

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Coordenação de Pós-Graduação em Física
Dissertação de Mestrado

Soluções exatas com simetria axial na Relatividade Geral: Um
estudo sobre estrelas em modelos de branas.

Kelder Cavalcanti de Vasconcelos

Campina Grande
Dezembro de 2010

531-11/113
15316

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Coordenação de Pós-Graduação em Física
Dissertação de Mestrado

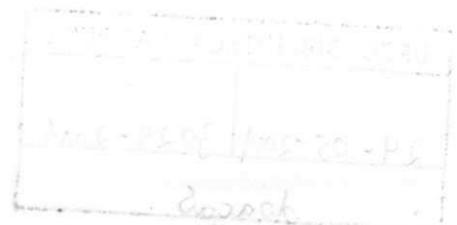
Soluções exatas com simetria axial na Relatividade Geral: Um estudo sobre estrelas em
modelos de branas.

Kelder Cavalcanti de Vasconcelos

Dissertação realizada sob a orientação do
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apre-
sentada à Unidade Acadêmica de Física
em complementação aos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Campina Grande

Dezembro de 2010





V331s Vasconcelos, Kelder Cavalcanti de
Solucoes exatas com simetria axial na relatividade geral
: um estudo sobre estrelas em modelos de branas / Kelder
Cavalcanti de Vasconcelos. - Campina Grande, 2010.
70 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Fisica) - Universidade Federal
de Campina Grande, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Gravitacao - 2. Brana 3. Buraco Negro 4. Dissertacao
I. Dahia, Fabio Leal de Melo, Dr. II. Universidade Federal
de Campina Grande - Campina Grande (PB) III. Título

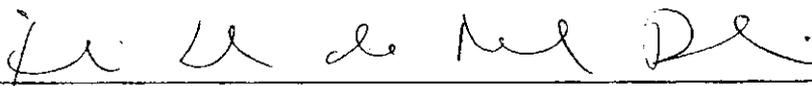
CDU 531-4(043)

KELDER CAVALCANTI DE VASCONCELOS

**SOLUÇÕES EXATAS COM SIMETRIA AXIAL NA RELATIVIDADE GERAL:
UM ESTUDO SOBRE ESTRELAS EM MODELOS DE BRANAS**

Dissertação aprovada em 22/12/2010

BANCA EXAMINADORA



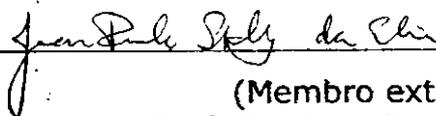
(Presidente)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly
DF - UEPB

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por se fazer presente em todos os momentos, dando-me a perseverança necessária para alcançar meus objetivos.

Ao Prof. Fábio Leal de Melo Dahia, por sua grande dedicação, paciência e ajuda ao longo deste trabalho, permitindo assim sua concretização.

Aos professores Francisco de Assis de Brito e Rômulo Rodrigues da Silva pelos ensinamentos dados, que foram fundamentais para minha formação profissional.

A meus pais e irmãos pelo incentivo constante, mostrando que a união não depende do contato diário.

A Laelson da Silva Freire, por toda ajuda e demonstrações concretas de amizade sincera, torcendo juntamente à minha família por minhas realizações pessoais e profissionais.

A Simone Fidélis Alves, que mesmo estando um pouco longe, fez com que nossa amizade crescesse cada vez mais.

Ao Pe. João Jorge Rietveld, pela confiança em meu trabalho, conselhos e apoio disponibilizado.

A Ariberson, Graciete, Ivânia e Marcos, por continuarem me apoiando como grandes amigos mesmo à distância.

A Márcio Siqueira, Priscila Valdênia e Waldson Marcelo, pela amizade e auxílio ao longo de todo o curso.

À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

No contexto das teorias de dimensões extras, o modelo de branas RSII tem despertado muito interesse. De acordo com este modelo, nosso Universo quadridimensional é uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente com uma dimensão extra não-compacta e munido de uma constante cosmológica negativa. Um dos grandes desafios do modelo, e de maneira geral, da Teoria Geral da Relatividade, é encontrar soluções exatas com clara interpretação física. Nosso trabalho tem como objetivo obter soluções exatas das equações de Einstein referentes a estrelas confinadas na brana no modelo RSII. Em cinco dimensões, o sistema composto pela brana e pela estrela confinada possui simetria axial. Apesar da simetria, a resolução direta das equações de Einstein para esse sistema é impraticável. Sendo assim, para obtenção das soluções, usaremos o método alternativo conhecido como o método de “deslocar, cortar e refletir”. Este método consiste em dividir um espaço já conhecido (no nosso caso, o espaço-tempo Schwarzschild-AdS₅) em duas partes, por meio de um corte em um plano localizado acima da fonte ($z = c > 0$, nas coordenadas de Weyl). A parte de baixo, que contém a fonte, é descartada e substituída pela imagem refletida da região superior. O novo espaço-tempo obtido por este procedimento apresentará uma descontinuidade no plano do corte, indicando, portanto, a presença de matéria concentrada naquela hipersuperfície. Com as equações de Einstein, podemos determinar a densidade e a pressão da distribuição de matéria obtida. Examinando essas quantidades, verificaremos que, além do conteúdo energético da própria brana, há um corpo com simetria esférica (a estrela confinada na brana). Empregando o formalismo de imersão, cortes mais gerais, que não se limitam a planos, podem ser considerados. Em todos os casos analisados, o corpo possui densidade de energia positiva. No entanto, há regiões onde a condição da energia dominante não é satisfeita, isto é, onde a pressão é maior do que a densidade de energia.

Palavras chave: dimensão extra, brana, buraco negro.

Abstract

In the context of extra dimensional theories, the braneworld RSII model has attracted much interest. According to this model, our universe is a four-dimensional hypersurface embedded in an ambient space with a non-compact extra dimension and a negative cosmological constant. A great challenge for the model, and in general, for the General Relativity Theory, is to find exact solutions with clear physical interpretation. In this work, we intend to obtain exact solutions of Einstein's equations related to stars confined to the brane in the RSII model. In five dimensions, the system composed by the brane and by the confined star possesses axial symmetry. Despite the symmetry, the direct resolution of the Einstein equations for this system is a very difficult task. Therefore, in order to obtain the solutions we have to use the alternative method known as "displace, cut and reflect". This method consists of dividing a space already known (in our case, the Schwarzschild-AdS₅ space-time) into two parts by a cut in a plane located above the source ($z = c > 0$, in the Weyl coordinates). The bottom part, which contains the source, is eliminated and replaced by the reflected image of the upper region. The new space-time that arises by this procedure presents a discontinuity in the plane of the cut, therefore, indicating the presence of matter concentrated at that hypersurface. From the Einstein's equations, we can determine the density and pressure of the matter distribution which was obtained. Examining these quantities, we find that, besides the energy content of the brane itself, there is a body with spherical symmetry (the star confined on the brane). Employing the embedding formalism, more general cuts, which are not limited to planes, may be considered. In all cases examined, the body has positive energy density. However, there are regions where the dominant energy condition is not fulfilled, i.e., where the pressure is greater than the energy density.

Keywords: extra dimension, brane, black hole.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Estudo de Discos de Matéria em Relatividade Geral	5
2.1	Esquema de construção de discos	6
2.2	Discos na Teoria Newtoniana	7
2.3	Discos na Teoria da Relatividade Geral	10
3	Modelos de Dimensões Extras	19
3.1	O Modelo de Kaluza-Klein	20
3.2	Branas	25
3.3	O Modelo ADD	30
3.4	O Modelo RSI	33
3.5	O Modelo RSII	38
4	O Método de “deslocar, cortar e refletir” em cinco dimensões	41
4.1	Espaço-tempo AdS_5	42
4.2	Espaço-tempo Schwarzschild- AdS_5	48
5	Mundo-Branas e o Método da Imersão	57
6	Conclusões	66

Capítulo 1

Introdução

O estudo do campo gravitacional produzido por estrelas, buracos negros, galáxias e outros sistemas com muita massa, a rigor, deve ser empreendido no âmbito da Relatividade Geral. No entanto, encontrar soluções exatas das equações de Einstein, em geral, tem sido um grande desafio, pois, por terem um caráter não-linear, as equações são demasiadamente complicadas.

Uma forma de amenizar estas dificuldades é levar em consideração a simetria que alguns sistemas apresentam. Na Relatividade Geral, os vetores de Killing são os geradores de isometrias, isto é, são eles que dão origem às transformações de simetrias da métrica. Uma vez identificadas essas simetrias, podemos passar para um sistema de coordenadas adaptado a elas. Nesse sistema, as equações de campo são simplificadas.

Assim, quanto maior for o grau de simetria do sistema, mais simples se tornarão as equações de Einstein. Na Relatividade Geral, há um número reduzido de soluções exatas conhecidas que possuem interpretação física clara. Esses casos envolvem, em geral, um alto grau de simetria. Como exemplo, podemos citar a solução Schwarzschild (solução com simetria esférica e estática) e a métrica de Robertson-Walker, que descreve modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos.

De todos os tipos de simetrias, um caso de grande interesse físico é o da simetria axial. Intuitivamente, a simetria axial está relacionada a invariância do sistema por rotações em torno de um certo eixo. Do ponto de vista matemático, a simetria axial é

caracterizada por um vetor de Killing do tipo espaço com órbitas fechadas. Esse vetor é o gerador de rotação em torno do eixo de simetria.

A simetria axial é muito usada para representar idealizações de diversas configurações físicas, entre as quais, podemos destacar a distribuição de matéria em um disco galáctico. Outra situação em que a simetria axial está presente refere-se à distribuição de algumas estruturas físicas confinadas sobre a brana no modelo RSII, como por exemplo, a de um buraco negro na brana, cuja solução ainda é desconhecida.

O objetivo de nosso trabalho é encontrar soluções para corpos confinados em uma brana do tipo RSII. Se os corpos confinados possuem simetria esférica na brana, então, o sistema (corpo + brana) apresentará simetria axial em cinco dimensões.

Como a resolução direta das equações de Einstein é impraticável para este sistema, empregaremos o método de “deslocar, cortar e refletir” e o método de imersão, como alternativas para obtenção das soluções exatas.

No primeiro método, tomaremos um espaço já conhecido (nosso espaço base) e o dividiremos em duas partes, a partir de um plano situado ao longo de z constante, onde z corresponde à dimensão extra. Os dois espaços resultantes diferem entre si pelo fato de que um deles - o espaço situado abaixo do plano - possui fonte e o outro não. Este espaço com fonte é descartado e o espaço sem fonte é refletido a partir do plano de corte e o resultado disto é o “surgimento” de um disco fino no plano de corte. Matematicamente, isto é equivalente a fazermos uma transformação ao longo da coordenada extra nas componentes da métrica, como veremos.

Aplicando este método em um espaço quadrimensional, o resultado obtido é um disco fino com simetria axial, que pode ser usado para representar discos galácticos. As propriedades físicas obtidas para o disco dependem do espaço base escolhido e do plano onde é executado o corte. Com escolhas convenientes, tenta-se reproduzir as propriedades, como densidade e pressão, dos discos galácticos.

Após a explanação acerca do método, aplicaremos o mesmo em um espaço com cinco dimensões. O modelo de dimensão extra a ser adotado será o modelo RSII. Como existem vários modelos de dimensões extras, faremos, antes da aplicação do método em

um espaço 5-D, uma breve revisão acerca destes modelos.

No capítulo referente à esta revisão sobre dimensões extras, veremos que o modelo RSII é muito discutido atualmente por ser um modelo no qual a dimensão extra tem topologia não-compacta, e apesar disso, é compatível com os resultados experimentais. Nos outros modelos, a dimensão extra é sempre compacta, variando apenas seu comprimento de um modelo para outro. No caso do modelo de Kaluza-Klein, a dimensão extra possui comprimento da ordem de Planck; no modelo ADD, o comprimento é da ordem submilimétrica; já no modelo RSI, corresponde a distância entre duas branas com tensões de sinais opostos.

Além do fato da dimensão extra possuir comprimento infinito, outro aspecto que desperta interesse em relação ao modelo RSII, é que a solução exata de um buraco negro na brana ainda é desconhecida, ou seja, trata-se de um problema em aberto.

Aplicando o método de “deslocar, cortar e refletir” no modelo RSII, veremos que a distribuição de matéria encontrada corresponde à própria brana, quando o espaço base escolhido é o espaço-tempo AdS_5 (Anti-de Sitter em 5-D). De fato, mostraremos que a densidade e a pressão do disco de matéria geradas são idênticas aos da brana no modelo RSII.

Por sua vez, se o espaço base é o espaço-tempo Schwarzschild- AdS_5 , a distribuição encontrada corresponde a de um corpo com simetria esférica e estática que consideramos ser uma estrela confinada na brana. Esta conclusão provém da observação feita de que o disco de matéria gerado possui, além do conteúdo energético da própria brana, densidade e pressão adicionais, que são positivas e decaem com o aumento da coordenada radial.

O outro método que usaremos para obtenção das soluções será o método de imersão. Nele empregaremos, como espaço base, o espaço-tempo Schwarzschild- AdS_5 para encontrarmos a métrica induzida na brana e da distribuição de matéria confinada. Este método é mais abrangente do que o primeiro, pois a hipersuperfície onde se localiza a brana poderá ter uma “forma” qualquer, ou seja, não se limitará a forma de um plano z constante, nas coordenadas consideradas.

Como veremos, o conteúdo energético induzido na brana dependerá da “forma” da

hipersuperfície, portanto, há certos “graus de liberdade” que podem ser manipulados para obtenção de diversas distribuições de matéria . Como veremos, o método de “deslocar, cortar e refletir” é um caso particular do método da imersão, quando a hipersuperfície é descrita pela equação de um plano nas coordenadas de Weyl.

Capítulo 2

Estudo de Discos de Matéria em Relatividade Geral

O estudo de discos finos e discos de espessura na Relatividade Geral vêm conquistando cada vez mais relevância, pois, devido à simetria axial que estes discos possuem, torna-se possível encontrar soluções exatas das equações de Einstein para estas estruturas. Do ponto de vista físico, os discos são importantes porque podem ser usados como forma aproximada de representação de modelos reais de discos galácticos com ou sem halos, por exemplo. De acordo com González e Letelier [1], as soluções exatas encontradas no estudo dos discos revelam algumas propriedades físicas dos modelos galácticos que estes representam.

Em vista desta e de outras possíveis aplicações que estes discos possuem, torna-se fundamental para nós, entendermos o processo de obtenção destas soluções. No caso de um disco fino, seja ele Newtoniano ou relativístico, sua construção está baseada no método de “deslocar, cortar e refletir” um certo espaço “base” já conhecido. Na construção do disco, o espaço base, que possui singularidade ou fonte, é recortado em duas partes: uma singular e outra regular (sem fontes ou singularidades). A parte singular é excluída e a regular é refletida a partir do plano em que foi efetuado o corte. O resultado disto é o surgimento de um disco fino de extensão infinita no plano do corte.

Nosso objetivo neste capítulo é descrever este método. Para tal, seguiremos os

passos de González e Letelier [1]. Após isso, com o intuito de obter as propriedades físicas de discos específicos, em especial suas densidades, se fará necessário o uso de um potencial gravitacional Newtoniano particular, para o caso de um disco fino Newtoniano, e o uso da métrica de um espaço dado, para o caso de discos relativísticos.

Nesse último caso, a métrica de um espaço base é modificada de forma que a mesma passe a representar um espaço-tempo que apresenta uma determinada distribuição de matéria concentrada numa hipersuperfície. Em seguida, as propriedades físicas dessa distribuição são calculadas com o uso das equações de Einstein. Inicialmente, usaremos como base a solução de Schwarzschild e discutiremos a importância e a aplicabilidade dos discos encontrados. Por fim discutiremos como o mesmo método pode ser empregado no cenário das dimensões extras, para obtermos soluções que possam descrever estrelas confinadas na brana.

2.1 Esquema de construção de discos

O método usado para construção de discos finos é o método de “deslocar, cortar e refletir” [2]. Considere um espaço-tempo com fonte ou singularidade localizada na região $z = 0$. O método consiste em estabelecer um plano situado em $z = c$ (Figura 2.1). Assim, pode-se observar que o plano $z = c$ divide o espaço em duas regiões: uma com fonte e outra sem. Um corte então é feito neste plano, e a região do espaço com singularidade ou fonte ($z < c$) é descartada. Após isso fazemos uma reflexão do espaço que nos restou ($z > c$) e o resultado é um disco de extensão infinita. Uma forma equivalente de esquematizarmos isso é dividindo esse mesmo espaço inicial em três partes a partir de dois planos situados respectivamente em $z = c$ e $z = -c$. Assim, a região situada entre os planos, que possui a singularidade ou fonte é extraída e as duas partes restantes são coladas uma a outra. O resultado deste procedimento é o mesmo disco fino de extensão infinita que pode ser analisado como uma função delta de Dirac com suporte em $z = c$. Como veremos, este método é equivalente a fazermos $z \rightarrow h(z) + c$ na solução original, onde c é uma constante positiva e $h(z) = |z|$.

$$\Phi^{(0)}(r, z') = -\frac{Gm}{\sqrt{r^2 + (h(z) + c)^2}}. \quad (2.12)$$

Fazendo $h(z) = |z|$, temos:

$$\Phi^{(0)}(r, z') = -\frac{Gm}{\sqrt{r^2 + (|z| + c)^2}}. \quad (2.13)$$

Sendo assim:

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{Gm(|z| + c)}{[r^2 + (|z| + c)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.14)$$

Em $z = 0$, onde a matéria está concentrada, vemos que:

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{Gmc}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.9), temos a densidade do disco Newtoniano:

$$\rho(r, z) = \frac{mc}{2\pi(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}\delta(z). \quad (2.16)$$

Logo, vemos que a escolha de $h(z) = |z|$ nos permitiu encontrar um disco fino cuja densidade superficial de massa será dada por:

$$\sigma(r) = \frac{mc}{2\pi(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.17)$$

Aqui vemos explicitamente que o método de “deslocar, cortar e refletir” gera um disco fino cuja densidade superficial depende de c , ou seja, da localização do plano de corte.

2.3 Discos na Teoria da Relatividade Geral

Neste estudo, usaremos métricas com assinatura $(-+++)$ para espaços com 4 dimensões e assinatura $(-++++)$ para espaços com 5 dimensões. Quanto aos índices das equações,

empregaremos a convenção: os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos maiúsculos variam de 0 a 4.

O método de construção de discos em Relatividade Geral baseia-se no método-g ou método inverso [1], no qual uma métrica do vácuo é modificada de forma que a mesma passe a representar um espaço-tempo gerado por uma determinada distribuição de matéria concentrada em uma região $z = 0$.

Como exemplo, partiremos da métrica de um espaço-tempo com simetria esférica escrita em coordenadas cilíndricas isotrópicas [1]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi^{(0)}(r,z)} dt^2 + e^{2\Lambda^{(0)}(r,z)} [r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2]. \quad (2.18)$$

As equações de Einstein para um espaço-tempo quadrimensional [5] sem a presença de uma constante cosmológica são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde $c = 1$ e $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci que é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta, \quad (2.20)$$

sendo $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.21)$$

Temos ainda que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Como no vácuo, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é nulo, então:

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.23)$$

Assim, no vácuo, a métrica (2.18) satisfaz às seguintes equações:

$$2(\Lambda_{,rr}^{(0)} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + \Lambda_{,zz}^{(0)}) + (\Lambda_{,z}^{(0)})^2 + (\Lambda_{,r}^{(0)})^2 = 0, \quad (2.24)$$

$$\Lambda_{,rr}^{(0)} + \Lambda_{,zz}^{(0)} + \Phi_{,rr}^{(0)} + \Phi_{,zz}^{(0)} + (\Phi_{,r}^{(0)})^2 + (\Phi_{,z}^{(0)})^2 = 0, \quad (2.25)$$

$$2\Phi_{,r}^{(0)}\Lambda_{,r}^{(0)} + (\Lambda_{,r}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + \Lambda_{,zz}^{(0)} + (\Phi_{,z}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r}^{(0)} + \Phi_{,zz}^{(0)} = 0, \quad (2.26)$$

$$\Phi_{,z}^{(0)}\Phi_{,r}^{(0)} + \Phi_{,zr}^{(0)} - \Phi_{,r}^{(0)}\Lambda_{,z}^{(0)} - \Phi_{,z}^{(0)}\Lambda_{,r}^{(0)} - \Lambda_{,z}^{(0)}\Lambda_{,r}^{(0)} + \Lambda_{,zr}^{(0)} = 0 \quad (2.27)$$

E:

$$2\Phi_{,z}^{(0)}\Lambda_{,z}^{(0)} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + \Lambda_{,rr}^{(0)} + (\Lambda_{,z}^{(0)})^2 + (\Phi_{,r}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r}^{(0)} + \Phi_{,rr}^{(0)} = 0, \quad (2.28)$$

onde $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(r, z)$ e $\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)}(r, z)$.

Vamos agora aplicar o método de “deslocar, cortar e refletir”, definindo novas funções Λ e Φ por meio da transformação $z \rightarrow z' = h(z) + c$, aplicada a $\Phi^{(0)}$ e $\Lambda^{(0)}$.

Assim:

$$\Phi(r, z) = \Phi^{(0)}(r, z') \quad (2.29)$$

E:

$$\Lambda(r, z) = \Lambda^{(0)}(r, z'). \quad (2.30)$$

Com estas novas funções, (2.18) nos dá a métrica de um novo espaço-tempo, agora preenchido por uma distribuição de energia. Para determinarmos essa distribuição que produz a nova métrica, devemos calcular o tensor de Einstein para esse espaço-tempo. A partir das equações de Einstein podemos então determinar o tensor energia-momento da distribuição:

$$T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

que, para a métrica com as novas funções, tem as seguintes componentes tensoriais não-nulas:

$$T_0^0 = \frac{1}{e^{2\Lambda}} [2(\Lambda_{,rr} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r} + \Lambda_{,zz}) + (\Lambda_{,z})^2 + (\Lambda_{,r})^2], \quad (2.32)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{e^{2\Lambda}} [\Lambda_{,rr} + \Lambda_{,zz} + \Phi_{,rr} + \Phi_{,zz} + (\Phi_{,r})^2 + (\Phi_{,z})^2], \quad (2.33)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{e^{2\Lambda}} [2\Phi_{,r}\Lambda_{,r} + (\Lambda_{,r})^2 + \frac{1}{r}\Lambda_{,r} + \Lambda_{,zz} + (\Phi_{,z})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \Phi_{,zz}] \quad (2.34)$$

E:

$$T_3^3 = \frac{1}{e^{2\Lambda}} [2\Phi_{,z}\Lambda_{,z} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r} + \Lambda_{,rr} + (\Lambda_{,z})^2 + (\Phi_{,r})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \Phi_{,rr}]. \quad (2.35)$$

As definições (2.29) e (2.30) nos dão as seguintes relações:

$$\Phi_{,z} = h'\Phi_{,h}^{(0)}, \quad (2.36)$$

$$\Phi_{,zz} = h''\Phi_{,h}^{(0)} + (h')^2\Phi_{,hh}^{(0)}, \quad (2.37)$$

$$\Lambda_{,z} = h'\Lambda_{,h}^{(0)}, \quad (2.38)$$

E:

$$\Lambda_{,zz} = h''\Lambda_{,h}^{(0)} + (h')^2\Lambda_{,hh}^{(0)}. \quad (2.39)$$

Ao aplicarmos estas relações nas componentes não nulas do tensor energia-momento, obtemos:

$$T_0^0 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} \left[2(\Lambda_{,rr}^{(0)} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + h''\Lambda_{,h}^{(0)} + (h')^2\Lambda_{,hh}^{(0)}) + (h'\Lambda_{,h}^{(0)})^2 + (\Lambda_{,r}^{(0)})^2 \right], \quad (2.40)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} \left[\Lambda_{,rr}^{(0)} + h''\Lambda_{,h}^{(0)} + (h')^2\Lambda_{,hh}^{(0)} + \Phi_{,rr}^{(0)} + h''\Phi_{,h}^{(0)} + (h')^2\Phi_{,hh}^{(0)} + (\Phi_{,r}^{(0)})^2 + (h'\Phi_{,h}^{(0)})^2 \right], \quad (2.41)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} \left[2\Phi_{,r}^{(0)}\Lambda_{,r}^{(0)} + (\Lambda_{,r}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + h''\Lambda_{,h}^{(0)} + (h')^2\Lambda_{,hh}^{(0)} + (\Phi_{,z}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r}^{(0)} + h''\Phi_{,h}^{(0)} + (h')^2\Phi_{,hh}^{(0)} \right] \quad (2.42)$$

E:

$$T_3^3 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} \left[2(h')^2\Phi_{,h}^{(0)}\Lambda_{,h}^{(0)} + \frac{1}{r}\Lambda_{,r}^{(0)} + \Lambda_{,rr}^{(0)} + (h'\Lambda_{,h}^{(0)})^2 + (\Phi_{,r}^{(0)})^2 + \frac{1}{r}\Phi_{,r}^{(0)} + \Phi_{,rr}^{(0)} \right], \quad (2.43)$$

onde $\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)}(r, z')$ e $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(r, z')$.

Lembrando que $\Lambda^{(0)}$ e $\Phi^{(0)}$ também satisfazem às equações de Einstein no vácuo, (2.24) a (2.28) para as coordenadas (r, z') , obtemos o seguinte resultado:

$$T_0^0 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} [((h')^2 - 1)(2\Lambda_{,hh}^{(0)} + (\Lambda_{,h}^{(0)})^2) + 2h''\Lambda_{,h}^{(0)}], \quad (2.44)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} [h''(\Lambda_{,h}^{(0)} + \Phi_{,h}^{(0)}) + ((h')^2 - 1)(\Lambda_{,hh}^{(0)} + \Phi_{,hh}^{(0)} + (\Phi_{,h}^{(0)})^2)], \quad (2.45)$$

$$T_2^2 = T_1^1 \quad (2.46)$$

E:

$$T_3^3 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} [((h')^2 - 1)(2\Phi_{,h}^{(0)}\Lambda_{,h}^{(0)} + (\Lambda_{,h}^{(0)})^2)]. \quad (2.47)$$

Vemos que estas são equações bem abrangentes, porque dependem de $h(z)$ e das funções originais $\Lambda^{(0)}$ e $\Phi^{(0)}$. Ajustando essas funções, o disco obtido pode apresentar diversas características, inclusive, como mostra González e Letelier [1], é possível encontrar soluções para discos espessos. No entanto, aqui, estamos interessados nos discos finos.

Para obtenção de discos finos, assim como no caso Newtoniano, tomaremos $h(z) = |z|$. Logo, as equações acima para esta situação se reduzem a:

$$T_0^0 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} [4\delta(z)\Lambda_{,h}^{(0)}], \quad (2.48)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{e^{2\Lambda^{(0)}}} [2\delta(z)(\Lambda_{,h}^{(0)} + \Phi_{,h}^{(0)})], \quad (2.49)$$

$$T_2^2 = T_1^1 \quad (2.50)$$

E:

$$T_3^3 = 0. \quad (2.51)$$

Agora, vamos considerar um caso concreto. Usaremos a solução de Schwarzschild nas coordenadas cilíndricas isotrópicas [1]:

$$\Phi^{(0)}(r, z) = \ln \left[\frac{2(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - m}{2(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + m} \right], \quad (2.52)$$

$$\Lambda^{(0)}(r, z) = \ln \left[1 + \frac{m}{2(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2. \quad (2.53)$$

Aplicando mais uma vez o método de “deslocar, cortar e refletir” temos:

$$\Phi^{(0)}(r, z') = \ln \left[\frac{2(r^2 + (h(z) + c)^2)^{\frac{1}{2}} - m}{2(r^2 + (h(z) + c)^2)^{\frac{1}{2}} + m} \right], \quad (2.54)$$

$$\Lambda^{(0)}(r, z') = \ln \left[1 + \frac{m}{2(r^2 + (h(z) + c)^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2. \quad (2.55)$$

Portanto, das equações (2.48) a (2.51):

$$T_0^0 = \frac{128m(r^2 + c^2)c}{[2(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} + m]^5} \delta(z), \quad (2.56)$$

$$T_1^1 = \frac{64(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}c}{(2(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} + m)^5} \left[-\frac{m}{(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} + m}{2(r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} - m} + 1 \right] \delta(z), \quad (2.57)$$

$$T_2^2 = T_1^1 \quad (2.58)$$

E:

$$T_3^3 = 0. \quad (2.59)$$

As equações (2.56) a (2.59) nos informam a distribuição de matéria por 3-volume do disco. Mas, como a distribuição está concentrada na superfície $z = 0$, podemos caracterizá-la por meio da distribuição superficial. Para isto, devemos integrar o tensor $T_{\mu\nu}$ na direção transversal a superfície. Sendo assim, a distribuição de energia e momento sobre a superfície será descrita pelo tensor $S_{\mu\nu}$ definido abaixo:

$$S_{\mu\nu} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{-\ell}^{+\ell} T_{\mu\nu} dn, \quad (2.60)$$

onde $dn = (g_{zz})^{1/2} dz$ é o comprimento de um deslocamento infinitesimal na direção transversal.

Tomando a densidade superficial como $\sigma = -S_0^0$, então:

$$\sigma = \frac{32mc}{[2(r^2 + c^2)^{1/2} + m]^3}, \quad (2.61)$$

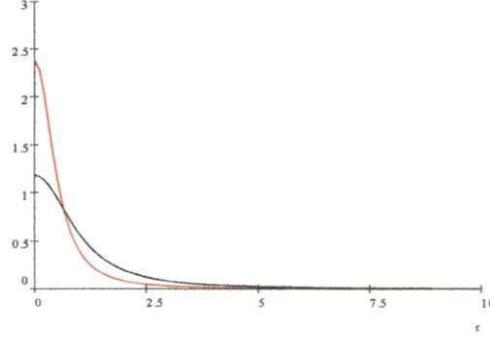


Figura 2.3: Densidade superficial com relação a coordenada radial r . Em vermelho, quando $m = c = 0,5$, e em preto, quando $m = c = 1$.

Por sua vez, calculando $p_\varphi = S_1^1, p_r = S_2^2$, podemos verificar que as pressões superficiais são:

$$p = p_\varphi = p_r = \frac{16mc}{\left[2(r^2 + c^2)^{1/2} + m\right]^2} \left[\frac{2(r^2 + c^2)^{1/2}}{\left[4(r^2 + c^2) - m\right]^2} - \frac{(r^2 + c^2)^{-1}}{\left[2(r^2 + c^2)^{1/2} + m\right]} \right], \quad (2.62)$$

ou seja, trata-se de um fluido com pressão isotrópica.

Por sua vez, de $p_z = S_3^3$, temos:

$$p_z = 0. \quad (2.63)$$

Este resultado é consistente com o fato da matéria estar confinada ao disco.

Na figura (2.3), observamos que a densidade superficial tende a zero, a medida que r cresce, o que já era de se esperar, devido a concentração de matéria na região central do disco.

Como foi exposto, a função $h(z)$ é, em princípio, arbitrária. Cada função $h(z)$ escolhida estabelece uma solução particular que corresponderá a discos com características diferentes. Os discos finos obtidos em tal método são de interesse físico, porque podem ser usados como modelos idealizados para representar estruturas como galáxias. Uma outra aplicação possível, como veremos, é que em um espaço-tempo com uma dimensão extra não-compacta, este tipo de disco poderá representar uma estrutura quadridimensional sem

espessura imersa em um espaço-tempo de dimensão maior.

Esta estrutura é chamada de brana, e corresponde, por exemplo, a uma idealização de uma parede de domínios, estudada na teoria de campos, com espessura nula. Esta comparação nos permitirá encontrar propriedades físicas importantes da brana, como veremos mais adiante.

Capítulo 3

Modelos de Dimensões Extras

No início do século passado, os físicos buscavam uma forma de unificar as forças fundamentais até então conhecidas: a força gravitacional e a força eletromagnética. Uma proposta de grande repercussão foi lançada pelo matemático e físico alemão Theodor Kaluza por volta de 1921 [6].

Kaluza mostrou que a unificação das teorias eletromagnética e da Relatividade Geral seria possível se o Universo possuísse uma dimensão espacial a mais, além das três até então conhecidas. Este modelo foi aperfeiçoado posteriormente pelo matemático Oscar Klein, que explicou em bases físicas a aparência quadridimensional do Universo, mesmo ele tendo cinco dimensões. De acordo com Klein, isso acontecia porque a dimensão extra tinha topologia de um círculo e o raio deste círculo era da ordem do comprimento de Planck, o que impossibilitava a detecção da dimensão extra.

O modelo de Kaluza-Klein durante várias décadas foi usado para o propósito a que se destinava, mas, posteriormente, outras duas forças fundamentais (a força forte e a força fraca) foram descobertas e o modelo precisou ser generalizado para incluir as novas forças no esquema de unificação. Apesar do sucesso formal do modelo, há algumas limitações. Uma delas, que tem recebido grande destaque recentemente, é a incapacidade do modelo em explicar porque a força gravitacional é tão fraca, se comparada as outras forças, problema este chamado de “problema da hierarquia”.

Assim, visando resolver este problema, um novo modelo de dimensões extras

surgiu, chamado de modelo ADD, devido as iniciais dos seus criadores: Arkani, Dimopoulos e Dvali. Nesse modelo, a dimensão extra não precisaria ter comprimento necessariamente da ordem de Planck, pois seu comprimento poderia chegar até a ordem milimétrica, sem conflitos com as observações. Mas, para isto, o nosso Universo quadrimensional deveria estar imerso em um Universo de dimensão mais alta, como uma subvariedade imersa em uma variedade de dimensão superior.

Essa subvariedade, aprisionaria todas as forças fundamentais, exceto a gravitacional, que poderia então se espalhar para o espaço-ambiente (5-D), o que explicaria o fato da interação gravitacional em nosso Universo aparentemente quadrimensional ser tão fraca, se comparada as outras interações. No modelo ADD, a topologia da dimensão extra é compacta (topologia de um círculo, S^1), porém, são necessárias, no mínimo duas dimensões extras para garantir a consistência com os dados experimentais.

O modelo ADD foi bem aceito pelos pesquisadores em dimensões extras, devido à possibilidade de existência de dimensões extras de ordem milimétrica, mas foi o modelo posterior, proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum - o modelo RS - que ganhou mais destaque e despertou maior entusiasmo, pois nele, a existência de uma única dimensão extra não é incompatível com os resultados experimentais, além do mais, esta dimensão extra pode ser compacta, caso do primeiro modelo proposto por eles, o modelo RSI, ou pode não ser compacta, caso do segundo modelo, o modelo RSII.

Neste capítulo faremos uma breve revisão acerca dos modelos de dimensões extras, com especial atenção para o modelo RSII, que será o modelo usado no decorrer deste nosso trabalho.

3.1 O Modelo de Kaluza-Klein

Kaluza, em seu artigo de 1921, demonstrou que a unificação das teorias eletromagnética de Maxwell e da Relatividade Geral de Einstein seria possível caso admitíssemos a existência de uma dimensão espacial a mais no nosso Universo.

Essa dimensão extra, que chamaremos de z , juntamente com as dimensões usuais

formam um espaço-tempo com cinco dimensões (x^μ, z) com $\mu = 0, 1, 2, 3$. A métrica que representa esse espaço-tempo é a métrica g_{AB} ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$) que, segundo Kaluza, deve ser organizada da seguinte forma:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \kappa^2 \phi \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

com assinatura $(+ - - - -)$ e $c = \hbar = 1$, além de $\kappa = 8\pi G$.

Esta métrica pode, então, ser entendida como a composição de três campos: um referente à métrica usual $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), um 4-campo vetorial $g_{\mu z} = g_{z\mu}$ identificado como o potencial eletromagnético A_μ , e um campo escalar ϕ referente a componente g_{zz} .

Kaluza tinha por objetivo com o seu modelo unificar as teorias já citadas, mas ao introduzir uma dimensão extra ao espaço-tempo usual, fez-se necessário explicar também porque a dimensão extra está oculta, não sendo detectada experimentalmente. Assim, para resolver isto, ele admitiu que os campos não dependem da coordenada extra z [7], isto é, satisfazem à condição:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Segundo Kaluza, as equações de Einstein no vácuo, em cinco dimensões, possuem a mesma forma das equações no espaço quadrimensional. Assim, no vácuo:

$$G_{AB} = 0. \quad (3.3)$$

Aplicando (3.1) e (3.2) na equação acima, Kaluza obteve as equações de campo para a métrica $g_{\mu\nu}$, para o potencial eletromagnético A_μ e para o campo escalar ϕ . Quando o campo escalar é considerado constante, as equações de campo (3.3) reproduzem as equações de Einstein-Maxwell em quatro dimensões:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (3.4)$$

E:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Logo, o modelo de Kaluza mostrou-se eficaz na unificação dos campos por meio da introdução de uma dimensão extra espacial ao nosso Universo. Mesmo assim, ainda havia algo a ser explicado em bases físicas: o porque da Natureza ter aparência quadridimensional, como mostram as experiências. Em outras palavras, era necessário justificar a origem física da condição (3.2).

Isso foi explicado por Klein em 1926, o que fez com que o nome do modelo passasse ao que hoje conhecemos: modelo de Kaluza-Klein. Para Klein, a aparência quadridimensional da Natureza se devia ao fato da dimensão extra ter a topologia de um círculo (figura 3.1) com uma escala de comprimento muito pequena.

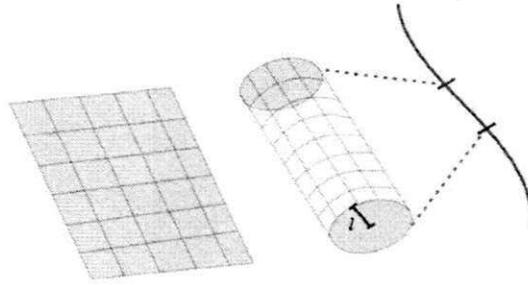


Figura 3.1: Esquemática do modelo de Kaluza-Klein, onde a dimensão extra tem topologia de um círculo com comprimento de raio l [8].

A topologia de um círculo faz com que todos os campos sejam periódicos com relação a dimensão extra. Logo, um campo escalar φ qualquer pode ser escrito em termos da dimensão extra, através de uma expansão de Fourier [8]:

$$\varphi(x^\mu, z) = \sum_n \varphi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \quad (3.6)$$

onde l é o raio da dimensão extra. Os campos $\varphi^{(n)}(x^\mu)$ são chamados de modos de Kaluza-Klein. Observemos que se apenas o modo zero for “excitado”, ou seja, for diferente de zero, então o campo φ se não relaciona com a dimensão extra.

Se admitirmos que o “cilindro” formado pelas dimensões espaciais é homogêneo

e que a métrica é plana, então é conveniente escrever:

$$\varphi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu)\alpha(z). \quad (3.7)$$

Em cinco dimensões a equação de Klein-Gordon para o campo escalar φ é:

$$\square_{(5)}\varphi = 0, \quad (3.8)$$

onde:

$$\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

é o operador D'Lambertiano em cinco dimensões.

Aplicando (3.7) em (3.8), vemos que a única forma de solucionar a equação obtida é admitir que ambas as partes da equação são iguais a uma constante e que a soma dessas constantes deve ser nula. Chamando essa constante de c , chegamos as seguintes equações:

$$\square\chi(x^\mu) = c\chi(x^\mu) \quad (3.10)$$

E:

$$\alpha(z) = A \sin(\sqrt{c}z) + B \cos(\sqrt{c}z). \quad (3.11)$$

Assim, aplicando a condição de periodicidade ao campo escalar, vemos que os valores permitidos para c são $c = n^2/l^2$. Através da equação (3.10), a constante c pode ser interpretada como a massa do campo quadridimensional $\varphi^{(n)}$, ou seja, $c = m^2$ e a esta massa são permitidos os valores $m_n = |n|/l$.

A massa do modo zero é nula, e como já vimos, se apenas este modo estiver excitado então o campo não dependerá da dimensão extra. No entanto, se outros modos KK forem excitados então o campo dependerá da dimensão extra. Cada modo KK pode ser considerado como uma partícula diferente, cuja massa e energia de repouso estão relacionadas com a dimensão extra, através de uma relação inversa com o seu raio l :

$$m_n = \frac{|n|}{l}. \quad (3.12)$$

Para excitarmos uma das partículas dos modos KK, é necessário uma energia mínima que corresponde a energia de repouso da partícula. Mas, sabemos que os experimentos físicos até então não detectaram nenhum tipo de partícula relacionadas a estes modos, o que fez Klein admitir que isso ainda não aconteceu porque a quantidade mínima de energia para o primeiro modo está muito acima da energia alcançada nos experimentos. Como a quantidade de energia é inversamente proporcional ao raio da dimensão extra, a única forma de explicar o porque de não se detectar as partículas correspondentes ao primeiro modo KK em nosso Universo observável foi admitir que o raio da dimensão extra é muito pequeno, da ordem do comprimento de Planck.

O comprimento de Planck é uma escala de comprimento na qual se espera que os efeitos quânticos da gravitação sejam significativos. Este comprimento é dado por:

$$l_p = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} m \quad (3.13)$$

Logo, ao admitir que o raio da dimensão extra é da ordem do comprimento de Planck, é notável que, para excitar o primeiro modo KK, isto é, o modo $n = 1$, que é o modo que exige a menor energia dentre todos os modos de Kaluza-Klein, seria necessário ainda uma energia grande demais, que está além das energias alcançadas nos experimentos atuais. Assim, a dimensão extra do modelo de Kaluza-Klein permanece oculta.

Com o avanço dos estudos sobre dimensões extras, surgiram outros modelos baseados no formalismo de imersão, conhecidos como modelos de branas. Nesses modelos, a dimensão extra pode ser compacta ou não, ou seja, pode possuir um comprimento finito ou ser considerada infinita, mas, mesmo sendo compacta, pode ter comprimento da ordem submilimétrica, portanto bem maior do que o comprimento de Planck. Para entender estes modelos faremos a seguir uma breve revisão.

3.2 Branas

De acordo com a Teoria de Campos é possível conceber mecanismos de confinamento da matéria em subvariedades do espaço. Um exemplo disto é o confinamento da matéria por uma parede de domínios. No cenário das dimensões extras, o que alguns modelos sugerem é que o nosso Universo quadrimensional tem as mesmas características de uma parede de domínios. Logo, toda a matéria que o constitui estaria confinada na parede e o espaço com a dimensão extra seria um ambiente maior, no qual nosso Universo estaria imerso como uma hipersuperfície (1+3)-D.

Vamos agora descrever com mais detalhes a parede de domínios. Considere um campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ definido no espaço maior. Admita que sua ação é dada por:

$$S = \int d^4 x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (3.14)$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é um potencial escalar. Vamos considerar que o potencial escalar é dado por:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (3.15)$$

que graficamente pode ser representado como na Figura (3.2):

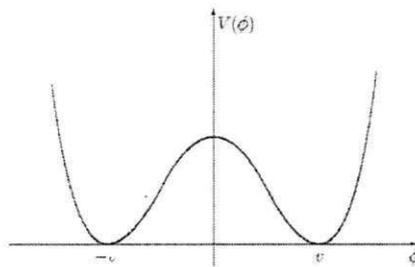


Figura 3.2: Comportamento do Potencial Escalar $V(\phi)$. Nota-se que o potencial possui dois pontos de mínimo em $\phi = \pm v$ e um máximo instável que localiza-se exatamente em $\phi = 0$ [8].

Vemos que existem dois pontos onde a energia é mínima, que correspondem aos pontos onde $\phi = v$ e $\phi = -v$, chamados de estados de vácuo e que existe um ponto de

máximo instável para a energia potencial, localizado em $\phi = 0$ [9]. Para entendermos o comportamento deste campo no espaço-tempo, usemos a equação de Euler-Lagrange em cinco dimensões:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \phi)} = 0. \quad (3.16)$$

Com a Lagrangiana apresentada em (3.14), a equação anterior pode ser escrita como:

$$\partial_z^2 \phi - \partial_\mu^2 \phi + \frac{\lambda^2}{2} \phi (\phi^2 - v^2) = 0. \quad (3.17)$$

Uma possível solução da equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\phi_0(z) = v \tanh \left(\frac{\lambda v z}{2} \right), \quad (3.18)$$

cujos comportamento em relação à dimensão extra é exibido na Figura (3.3):

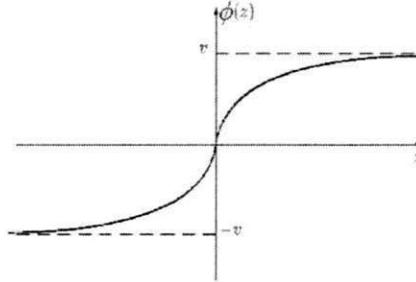


Figura 3.3: Comportamento do campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ com relação a dimensão extra z [8].

A partir do gráfico (3.3) vemos que em $z = 0$, $\phi(z)$ é nulo. Por sua vez para $z \rightarrow \pm\infty$, temos $\phi(z) \rightarrow \pm v$ e $V(\phi) \rightarrow 0$. Logo, podemos concluir que os dois estados de menor energia estão separados por uma região onde a energia potencial atinge o máximo, o que ocorre exatamente em $z = 0$.

É possível observar, que toda energia do campo encontra-se em torno dessa região, quando calculamos a densidade de energia. Sendo σ a densidade de energia por 3-volume e H_0 a densidade de hamiltoniana associada ao campo $\phi = \phi(x^\mu, z)$, temos:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0 dz, \quad (3.19)$$

onde:

$$H_0 = \frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (3.20)$$

Para a solução (3.18), por sua vez, temos:

$$H_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right)}, \quad (3.21)$$

que graficamente pode ser representado, como na Figura (3.4):

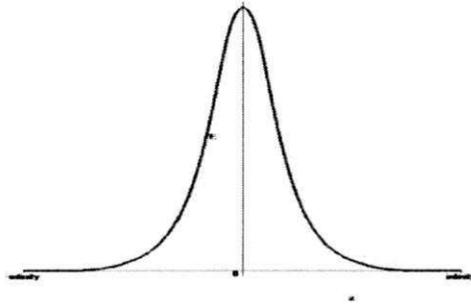


Figura 3.4: Gráfico da densidade de energia em função do campo ϕ . Vemos que a energia está concentrada na região do espaço correspondente a $z = 0$ [8].

A partir deste gráfico vemos que a solução (3.18) representa uma configuração do campo ϕ na qual a energia está concentrada numa região do espaço que corresponde a $z = 0$. Em pontos afastados dessa região, observamos que a energia tende a cair, até se anular. Isto nos permite concluir que na região onde $z = 0$ existe uma barreira de energia que separa os dois estados de vácuo ($\phi(z) = \pm \nu$). Por isso, a solução (3.18) é conhecida como parede de domínios.

Ao aplicarmos a equação (3.21) em (3.19) encontramos a densidade superficial dessa parede:

$$\sigma = \frac{2\lambda\nu^3}{3}. \quad (3.22)$$

É possível verificar que λ na equação (3.21) é um parâmetro relacionado ao inverso da largura do intervalo onde a energia está concentrada. Logo, quando $\lambda \rightarrow \infty$ temos uma concentração de energia intensa em torno de $z = 0$ e, neste caso, podemos dizer que a espessura da parede de domínios é nula. Neste limite, se a densidade σ é mantida constante, a parede sem espessura, localizada na hipersuperfície $z = 0$, é chamada de brana ou 3-brana (onde o número três indica as dimensões espaciais que formam a brana).

Vamos agora discutir o mecanismo de confinamento da matéria pela parede de domínios. Para isso partiremos da equação de movimento dos férmions em cinco dimensões, que é a equação de Dirac 5-D:

$$(i\Gamma^A \partial_A - M) \Psi = 0, \quad (3.23)$$

onde Γ^A são as matrizes de Dirac em cinco dimensões, que estão relacionadas com as matrizes de Dirac 4-D da seguinte forma:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (3.24)$$

E:

$$\Gamma^z = -i\gamma^5, \quad (3.25)$$

com:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}. \quad (3.26)$$

As matrizes Γ^A satisfazem a mesma álgebra das matrizes de Dirac em 4-D, ou seja:

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2g^{AB} 1. \quad (3.27)$$

Se admitirmos uma interação do tipo Yukawa entre o férmion e o campo escalar, então, a ação que descreve o férmion será dada por:

$$S = \int d^4x dz (i\Psi\Gamma^A\partial_A\Psi - M\Psi\Psi - h\phi_0\Psi\Psi). \quad (3.28)$$

A partir da ação acima, podemos encontrar equações de movimento para férmions com ou sem massa. No caso de um férmion de massa nula, $M = 0$, a equação de movimento é dada por:

$$i\Gamma^z\partial_z\Psi + i\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi - h\phi_0\Psi = 0. \quad (3.29)$$

Assim como no caso do modelo de Kaluza-Klein, usaremos aqui o método de separação de variáveis, admitindo que, neste caso, $\Psi = \psi(x)f(z)$ onde $\psi(x)$ é o espinor de Dirac em 4-D.

Aplicando o método de separação de variáveis, chegamos a:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 \quad (3.30)$$

e

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0)f(z), \quad (3.31)$$

se admitirmos que o espinor 4D tem quiralidade bem definida ($\Gamma^z\Psi_\pm = \pm\Psi_\pm$). Da equação (3.30), vemos que a constante de separação m funciona como a massa do spinor em 4-D [10, 11]. É possível mostrar que existem soluções para férmions com massa nula (modo zero) e com massa não-nula [9].

No caso do modo zero ($m = 0$), a equação (3.31) tem a seguinte solução:

$$f(z) = \exp\left(-h\int_0^z\phi_0(z)dz\right), \quad (3.32)$$

onde $\phi_0(z)$ é a solução da parede de domínios dada em (3.18). Neste caso, a função de onda que descreve os férmions no modo zero será:

$$\Psi_0 = \exp\left(-\int_0^zh\phi_0(z)dz\right)\psi(x), \quad (3.33)$$

onde ψ é um espinor 4D sem massa que satisfaz à equação de Dirac usual (3.30) e com quiralidade bem definida [8].

Como $f(z)$ tende a zero no infinito, então, de acordo com (3.33), podemos verificar que o modo zero fermiônico está localizado próximo de $z = 0$ e que, se o $|z|$ é muito grande, então o modo zero cai exponencialmente ao longo desta direção.

Em relação a outros modos, podemos dizer que, assim como no modelo de Kaluza-Klein, férmions com massa diferente de zero estão inacessíveis experimentalmente porque a energia necessária para sua observação ainda não foi alcançada nos experimentos atuais. Apenas as partículas do modo zero estão acessíveis e, de acordo com as equações acima, estas partículas estão confinadas no centro da parede de domínios, que chamaremos a partir de então de brana.

No estudo das dimensões extras, alguns modelos consideram o nosso Universo quadrimensional como uma brana, que se encontra imersa em um espaço de dimensão mais alta, denominado espaço ambiente. Estes modelos serão estudados nas seções subsequentes.

3.3 O Modelo ADD

Este modelo surgiu no intuito de explicar porque a força gravitacional é tão fraca se comparada com as demais forças fundamentais (problema da hierarquia). Criado por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Georgi Dvali, o modelo indica que isto acontece porque o campo gravitacional é o único que não está aprisionado na brana, se propagando também no espaço ambiente, o que o torna fraco no nosso Universo com três dimensões espaciais. Apesar disto, em virtude da topologia compacta da dimensão extra, o campo gravitacional recupera o comportamento quadrimensional para longas distâncias.

Para entendermos isso, vamos estudar dentro do cenário da teoria Newtoniana, o comportamento do campo gravitacional no espaço ambiente de cinco dimensões [8], recuperando a partir dele, o comportamento quadrimensional para longas distâncias na brana.

Se o espaço tivesse topologia \mathbb{R}^4 , então, o campo produzido por uma massa puntiforme seria:

$$\phi(R) = -\frac{G^{(5)}m}{R^2}. \quad (3.34)$$

No entanto, como a dimensão extra tem topologia de um círculo (S^1), então, o espaço ambiente tem a topologia de um “cilindro” ($\mathbb{R}^3 \times S^1$). Sendo assim, podemos pensar que várias linhas de força do campo gravitacional que se originam na massa m dão voltas em torno do cilindro e terminam atingindo o observador.

Isso faz com que o observador perceba mais de uma massa pontual ao longo da dimensão extra. Estas massas vistas pelo observador se distanciam umas das outras num intervalo de $2\pi l$, que é exatamente o comprimento da dimensão extra. Por serem imagens da massa real geradas pela topologia do espaço, então, elas são chamadas de imagens topológicas. Ao afastar-se, o observador passa a vê-las como uma distribuição contínua de massa ao longo da dimensão extra. Com o uso da Lei de Gauss, é possível obter o potencial gravitacional para grandes distâncias se comparadas com o raio da dimensão extra, que é, então, dado por [8]:

$$\phi(R) = -\left(\frac{G^{(5)}m}{2\pi l}\right) \frac{1}{R}. \quad (3.35)$$

Considerando $G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi l}$, chegamos ao potencial gravitacional em um espaço quadridimensional:

$$\phi(R) = -4\pi \frac{G^{(4)}m}{R}. \quad (3.36)$$

Como o modelo ADD é um modelo do tipo brana, já sabemos o motivo físico para não observarmos a dimensão extra nos experimentos envolvendo a matéria e os outros campos. De acordo com o que vimos no estudo das branas, isso não se deve ao comprimento da dimensão extra, e sim ao confinamento da matéria na brana. Logo, é possível que esta dimensão tenha um comprimento maior que o comprimento de Planck, e mesmo assim permaneça oculta. É necessário ajustar l , apenas para justificar a ausência de traços da dimensão extra no campo gravitacional, que só agora está sendo testado no domínio submilimétrico [12].

Para um espaço com η dimensões, o comprimento de Planck $l_P^{(\eta)}$ é dado por [8]:

$$\left(l_P^{(\eta)}\right)^{\eta-2} = \frac{G^{(\eta)}\hbar}{c^3} = l_P^2 \frac{G^{(\eta)}}{G}. \quad (3.37)$$

Admitindo na equação anterior que a dimensão extra possui um comprimento l_c , então, no caso mais simples de uma única dimensão extra, temos a seguinte relação:

$$\frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = l_c, \quad (3.38)$$

que pode ser generalizada para:

$$\frac{G^{(\eta)}}{G^{(4)}} = (l_c)^{\eta-4}. \quad (3.39)$$

Das equações (3.38) e (3.39) podemos escrever o comprimento da dimensão extra em função do comprimento de Planck quadridimensional. Logo:

$$l_c = l_P^{(\eta)} \left(\frac{l_P^{(\eta)}}{l_P}\right)^{\frac{2}{\eta-4}}. \quad (3.40)$$

O modelo ADD, além de explicar a aparência quadridimensional do Universo devido a existência da brana, propõe também, como já mencionamos, uma solução para o problema de hierarquia, que seria resolvido se admitíssemos que o comprimento de Planck, em η dimensões, $l_P^{(\eta)}$, deve ser da ordem da escala eletro-fraca, ou seja, $l_P^{(\eta)} = 10^{-18}m$. Sendo assim, o comprimento da dimensão extra estaria relacionado ao número de dimensões do espaço e de acordo com (3.40), teríamos $l_c = 10^{-18}(10^{15})^{\frac{2}{\eta-4}}$. Assim, para um Universo com uma dimensão extra ($\eta = 5$) é possível observar que o comprimento da dimensão extra é tão grande, $l_c \sim 10^{12}m$, que a mesma já deveria ter sido observada. Logo, para que não haja conflitos com os resultados experimentais, é necessário a existência de, pelo menos, duas dimensões extras ($\eta = 6$). Neste caso, cada uma destas dimensões teria um comprimento da ordem submilimétrica, portanto, no limite dos testes já feitos [8].

3.4 O Modelo RSI

Assim como o modelo ADD, o modelo proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum, chamado de modelo RS, também é um modelo de brana, ou seja, é um modelo de imersão onde nosso Universo 4-D é uma subvariedade imersa em um espaço ambiente de dimensão mais alta. Mas, a principal diferença entre eles está no fato de que o modelo RS admite a possibilidade da existência de apenas uma dimensão extra sem contradição com os resultados experimentais.

No primeiro modelo proposto por Randall e Sundrum, denominado modelo RSI, a dimensão extra é compacta e tem comprimento z_c . Neste modelos há duas branas, uma com densidade de energia por 3-volume positiva localizada em $z = 0$ e outra com densidade de energia por 3-volume negativa localizada em $z = z_c$. Essa densidade de energia por 3-volume é denominada tensão da brana.

Nesse modelo a dimensão extra tem topologia de um espaço S^1/Z_2 . Sendo θ pertencente ao intervalo $[-\pi, \pi]$, a coordenada que rotula os pontos do círculo S^1 , então, com a topologia S^1/Z_2 , θ e $-\theta$ são identificados. Admitimos que as branas estão localizadas nos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, ou seja, nos pontos fixos da operação ($\theta \rightarrow -\theta$).

A métrica do modelo RS possui a forma:

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (3.41)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski quadridimensional e $a(z)$ é o fator de deformação ou “warping factor” que, por sua vez, é dado por $a(z) = e^{-\kappa|z|}$. Determinaremos κ usando as equações de Einstein.

Sabendo que as equações de Einstein são dadas por:

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} = 8\pi G^{(5)}T_{AB}, \quad (3.42)$$

onde T_{AB} descreve o conteúdo energético das branas.

O fato da energia da brana não fluir para o espaço ambiente e estar concentrada nas próprias branas implica respectivamente as seguintes condições [8]:

$$T_{Az} = 0 \quad (3.43)$$

E:

$$T_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu} \delta(z - z_c). \quad (3.44)$$

Calculando o lado esquerdo da equação (3.42) para a métrica (3.41), encontramos as seguintes equações:

$$\left[-3 \left(\frac{a_{,z}}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a_{,zz}}{a} \right) \right] = 8\pi G^{(5)} [\sigma \delta(z) - \sigma \delta(z - z_c)] + \Lambda \quad (3.45)$$

E:

$$\left[-6 \left(\frac{a_{,z}}{a} \right)^2 \right] = \Lambda. \quad (3.46)$$

Lembrando que $a(z) = e^{-\kappa|z|}$, podemos verificar que, no intervalo $0 < z < z_c$, as equações (3.45) e (3.46), serão satisfeitas se a condição abaixo for válida:

$$\Lambda = -6\kappa^2. \quad (3.47)$$

Segue então de (3.47), que a constante cosmológica deve ser negativa. Esta é uma característica marcante do modelo RS.

Devemos lembrar ainda que, ao estudarmos a brana, também devemos considerar a influência da matéria nela existente e o campo gravitacional que ela produz. Como veremos, apesar da existência da dimensão extra, o campo gravitacional na brana recupera o comportamento quadridimensional para longas distâncias.

A presença da matéria confinada na brana resultará em uma perturbação da métrica. Assim, a métrica (3.41) pode ser escrita como [13]:

$$ds^2 = [a^2(z) \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (3.48)$$

onde $h_{\mu\nu}(x, z)$ é o termo da perturbação que deve obedecer à condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Se T_{AB}^{mat} descreve a distribuição da matéria confinada na brana, então, agora as equações de Einstein terão a seguinte forma:

$$G_{AB} = 8\pi G^{(5)} T_{AB}^{mat} + 8\pi G^{(5)} T_{AB}^{brana} - \Lambda g_{AB} \quad (3.49)$$

Aplicando (3.45) e (3.46), temos:

$$\frac{1}{2} a^{-2} (z) [h_{\nu, \sigma, \mu}^{\mu} + h_{\sigma, \rho, \nu}^{\rho} - \eta^{\mu\rho} h_{\sigma, \nu, \rho, \mu} - h_{\mu, \sigma, \nu}^{\mu}] + \frac{1}{2} h_{\sigma\nu}'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a, z}{a} \right) h_{\mu}^{\prime\mu} - \left(\frac{a, z}{a} \right)^2 h_{\mu}^{\mu} \right] \eta_{\sigma\nu} \quad (3.50)$$

$$+ 2\kappa [\delta(z) - \delta(z - z_c)] h_{\sigma\nu} - 2\kappa^2 h_{\sigma\nu} = 8\pi 8\pi G^{(5)} \delta(z) \left(T_{\sigma\nu}^{mat} - \frac{1}{3} T_{\alpha}^{\alpha(mat)} \eta_{\sigma\nu} \right)$$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} (h_{\nu, \mu}^{\nu} - h_{\mu, \rho}^{\rho}) + \left(\frac{a, z}{a^3} \right) (h_{\nu, \mu}^{\nu} - h_{\mu, \nu}^{\nu}) = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{2} a^{-2} h_{\mu}^{\prime\prime\mu} + \frac{a, z}{a^3} h_{\mu}^{\prime\mu} + \left[\frac{a, zz}{a^3} - \left(\frac{a, z}{a^2} \right)^2 \right] h_{\mu}^{\mu} = \frac{8\pi G^{(5)} a^2}{3} \delta(z) T^{mat}. \quad (3.52)$$

Vamos nos concentrar na solução destas equações na região fora da matéria, onde, $T_{AB}^{mat} = 0$.

Escolhendo um sistema de coordenadas onde $\partial_{\mu} h_{\nu}^{\mu} = h_{\mu}^{\mu} = 0$, então imediatamente as equações (3.51) e (3.52) são satisfeitas. Já a equação (3.50), no intervalo entre $0 < z < z_c$, se reduz à seguinte forma:

$$h_{\sigma\nu}'' - 4\kappa^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^{\mu} \partial_{\mu} h_{\sigma\nu} = 0. \quad (3.53)$$

Admitindo-se ainda que a métrica é contínua na brana e que os campos são simétricos com relação à brana, então, nos limites em que $z = 0$ e $z = z_c$, segue da equação (3.50) as seguintes condições, respectivamente:

$$\left(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu}\right)|_{z=0} = 0 \quad (3.54)$$

E:

$$\left(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu}\right)|_{z=z_c} = 0. \quad (3.55)$$

As equações acima podem ser entendidas como condições de contorno para o campo $h_{\sigma\nu}$.

Para solucionarmos a equação (3.53), também usaremos o método de separação de variáveis. Fazendo:

$$h_{\sigma\nu}(x, z) = \Psi(z) \Phi_{\sigma\nu}(x) \quad (3.56)$$

e aplicando na equação (3.53), obtemos:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + C\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0 \quad (3.57)$$

E:

$$\Psi_{,zz(m)}(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{C}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0, \quad (3.58)$$

onde C é uma constante de separação não-negativa que pode ser escrita como $C = m^2$ [13]. Logo:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0 \quad (3.59)$$

E:

$$\Psi_{(m),zz}(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0. \quad (3.60)$$

A equação (3.59), então, ganha a forma de uma equação de Klein-Gordon para um campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ de massa m . Esse campo pode ser interpretado como um campo de

um “gráviton” (partícula responsável pelas interações gravitacionais) de massa m , já que é oriundo de uma perturbação linear da métrica [8].

Cada valor de m indica um modo possível para o campo, o que nos leva a interpretar os modos para os grávitons como espécies de modos KK. Aplicando as condições de contorno (3.54) e (3.55) na equação (3.60), para o caso $m = 0$, obtemos a seguinte solução:

$$\Psi_0 = C_0 e^{-2\kappa|z|}. \quad (3.61)$$

Esta solução é chamada de modo zero dos grávitons. Os outros modos, por sua vez, para serem encontrados, nos exigem uma mudança de coordenadas na equação (3.60), que corresponde a fazermos $x = me^{\kappa|z|}$. Podemos verificar que a solução para a equação (3.60) fica:

$$\Psi_{(m)}(z) = AJ_2\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right) + BN_2\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right), \quad (3.62)$$

onde J_2 e N_2 são funções de Bessel de ordem 2, de primeira espécie e de segunda espécie, respectivamente. Aplicando a condição de contorno (3.54) na equação acima, obtemos:

$$\Psi(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right) \right], \quad (3.63)$$

onde C_m é uma constante de normalização.

Para a condição de contorno (3.55), por sua vez, implica o seguinte vínculo:

$$\frac{J_1\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right)} = \frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}. \quad (3.64)$$

Esta equação nos permite obter o espectro de massa dos grávitons, lembrando que o modo zero também é uma solução. O primeiro modo com massa permitido, quando admitimos que $m \ll \kappa$, será a raiz da função:

$$J_1\left(\frac{me^{\kappa z}}{\kappa}\right) \simeq 0. \quad (3.65)$$

Segue, então, que:

$$\frac{me^{\kappa z_c}}{\kappa} \simeq cte, \quad (3.66)$$

onde para as primeiras raízes, a constante é da ordem de 1. Logo:

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c}. \quad (3.67)$$

Deste resultado é possível concluir, que a massa dos grávitons depende do comprimento da dimensão extra e de $\kappa = \sqrt{-\Lambda/6}$. Se admitirmos que $z_c \sim 1/\kappa$ e que κ é muito grande então o primeiro modo dos grávitons exigirá uma energia muito alta para a sua detecção por um observador na brana. Isso explicaria a razão da ausência dos grávitons massivos nos experimentos realizados atualmente, já que estes experimentos não estão na escala de energia necessária para excitá-los.

3.5 O Modelo RSII

No segundo modelo de Randall-Sundrum (RSII), a brana com tensão negativa é removida, o que torna a dimensão extra infinita. A princípio seria razoável acreditar que isto representaria um problema fenomenológico para o modelo RS, afinal de contas, como vimos na seção anterior, as condições de contorno (3.54) e (3.55) são fundamentais para explicar a relação entre a massa dos grávitons e a dimensão extra, e agora, sem a segunda brana o espectro de massa seria contínuo. Portanto, a influência dos modos KK mais leves sobre o campo gravitacional já deveria ter sido detectada.

No entanto, Randall e Sundrum mostraram que, por causa da curvatura do espaço ambiente provocada pela constante cosmológica negativa, esse problema não acontece. Isto pode ser verificado diretamente determinando-se a função de Green da equação (3.50). De fato, sobre a brana, temos [8]:

$$G(R) = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2 R^2} \right] \quad (3.68)$$

Portanto, se considerarmos $kG_5 = G_4$ e se κ for suficientemente grande, então, para longas distâncias na brana, o potencial quadrimensional é recuperado.

Usando este resultado, é possível mostrar que a métrica gerada por um corpo com simetria esférica confinado na brana e de massa M é dado por [14]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G^{(4)}M}{r} - \frac{4G^{(4)}M}{3\kappa^2 r^3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2G^{(4)}M}{r} - \frac{3G^{(4)}M}{3\kappa^2 r^2}\right)} - r^2 d\Omega^2 \quad (3.69)$$

ou seja, uma correção da métrica de Schwarzschild.

O modelo RSII se destaca dos outros modelos de dimensões extras, pela possibilidade de existência de uma dimensão extra não-compacta. Essa característica inusitada desperta o interesse de muitos, e tem motivado inúmeros estudos acerca das soluções das equações de Einstein nesse modelo, em especial, soluções referentes a buracos negros resultantes de colapsos gravitacionais na brana. Apesar da grande quantidade de pesquisas no modelo RSII, soluções exatas de buracos negros na brana ainda não foram encontradas, em razão da complexidade das equações.

A única solução já encontrada, chamada de “black string” não possui as características de um buraco negro resultante de um colapso gravitacional na brana, pois o horizonte de eventos do black string se estende indefinidamente para além da brana na direção da dimensão extra, quando o esperado seria que o horizonte estivesse nas proximidades da brana.

Esta solução do black string foi obtida por Chamblin et al [15]. Segundo eles o elemento de linha ds entre dois pontos do espaço ambiente é dado por:

$$ds^2 = a^2(z) \left[- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] + dz^2, \quad (3.70)$$

onde $a^2(z)$ é o fator de deformação do espaço, também chamado de “warp factor”. A partir desta equação fica evidente que o horizonte de eventos se estende em todo o intervalo $-\infty \leq z \leq +\infty$.

Um outro problema desta solução é o limite de campo fraco. Vemos que a solução (3.70) não reproduz (3.69) para longas distâncias.

Por estes motivos, a solução exata para corpos na brana RSII, ou buracos negros, ainda permanece em aberto. Tal fato também nos motiva a investigar métodos que possibilitem a obtenção de soluções exatas das equações de Einstein, para esse modelo, como veremos nos próximos capítulos.

Capítulo 4

O Método de “deslocar, cortar e refletir” em cinco dimensões

Até agora vimos que o estudo de discos na Relatividade Geral nos fornece propriedades físicas de estruturas como galáxias, pois as mesmas podem ser idealizadas como discos de matéria com simetria axial. Posteriormente, vimos que o estudo de dimensões extras possibilita a resolução de alguns problemas físicos importantes, como, por exemplo, a unificação de forças fundamentais e o problema da hierarquia, sem que haja prejuízo para as teorias físicas já estabelecidas, que explicam o comportamento do nosso Universo quadrimensional. Um dos modelos de dimensões extras mais discutidos hoje em dia é o modelo RSII, pois é um modelo de imersão que consegue explicar a aparência quadrimensional do nosso Universo (brana), exigindo apenas uma dimensão extra não-compacta em um espaço-tempo com constante cosmológica negativa.

Apesar do grande interesse científico despertado pelo modelo RSII, há problemas fisicamente relevantes ainda em aberto. Sabe-se, por exemplo, que ainda não foi encontrada uma solução satisfatória para buracos negros imersos em branas [16]. Na verdade, existe uma solução exata conhecida que possui características de buraco negro na brana. Como vimos no capítulo anterior, esta solução é conhecida como black string [15]. No entanto, esta solução não é considerada satisfatória do ponto de vista físico, pois o horizonte de eventos do black string se estende indefinidamente da brana para o espaço ambiente. No

entanto, é razoável esperar que o horizonte de eventos esteja localizado em torno da brana, já que a matéria que sofreu o colapso gravitacional se encontra confinada na brana, como já discutido no capítulo precedente.

O fato da métrica do black string apresentar resultados que não são fisicamente aceitáveis, nos motiva a buscar novos métodos na tentativa de encontrar outras soluções para corpos com massa na brana mais satisfatórias. Aqui pretendemos empregar o método de “deslocar, cortar e refletir” ao modelo RSII. Na prática isso equivale a partirmos de uma métrica que represente um espaço-tempo em 5-D com constante cosmológica negativa e por meio de transformações convenientes, obtermos uma nova métrica que descreva um espaço-tempo produzido por uma determinada distribuição de matéria confinada na brana.

Assim, nosso objetivo neste capítulo é aplicar o método de construção de discos ao modelo RSII de dimensão extra. Como veremos, inicialmente, se tomarmos o espaço AdS_5 como base, o disco criado de acordo com o método coincidirá com a própria brana do modelo RSII. Por sua vez, quando o espaço base é Schwarzschild- AdS_5 , obteremos uma solução exata no modelo RSII, que contém não só a brana, mas também, uma distribuição de matéria confinada na brana. Esta distribuição apresenta simetria esférica e poderia descrever uma estrela na brana, dentro do modelo RSII.

4.1 Espaço-tempo AdS_5

A métrica de um espaço-tempo em cinco dimensões, estática e com simetria axial pode ser colocada na chamada forma de Weyl [17]:

$$ds^2 = -e^{2\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0} dt^2 + e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0} \left\{ \alpha_0^{-\frac{1}{2}} e^{2\Psi_0} (dr^2 + dz^2) + \alpha_0 d\Omega^2 \right\}, \quad (4.1)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e $\Phi_0 = \Phi_0(r, z)$, $\alpha_0 = \alpha_0(r, z)$, $\Psi_0 = \Psi_0(r, z)$ são as nossas soluções originais que, por sua vez, serão transformadas posteriormente com o uso do método de “deslocar, cortar e refletir”, a fim de construir um disco situado em $z = 0$,

onde z é a dimensão extra.

Lembremos que no modelo RSII, o espaço-tempo 5-D possui uma constante cosmológica Λ negativa. Logo as equações de campo serão as equações de Einstein com constante cosmológica. Dessa forma, a métrica (4.1) satisfaz às seguintes equações para o vácuo [17]:

$$\Delta\alpha_0 = -2(\Lambda\alpha_0 B^2 - \alpha_0 F), \quad (4.2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\Delta\Phi_0 + \nabla\Phi_0 \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} \right) = -\frac{2\Lambda B^2}{3}, \quad (4.3)$$

$$\Delta\Psi_0 + \frac{1}{4}(\nabla\Phi_0)^2 = -\frac{1}{2}(\Lambda B^2 + F) \quad (4.4)$$

E:

$$\frac{\partial_{\pm}^2 \alpha_0}{\alpha_0} + \frac{1}{2}(\partial_{\pm}\Phi_0)^2 - 2\partial_{\pm}\Psi_0 \frac{\partial_{\pm}\alpha_0}{\alpha_0} = 0, \quad (4.5)$$

onde: $2\partial_{\pm} = \partial/\partial(r \pm iz)$, $\Delta = \partial_r^2 + \partial_z^2$, $\partial_{\pm} = \partial_r \mp i\partial_z$ e:

$$B^2 = e^{2\Psi_0} \alpha_0^{-1/2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0} \quad (4.6)$$

$$F = e^{2\Psi_0} \alpha_0^{-1/2} \quad (4.7)$$

Vamos agora aplicar o método de “deslocar, cortar e refletir”. Matematicamente, como vimos no capítulo 2, o método consiste em definir novas funções Ψ , α e Φ por meio da transformação $z \rightarrow z' = h(z) + c$ aplicada a Ψ_0 , α_0 e Φ_0 , ou seja:

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(r, z'), \quad (4.8)$$

$$\alpha(r, z) = \alpha_0(r, z') \quad (4.9)$$

E:

$$\Psi(r, z) = \Psi_0(r, z'). \quad (4.10)$$

As funções originais Ψ_0, α_0 e Φ_0 satisfazem às equações de Einstein no vácuo. Por sua vez, as novas funções devem satisfazer às equações com fonte. Queremos agora, determinar o tensor energia-momento que descreve essa distribuição de matéria. Isto pode ser feito usando a equação (3.42).

$$\tilde{T}_t^t = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi - 2\Psi}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{3}[\alpha(\Phi_{,rr} + \Phi_{,zz}) + \alpha_{,r}\Phi_{,r} + \alpha_{,z}\Phi_{,z}] \\ -\alpha[\Phi_{,z}^2 + \Phi_{,r}^2 + 4(\Psi_{,rr} + \Psi_{,zz})] - 3(\alpha_{,rr} + \alpha_{,zz}) \\ + 4\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{2\Psi}(1 - \alpha e^{2\Psi - \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}\Lambda) \end{array} \right\}, \quad (4.11)$$

$$\tilde{T}_r^r = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi - 2\Psi}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} -4(\alpha_{,r}\Psi_{,r} - \alpha_{,z}\Psi_{,z} + \alpha_{,zz}) - \alpha(\Phi_{,z}^2 + \\ \Phi_{,r}^2) + 4\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{2\Psi}(1 - \alpha e^{2\Psi - \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}\Lambda) \end{array} \right\}, \quad (4.12)$$

$$\tilde{T}_z^z = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi - 2\Psi}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} -4(-\alpha_{,r}\Psi_{,r} + \alpha_{,z}\Psi_{,z} + \alpha_{,rr}) + \alpha\Phi_{,z}^2 \\ + 4\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{2\Psi}(1 - \alpha e^{2\Psi - \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}\Lambda) \end{array} \right\}, \quad (4.13)$$

$$\tilde{T}_\theta^\theta = -\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi - 2\Psi}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha[\Phi_{,z}^2 + \Phi_{,r}^2 + 4(\Psi_{,rr} + \Psi_{,zz})] + \alpha_{,rr} + \alpha_{,zz} \\ + 4\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{2\Psi}(1 - \alpha e^{2\Psi - \frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}\Lambda) \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

E:

$$\tilde{T}_\phi^\phi = \tilde{T}_\theta^\theta. \quad (4.15)$$

Em vista de facilitar a compreensão, usaremos a notação $\Phi^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$ e $\alpha^{(0)}$ em derivações de Φ_0 , Ψ_0 e α_0 respectivamente. Assim, das definições (4.8) a (4.10) segue-se que:

$$\Phi_{,z} = h'\Phi_{,h}^{(0)}, \quad (4.16)$$

$$\Phi_{,zz} = h'' \Phi_{,h}^{(0)} + (h')^2 \Phi_{,hh}^{(0)}, \quad (4.17)$$

$$\Psi_{,z} = h' \Psi_{,h}^{(0)}, \quad (4.18)$$

$$\Psi_{,zz} = h'' \Psi_{,h}^{(0)} + (h')^2 \Psi_{,hh}^{(0)}, \quad (4.19)$$

$$\alpha_{,z} = h' \alpha_{,h}^{(0)} \quad (4.20)$$

E:

$$\alpha_{,zz} = h'' \alpha_{,h}^{(0)} + (h')^2 \alpha_{,hh}^{(0)}. \quad (4.21)$$

Aplicando as relações acima, juntamente com as equações (4.2) a (4.5) nas equações (4.11) a (4.15), obtemos as componentes não-nulas do tensor energia-momento:

$$\tilde{T}_t^t = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{c} h'' \left(-2\sqrt{3}\alpha_0 \Phi_{,h}^{(0)} + 4\alpha_0 \Psi_{,h}^{(0)} + 3\alpha_{,h}^{(0)} \right) \\ + (h'^2 - 1) \left(\begin{array}{c} -2\sqrt{3} \left(\alpha_0 \Phi_{,hh}^{(0)} + \alpha_{,h}^{(0)} \Phi_{,h}^{(0)} \right) \\ + \alpha_0 \left(\Phi_{,h}^{(0)2} + 4\Psi_{,hh}^{(0)} \right) + 3\alpha_{,hh}^{(0)} \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (4.22)$$

$$\tilde{T}_r^r = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left[4h'' \alpha_{,h}^{(0)} + 4(h'^2 - 1) \left(-\alpha_{,h}^{(0)} \Psi_{,h}^{(0)} + \alpha_{,hh}^{(0)} + \frac{\alpha_0 \Phi_{,h}^{(0)2}}{4} \right) \right], \quad (4.23)$$

$$\tilde{T}_z^z = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left[(h'^2 - 1) \left(4\alpha_{,h}^{(0)} \Psi_{,h}^{(0)} - \alpha_0 \Phi_{,h}^{(0)2} \right) \right], \quad (4.24)$$

$$\tilde{T}_\theta^\theta = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 4\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left[h'' \left(\alpha_{,h}^{(0)} + 4\alpha_{,h}^{(0)} \Psi_{,h}^{(0)} \right) + (h'^2 - 1) \left(\alpha_{,hh}^{(0)} + \alpha_0 \Phi_{,h}^{(0)2} + 4\alpha_0 \Psi_{,hh}^{(0)} \right) \right] \quad (4.25)$$

E:

$$\tilde{T}_\phi^\phi = \tilde{T}_\theta^\theta. \quad (4.26)$$

Como vimos no capítulo 2, a função $h(z)$ é uma função geral que afeta a distribuição “criada”. Tomando $h(z) = |z|$, então, $h'(z) = \partial_z |z| = 2\theta(z) - 1$, onde $\theta(z)$ é a função degrau, e $h'' = 2\delta(z)$, sendo $\delta(z)$, a função delta de Dirac. Obtemos a seguinte distribuição:

$$\tilde{T}_t^t = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 2\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left(-2\sqrt{3}\alpha_0\Phi_{,h}^{(0)} + 4\alpha_0\Psi_{,h}^{(0)} + 3\alpha_{,h}^{(0)} \right) \delta(z), \quad (4.27)$$

$$\tilde{T}_r^r = \frac{4e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}\alpha_{,h}^{(0)}}{(8\pi G^{(5)})\alpha_0^{\frac{1}{2}}}\delta(z), \quad (4.28)$$

$$\tilde{T}_z^z = 0, \quad (4.29)$$

$$\tilde{T}_\theta^\theta = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi_0 - 2\Psi_0}}{(8\pi G^{(5)}) 2\alpha_0^{\frac{1}{2}}} \left(\alpha_{,h}^{(0)} + 4\alpha_0\Psi_{,h}^{(0)} \right) \delta(z) \quad (4.30)$$

E:

$$\tilde{T}_\phi^\phi = \tilde{T}_\theta^\theta. \quad (4.31)$$

As equações acima nos dão, além da densidade por 4-volume da distribuição gerada pela nova métrica $\tilde{\varepsilon} = -\tilde{T}_t^t$, as componentes da pressão \tilde{p}_r , \tilde{p}_z , \tilde{p}_θ e \tilde{p}_ϕ , que são, respectivamente \tilde{T}_r^r , \tilde{T}_z^z , \tilde{T}_θ^θ e \tilde{T}_ϕ^ϕ . Através dessas propriedades podemos observar que a distribuição de matéria está confinada no plano $z = 0$, o que já era de se esperar por causa da escolha da função $h(z) = |z| + c$. Além disto, de (4.29), temos que $\tilde{p}_z = 0$, o que é consistente com o fato da matéria estar confinada em $z = 0$.

Logo, assim como no capítulo 2, esta distribuição foi gerada pelo método de “deslocar, cortar e refletir” aplicada agora no espaço-tempo com cinco dimensões com constante cosmológica. Queremos agora comparar esta distribuição com a brana do

modelo RSII.

Para isto, precisamos apresentar explicitamente as funções α_0, Ψ_0, Φ_0 .

Como queremos mostrar que o método de “deslocar, cortar e refletir” pode ser usado para reproduzir a métrica do modelo RSII então, vamos tomar o espaço AdS_5 como nosso espaço-tempo original. A métrica deste espaço-tempo é dada por [8]:

$$ds^2 = e^{-2k\omega}(-dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2) + d\omega^2, \quad (4.32)$$

onde ω representa a dimensão extra e $k = \sqrt{-\Lambda^2/6}$.

Para identificarmos as funções α_0, Ψ_0 , e Φ_0 , é conveniente colocarmos esta métrica na forma de Weyl. Com este intuito vamos fazer a seguinte substituição de coordenadas, $\omega = f(z)$. Neste caso, temos:

$$ds^2 = e^{-2kf(z)}(-dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2) + (f'(z))^2dz^2, \quad (4.33)$$

com z sendo a dimensão extra.

Para que $g_{rr} = g_{zz}$, devemos ter $f(z)_{,z} = e^{-kf(z)}$, cuja solução é:

$$f = \frac{1}{k} \ln(kz + b), \quad (4.34)$$

com b constante.

Se tomarmos $b = 1$, então, $z = 0$ corresponde à hipersuperfície $\omega = 0$. Segue então, da comparação com a métrica de Weyl que:

$$\Phi_0 = -\sqrt{3}kf(z), \quad (4.35)$$

$$\alpha_0 = e^{-3kf(z)}r^2 \quad (4.36)$$

E:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \ln\left(re^{-\frac{9}{2}kf(z)}\right), \quad (4.37)$$

onde $\alpha_0 = \alpha_0(r, z)$, $\Psi_0 = \Psi_0(r, z)$, $\Phi_0 = \Phi_0(r, z)$.

Aplicando o método de “deslocar, cortar e refletir” neste espaço, modificando as funções (4.35) a (4.37) por meio da transformação $z \rightarrow |z| + c$, nós podemos calcular as componentes do tensor energia-momento da distribuição a partir das equações (4.27) a (4.31). Assim, obtemos o seguinte resultado para a densidade de energia por 4-volume $\tilde{\varepsilon} = -\tilde{T}_t^t$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{6k\delta(z)}{8\pi G^{(5)}(kc+1)^9}. \quad (4.38)$$

A exceção de \tilde{p}_z que é nula, as demais pressões correspondem a pressão de um fluido isotrópico, assim $\tilde{p} = \tilde{p}_r = \tilde{p}_\varphi = \tilde{p}_\theta$. Logo:

$$\tilde{p} = -\tilde{\varepsilon} \quad (4.39)$$

E:

$$\tilde{p}_z = 0, \quad (4.40)$$

onde k, c são constantes.

Portanto, trata-se de uma distribuição localizada em $z = 0$ ($\omega = 0$), com a mesma equação de estado da brana. Se tomarmos $c = 0$, então, podemos verificar que a tensão da brana será $\sigma = 6k/8\pi G^{(5)}$, ou seja, o mesmo resultado do modelo RSII [8].

Assim, podemos concluir que o “disco” gerado a partir deste método é a brana do modelo RSII. Este caso particular ilustra muito bem que, por meio do método de “deslocar, cortar e refletir”, podemos encontrar soluções exatas de branas imersas em 5-D.

4.2 Espaço-tempo Schwarzschild-AdS₅

A métrica original que usamos na seção anterior era a conhecida métrica do espaço AdS₅. Nesta seção, nosso maior interesse é encontrar soluções para corpos com simetria

esférica confinados na brana, caso este de estrelas e de buracos negros, por exemplo. Por isso, nosso ponto de partida será a métrica que representa um espaço-tempo em cinco dimensões com constante cosmológica negativa e que possui simetria esférica e estática.

$$ds^2 = -U(R)dt^2 + \frac{1}{U(R)}dR^2 + R^2d\chi^2 + R^2\sin^2\chi d\Omega^2, \quad (4.41)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e:

$$U(R) = 1 + k^2R^2 - \frac{m}{R^2}. \quad (4.42)$$

Vamos agora colocar a métrica acima na forma de Weyl 5-D, para que assim, possamos encontrar as funções originais Φ_0 , α_0 e Ψ_0 .

Na verdade, as funções Φ_0 e α_0 podem ser imediatamente identificadas da comparação entre (4.1) e (4.41). De fato, encontramos:

$$\Phi_0(r, z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln U(R) \quad (4.43)$$

E:

$$\alpha_0(r, z) = R^2 \sin^2\chi U^{\frac{1}{2}}(R). \quad (4.44)$$

Em relação a função Ψ_0 , precisamos recorrer a uma transformação de coordenadas do seguinte tipo:

$$R = R(r, z) \quad (4.45)$$

E:

$$\chi = \chi(r, z). \quad (4.46)$$

Aplicando esta transformação na métrica (4.41), vemos que, para que esta métrica tenha a mesma forma que a métrica de Weyl 5-D (4.1), devemos exigir que o termo cruzado $drdz$ se anule e que os coeficientes de dr^2 e dz^2 sejam iguais. Assim, devemos ter:

$$U^{-1}(R)R_{,r}R_{,z} + R^2\chi_{,r}\chi_{,z} = 0 \quad (4.47)$$

E:

$$U^{-1}(R) [R_{,r}^2 - R_{,z}^2] = -R^2 [\chi_{,r}^2 - \chi_{,z}^2]. \quad (4.48)$$

Agora, vamos propor as seguintes relações:

$$R = R(\xi) \quad (4.49)$$

E:

$$\chi = \chi(\eta). \quad (4.50)$$

onde:

$$\xi = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

E:

$$\eta = \arctan\left(\frac{r}{z}\right). \quad (4.52)$$

Aplicando as relações (4.45) e (4.46) na equação (4.47) e também na equação (4.48), obtemos uma mesma condição, que é a seguinte:

$$\frac{\xi^2 R_{,\xi}^2}{UR^2} = \chi_{,\eta}^2. \quad (4.53)$$

Em outras palavras, para que as condições (4.47) e (4.48) sejam satisfeitas, devemos resolver a equação (4.53). Para isso, levemos em conta as seguintes considerações: como sabemos, R depende exclusivamente de ξ , e χ é função apenas de η , então a igualdade (4.53) só será satisfeita para todos os valores de ξ e η se, e somente se:

$$\frac{\xi^2 R_{,\xi}^2}{UR^2} = b^2 \quad (4.54)$$

E:

$$\chi_{,\eta}^2 = b^2, \quad (4.55)$$

para alguma constante b que adotaremos como sendo igual a um, para melhor manipulação dos cálculos. Lembremos ainda que a função U depende apenas de R .

A equação (4.55) é facilmente resolvida. Uma solução possível é a seguinte: $\chi = \eta$ e, portanto, de acordo com (4.52):

$$\frac{r}{z} = \tan \chi. \quad (4.56)$$

Considerando na equação (4.54) apenas a raiz positiva, então por separação de variáveis, temos:

$$\frac{dR}{U^{1/2}R} = \frac{d\xi}{\xi}. \quad (4.57)$$

Devemos observar que esta equação é válida apenas para $R > R_+$, onde $R_+ = \frac{1}{\sqrt{2k}} [\sqrt{1 + 4k^2m} - 1]^{1/2}$ localiza o horizonte de eventos. A razão dessa condição é que $U^{1/2}$ deve ser uma função real na equação acima.

Logo:

$$\int_{R_+}^R \frac{1}{RU^{1/2}} dR = \ln \left(\frac{\xi}{\xi_+} \right), \quad (4.58)$$

onde ξ_+ corresponde a posição do horizonte na nova coordenada ξ .

Segue então que, nas novas coordenadas, a métrica assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -U(R) dt^2 + \frac{R^2}{\xi^2} (dr^2 + dz^2) + R^2 \sin^2 \chi d\Omega^2. \quad (4.59)$$

Logo, da comparação entre (4.59) e (4.1), concluímos que:

$$\Psi_0(r, z) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R^3 \sin \chi U^{\frac{3}{4}}}{\xi^2} \right]. \quad (4.60)$$

Agora, vamos aplicar o método de “deslocar, cortar e refletir” neste espaço a fim de obter novas soluções exatas das equações de Einstein com constante cosmológica que envolvam a presença da brana e da matéria confinada na brana. Para isso, definimos novas funções Ψ , α e Φ por meio da transformação $z \rightarrow z' = h(z) + c$ aplicada a Ψ_0 , α_0 e Φ_0 . As equações (4.8) a (4.10) definem esta transformação. Repetindo o procedimento anterior, encontramos as seguintes relações:

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2U} R_{,\xi} U_{,R} \xi_{,h}, \quad (4.61)$$

$$\alpha_{,h}^{(0)} = \left(2RU^{1/2} + \frac{R^2 U_{,R}}{2U^{1/2}} \right) R_{,\xi} \xi_{,h} \sin^2 \chi + 2R^2 U^{1/2} \chi_{,n} \eta_{,h} \sin \chi \cos \chi \quad (4.62)$$

E:

$$\Psi_{,h}^{(0)} = \left(\frac{3}{2R} + \frac{3U_{,R}}{8U} \right) R_{,\xi} \xi_{,h} + \frac{\chi_{,n} \eta_{,h} \cot \chi}{2} - \frac{\xi_{,h}}{\xi}. \quad (4.63)$$

Aplicando estas relações e as funções Ψ , α e Φ nas equações (4.27) a (4.31) e adotando $h(z) = |z|$, podemos verificar que o corte do espaço original em $z = c$ (ver figura 4.1) nos dá a seguinte distribuição:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)}) R^2} \left[1 - \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} \right] \delta(z), \quad (4.64)$$

$$\tilde{p} = \frac{2c}{(8\pi G^{(5)}) R^2} \left\{ \begin{array}{l} 2 \left[\left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \\ + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \end{array} \right\} \delta(z) \quad (4.65)$$

E:

$$\tilde{p}_z = 0, \quad (4.66)$$

onde $\tilde{\varepsilon} = -\tilde{T}_t^t$ e $\tilde{p} = \tilde{p}_r = \tilde{p}_\theta = \tilde{p}_\phi$.

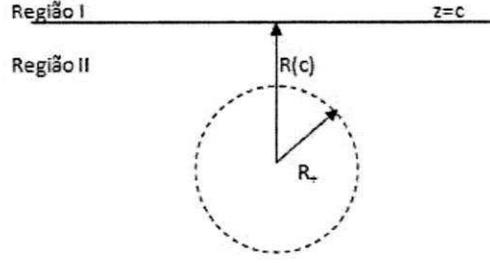


Figura 4.1: Regiões do espaço divididas pelo plano de corte $z = c$. Note que R_+ localiza o horizonte de eventos e $R(c)$ informa o lugar do corte nas coordenadas originais. A região II é eliminada e substituída pela reflexão da região I.

Essas equações nos dão a distribuição “volumétrica” 4-D da energia e pressão. Como elas são proporcionais a $\delta(z)$, então, podemos concluir que a distribuição está concentrada na hipersuperfície $z = 0$, como era de se esperar. Integrando essas equações na direção transversal àquela hipersuperfície, obteremos a distribuição volumétrica 3-D da energia e pressão sobre a brana. Portanto, a distribuição na brana será descrita pelo tensor definido abaixo:

$$T_B^A = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{-\ell}^{+\ell} \tilde{T}_B^A \sqrt{g_{zz}} dz. \quad (4.67)$$

Assim, ao aplicarmos nesta equação as propriedades (4.64) e (4.65), encontramos a densidade ($\varepsilon = -T_t^t$) e as pressões na brana:

$$\varepsilon = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)}) R\xi} \left[1 - \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.68)$$

E:

$$p = \frac{2c}{(8\pi G^{(5)}) R\xi} \left\{ \begin{array}{l} 2 \left[\left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \\ + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \end{array} \right\}. \quad (4.69)$$

Destas equações, a primeira representa a densidade de energia por 3-volume da distribuição de matéria na brana, originada pelo método de “deslocar, cortar e refletir”. É possível observar que esta densidade varia com R e portanto não é constante como a densidade descrita na equação (4.38). Isto é uma indicação de que, agora, além da própria

brana, localizada em $z = 0$, existe a presença de um corpo com simetria esférica e estática confinado na brana.

Vamos agora analisar as características desse corpo.

Inicialmente devemos observar que a densidade de energia e as pressões estão expressas em função da coordenada R explicitamente e também implicitamente por meio de $\xi(R)$, definido em (4.58). Mas, devemos lembrar que $R = R(r, z)$. Com a transformação $z \rightarrow |z| + c$, temos $R = R(r, |z| + c)$. Logo, sobre a brana ($z = 0$), $R = R(r, c)$. Mais especificamente, $R = R(\sqrt{r^2 + c^2})$. Assim, a coordenada R , na brana, possui um valor mínimo para $r = 0$, que corresponde a $R(c)$ e que deve ser superior a R_+ , como está esquematicamente representado na figura 4.1. O valor $R(c)$ está determinado, de acordo com (4.58), implicitamente pela equação:

$$\int_{R_+}^{R(c)} \frac{1}{RU^{1/2}} dR = \ln \left(\frac{c}{\xi_+} \right). \quad (4.70)$$

Através das equações (4.68) e (4.69) vemos que a obtenção destas propriedades depende da relação entre R e $\xi(R)$. Esta relação pode ser obtida numericamente com o uso da equação (4.58).

As equações (4.68) e (4.69) nos mostram a densidade e a pressão por 3-volume na brana. Devemos observar que, assintoticamente, encontramos o seguinte resultado:

$$\sigma_{brana} = -\frac{6ck}{(8\pi G^{(5)}) \xi_*} \quad (4.71)$$

E:

$$p_{brana} = -\sigma_{brana}, \quad (4.72)$$

onde ξ_* é o limite de ξ para $R \rightarrow \infty$ na equação (4.58).

As equações (4.71) e (4.72) nos mostram claramente a presença de uma brana com tensão negativa em $z = 0$. Observe que a tensão da brana, pode ser ajustada por meio da escolha do valor do parâmetro c .

Com essas considerações podemos, então, concluir que a distribuição de matéria descrita pelas equações (4.68) e (4.69) representa não só a brana, como também, densidade e pressão adicionais que devem corresponder a de um corpo com simetria esférica confinado na brana. Para encontrarmos as propriedades deste corpo, vamos decompor o tensor energia-momento da distribuição em duas partes:

$$T_{AB} = T_{AB}^{(corpo)} + T_{AB}^{(brana)}, \quad (4.73)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(brana)} = \sigma_{brana} g_{\mu\nu}$, como já vimos no capítulo 3.

Segue, então, que a densidade e a pressão do corpo na brana são:

$$\rho_{corpo} = \varepsilon - \sigma_{brana} \quad (4.74)$$

E:

$$p_{corpo} = p + \sigma_{brana}. \quad (4.75)$$

Assim, com a densidade da brana, dada por (4.71), temos:

$$\rho_{corpo} = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)})} \left\{ \frac{1}{R\xi} \left[1 - \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{k}{\xi_*} \right\} \quad (4.76)$$

E:

$$p_{corpo} = \frac{2c}{(8\pi G^{(5)})} \left\{ \frac{1}{R\xi} \left[\begin{array}{l} 2 \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} - 2 + \\ + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \end{array} \right] - \frac{3k}{\xi_*} \right\}. \quad (4.77)$$

O comportamento de ρ_{corpo} e p_{corpo} com R pode ser mais facilmente analisado graficamente. Na figura 4.2, arbitramos alguns valores para as constantes k , m , e c , e estudamos (4.76) e (4.77) numericamente.

Dessa figura, é possível concluir que a densidade e a pressão são positivas e que ambas tendem a zero a medida que R cresce, o que demonstra, como já havíamos

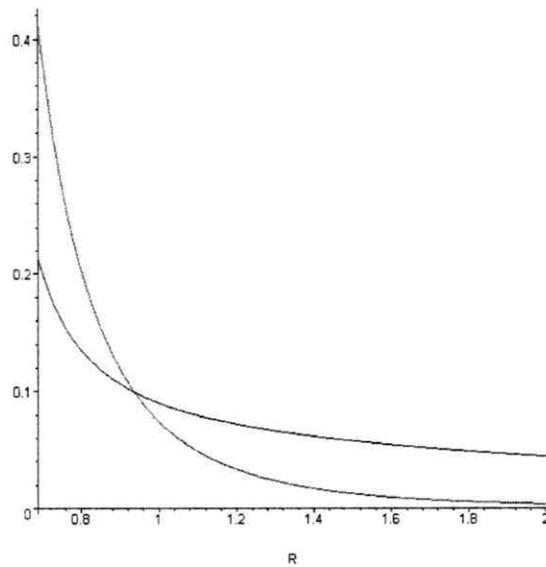


Figura 4.2: Comportamento da densidade (cor vermelha) e da pressão (cor azul) de um corpo confinado na brana, (multiplicado por $4\pi G^{(5)}/3$), para os valores $m = 0,3$, $k = 1$, e $c = 2$. Neste caso, $\xi_* \simeq 6,892$, $R(c) \simeq 0,686$ e $R_+ = 0,492$.

antecipado, a presença de um corpo, cuja massa está concentrada em seu centro.

Podemos verificar que a densidade de energia ρ_{corpo} é positiva em todos os pontos. Portanto, a matéria de que é feito o corpo satisfaz à condição fraca de energia [18].

No entanto, observemos que $\rho_{corpo} \geq p_{corpo}$, do centro do corpo até um raio $R_0 \simeq 0,94$ (para os valores escolhidos). Para pontos além desse raio: $p_{corpo} > \rho_{corpo}$. Sendo assim, a condição de energia dominante ($\rho_{corpo} \geq 0$ e $\rho_{corpo} \geq p_{corpo}$) não é satisfeita em todos os pontos.

Se a condição de energia dominante não é satisfeita, isto indica que o fluxo de energia pode ocorrer a uma velocidade superior a velocidade da luz para alguns observadores [18]. Portanto, este corpo não será constituído de matéria ordinária. Sendo assim, podemos dizer que este método não produz uma solução totalmente satisfatória do ponto de vista físico.

Capítulo 5

Mundo-Branas e o Método da Imersão

Além do método de “deslocar, cortar e refletir” discutido nos capítulos anteriores que, como vimos, pode ser empregado na construção de espaços com brana, existem outros métodos capazes de cumprir esta finalidade. Um deles é o método de imersão que veremos agora.

Esse método, num certo sentido, é mais geral que o método de “deslocar, cortar e refletir”, pois aqui, a hipersuperfície onde está localizada a brana não precisa ser um plano ($z = \text{constante}$) nas coordenadas de Weyl, mas pode ter forma qualquer e inclusive ser dependente do tempo [16]. Este método, portanto, tem uma abrangência maior.

Já vimos que o cenário de mundo-brana surgiu com o modelo ADD de dimensões extras, mas foi com o modelo RSII que passamos a considerar a possível existência de dimensões extras não-compactas.

Nesse cenário, encontrar soluções coerentes com as leis físicas para buracos negros na brana, tem sido bastante difícil. Neste capítulo, mostraremos uma forma de construção da métrica em espaços com cinco dimensões e constante cosmológica negativa, gerada por corpos esfericamente simétricos confinados em branas. Para dar início, partiremos novamente da métrica Schwarzschild-AdS₅:

$$ds^2 = -U(R)dt^2 + \frac{1}{U(R)}dR^2 + R^2d\chi^2 + R^2 \sin^2 \chi d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$:

$$U(R) = 1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2}. \quad (5.2)$$

Lembremos que a métrica (5.1) é uma métrica de um espaço-tempo em 5-D com simetria esférica. Mais especificamente, ela é uma solução exata que descreve um buraco negro no espaço 5-D com $\Lambda < 0$.

De acordo com o modelo RSII a brana deve encontrar-se imersa como uma hipersuperfície nesse espaço [16].

Admitiremos que a localização da brana será dada por uma equação do tipo:

$$\chi = \chi(R, t). \quad (5.3)$$

Como a função $\chi(R, t)$ é arbitrária a princípio, então, a hipersuperfície neste sistema de coordenadas pode ter uma “forma” qualquer.

Associado ao sistema de coordenadas do espaço-ambiente $\{t, R, \chi, \theta, \phi\}$, temos uma base de vetores: $\{\partial/\partial t, \partial/\partial R, \partial/\partial \chi, \partial/\partial \theta, \partial/\partial \phi\}$.

Na sequência de nossa discussão, será conveniente encontrarmos uma nova base constituída de vetores paralelos à brana e do vetor normal.

Considerando a equação (5.3), obtemos os seguintes vetores paralelos:

$$T^A = (1, 0, \chi_{,t}, 0, 0), \quad (5.4)$$

$$R^A = (0, 1, \chi_{,R}, 0, 0), \quad (5.5)$$

$$\Theta^A = (0, 0, 0, 1, 0) \quad (5.6)$$

E:

$$\Phi^A = (0, 0, 0, 0, 1) \quad (5.7)$$

O vetor normal, por sua vez, pode ser encontrado da seguinte forma. Um deslocamento arbitrário dl^A ao longo da brana tem as seguintes componentes:

$$dl^A = (dt, dR, \chi_{,R}dR + \chi_{,t}dt, d\theta, d\phi). \quad (5.8)$$

O vetor normal deve ser ortogonal a qualquer deslocamento sobre a brana. Logo, n^A deve satisfazer à equação:

$$n_A dl^A = 0. \quad (5.9)$$

Além disso, ele é unitário:

$$n_A n^A = 1. \quad (5.10)$$

A partir dessas equações, obtemos as seguintes componentes do vetor normal à brana:

$$n_A = n(-\chi_{,t}, -\chi_{,R}, 1, 0, 0), \quad (5.11)$$

onde

$$\frac{1}{n^2} = -\frac{\chi_{,t}^2}{U} + U\chi_{,R}^2 + \frac{1}{R^2}. \quad (5.12)$$

A métrica do espaço ambiente (5.1), naturalmente induz uma métrica na brana, que corresponde a métrica “sentida” (digamos assim) por observadores presos à brana. A métrica induzida pode ser descrita pelo tensor h_{AB} , definido como:

$$h_{AB} = g_{AB} - n_A n_B. \quad (5.13)$$

Este tensor projeta as componentes de um vetor sobre a brana, excluindo a componente ortogonal à brana. Portanto com h_{AB} calculamos o produto interno dos vetores usando a métrica do espaço ambiente g_{AB} , no entanto, descartando a parte ortogonal dos vetores. Essa é a razão porque h_{AB} é chamada de métrica induzida.

A métrica induzida tem as seguintes componentes:

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} -U - n^2\chi_{,t}^2 & -n^2\chi_{,t}\chi_{,R} & n\chi_{,t} & 0 & 0 \\ -n^2\chi_{,t}\chi_{,R} & \frac{1}{U} - n^2\chi_{,R}^2 & n\chi_{,R} & 0 & 0 \\ n\chi_{,t} & n\chi_{,R} & R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Uma hipersuperfície divide localmente o espaço em duas regiões, às quais nos referiremos como positiva e negativa. Na teoria de imersão um conceito de grande relevância é o de curvatura extrínseca. Essa quantidade mede a variação do vetor normal da hipersuperfície ao longo de suas direções paralelas.

Em um certo sentido, portanto, podemos dizer que a curvatura extrínseca é uma medida da “curvatura” da hipersuperfície “vista” do espaço ambiente. O tensor curvatura extrínseca é definido como:

$$K_{AB} = h_A^C h_B^D \nabla_C n_D, \quad (5.15)$$

ou seja, com a projeção da derivada covariante do vetor normal na hipersuperfície.

Como a hipersuperfície é dividida nas regiões positiva e negativa, então, a curvatura extrínseca da hipersuperfície pode ser calculada separadamente com respeito à parte positiva K_{AB}^+ ou com respeito à parte negativa K_{AB}^- .

Quando existe energia concentrada na hipersuperfície, então é possível mostrar que integrando-se as equações de Einstein em torno da hipersuperfície, a curvatura extrínseca será descontínua, ou seja, K_{AB}^+ e K_{AB}^- não coincidem.

A relação entre a diferença das curvaturas extrínsecas e T_{AB} (o tensor que descreve o conteúdo energético da hipersuperfície), é conhecida como condições de Junção de Israel:

$$[K_{AB} - Kh_{AB}] = k_5 T_{AB}, \quad (5.16)$$

onde $[K_{AB}] \equiv K_{AB}^+ - K_{AB}^-$.

O modelo RSII admite a simetria de reflexão em torno da brana. Isto implica que $K_{AB}^+ = -K_{AB}^-$. Sendo assim, segue das condições de junção:

$$K_{AB} = \frac{k_5}{6} (3T_{AB} - h_{AB}T), \quad (5.17)$$

onde $k_5 = 8\pi G_5$.

Vamos agora calcular as componentes da curvatura extrínseca da hipersuperfície, definida pela equação $\chi = \chi(R, t)$, imersa em Schwarzschild-AdS₅. Calculando a derivada covariante de n_D explicitamente:

$$\nabla_C n_D = \frac{\partial n_C}{\partial x^D} - \Gamma_{CD}^M n_M \quad (5.18)$$

e projetando-a na hipersuperfície com a métrica h_{AB} , de acordo com a definição de curvatura extrínseca, encontramos as seguintes componentes não-nulas:

$$K_{TT} = -n \left(\chi_{,TT} + UR\chi_{,R}\chi_{,T}^2 - \frac{1}{2}UU_{,R}\chi_{,R} \right), \quad (5.19)$$

$$K_{RR} = -n \left(\chi_{,RR} + \frac{2\chi_{,R}}{R} + \frac{U_{,R}\chi_{,R}}{2U} + UR\chi_{,R}^3 \right), \quad (5.20)$$

$$K_{TR} = -n \left(\chi_{,TR} + \frac{\chi_{,T}}{R}UR\chi_{,T}\chi_{,R}^2 - \frac{U_{,R}\chi_{,T}}{2U} \right), \quad (5.21)$$

$$K_{\Theta\Theta} = -n (UR\chi_{,R} \sin^2 \chi - \sin \chi \cos \chi) \quad (5.22)$$

E:

$$K_{\Phi\Phi} = \sin^2 \theta K_{\Theta\Theta}. \quad (5.23)$$

Como estamos interessados em obter distribuições estáticas, a partir de agora, iremos admitir uma imersão independente do tempo, ou seja, $\chi = \chi(R)$.

Usando a equação (5.17), podemos determinar distribuições de energia na brana que sejam compatíveis com a imersão considerada. Como queremos obter distribuições que possam representar um corpo de simetria esférica confinado na brana, vamos admitir que o tensor T_{AB} toma a forma [16]:

$$T_{AB} = [\rho(R) + p(R)] h_{AB} h_{CD} u^B u^D + p(R) h_{AC}, \quad (5.24)$$

onde $\rho(R)$ é a densidade de energia do fluido, $p(R)$ a pressão do fluido e u^B a velocidade própria do fluido, que satisfaz à condição de normalização:

$$u^B u^D h_{BD} = -1. \quad (5.25)$$

Isto nos permite escrever então:

$$u^A = \frac{1}{\sqrt{-h_{TT}}} (1, 0, 0, 0, 0). \quad (5.26)$$

Usando este resultado, podemos então reescrever o tensor energia-momento (5.24) da seguinte forma:

$$T_{AB} = -(p + \rho) \frac{h_{AT} h_{BT}}{h_{TT}} + p h_{AB}. \quad (5.27)$$

De maneira bastante geral, vamos escrever a equação de estado do fluido da seguinte forma:

$$p(R) = w(R) \rho(R), \quad (5.28)$$

onde $w(R)$, para efeito de manipulação dos cálculos, pode ser escrito como:

$$w(R) = \frac{v(R) - 2}{3}. \quad (5.29)$$

Com estes resultados, segue da condição de Israel a seguinte equação:

$$K_{AB} = \frac{k_5}{6} \rho \left[h_{AB} - (1+v) \frac{h_{AT} h_{BT}}{h_{TT}} \right]. \quad (5.30)$$

Em termos das componentes, temos as seguintes equações:

$$-n \left(-\frac{1}{2} U U_{,R} \chi_{,R} \right) = \frac{k_5}{6} \rho v U, \quad (5.31)$$

$$-n \left(\chi_{,RR} + \frac{2\chi_{,R}}{R} + \frac{U_{,R} \chi_{,R}}{2U} + U R \chi_{,R}^3 \right) = \frac{k_5}{6} \rho \left[\frac{1}{U} + R^2 \chi_{,R}^2 \right] \quad (5.32)$$

E:

$$-n (U R \chi_{,R} \sin^2 \chi - \sin \chi \cos \chi) = \frac{k_5}{6} \rho R^2 \sin^2 \chi. \quad (5.33)$$

Da conservação da energia-momento, podemos ainda obter a seguinte equação:

$$\chi_{,R} \left(1 + \frac{1}{2} U_{,R} R - U \right) = \frac{k_5 \rho_{,R}}{6n} R^2. \quad (5.34)$$

Nesse sistema de equações, há três funções incógnitas: $\chi(R)$, que nos dá a localização da brana, ou a “forma” da brana; $\rho(R)$ que nos dá a densidade de energia na brana; e $v(R)$, que especifica a equação de estado do fluido. Portanto, essas equações mostram claramente que, para obtermos uma distribuição com simetria esférica sobre a brana, a forma da brana $\chi(R)$ não pode ser arbitrária, mas, deve ser solução do sistema acima.

Agora, mais uma vez, a fim de manipulação dos cálculos, definiremos uma nova função $\alpha = r \cos \chi$ [16]. Com esta função, as equações acima assumem a seguinte forma:

$$v = -(\alpha_{,R} R - \alpha) \left(\frac{\frac{1}{2} U_{,R} R}{U(\alpha_{,R} R - \alpha) + \alpha} \right), \quad (5.35)$$

$$U R^2 \alpha_{,RR} + (\alpha_{,R} R - \alpha) \left(\frac{1}{2} U_{,R} R - U \right) - \alpha = 0, \quad (5.36)$$

$$U(\alpha_{,R}R - \alpha) + \alpha = \frac{k_5}{6}\rho R [U(\alpha_{,R}R - \alpha)^2 + R^2 - \alpha^2]^{1/2} \quad (5.37)$$

E:

$$\frac{\rho_{,R}R}{\rho} = (\alpha_{,R}R - \alpha) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}U_{,R}R - U}{U(\alpha_{,R}R - \alpha) + \alpha} \right). \quad (5.38)$$

Usando (5.36), podemos integrar (5.38) diretamente. O resultado obtido nos dá a densidade de energia do fluido perfeito em função de α [16]:

$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{R^2} [U(\alpha_{,R}R - \alpha) + \alpha], \quad (5.39)$$

onde ρ_0 é uma constante de integração. Elevando (5.37) ao quadrado e substituindo (5.39) na equação (5.37), obtemos a seguinte equação:

$$U(\alpha_{,R}R - \alpha)^2 - \alpha^2 + \left(1 - \frac{36}{k_5^2 \rho_0^2}\right) R^2 = 0. \quad (5.40)$$

Para resolver (5.40), vamos definir uma nova variável [16]:

$$\tilde{R} = \int \frac{dR}{R\sqrt{U}}. \quad (5.41)$$

A equação, em termos de \tilde{R} , assume a seguinte forma:

$$\left[\frac{d}{d\tilde{R}} (\cos \chi) \right]^2 - \cos^2 \chi = - \left(1 - \frac{36}{k_5^2 \rho_0^2}\right), \quad (5.42)$$

cuja solução geral é:

$$\cos \chi = ae^{\tilde{R}} + be^{-\tilde{R}}, \quad (5.43)$$

onde $4ab = 1 - 36/k_5^2 \rho_0^2$.

Com isto, podemos encontrar agora a densidade de energia e a pressão da brana:

$$\rho = \frac{\rho_0}{R} \left[\sqrt{U} \left(ae^{\tilde{R}} - be^{-\tilde{R}} \right) + ae^{\tilde{R}} + be^{-\tilde{R}} \right] \quad (5.44)$$

E:

$$p(R) = -\frac{2}{3}\rho(R) - \frac{\rho_0 U_{,R}}{6\sqrt{U}} \left(ae^{\tilde{R}} - be^{-\tilde{R}} \right). \quad (5.45)$$

Se compararmos as equações (5.41) e (4.58), imediatamente vemos que:

$$\tilde{R} = \ln \frac{\xi}{\xi_+} \quad (5.46)$$

e que para o caso particular onde $a = 0$ e $b = c/\xi_+$, segue da equação (5.43) que a brana estará localizada em $z = c$. Lembre-se que $z = \xi \cos \chi$. Portanto, para esta escolha particular dos parâmetros a e b , devemos reproduzir os resultados obtidos no capítulo anterior pelo método “deslocar, cortar e refletir”.

De fato, podemos verificar diretamente de (5.44) e (5.45), que a distribuição obtida possui as seguintes propriedades:

$$\rho = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)}) R\xi} \left[1 - \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} \right] \quad (5.47)$$

E:

$$p = \frac{2c}{(8\pi G^{(5)}) R\xi} \left\{ 2 \left[\left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \right\}. \quad (5.48)$$

Portanto, idênticos àquelas encontradas em (4.68) e (4.69). Logo, podemos dizer que, o método de “deslocar, cortar e refletir” é um caso particular do “método de imersão” apresentado neste capítulo.

O fato de podermos manipular a e b nas equações (5.44) e (5.45), é o que torna este método mais geral que o método do capítulo anterior. No entanto, em uma série de casos analisados numericamente em [16], verificou-se que, em todos eles, a distribuição deixa de satisfazer à condição de energia dominante em algum intervalo.

Capítulo 6

Conclusões

Ao longo desta pesquisa, estudamos a possibilidade de encontrar soluções exatas das equações de Einstein que descrevessem estrelas confinadas em branas no modelo RSII.

Para isto, usamos dois métodos. O primeiro, foi o método de “deslocar, cortar e refletir”, que matematicamente é implementado por meio de uma transformação na coordenada extra, $z \rightarrow h(z) + c$, aplicada as componentes de uma métrica já conhecida. Fisicamente, este método consiste em estabelecermos um plano ao longo de z constante, que adotamos como sendo $z = c$, dividindo o espaço em duas partes: uma com singularidade ou fonte e outra sem. A parte singular nós descartamos e a parte sem singularidade ou fonte, é refletida a partir do plano estabelecido. O resultado disto é o surgimento de um disco fino de matéria no plano de corte. Nosso objetivo, a partir daí, foi, então, usar as equações de Einstein, para encontrarmos as propriedades (como densidade e pressão) da distribuição confinada na hipersuperfície.

No espaço-tempo quadridimensional, este método pode ser empregado na obtenção de soluções de discos de matéria que procuram representar discos galácticos. No entanto, nosso maior interesse estava voltado para a aplicação do método no modelo RSII. De acordo com esse modelo, nosso Universo 4-D corresponde a uma brana imersa em um espaço ambiente com dimensão superior. Este modelo é um dos mais inusitados porque propõe a existência de uma dimensão extra não-compacta, algo que o diferencia dos demais modelos anteriores de dimensões extras. Já que, em todos os modelos anteriores, é necessário admitir que a dimensão extra é compacta, para torná-los fenomenologicamente

viáveis. Este é o caso dos modelos de Kaluza-Klein, ADD e RS1.

Além disso, algumas questões importantes neste modelo, permanecem em aberto, entre elas, as soluções exatas para buraco negro na brana. Assim, qualquer contribuição nessa direção será significativa.

Tendo isto em vista, primeiro colocamos a métrica do espaço-tempo AdS_5 na forma de Weyl, fizemos a transformação das componentes da métrica e encontramos o tensor energia-momento para a métrica transformada. Verificamos que a distribuição obtida corresponde a própria brana do modelo RSII. Esta conclusão pode ser obtida ao constatarmos que a densidade de energia da distribuição é uniforme e satisfaz a mesma equação de estado das branas.

A segunda métrica usada foi a de um espaço-tempo Schwarzschild- AdS_5 . Repetindo o mesmo procedimento, obtivemos a densidade de energia e a pressão da distribuição concentrada na hipersuperfície $z = 0$. Estas propriedades nos permitiram concluir que o fluido energético da brana é isotrópico.

De posse destes resultados encontramos ainda que, assintoticamente, a densidade e pressão da distribuição correspondia exatamente as da brana com tensão negativa no modelo RSII. Assim, subtraindo o tensor energia-momento da distribuição do tensor energia-momento da brana, foi possível encontrar a densidade e a pressão de um corpo na brana.

A densidade e pressão obtidas são positivas e caem a zero com o aumento da coordenada radial. Isso nos permitiu concluir que a distribuição encontrada corresponde a de um corpo com simetria esférica, possivelmente uma estrela confinada na brana.

O outro método que usamos para obtenção das soluções exatas das equações de Einstein para corpos confinados na brana foi o método da imersão. Nesse método, a localização da brana, no espaço ambiente, é definida por uma função $\chi(R)$, portanto, não se restringe ao plano ($z = c$) do método anterior. Partindo mais uma vez da métrica do espaço-tempo Schwarzschild- AdS_5 , construímos uma métrica induzida na brana. Com o uso da condição de Junção de Israel, encontramos equações que relacionam a localização da brana $\chi(R)$, o conteúdo energético dela $\rho(R)$ e a pressão $p(R)$.

O método de imersão é certamente mais abrangente do que o anterior, pois aqui a brana pode ter forma arbitrária $\chi(R)$ e, inclusive, poderia ser dependente do tempo.

Resolvendo as equações de Junção de Israel, obtemos as funções $\chi(R)$, $\rho(R)$ e $p(R)$ em termos de dois parâmetros arbitrários a e b .

Podemos verificar que, para valores particulares de a e b , o método de imersão reproduz o método anterior. Assim, podemos dizer que o método de “deslocar, cortar e refletir” é um caso particular do método de imersão.

Concluimos também que ambos os métodos apresentam resultados satisfatórios apenas para um intervalo espacial. Isto acontece porque em ambos os casos, a partir de um certo valor de R , a condição de energia dominante não é obedecida, ou seja, a pressão do corpo na brana passa a ser maior que a sua densidade. Fisicamente, isso implica que o fluxo energético pode ocorrer com velocidade maior do que a da luz, para algum observador, o que é impossível de acordo com a teoria da relatividade.

Em pesquisas futuras, pretendemos aplicar o método para a métrica Schwarzschild-AdS₅ escrita em coordenadas do tipo Eddington-Finkelstein na tentativa de construir uma hipersuperfície que cruze o horizonte de eventos e passe pela singularidade. Talvez, nesta situação, a solução obtida tenha características de buraco negro na brana.

Outra possibilidade é aplicar o método de imersão no espaço-tempo quadrimensional para obtermos discos de matéria mais gerais.

Bibliografia

- [1] González, G. A., Letelier, P. S., “Exact General Relativistic Thick Disks”. *Phys.Rev.* D69, 044013 (2004).
- [2] Vogt, D., “Modelos de discos e outras estruturas auto-gravitantes em Relatividade Geral”. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. 2006.
- [3] Letelier, P. S., “Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial”. *RBEF*, v. 27, n.1, p. 121-136, 2005.
- [4] D’Inverno, R., “Introducing Einstein’s Relativity”, Oxford University Press, First Edition, Oxford, 1992.
- [5] Carroll, S., “Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity”, Benjamin Cummings, 2004.
- [6] Duff, M. J., “Kaluza-Klein Theory in perspective”. *The Oskar Klein centenary*, 1994.
- [7] Kaku, M., “Quantum Field Theory: A Modern Introduction”, Oxford University Press, 1993.
- [8] Silva, A. A., “Um Estudo sobre Dimensões Extras”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. 2009.
- [9] Rubakov, V. A., *Phys. USP.* 44: 8713 (2001)
- [10] Greiner, W., “Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations”, 3ª edição., Springer, 2000.

- [11] Bjorken, J. D., Drell, S. D., "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [12] Hoyle, C. D., Schmidt, U., Heckel, B. R., Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Kapner, D. J., Swanson, H. E., "Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for 'large' extra dimensions", *Phys. Rev. Lett.* 86, 1418-1421 (2001).
- [13] Randall, L., Sundrum, R., "Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension", *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370-3373 (1999)
- [14] Garriga, J., Tanaka, T., "Gravity in the Randall-Sundrum Brane World", *Phys. Rev. Lett.* 84: 2778-2781. (2000).
- [15] Chamblin, A., Hawking, S. W., Reall, H. S., "Charged brane-world black holes". *Phys. Rev. D* 63, 064015 (2001)
- [16] Creek, S., Gregory, R., Kanti, P., Mistry, B., "Braneworld stars and black holes", *Class. Quant. Grav.* 23 (2006) 6633-6658,
- [17] Charmousis, C., and Gregory, R., "Axisymmetric metrics in arbitrary dimensions", *Class. Quantum Grav.*, (2004).
- [18] Hawking, S. W., Ellis, G., "The large Scale Structure of Space-Time". Cambridge University Press, 1999.