disso, foi visto que a estrutura de arranjo circular apresenta um bom desempenho quando usada no cancelamento de interferência e que, dependendo da situação, esta estrutura pode ser mais apropriada que a estrutura linear.

# Capítulo 5

## Estudo do Canal Direcional

### 5.1 Introdução

Geralmente, em sistemas de comunicações móveis, o modelo matemático do canal tem um importante papel. Seria difícil avaliar uma nova técnica para melhorar a qualidade de um enlace de transmissão sem um modelo apropriado. Na tentativa de incluir o maior número possível das características encontradas nos canais físicos, os modelos matemáticos tornam-se cada vez mais complexos. As áreas urbanas geralmente apresentam um maior grau de complexidade porque possuem edificações, árvores e outros tipos de obstáculos que funcionam como difusores das ondas eletromagnéticas trafegantes. Esses difusores impõem ao sinal transmitido alguns efeitos como espalhamento por múltiplos percursos, espalhamento angular e espalhamento espectral Doppler. Em adição, a propagação por múltiplos percursos também causa variações na potência do sinal que são chamadas de desvanecimento.

Para reduzir esses efeitos do meio de transmissão, a aplicação de arranjos de antenas tem sido proposta, especialmente as configurações linear e circular. Uma informação importante a respeito dessas estruturas é a correlação espacial entre seus elementos. Essa correlação pode ser avaliada por meio de diferentes distribuições para os ângulos de chegada [45], [46], [47], [48]. Na referência [36], por exemplo, as funções de correlação espacial são analisadas considerando-se a estrutura de arranjo linear para as distribuições uniforme e gaussiana. Neste capítulo, é feita uma análise dessas funções de correlação, considerando-se três tipos usuais de distribuição de probabilidade para os ângulos azimutais de chegada. Na próxima seção é apresentado um modelo matemático do meio de transmissão e em seguida os resultados numéricos são analisados para cada caso estudado.

## 5.2 Modelo do Meio de Transmissão

O primeiro modelo de canal que incluiu um componente direcional e uma distribuição de probabilidade para os ângulos de chegada dos sinais transmitidos foi proposto por Lee [45] em 1974. O modelo de Lee foi projetado inicialmente para a avaliação da correlação de sinais recebidos em diferentes antenas, no estudo do desempenho de esquemas de diversidade. Posteriormente, outros pesquisadores usaram o modelo de Lee como um ponto de partida para os estudos de antenas inteligentes e esse modelo ficou então conhecido como modelo de difusores locais [36].

Nesse modelo de canal, os sinais que deixam a antena da estação móvel são refletidos e difratados por difusores uniformemente distribuídos em uma região circular em torno da estação móvel. Esses sinais formam um aglomerado de sinais refletidos que alcançam a antena da estação radiobase dentro de um determinado intervalo angular, com ângulo médio  $\phi_0$ . Um diagrama desse modelo de canal pode ser visto na Figura 5.1.

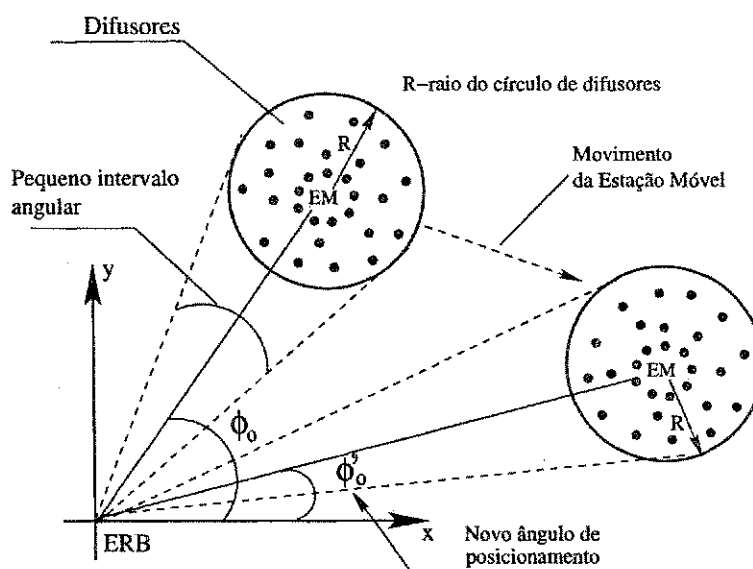


Figura 5.1: Vista superior de um modelo de canal direcional com difusores locais.

Os modelos de canais direcionais são geralmente classificados como modelos de baixo-*rank* e de alto-*rank*, de acordo com as variações na potência do sinal recebido na antena da estação radiobase. Como se sabe, essas variações na potência do sinal transmitido podem ser classificadas em duas categorias:

- Desvanecimento em larga escala: A potência do sinal recebido varia lentamente, principalmente devido ao movimento do receptor através do cenário de difusores, à medida que novos difusores aparecem e outros desaparecem, devido ao sombreamento. Esse tipo de desvanecimento também é conhecido como desvanecimento lento.

- Desvanecimento em pequena escala: A potência do sinal recebido sofre variações significativas quando o receptor realiza pequenos deslocamentos, apenas algumas frações de comprimento de onda. Essas flutuações de sinal são causadas pela interferência dos sinais refletidos pelos difusores.

No domínio da frequência, o desvanecimento pode ser classificado como

- Desvanecimento plano, que ocorre quando a banda de coerência do canal é maior que o intervalo de frequências de interesse. Esse tipo de desvanecimento ocorre se a dispersão temporal do canal for menor que o inverso da largura de faixa do filtro de recepção,  $S_t \ll \frac{1}{B_f}$ .
- Desvanecimento seletivo, que ocorre quando banda de coerência do canal é menor que a faixa de frequências de interesse. Esse desvanecimento ocorre se a dispersão temporal  $S_t$  for maior igual que o inverso da largura de faixa do filtro receptor,  $S_t \geq \frac{1}{B_f}$ .

Essas definições aparecem freqüentemente na modelagem de canais de comunicações mas não incluem uma classificação no domínio angular. No domínio angular o modelo do canal pode ser classificado como *baixo-rank* e *alto-rank* [49].

- Um canal é dito de *baixo-rank* quando a dispersão temporal  $S_t$  é menor que o inverso da largura de faixa do filtro receptor e o espalhamento angular  $(S_{\phi_o}, S_{\phi})$  é pequeno comparado à largura do lóbulo principal,  $\Theta_h$ , radiado pelo arranjo de antenas, no ponto de queda de 3 dB, ou seja

$$S_t \ll \frac{1}{B_f}, \quad S_{\phi_o} \ll \Theta_h \quad \text{e} \quad S_{\phi} \ll \Theta_h, \quad (5.1)$$

- Um canal é dito de *alto-rank* quando a dispersão temporal é maior igual que o inverso da largura de faixa do filtro receptor, ou o espalhamento angular é maior ou igual que a largura do lóbulo principal radiado, no ponto de queda de 3 dB, ou seja

$$S_t \geq \frac{1}{B_f}, \quad S_{\phi_o} \geq \Theta_h \quad \text{ou} \quad S_{\phi} \geq \Theta_h. \quad (5.2)$$

O mais conhecido modelo de canal de *baixo-rank* é o *cluster* de difusores locais mostrado na Figura 5.1. Nesse modelo, a distribuição espacial dos difusores determina como será a distribuição do ângulo de chegada dos sinais. Em ambientes rurais ou em áreas suburbanas, as antenas da estação radiobase são geralmente mais altas que a maioria dos prédios vizinhos, de modo que há, nesses ambientes, perda do componente de visada direta no enlace de subida. Desse modo, os sinais refletidos pelos difusores da vizinhança formam um aglomerado e chegam à antena da estação radiobase dentro de um intervalo angular.

No modelo de difusores locais mostrado na Figura 5.1, a distribuição espacial dos difusores na área circular em torno da unidade móvel é dada pela função densidade de probabilidade (fdp)  $p(r)$  que, de acordo com [49], [45] e [50], pode ser escrita como

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & |r - r_{MS}| \leq R \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.3)$$

em que  $r$  é uma distância radial medida a partir da estação móvel,  $R$  é o raio do círculo de difusores, tipicamente da ordem de 100 m a 200 m, e  $r_{MS}$  é a distância entre a estação radiobase e a estação móvel. Em alguns ambientes, resultados de medições publicados na literatura mostram que os difusores mais próximos à unidade móvel contribuem com a maior parte das reflexões. Nesse caso, a distribuição espacial desses difusores em torno da unidade móvel pode ser gaussiana e a fdp dessa distribuição, de acordo com [36], é dada por

$$p(r) = \frac{1}{2\pi R^2} e^{-\frac{(r-r_{MS})^2}{2R^2}}. \quad (5.4)$$

Dependendo da distribuição espacial dos difusores, diferentes fdps para a distribuição dos ângulos azimutais de chegada são propostas na literatura. As mais usadas, entretanto, são a distribuição uniforme, a gaussiana e a co-senoidal. A fdp uniforme, denotada neste texto por  $p_u(\phi)$ , é escrita como [46]

$$p_u(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & -\Delta + \phi_o \leq \phi \leq \Delta + \phi_o \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.5)$$

Apesar dessa distribuição fornecer uma expressão fechada para os coeficientes de correlação espacial, tem sido mostrado na literatura, por meio de medições de campo, que essa distribuição não é apropriada para modelar os ângulos de chegada quando os difusores têm distribuição espacial uniforme em volta da estação móvel. Nesse caso, uma segunda distribuição com fdp denotada por  $p_c(\phi)$ , conhecida como distribuição co-senoidal, foi proposta em [45] e pode ser escrita como

$$p_c(\phi) = \begin{cases} \frac{k_2}{\pi} \cos^Q(\phi - \phi_o), & -\frac{\pi}{2} + \phi_o \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \phi_o \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.6)$$

em que  $Q$  é um expoente que permite ajustar a abertura da fdp  $p_c(\phi)$ .

A terceira distribuição utilizada é a gaussiana limitada, cuja fdp  $p_g(\phi)$ , dada em [47] e [48], é escrita como

$$p_g(\phi) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} e^{-\frac{(\phi-\phi_o)^2}{2\sigma_\phi^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} + \phi_o \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \phi_o, \quad (5.7)$$

em que  $\sigma_\phi$  é o desvio padrão angular e os parâmetros  $k_2$  e  $k_3$  nas Equações 5.6 e 5.7 são escolhidos para ajustar a área das fdps  $p_c(\phi)$  e  $p_g(\phi)$  a um valor unitário, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_c(\phi) d\phi = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_g(\phi) d\phi = 1. \quad (5.8)$$

Apesar das distribuições  $p_c(\phi)$  e  $p_g(\phi)$  apresentarem forma semelhante, o desenvolvimento matemático é diferente e portanto vale apenas obter os coeficientes para essas duas fdps. Mais considerações serão feitas a respeito do modelo de baixo-*rank* nos próximos capítulos, à medida que for preciso. Por enquanto, as considerações feitas são suficientes para prosseguir com o desenvolvimento matemático da próxima seção.

### 5.3 Cálculo dos Coeficientes de Correlação

Após apresentar o modelo do canal e as distribuições de probabilidade para os ângulos de chegada dos sinais vindos do grupo circular de difusores, pode-se introduzir o modelo das amostras de sinais tomadas nos elementos do arranjo de antenas. Essas amostras, denotadas por  $\mathbf{x}_l$  and  $\mathbf{x}_c$ , respectivamente para o arranjo linear e o arranjo circular, podem ser escritas na forma vetorial como

$$\mathbf{x}_l = \begin{bmatrix} e^{-j i_0 k d \sin(\phi)} \\ e^{-j i_1 k d \sin(\phi)} \\ \vdots \\ e^{-j i_{N-1} k d \sin(\phi)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} e^{j k a \cos(\phi - \tilde{\theta}_1)} \\ e^{j k a \cos(\phi - \tilde{\theta}_2)} \\ \vdots \\ e^{j k a \cos(\phi - \tilde{\theta}_N)} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

em que os expoentes  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{N-1}$  são tais que  $i_j = j, j = 0, \dots, N-1$ . Os ângulos  $\tilde{\theta}_n$  representam a posição angular dos elementos do arranjo circular. No caso do arranjo circular uniforme  $\tilde{\theta}_n = 2\pi \frac{n}{N}$ , em que  $N$  é o número de elementos em cada configuração.

#### 5.3.1 Funções de correlação do arranjo linear

O primeiro caso analisado nesta seção é a correlação entre duas amostras,  $x_m$  e  $x_n$ , tomadas em dois elementos do arranjo linear quando a distribuição dos ângulos de chegada é uniforme. Neste caso, a correlação espacial, denotada por  $\rho_u(m, n)$ , pode ser escrita como

$$\rho_u(m, n) = E[x_m x_n^*]. \quad (5.10)$$

Usando a fdp mostrada na Equação 5.5, a função de correlação passa a ser escrita como

$$\rho_u(m, n) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_0}^{\Delta+\phi_0} e^{j(i_m - i_n)k d \sin(\phi)} d\phi. \quad (5.11)$$

Expandindo o integrando da Equação 5.11 em termos de séries de Bessel, como mostrado em 5.12

$$\begin{aligned} \cos(x \sin \phi) &= J_0(x) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}(x) \cos(2l\phi), \\ \sin(x \sin \phi) &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}(x) \sin((2l+1)\phi), \end{aligned} \quad (5.12)$$

as partes real e imaginária de  $\rho_u(m, n)$ , respectivamente denotadas por  $\Re[\rho_u(m, n)]$  e  $\Im[\rho_u(m, n)]$ , podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\Re[\rho_u(m, n)] &= 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}((i_m - i_n)kd) \mathcal{A}u_l(\Delta, \phi_o) + J_0((i_m - i_n)kd), \\ \Im[\rho_u(m, n)] &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}((i_m - i_n)kd) \mathcal{B}u_l(\Delta, \phi_o),\end{aligned}\tag{5.13}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u_l(a, b) &= \text{Sa}(2la) \cos(2lb) \\ \mathcal{B}u_l(a, b) &= \text{Sa}((2l+1)a) \text{sen}((2l+1)b), \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

e  $\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ .

No segundo caso, a distribuição dos ângulos de chegada é co-senoidal, como dada por 5.6. Nesse caso, a função de correlação espacial é dada por

$$\rho_c(m, n) = \frac{k_2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \phi_o}^{\frac{\pi}{2} + \phi_o} e^{j(i_m - i_n)k d \text{sen} \phi} \cos^Q(\phi - \phi_o) d\phi.\tag{5.15}$$

Essas integrais não podem ser resolvidas analiticamente para um valor genérico do expoente  $Q$ . A seguir, as funções de correlação são obtidas para três valores desse expoente,  $Q = 1$ ,  $Q = 2$  e  $Q = 3$ . Para cada um desses valores obtém-se um valor diferente da constante de ajuste  $k_2$  mostrada na Equação 5.6. Quando  $Q = 1$ , o parâmetro de ajuste  $k_2$  é igual a  $\pi/2$ . Usando a expansão em séries de Bessel mostrada na Equação 5.12, as partes real e imaginária da função de correlação  $\rho_c(m, n)$ ,  $\Re[\rho_c(m, n)]$  e  $\Im[\rho_c(m, n)]$ , passam a ser escritas como

$$\begin{aligned}\Re[\rho_c(m, n)] &= J_0((i_m - i_n)kd) - 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}((i_m - i_n)kd) \mathcal{A}c_{1l}(\phi_o), \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \frac{\pi}{2} J_1((i_m - i_n)kd) \text{sen}(\phi_o),\end{aligned}\tag{5.16}$$

em que a função  $\mathcal{A}c_{1l}(a)$  é dada por

$$\mathcal{A}c_{1l}(a) = \frac{\cos(2la)}{4l^2 - 1},\tag{5.17}$$

e o subscrito  $c_1$  indica que a distribuição co-senoidal com expoente  $Q = 1$  é usada.

Quando o expoente  $Q$  é igual 2, o parâmetro de ajuste  $k_2$  também é igual a 2. Nesse caso, as partes real e imaginária da função de correlação  $\rho_c(m, n)$ ,  $\Re[\rho_c(m, n)]$  e  $\Im[\rho_c(m, n)]$ , passam a ser escritas como

$$\begin{aligned}\Re[\rho_c(m, n)] &= J_0((i_m - i_n)kd) + J_2((i_m - i_n)kd) \cos(2\phi_o), \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \frac{16\phi_o}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} J_{2l+1}((i_m - i_n)kd) \mathcal{B}c_{2l}(\phi_o),\end{aligned}\tag{5.18}$$

em que a função  $\mathcal{B}c_{2l}(a)$  é dada por

$$\mathcal{B}c_{2l}(a) = \frac{\text{Sa}(a(2l+1))}{(2l+3)(2l-1)}. \quad (5.19)$$

No terceiro caso, quando  $Q = 3$ , o parâmetro de ajuste  $k_2$  é igual a  $3\pi/4$ . Nesse caso, as funções de correlação são dadas por

$$\begin{aligned} \Re[\rho_c(m, n)] &= J_0((i_m - i_n)kd) + 18 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}((i_m - i_n)kd) (-1)^l \mathcal{A}c_{3l}(\phi_o), \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \frac{3\pi}{16} [3J_1((i_m - i_n)kd)\text{sen}\phi_o + J_3((i_m - i_n)kd)\text{sen}3\phi_o], \end{aligned} \quad (5.20)$$

em que a função  $\mathcal{A}c_{3l}(a)$  é dada por

$$\mathcal{A}c_{3l}(a) = \frac{\cos(2al)}{(4l^2 - 9)(4l^2 - 1)}. \quad (5.21)$$

No terceiro caso, considera-se a distribuição gaussiana mostrada na Equação 5.7. Neste caso, a função de correlação é dada por

$$\rho_g(m, n) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \int_{-\frac{\pi}{2} + \phi_o}^{\frac{\pi}{2} + \phi_o} e^{j((i_m - i_n)l\text{d}\text{sen}\phi)} e^{-\frac{(\phi - \phi_o)^2}{2\sigma_\phi^2}} d\phi. \quad (5.22)$$

Apesar da integração na Equação 5.22 não ser trivial, pode-se obter expressões fechadas para esses coeficientes de correlação em termos das séries de Bessel mostradas na Equação 5.12. O primeiro passo na resolução desta integral é realizar uma mudança de variáveis na segunda exponencial. Expandindo o termo resultante da mudança de variáveis, em séries de Bessel, obtêm-se as seguintes expressões para as partes real e imaginária de  $\rho_g(m, n)$ , denotadas por  $\Re[\rho_g(m, n)]$  e  $\Im[\rho_g(m, n)]$ , respectivamente

$$\begin{aligned} \Re[\rho_g(m, n)] &= J_0((i_m - i_n)kd) + \frac{2k_3}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}((i_m - i_n)kd) I_{cl}(\phi_o, \sigma_\phi) \\ \Im[\rho_g(m, n)] &= \frac{2k_3}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}((i_m - i_n)kd) I_{sl}(\phi_o, \sigma_\phi), \end{aligned} \quad (5.23)$$

em que

$$I_{cl}(\phi_o, \sigma_\phi) = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}}^{\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}} \cos(2l(\sqrt{2}\sigma_\phi u + \phi_o)) e^{-u^2} du, \quad (5.24)$$

e

$$I_{sl}(\phi_o, \sigma_\phi) = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}}^{\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}} \sin((2l+1)(\sqrt{2}\sigma_\phi u + \phi_o)) e^{-u^2} du. \quad (5.25)$$

Usando as relações de Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{and} \quad \text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (5.26)$$



as integrais nas Equações 5.24 e 5.25 podem ser escritas em termos da função  $\text{erf}(z)$ . Ou seja,

$$I_{cl}(\phi_o, \sigma_\phi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\cos(2l\phi_o)\mathcal{A}(2l, \sigma_\phi) - \sin(2l\phi_o)\mathcal{B}(2l, \sigma_\phi)] e^{-2l^2\sigma_\phi^2}$$

$$I_{sl}(\phi_o, \sigma_\phi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\sin((2l+1)\phi_o)\mathcal{A}(2l+1, \sigma_\phi) - \cos((2l+1)\phi_o)\mathcal{B}(2l+1, \sigma_\phi)] e^{-\frac{(2l+1)^2\sigma_\phi^2}{2}},$$

em que

$$\mathcal{A}(a, b) = \text{Re} \left\{ \text{erf} \left( \frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} - \text{Re} \left\{ \text{erf} \left( -\frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (5.27)$$

e

$$\mathcal{B}(a, b) = \text{Im} \left\{ \text{erf} \left( \frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\} - \text{Im} \left\{ \text{erf} \left( -\frac{\pi}{\sqrt{8b}} - j \frac{ab}{\sqrt{2}} \right) \right\}. \quad (5.28)$$

A função  $\text{erf}(a + jb)$  é definida em [51] e [36] como a função erro de valores complexos e pode ser calculada a partir das relações

$$\text{erf}(x) = 1 - e^{-x^2} w(jx) \quad (5.29)$$

e

$$w(x) = e^{-x^2} \left( 1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^x e^{-t^2} dt \right). \quad (5.30)$$

Após as funções de correlação terem sido calculadas para o arranjo linear, procedimento semelhante é seguido para a obtenção dessas funções para o arranjo circular. Nesse ponto, os resultados obtidos constituem uma contribuição a ser adicionada aos resultados já presentes na literatura, já que o desenvolvimento dessa seção não foi feito ainda para o arranjo circular com as distribuições gaussiana e co-senoidal.

## 5.4 Funções de Correlação do Arranjo Circular

No caso do arranjo circular, as expressões obtidas nesta seção representam mais uma contribuição da tese. As amostras de sinal captadas nos elementos do arranjo são modeladas pelo segundo vetor da Expressão 5.9. Considerando a distribuição de ângulo de chegada uniforme dada na Equação 5.5, a função de correlação será dada por

$$\rho_u(m, n) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_o}^{\Delta+\phi_o} e^{jkaC_{m,n} \cos(\phi-\varphi_{m,n})} d\phi, \quad (5.31)$$

em que  $C_{m,n}$  e  $\varphi_{m,n}$  são dadas respectivamente por

$$\varphi_{m,n} = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\text{sen}\tilde{\theta}_m - \text{sen}\tilde{\theta}_n}{\text{cos}\tilde{\theta}_m - \text{cos}\tilde{\theta}_n} \right). \quad (5.32)$$

e

$$C_{m,n} = \sqrt{2(1 - \cos(\bar{\theta}_m - \bar{\theta}_n))}. \quad (5.33)$$

Como pode ser visto na Equação 5.31, termos como  $\text{sen}(x \cos(\phi))$  e  $\text{cos}(x \cos(\phi))$  surgirão no desenvolvimento. Dessa forma, usando as séries de Bessel

$$\begin{aligned} \text{cos}(x \cos(\phi)) &= J_0(x) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) \cos(2l\phi) \\ \text{sen}(x \cos(\phi)) &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}(x) (-1)^l \cos((2l+1)\phi) \end{aligned} \quad (5.34)$$

na Equação 5.31, obtém-se que as partes real e imaginária de  $\rho_u(m, n)$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \Re[\rho_u(m, n)] &= J_0(kaC_{m,n}) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kaC_{m,n}) \mathcal{A}u_l(\Delta, \phi_o, \varphi_{m,n}), \\ \Im[\rho_u(m, n)] &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}(kaC_{m,n}) (-1)^l \mathcal{B}u_l(\Delta, \phi_o, \varphi_{m,n}), \end{aligned} \quad (5.35)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_l(a, b, c) &= \text{Sa}(2la) \cos(2l(b-c)) \\ \mathcal{B}u_l(a, b, c) &= \text{Sa}((2l+1)a) \cos((2l+1)(b-c)). \end{aligned}$$

Considerando agora a distribuição co-senoidal, a forma geral para as funções de correlação pode ser escrita como

$$\rho_c(m, n) = \frac{k_2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \phi_o}^{\frac{\pi}{2} + \phi_o} e^{jkaC_{m,n} \cos(\phi - \varphi_{m,n})} \cos^Q(\phi - \phi_o) d\phi. \quad (5.36)$$

Como se sabe, cada valor de  $Q$  fornece um par diferente de funções de correlação. Dessa forma, quando  $Q = 1$ ,  $k_2 = \frac{\pi}{2}$  e obtém-se que as partes real e imaginária da função de correlação  $\rho_c(m, n)$  são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \Re[\rho_c(m, n)] &= J_0(kaC_{m,n}) - \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}(kaC_{m,n}) \mathcal{A}c_{1l}(\phi_o, \varphi_{m,n}), \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \frac{\pi}{2} J_1(kaC_{m,n}) \cos(\phi_o - \varphi_{m,n}), \end{aligned} \quad (5.37)$$

em que

$$\mathcal{A}c_{1l}(a, b) = 2 \frac{\cos(2l(a-b))}{4l^2 - 1}. \quad (5.38)$$

Quando  $Q = 2$  tem-se que  $k_2 = 2$  e neste caso o par de funções de correlação é dado por

$$\begin{aligned} \Re[\rho_c(m, n)] &= J_0(kaC_{m,n}) - J_2(kaC_{m,n}) \cos(2(\phi_o - \varphi_{m,n})), \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}(kaC_{m,n}) \mathcal{B}c_{2l}(\phi_o, \varphi_{m,n}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

em que

$$\mathcal{B}c_{2l}(a, b) = \frac{16 \cos((2l + 1)(a - b))}{\pi (4l^2 - 1)(2l + 3)}. \quad (5.40)$$

Similarmente quando  $Q = 3$  tem-se  $k_2 = 3\pi/4$ , e neste caso, o par de funções de correlação é escrito como

$$\begin{aligned} \Re[\rho_c(m, n)] &= \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}(kaC_{m,n}) \mathcal{A}c_{3l}(\phi_o, \varphi_{m,n}) + J_0(kaC_{m,n}) \\ \Im[\rho_c(m, n)] &= \frac{3\pi}{16} (3J_1(kaC_{m,n}) \cos(\phi_o - \varphi_{m,n}) - J_3(kaC_{m,n}) \cos(3(\phi_o - \varphi_{m,n}))), \end{aligned} \quad (5.41)$$

em que

$$\mathcal{B}c_{3l}(a, b) = 18 \frac{\cos(2l(a - b))}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}. \quad (5.42)$$

Após avaliar os casos referentes à distribuição co-senoidal para  $Q = 1$ ,  $Q = 2$  e  $Q = 3$  pode-se obter o último caso em que é considerada a distribuição gaussiana para os ângulos azimutais de chegada. Nesse caso, a função de correlação entre dois elementos do arranjo circular, após uma apropriada mudança de variáveis, pode ser escrita como

$$\rho_g(m, n) = \frac{k_3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}}^{\frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}} e^{jkaC_{m,n} \cos(\sqrt{2}\sigma_\phi u + \phi_o - \varphi_{m,n})} e^{-u^2} du \quad (5.43)$$

Expandindo as partes real e imaginária de 5.43 em termos de séries de Bessel, é possível escrever as partes real e imaginária de  $\rho_g(m, n)$  como

$$\Re[\rho_g(m, n)] = J_0(kaC_{m,n}) + k_3 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kaC_{m,n}) I_{cl}(\phi_o, \sigma_\phi, \varphi_{m,n}) \quad (5.44)$$

e

$$\Im[\rho_g(m, n)] = k_3 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kaC_{m,n}) I_{sl}(\phi_o, \sigma_\phi, \varphi_{m,n}), \quad (5.45)$$

em que

$$\begin{aligned} I_{cl}(\sigma_\phi, \phi_o, \varphi_{m,n}) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2l^2\sigma_\phi^2} [\cos(2l(\phi_o - \varphi_{m,n})) \mathcal{A}(2l, \sigma_\phi) - \\ &\quad \text{sen}(2l(\phi_o - \varphi_{m,n})) \mathcal{B}(2l, \sigma_\phi)], \\ I_{sl}(\sigma_\phi, \phi_o, \varphi_{m,n}) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{((2l+1)\sigma_\phi)^2}{2}} [\cos((2l+1)(\phi_o - \varphi_{m,n})) \mathcal{A}(2l+1, \sigma_\phi) - \\ &\quad \text{sen}((2l+1)(\phi_o - \varphi_{m,n})) \mathcal{B}(2l+1, \sigma_\phi)] \end{aligned} \quad (5.46)$$

e  $\mathcal{A}(a, b)$  e  $\mathcal{B}(a, b)$  são dadas respectivamente pelas Equações 5.27 e 5.28.

Após obter as funções de correlação espacial para as três distribuições de ângulo de chegada, para os arranjos linear e circular, é possível mostrar a avaliação numérica por meio de gráficos, dos resultados obtidos. Esses resultados são mostrados na próxima seção.

## 5.5 Avaliação Numérica da Correlação Espacial

Esta seção é dividida em duas subseções, respectivamente para os arranjos circular e linear. Os gráficos mostrados foram obtidos para diferentes valores dos parâmetros  $\Delta$ ,  $\phi_o$  e  $\sigma_\phi$  e mostram a envoltória da correlação espacial entre os elementos do arranjo. Na referência [36], é mostrado que a correlação entre os sinais captados em dois elementos distintos de um arranjo linear é diretamente proporcional ao coeficiente de correlação espacial entre esses elementos. Esse fator de proporcionalidade é a soma das potências médias de desvanecimento, ao longo dos vários percursos existentes entre o arranjo de antenas e a fonte dos sinais captados. De acordo com a referência [50], a envoltória da correlação é definida como

$$\rho(m, n) = \Re^2[\rho(m, n)] + \Im^2[\rho(m, n)]. \quad (5.47)$$

Ainda de acordo com [50], os quadrados na Equação 5.47 justificam-se pelo fato desse coeficiente de correlação representar uma potência mútua entre os dois sinais captados.

Antes de analisar as curvas, é interessante comentar um outro parâmetro usual que é o espalhamento angular denotado por  $S_\phi$ , que é na verdade o desvio padrão angular da variável aleatória que representa o ângulo de chegada  $\phi$ . Esse parâmetro é dado por

$$S_\phi = \sqrt{E[\phi^2] - E^2[\phi]} \quad (5.48)$$

e pode ser verificado que

$$S_\phi = \begin{cases} \frac{\Delta}{\sqrt{3}} & \text{Distribuição uniforme} \\ \sigma_\phi & \text{Distribuição gaussiana} \\ \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} & Q = 1 \\ \sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}} & Q = 2 \\ \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \frac{20}{9}} & Q = 3 \end{cases} & \text{Distribuição co-senoidal} \end{cases} \quad (5.49)$$

No caso da distribuição co-senoidal,  $S_\phi$  depende do expoente  $Q$ . Os resultados mostrados a seguir também poderiam ser dados em termos de  $S_\phi$ .

### 5.5.1 Resultados para o arranjo linear

Os primeiros resultados desta seção foram obtidos para a distribuição uniforme. Um arranjo linear com 8 elementos e com distância  $d$  entre elementos, foi usado. As curvas obtidas são mostradas nas Figuras 5.2 e 5.3.

O segundo conjunto de resultados foi obtido usando uma distribuição co-senoidal para dois valores do expoente de ajuste  $Q$ . Os gráficos para  $Q = 1$  e  $Q = 3$  são mostrados nas Figuras 5.4 e 5.5. Os

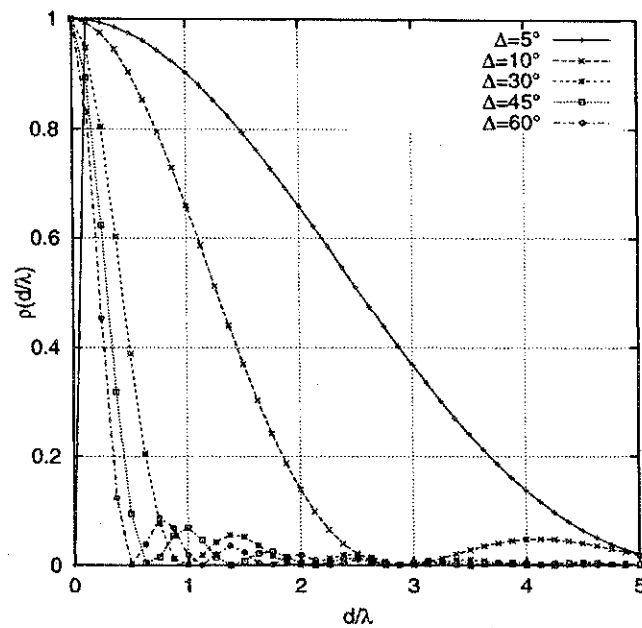


Figura 5.2: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o segundo elemento em um arranjo linear com 8 elementos, com direção do *cluster* principal  $\phi_o = 0^\circ$ , usando distribuição uniforme.

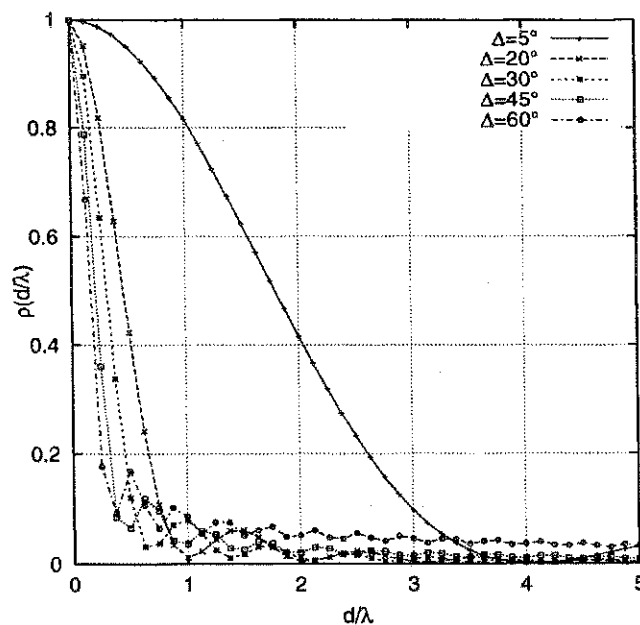


Figura 5.3: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo linear com 8 elementos, com direção do *cluster* principal  $\phi_o = 45^\circ$ , usando distribuição uniforme.

resultados mostrados nestas figuras mostram que os valores de  $Q$  foram insuficientes para se obter decorrelação total entre os elementos do arranjo.

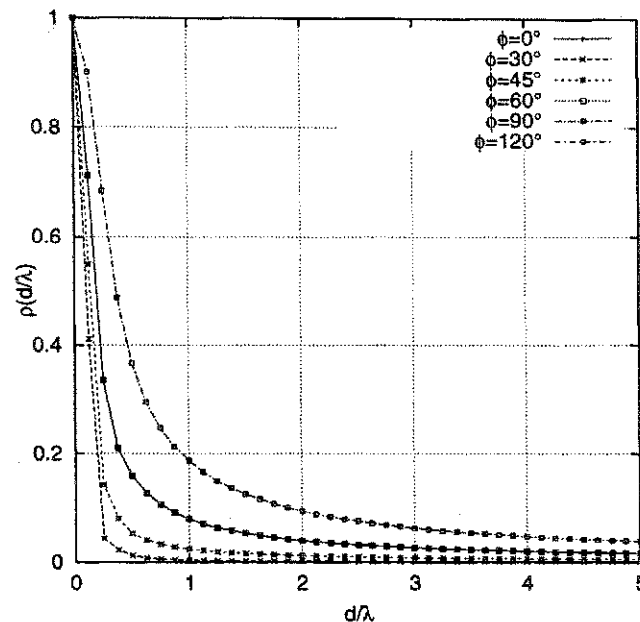


Figura 5.4: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quinto elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição co-senoidal com  $Q = 1$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ .

O terceiro conjunto de resultados foi obtido usando a distribuição gaussiana. Neste caso, os gráficos obtidos são mostrados nas Figuras 5.6 e 5.7.

Como pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.7, com o uso da distribuição gaussiana, os elementos do arranjo tornam-se decorrelacionados para valores pequenos de espaçamento  $d$ . Ultimamente, com os estudos de aparelhos de estações móveis cada vez mais compactos, têm surgido trabalhos propondo soluções com arranjos de antenas com espaçamentos entre elementos cada vez menores. Quando o espaçamento é dado em frações de comprimento de onda, surgem dois problemas. Primeiro, é preciso levar em consideração a correlação espacial entre os elementos, como será visto no estudo de sistemas com diversidade usando antenas compactas. Segundo, é preciso levar em consideração o efeito do acoplamento magnético. Entretanto, como o acoplamento depende muito da alimentação dos elementos, pode-se projetar arranjos compactos sem que características como diagrama de radiação e diretividade sejam comprometidas.

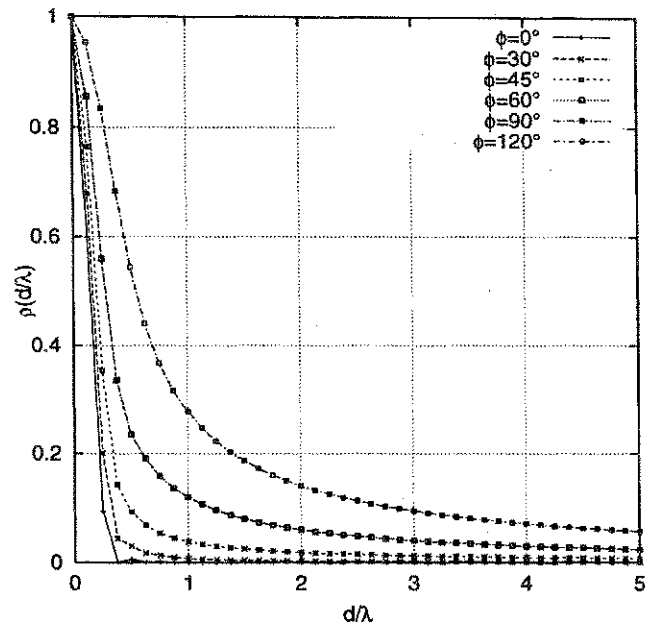


Figura 5.5: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição co-senoidal com  $Q = 3$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ .

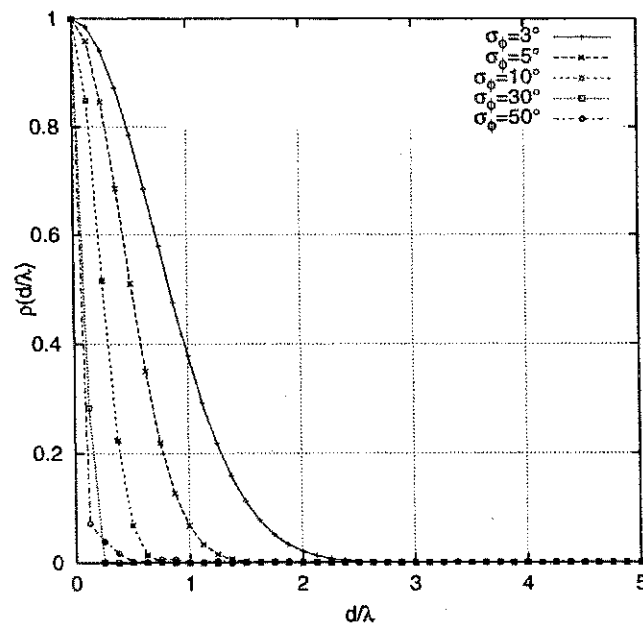


Figura 5.6: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quarto elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com  $\phi_0 = 0^\circ$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .

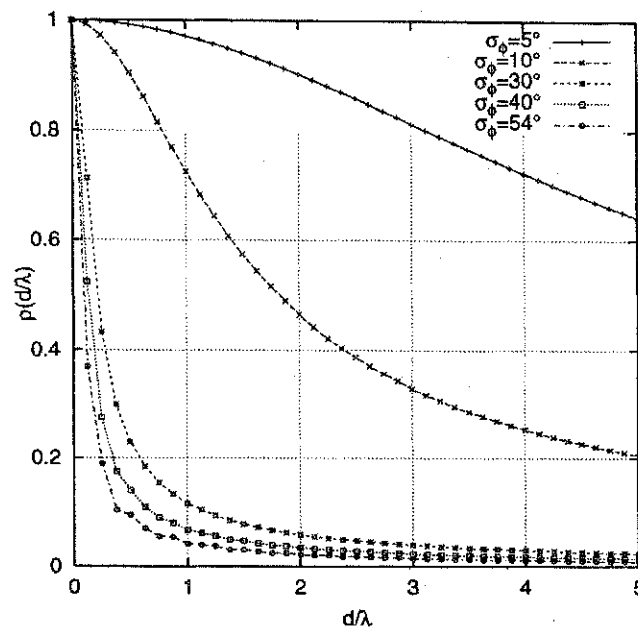


Figura 5.7: Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o sétimo elemento em um arranjo linear com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com  $\phi_o = 90^\circ$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .

## 5.5.2 Resultados para o arranjo circular

Esta seção apresenta os resultados numéricos obtidos usando um arranjo circular com 8 elementos e raio  $a$ . A posição angular de cada elemento do arranjo é dada por

$$\tilde{\theta}_n = 360^\circ \left( \frac{n-1}{N} \right), \quad (5.50)$$

em que  $N$  é o número de elementos. Considerando a distribuição uniforme, tem-se os seguintes gráficos mostrados na Figuras 5.8 e 5.9.

O segundo conjunto de resultados, que pode ser visto nas Figuras 5.10 e 5.11 foram obtidos usando-se a distribuição co-senoidal.

No último caso analisado, a distribuição gaussiana foi usada e os resultados foram obtidos para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ . Os gráficos obtidos são mostrados nas Figuras 5.12 e 5.13.

Como pode ser visto nas Figuras 5.8 e 5.9, a correlação espacial depende da estrutura do arranjo e da direção do *cluster* principal, que é a direção média das ondas refletidas pelo conjunto de difusores do canal de difusores locais. Com  $\phi_o = 45^\circ$ , o arranjo circular apresenta melhores resultados que os outros casos que usam distribuição uniforme. É interessante lembrar que a distribuição uniforme não é usada na prática para modelar os ângulos de chegada nesse modelo de canal.

Como se sabe, a distribuição co-senoidal se aproxima da distribuição gaussiana quando o expoente de ajuste  $Q$  aumenta. Desse modo, quando essa distribuição é usada junto com o arranjo circular,



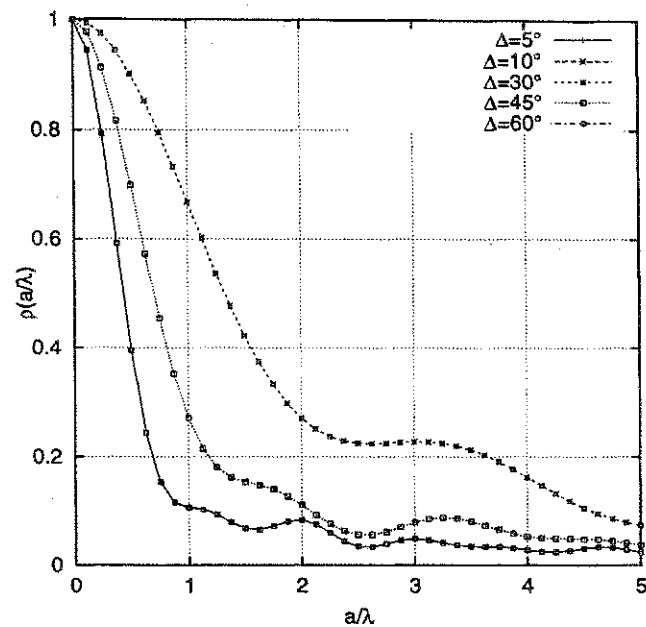


Figura 5.8: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o segundo elemento em um arranjo circular com 8 elementos, com direção do *cluster* principal  $\phi_o = 0^\circ$ , usando distribuição uniforme.

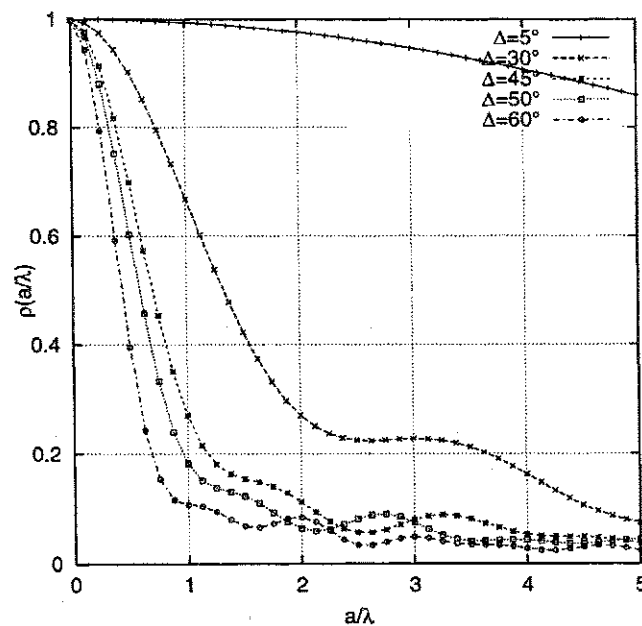


Figura 5.9: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o terceiro elemento em um arranjo circular com 8 elementos, com distribuição do *cluster* principal  $\phi_o = 60^\circ$ , usando distribuição uniforme.

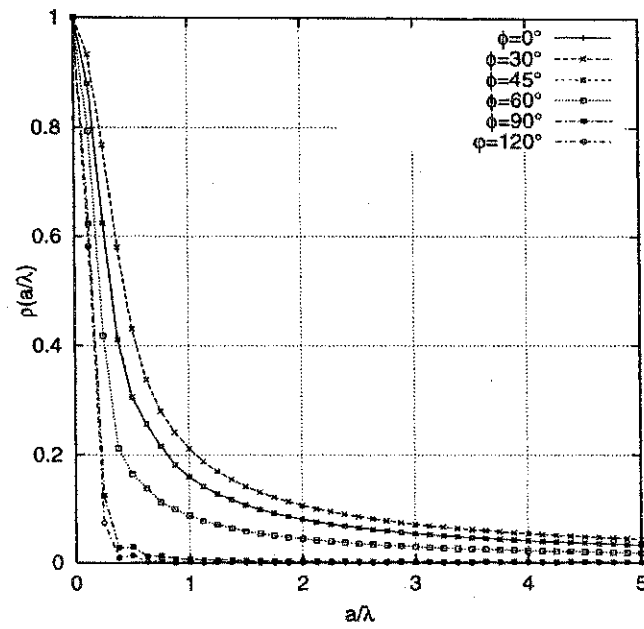


Figura 5.10: Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando a distribuição co-senoidal com  $Q = 2$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ .

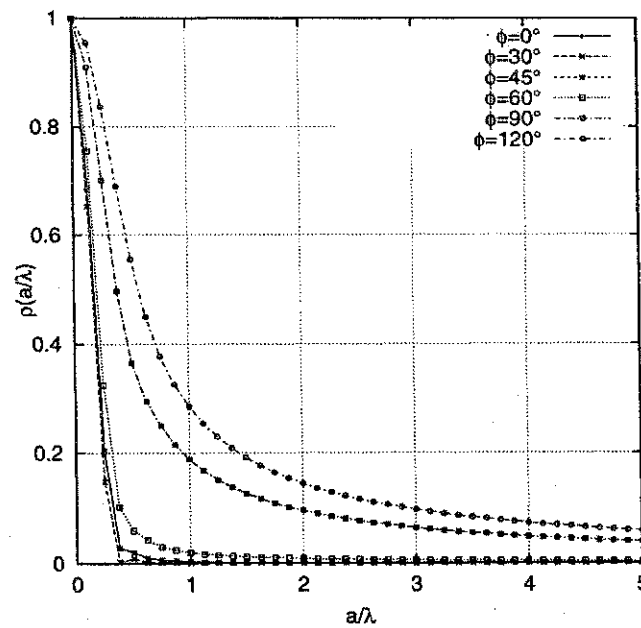


Figura 5.11: Gráficos da correlação espacial entre o quarto e o sétimo elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando a distribuição co-senoidal com  $Q = 3$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ .

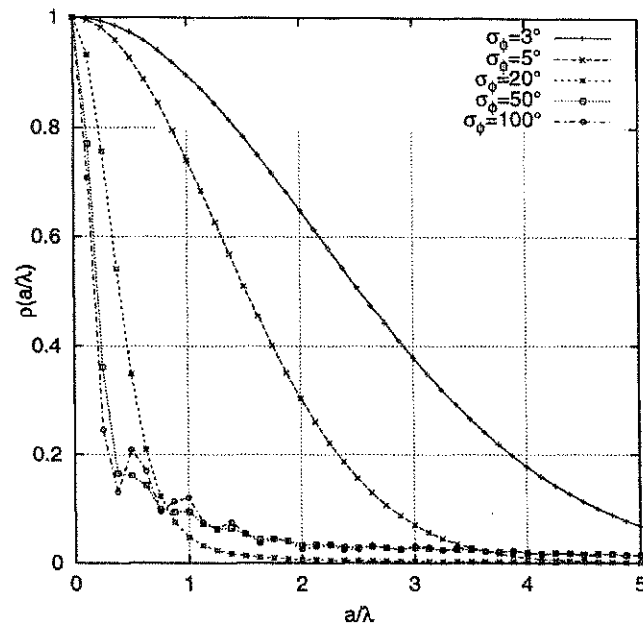


Figura 5.12: Gráficos da correlação espacial entre o primeiro e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com  $\phi_o = 0^\circ$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .

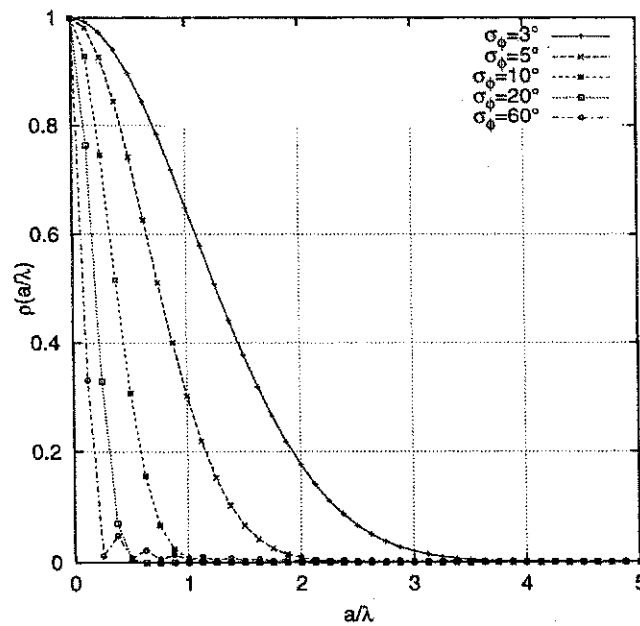


Figura 5.13: Gráficos da correlação espacial entre o segundo e o quinto elemento em um arranjo circular com 8 elementos, usando distribuição gaussiana com  $\phi_o = 90^\circ$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ .

as amostras captadas tendem a ser mais descorrelacionadas para menores valores do raio  $a$ . Quando a distribuição gaussiana é usada, pode-se perceber que o envelope de correlação tende a zero mais rapidamente que nos outros casos.<sup>1</sup> Essa é uma importante característica do arranjo circular, ou seja, é possível obter amostras descorrelacionadas com uma pequena estrutura de arranjo.

Em geral, se o espalhamento angular é pequeno, os sinais tomados nos elementos da antena da estação radiobase tornam-se mais fortemente correlacionados. Esse fato permite a aplicação de técnicas de determinação de ângulos de chegada, baseadas na estrutura do arranjo, conhecidas como métodos de referência espacial.

## 5.6 Conclusão

Este capítulo apresentou uma introdução ao estudo de canais direcionais, mostrou o modelamento do ângulo de chegada dos sinais que alcançam o arranjo de antenas da estação radiobase e mostrou como os coeficientes de correlação espacial podem ser obtidos por meio das distribuições de probabilidade dos ângulos de chegada. Foram usadas as distribuições uniforme, co-senoidal e gaussiana. As configurações de arranjo de antenas usadas foram a linear e a circular. Novas expressões fechadas foram obtidas para as funções de correlação para as distribuições gaussiana e co-senoidal, com o arranjo circular. As equações e os resultados numéricos apresentados, fornecem uma boa idéia do comportamento da correlação espacial, e conseqüentemente da correlação entre sinais captados nos elementos do arranjo, nesse modelo de canal de comunicações apresentado.

---

<sup>1</sup>Tender a zero mais rápido, neste caso, significa tornar-se descorrelacionado para valores de espaçamento menores

# Capítulo 6

## Controle de Interferência com Arranjos de Antenas

### 6.1 Introdução

Este capítulo mostra como arranjos simétricos de antenas podem ser usados no controle da interferência mútua entre usuários, em modelos de canal com características semelhantes ao modelo de difusores locais. São obtidos limitantes inferiores para o valor esperado da potência de interferência e para o seu desvio padrão e é mostrado, por meio de resultados numéricos, o comportamento desses parâmetros.

Como se sabe, tem havido um considerável aumento de interesse no estudo de arranjos de antenas aplicados a sistemas de comunicações, especialmente a sistemas de comunicações móveis, como é mostrado em [3]. Com esse aumento de interesse, vem a necessidade de projeto de estruturas que forneçam cada vez mais, melhores resultados em termos de desempenho e custo de implementação.

Um dos problemas mais importantes, estudado no projeto de sistemas de comunicações móveis, é a interferência provocada por outros usuários, conhecida também como interferência co-canal, presente por exemplo em sistemas CDMA. Esse tipo de interferência, causada pelos usuários ativos presentes na mesma célula do usuário e pelos usuários presentes nas células vizinhas, pode limitar a capacidade do sistema se métodos apropriados não forem usados para diminuir o seu efeito.

Na referência [52] foi mostrado, após o modelamento apropriado de efeitos como perdas por múltiplos percursos, desvanecimento, sombreamento e interferência de múltiplo acesso, que usando arranjos de antenas é possível aumentar a capacidade do sistema em termos de número de usuários. Apesar de ter sido mostrado na literatura que o uso de arranjos pode aumentar a capacidade do sistema, não havia sido mostrado ainda uma relação entre intensidade de interferência e o tipo de excitação dos elemen-

tos do arranjo nem com parâmetros do modelo de canal utilizado no estudo. Essa análise é feita nas próximas seções considerando-se um modelo de célula circular e um canal com *cluster* de difusores locais.

## 6.2 Modelo do Problema

Nesta seção é considerada, inicialmente como motivação, a análise do controle de interferência causada por usuários dispostos em um modelo de célula circular em um sistema de comunicações móveis. É analisada a combinação apropriada dos sinais na antena, de modo que se possa obter a redução da interferência causada pelo sinal de um determinado usuário que chega à antena com ângulo de chegada  $\phi_i$  sobre um outro sinal de usuário que chega com ângulo  $\phi_j$ .

Considere em seguida uma estrutura de arranjo linear com  $2M$  elementos dispostos simetricamente ao longo do seu eixo de suporte, de modo que a distribuição das amplitudes de excitação dos elementos posicionados ao longo desse eixo também seja simétrica em relação ao ponto central do arranjo. Se forem tomadas amostras de sinais que chegam com ângulos  $\phi_i$  e  $\phi_j$  em relação ao eixo do arranjo, em cada elemento do arranjo essas amostras serão proporcionais às amostras dos seguintes vetores normalizados

$$\mathbf{a}_i = \left[ a_M e^{j \frac{(2M-1)kd \cos(\phi_i)}{2}} \quad \dots \quad a_1 e^{j \frac{1}{2}kd \cos(\phi_i)} \quad a_1 e^{-j \frac{1}{2}kd \cos(\phi_i)} \quad \dots \quad a_M e^{-j \frac{(2M-1)kd \cos(\phi_i)}{2}} \right] \frac{1}{\sqrt{2N_o}}$$

e

$$\mathbf{a}_j = \left[ a_M e^{j \frac{(2M-1)kd \cos(\phi_j)}{2}} \quad \dots \quad a_1 e^{j \frac{1}{2}kd \cos(\phi_j)} \quad a_1 e^{-j \frac{1}{2}kd \cos(\phi_j)} \quad \dots \quad a_M e^{-j \frac{(2M-1)kd \cos(\phi_j)}{2}} \right] \frac{1}{\sqrt{2N_o}},$$

em que  $N_o$  é uma constante de normalização dos vetores  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_j$  e é dada por

$$N_o = \sum_{n=1}^M a_n^2. \quad (6.1)$$

Nesse caso, um sinal de usuário potencialmente interferente com ângulo de chegada  $\phi_j$  produzirá no receptor associado ao usuário com ângulo  $\phi_i$  uma potência de interferência que será proporcional a [52],

$$I(\theta_i, \theta_j) = |\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^H|^2. \quad (6.2)$$

em que  $|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^H|$  é dado por

$$\begin{aligned} 2N_o |\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j| &= a_M^2 e^{j \frac{(2M-1)kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))}{2}} + \dots + a_2^2 e^{j \frac{3}{2}kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))} \\ &+ a_1^2 e^{j \frac{1}{2}kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))} + a_1^2 e^{-j \frac{1}{2}kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))} + a_2^2 e^{-j \frac{3}{2}kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))} \\ &+ \dots + a_M^2 e^{-j \frac{(2M-1)kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))}{2}}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

ou ainda em uma forma simplificada

$$|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^H| = \frac{1}{N_o} \sum_{n=1}^M a_n^2 \cos \left[ \frac{(2n-1)kd(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))}{2} \right] = \frac{1}{N_o} \sum_{n=1}^M a_n^2 \cos[(2n-1)\psi], \quad (6.4)$$

em que  $\psi = \frac{kd}{2}(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))$ .

Desse modo,  $I(\phi_i, \phi_j)$  será dado por

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j) &= \frac{1}{N_o^2} \left( \sum_{n=1}^M a_n^2 \cos[(2n-1)\psi] \right)^2 \\ &= \frac{2}{N_o^2} \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M a_n^2 a_m^2 \cos[(2n-1)\psi] \cos[(2m-1)\psi] \\ &\quad + \frac{1}{N_o^2} \sum_{n=1}^M a_n^4 \cos^2[(2n-1)\psi]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Considerando inicialmente que os ângulos  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em  $[0, 2\pi]$ , ou seja,

$$p(\phi_i) = p(\phi_j) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \phi_i, \phi_j \leq 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (6.6)$$

tem-se que o valor médio de  $I(\phi_i, \phi_j)$  é dado por

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\phi_i, \phi_j) p(\phi_i) p(\phi_j) d\phi_i d\phi_j. \quad (6.7)$$

Desenvolvendo a Equação 6.5 e aplicando a integral dada na Equação 6.7, tem-se

$$\begin{aligned} E[I(\phi_i, \phi_j)] &= \frac{1}{N_o^2} \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M a_n^2 a_m^2 (J_0^2((m+n-1)kd) + J_0^2((m-n)kd)) \\ &\quad + \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M a_n^4 J_0^2((2n-1)kd) + \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M a_n^4, \end{aligned} \quad (6.8)$$

em que  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Na Figura 6.1 a seguir são mostradas as curvas do valor médio de  $I(\phi_i, \phi_j)$  para arranjos lineares com amplitude de excitação aleatória em função do espaçamento entre os elementos do arranjo e do número  $M$  de elementos

Como se pode perceber, a potência de interferência entre os usuários é diminuída à medida que o número de elementos da antena e a razão  $(d/\lambda)$  aumentam. Já na Figura 6.2 são mostradas as curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  para arranjos lineares com amplitude de excitação obtidos por meio de expansão binomial, expansão polinomial e coeficientes aleatórios.

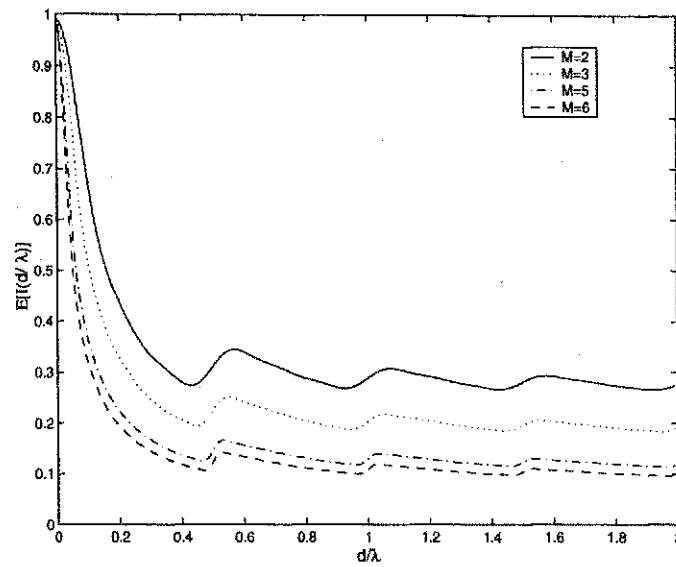


Figura 6.1: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função do espaçamento entre os elementos do arranjo e do número de elementos para o caso em que a excitação aleatória é usada.

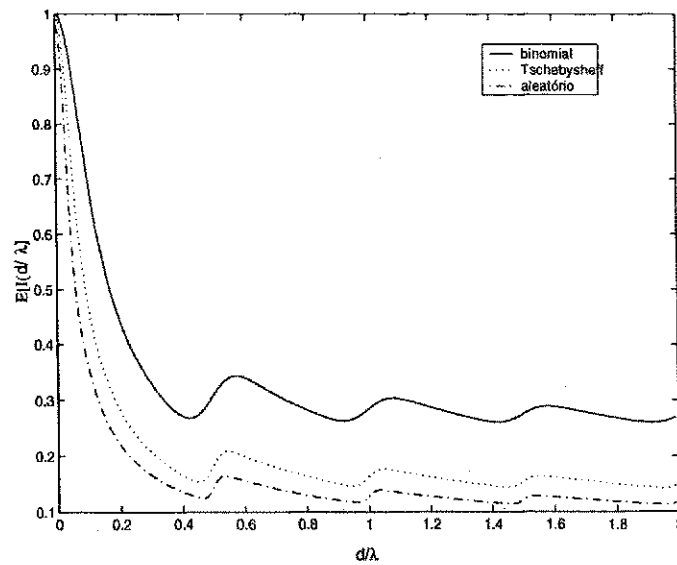


Figura 6.2: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função do espaçamento entre os elementos do arranjo e da forma de excitação dos elementos do arranjo para  $N = 2M = 8$ .



Novamente, pode-se perceber que a configuração proposta no Capítulo 2 apresenta melhores resultados em relação às configurações clássicas.

O valor médio quadrático de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  pode ser calculado tomando-se o valor esperado de  $I^2(\phi_i, \phi_j)$ , ou seja

$$E[I^2(\phi_i, \phi_j)] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} I^2(\phi_i, \phi_j) p(\phi_i) p(\phi_j) d\phi_i d\phi_j. \quad (6.9)$$

Desenvolvendo  $I^2(\phi_i, \phi_j)$  em termos de exponenciais e aplicando a Integral 6.9, chega-se a um somatório em termos de funções de Bessel ao quadrado, com argumentos semelhantes aos argumentos da Função 6.8. Sabendo que as funções de Bessel decrescem rapidamente à medida que seu argumento aumenta, pode-se desprezar os termos que contêm essa função e escrever o limitante inferior de  $E[I^2(\phi_i, \phi_j)]$  como

$$E[I^2(\phi_i, \phi_j)] \geq \frac{3}{2N_o^4} \left( \sum_{n=1}^M \frac{a_n^8}{4} + \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M a_n^4 a_m^4 \right). \quad (6.10)$$

Sabendo então que

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] \geq \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M a_n^4, \quad (6.11)$$

tem-se que

$$E[I(\phi_i, \phi_j)]^2 \geq \frac{1}{4N_o^4} \left( \sum_{n=1}^M a_n^8 + 2 \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M a_n^4 a_m^4 \right) \quad (6.12)$$

e desse modo, pode-se escrever o limitante inferior da variância de  $I(\phi_i, \phi_j)$  como sendo

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(\phi_i, \phi_j)] &= E[I^2(\phi_i, \phi_j)] - E[I(\phi_i, \phi_j)]^2 \\ &\geq \frac{1}{N_o^4} \left( \frac{1}{8} \sum_{n=1}^M a_n^8 + \sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=n+1}^M a_n^4 a_m^4 \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Na Tabela 6.1, a seguir, são mostrados alguns valores de desvio padrão calculados usando-se o limitante mostrado na Equação 6.13. É interessante observar que esses valores não dependem da distância entre os elementos do arranjo, dependem apenas dos valores dos coeficientes de excitação.

Como se pode perceber pela Tabela 6.1, em termos do desvio padrão, o arranjo com excitação aleatória é mais apropriado para o controle de interferência.

### 6.3 Controle de Interferência no Canal de Baixo-rank

O próximo passo da análise mostrada na seção anterior é a extensão dos resultados obtidos para o modelo de canal com difusores locais, como mostrado na Figura 5.1. Nesse caso, é considerado que

Tabela 6.1: Desvio padrão da interferência mútua entre usuários ativos em um modelo de célula circular, em função do método de excitação e do número de elementos do arranjo linear simétrico com antena isotrópica.

Elementos	Excitação		
	Binomial	Polinomial	Aleatória
4	0,3002	0,2799	0,2792
6	0,2732	0,2391	0,2041
8	0,2591	0,1973	0,1595
10	0,2470	0,1646	0,1305
12	0,2358	0,1401	0,1104

os difusores são uniformemente distribuídos na área em torno da estação móvel e que os ângulos de chegada dos sinais de usuários são modelados por uma distribuição gaussiana. A distribuição uniforme também é usada para servir de comparação.

Sabendo que  $I(\phi_i, \phi_j)$  pode ser escrita em termos de produtos de senos e co-senos, tem-se

$$\begin{aligned}
 I(\phi_i, \phi_j) = & \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n^2 a_m^2 \cos[kd(m+n-1) \cos \phi_i] \cos[kd(m+n-1) \cos \phi_j] + \\
 & \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n^2 a_m^2 \sin[kd(m+n-1) \cos \phi_i] \sin[kd(m+n-1) \cos \phi_j] + \\
 & \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n^2 a_m^2 \cos[kd(m-n) \cos \phi_i] \cos[kd(m-n) \cos \phi_j] + \\
 & \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n^2 a_m^2 \sin[kd(m-n) \cos \phi_i] \sin[kd(m-n) \cos \phi_j].
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

### 6.3.1 Distribuição gaussiana para os ângulos de chegada

Usando a distribuição gaussiana para os ângulos de chegada,

$$p(\phi_i) = p(\phi_j) = p(\phi) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \exp \left[ -\frac{(\phi - \phi_o)^2}{2\sigma_\phi^2} \right], \quad -\frac{\pi}{2} + \phi_o \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \phi_o, \tag{6.15}$$

e considerando as variáveis  $\phi_i$  e  $\phi_j$  independentes, o valor médio,  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$ , pode ser dado por

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] = \iint_{\phi_i, \phi_j} I(\phi_i, \phi_j) p(\phi_i) p(\phi_j) d\phi_i d\phi_j \quad -\frac{\pi}{2} + \phi_o \leq \phi_i, \phi_j \leq \frac{\pi}{2} + \phi_o. \tag{6.16}$$

Aplicando o resultado mostrado na Equação 6.15 à Equação 6.14, chega-se, após alguma manipulação algébrica, à expressão

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] = \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \Re^2\{\mathcal{E}(m, n)\} a_n^2 a_m^2 + \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \Im^2\{\mathcal{E}(m, n)\} a_n^2 a_m^2 + \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \Re^2\{\mathcal{F}(m, n)\} a_n^2 a_m^2 + \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \Im^2\{\mathcal{F}(m, n)\} a_n^2 a_m^2, \quad (6.17)$$

em que  $\mathcal{E}(m, n)$  e  $\mathcal{F}(m, n)$  são dados respectivamente por

$$\mathcal{E}(m, n) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\phi_o}^{\frac{\pi}{2}+\phi_o} \exp(jkd(m-n)\cos\phi) \exp\left(-\frac{(\phi-\phi_o)^2}{2\sigma_\phi^2}\right) d\phi \quad (6.18)$$

e

$$\mathcal{F}(m, n) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\phi_o}^{\frac{\pi}{2}+\phi_o} \exp(jkd(m+n-1)\cos\phi) \exp\left(-\frac{(\phi-\phi_o)^2}{2\sigma_\phi^2}\right) d\phi. \quad (6.19)$$

O somatório na Equação 6.17 pode ainda ser reescrito na forma simplificada

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] = \frac{1}{2N_o^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n^2 a_m^2 \mathcal{G}(m, n), \quad (6.20)$$

em que  $\mathcal{G}(m, n)$  é dado por

$$\mathcal{G}(m, n) = |\mathcal{E}(m, n)|^2 + |\mathcal{F}(m, n)|^2 \quad (6.21)$$

e  $|x|$  é o valor absoluto do número complexo  $x$ .

As integrais mostradas nas Equações 6.18 e 6.19 podem também ser reescritas na forma de somatórios de funções de Bessel de primeiro tipo e ordem zero, ou seja

$$\Re\{\mathcal{E}(m, n)\} = J_0(kd(m-n)) + k_3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kd(m-n)) e^{-2l^2\sigma_\phi^2} A_l(\phi_o, \sigma_\phi) \quad (6.22)$$

$$\Im\{\mathcal{E}(m, n)\} = k_3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kd(m-n)) e^{-\frac{(2l+1)^2}{2}\sigma_\phi^2} B_l(\phi_o, \sigma_\phi), \quad (6.23)$$

em que

$$A_l(a, b) = [\cos(2la)A(2l, b) - \text{sen}(2la)B(2l, b)] \quad (6.24)$$

$$B_l(a, b) = [\cos((2l+1)a)A((2l+1), b) - \text{sen}((2l+1)a)B((2l+1), b)]. \quad (6.25)$$

Do mesmo modo tem-se

$$\Re\{\mathcal{F}(m, n)\} = J_0(kd(m+n-1)) + k_3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kd(m+n-1)) e^{-2l^2\sigma_\phi^2} A_l(\phi_o, \sigma_\phi) \quad (6.26)$$

$$\Im\{\mathcal{F}(m, n)\} = k_3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kd(m+n-1)) e^{-\frac{(2l+1)^2}{2}\sigma_\phi^2} B_l(\phi_o, \sigma_\phi), \quad (6.27)$$

em que as funções  $\mathcal{A}(a, b)$  e  $\mathcal{B}(a, b)$  são calculadas a partir das Equações 5.27 e 5.28, mostradas no Capítulo 5.

A função  $I^2(\phi_i, \phi_j)$ , necessária ao cálculo do desvio padrão, é escrita, em termos de co-senos, como

$$I^2(\phi_i, \phi_j) = \frac{1}{8N_o^4} \sum_{k,l,m,n=1}^M \sum \sum (a_k a_l a_m a_n)^2 \left\{ \sum_{j=1}^8 \cos[2c_j \psi] \right\}, \quad (6.28)$$

em que

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Sabendo então que

$$E [I^2(\phi_i, \phi_j)] = \iint_{\phi_i, \phi_j} I^2(\phi_i, \phi_j) p(\phi_i) p(\phi_j) d\phi_i d\phi_j \quad -\frac{\pi}{2} + \phi_o \leq \phi_i, \phi_j \leq \frac{\pi}{2} + \phi_o, \quad (6.30)$$

tem-se que

$$E [I^2(\phi_i, \phi_j)] = \frac{1}{8N_o^4} \sum_{k,l,m,n=1}^M \sum \sum (a_k a_l a_m a_n)^2 \left\{ \sum_{j=1}^8 |H_j(k, l, m, n)|^2 \right\}. \quad (6.31)$$

As partes real e imaginária de  $H_j(k, l, m, n)$  são iguais às partes real e imaginária mostradas nas Equações 6.23 e 6.27. Deve-se substituir apenas o termo  $(m - n)$  ou  $(m + n - 1)$  por  $c_j$  mostrado na Equação 6.29.

Finalmente, tem-se que

$$E [I(\phi_i, \phi_j)]^2 = \frac{1}{N_o^4} \sum_{k,l,m,n=1}^M \sum \sum \mathcal{G}(k, l) \mathcal{G}(m, n). \quad (6.32)$$

O desvio padrão de  $I(\phi_i, \phi_j)$  segue então diretamente das Equações 6.31 e 6.32.

### 6.3.2 Distribuição uniforme para os ângulos de chegada

No caso de se modelar os ângulos de chegada dos sinais que alcançam o arranjo de antenas da estação radiobase por uma distribuição uniforme,  $p_u(\phi)$ , tal que

$$p_u(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & -\Delta + \phi_o \leq \phi \leq \Delta + \phi_o \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (6.33)$$

o procedimento para a obtenção de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  e do desvio padrão de  $I(\phi_i, \phi_j)$  é similar ao procedimento usado na subseção anterior.

O valor médio de  $I(\phi_i, \phi_j)$  é dado por

$$E[I(\phi_i, \phi_j)] = \iint_{\phi_i, \phi_j} I(\phi_i, \phi_j) p(\phi_i) p(\phi_j) d\phi_i d\phi_j \quad -\Delta + \phi_o \leq \phi_i, \phi_j \leq \Delta + \phi_o. \quad (6.34)$$

Aplicando este valor esperado à expressão de  $I(\phi_i, \phi_j)$  dada na Equação 6.14, chega-se a uma expressão para  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em termos de produtos de integrais da forma

$$\left( \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_o}^{\Delta+\phi_o} \cos(kd(m+n-1) \cos \phi_i) d\phi_i \right) \left( \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_o}^{\Delta+\phi_o} \cos(kd(m+n-1) \cos \phi_j) d\phi_j \right). \quad (6.35)$$

$$\left( \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_o}^{\Delta+\phi_o} \text{sen}(kd(m+n-1) \cos \phi_i) d\phi_i \right) \left( \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta+\phi_o}^{\Delta+\phi_o} \text{sen}(kd(m+n-1) \cos \phi_j) d\phi_j \right). \quad (6.36)$$

Essas integrais são na verdade as partes real e imaginária dos valores esperados

$$E[e^{jkd(m+n-1) \cos \phi_i}] \quad \text{e} \quad E[e^{jkd(m+n-1) \cos \phi_j}] \quad (6.37)$$

Chamando essas partes real e imaginária novamente de  $\Re\{\mathcal{F}(m, n)\}$  e  $\Im\{\mathcal{F}(m, n)\}$ , pode-se escrever, para a distribuição uniforme

$$\Re\{\mathcal{F}(m, n)\} = J_0(kd(m+n-1)) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kd(m+n-1)) \text{Sa}(2l\Delta) \cos(2l\phi_o) \quad (6.38)$$

$$\Im\{\mathcal{F}(m, n)\} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kd(m+n-1)) \text{Sa}((2l+1)\Delta) \cos((2l+1)\phi_o) \quad (6.39)$$

De forma semelhante ao desenvolvimento da subseção 6.3.1, tem-se

$$\Re\{\mathcal{E}(m, n)\} = J_0(kd(m-n)) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kd(m-n)) \text{Sa}(2l\Delta) \cos(2l\phi_o) \quad (6.40)$$

$$\Im\{\mathcal{E}(m, n)\} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kd(m-n)) \text{Sa}((2l+1)\Delta) \cos((2l+1)\phi_o). \quad (6.41)$$

Do mesmo modo que na subseção anterior, a expressão para  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  é idêntica à Equação 6.21. A expressão de  $E[I^2(\phi_i, \phi_j)]$  é idêntica à expressão mostrada na Equação 6.31, bastando substituir as partes real e imaginária de  $H_j(k, l, m, n)$  pelas partes real e imaginária mostradas nas Equações 6.38 e 6.39 ou 6.40 e 6.41. Da mesma forma que no caso anterior, os termos  $(m+n-1)$  ou  $(m-n)$  devem ser substituídos pelos termos  $c_j$  mostrados na Equação 6.29. A partir dos resultados obtidos acima pode-se mostrar algumas curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  para as distribuições gaussiana e uniforme, considerando-se o arranjo linear simétrico com elementos excitados usando-se os métodos binomial e polinomial.

## 6.4 Resultados Numéricos

Para que se possa analisar o desempenho da estrutura de arranjo linear simétrica no combate à interferência mútua no modelo de canal com *cluster* de difusores locais, é interessante analisar o comportamento do valor médio da potência mútua de interferência para diferentes valores de parâmetros do canal direcional. São considerados apenas características espaciais do modelo de canal.

O primeiro conjunto de resultados apresentado nas Figuras 6.3 e 6.4 mostra o comportamento de  $E[I(\theta_i, \theta_j)]$  quando a expansão binomial é usada no projeto dos coeficientes de excitação e a distribuição gaussiana é usada para modelar os ângulos de chegada.

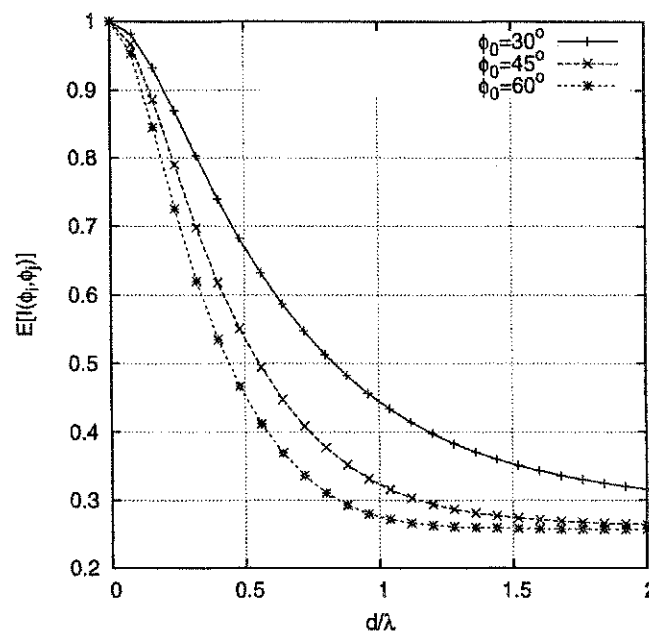


Figura 6.3: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ , considerando-se  $\sigma_\phi = 20^\circ$ , excitação binomial e distribuição gaussiana.

O segundo conjunto de resultados mostrados nas Figuras 6.5 e 6.6 mostra o comportamento de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  quando a expansão polinomial é usada no projeto dos coeficientes de excitação e a distribuição gaussiana é usada para modelar os ângulos de chegada.

O terceiro conjunto de resultados mostrados nas Figuras 6.7 e 6.8 mostra o comportamento de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  quando a expansão binomial é usada no projeto dos coeficientes de excitação e a distribuição uniforme é usada para modelar os ângulos de chegada.

Finalmente, o quarto conjunto de resultados nas Figuras 6.9 e 6.10 mostra o comportamento de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  quando a expansão polinomial é usada no projeto dos coeficientes de excitação e a distribuição uniforme é usada para modelar os ângulos de chegada.

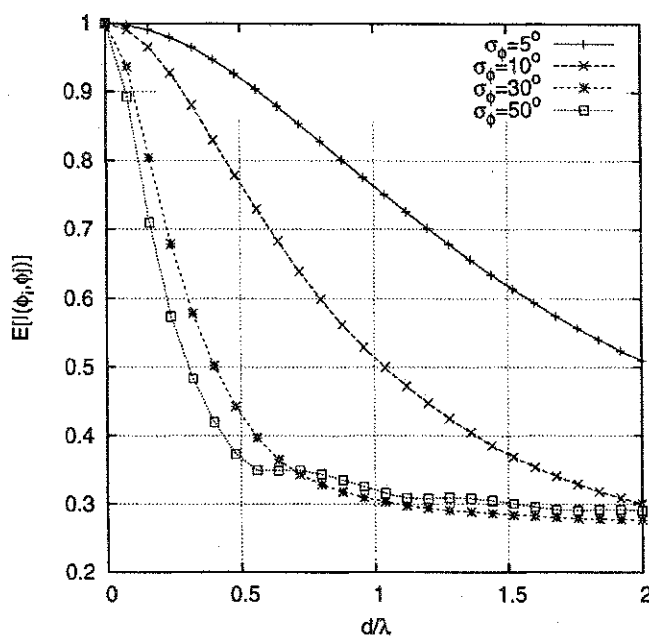


Figura 6.4: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ , considerando-se  $\phi_o = 45^\circ$ , excitação binomial e distribuição gaussiana.

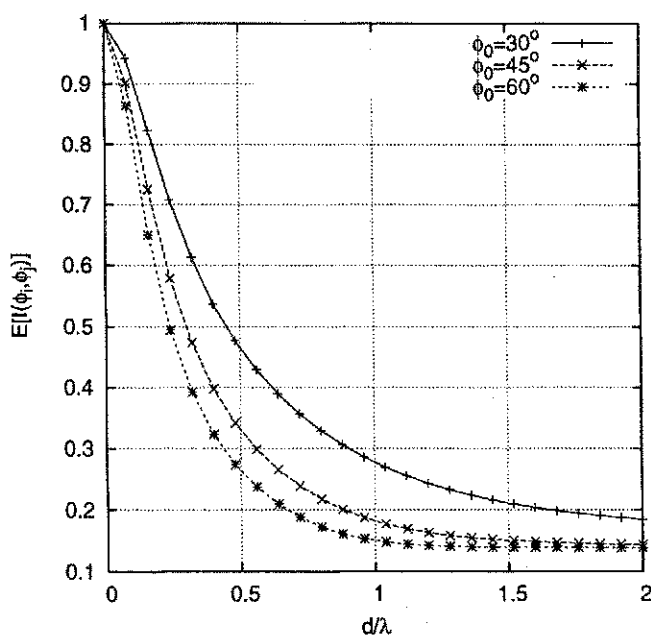


Figura 6.5: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\phi_o$ , considerando-se  $\sigma_\phi = 20^\circ$ , excitação polinomial e distribuição gaussiana.

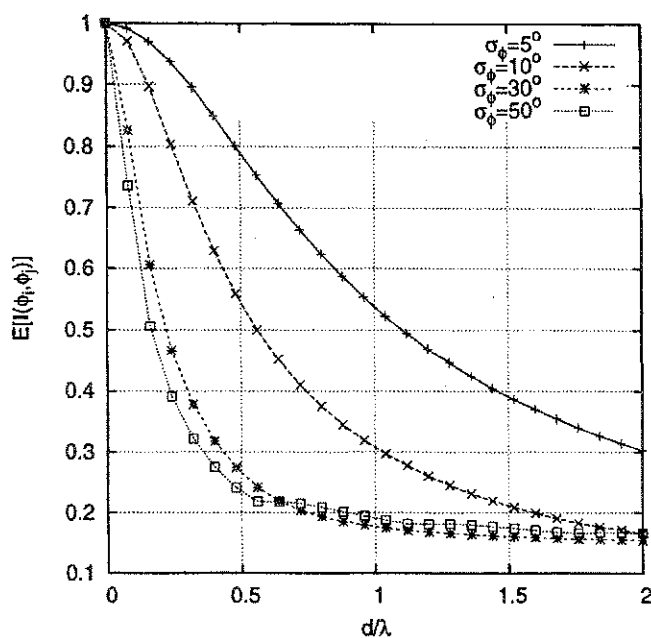


Figura 6.6: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\sigma_\phi$ , considerando-se  $\phi_o = 45^\circ$ , excitação polinomial e distribuição gaussiana.

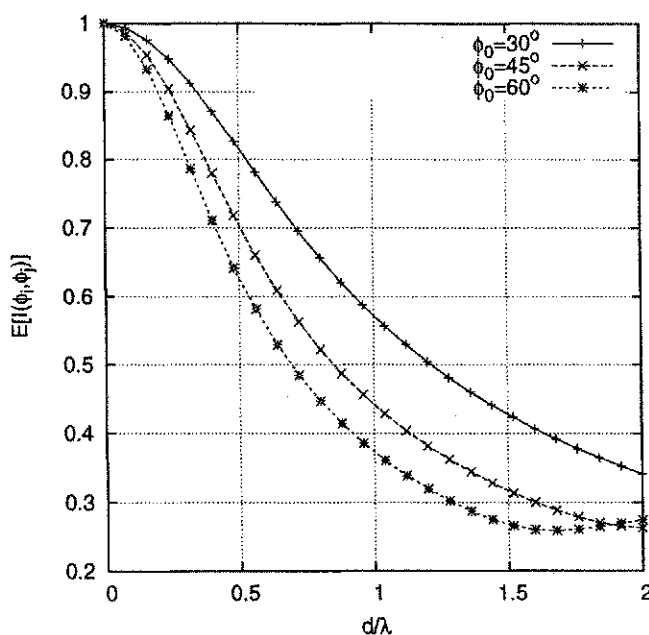


Figura 6.7: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\phi_o$ , considerando-se  $\Delta = 20^\circ$ , excitação binomial e distribuição uniforme.



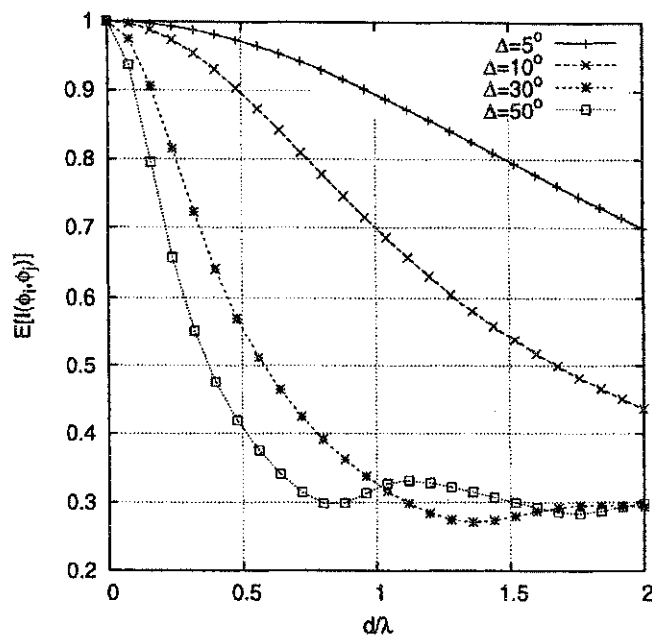


Figura 6.8: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\Delta$ , considerando-se  $\phi_o = 45^\circ$ , excitação binomial e distribuição uniforme.

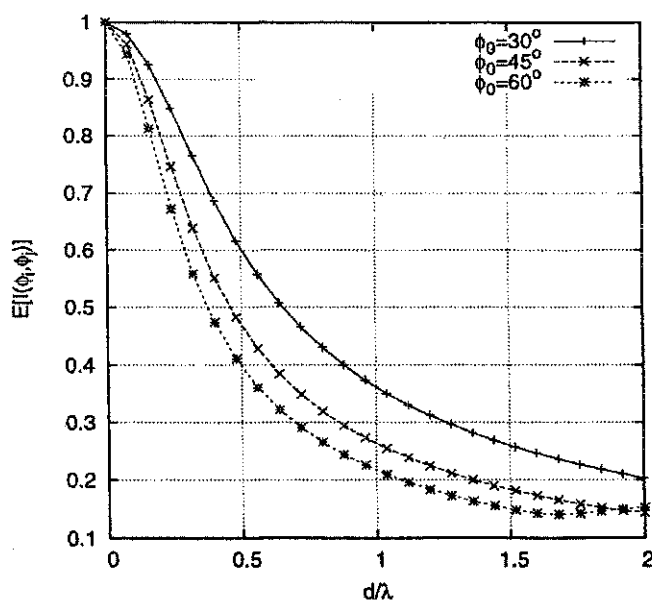


Figura 6.9: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\phi_o$ , considerando-se  $\Delta = 20^\circ$ , excitação polinomial e distribuição uniforme.

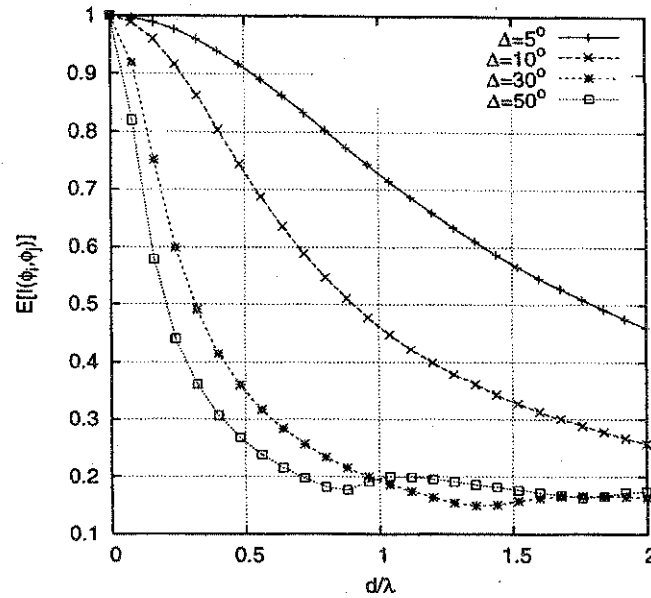


Figura 6.10: Curvas de  $E[I(\phi_i, \phi_j)]$  em função de  $d/\lambda$  para um arranjo linear simétrico com 10 elementos ao longo do eixo  $x$ , para diferentes valores de  $\Delta$ , considerando-se  $\phi_o = 45^\circ$ , excitação polinomial e distribuição uniforme.

Como se pode perceber pelas curvas, o arranjo associado à excitação polinomial fornece níveis médios de interferência mútua menores em relação ao arranjo com excitação binomial. Isso ocorre basicamente devido à regularidade da distribuição dos valores dos coeficientes fornecidos pela expansão polinomial e pela amplitude reduzida desses coeficientes. O comportamento da interferência mútua também depende do espalhamento angular e da direção do componente direcional do canal  $\phi_o$ . O espalhamento angular denotado por  $S_\phi$  é relacionado ao desvio padrão angular e ao parâmetro  $\Delta$  pela Equação 5.49.

## 6.5 Obtenção da fdp de $I(\phi_i, \phi_j)$

Será apresentado nesta seção o desenvolvimento matemático necessário à obtenção da distribuição de probabilidade da variável aleatória  $I(\phi_i, \phi_j)$ . Uma avaliação dessa distribuição é necessária, por exemplo, na avaliação da probabilidade de exclusão (*outage*) de um sistema celular formado por uma célula central rodeada por um conjunto de células adjacentes. Na referência [52], por exemplo, é mostrado que a avaliação da probabilidade de exclusão  $P_{\text{out}}$  no enlace direto (descida) de um sistema com essa configuração pode ser feita por meio da expressão

$$P_{\text{out}} = \Pr \left( G_1 + G_2 > \frac{L}{R_s} - \frac{\sigma_\eta^2}{P_o} \right), \quad (6.42)$$

em que as variáveis  $G_1$  e  $G_2$  representam a relação (potência de interferência)-(potência do sinal desejado) devido aos sinais dos usuários internos e externos à célula do usuário desejado, respectivamente, e são dados por

$$G_1 = \sum_{j=2}^{N_u} \varphi_j \|\mathbf{a}_j^H \mathbf{a}_0\|^2 \quad (6.43)$$

$$G_2 = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_u} \varphi_j \frac{P_k}{P_0} \|\mathbf{a}_j^H \mathbf{a}_0^k\|^2. \quad (6.44)$$

O usuário desejado, nesse caso, é o usuário avaliado, que se encontra na célula central; e sofre a interferência dos usuários que estão na mesma célula que ele e nas células vizinhas.

As variáveis  $\varphi_j$  são variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli e probabilidade de sucesso  $\nu$  que modelam o fator de atividade de voz do  $j$ -ésimo usuário, ou seja, um determinado usuário fica ativo com probabilidade  $\nu$ . É assumido que todos os sinais recebidos na unidade móvel do usuário avaliado, a partir da mesma estação radiobase, sofrem o mesmo desvanecimento e perdas de percurso. Dessa forma, assumindo que as estações radiobase transmitem o mesmo nível de potência para todos os usuários em sua volta, a potência de cada sinal chegando no móvel desejado a partir da  $k$ -ésima célula é dada por

$$P_k = P\beta_k^2, \quad (6.45)$$

em que  $\beta_k^2$  é uma variável que engloba o desvanecimento e o sombreamento experimentado por todos os sinais que chegam no móvel desejado a partir da  $k$ -ésima célula. As variáveis  $N_u$ ,  $N_c$  e  $L$  representam respectivamente o número de usuários por célula, o número de células e o ganho de processamento obtido com o uso de um esquema de acesso como o CDMA, por exemplo. Por fim, as variáveis  $R_s$  e  $\sigma_\eta^2$  e  $P_0$  representam, respectivamente, a relação (energia por bit)-(energia da interferência mais ruído), potência do ruído aditivo do sistema e um limitante inferior para a taxa de erro de bit, adequada ao bom desempenho do sistema.

O termo  $|\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_0|^2$ , corresponde justamente à potência de interferência mútua entre dois usuários que chegam à antena da estação radiobase com ângulos de chegada iguais a  $\phi_i$  e  $\phi_0$ , por exemplo. Nas seções anteriores esse termo, no caso de ângulos de chegada  $\phi_i$  e  $\phi_j$ , foi denotado por  $I(\phi_i, \phi_j)$  e será analisado mais uma vez neste capítulo usando-se a mesma configuração de arranjo linear simétrico e considerando que os ângulos de chegada dos sinais que alcançam o arranjo são uniformemente distribuídos no intervalo  $(-\pi, \pi)$ .

Sabe-se que a variável  $I(\phi_i, \phi_j)$ , no caso de um arranjo linear simétrico com  $N = 2M$  elementos,

pode ser escrita como

$$I(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{N_o^2} \left( \sum_{n=1}^M a_n^2 \cos((2n-1)Y) \right)^2, \quad N_o = \sum_{n=1}^M a_n^2, \quad (6.46)$$

em que  $Y = \frac{kd}{2}(\cos(\phi_i) - \cos(\phi_j))$ . Se  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são os ângulos de chegada uniformemente distribuídos entre  $-\pi$  e  $\pi$ , então a variável  $X = \cos(\phi_i) - \cos(\phi_j)$  terá função característica, denotada por  $\Phi_X(\omega)$ , escrita como

$$\Phi_X(\omega) = J_0^2(\omega). \quad (6.47)$$

Desse modo, a função densidade de probabilidade de  $X$ , denotada por  $p(x)$ , é dada por

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0^2(\omega) e^{-j\omega x} d\omega. \quad (6.48)$$

A fdp da variável  $Y = \frac{kd}{2}X$ , pode então ser escrita como

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0^2\left(\frac{kd}{2}\omega\right) e^{-j\omega y} d\omega. \quad (6.49)$$

Definindo uma terceira variável  $S = \sum_{n=1}^M a_n^2 \cos((2n-1)Y)$ , pode-se mostrar que sua função característica,  $\Phi_S(\omega)$  pode ser obtida por meio da integral

$$\Phi_S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega S(y)} p(y) dy. \quad (6.50)$$

Se  $d = \lambda/4$ , então  $-\frac{\pi}{2} < Y < \frac{\pi}{2}$  e dessa forma o integrando da Equação 6.50 passa a ser integrado no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Da mesma forma, se  $d = \frac{\lambda}{2}$ ,  $\pi < Y < \pi$ , e a integração passa a ser feita no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Devido à natureza da variável  $S$ , torna-se impraticável realizar uma operação de inversão de  $S(y)$  nos intervalos  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e  $[-\pi, \pi]$ . Dessa forma, é uma tarefa bastante complexa obter uma expressão fechada para a fdp da variável  $S$ ,  $p(s)$ .

Para que se possa obter a distribuição de  $I(\phi_i, \phi_j)$ , é necessário ainda realizar uma outra operação de integração. Para esse caso, pode-se mostrar que se  $Z$  e  $W$  são variáveis aleatórias tais que  $Z = W^2$ , então

$$\Phi_Z(\omega) = \frac{(1+j)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju^2} \Phi_W(2\sqrt{\omega}u) du. \quad (6.51)$$

Utilizando este resultado e incorporando a constante de normalização  $N_0$ , pode-se escrever  $\Phi_I(\omega)$  como

$$\Phi_I(\omega) = \frac{(1+j)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju^2} \Phi_S(2N_0\sqrt{\omega}u) du. \quad (6.52)$$

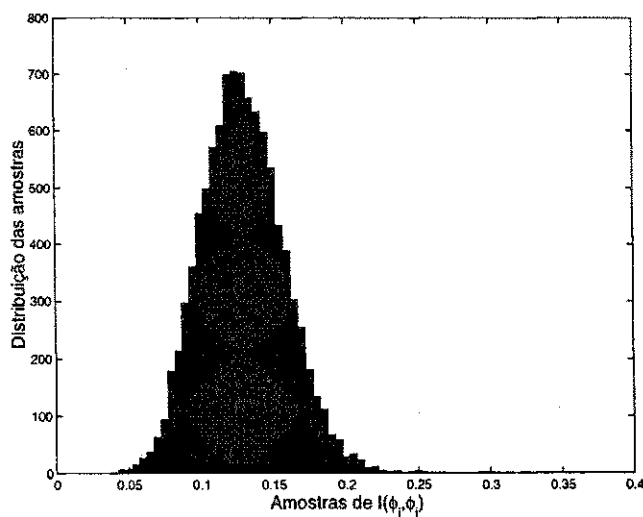
Percebe-se dessa forma, da Equação 6.50 à Equação 6.52, um acúmulo de três operações de integração de funções complexas. Para que se possa avaliar a função cumulativa de probabilidade de  $I(\phi_i, \phi_j)$ ,

$F(I)$ , uma outra integração ainda é necessária. Essa outra integração decorre do resultado conhecido como lema de Gil-Palaez, que estabelece que se  $F(x)$  é a função cumulativa de uma variável  $X$  cuja função característica é  $\Phi_X(\omega)$ , então

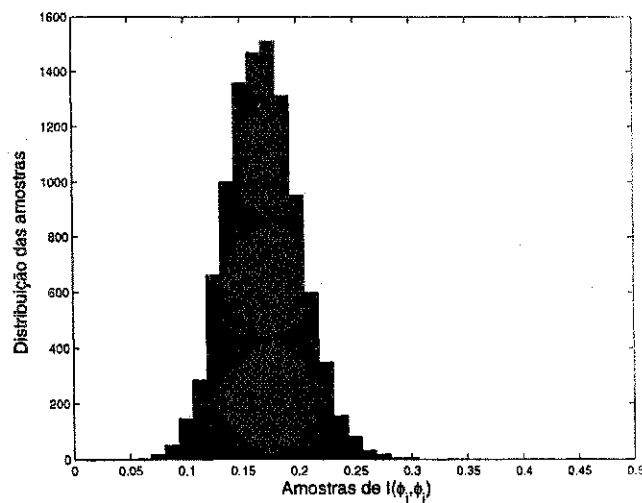
$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im \{ \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} \}}{\omega} d\omega, \quad (6.53)$$

em que  $\Im(x)$  denota a parte imaginária de  $x$ . Dessa forma, são necessárias quatro operações de integração. Além de não ser possível obter uma expressão fechada para a função  $F(I)$ , a avaliação numérica também se torna exaustiva e o processamento computacional demorado. Uma solução para contornar essa dificuldade é realizar uma aproximação da variável  $I(\phi_i, \phi_j)$  por alguma fdp apropriada e conhecida.

Usando o método de Monte Carlo, pode-se perceber que a distribuição das amostras geradas da variável  $I(\phi_i, \phi_j)$  tendem a uma distribuição normal. Tomando uma média de cem realizações do processo  $I(\phi_i, \phi_j)$ , considerando um arranjo excitado usando o método da expansão polinomial de Dolph-Tschebyscheff e considerando que a razão entre o valor máximo do diagrama de radiação e o valor máximo do principal lóbulo secundário seja  $R_0$  dB, pode-se obter os histogramas mostrados nas Figuras 6.11(a) e 6.11(b). Os coeficientes polinomiais foram calculados usando um método chamado Método de Barbieri [1]. Pode-se perceber por esses histogramas que  $I(\phi_i, \phi_j)$  pode ser aproximada por uma distribuição normal com parâmetros  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$ .



(a) Arranjo com  $kd = \pi$ ,  $M = 5$  e  $R_0 = 20$  dB



(b) Arranjo com  $kd = \frac{\pi}{2}$ ,  $M = 6$  e  $R_0 = 20$  dB

Figura 6.11: Distribuição das amostras da variável aleatória  $I(\phi_i, \phi_j)$ , considerando-se um arranjo linear simétrico com  $2M$  elementos distribuídos ao longo do eixo do arranjo, com excitação polinomial e relação de amplitudes  $R_0$ .

Nas Tabelas 6.2 e 6.3, por exemplo, são mostrados os parâmetros  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$ , estimados para diferentes valores do número de elementos  $M$ .

M	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu}_s$	$\hat{\sigma}_i$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}_s$
3	0,2527	0,2534	0,2541	0,0355	0,0360	0,0365
4	0,1926	0,1933	0,1939	0,0325	0,0330	0,0334
5	0,1561	0,1567	0,1573	0,0300	0,0304	0,0308
6	0,1307	0,1312	0,1318	0,0275	0,0279	0,0283
7	0,1142	0,1147	0,1153	0,0262	0,0266	0,0269

Tabela 6.2: Estimativas  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$ , com seus respectivos intervalos de confiança, para  $R_0 = 20$  dB e  $d = \lambda/2$ .

M	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu}_s$	$\hat{\sigma}_i$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}_s$
3	0,2885	0,2892	0,2899	0,0360	0,0365	0,0370
4	0,2236	0,2242	0,2249	0,0341	0,0346	0,0351
5	0,1826	0,1832	0,1838	0,0318	0,0323	0,0327
6	0,1546	0,1552	0,1557	0,0299	0,0303	0,0307
7	0,1342	0,1347	0,1353	0,0283	0,0287	0,0291

Tabela 6.3: Estimativas  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$ , com seus respectivos intervalos de confiança, para  $R_0 = 26$  dB e  $d = \lambda/2$ .

Um outro resultado interessante é o histograma da variável  $G_2$  mostrado na Figura 6.12. Por esse histograma, percebe-se que a distribuição de  $G_2$  tende para uma distribuição de Rayleigh. Nessa simulação foi considerado um arranjo linear com 8 elementos igualmente espaçados, projetado pelo método de Dolph-Tschebyscheff com relação  $R_0 = 26$  dB e com amplitudes dos coeficientes de excitação dos elementos simetricamente distribuídas ao longo da origem. Foi considerado um sistema celular com  $N_c = 10$  células,  $N_u = 20$  usuários por célula e variância de sombreamento igual a 8 dB.

O último histograma desta seção diz respeito à soma das variáveis  $G_1 + G_2$ . O histograma dessa variável é mostrado na Figura 6.13 e foi obtido considerando-se um arranjo linear simétrico com 10 elementos igualmente espaçados com  $d = \lambda/2$ , projetado pelo método de Dolph-Tschebyscheff, em um sistema celular com 18 células e 60 usuários por célula. A razão entre as amplitudes máximas do diagrama de radiação,  $R_0$ , foi considerada 26 dB e a variância do sombreamento igual a 8 dB.

Na próxima seção é mostrado como o controle de interferência por meio do uso de arranjos de antenas pode aumentar o número de usuários suportados em um modelo de sistema CDMA. Para

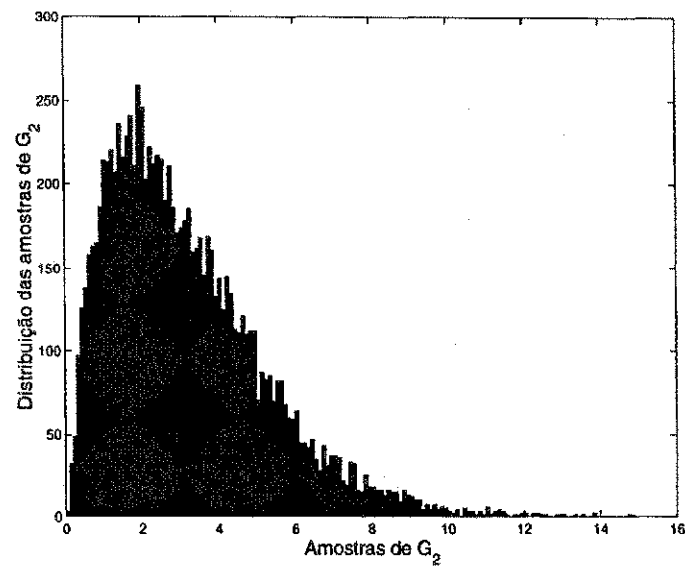


Figura 6.12: Histograma da variável  $G_2$ , para um arranjo linear simétrico com 8 elementos,  $d = \lambda/2$  e  $R_0 = 26$  dB, 10 células e 20 usuários por célula.

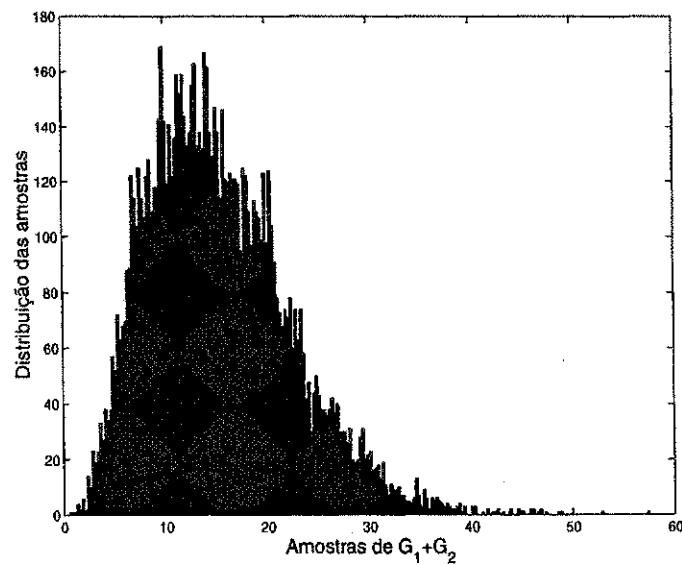


Figura 6.13: Histograma da variável  $G_1 + G_2$ , para um arranjo linear simétrico com 10 elementos,  $d = \lambda/2$  e  $R_0 = 26$  dB, 18 células e 60 usuários por célula.

facilitar a explanação do que se pretende propor, são utilizados alguns parâmetros do padrão IS-95 original.

## 6.6 Avaliação da Capacidade de um Sistema CDMA por Meio da Correlação Espacial

Nesta seção é mostrado como as funções de correlação espacial podem ser usadas na avaliação do número de usuários ativos em um sistema de múltiplo acesso como o CDMA, em um modelo de canal de baixo *rank*. Um canal é dito de baixo *rank* se o espalhamento por atraso  $S_t$  for pequeno comparado ao inverso da largura da faixa de coerência do filtro de recepção e se o espalhamento angular  $S_\phi$  for pequeno em relação à largura do lóbulo principal radiado pelo arranjo, no ponto de queda de 3-dB. O modelo de baixo *rank* mais conhecido é o modelo de difusores locais, que leva em consideração o componente direcional do canal e é comumente encontrado em subúrbios e em locais em que a antena da estação radiobase é mais alta que a maioria dos difusores vizinhos. Nesses ambientes, os sinais do enlace de subida são refletidos e refratados por esses difusores, que nesse caso podem ser árvores e edificações de médio porte, fazendo com que os sinais cheguem na antena da estação radiobase dentro de um determinado intervalo angular e segundo uma determinada distribuição de probabilidade. Nas próximas seções é feita uma análise de como esse modelo de canal, juntamente com o tipo de arranjo de antena, influenciam no número máximo de usuários que o sistema pode suportar, quando é considerada apenas a distribuição gaussiana para os ângulos de chegada.

### 6.6.1 Modelo do canal estudado

O desempenho de sistemas de múltiplo acesso como o CDMA é geralmente limitado pela interferência entre os sinais dos usuários do sistema. Mesmo quando o número de usuários ativos é pequeno, o nível de interferência é significativamente maior que o nível de ruído aditivo, fazendo com que a relação sinal-(interferência+ruído) (SINR) fique limitada.

Tomando especificamente o sistema CDMA, sabe-se que seu alcance no enlace de subida é limitado pela potência máxima que pode ser transmitida por cada unidade móvel e pelo número de usuários ativos. Na tentativa de melhorar a qualidade e aumentar o alcance desse enlace, alguns métodos de processamento de sinais têm sido propostos. Um desses métodos é o processamento espacial dos sinais trafegantes por meio de arranjos de antenas e pela configuração adequada das células. Um exemplo de configuração celular adequada a um sistema celular CDMA, proposta em [53], é formada por uma célula circular de raio  $R$  cercada por 8 células de mesma área, como ilustrado na Figura 6.14.



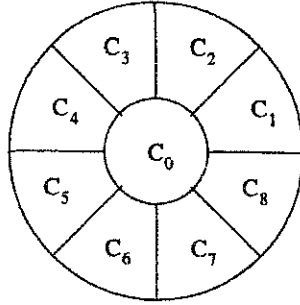


Figura 6.14: Aglomerado celular com 8 células adjacentes.

Nesse modelo de aglomerado celular, a interferência total observada na estação radiobase central, para um dos usuários da célula central  $C_0$ , é dada pela soma da interferência de todos os demais usuários internos a  $C_0$ , mais a interferência causada pelos usuários das células vizinhas [53], [54], [52]. Para obter a modelagem matemática dessa potência de interferência total, são feitas geralmente algumas considerações e simplificações que, embora facilitem o desenvolvimento matemático, são pouco coerentes do ponto de vista prático. Geralmente é assumido que o diagrama de radiação da antena utilizada é ideal e não são levados em consideração efeitos causados por propagação em múltiplos percursos, efeitos causados por erros de ajuste dos coeficientes associados às estruturas de arranjo adaptativas ou mesmo os efeitos causados pela degradação do diagrama de radiação em função da geometria do arranjo. Para levar em consideração alguns desses problemas, é interessante avaliar a interferência no enlace de subida por meio de um outro método. Esse outro método leva em consideração o modelo vetorial de um canal com  $L_k$  componentes de múltiplos percursos e é tratado na próxima seção.

## 6.6.2 Modelamento do problema

Para que se possa estudar o enlace de subida, com base no modelo vetorial do canal, é necessário primeiro caracterizá-lo matematicamente, de modo que o vetor de amostras de sinal recebido, em um arranjo de antenas de  $N$  elementos, proveniente do  $k$ -ésimo usuário, possa ser escrito como

$$\mathbf{u}_k(t) = \sum_{i=0}^{L_k-1} \alpha_{k,i} s_k(t - \tau_{k,i}) \mathbf{a}(\phi_{k,i}), \quad (6.54)$$

em que  $\alpha_{k,i}$ ,  $\tau_{k,i}$  e  $\mathbf{a}(\phi_{k,i})$  são respectivamente a amplitude complexa, o atraso de percurso e o vetor de direcionamento de  $N$  amostras do  $k$ -ésimo usuário do sistema. O objetivo geral do projeto de um enlace desse tipo é atender ao maior número de usuários com a maior confiabilidade possível.

Considera-se neste trabalho, por questões de simplicidade, o caso quase-estático, ou seja, o caso em que cada usuário se move devagar em relação à velocidade de processamento do sistema e que o

deslocamento Doppler é insignificante. Embora seja possível analisar um caso genérico de uma estrutura de receptor *rake* de múltiplos ramos, com  $L_k$  componentes de múltipercurso para cada usuário, é matematicamente mais conveniente estudar o caso em que cada usuário do sistema contribui com apenas um componente de múltipercurso [5]. Desse modo, pode-se dizer que a assinatura espacial para cada usuário  $k$  é simplesmente o vetor  $\mathbf{b}_k$  dado por

$$\mathbf{b}_k = \alpha_k \mathbf{a}(\phi_k). \quad (6.55)$$

Uma consideração importante neste ponto é assumir que existe um número relativamente grande de usuários ativos incidindo no arranjo de antenas na estação radiobase, de modo que o efeito combinado da interferência de múltiplo acesso possa ser modelado por um processo gaussiano branco. Desse modo, o vetor de pesos ótimo,  $\mathbf{w}_k$ , obtido pela minimização do erro quadrático médio na saída do arranjo de antenas, usado para extrair a assinatura espacial  $\mathbf{b}_k$ , é proporcional a  $\mathbf{b}_k$  [5]. Esse vetor de pesos ótimo pode ser escrito, sem perda de generalidade, como

$$\mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|}, \quad (6.56)$$

em que a norma de  $\mathbf{b}_k$ ,  $\|\mathbf{b}_k\|$  é dada por  $\|\mathbf{b}_k\| = \sqrt{\mathbf{b}_k^H \mathbf{b}_k}$ . Desse modo, a potência total medida no receptor da estação radiobase central para o usuário  $k = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} P_0 &= \|\mathbf{w}_0^H \mathbf{b}_0\|^2 = \left\| \frac{\mathbf{b}_0^H}{\|\mathbf{b}_0\|} \mathbf{b}_0 \right\|^2 = \frac{\|\mathbf{b}_0^H \mathbf{b}_0\|^2}{\|\mathbf{b}_0\|^2} \\ &= \|\alpha_0 \mathbf{a}(\phi_0)\|^2 = |\alpha_0|^2 \mathbf{a}^H(\phi_0) \mathbf{a}(\phi_0) \\ &= N |\alpha_0|^2. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Supondo então que existam  $N_u$  usuários ativos no sistema, cujos sinais chegam simultaneamente ao arranjo de antenas do receptor da estação radiobase com vetor de pesos ótimo associado  $\mathbf{w}_0$ , tem-se que a potência total da interferência de múltiplo acesso, vista pelo usuário  $k = 0$ , é dada por

$$I_0 = \nu \sum_{k=1}^{N_u-1} |\mathbf{w}_0^H \mathbf{b}_k|^2, \quad (6.58)$$

em que  $\nu$  é o fator de atividade da voz. Como os *vocoders* utilizados no IS-95 levam em consideração esse fator, há uma redução na interferência de múltiplo acesso de 50% a 60% em relação ao caso em que todos os usuários transmitem simultaneamente.

Baseado na geometria do arranjo de antenas e na distribuição dos usuários na área geográfica em torno da estação radiobase, pode-se determinar o valor médio para o termo  $|\mathbf{w}_0^H \mathbf{b}_k|^2$ , denotado por  $E[I_k]$ . Esse desenvolvimento é feito a seguir para um modelo de canal com distribuição gaussiana para os ângulos de chegada dos usuários, considerando as configurações de arranjo linear e circular.

Como foi visto no Capítulo 5, a fdp gaussiana usada modelar os ângulos de chegada é dada por

$$p_g(\phi) = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} e^{-\frac{(\phi-\phi_0)^2}{2\sigma_\phi^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} + \phi_0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \phi_0, \quad (6.59)$$

em que  $\sigma_\phi$  é o desvio padrão do espalhamento angular e  $k_3$  é uma contante usada para ajustar a área de  $p_g(\phi)$  a um valor unitário. O desvio padrão está relacionado ao espalhamento angular pela expressão

$$S_\phi = \sigma_\phi \sqrt{\operatorname{erf}\left(k_3 \frac{\pi}{\sqrt{8}\sigma_\phi}\right)}, \quad (6.60)$$

em que  $\operatorname{erf}(x)$  é a função erro definida em  $\mathbb{R}$ . Considerando inicialmente uma estrutura de arranjo linear com um número  $N$  de elementos igualmente separados por uma distância  $d$ , tem-se que o valor médio  $E[I_0]$  será dado por

$$E[I_0] = E\left[\nu \sum_{k=1}^{N_u-1} |\mathbf{w}_0^H \mathbf{b}_k|^2\right] = \nu \sum_{k=1}^{N_u-1} E[I_k], \quad (6.61)$$

em que

$$E[I_k] = E\left\{|\mathbf{w}_0^H \mathbf{b}_k|^2\right\} = \frac{|\alpha_k|^2}{N} E\left\{|\mathbf{a}^H(\phi_0)\mathbf{a}(\phi_k)|^2\right\}. \quad (6.62)$$

Sabendo que as variáveis aleatórias  $\phi_k$  são independentes identicamente com distribuição gaussiana, tem-se que o valor esperado no lado direito da Equação 6.62, assumindo uma estrutura de arranjo linear, pode ser denotado por  $\rho_{m,n}$  e escrito como

$$\rho_{m,n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E\left\{e^{-jkd(n-m)\cos\phi_0}\right\} E\left\{e^{jkd(n-m)\cos\phi_k}\right\}. \quad (6.63)$$

Usando a fdp dada em 6.59, tem-se que

$$\rho_{m,n} = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jkd(m-n)\cos\phi_0} e^{-\frac{(\phi_k-\phi_0)^2}{2\sigma_\phi^2}} d\phi_k. \quad (6.64)$$

Fazendo  $\rho_{m,n} = \Re\{\rho_{m,n}\} + j\Im\{\rho_{m,n}\}$  tem-se

$$E\left\{|\mathbf{a}^H(\phi_0)\mathbf{a}(\phi_k)|^2\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (\Re^2\{\rho_{m,n}\} + \Im^2\{\rho_{m,n}\}), \quad (6.65)$$

em que

$$\begin{aligned} \Im\{\rho_{n,m}\} &= k_3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kd(m-n)) B(l, \phi_0, \sigma_\phi) \\ \Re\{\rho_{n,m}\} &= k_3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kd(n-m)) A(l, \phi_0, \sigma_\phi) + J_0(kd(n-m)), \end{aligned} \quad (6.66)$$

as funções  $A(a, b, c)$  e  $B(a, b, c)$  são dadas respectivamente por

$$A(a, b, c) = e^{-2a^2c^2} (\cos(2ab)\mathcal{A}(2a, c) - \sin(2ab)\mathcal{B}(2b, c))$$

$$B(a, b, c) = e^{-\frac{(2a+1)^2}{2}c^2} (\sin((2a+1)b)\mathcal{A}(2a+1, c) + \cos((2a+1)b)\mathcal{B}(2a+1, c))$$

e as funções  $\mathcal{A}(a, b)$  e  $\mathcal{B}(a, b)$  são dadas respectivamente pelas Equações 5.27 e 5.28.

Tem-se portanto que

$$E[I_k] = \frac{|\alpha_k|^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (\Re^2\{\rho_{n,m}\} + \Im^2\{\rho_{n,m}\}), \quad (6.67)$$

em que o termo

$$G(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (\Re^2\{\rho_{n,m}\} + \Im^2\{\rho_{n,m}\}) \quad (6.68)$$

pode ser visto como um ganho de interferência que incorpora tanto características do modelo do canal quanto da geometria do arranjo de antenas. A partir deste ponto, pode-se obter uma expressão para a relação sinal-(ruído+interferência) que incorpore o ganho de interferência obtido na Equação 6.68, o fator de atividade de voz e o ganho de processamento  $L$  do sistema CDMA utilizado.

A SINR de um determinado usuário é definida como a razão entre a potência  $P_0$  do sinal desse usuário, medida no receptor da estação radiobase, e a soma das potências de interferência dos demais usuários mais a potência do ruído aditivo. Ou seja,

$$\text{SINR} = \frac{P_0}{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{N_u-1} P_k + \sigma_\eta^2}, \quad (6.69)$$

em que  $L$  é o fator de espalhamento ou ganho de processamento,  $P_0$  é a potência do sinal desejado na entrada do receptor na estação radiobase e  $P_k$  é a potência do  $k$ -ésimo usuário. No caso específico desta seção, a SINR pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \text{SINR} &= \frac{P_0}{\frac{L_0}{L} + \sigma_\eta^2} \\ &= \frac{N|\alpha_0|^2}{\frac{\nu}{L}G(N) \sum_{k=1}^{N_u-1} |\alpha_k|^2 + \sigma_\eta^2}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

A partir deste ponto, pode-se fazer algumas considerações que permitam expressar a SINR em termos de parâmetros como o fator de reuso  $f$  e o fator de carga  $\chi$ , dois parâmetros usuais na literatura sobre sistemas móveis e que são definidos respectivamente como:

- $f$  – razão entre a potência interferente de todos os usuários na célula e a potência interferente de todos os usuários do sistema
- $\chi$  – razão entre a potência recebida de todas as fontes de sinais e a mesma potência mais ruído

Fazendo a consideração usual que há controle perfeito de potência na célula do usuário desejado  $C_0$ , que o número de usuários ativos nessa célula é  $N_{u_0}$  e que a potência interferente de outros usuários em células adjacentes é igual a  $I_a$ , tem-se que

$$\text{SINR} \approx \frac{NP_0}{\frac{1}{L}(\nu G(N)(N_{u_0} - 1)P_0 + \nu G(N)I_a) + \sigma_\eta^2}. \quad (6.71)$$

Pela definição de fator de reuso, tem-se

$$f = \frac{(N_{u_0} - 1)\nu P_0}{\nu I_a + (N_{u_0} - 1)\nu P_0}. \quad (6.72)$$

Isolando  $I_a$  na Equação 6.72 e substituindo em 6.71 obtém-se

$$\text{SINR} \approx \frac{NP_0}{\frac{\nu P_0}{Lf}(N_{u_0} - 1)G(N) + \sigma_\eta^2}. \quad (6.73)$$

Pela definição de fator de carga, tem-se que

$$\chi = \frac{\nu(N_{u_0}P_0 + I_a)}{\nu(N_{u_0}P_0 + I_a) + L\sigma_\eta^2}, \quad (6.74)$$

que fornece

$$L\sigma_\eta^2 = \nu P_0 \left( \frac{1 - \chi}{\chi} \right) \left( 1 + \frac{N_{u_0} - 1}{f} \right). \quad (6.75)$$

Substituindo esse resultado na Equação 6.71 chega-se a

$$\text{SINR} = \gamma_p = \frac{fLN/\nu}{\left( \frac{1 - \chi}{\chi} \right) (f + N_{u_0} - 1) + G(N)(N_{u_0} - 1)}, \quad (6.76)$$

da qual se tira que

$$N_{u_0} = \frac{(1 - f)(1 - \chi) + \psi LN + \chi G(N)}{(1 - \chi) + \chi G(N)}, \quad (6.77)$$

em que  $\psi = \frac{\chi f}{\nu \gamma_p}$ .

Para um valor particular de SINR,  $\gamma_p$ , o número máximo de usuários,  $N_{u_m}$ , que o sistema pode suportar ocorre quando o fator de carga  $\chi \rightarrow 1$ . Desse modo, o número máximo de usuários é tal que

$$N_{u_m} \leq \frac{LNf}{\nu \gamma_p G(N)} + 1. \quad (6.78)$$

Tem-se portanto uma forma de avaliação do número de usuários no sistema em função do fator de reuso, do ganho de processamento, do fator de atividade de voz, da estrutura do canal e da geometria da antena, sendo os dois últimos fatores englobados pela função  $G(N)$ , que embora tenha três outros parâmetros, é escrita em função só de  $N$  por questões de simplicidade de notação.

No desenvolvimento acima foi considerado um arranjo linear com um número  $N$  de elementos igualmente espaçados por uma distância  $d$ . A partir deste ponto, o ganho de interferência é obtido

considerando uma estrutura de arranjo circular com raio  $a$  e um número  $N$  de elementos igualmente espaçados. Considerando que os ângulos de chegada dos sinais que alcançam o arranjo têm distribuição gaussiana, as partes real e imaginária da função de correlação espacial podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\Im\{\rho_{m,n}\} &= k_3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(kaC_{m,n}) B_l(\phi_0, \sigma_\phi, \varphi_{m,n}) \\ \Re\{\rho_{m,n}\} &= k_3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(kaC_{m,n}) A_l(\phi_0, \sigma_\phi, \varphi_{m,n}) + J_0(kaC_{m,n}),\end{aligned}\tag{6.79}$$

em que as funções  $A_l(a, b, c)$  e  $B_l(a, b, c)$  são dadas por

$$A_l(a, b, c) = e^{-2l^2 b^2} (\cos(2l(a-c))\mathcal{A}(2l, b) - \sin(2l(a-c))\mathcal{B}(2l, b))$$

$$B_l(a, b, c) = e^{-\frac{(2l+1)^2}{2} b^2} (\cos((2l+1)(a-c))\mathcal{A}(2l+1, b) - \sin((2l+1)(a-c))\mathcal{B}(2l+1, b)),$$

em que as funções  $\mathcal{A}(a, b)$  e  $\mathcal{B}(a, b)$  são dadas pelas Equações 5.27 e 5.28 e os termos  $\varphi_{m,n}$  e  $C_{m,n}$  são dados respectivamente pelas Equações 5.32 e 5.33.

Tendo-se obtido as funções dadas na Equação 6.79, pode-se facilmente calcular o ganho de interferência  $G(N)$  dado na Equação 6.68. Como pôde ser visto, a diferença entre os resultados obtidos para as funções de correlação espacial mostradas nestas duas equações decorre apenas das características geométricas dos arranjos de antenas utilizados.

## 6.7 Resultados

Os resultados obtidos nesta seção foram calculados para valores típicos dos parâmetros utilizados no desenvolvimento das equações presentes no texto. Valores típicos, por exemplo, do fator de carga  $\chi$  estão entre 0,5 e 0,75 [5]. O fator de reuso  $f$  depende do expoente da função *perdas de percurso* e em ambientes móveis práticos varia de 3 a 5. Fazendo esse expoente igual a 4, o fator de reuso  $f$  passa a ser 0,694. Usando um fator de atividade de voz  $\nu = 0,6$  e um ganho de processamento  $L = 128$ , o número de usuários ativos  $N_{u_0}$  suportado no modelo mostrado na Figura 6.14 passa a depender apenas de  $\chi$ ,  $\gamma_p$ ,  $N$  e  $G(N)$ . Antes, porém, de mostrar os valores de  $N_{u_0}$  é interessante ver o comportamento de  $G(N)$  em função de alguns parâmetros do canal e dos arranjos de antenas utilizados. As Figuras 6.15 e 6.16 mostram  $G(N)$  em função da direção do componente direcional  $\phi_0$ , para diferentes valores de desvio padrão angular  $\sigma_\phi$ , considerando um arranjo linear com  $N = 6$  e  $N = 10$  elementos. Vale salientar que nesta seção não está sendo levado em consideração a simetria do arranjo linear. Portanto o arranjo tem apenas  $N$  elementos igualmente espaçados ao longo do seu eixo.

Como pode-se ver nestas figuras,  $G(N)$  aumenta com  $\phi_0$ . Na Figura 6.17 é mostrado o comportamento de  $G(N)$  em função de  $\sigma_\phi$  para diferentes valores de  $\phi_0$ .

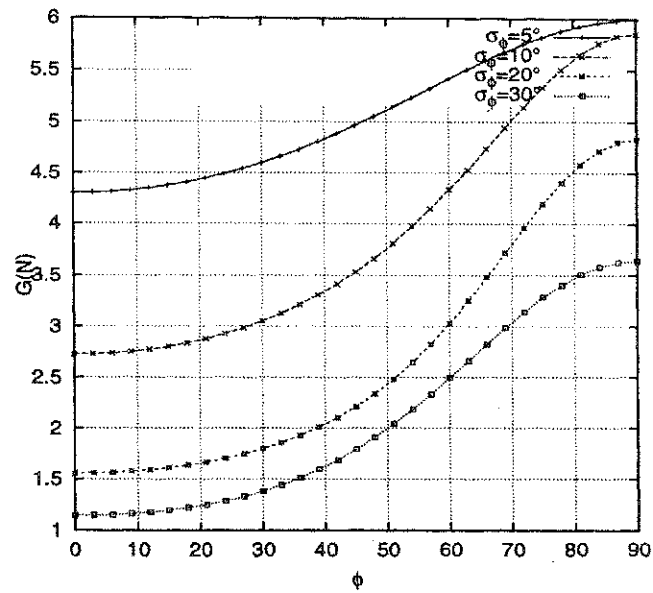


Figura 6.15: Ganho de interferência em função da direção do *cluster* de sinais refletidos  $\phi_o$  em um arranjo linear com  $N = 6$  elementos e  $d = \lambda/2$ .

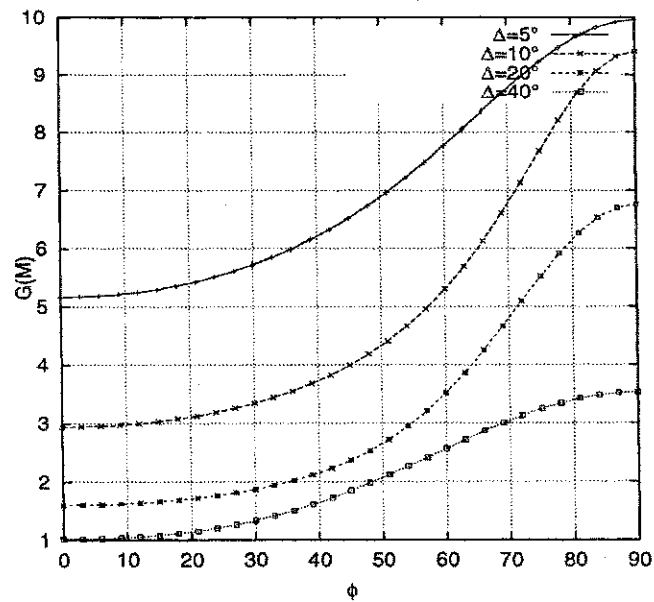


Figura 6.16: Ganho de interferência em função da direção do *cluster* de sinais refletidos  $\phi_o$  em um arranjo linear com  $N = 10$  elementos e  $d = \lambda/2$ .

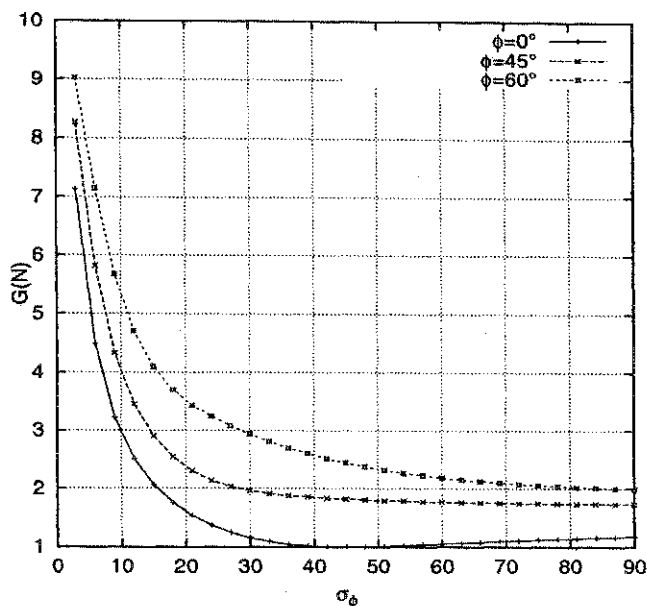


Figura 6.17: Ganho de interferência em função do desvio padrão angular  $\sigma_\phi$  em um arranjo linear com  $N = 10$  elementos e  $d = \lambda/2$ .

Para que se possa avaliar adequadamente  $N_{u_0}$  em função de  $G(N)$  é interessante ainda mostrar  $G(N)$  em função de  $d/\lambda$ , como na Figura 6.18.

Tendo-se mostrado o comportamento de  $G(N)$  graficamente, pode-se, a partir destes gráficos, tomar alguns valores específicos de  $G(N)$  e calcular os valores de  $N_{u_0}$ , como ilustrado na Tabela 6.4, na qual foi assumido  $\chi = 0,75$ . Os valores de  $K_{u_0}$  nesse caso foram calculados pela Equação 6.79.

Tabela 6.4: Número de usuários em um modelo de canal baixo *rank*, em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo linear na estação radiobase de cada célula.

$N_{u_0}$	$\gamma_p$							
	8dB				10dB			
	$\phi_o$				$\phi_o$			
	21°		45°		21°		45°	
	$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$	
	10°	20°	10°	20°	10°	20°	10°	20°
N=6	44	70	37	56	28	45	23	35
N=10	68	115	55	87	43	72	35	55

Como citado anteriormente, o número máximo de usuários,  $N_{u_m}$ , que o sistema pode suportar



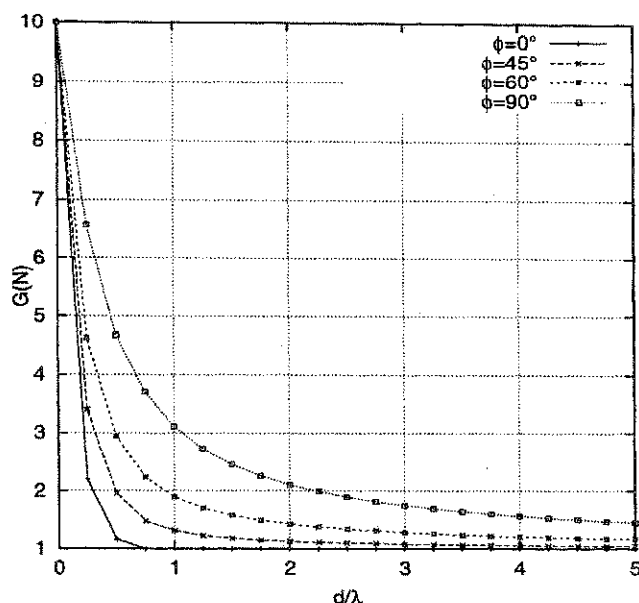


Figura 6.18: Ganho de interferência em função de  $d/\lambda$  em um arranjo linear com  $N = 10$  elementos e  $\sigma_\phi = 30^\circ$ , para diferentes valores de  $\phi_o$ .

ocorre quando o fator de carga  $\chi \rightarrow 1$ . Esses valores arredondados são mostrados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Número máximo de usuários em um modelo de canal baixo *rank*, em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo linear na estação radiobase de cada célula.

$N_{u_m}$	$\gamma_p$							
	8dB				10dB			
	$\phi_o$				$\phi_o$			
	21°		60°		21°		60°	
	$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$		$\sigma_\phi$	
	10°	20°	10°	20°	10°	20°	10°	20°
$\chi = 1.00$								
N=6	49	85	33	47	31	54	21	30
N=10	75	90	45	67	48	87	28	43

Devido à simetria radial do arranjo circular uniforme, a função  $G(N)$  torna-se mais invariante à direção do *cluster* de sinais refletidos pelos difusores do canal. O comportamento de  $G(N)$  em função de  $a/\lambda$  e de  $\sigma_\phi$  é mostrado nas Figuras 6.19 e 6.20.

A partir das Figuras 6.19 e 6.20 pode-se usar o mesmo procedimento usado para o cálculo dos valores das Tabelas 6.4 e 6.5 para obter os valores de  $N_{u_m}$  para o arranjo circular. Esses valores são mostrados na Tabela 6.6

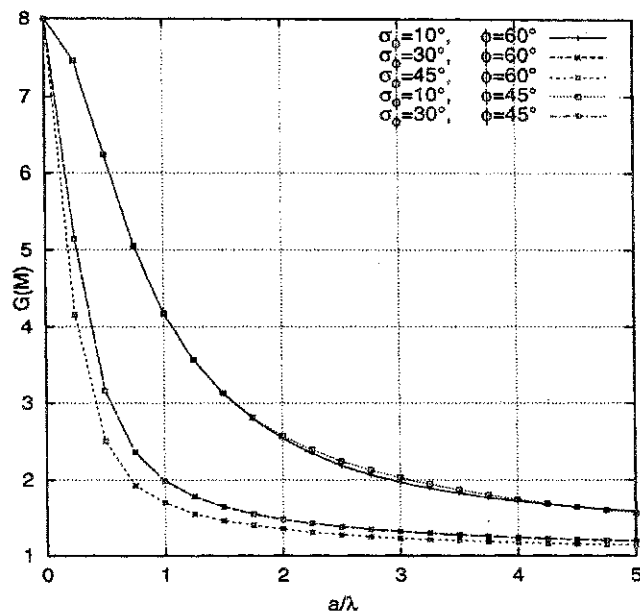


Figura 6.19: Ganho de interferência em função de  $a/\lambda$  em um arranjo circular com  $N = 8$  elementos para diferentes valores de  $\phi_0$  e  $\sigma_\phi$ .

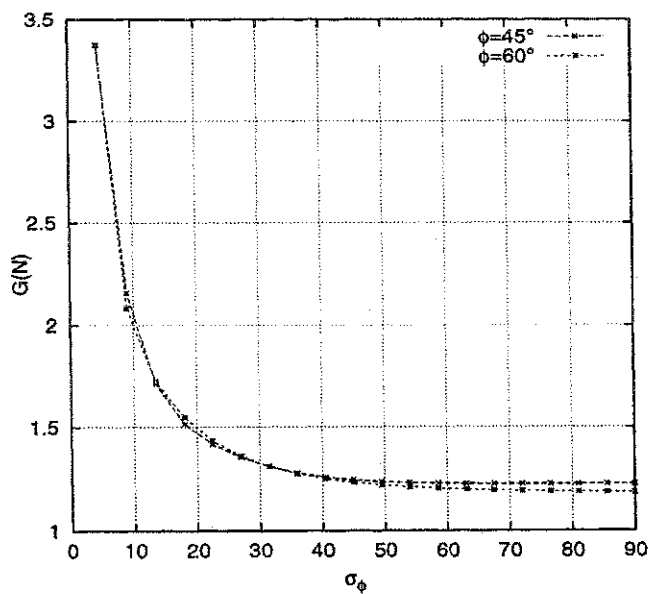


Figura 6.20: Ganho de interferência em função de  $\sigma_\phi$  em um arranjo circular com  $N = 8$  elementos e  $a = 3\lambda$ , para diferentes valores de  $\phi_0$ .

Tabela 6.6: Número máximo de usuários em um modelo de canal baixo *rank*, em um sistema celular circular com uma única camada de células adjacentes e com arranjo circular na estação radiobase de cada célula.

$N_{um}$	$\gamma_p$							
	8dB				10dB			
	$\phi_o$				$\phi_o$			
	45°		60°		45°		60°	
	$\sigma_\phi$				$\sigma_\phi$			
	10°	30°	10°	30°	10°	30°	10°	30°
$a = \lambda$	45	95	46	95	29	60	29	60
$a = 2\lambda$	74	125	75	127	47	80	47	80
$a = 3\lambda$	93	132	96	141	59	90	61	90

Como se pode perceber na Tabela 6.6, o número máximo de usuários que pode ser atendido depende principalmente de fatores como o raio do arranjo, a direção do *cluster* de sinais refletidos  $\phi_o$  e do desvio padrão angular  $\sigma_\phi$ . A escolha adequada desses parâmetros é que faz com que esse limitante aumente ou diminua.

## 6.8 Conclusão

Neste capítulo foi feita uma análise do uso de duas estruturas de arranjos de antenas (linear e circular) no controle de interferência em sistemas de comunicações. Inicialmente, foi visto como estruturas de arranjo simétricas podem ser usadas no controle de interferência mútua considerando-se as distribuições uniforme e gaussiana para os ângulos de chegada dos sinais interferentes. Obteve-se então expressões para a potência média de interferência e para a fdp desse parâmetro para o caso em que os ângulos de chegada são uniformemente distribuídos.

Um segundo estudo foi feito, mostrando como é possível aumentar o número de usuários ativos em um sistema usando as configurações de arranjo linear e circular. Nesse segundo caso, considerou-se um modelo de canal de baixo-*rank* com o intuito de facilitar o desenvolvimento matemático necessário à obtenção de uma expressão para o número máximo de usuários suportados pelo sistema, em função de alguns parâmetros do canal e do padrão CDMA utilizado (IS-95). Os resultados numéricos obtidos comprovaram mais uma vez a eficiência dos arranjos na minimização da interferência, com o arranjo circular mostrando-se mais eficiente.

## Capítulo 7

# Uso de Arranjos de Antenas em Sistemas com Diversidade

### 7.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foram mostrados diferentes propostas para o controle de interferência em sistemas de comunicações usando arranjos de antenas. Percebeu-se que tanto a configuração linear quanto a configuração circular fornecem bons resultados em termos de minimização do nível de interferência, dependendo da situação em que estão sendo avaliadas. Do ponto de vista de taxa de erro de bits, é analisado, a partir deste capítulo, o desempenho dessas estruturas em um ambiente com desvanecimento modelado pela distribuição de Nakagami usando um receptor com razão máxima de combinação. O objetivo do estudo passa ser a obtenção de expressões para a taxa de erro de símbolos que englobem tanto parâmetros do modelo do canal quanto da antena, considerando diferentes esquemas de modulação.

Antes de prosseguir, é interessante discutir um pouco sobre diversidade e sobre sua aplicação no combate ao desvanecimento e na melhoria de desempenho dos sistemas de comunicações móveis. As técnicas de diversidade são baseadas na noção de que os erros verificados na recepção ocorrem quando o meio de transmissão impõe grandes atenuações aos sinais trafegantes, ou seja, quando o canal apresenta desvanecimento profundo. Se for possível fornecer ao receptor diversas cópias do sinal transmitido, por meio de diferentes subcanais independentes, a probabilidade de que todas as cópias do sinal original desvançam simultaneamente será reduzida consideravelmente. Desse modo, se  $p$  for a probabilidade de que uma cópia desvaneça abaixo de algum valor crítico, então  $p^N$  será a probabilidade de que todas as  $N$  cópias independentes desvançam abaixo desse valor crítico. Existem várias formas de suprir o receptor com diferentes réplicas de um mesmo sinal desvanecido independente-

mente. Um desses métodos emprega, por exemplo, a diversidade em frequência, como citado em [55]. Nessa técnica de diversidade, o mesmo sinal de informação modula um certo número de portadoras de frequências diferentes, com separação entre as frequências maior ou igual a faixa de coerência do canal.

Um outro método comumente usado e que segue a linha do que se pretende mostrar neste trabalho, utiliza múltiplas antenas. Por exemplo, pode-se empregar uma antena na transmissão e múltiplas antenas na recepção. Essas antenas na estrutura de recepção devem ser espaçadas suficientemente distantes para assegurar que os sinais captados nas diferentes antenas desvançam independentemente [55]. Usualmente, uma separação de ao menos 10 comprimentos de onda é necessária entre duas antenas para que se possa obter sinais que desvançam independentemente, em ambientes sob o efeito do sombreamento. Em ambientes com desvanecimento Rayleigh, metade do comprimento de onda é suficiente para assegurar desvanecimento independente.

No caso de se usar arranjos de antenas, o ganho de diversidade é geralmente reduzido pela correlação entre os sinais captados nos diferentes elementos do arranjo. O uso de um receptor compacto, com diversidade, em unidades portáteis faz com que os sinais recebidos sejam, ao menos parcialmente, correlacionados, já que nesses aparelhos, devido à natureza compacta do arranjo, os elementos são separados por uma fração do comprimento de onda  $\lambda$ . De um modo geral, tanto em arranjos compactos colocados em aparelhos portáteis quanto em arranjos colocados em estações radiobase, há a necessidade de uma análise dos efeitos dos sinais que chegam com diferentes direções aos elementos do arranjo.

O efeito do desvanecimento correlacionado no desempenho de um receptor com diversidade tem recebido muita atenção dos pesquisadores. Muitos trabalhos publicados usaram a distribuição clássica de Rayleigh para modelar as estatísticas de desvanecimento do canal. Na busca por um modelo matemático mais unificado, trabalhos mais recentes têm mostrado o uso da distribuição Nakagami- $m$  no modelamento desses canais. Essa distribuição engloba o desvanecimento Rayleigh como um caso especial,  $m = 1$ , e é uma boa aproximação para a distribuição de Rice quando  $m > 1$  [56].

Neste trabalho, as amostras de sinal captadas pelos elementos do arranjo de antenas são passadas para um receptor com máxima razão de combinação, no qual se admite total conhecimento dos parâmetros do modelo do canal de comunicações.

## 7.2 Receptor com Razão Máxima de Combinação

Esta seção será iniciada com uma explicação do funcionamento do receptor de razão máxima de combinação (MRC). Considere inicialmente a transmissão de um sinal digital, representado por  $s(t)$ ,

sobre um canal modelado por desvanecimento Rayleigh plano. Em um sistema de transmissão com diversidade, como ilustrado no diagrama da Figura 7.1, usando modulação coerente, o equivalente passa-baixa do sinal recebido no  $l$ -ésimo ramo do sistema, é escrito como

$$r_l(t) = \alpha_l(t)e^{j\theta_l(t)}s(t) + \eta_l, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (7.1)$$

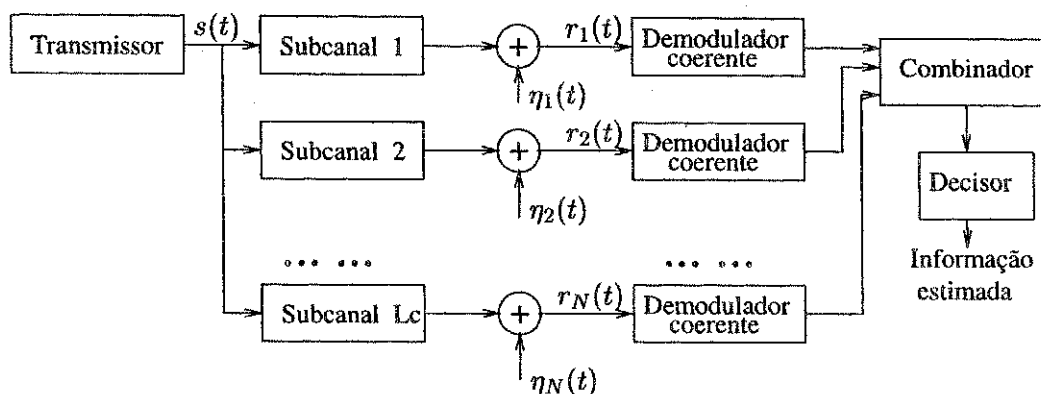


Figura 7.1: Sistema de recepção coerente com diversidade

Nesse modelamento, é assumido que os processos que representam o desvanecimento ao longo dos  $N$  subcanais são mutuamente independentes, que os processos que representam o ruído gaussiano branco aditivo são mutuamente independentes e que esses processos são independentes uns dos outros. Para um canal com desvanecimento plano, o ganho de valor complexo do canal pode ser considerado constante sobre cada intervalo de símbolo. O demodulador em cada subcanal usa filtros casados com as funções ortonormais usadas na formação do espaço do sinal transmitido  $s(t)$ . Se, por exemplo,  $s(t)$  é decomposto de modo que

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N_f} s_n \vartheta_n(t), \quad s_n = \int_0^{T_s} s(t) \vartheta_n(t) dt \quad (7.2)$$

e  $\{\vartheta_n(t)\}_{n=1}^{N_f}$  é um conjunto de funções ortonormais real, então a resposta do filtro do demodulador em cada subcanal é casada com as funções  $\vartheta_n(t)$ . Dessa forma, a saída do demodulador, no  $l$ -ésimo subcanal, no final do  $k$ -ésimo intervalo de símbolo, é dada por  $\alpha_{lk} \exp(j\theta_{lk})s_k + \mathbf{n}_{lk}$ , em que  $s_k$  é o vetor de  $N_f$  amostras que representa o sinal  $s(t)$  decomposto no espaço  $N_f$  dimensional e  $\mathbf{n}_{lk}$  é a representação vetorial correspondente do componente de ruído na saída do demodulador devido a  $\eta_l(t)$ . Nesse modelamento,  $\|\mathbf{s}_k\|^2 = E_s$ , em que  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana e  $E_s$  é a energia de símbolo. Além disso, cada componente do vetor  $\mathbf{n}_{lk}$  é uma variável aleatória modelada por um ruído gaussiano branco com média nula e densidade espectral de potência  $E_0/2$ , independente de qualquer outro componente de ruído no mesmo subcanal ou em subcanais distintos.

Considerando uma estrutura com razão máxima de combinação, como mostrado na Figura 7.2, a variável de decisão para o  $k$ -ésimo símbolo transmitido pode ser representada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \sum_{l=1}^N [\alpha_{lk} \exp(-j\theta_{lk})] [\alpha_{lk} \exp(j\theta_{lk}) \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_{lk}] \\ &= \left[ \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2 \right] \mathbf{s}_k + \left[ \sum_{l=1}^N \alpha_{lk} \exp(-j\theta_{lk}) \mathbf{n}_{lk} \right] \\ &= g_k \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k, \end{aligned} \quad (7.3)$$

em que  $g_k = \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2$  e  $\mathbf{n}_k = \sum_{l=1}^N \alpha_{lk} \exp(-j\theta_{lk}) \mathbf{n}_{lk}$ . No vetor de amostras de ruído,  $\mathbf{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2} \ \dots \ n_{k,N_f}]$ , cada componente é dado por

$$n_{k,n} = \sum_{l=1}^N \alpha_{l,k} \exp(-j\theta_{lk}) n_{lk,n}, \quad n = 1, 2, \dots, N_f. \quad (7.4)$$

Denotando  $\sigma_{k,n}^2 = E[n_{k,n} n_{k,n}^*]$ , obtém-se que  $\sigma_{k,n}^2 = \frac{E_0}{2} \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2$ .

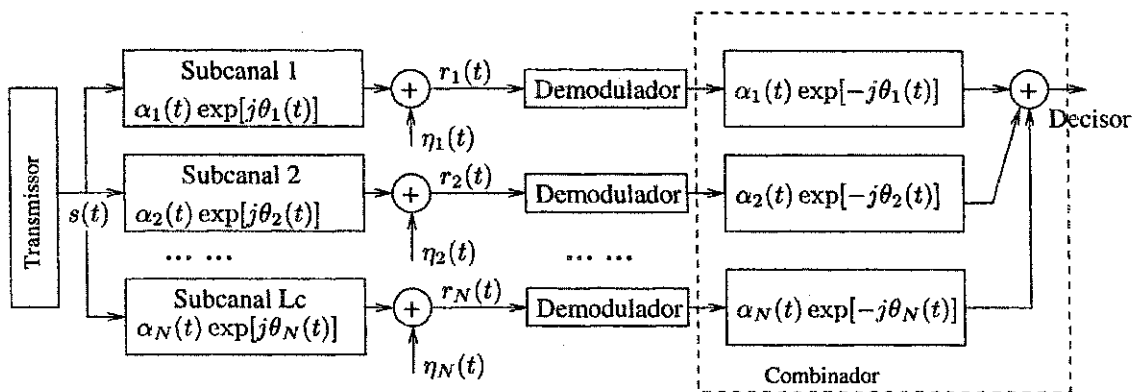


Figura 7.2: Sistema de recepção com razão máxima de combinação.

No caso, por exemplo, da modulação BPSK,  $N_f = 1$ , e assim  $r_k = g_k s_k + n_k$ , em que  $s_k = \sqrt{E_b}$  para o símbolo 1 e  $s_k = -\sqrt{E_b}$  para o símbolo 0. Nesse caso, a SNR por bit  $\gamma_{b_k}$ , na saída do combinador, para o  $k$ -ésimo símbolo, é dada por

$$\gamma_{b_k} = \frac{(g_k s_k)^2}{2\sigma_{k,n}^2} = \frac{\left( \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2 s_k \right)^2}{E_0 \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2} = \frac{E_b}{E_0} \sum_{l=1}^N \alpha_{lk}^2. \quad (7.5)$$

O processo de tomada de decisão do receptor gera um erro cuja probabilidade de ocorrência, dada uma relação de sinal ruído determinada, por símbolo  $\gamma_s$ , foi calculada em [55] e é escrita como

$$P(e/\gamma_s) = Q(\sqrt{2\gamma_s}), \quad (7.6)$$

em que  $\gamma_s$  é dada por

$$\gamma_s = \frac{E_s}{E_0} \sum_{l=1}^N \alpha_l^2 = \sum_{l=1}^N \gamma_l \quad (7.7)$$

e  $\gamma_l = \frac{E_s \alpha_l^2}{E_0}$  é a SNR instantânea por símbolo na entrada do  $l$ -ésimo subcanal.

A probabilidade média de erro para o caso em que as variáveis  $\alpha_l$  são aleatórias é obtida tomando-se o valor esperado da expressão dada em 7.6 considerando-se a função densidade de probabilidade de  $\gamma_s$ , ou seja

$$E[P(e)] = \int_0^{\infty} P(e/\gamma_s) p(\gamma_s) d\gamma_s. \quad (7.8)$$

Tomando como exemplo apenas um subcanal do sistema com diversidade, a SNR dada na Equação 7.7,  $\gamma_s$ , passa a ser simplesmente

$$\gamma_s \equiv \gamma_1 = \frac{E_s \alpha_1^2}{E_0}. \quad (7.9)$$

Se a variável aleatória  $\alpha_1$  for modelada por uma distribuição de Rayleigh, então  $\alpha_1^2$  terá sua função densidade de probabilidade (fdp) dada por uma distribuição chi-quadrada com dois graus de liberdade e conseqüentemente  $\gamma_1$  passa a ter a mesma distribuição.

Se, por exemplo, uma variável  $Y$  tem distribuição de Rayleigh, então

$$p(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0. \quad (7.10)$$

Como  $p(y)$  é definida apenas para  $y \geq 0$ , a variável aleatória  $Z = Y^2$  terá distribuição de probabilidade dada por

$$p(z) = \frac{p(y)}{\left| \frac{dz}{dy} \right|} \Bigg|_{y=\sqrt{z}}, \quad (7.11)$$

que pode ser escrita como

$$p(z) = e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} 2\sigma^2. \quad (7.12)$$

Comparando a fdp obtida em 7.12 com a fdp de uma variável  $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$ ,

$$p(z) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{n/2-1} e^{-z/2\sigma^2}, \quad z \geq 0, \quad (7.13)$$

percebe-se que 7.12 foi obtida a partir de 7.13 para  $n = 2$ , em que  $n$  é o número de graus de liberdade da distribuição chi-quadrada, cuja função característica é escrita como

$$\psi_Z(j\omega) = \frac{1}{(1 - j2\omega\sigma^2)^{n/2}}. \quad (7.14)$$

Voltando à Equação 7.9, tem-se que  $p(\gamma_1)$  é dada por

$$p(\gamma_1) = \frac{1}{\bar{\gamma}_1} e^{-\gamma_1/\bar{\gamma}_1}, \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (7.15)$$



em que  $\bar{\gamma}_1 = \frac{E_s}{E_0} E(\alpha_1^2)$ . A função característica de 7.15, denotada por  $\psi_{\gamma_1}(j\omega)$ , é dada por

$$\psi_{\gamma_1}(j\omega) = E(e^{j\omega\gamma_1}) = \frac{1}{\bar{\gamma}_1} \int_0^{\infty} e^{j\omega\gamma_1} e^{-\gamma_1/\bar{\gamma}_1} d\gamma_1 = \frac{1}{1 - j\omega\bar{\gamma}_1}. \quad (7.16)$$

Considerando então o caso geral da estrutura mostrada na Figura 7.2 e assumindo que o desvanecimento nos  $N$  subcanais é independente, tem-se que a função característica da variável  $\gamma_s$  dada na Equação 7.7 é simplesmente a função obtida em 7.16 elevada a  $N$ , ou seja

$$\psi_{\gamma_s}(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega\bar{\gamma}_k)^N}, \quad (7.17)$$

em que  $\bar{\gamma}_k$  é a SNR média na entrada do  $k$ -ésimo ramo do receptor. Comparando as Equações 7.17 e 7.14, percebe-se que a função característica da Equação 7.17 foi obtida fazendo-se  $n = 2N$  na Equação 7.14. Tem-se portanto que  $\gamma_s$  é distribuída de acordo com a distribuição chi-quadrada com  $2N$  graus de liberdade, cuja fdp é dada por

$$p(\gamma_s) = \frac{1}{(N-1)! \bar{\gamma}_k^N} \gamma_s^{N-1} e^{-\gamma_s/\bar{\gamma}_k}. \quad (7.18)$$

Para avaliar a probabilidade de erro nesse sistema, considerando-se os  $N$  subcanais, basta tomar o valor esperado da probabilidade de erro condicionada à SNR determinada, ou seja

$$P(e) = \int_0^{\infty} P(e/\gamma_s) p(\gamma_s) d\gamma_s. \quad (7.19)$$

O desenvolvimento mostrado nesta seção é necessário à próxima seção, na qual será usada a distribuição de Nakagami para modelar o desvanecimento em um sistema de comunicações com diversidade, semelhante ao mostrado na Figura 7.1. O uso dessa distribuição é justificado por ela englobar as distribuições de Rayleigh e Rice, ambas usadas no modelamento de estatísticas de desvanecimento de canais de rádio.

### 7.3 Estatísticas de Desvanecimento com Distribuição de Nakagami

Considera-se inicialmente uma estrutura de recepção com  $N$  ramos, de modo que o sinal recebido em cada um dos ramos dessa estrutura possa ser modelado matematicamente pela expressão

$$r_{ek}(t) = s(t)\alpha_k e^{j\theta_k} + \eta_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.20)$$

em que  $s(t)$  é o sinal transmitido pelos subcanais e  $\eta_k(t)$  é uma amostra de ruído gaussiano branco com média nula e densidade espectral unilateral  $E_0$ . Os deslocamentos de fase impostos pelo  $k$ -ésimo

subcanal são modelados pela variável aleatória  $\theta_k$  uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi)$ , enquanto que as variações na envoltória do sinal transmitido são modeladas pela variável aleatória  $\alpha_k$  distribuída de acordo com a distribuição de Nakagami, ou seja

$$p(\alpha_k) = \frac{2}{\Gamma(m_k)} \left( \frac{m_k}{\Omega_k} \right)^{m_k} \alpha_k^{2m_k-1} e^{-(m_k/\Omega_k)\alpha_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.21)$$

em que  $\Omega_k = E[\alpha_k^2]$  é a potência média do desvanecimento no  $k$ -ésimo ramo do receptor e  $m_k$  é um parâmetro que determina a natureza do desvanecimento em cada um dos  $k$  subcanais pelos quais o sinal  $s(t)$  é transmitido. Quanto menor for  $m_k$  mais severo será o desvanecimento. Os casos especiais em que  $m_k = 1$  e  $m_k = 1/2$  em 7.21 correspondem respectivamente às distribuições de Rayleigh e Gauss unilateral. Para os casos que  $m_k > 1$  a distribuição tende à distribuição de Rice.

Apesar da distribuição de Nakagami ter sido originalmente obtida a partir de resultados empíricos, obtidos de medições de campo, ela tem uma estreita similaridade com a distribuição chi-quadrada com  $n$  graus de liberdade. Isso pode ser verificado substituindo  $m = n/2$  e  $m/\Omega = 1/2\sigma^2$  na Equação 7.13.

Supondo, por exemplo, que que  $X_1$  e  $X_2$  são duas variáveis aleatórias gaussianas com média nula e variância  $\sigma^2$ , tem-se que a variável  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  tem distribuição de Rayleigh, ou seja

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0, \quad (7.22)$$

resultado que segue diretamente do fato que  $Y = X_1^2 + X_2^2$  tem distribuição chi-quadrada com dois graus de liberdade. De um modo geral, considerando  $2m$  variáveis  $X_i$ , gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância  $\sigma^2$ ,

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} X_i^2} \quad (7.23)$$

terá uma distribuição de Rayleigh generalizada

$$p(r) = \frac{r^{2m-1}}{2^{(2m-2)/2} \sigma^{2m} \Gamma(m)} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0, \quad (7.24)$$

que ainda pode ser escrita como

$$p(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left( \frac{1}{2\sigma^2} \right)^m r^{2m-1} e^{-(\frac{1}{2\sigma^2})r^2}, \quad r \geq 0. \quad (7.25)$$

Fazendo então  $1/2\sigma^2 = m/\Omega$ , tem-se a distribuição de Nakagami. Essa discussão é para mostrar que a distribuição de Nakagami pode ser vista como a raiz quadrada de uma soma de  $2m$  variáveis gaussianas independentes elevadas ao quadrado. O parâmetro  $m$  em 7.23 tem a mesma interpretação que o grau de liberdade. À medida que  $m$  aumenta, o número de variáveis gaussianas adicionadas

aumenta e conseqüentemente a probabilidade de ocorrência de desvanecimento mais forte (profundo) também aumenta.

Tendo em mãos esse resultado, pode-se supor, sem perdas de generalidade, que o sinal captado no  $k$ -ésimo ramo do receptor com diversidade é formado pela soma de um grande número de sinais vindos por múltiplos percursos. Esses sinais podem ainda ser divididos em  $m$  grupos, correspondentes a  $m$  percursos independentes, com  $n_j$  subpercursos em cada grupo. Os sinais nesses subpercursos têm fase e amplitude quase idênticas. Desse modo, o sinal recebido no  $k$ -ésimo ramo do receptor, proveniente do  $j$ -ésimo subpercurso pode ser escrito como

$$r_{ek}^{(j)} = \sum_{l=1}^{n_j} r_{ek}^{j,l} = R_k^{(j)} e^{i\theta_k} = x_k^{(j)} + iy_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m_k. \quad (7.26)$$

Admitindo-se que  $n_j$  é um número grande, tem-se, pelo teorema central do limite, que  $x_k^{(j)}$  e  $y_k^{(j)}$  podem ser aproximadas por variáveis aleatórias gaussianas independentes de média nula e variância  $\sigma^2$ , e, dessa forma  $R_k^{(j)}$  é modelada pela distribuição de Rayleigh.

A potência do sinal recebido no  $k$ -ésimo ramo do receptor com diversidade pode ser escrita matematicamente como

$$\alpha_k^2 = \sum_{j=1}^{m_k} \left| x_k^{(j)} + iy_k^{(j)} \right|^2 = \mathbf{r}_{ek}^H \mathbf{r}_{ek}, \quad (7.27)$$

em que  $\mathbf{r}_{ek}$  é o vetor de  $m_k$  amostras de cada ramo do receptor e  $E[\alpha_k] = 2m_k\sigma^2$ , da independência entre as amostras de variáveis gaussianas.

Assumindo então que o desvanecimento é plano e que há um conhecimento perfeito do canal, os fatores de correção de amplitude e fase do sinal recebido no receptor MRC serão iguais a  $(\alpha_k e^{j\theta_k})^*$  e desse modo, de acordo a teoria exposta na seção 7.2, a SNR instantânea por símbolo na saída do receptor MRC será dada por

$$\gamma_s = \frac{E_s}{E_0} \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^N \gamma_k, \quad (7.28)$$

em que  $E_s/E_0$  é a relação entre a energia de símbolo e a densidade espectral do ruído gaussiano. A SNR instânea na entrada de cada ramo do receptor MRC é dada por  $\gamma_k = (E_s/E_0)\alpha_k^2$ , cuja fdp marginal é dada por

$$p(\gamma_k) = \frac{m_k^{m_k}}{\Gamma(m_k)} \frac{\gamma_k^{m_k-1}}{\bar{\gamma}_k^{m_k}} e^{-m_k(\gamma_k/\bar{\gamma}_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.29)$$

em que  $\bar{\gamma}_k = E[\gamma_k]$  é a SNR média de entrada, por símbolo, para o  $k$ -ésimo ramo do receptor com diversidade.

A partir desse ponto, pode-se assumir que os sinais captados em cada ramo do receptor sofrem o mesmo nível de desvanecimento, ou seja  $m_k = m$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Desse modo, os vetores

$re_k$  têm o mesmo número de amostras. Essa consideração é geralmente coerente no caso de arranjos compactos, em que os elementos estão mais próximos uns aos outros. Adicionalmente, a potência média do sinal e a densidade espectral de potência do ruído são assumidas similares para cada ramo do receptor, de modo que as variáveis aleatórias  $\gamma_k$  tenham fdp marginal dada pela Equação 7.29 para  $m_k = m$ .

Dadas as considerações acima, pode-se prosseguir com a análise da probabilidade média de erro de símbolos do sistema com diversidade na presença do desvanecimento. Essa análise será feita de modo semelhante ao mostrado na seção 7.2, Equação 7.8, calculando-se  $p(\gamma_s)$  por meio função característica  $\psi_{\gamma_s}(j\omega)$ .

Assuma inicialmente que  $\mathbf{Z}_l$  seja um vetor de  $2N$  amostras de variáveis aleatórias gaussianas de média nula e variância  $\sigma^2$ ,

$$\mathbf{Z}_l = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \cdots \ x_N \ y_N]^T, \quad (7.30)$$

em que o par  $\{x_k, y_k\}$  são os componentes em quadratura do sinal captado no  $k$ -ésimo ramo do receptor. De acordo com [55] e [57], o vetor  $\mathbf{Z}_l$  tem uma distribuição gaussiana conjunta multivariada cuja fdp é dada por

$$p(\mathbf{z}_l) = \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_l - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}_l - \boldsymbol{\mu})}}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}, \quad (7.31)$$

em que  $\det(\mathbf{A})$  denota o determinante de  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{z}_l - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z}_l - \boldsymbol{\mu})^T]$  é a matriz de covariância e, no caso específico do problema endereçado nesta seção em que as variáveis  $x_k$  e  $y_k$  têm média nula,  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_{12} & \beta_{12} & \cdots & b_{1N} & \beta_{1N} \\ 0 & a_1 & \beta_{21} & b_{21} & \cdots & \beta_{N1} & b_{N1} \\ b_{21} & \beta_{21} & a_2 & 0 & \cdots & b_{2N} & \beta_{2N} \\ \beta_{12} & b_{12} & 0 & a_2 & \cdots & \beta_{N2} & b_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{N1} & \beta_{N1} & b_{N2} & \beta_{N2} & \cdots & a_N & 0 \\ \beta_{1N} & b_{1N} & \beta_{2N} & b_{2N} & \cdots & 0 & a_N \end{bmatrix}_{2N \times 2N}, \quad (7.32)$$

em que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(x_k^2) = E(y_k^2), \\ a_k &= E(x_k^2)/\sigma^2 = 1, \\ b_{kl} &= E(x_k x_l)/\sigma^2 = b_{lk}, \\ \beta_{kl} &= E(x_k y_l)/\sigma^2 = -\beta_{lk}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Os componentes  $b_{kl}$  e  $\beta_{kl}$  são referidos como coeficientes de correlação.

De um modo geral, se  $\mathbf{Z}_l \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$  então a matriz  $\mathbf{S} = \sum_{l=1}^m \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_l^T$  terá distribuição central de Wishart com matriz de covariância  $\Sigma$  e com  $m$  graus de liberdade ( $\mathbf{S} \sim W(\Sigma, m)$ ). A fdp multivariável de  $\mathbf{S}$ , de acordo com [57], é dada por

$$p(\mathbf{S}) = \frac{\det(\mathbf{S})^{\frac{1}{2}(m-p-1)} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{S}\Sigma^{-1})}}{2^{\frac{1}{2}mp} \pi^{\frac{1}{4}p(p-1)} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}m} \prod_{i=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(m-i+1)\right]}, \quad (7.34)$$

em que  $p$  é o número de amostras do vetor  $\mathbf{Z}_l$ , que corresponde a  $2N$  e  $\text{tr}(\mathbf{A})$  é o traço da matriz  $\mathbf{A}$ .

A função característica de  $\mathbf{S}$  será dada por

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{S}}(j\Theta) &= E[\exp(j\text{tr}(\mathbf{S}\Theta))] = E\left[\exp\left(j\text{tr}\left(\sum_{l=1}^m \mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_l^T \Theta\right)\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(j\sum_{l=1}^m \mathbf{Z}_l^T \Theta \mathbf{Z}_l\right)\right], \end{aligned} \quad (7.35)$$

pela propriedade  $\text{tr}(\mathbf{EFG}) = \text{tr}(\mathbf{FGE})$ . Sabendo que as variáveis  $\mathbf{Z}_l$  são independentes, tem-se

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(j\sum_{l=1}^m \mathbf{Z}_l^T \Theta \mathbf{Z}_l\right)\right] &= \prod_{l=1}^m E[\exp(j\mathbf{Z}_l^T \Theta \mathbf{Z}_l)] \\ &= E[\exp(j\mathbf{Z}^T \Theta \mathbf{Z})]^m. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Sabendo que  $\Theta$  é uma matriz simétrica real  $2N \times 2N$ ,  $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ , existe uma matriz não-singular  $\mathbf{B}$  de modo que

$$\mathbf{B}^T \Sigma^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^T \Theta \mathbf{B} = \mathbf{D}, \quad (7.37)$$

em que  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal de números reais [57], [58]. Fazendo  $\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$  tem-se

$$\begin{aligned} E[\exp(j\mathbf{Z}^T \Theta \mathbf{Z})] &= \exp(j\mathbf{Y}^T \mathbf{D} \mathbf{Y}) \\ &= E\left[\prod_{l=1}^{2N} \exp(jd_u Y_l^2)\right] \\ &= \prod_{l=1}^{2N} E[\exp(jd_u Y_l^2)]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Comparando os termos do último produto da seqüência 7.38 com a Equação 7.14, percebe-se que se  $Y_l$  é uma variável gaussiana distribuída com média nula e variância unitária, então  $Y_l^2$  terá distribuição chi-quadrada com um grau de liberdade e a função característica dessa variável será dada por

$$\psi_{Y_l}(jd_u) = \frac{1}{(1 - jd_u)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.39)$$

Desse modo, tem-se que

$$E[\exp(j\mathbf{Z}^T \Theta \mathbf{Z})] = \prod_{l=1}^{2N} (1 - j2d_{ll})^{-\frac{1}{2}} = \det(\mathbf{I} - j2\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}, \quad (7.40)$$

pelo fato que  $\mathbf{I} - j2\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal. Usando o resultado das Equações 7.37 na Equação 7.40, chega-se finalmente ao resultado desejado

$$E[\exp(j\text{tr}(\mathbf{S}\Theta))] = \frac{\det(\Sigma^{-1})^{\frac{m}{2}}}{\det(\Sigma^{-1} - j2\Theta)^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\det(\mathbf{I} - j2\Theta\Sigma)^{m/2}}. \quad (7.41)$$

Igualando os elementos da diagonal principal de  $\Theta$  a  $\Theta$  e os demais elementos a zero tem-se que

$$\text{tr}(\mathbf{S}\Theta) = \Theta \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k^2 \quad (7.42)$$

e desse modo a distribuição gama multivariada passa a ser vista como um caso especial da distribuição de Wishart.

$$\begin{aligned} E[\exp(j\text{tr}(\mathbf{S}\Theta))] &= E \left[ \exp \left( j \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \Theta \right) \right] \\ &= E \left[ \exp \left( \frac{j}{E_s/E_0} \sum_{k=1}^N \gamma_k \Theta \right) \right] = E \left[ \exp \left( \frac{j\Theta}{E_s/E_0} \gamma_s \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Antes de prosseguir com o desenvolvimento é necessário mostrar um outro resultado das matrizes definidas positivas. Dada uma matriz

$$\Delta = \sigma^2 \begin{bmatrix} a_1 & B_{12}^* & B_{13}^* & \cdots & B_{1N}^* \\ B_{12} & a_2 & B_{23}^* & \cdots & B_{2N}^* \\ B_{13} & B_{23} & a_3 & \cdots & B_{3N}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1N} & B_{2N} & B_{3N} & \cdots & a_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (7.44)$$

em que  $B_{kl} = b_{kl} + j\beta_{kl}$  e o asterísco indica a operação conjugado complexo, e seja  $\Sigma$  definida tal como em 7.32, pode-se mostrar que

$$|\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma|^{-1/2} = |\mathbf{I}_N + z\Delta|^{-1}, \quad (7.45)$$

em que  $\mathbf{I}_{2N}$  é uma matriz identidade  $2N \times 2N$ .

Essa propriedade será mostrada para uma matriz  $4 \times 4$ . Pela simetria das matrizes, o processo de derivação para ordens maiores é similar. No caso de uma matriz  $\Gamma 4 \times 4$ ,

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_{12} & \beta_{12} \\ 0 & a_1 & -\beta_{12} & b_{12} \\ b_{12} & -\beta_{12} & a_2 & 0 \\ \beta_{12} & b_{12} & 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

e  $\Delta$  pode ser escrita a partir de  $\Gamma$  como

$$\Delta = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} [1 \ j] \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} & [1 \ j] \begin{bmatrix} b_{12} & \beta_{12} \\ -\beta_{12} & b_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \\ [1 \ j] \begin{bmatrix} b_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{12} & b_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} & [1 \ j] \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (7.47)$$

ou ainda

$$\Delta = \frac{1}{2} [1 \ j] \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

Seguindo o mesmo procedimento usado para obter a matriz 7.48, encontra-se que

$$(\mathbf{I}_N + z\Delta) = \frac{1}{2} [1 \ j] (\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}, \quad (7.49)$$

e do mesmo modo

$$\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} + z\Sigma_{11} & z\Sigma_{12} \\ z\Sigma_{12}^T & \mathbf{I}_{22} + z\Sigma_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Usando a propriedade

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\det(\mathbf{A}_{22}), \quad (7.51)$$

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz particionada nas submatrizes  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21}$  e  $\mathbf{A}_{22}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$  não-singular, tem-se que

$$\det(\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma) = ((1 + za_1)^2 - z^2(b_{12}^2 + \beta_{12}^2))^2. \quad (7.52)$$

Tem-se também que

$$\det(\mathbf{I}_N + z\Delta) = \det \begin{bmatrix} (1 + za_1) & z(b_{12} - j\beta_{12}) \\ z(b_{12} + j\beta_{12}) & (1 + za_2) \end{bmatrix} = (1 + za_1)^2 - z^2(b_{12}^2 + \beta_{12}^2). \quad (7.53)$$

Comparando 7.52 e 7.53 percebe-se que

$$\det(\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma) = \det(\mathbf{I}_N + z\Delta)^2, \quad (7.54)$$

que é o resultado desejado. Do resultado acima tem-se que

$$\det(\mathbf{I}_{2N} + z\Sigma)^{-1/2} = \det(\mathbf{I}_N + z\Delta)^{-1}. \quad (7.55)$$

Fazendo a substituição  $\omega = \Theta/(E_s/E_0)$  em 7.43 e usando o resultado obtido em 7.55, obtem-se que a função característica de  $\gamma_s$ ,

$$\psi_{\gamma_s}(j\omega) = \det \left[ \mathbf{I}_{2N} - j\omega \frac{2E_s}{E_0} \Sigma \right]^{-m/2} = \det \left[ \mathbf{I}_N - j\omega \frac{\bar{\gamma}_s}{m} \Lambda \right]^{-m}, \quad (7.56)$$

em que

$$\bar{\gamma} = \frac{E_s}{E_0} E[\alpha_k^2] = \frac{E_s}{E_0} (2m\sigma^2) \quad (7.57)$$

é a SNR média de entrada, por símbolo, para cada ramo do receptor e  $\Delta = \sigma^2 \Lambda$ . De posse da função característica  $\psi_{\gamma_s}(j\omega)$ , pode-se calcular finalmente a probabilidade média de erro de símbolos  $E[P_e]$  para alguns esquemas de modulação coerente e não-coerente. Esse desenvolvimento é mostrado na próxima seção.

## 7.4 Avaliação da Probabilidade de Erro Média de Símbolos

Nesta seção são obtidas as probabilidades médias de erro de símbolos para alguns esquemas de modulação coerente e não-coerente, usando-se a função característica obtida na seção 7.3. Como se sabe, as estruturas de detecção que têm informação da fase da portadora do sinal transmitido são conhecidas como estruturas de detecção coerentes e aquelas que não têm essa informação são conhecidas como estruturas não-coerentes. Nas estruturas coerentes há necessidade de sincronismo entre as fases da portadora local e da portadora do sinal recebido, o que torna essas estruturas mais caras e complexas. Um esquema de modulação geralmente usado para contornar os problemas causados pelos erros de sincronismo é o DPSK (*differential phase-shift-keying*). O DPSK pode ser visto como uma forma de codificação que retém informações a respeito das mudanças de fase que ocorrem no código binário, de modo que o receptor só precise determinar essas mudanças no sinal recebido. Nesse esquema de modulação não-coerente, a probabilidade de erros de detecção de símbolos dado que a SNR é determinada  $P(e/\gamma_s)$ , é dada por

$$P(e/\gamma_s) = \frac{1}{2} e^{-\gamma_s}. \quad (7.58)$$

A probabilidade média de erro é obtida tomando-se o valor esperado de  $P(e/\gamma_s)$ , ou seja

$$E[P_e] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_s} p(\gamma_s) d\gamma_s. \quad (7.59)$$

Sabendo que a função característica de uma variável  $X$  é dada por

$$\psi_X(j\omega) = E(e^{j\omega X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} p(x) dx, \quad (7.60)$$

percebe-se por 7.59 e 7.56 que

$$E[P_e] = \frac{1}{2} \psi_{\gamma_s}(j\omega) \Big|_{j\omega=-1}. \quad (7.61)$$

Tem-se portanto que a probabilidade média de erro do receptor pode ser escrita em função da matriz  $\Lambda$  como

$$E[P_e] = \frac{1}{2} \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{\bar{\gamma}_s}{m} \Lambda \right]^{-m}. \quad (7.62)$$



Um outro tipo de modulação que também usa detecção não-coerente é a modulação NBFSK (*narrow-band frequency-shift-keying*). Nesse esquema de modulação, a probabilidade de erro dado que a SNR é determinada, é similar à modulação DPSK

$$P(e/\gamma_s) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\gamma_s}. \quad (7.63)$$

Desse modo a probabilidade média de erro é dada por

$$E[P_e] = \frac{1}{2} \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{\bar{\gamma}_s}{2m} \mathbf{\Lambda} \right]^{-m}. \quad (7.64)$$

Nos casos coerentes tem-se as modulações CBPSK (coerent binary phase-shift-keying) e CBFSK (coerent binary frequency-shift-keying), cujas probabilidades de erro dado que a SNR é fixa, são similares a menos de um parâmetro  $p$  e podem ser escritas como [55, 56]

$$P(e/\gamma_s) = Q(\sqrt{2p\gamma_s}), \quad (7.65)$$

em que  $p = 1$  para o caso CBPSK,  $p = 1/2$  para o caso CBFSK e  $Q(x)$ , geralmente escrita como

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad (7.66)$$

foi reescrita de acordo com a forma apresentada em [59]

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\text{sen}^2 v}\right) dv, \quad x \geq 0, \quad (7.67)$$

que por apresentar intervalo de integração finito se torna mais apropriada à avaliação numérica. Tem-se portanto que a probabilidade média de erro nesse caso é dada por

$$\begin{aligned} E[P_e] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{p\gamma_s}{\text{sen}^2 v}\right) p(\gamma_s) dv d\gamma_s \\ &= \int_0^{\pi/2} \psi_{\gamma_s}(j\omega) \Big|_{j\omega = -p/\text{sen}^2 v} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{p\bar{\gamma}_s}{m\text{sen}^2 v} \mathbf{\Lambda} \right]^{-m} dv. \end{aligned} \quad (7.68)$$

A avaliação numérica dos resultados desta seção será mostrada na próxima seção para diferentes parâmetros das antenas e do modelo do canal. Será primeiro considerado o arranjo de antenas linear para as distribuições uniforme e gaussiana e em seguida será considerada a configuração circular para a distribuição gaussiana.

## 7.5 Resultados

### 7.5.1 Arranjo Linear com Distribuição Uniforme

No Capítulo 5 foram obtidas as funções de correlação espacial dos arranjos de antenas linear e circular para três tipos de distribuição dos ângulos azimutais de chegada e foi mostrado que as amostras dessas funções dão a correlação entre elementos específicos dos arranjos. Nesta seção serão usadas as expressões obtidas no Capítulo 5 na formação da matriz  $\Lambda$  presente em todas as expressões da probabilidade média de erros de símbolos deste capítulo. O primeiro conjunto de curvas é mostrado na Figura 7.3 considerando-se a modulação DBPSK, um arranjo linear com espaçamento entre elementos  $d = \lambda/4$  e diferentes valores dos parâmetros da distribuição uniforme para ângulos de chegada,  $\Delta$  e  $\phi_o$ .

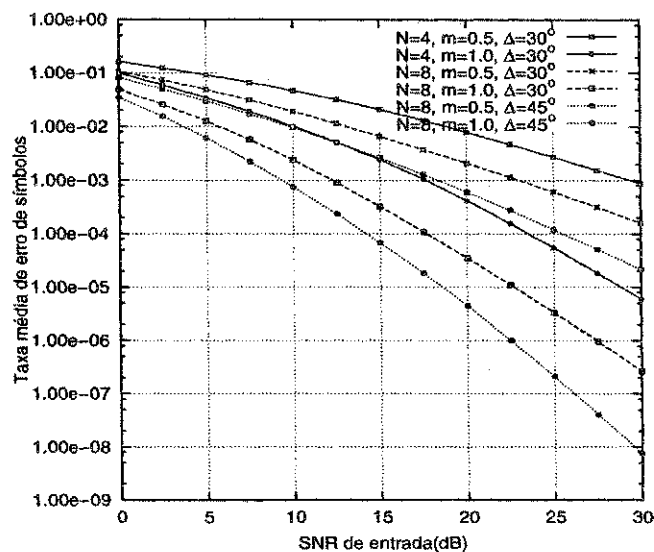


Figura 7.3: Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com  $N$  elementos,  $d = \lambda/4$  e  $\phi_o = 45^\circ$ .

No segundo caso referente à distribuição uniforme e ao arranjo linear, mostrado na Figura 7.4, é usada a modulação NBPSK, um arranjo linear com  $N = 4$  elementos,  $d = \lambda/2$ , para dois valores de  $\Delta$  e  $\phi_o$ . Pode-se ver pelas figuras que quanto menor é o valor do parâmetro  $m$  da distribuição de Nakagami, mais forte é o desvanecimento e conseqüentemente pior é o desempenho do sistema, em termos da taxa de erro. Percebe-se também pela Figura 7.3 que, considerando o número de elementos do arranjo  $N = 8$  e o parâmetro  $m = 0.5$ , há um ganho de aproximadamente 5 dB no desempenho do sistema quando ocorre um aumento de  $15^\circ$  na abertura  $\Delta$  do canal direcional, considerando-se a distribuição uniforme. Ainda em relação à Figura 7.3, percebe-se que, considerando  $\Delta = 30^\circ$  e

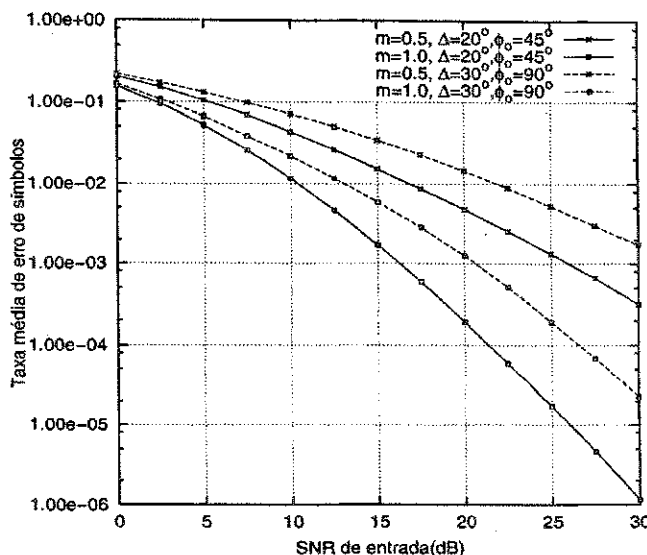


Figura 7.4: Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com  $N = 4$  elementos,  $d = \lambda/4$  para dois valores de  $\Delta$  e  $\phi_0 = 45^\circ$ .

$m = 0.5$ , há um ganho de aproximadamente 7,5 dB quando o número de elementos do arranjo é duplicado.

No terceiro caso, ainda referente ao arranjo linear, é considerada a distribuição gaussiana para os ângulos de chegada. Neste caso, a taxa de erro foi traçada para dois valores do componente direcional principal  $\phi_0$  e do desvio padrão angular  $\sigma_\phi$ , que no caso da distribuição gaussiana é igual ao espalhamento angular  $S_\phi$ . Pela Figura 7.5, percebe-se mais uma vez a forte influência da intensidade do desvanecimento, determinada pelo parâmetro  $m$ , na taxa de erro. Além do desvanecimento, há a forte influência dos parâmetros do modelo do canal. Tomando-se por exemplo o caso com desvanecimento Rayleigh,  $m = 1, 0$ , observa-se, para uma SNR acima de 20 dB, um ganho de 2,5 dB para um aumento de  $10^\circ$  no desvio padrão angular  $\sigma_\phi$ .

O quarto e último caso desta seção mostra as curvas de taxa de erro para um arranjo circular com quatro elementos, considerando-se distribuição gaussiana para os ângulos de chegada e modulação CBPSK. As curvas foram traçadas para dois valores de espalhamento angular, e do raio do arranjo. O valor do componente direcional principal foi assumido igual a  $45^\circ$ . No caso do arranjo circular, o comportamento das curvas de taxa média da erro de símbolos é similar aos casos anteriores. O sistema mostra-se sensível à variação do espalhamento angular  $S_\phi = \sigma_\phi$  e pode-se perceber pela Figura 7.6 que um aumento em  $\sigma_\phi$  implica em um ganho de aproximadamente 8 dB no desempenho do sistema, para um caso com desvanecimento Rayleigh. É importante lembrar que espaçamentos e raio menor que  $\lambda/2$  são usadas em estruturas compactas. Nessas estruturas é admitido um certo grau de correlação espacial entre os elementos. Esse nível de correlação por sua vez é limitado também pelo

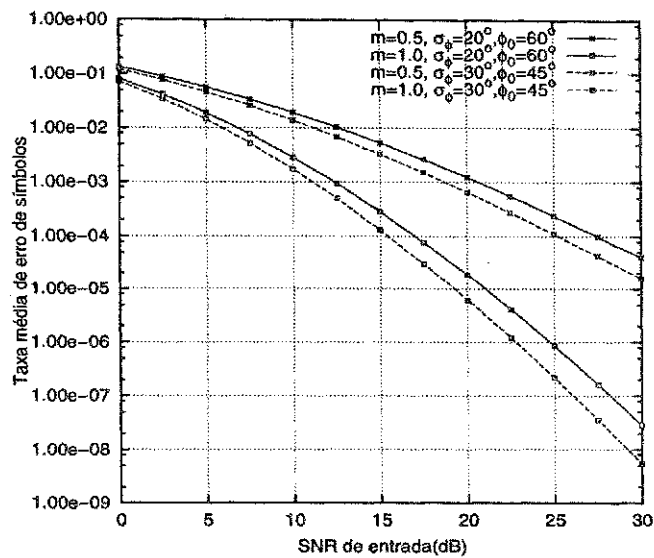


Figura 7.5: Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo linear com  $N = 4$  elementos,  $d = \lambda/4$  para dois valores de  $\Delta$  e  $\phi_0 = 45^\circ$ .

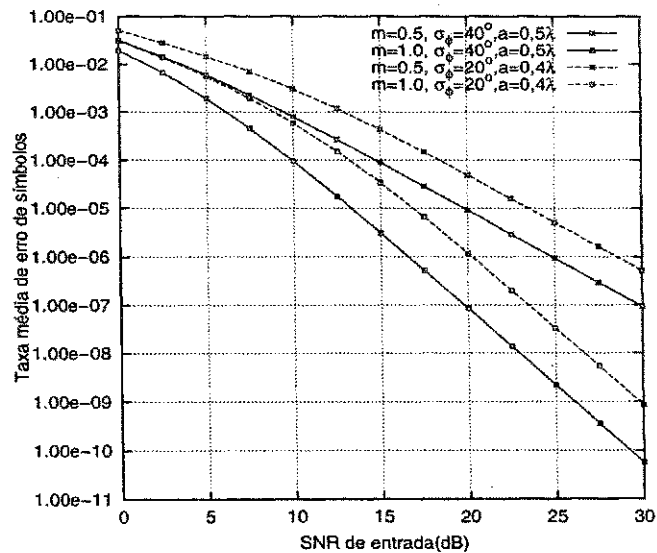


Figura 7.6: Taxa média de erro de símbolos em função SNR de entrada, por ramo do receptor com diversidade, para um arranjo circular com  $N = 4$  elementos, para dois valores do raio  $a$  e dos parâmetros  $\sigma_\phi$  e  $\phi_0$ .

acoplamento magnético entre os elementos, que limita a proximidade dos elementos. Portanto, quando o acoplamento é desconsiderado, um maior valor de espalhamento angular significa elementos mais descorrelacionados e, conseqüentemente, no caso do problema analisado nesta seção, isso resulta em uma melhora de desempenho em relação à taxa de erro.

## 7.6 Conclusão

Neste capítulo foi feito um estudo da aplicação da diversidade espacial, obtida por meio do uso de arranjos de antenas em conjunto com o receptor de razão máxima de combinação, em um ambiente Nakagami. Foi visto que é possível incluir parâmetros do canal e das antenas nas expressões de taxa de erro de símbolos, por meio da matriz de correlação espacial das amostras tomadas nos elementos do arranjo de antenas. Os elementos dessa matriz de correlação espacial foram calculados previamente no Capítulo 5. Esse procedimento foi possível devido à consideração da existência de correlação entre os elementos, principalmente nas estruturas em que os espaçamentos entre os elementos é dada em frações de comprimentos de onda. Foi visto também, pelos gráficos apresentados, que as taxas de erro são mais sensíveis à intensidade do desvanecimento em cada subcanal de transmissão do que aos parâmetros espaciais do modelo do canal. Esse estudo permite a um projetista ter um idéia da influência que esses parâmetros têm no desempenho de um sistema de comunicações implantado em um canal direcional com as características estudadas ao longo do capítulo.

# Capítulo 8

## Conclusões e Perspectivas

Foram abordados, ao longo da tese, vários tópicos relacionados ao projeto de arranjos de antenas, bem como sua aplicação em sistemas móveis. O termo arranjos de antenas, embora seja abrangente a outras configurações de arranjo, refere-se apenas às duas configurações linear e circular estudadas.

No Capítulo 2 foi feita uma revisão teórica do conceito de arranjo de antenas, bem como das principais aplicações dessas configurações. Por serem a base da teoria por trás do conceito de antenas inteligentes, alguns dos algoritmos clássicos como o LMS e o RLS foram citados dentro desse novo contexto e conceito de antena. Ao longo da breve revisão bibliográfica, foram feitas referências a textos clássicos e atuais que podem ajudar a esclarecer melhor os conceitos tratados. Ainda no Capítulo 2 foi dada a introdução intuitiva ao projeto de arranjos lineares com parâmetros aleatórios. Essa noção intuitiva de arranjos com parâmetros aleatórios foi obtida por meio de simulações, que foram posteriormente verificadas matematicamente no Capítulo 3.

O desenvolvimento matemático mostrado no Capítulo 3 confirmou aquilo que se previa no Capítulo 2, em relação ao uso de aleatoriedade no parâmetros dos arranjos lineares. Sabia-se que o uso de espaçamento aleatório entre os elementos poderia realmente amenizar a intensidade dos lóbulos secundários do diagrama de radiação, gerado pelo fator de arranjo, e esse fato se verificou com a avaliação numérica feita no Capítulo 3. Foi visto, nos desenvolvimentos mostrados, que é possível representar, por meio de expressões fechadas, alguns dos parâmetros necessários ao projeto dessas configurações e que uma das vantagens do método é a facilidade com que essas configurações podem ser implementadas. No projeto de arranjos com parâmetros aleatórios foi considerada a ausência de acoplamento eletromagnético. Quando tal característica é levada em consideração pode haver degradação ou modificação no diagrama de irradiação [60]. Na maioria das configurações de arranjos lineares essa degradação se caracteriza principalmente por uma elevação da amplitude dos lóbulos secundários.

Dependendo da aplicação, esse problema não compromete a aplicação do arranjo com a forma de excitação proposta. É importante lembrar que o acoplamento eletromagnético depende também do tipo de alimentação dos elementos do arranjo. Uma introdução aos efeitos do acoplamento mútuo é dada no Apêndice A e dá para se ter uma idéia da complexidade do problema quando essa característica do arranjo é considerada.

Durante o estudo surgiram várias linhas secundárias de pesquisa e aquelas que forneceram leques para possíveis contribuições foram as mais consideradas. Um exemplo de uma dessas linhas de estudo, analisado no Capítulo 4, é o uso de métodos de decomposição em subespaços para o cancelamento de interferência. Particularmente, dentro do contexto de aleatoriedade tratado no Capítulo 3, foi analisado o uso de distribuição uniforme para os ângulos de chegada e o efeito da perturbação dos parâmetros do arranjo na capacidade de desempenho do método. Foi mostrado também que o uso de arranjos circulares pode ser uma boa alternativa para se contornar as deficiências do arranjo linear, especialmente no caso em que a proximidade entre os ângulos de chegada dos sinais incidentes na antena fica em torno de  $5^\circ$ .

No Capítulo 5 foi feita uma pausa na seqüência dos capítulos anteriores, para o tratamento matemático das características espaciais do canal direcional. Foram analisadas três distribuições de ângulo de chegada para cada uma das configurações de arranjo, linear e circular e foram obtidas expressões fechadas para os coeficientes de correlação espacial dos elementos das duas configurações. Pelas curvas mostradas nesse capítulo, foi possível ter uma idéia do comportamento da correlação espacial usada no modelo de canal apresentado. A maioria dos valores de parâmetros usados no modelo do canal direcional está dentro da faixa de valores encontrados por meio de medições de campo [61].

Voltando ao estudo de aplicações de arranjos no cancelamento de interferência, foi analisada no Capítulo 6 o uso de arranjos lineares simétricos no cancelamento de interferência mútua provocada por usuários internos a uma mesma célula e usuários em células vizinhas. Além dos limitantes obtidos para a potência de interferência mútua, foi obtida uma expressão para a função característica dessa potência de interferência para o caso em que o ângulo de chegada dos sinais de interferência é uniforme no intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Ainda no Capítulo 6 foi estudado o uso de arranjos lineares e circulares na melhoria da capacidade de sistemas celulares usando-se estruturas de receptor *rake* com razão de combinação máxima.

Seguindo a discussão iniciada no Capítulo 6 foi analisada no Capítulo 7, de forma mais detalhada o desempenho dos arranjos linear e circular conjuntamente com o receptor de razão de combinação máxima, em um modelo de sistema de comunicações com diversidade. Foram obtidas expressões fechadas adicionais para a taxa de erro para o arranjo circular, além das expressões que já haviam sido publicadas usando-se o arranjo linear. Nesse capítulo considerou-se mais uma vez estrutura compactas,

nas quais a distância  $d$  e o raio  $a$  entre os elementos é dada em termos do comprimento de onda. Essa consideração permite assumir que o desvanecimento nos subcanais modelados pela distribuição de Nakagami tenha a mesma intensidade, determinada pelo parâmetro  $m$ , e dessa forma facilitar o desenvolvimento matemático.

De um modo geral, o trabalho propôs um novo método de projeto de arranjos de antenas e o uso dessas configurações na melhoria de desempenho de sistemas de comunicações em que o modelo do canal de transmissão possa se enquadrar em um dos modelos apresentados no texto.

## 8.1 Contribuições do trabalho

As principais contribuições do trabalho estão distribuídas ao longo dos capítulos e podem ser destacadas da seguinte forma:

- No Capítulo 3 foi proposto uma nova abordagem para o projeto de arranjos lineares usando parâmetros aleatórios. Foram obtidas expressões matemáticas que modelam alguns dos parâmetros levados em consideração no projeto de tais estruturas. No mesmo capítulo foi dado um tratamento matemático, do ponto de vista da teoria de probabilidades, aos arranjos aperiódicos, até então não disponível na literatura.
- No Capítulo 4 destaca-se como contribuição o estudo do efeito de distúrbios modelados por variáveis aleatórias nos parâmetros que modelam o autocancelador. Além dessa análise foi proposto o uso do arranjo circular junto com o método de auto-análise no cancelamento de interferência, tendo sido comprovada sua eficiência em relação ao arranjo linear.
- No Capítulo 5 destaca-se como contribuição o desenvolvimento matemático necessário à obtenção das funções de correlação espacial entre os elementos do arranjo circular para as distribuições co-senoidal e gaussiana. Essas expressões são importantes para o estudo realizado no Capítulo 7.
- O Capítulo 6 apresenta como principais contribuições a proposta do uso de arranjos lineares simétricos para a melhoria do desempenho dos enlaces de subida de sistemas móveis. Em particular, foram obtidas expressões para a potência mútua de interferência entre os usuários do modelo de canal apresentado e para a função característica dessa potência mútua. A interferência mútua é agravada em canais direcionais semelhantes ao modelo analisado no Capítulo 5 devido à proximidade dos ângulos de chegada dos usuários ativos.



- Ainda no Capítulo 6 foi mostrado que é possível expressar o número máximo de usuários de um modelo de canal de baixo-*rank* em termos de parâmetros do canal, das antenas e do sistema de múltiplo acesso utilizado e o capítulo 7 contribuiu com a avaliação da taxa de erro de símbolos com arranjo circular e linear, em ambiente Nakagami.

## 8.2 Propostas de continuação do trabalho

Como é natural em qualquer pesquisa semelhante à desenvolvida nesse trabalho, novas idéias surgem à medida que mais resultados são obtidos. Com base nos objetivos alcançados até a conclusão deste texto, pode-se propor as seguintes linhas de continuidade:

- Estudo dos efeitos do acoplamento mútuo no desempenho das estruturas em arranjo quando é considerado espaçamento menor que  $\lambda/2$ .
- Estudo da aplicação de arranjos de antenas em sistemas de comunicações de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO systems*).
- Obtenção de parâmetros para o projeto de arranjos aperiódicos, semelhantes aos parâmetros obtidos para os arranjos lineares simétricos.
- Obtenção de uma expressão fechada para a probabilidade de exclusão em função dos parâmetros da antena.
- Estudo de métodos de controle de interferência em redes de comunicações móveis temporárias usando arranjos de antenas.
- Estudo do efeito do acoplamento nas estruturas de cancelamento de interferência avaliadas.

# Apêndice A

## Acoplamento Eletromagnético

### A.1 Estudo dos Efeitos do Acoplamento Mútuo

No estudo das configurações de arranjos lineares de antenas apresentadas nos capítulos anteriores, tem sido admitida a ausência de acoplamento eletromagnético entre os elementos. Essa consideração é feita usualmente no estudo de arranjos lineares e suas aplicações para facilitar tanto o projeto do arranjo quanto o projeto de enlaces de comunicações que usam arranjos na estação radiobase. A complexidade de projeto dessas estruturas aumenta consideravelmente quando o acoplamento é levado em conta devido à necessidade de avaliação de outros parâmetros como a auto-impedância e a impedância mútua. Para o cálculo desses importantes parâmetros são apresentados na literatura diferentes métodos numéricos como, por exemplo, os Métodos da Equação Integral de Pocklington e Hallén [1] e o conhecido método da força eletromotriz induzida (*EMF method*).

#### A.1.1 Impedância de um dipolo isolado

Considere inicialmente um dipolo de comprimento  $l$  e raio  $r_d$ , isolado da presença de dipolos vizinhos e de outros obstáculos que possam alterar sua distribuição de corrente. Pode-se encontrar a sua impedância de entrada por meio do seguinte procedimento. Admita que o dipolo esteja posicionado ao longo do eixo  $z$ , em um sistema de coordenada cilíndricas. De acordo com [1], o componente de campo elétrico  $E_z$  ao longo da superfície cilíndrica do dipolo pode ser matematicamente escrito como

$$E_z = -j \frac{\eta_o I_o}{4\pi} \left[ \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} + \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} - 2 \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right], \quad (\text{A.1})$$

em que  $\eta_o$  é a impedância intrínseca do espaço livre e vale aproximadamente  $120\pi\Omega$ ,  $I_o$  representa uma corrente elétrica de amplitude constante e as variáveis  $r_1$  e  $r_2$  representam, respectivamente, a distância

entre um ponto na extremidade do dipolo e um ponto de observação no espaço, próximo ao dipolo, ou seja

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2} \quad (\text{A.2})$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

em que  $\rho$ , em decorrência do uso do sistema de coordenadas cilíndrico, é dado por  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

A auto-impedância  $Z_m$  é definida como a razão entre a diferença de potencial induzida nos terminais do dipolo  $V_m$  e a corrente máxima  $I_m$ , ou seja  $Z_m = V_m/I_m$ . De acordo com [1], essa tensão  $V_m$  é dada por

$$V_m = \int_{-l/2}^{l/2} dV_m = -\frac{1}{I_m} \int_{-l/2}^{l/2} I_z(\rho = r_d, z = z') E_z(\rho = r_d, z = z') dz'. \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, pode-se escrever  $Z_m$  como

$$Z_m = -\frac{1}{I_m^2} \int_{-l/2}^{l/2} I_z(\rho = r_d, z = z') E_z(\rho = r_d, z = z') dz'. \quad (\text{A.4})$$

Para um dipolo muito fino, posicionado em um sistema de coordenadas cilíndricas, a distribuição de corrente pode ser escrita como

$$I_z = \begin{cases} a_z I_m \text{sen} \left[ k \left( \frac{l}{2} - z' \right) \right], & 0 \leq z' \leq l/2 \\ a_z I_m \text{sen} \left[ k \left( \frac{l}{2} + z' \right) \right], & -l/2 \leq z' \leq l/2 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Essa distribuição de corrente assume que a alimentação do dipolo é feita em seu centro geográfico (*center fed*) e que a corrente desvanece em seus extremos. Além do mais, tem sido verificado experimentalmente que a corrente em um dipolo com esse tipo de alimentação tem forma senoidal, com nulos nos seus pontos extremos.

Dessa forma, a impedância  $Z_m$ , também chamada de impedância de entrada referida à corrente máxima  $I_m$ , pode ser escrita como

$$Z_m = -\frac{1}{I_m} \int_{-l/2}^{l/2} \text{sen} \left[ k \left( \frac{l}{2} - |z'| \right) \right] E_z(\rho = r_d, z = z') dz'. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a Equação A.1 na Equação A.6 e fazendo  $I_m = I_o$ , é mostrado, de acordo com [1], que as partes real e imaginária de  $Z_m$ , denotadas por  $R_m$  e  $X_m$ , podem ser escritas como

$$R_m = \frac{\eta_o}{2\pi} \left\{ C + \ln(kl) - \text{Ci}(kl) + \frac{1}{2} \text{sen}(kl) [\text{Si}(2kl) - 2\text{Si}(kl)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos(kl) [C + \ln(kl/2) + \text{Ci}(2kl) - 2\text{Ci}(kl)] \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$X_m = \frac{\eta_o}{4\pi} \left\{ 2\text{Si}(kl) + \cos(kl) [2\text{Si}(kl) - \text{Si}(2kl)] \right. \\ \left. - \text{sen}(kl) \left[ 2\text{Ci}(kl) - \text{Ci}(2kl) - \text{Ci} \left( \frac{2kr_d^2}{l} \right) \right] \right\},$$

em que  $\text{Si}(x)$  e  $\text{Ci}(x)$  são respectivamente o seno e o co-seno integral e  $C$  é a constante de Euler e vale 0,5772. A resistência e a reatância de entrada referidas à corrente de entrada  $I_{in}$  são dadas respectivamente por

$$R_{in} = \left( \frac{I_o}{I_{in}} \right)^2 \cdot R_r = \frac{R_r}{\text{sen}^2(kl/2)} \quad \text{e} \quad X_{in} = \left( \frac{I_o}{I_{in}} \right)^2 \cdot X_m = \frac{X_m}{\text{sen}^2(kl/2)}. \quad (\text{A.8})$$

### A.1.2 Impedância mútua entre dipolos

Na subsecção anterior, a impedância de um dipolo foi analisada em um meio isolado da interferência de outros dipolos ou obstáculos. Quando outros elementos estão próximos a um dipolo, sua distribuição de corrente é alterada e, conseqüentemente, seu campo irradiado e sua impedância são modificados. Dessa forma, o desempenho de um dipolo depende não somente de sua própria corrente mas também da corrente que circula nos dipolos vizinhos. Por simplicidade, é considerado inicialmente uma estrutura com apenas dois elementos. Nesse caso, a antena resultante pode ser representada por uma rede de quatro terminais (duas portas). Essa rede é na verdade uma “caixa” com dois terminais de entrada e dois terminais de saída. As relações entre as tensões e correntes nesses terminais podem ser escritas, de acordo com [2], [1], como

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

em que

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ Z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} & Z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

são as auto-impedâncias e impedâncias mútuas, respectivamente. As Equações A.9 podem ainda ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} Z_{1d} &= \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \\ Z_{2d} &= \frac{V_2}{I_2} = Z_{22} + Z_{21} \left( \frac{I_1}{I_2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

em que  $Z_{1d}$  e  $Z_{2d}$  são chamadas de *impedâncias do ponto de excitação* e dependem da razão entre as correntes  $I_1$  e  $I_2$ , das impedâncias mútuas e das auto-impedâncias.

O desenvolvimento matemático necessário para encontrar as impedâncias mútuas nas Equações A.11 torna-se extenso, dependendo da disposição dos dipolos. Considere, por exemplo, os dois dipolos mostrados na Figura A.1. Nessa configuração, a impedância mútua entre os dois dipolos é igual a [62]

$$Z_{21} = -V_{21}/I_{1in}. \quad (\text{A.12})$$

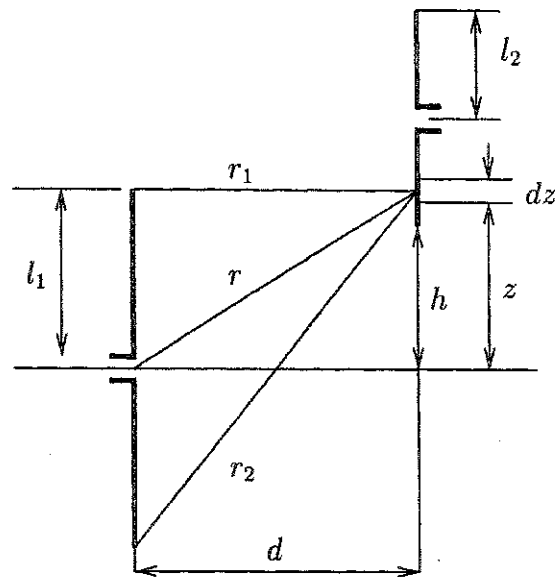


Figura A.1: Dois dipolos paralelos de comprimentos arbitrários

Nesse caso,  $V_{21}$  é a tensão de circuito aberto nos terminais da antena 2, devido à corrente de entrada da antena 1,  $I_{1in}$ . A tensão  $V_{21}$  pode ser encontrada, de acordo com [62], pela aplicação do Teorema da Reciprocidade, de modo que

$$V_{21} = \frac{1}{I_{2in}} \left( \int_h^{l_2+h} E_{z1} I_2(z) dz + \int_{l_2+h}^{2l_2+h} E_{z1} I_2(z) dz \right), \quad (\text{A.13})$$

em que  $E_{z1}$  é a intensidade do componente de campo elétrico, paralelo ao eixo da antena, em um ponto  $z$ , ao longo da antena 2, devido à corrente na antena 1. A distribuição de corrente na antena 2,  $I_2(z)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_2(z) &= I_{2m} \text{sen}(k(z-h)) & h < z < l_2+h \\ I_2(z) &= I_{2m} \text{sen}(k(l_2+h-z)) & h+l_2 < z < 2l_2+h, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

em que  $I_{2m}$  é valor da corrente máxima na antena 2. A expressão do componente de campo elétrico  $E_{z1}$  é dada por

$$E_{z1} = 30I_{1m} \left[ \frac{-je^{-jkr_1}}{r_1} + \frac{-je^{-jkr_2}}{r_2} + \frac{2j \cos(kl_1)e^{-jkr}}{r} \right]. \quad (\text{A.15})$$

O valor da impedância mútua, em relação às correntes máximas  $I_{1m}$  e  $I_{2m}$ , é dada por

$$Z_{12m} = \frac{I_{1in} I_{2in}}{I_{1m} I_{2m}} Z_{12in} \quad (\text{A.16})$$

Dessa forma, substituindo as Equações A.13 a A.15 na Equação A.12, a expressão da impedância

mútua, referida às correntes máximas, pode ser escrita, de acordo com [62], como

$$Z_{12m} = -30 \left\{ \int_h^{l_2+h} \text{sen}(k(z-h)) dz + \int_{l_2+h}^{2l_2+h} \text{sen}(k(2l_2+h-z)) dz \right\} \cdot \left( \frac{-je^{-jkr_1}}{r_1} + \frac{-je^{-jkr_2}}{r_2} + \frac{2j \cos(kl_1)e^{-jkr}}{r} \right), \quad (\text{A.17})$$

em que

$$\begin{cases} r = \sqrt{d^2 + z^2} \\ r_1 = \sqrt{d^2 + (l_1 - z)^2} \\ r_2 = \sqrt{d^2 + (l_1 + z)^2}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

O desenvolvimento matemático da Equação A.17 leva então às expressões para as partes real e imaginária da impedância  $Z_{12}$ .

$$\begin{aligned} R_{12m} = & 15 \{ \cos(k(l_1 - h))(\text{Ci}(u_o) + \text{Ci}(v_o) - \text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(v_1)) + \text{sen}(k(l_1 - h))(-\text{Si}(u_o) + \text{Si}(v_o) \\ & + \text{Si}(u_1) - \text{Si}(v_1)) + \cos(k(l_1 + h))(\text{Ci}(u'_o) + \text{Ci}(v'_o) - \text{Ci}(u_2) - \text{Ci}(v_2)) + \text{sen}(k(l_1 + h)) \\ & \cdot (-\text{Si}(u'_o) + \text{Si}(v'_o) + \text{Si}(u_2) - \text{Si}(v_2)) + \cos(k(l_1 - 2l_2 - h))(-\text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(v_1) + \text{Ci}(u_2) \\ & + \text{Ci}(v_3)) + \text{sen}(k(l_1 - 2l_2 - h))(\text{Si}(u_1) - \text{Si}(v_1) - \text{Si}(u_3) + \text{Si}(v_3)) + \cos(k(l_1 + 2l_2 + h)) \\ & \cdot (-\text{Ci}(u_2) - \text{Ci}(v_2) + \text{Ci}(u_4) + \text{Ci}(v_4)) + \text{sen}(k(l_1 + 2l_2 + h))(\text{Si}(u_2) - \text{Si}(v_2) - \text{Si}(u_4) \\ & + \text{Si}(v_4)) + 2 \cos(kl_1) \cos(kh)(-\text{Ci}(w_1) - \text{Ci}(y_1) + \text{Ci}(w_2) + \text{Ci}(y_2)) + 2 \cos(kl_1) \text{sen}(kh) \\ & \cdot (\text{Si}(w_1) - \text{Si}(y_1) - \text{Si}(w_2) + \text{Si}(y_2)) + 2 \cos(kl_1) \cos(k(2l_2 + h))(\text{Ci}(w_2) + \text{Ci}(y_2) - \text{Ci}(w_3) \\ & - \text{Ci}(y_3)) + 2 \cos(kl_1) \text{sen}(k(2l_2 + h))(-\text{Si}(w_2) + \text{Si}(y_2) + \text{Si}(w_3) - \text{Si}(y_3)) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{12m} = & 15 \{ \cos(k(l_1 - h))(-\text{Si}(u_o) - \text{Si}(v_o) + \text{Si}(u_1) + \text{Si}(v_1)) + \text{sen}(k(l_1 - h))(-\text{Ci}(u_o) + \text{Ci}(v_o) \\ & + \text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(v_1)) + \cos(k(l_1 + h))(-\text{Si}(u'_o) - \text{Si}(v'_o) + \text{Si}(u_2) + \text{Si}(v_2)) + \text{sen}(k(l_1 + h)) \\ & \cdot (-\text{Ci}(u'_o) + \text{Ci}(v'_o) + \text{Ci}(u_2) - \text{Ci}(v_2)) + \cos(k(l_1 - 2l_2 - h))(\text{Si}(u_1) + \text{Si}(v_1) - \text{Si}(u_3) \\ & - \text{Si}(v_3)) + \text{sen}(k(l_1 - 2l_2 - h))(\text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(v_1) - \text{Ci}(u_3) + \text{Ci}(v_3)) + \cos(k(l_1 + 2l_2 + h)) \\ & \cdot (\text{Si}(u_2) + \text{Si}(v_2) - \text{Si}(u_4) - \text{Si}(v_4)) + \text{sen}(k(l_1 + 2l_2 + h))(\text{Ci}(u_2) - \text{Ci}(v_2) - \text{Ci}(u_4) + \text{Ci}(v_4)) \\ & + 2 \cos(kl_1) \cos(kh)(\text{Si}(w_1) + \text{Si}(y_1) - \text{Si}(w_2) - \text{Si}(y_2)) + 2 \cos(kl_1) \text{sen}(kh)(\text{Ci}(w_1) - \text{Ci}(y_1) \\ & - \text{Ci}(w_2) + \text{Ci}(y_2)) + 2 \cos(kl_1) \cos(k(2l_2 + h))(-\text{Si}(w_2) - \text{Si}(y_2) + \text{Si}(w_3) + \text{Si}(y_3)) \\ & + 2 \cos(kl_1) \text{sen}(k(2l_2 + h))(-\text{Ci}(w_2) + \text{Ci}(y_2) + \text{Ci}(w_3) - \text{Ci}(y_3)) \}, \end{aligned}$$

(A.19)

em que

$$\begin{aligned}
u_o &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1)^2} + (h - l_1) \right) & v_o &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1)^2} - (h - l_1) \right) \\
u'_o &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1)^2} - (h + l_1) \right) & v'_o &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1)^2} + (h + l_1) \right) \\
u_1 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1 + l_2)^2} + (h - l_1 + l_2) \right) \\
v_1 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1 + l_2)^2} - (h - l_1 + l_2) \right) \\
u_2 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1 + l_2)^2} - (h + l_1 + l_2) \right) \\
v_2 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1 + l_2)^2} + (h + l_1 + l_2) \right) \\
u_3 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1 + 2l_2)^2} + (h - l_1 + 2l_2) \right) \\
v_3 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h - l_1 + 2l_2)^2} - (h - l_1 + 2l_2) \right) \\
u_4 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1 + 2l_2)^2} - (h + l_1 + 2l_2) \right) \\
v_4 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_1 + 2l_2)^2} + (h + l_1 + 2l_2) \right) \\
w_1 &= k \left( \sqrt{d^2 + h^2} - h \right) & y_1 &= k \left( \sqrt{d^2 + h^2} + h \right) \\
w_2 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_2)^2} - (h + l_2) \right) & y_2 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + l_2)^2} + (h + l_2) \right) \\
w_3 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + 2l_2)^2} - (h + 2l_2) \right) & y_3 &= k \left( \sqrt{d^2 + (h + 2l_2)^2} + (h + 2l_2) \right).
\end{aligned} \tag{A.20}$$

É interessante observar que as Equações A.19 e A.20 fornecem a impedância mútua entre dois dipolos colocados em duas linhas paralelas, separadas por uma distância  $d$ , como mostrado na Figura A.1. A partir desse diagrama, outras configurações podem ser analisadas. Poder-se-ia, por exemplo, fazer a dimensão  $h$  maior que o comprimento  $l_1$  e  $d$  tender a zero, tornando os dipolos colineares ou deixá-los paralelos, lado a lado, alinhados em relação ao seus centros. Cada uma dessas considerações permite uma simplificação diferente nas Equações A.19.

Uma considerável simplificação nas expressões das impedâncias, referidas às correntes máximas, é obtida quando os dois dipolos têm o mesmo comprimento  $l$  e esse comprimento é múltiplo de números ímpares, ou seja  $l = n\lambda/2$ ,  $n = 1, 3, 5 \dots$ . Nesse caso, as expressões das impedâncias, para as configurações colinear e lado a lado, são dadas por

*Configuração lado a lado:*

$$\begin{aligned}
R_{12m} &= \frac{\eta_o}{4\pi} [2\text{Ci}(u_o) - \text{Ci}(u_1) - \text{Ci}(u_2)] \\
X_{12m} &= -\frac{\eta_o}{4\pi} [2\text{Si}(u_o) - \text{Si}(u_1) - \text{Si}(u_2)],
\end{aligned} \tag{A.21}$$

em que

$$u_o = kd \quad u_1 = k \left( \sqrt{d^2 + l^2} + l \right) \quad u_2 = k \left( \sqrt{d^2 + l^2} - l \right) \quad (\text{A.22})$$

Configuração colinear:

$$\begin{aligned} R_{12m} &= \frac{\eta_o}{8\pi} \left\{ -\cos(v_o) [-2\text{Ci}(2v_o) + \text{Ci}(v_2) + \text{Ci}(v_1) - \ln(v_3)] \right. \\ &\quad \left. + \sin(v_o) [2\text{Si}(2v_o) - \text{Si}(v_2) - \text{Si}(v_1)] \right\} \\ X_{12m} &= \frac{\eta_o}{8\pi} \left\{ -\cos(v_o) [2\text{Si}(2v_o) - \text{Si}(v_2) - \text{Si}(v_1)] \right. \\ &\quad \left. + \sin(v_o) [2\text{Ci}(2v_o) - \text{Ci}(v_2) - \text{Ci}(v_1) - \ln(v_3)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

em que

$$v_o = kh \quad v_1 = 2k(h + l) \quad v_2 = 2k(h - l) \quad v_3 = (h^2 - l^2)/h^2. \quad (\text{A.24})$$

## A.2 Efeito do Acoplamento Mútuo em Arranjos de Antenas

Um sinal de rádio chegando em um elemento de antena induz uma corrente elétrica no elemento. Essa corrente induzida irradia um campo eletromagnético que afeta os outros elementos a sua volta. Dessa forma, o sinal captado em um determinado elemento do arranjo não somente reflete a intensidade do sinal desejado, mas também alguma intensidade de sinais gerados pelos elementos vizinhos ou outro objeto condutor que esteja nas proximidades da antena. Esse efeito, conhecido como acoplamento mútuo, muda a fase e a distribuição de corrente nos elementos do arranjo. Como resultado, o ganho, a largura de faixa, o diagrama de radiação e a impedância de entrada do arranjo são afetados.

### A.2.1 Parâmetros que afetam o acoplamento mútuo

O acoplamento mútuo é afetado pela separação entre os elementos do arranjo, pelo ângulo de chegada das ondas de rádio, pela distribuição dos elementos no arranjo, pela frequência dos sinais e pelos objetos localizados na região de campo próximo do arranjo. Estudos têm mostrado que uma separação de metade do comprimento de onda contribui para a minimização ou para que não haja acoplamento eletromagnético. Similar ao espaçamento, tem sido mostrado que a geometria e a disposição dos elementos em telefones móveis portáteis tem influência no desempenho dos aparelhos. Tem sido também verificado que o comportamento eletromagnético dos elementos é diferente nos arranjos não-uniformes, ou seja, nos arranjos nos quais a distância entre os elementos não é regular. Em geral, os elementos mais centrais, nos caso das estruturas lineares e planares, são mais afetados pelo acoplamento [63]. Esse comportamento não-uniforme requer técnicas individuais de casamento de impedância para cada elemento.



O outro parâmetro que afeta o acoplamento é a direção de chegada das ondas incidentes. Estudos têm mostrado que a direção de chegada e acoplamento são bastante correlacionados. Esse fato ocorre com mais frequência em arranjos nos quais há constante ajuste de fase. Neste caso, há um desbalanceamento na alimentação dos elementos do arranjo e uma conseqüente mudança no acoplamento entre os elementos. Por último, o acoplamento é afetado pelos elementos em volta do arranjo, na sua região de campo próximo. Os sinais irradiados pelo arranjo podem ser refletidos de volta por algum objeto próximo, resultando assim em mais acoplamento.

## A.2.2 Formas de quantificar o acoplamento

É geralmente difícil obter expressões analíticas para o acoplamento mútuo e dessa forma métodos numéricos são mais apropriados e geralmente usados. A matriz que relaciona o campo incidente à corrente gerada nos elementos do arranjo é chamada de matriz de impedância. Essa matriz revela o acoplamento entre os elementos. Uma outra forma de quantificar o acoplamento mútuo é por meio de medições. Esse procedimento é geralmente caro e requer que acuradas medições sejam feitas. Um método usado para encontrar os coeficientes é chamado Método da Decomposição de Fourier, no qual a tensão induzida nos elementos do arranjo é medida e expressa em uma série de Fourier na qual os coeficientes da série correspondem aos coeficientes de acoplamento mútuo. A desvantagem desse método é que o espaçamento  $d$  entre os elementos não pode ser menor que  $\lambda/2$  [63].

Em geral, devido ao acoplamento, o feixe principal radiado pelo arranjo desvia um pouco da característica teórica e a intensidade dos lóbulos laterais eleva um pouco. Em arranjos adaptativos, por exemplo, o impacto do desvio do lóbulos principal é menos significativo comparado ao aumento no nível dos lóbulos secundários. Apesar do acoplamento alterar algumas características do arranjo, estudos têm surgido propondo métodos de compensação do seu efeito [64]. Esses métodos são subdivididos em duas categorias que são aqueles que modificam os algoritmos de processamento e os que modificam as tensões de entrada nos elementos.

## Referências Bibliográficas

- [1] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [2] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*. John Wiley & Sons, INC, 1998.
- [3] L. C. Godara, "Application of antenna arrays to mobile communications, part ii: Beam-forming and direction-of-arrival considerations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 8, August 1997.
- [4] R. F. Colares, C. A. Alves e A. Lopes, "Descrição unificada dos métodos modernos para estimação do a em arranjos de sensores," *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, vol. 16, no. 2, pp. 101–121, dezembro 2001.
- [5] J. C. Liberti and T. S. Rappaport, *Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*. Prentice Hall, 1999.
- [6] D. Barbieri, "A method for calculating the current distribution of tschebyscheff arrays," *Proc. IRE*, pp. 78–82, January 1952.
- [7] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [8] D. N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems," *IEEE Transaction on communications*, vol. 28, pp. 1867–1875, 1980.
- [9] J. J. Shynk and C. K. Chan, "Performance surfaces of the constant modulus algorithm based on a conditional gaussian model," *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 41, pp. 1965–1969, 1993.
- [10] I. Chiba, W. Chujo and M. Fujise, "Beamspace constant modulus algorithm adaptive array antennas," *Proc. Inst. Elect. Eng. 8ht Int. Conf. Antennas and Propagation*, pp. 975–978, 1993.
- [11] S. Kapoor and at all., "Adaptive multiuser detection and beamforming fo interference suppression in cdma mobile radio systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 48, no. 5, pp. 1341–1355, September 1999.

- 
- [12] J. H. Winters, "Signal acquisition and tracking with adaptive arrays in the digital mobile radio system 1s-54 with flat fading," *IEEE Trans. Vehic. Tech.*, November 1993.
- [13] J. H. Winters, "Smart antennas for wireless systems," *IEEE Personal Communications*, vol. 5, no. 1, pp. 23–27, February 1998.
- [14] W. W. Hansen and J. R. Woodyard, "A new principle in directional antenna design," *Proc. IRE*, vol. 26, no. 3, pp. 333–345, March 1938.
- [15] S. A. Schelkunoff, "A mathematical theory of linear arrays," *Bell System Tech Journal*, vol. 22, pp. 80–87, January 1943.
- [16] C. L. Dolph, "A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beamwidth and side-lobe level," *Proc. IRE and Waves and Electrons*, June 1946.
- [17] L. J. Ricardi, "Radiation properties of the binomial array," *Microwave Journal*, vol. 15, no. 12, pp. 20–21, December 1972.
- [18] R. J. Stegen, "Excitation coefficients and beamwidths of large scanning tschebyscheff arrays," *Proc. IRE*, pp. 1671–1674, November 1953.
- [19] C. J. D. Jr., "Useful approximations for the directivity and beamwidth of large scanning dolph-chebyshev arrays," *Proc. IEEE*, pp. 1779–1787, November 1968.
- [20] B. J. Forman, "A novel directivity expression for planar antenna arrays," *Radio Science*, vol. 5, no. 7, pp. 1077–1083, July 1970.
- [21] D. K. Cheng and M. T. Mat, "A new mathematical approach for linear array analysis," *IRE Trans. on Antennas and Propagations*, pp. 255–259, October 1960.
- [22] D. J. Gaushell, "Synthesis of linear antenna arrays using z transforms," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 19, no. 1, pp. 75–80, January 1971.
- [23] B. D. Steinberg, "Comparison between the peak sidelobe of random array and algorithmically designed aperiodic arrays," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, pp. 366–369, May 1973.
- [24] M. J. Rossouw, J. Joubert and D. A. McNamara, "Thinned arrays using a modified minimum redundancy synthesis technique," *Electronics Letters*, vol. 33, no. 10, May 1997.
- [25] K. Yan and Y. Lu, "Sidelobe reduction in array-pattern synthesis using genetic algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 7, pp. 1117–1122, July 1997.

- [26] B. Yeo and Y. Lu, "Array failure correction with a genetic algorithm," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 5, pp. 23–828, May 1999.
- [27] J. Wang, H. Israelsson and R. G. North, "Optimum subarray configuration using genetic algorithms," in *Procs. of ICASSP 98*, vol. 4, May 1998, pp. 2129–2132.
- [28] S. E. El-Khamy, M. A. Aboul-Dahab and K. A. Hijjah, "Sidelobes reduction and steerable nulling of antenna arrays using neural networks," in *IEEE Int. Symposium on Antennas & Propag.*, Orlando, Florida, July 1999.
- [29] S. E. El-Khamy and A. M. El-Marakby, "Using radial-basis function neural networks to shape the array factors and reduce the side-lobe levels of phased antenna arrays," in *Proceedings of the Seventeenth National Radio Science Conference*, Minufiya University, Egipt, February 2000.
- [30] J. A. Tsai and B. D. Woerner, "Adaptive beamforming of uniform circular arrays (uca) for wireless cdma systems," *Conference Record of the Thirty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, pp. 399–403, 2001.
- [31] M. Wax, "The joint estimation of differential delay, doppler and phase," *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 28, no. 5, pp. 817–820, September 1982.
- [32] S. Stein, "Differential delay/doppler estimation with unknown signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 8, pp. 2717–2719, August 1993.
- [33] R. B. E. at all, "Overview of spatial channel models for antenna array communication systems," *IEEE Personal Communications*, vol. 5, no. 1, pp. 10–22, February 1998.
- [34] R. Kohno, "Spatial and temporal communication theory using adaptive antenna array," *IEEE Personal Communications*, vol. 5, no. 1, pp. 28–35, February 1998.
- [35] P. H. Lehne and M. Pettersen. (1999) An overview of smart antenna technology for mobile communications systems. [Online]. Available: <http://www.consoc.org/pubs/surveys>
- [36] J. Fuhl, "Smart antennas for second and third generation mobile communications systems," Ph.D. dissertation, Technische Universitat Wien, A-2803 Schwarzenbach, Eggenbuch 17, March 1997.
- [37] O. A. D. Júnior and A. D. D. Neto, "Neural networks of modular structure applied to linear and planar antennas array," in *SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference*, Recife, Brasil, August 2001, pp. 299–301.

- [38] A. R. R. Matos, L. M. Mendonça and A. G. D'Assunção, "Adaptive array algorithms for wireless cdma systems with multipaths," in *SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference*, Recife, Brasil, August 2001, pp. 31–34.
- [39] K. A. at all, "Real-time smart antenna processing for gsm1800 base station," in *IEEE Vehicular Technology Conference*, Houston, EUA, 1999.
- [40] M. Wax and J. Sheinvald, "Directions finding of coherent signal via spatial smoothing for uniform circular arrays," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 613–626, May 1994.
- [41] A. H. Tewfik and W. Hong, "On the application of uniform linear array bearing estimation techniques to uniform circular array," *IEEE Trans. on Signal Processings*, vol. 40, pp. 1008–1011, April 1992.
- [42] C. P. Mathews and M. D. Zoltowski, "Eigenstructure techniques for 2-d angle estimation with uniform circular arrays," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, pp. 2395–2407, October 1994.
- [43] B. K. Lau and Y. H. Leung, "A dolph-chebyshev approach to the synthesis of array patterns for uniform circular arrays," *ISCAS 2000– IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 31, May 2000.
- [44] B. P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford university press., 1998.
- [45] W. C. Y. Lee, "Effects on correlation between two mobile radio base station antennas," *Proc. IEEE Trans. on Communications*, vol. 21, no. 11, pp. 1214–1224, November 1986.
- [46] J. Salz and J. H. Winters, "Effect of fading correlation on adaptive arrays in digital mobile radio," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 43, no. 4, pp. 1049–1057, November 1994.
- [47] F. Adachi. at all, "Crosscorrelation between the envelopes of 900 mhz signals received at a mobile radio base station site," *IEE Proceedings*, vol. 133, no. 6, pp. 506–512, October 1986.
- [48] T. Trump and B. Ottersten, *Estimation of nominal direction of arrival and angular spread using an array of sensors*. Signal Processing, Elsevier, 1996.
- [49] B. Ottersten, "Array processing for wireless communications," in *Proc. Workshop on Statistical and Array Processing*, Corfu, Greece, June, pp. 466–473.

- [50] W. C. Y. Lee, "Applying the intelligent cell concept to pcs," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 43, no. 3, pp. 672–679, 1994.
- [51] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York, NY: Dover publications, Inc., 1970.
- [52] A. F. Naguib and A. Paulraj, "Capacity improvement with base station antenna arrays in cellular cdma," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 43, no. 3, pp. 691–698, August 1994.
- [53] M. G. Jansen et al., "Capacity, throughput and delay analysis of a cellular ds-cdma system with imperfect power control and imperfect sectorization," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, February 1995.
- [54] Z. Zhao-hui, H. Saigui and H. Jiandong, "Capacity improvement with base station antenna arrays in cellular cdma," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, pp. 1303–1306, May 1996.
- [55] J. G. Proakis, *Digital Communications*. Mc Gra-Hill, Inc, 1995.
- [56] J. Luo, J. R. Zeidler and S. McLaughlin, "Performance analysis of compact antenna arrays with mrc in correlated nakagami fading channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 50, no. 1, January 2001.
- [57] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, 1958.
- [58] A. D. Poularikas, editor in-chief, *The Transforms and Applications Handbook*. IEEE press, 1995.
- [59] M. K. Simon and M. S. Alouinir, "A unified approach to the performance analysis of digital communication over generalized fading channels," *Proceedings do IEEE*, vol. 86, September 1998.
- [60] J. A. G. Malherbe, "Analysis of a linear antenna array including the effects of mutual coupling," *IEEE Trans. on Education*, vol. 32, no. 1, pp. 691–698, February 1989.
- [61] L. M. Correia, *Wireless Flexible Personalised Communications, COST 259: European Co-operation in Mobile Radion Research*. John Wiley & Sons, 2001.
- [62] H. E. King, "Mutual impedance of unequal length antennas in echelon," *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, July 1957.

- 
- [63] H. A. Mehmet, K. Özdemiz and E. Arvas, "Mutual coupling effect in multi-antenna wireless," in *Proceeding of the IEEE 2003 Globcom*, San Francisco, CA, USA, December 2003.
- [64] K. R. Dandekar, et al., "Experimental study of mutual coupling compensation in smart antenna applications," *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 1, no. 3, pp. 480–487, July 2002.
- [65] L. M. Correia, *Wireless Flexible Personalised Communications*. John Wiley & Sons, INC, 2001.
- [66] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*. McGraw-Hill, Inc, 1962.
- [67] N. S. Tzannes, *Communication and Radar Systems*. Prentice-Hall, 1985.
- [68] A. Haimovich, "The eigencanceler: A new space-time interference canceler," *Radar Conference, Record of the 1994 IEEE*, vol. 37, no. 2, pp. 194–199, 1994.
- [69] A. Haimovich, "The eigencanceler: adaptive radar by eigenanalysis methods," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 532–542, April 1996.
- [70] A. M. Haimovich, A. Shah and X. Wu, "Reduced-rank processing for wireless communications with applications to IS-54/IS-136," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 5, pp. 743–747, May 2000.
- [71] Y. Bar-Ness, E. Panayircy and W. Chen, "Eigenanalysis for interference cancellation with minimum redundancy array structure," *Statistical Signal and Array Processing. Conference Proceedings., IEEE Sixth SP Workshop on*, pp. 243–246, 1992.
- [72] K.-B. Yu and D. J. Murrow, "Adaptive digital beamforming for angle estimation in jamming," *IEEE Transaction on Aerospace and electronic systems*, vol. 37, no. 2, April 2001.
- [73] M. Agrawal and S. Prasad, "Robust adaptive beamforming for wide-band movers and coherent jammers via uniform linear arrays," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 8, pp. 1268–1275, August 1991.
- [74] B. Friedlander, "A signal subspace method for adaptive interference cancellation," *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, no. 12, pp. 1835–1845, December 1988.
- [75] A. M. Haimovich and Y. Bar-Ness, "An eigenanalysis interference canceler," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 39, no. 1, pp. 76–84, January 1991.

- [76] B. D. V. Veen, "Eigenstructure based partially adaptive array dedign," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 3, pp. 357–362, March 1988.
- [77] M. Lu and Z. Y. He, "Adaptive beamforming for coherent interference suppression," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 1, pp. 301–304, 1993.
- [78] C. H. Gierull, "Statistical analysis of the eigenvector projection method for adaptive spatial filtering of interference," *IEE Proceeding on Radar, Sonar and Navigation*, vol. 144, no. 2, pp. 57–63, April 1997.
- [79] S. K. Teshima and C. Almeida, "Lower bound on normalised interference mean and standard deviation for cdma systems using antenna arrays," *Eletronic Letters*, vol. 36, no. 21, pp. 1761–1763, October 2000.
- [80] W. J. L. Queiroz e M. S. Alencar, "Análise de distúrbios aleatórios na estrutura de um autocancelador," in *Anais do X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica, Recife - Brasil*, Recife - PE, Brasil, Setembro 2002.
- [81] W. J. L. Queiroz, F. S. Silva and M. S. Alencar, "Analyse of linear array configurations with randomic parameters," in *Proceeding of International Telecommunications Symposium 2002 ITS 2002*, Natal - RN, Brasil, October 2002.
- [82] W. J. L. Queiroz, F. G. S. Silva and M. S. Alencar, "Design of eigencancelers with circular array structures," in *Proceedings of 4-th Conference on Telecommunications-CONFTELE-2003*, Aveiro, Portugal, June 2003.
- [83] W. J. L. Queiroz and M. S. Alencar, "Eigencanceler study applied to local scatter channel model," in *Proceedings of IEEE International Microwave and Optoeletronics Conference 2003 - IMOC2003*, Foz do Iguaçú - PR, Brazil, September 2003.
- [84] W. L. Queiroz and M. S. Alencar, "Project of antenna arrays with random parameters," in *Proceedings of IEEE International Microwave and Optoeletronics Conference 2003 - IMOC2003*, Foz do Iguaçú - PR, Brazil, September 2003.
- [85] W. L. Queiroz, F. G. S. Silva and M. S. Alencar, "Use of a symmetrical linear array structure to reduce mutual interference between users in a circular cell system," in *Proceedings of IEEE International Microwave and Optoeletronics Conference 2003 - IMOC2003*, Foz do Iguaçú - PR, Brazil, September 2003.



- 
- [86] W. L. Queiroz e M. S. Alencar, "Avaliação da capacidade de um sistema cdma em um modelo de canal de baixo *rank* para arranjos de antena circular e linear," in *Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT2003*, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, outubro 2003.
- [87] W. J. L. Queiroz e M. S. de Alencar, "Cancelamento de interferência mútua em canal de baixo *rank* com arranjos de antenas simétricos e doa gaussiano," in *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 2004*, Belém do Pará - PA, Brasil, setembro 2004.
- [88] W. J. L. Queiroz e M. S. de Alencar, "Avaliação da potência de interferência mútua por meio de arranjo de antenas linear simétrico na estação radiobase," in *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBT 2004*, Belém do Pará - PA, Brasil, setembro 2004.
- [89] W. J. L. Queiroz, F. G. S. Silva and M. S. de Alencar, "Unified analysis of the local scatters channel model," in *Proceedings of the XI International Conference on Telecommunications - ICT 2004*, Fortaleza - CE, Brazil, August 2004.
- [90] W. J. L. Queiroz, F. G. S. Silva and M. S. de Alencar, "Spatial analysis of the local scatters channel model," in *Proceedings of the XI International Conference on Telecommunications - ICT 2004*, Fortaleza - CE, Brazil, August 2004.
- [91] F. G. S. Silva, W. J. L. Queiroz and M. S. de Alencar, "Reduction of intersymbolic interference using eigenanalysis method and a linear antenna array," in *Proceedings of the V IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications - SPAWC 2004*, Lisboa, Portugal, July 2004.