Resumo

Neste trabalho estimamos algumas das desigualdades do tipo Trudinger-Moser, a fim de estudar as propriedades dos funcionais energia associados à problemas elípticos não-lineares onde a não-linearidade possui crescimento crítico. *A fortiri*, utilizando técnicas variacionais estudamos existência e multiplicidade de solução para tais problemas.

Abstract

In this work we appreciate some Trudinger-Moser type inequality for to study the behaviour of the functional energy the semilinear Dirichlet problems with critical growth. Later, apply variational methods we study existence and multiplicity of solution for such problems.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Desigualdades do tipo Trudinger-Moser e aplicações

por

Flank David Morais Bezerra †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser e aplicações

por

Flank David Morais Bezerra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFV

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2006

Agradecimentos

Aos meus pais **Maria José** e **De Paula**, por uma infinidade *não-enumerável* de motivos;

Aos meus irmãos **Débora** e **Paulo**, pela motivação e incentivo;

À **Jackelya Araujo**, pela paciência, ensinamentos e revisão deste trabalho;

Ao professor **Marco Aurélio**, pelas orientações e pela matemática discutida, meus cordiais agradecimentos;

Aos professores **Arimatéia** (DME/UFCG) e **Olímpio Miyagaki** (DMA/UFV), pela revisão e avaliação deste trabalho e pela atenção;

Aos professores **Cloves Saraiva**, **Luís Fernando**, **Marcos Araújo**, **Maxwell Mariano**, **Nivaldo Muniz**, **Valeska Martins** (DEMAT/UFMA) e **Fágner Araruna** (DM/UFPB), por acreditarem em nosso trabalho;

Aos professores **Claudianor Alves**, **Daniel Cordeiro**, **Francisco Morais** (DME/UFCG) e **Alexandre Nolasco** (ICMC/USP), pela atenção sempre que solicitados;

Aos colegas e funcionários do DME/UFCG e DEMAT/UFMA;

À CAPES, pelo suporte financeiro e pelo Portal Periódicos.

Dedicatória

Aos meus pais...

Conteúdo

Introdução

Utilizando métodos variacionais, argumentos do tipo Passo da Montanha e lemas de Concentração de Compacidade nos propomos a estudar a existência e multiplicidade de solução para problemas elípticos não-lineares em $\mathbb{R}^2$ com crescimento exponencial, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \Omega \\ \quad u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que possui crescimento subcrítico ou crítico, conforme definições abaixo. Também, estudamos problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u), & \mathbb{R}^2 \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{2}$$

onde $f(x,t) = o(t)$ próximo da origem[1] e $|f(x,t)| \leq Ce^{4\pi t^2}$ para todos $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, onde $C > 0$ é constante.

Um, dentre os dois fatos de destaque no presente texto é o estudo de desigualdades do tipo Trudinger-Moser cuja motivação é o comportamento dos funcionais de Euler-Lagrange associados aos problemas propostos nos capítulos 2 e 3. O outro fato é o uso do primeiro lema de Concentração de Compacidade de P.L. Lions quando nos depararmos com problemas de minimização em domínios não-limitados, ver capítulo 3.

Vários problemas de Biologia, Física e Geometria são formulados em termos de equações elípticas com não-linearidade exponencial. Um exemplo típico, segundo H.

[1] isto é, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$.

Ohtsuka e T. Suzuki, ver [17], é dado por:

$$-\Delta v = \frac{\lambda K(x)e^v}{\int_\Omega K(x)e^v dx}, \quad \text{em} \quad \Omega$$

com condição de Dirichlet, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $K(x) > 0$ é uma função diferenciável definida em $\overline{\Omega}$. Este problema está relacionado com a Teoria das Funções Complexas e Geometria Riemanniana. Se $K(x) \equiv 1$ então esta equação surge na formulação da quarta lei da termodinâmica envolvendo às relações temperatura-eletricidade, por Lars Onsager na Mecânica Estatística.

Em Geometria, outros exemplos são: O problema de Berger, ver [1] e [2]; e a descrição da equação da curvatura Gaussiana por J.L. Kazdan e F.W. Warner, conforme [17], a saber

$$-\Delta_g v = \lambda \left(\frac{Ve^v}{\int_M Ve^v dv_g} - W \right), \quad \text{em} \quad M$$

onde (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta e V, W são funções diferenciáveis sobre M satisfazendo $V > 0$ em algum lugar e $\int_M W dv_g = 1$. Em particular, se (M, g) é um toro planar, $\lambda = 4\pi$, $W = 1/|M|$ e $V = e^{u_0}$ com $u_0 = u_0(x)$ satisfazendo

$$-\Delta u_0 = \frac{4\pi N}{|M|} - 4\pi \sum_{j=1}^{N} \delta_{p_j}(dx), \quad \text{em} \quad M$$

com $\displaystyle\int_M u_0 = 0$ e $N \in \mathbb{N}$, então este trata-se do problema estudado por G. Taratello como um caso limite na Teoria de Cher-Simons-Higgs sobre super condutividade em altas temperaturas.

Quanto ao problema de Berger: "Toda variedade Riemanniana compacta (M, g) bidimensional, admite métrica conforme à g cuja curvatura escalar é constante", considerando a métrica conforme g' de g, Melvyn Berger provou este resultado usando métodos variacionais, conforme [1].

Seja $g' = e^\varphi g$. Então, o problema enunciado acima equivale a equação

$$\Delta\varphi + R = R'e^\varphi$$

onde R' é constante. Aqui, R denota a curvatura escalar de (M, g) e R' denota a curvatura escalar de (M, g').

O problema de Berger surge como "uma introdução" ao problema de Yamabe, ver [1], [2] e [16]: "Toda variedade Riemanniana compacta (M, g) n-dimensional com $n \geq 3$, admite métrica conforme à g cuja curvatura escalar é constante".

No **capítulo 1**, estudamos o funcional de Euler-Lagrange em $\mathbb{R}^2$, damos atenção às desigualdades do tipo Trudinger-Moser, motivados por [4], [5], [9], [14], [16] e [19].

No que segue onde se lê: *solução* do problema em questão, entenda: *solução fraca* do referido problema. Além disso, d denota o raio interno de Ω, isto é, d é o raio da maior bola aberta contida em Ω, e a seqüência de autovalores do operador $(-\triangle, H_0^1(\Omega))$ é denotada por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ (ver [7]).

Propomo-nos no **capítulo 2** a estudar problemas do tipo (1). Admitiremos em um momento que f possui crescimento subcrítico no seguinte sentido:

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0 \text{ para todo } \alpha > 0$$

Neste caso, estudaremos a existência e multiplicidade de solução para o problema. Conforme os seguintes resultados:

Teorema 0.1 (O caso subcrítico com mínimo local em 0) *Supondo que f possui crescimento subcrítico e satisfaça às seguintes condições:*
$(h.1)$ $f(x,0) = 0$ *para todo* $x \in \Omega$.
$(h.2)$ *Existem* $t_0 > 0$ *e* $M > 0$, *tais que*

$$0 < F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \leq M|f(x,t)| \quad \textit{para todos } |t| \geq t_0, x \in \Omega.$$

$(h.3)$ $0 < F(x,t) \leq \dfrac{1}{2} f(x,t)t$ *para todos* $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \in \Omega$.

(h.4) $\displaystyle\limsup_{t\to 0} \frac{2F(x,t)}{t^2} < \lambda_1$ *uniformemente em* Ω.

Então, o problema em questão possui uma solução não-trivial. Além disso, se $f(x,t)$ é uma função ímpar em t, então o problema em questão possui infinitas soluções.

Teorema 0.2 (O caso subcrítico com sela em 0) *Supondo (h.1), (h.2), (h.3) e que f possua crescimento subcrítico. Além disso, suponha que*
$(h.5)$ *Existem* $\delta > 0$, $\lambda_k \leq \mu < \lambda_{k+1}$ *tais que*

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2 \quad \textit{para todos } x \in \Omega, |t| \leq \delta.$$

$(h.6)$ $F(x,t) \geq \dfrac{1}{2}\lambda_k t^2$ *para todos* $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$.

Então, o problema em questão possui uma solução não-trivial. Além disso, se ao invés de (h.6) supormos que $f(x,t)$ seja uma função ímpar em t, então o problema em questão possui infinitas soluções.

Noutro momento, assumiremos que a função f possui um crescimento crítico no seguinte sentido: existe $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= 0 \text{ para todo } \alpha > \alpha_0 \\ \lim_{t\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= \infty \text{ para todo } \alpha < \alpha_0.\end{aligned}$$

Sendo este o caso, estudaremos a existência de solução para o problema em questão. Conforme o resultado:

Teorema 0.3 (O caso crítico com mínimo local em 0) *Supondo (h.1), (h.2), (h.3) e que f possua crescimento crítico com α_0. Além disso, supondo (h.4) e*

(h.7) $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(x,t)e^{-\alpha_0 t^2} \geq \beta$ *com* $\beta > \dfrac{4}{M_0\alpha_0 d^2}$,

onde M_0 é definido[2] *por*

$$M_0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{n(t^2-t)}dt.$$

Então, o problema em questão possui uma solução não-trivial.

No **capítulo 3**, usando fortemente a Simetrização de Schwarz, ver O. Kavian [15] e M. Willem [21], e os resultados discutidos no capítulo 1 deste trabalho, estudamos problemas do tipo (2). Usamos o primeiro lema de Concentração de Compacidade devido a P.L. Lions, ver [3], [10] e [16], para estudar existência de solução para o problema em questão. Conforme os resultados:

Teorema 0.4 *Supondo que $f \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Além disso, assumindo às hipóteses:*

(f.1) $|f(x,t)| \leq Ce^{4\pi t^2}$ *para todos $x \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$, onde $C > 0$ é constante.*

(f.2) A função $\dfrac{f(x,t)}{t}$ *é não-decrescente com relação a $|t|$;*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} &= 0 \quad \textit{uniformemente em} \quad \mathbb{R}^2; \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t} &= +\infty \quad \textit{uniformemente em} \quad \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

(f.3) Existe $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *tal que*

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \leq \theta t f(x,t) \quad \textit{para todos} \quad x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}.$$

[2]ver Observação 2.1.

(f.4) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,t) = \overline{f}(t)$ *uniformemente quando* t *é limitado.*

(f.5) $f(x,t) \geq \overline{f}(t) > \dfrac{p}{2}S_p^p(1-2\theta)^{1-\frac{p}{2}}|t|^{p-2}t$ *para todos* $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, *onde* $2 < p < +\infty$,

$$S_p = \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^2)\\ u\neq 0}} \frac{[\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+u^2)]^{\frac{1}{2}}}{(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^p)^{\frac{1}{p}}},$$

$f(x,t) \neq \overline{f}(t)$ *para* $t \in \mathbb{R}$ *com relação a* $x \in \mathbb{R}^2$.

Então, o problema em questão possui uma solução não-trivial.

Teorema 0.5 *Supondo que* f *verifique as condições* $(f.1)-(f.4)$ *e à condição:*
(f'.5) $f(x,t) > 0$ *para todos* $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ *e* $f(x,t) \geq \overline{f}(t) > \frac{p}{2}S_p^p(1-2\theta)^{1-\frac{p}{2}}|t|^{p-2}t$ *para todos* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $t \geq 0$, *onde* $2 < p < +\infty$ *e* S_p *foi definido no Teorema 0.4. Além disso,*

$$f(x,t) > \overline{f}(t) \text{ para todo } (x,t) \in \Omega \times (0,\delta)$$

onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *é um domínio com medida positiva e* $\delta > 0$.

Então, o problema em questão possui uma solução positiva.

No **Apêndice A** estudamos as estimativas do pontencial, a fim de discutir desigualdades do tipo Trudinger-Moser.

Dedicamos o **Apêndice B** a alguns dos resultados da Teoria dos Pontos Críticos utilizados no decorrer deste trabalho.

Bons textos sobre os resultados discutidos no capítulo 1 são [4], [16] e [19], a saber, em [16] o autor faz uma observação sobre o tratamento de J. Moser à desigualdade ótima de Sobolev.

Para os resultados discutidos no capítulo 2, sugerimos J.M.B. do Ó [4] e Figueiredo [13], a saber, em [4] o autor faz uso de argumentos análogos aos que usamos neste capítulo para estudar problemas do tipo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u = f(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $a : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo as condições de crescimento:

$$\begin{aligned} |a(u)u^{p-1}| &\leq \eta|u|^{p-1} + \zeta \text{ para todo } u \in [0,+\infty) \\ |f(x,u)| &\leq c(1+|u|^{r-1}) \text{ para todo } (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq r < p*$, com $p* = +\infty$ se $N > p$ e $p* = \dfrac{Np}{N-p}$ se $1 \leq N \leq p$.

Sobre os resultados do capítulo 3, bons textos são [5] e [9], a saber, em [5] o autor estuda problemas do tipo:

$$\begin{cases} -\text{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) + a(x)|u|^{N-2}u = f(x,u), & \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde a é uma função contínua coerciva, isto é, $a(x) \longrightarrow +\infty$ quando $|x| \longrightarrow \infty$ e f possui crescimento crítico.

Notações

A seguir, fixaremos algumas das notações usadas no decorrer deste trabalho.

$(i.)$ A integral da função mensurável $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num subconjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é denotada

$$\int_\Omega u(x)dx = \int_\Omega u$$

$(ii.)$ As integrais cujos domínios não estejam indicados, são tomadas sobre todo $\mathbb{R}^N$.

$(iii.)$ Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω.

$(iv.)$ As autofunções de $(-\triangle, H_0^1(\Omega))$ associadas ao autovalor λ_j são denotada por ϕ_j, e V_{λ_j} denota o subespaço do $H_0^1(\Omega)$ associado ao autovalor λ_j.

Capítulo 1

O funcional de Euler-Lagrange em $\mathbb{R}^2$

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, para $\alpha > 0$ a função f satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|f(x,t)| \leq C(e^{\alpha t^2} - 1) + b|t| \ \text{ para todos } \ x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

onde $b, C > 0$ são constantes.

Nesta seção, estudaremos as propriedades do funcional de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_\Omega F(x,u) \end{aligned}$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$.

A seguir, nos dedicaremos às desigualdades do tipo Trudinger-Moser, ver [4], [5], [9], [14] e [19] usadas fortemente no estudo das propriedades do funcional de Euler-Lagrange definido acima.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Trudinger-Moser) *Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existem constantes c_1, $c_2 > 0$, tais que*

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{u}{c_1||\nabla u||_2}\right)^2} \leq c_2|\Omega|.$$

Prova. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, como $f = |\nabla u| \in L^2(\Omega)$ pelo Lema A.2, existem constantes $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2 > 0$ com $\overline{c}_1^2 > 2\pi e$, tais que

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{V_{1/2}|\nabla u|}{\overline{c}_1||\nabla u||_2}\right)^2} \leq \overline{c}_2|\Omega|.$$

Pela Observação A.1, obtemos

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{2\pi u}{\overline{c}_1||\nabla u||_2}\right)^2} \leq \int_\Omega e^{\left(\frac{V_{1/2}|\nabla u|}{\overline{c}_1||\nabla u||_2}\right)^2} \leq \overline{c}_2|\Omega|,$$

escrevendo $c_1 = \overline{c}_1/2\pi > 0$ e $c_2 = \overline{c}_2 > 0$, temos

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{u}{c_1||\nabla u||_2}\right)^2} \leq c_2|\Omega|.$$

■

Conforme B. Ruf, ver [20]. Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, onde $N > 2$. Desejamos estimar desigualdades do tipo

$$\sup_{||\nabla u||_2 \leq 1} \int_\Omega g(u) < +\infty,$$

para uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ com crescimento máximo.

A priori, sabendo da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq 2^*$. A função

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ s & \longmapsto & g(s) = |s|^p, \end{array}$$

onde $1 \leq p \leq 2^*$ é uma solução. Além disso,

$$\sup_{||\nabla u||_2 \leq 1} \int_\Omega |u|^p, \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq 2^*$$

é infinito para $p > 2^*$. Vale ressaltar que o caso $p = 2^*$ é conhecido como o crescimento crítico de Sobolev. Uma forma *sharp* deste resultado afirmando que o crescimento máximo é do tipo exponencial, segundo P.L. Lions, ver [16], foi provada por S.I. Pohozhaev em 1965 no artigo: *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$; N. Trudinger em 1967 no artigo: *On the imbeding Orlicz space and some applications*; e T. Aubin em 1970 no artigo: *Sur la function exponentielle*, o seguinte resultado:

Seja $u \in W_0^1(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}} < \infty \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Uma estimativa *sharp* deste resultado foi provada por J. Moser em 1971 no seu artigo: *A sharp form of an inequality of N. Trudinger*; ver [16], que diz, se

$\alpha_N = N\omega_{N-1}$, onde ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensional. Por exemplo, caso $N=2$, $\alpha_2 = 4\pi$. Então,

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{N/(N-1)}} \leq C|\Omega|, \quad \text{desde que} \quad ||\nabla u||_2^2 \leq 1,$$

onde α_N é a melhor constante no seguinte sentido: $e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}} \in L^1(\Omega)$ para todo $\alpha > 0$, mas α_N é a maior constante tal que $e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}$ é limitada na norma em L^1 independente de u.

O resultado citado acima é:

Teorema 1.2 *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então,*

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2} < \infty \textit{ para todo } \alpha > 0. \tag{1.2}$$

Além disso, se $||\nabla u||_2^2 \leq 1$, então existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2} \leq C|\Omega| \textit{ desde que } \alpha \leq 4\pi \tag{1.3}$$

A prova do próximo resultado é devida a P.L. Lions em 1985, ver [16]

Corolário 1.3 *Seja (u_n) em $H_0^1(\Omega)$, tal que $||\nabla u_n||_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ com $||\nabla u||_2 < 1$. Se $u \neq 0$, então para cada $1 < p < \dfrac{1}{1 - ||\nabla u||_2^2}$, temos*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} < \infty. \tag{1.4}$$

Prova. Inicialmente, observe que

$$||\nabla(u_n - u)||_2^2 = 1 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + ||\nabla u||_2^2 \longrightarrow 1 - ||\nabla u||_2^2.$$

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$p < \frac{1}{||\nabla(u_n - u)||_2^2} \quad \text{sempre que } n \geq n_0.$$

Dessa forma, usando o Teorema 1.2, obtemos

$$\int_\Omega e^{4\pi p(u_n - u)^2} \leq \int_\Omega e^{4\pi\left(\frac{u_n - u}{||\nabla(u_n - u)||_2}\right)^2} \leq C,$$

para n suficientemente grande, onde $C = C(\Omega) > 0$.

Vale observar que até agora mostramos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega e^{4\pi p(u_n - u)^2} < \infty \quad \text{para todo} \quad 1 < p < \frac{1}{1 - ||\nabla v||_2^2}. \tag{1.5}$$

Agora fixemos $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon^2)^2 p < \dfrac{1}{1-||\nabla u||_2^2}$. Veja que

$$u_n^2 = u^2 + 2u(u_n - u) + (u_n - u)^2 \leq (1+\epsilon^{-2})u^2 + (1+\epsilon^2)(u_n - u)^2$$

ou seja,

$$e^{4\pi u_n^2} \leq e^{4\pi(1+\epsilon^{-2})u^2} e^{4\pi(1+\epsilon^2)(u_n-u)^2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, primeira parte do Teorema 1.2 e (1.5) para $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{(1+\epsilon^2)p}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{4\pi(1+\epsilon^{-2})u^2} &\in L^q(\Omega) \\ e^{4\pi(1+\epsilon^2)(u_n-u)^2} &\in L^{(1+\epsilon^2)p}(\Omega) \end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} \leq \left(\int_\Omega e^{4\pi(1+\epsilon^{-2})qu^2}\right)^{p/q} \left(\int_\Omega e^{4\pi(1+\epsilon^2)^2 p(u_n-u)^2}\right)^{1/(1+\epsilon^2)}$$

Portanto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega e^{4\pi p u_n^2} < \infty.$$

■

Lema 1.1 (Lema Radial, ver Kavian [15]) *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$ é uma função radialmente simétrica e não-crescente (isto é, $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|y| \leq |x|$), então*

$$|u(x)| \leq |x|^{-N/p} \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{1/p} ||u||_p, \; x \neq 0,$$

onde ω_{N-1} é a medida da esfera unitária (N-1)-dimensional. Por exemplo, caso $N = 2$, $\omega_1 = 2\pi$.

Prova. Seja $x \neq 0$, escrevendo $r = |x| > 0$, temos

$$\begin{aligned} ||u||_p^p &= \int_0^\infty \left(\int_{|y|=1} s^{N-1}|u(s)|^p dS_y\right) ds \\ ||u||_p^p &\geq \omega_{N-1}\int_0^r |u(s)|^p s^{N-1} ds \\ ||u||_p^p &\geq \omega_{N-1}|u(r)|^p \int_0^r s^{N-1} ds \end{aligned}$$

e portanto,

$$|u(r)|^p \leq r^{-N}||u||_p^p \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right).$$

■

A seguir trataremos das desigualdades do tipo Trudinger-Moser em $H^1(\mathbb{R}^2)$, isto é, no caso $\Omega = \mathbb{R}^2$. A prova do próximo resultado pode ser encontrado em J.M.B. do Ó, ver [5] e D.M. Cao, ver [9].

Teorema 1.4 (Trudinger-Moser) *Se $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int (e^{\alpha u^2} - 1) < \infty.$$

Além disso, se $||\nabla u||_2 \leq m < 1$, $||u||_2 \leq M < \infty$ e $\alpha \leq 4\pi$, então existe uma constante $C > 0$ que depende somente de α e M, tal que

$$\int (e^{\alpha u^2} - 1) \leq C.$$

Prova. Sobre a primeira parte do Teorema. Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Sem perda de generalidade, considere $u \geq 0$. Assim podemos substituir u por $|u|$ e por conseguinte, fazer uso do Método da Simetrização de Schwarz, ver [15]. Das propriedades básicas do método algumas merecem destaque para o que nos propomos fazer.

$(p.1)$ Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que $u \geq 0$. Então, existe uma única função não-negativa $u^* \in L^p(\mathbb{R}^2)$ chamada a Simetrização de Schwarz de u, onde u^* é uma função radialmente simétrica não-crescente de $|x|$;

$(p.2)$ Para todo $\lambda > 0$, temos

$$|\{x \in \mathbb{R}^2; u^*(x) \geq \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R}^2; u(x) \geq \lambda\}|$$

e existe $R_\lambda > 0$, tal que $\{x \in \mathbb{R}^2; u^*(x) \geq \lambda\}$ é uma bola em $\mathbb{R}^2$ centrada na origem de raio R_λ;

$(p.3)$ Se $G : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ é uma função contínua crescente com $G(0) = 0$. Então,

$$\int G(u^*) = \int G(u)$$

e finalmente, se $u \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$ então $u^* \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$ e $\displaystyle\int |\nabla u^*|^2 \leq \int |\nabla u|^2$.

De volta ao Teorema 1.4, por $(p.3)$, temos

$$\int (e^{\alpha u^2} - 1) = \int (e^{\alpha |u^*|^2} - 1)$$

e para um número real $r > 1$ a ser determinado, temos

$$\int (e^{\alpha u^2} - 1) = \int_{|x|<r} (e^{\alpha |u^*|^2} - 1) + \int_{|x|\geq r} (e^{\alpha |u^*|^2} - 1)$$

Com isso,

$$\int (e^{\alpha u^2} - 1) \leq \int_{|x|<r} e^{\alpha |u^*|^2} + \int_{|x|\geq r} (e^{\alpha|u^*|^2} - 1).$$

O que faremos agora é estudar a integral

$$\int_{|x|<r} e^{\alpha|u^*|^2}$$

No que segue denotaremos a função u^* simplesmente por u. Considerando a função $v(x) = u^*(x) - u^*(rx_0)$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^2$ com $|x_0| = 1$, temos $v(x) = 0$ se, e somente se, $|x| = r$. Assim, $v \in H_0^1(B_r)$, onde B_r denota a bola de raio r centrada na origem em $\mathbb{R}^2$.

Por outro lado, sejam p e p' índices conjugados[1]. Para todo $\epsilon > 0$ a desigualdade de Young, ver Brezis [7] com $\epsilon^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$ e $\epsilon^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$ implica que

$$(\epsilon^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}})(\epsilon^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}) \leq \frac{(\epsilon^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{(\epsilon^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}})^2}{2}$$

Com isso,

$$u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon u + \epsilon^{-1} v \quad \text{para todos } u, v \geq 0. \tag{1.6}$$

Assim,

$$|u(x)|^2 = |v(x) - u(rx_0)|^2 \leq |v(x)|^2 + |u(rx_0)|^2 + 2|v(x)||u(rx_0)|$$

e por (1.6), temos

$$\begin{aligned} |v(x)||u(rx_0)| &= (|v(x)|^2)^{1/2} (|u(rx_0)|^2)^{1/2} \\ |v(x)||u(rx_0)| &\leq \frac{\epsilon}{2} |v(x)|^2 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{-1} |u(rx_0)|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq |v(x)|^2 + |u(rx_0)|^2 + \epsilon |v(x)|^2 + \frac{4}{\epsilon} |u(rx_0)|^2 \\ |u(x)|^2 &\leq (1+\epsilon)|v(x)|^2 + k(\epsilon)|u(rx_0)|^2, \end{aligned}$$

onde $k(\epsilon) = 1 + \dfrac{4}{\epsilon}$.

Portanto,

$$\int_{|x|<r} e^{\alpha u^2} \leq e^{\alpha k(\epsilon)|u(rx_0)|^2} \int_{|x|<r} e^{\alpha(1+\epsilon)v^2} < \infty \tag{1.7}$$

[1] isto é, p e p' são números reais positivos com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

conforme o Teorema 1.2.

Agora, estudaremos a integral

$$\int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1)$$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1) &= \int_{|x|\geq r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}u^{2k}\right)\\ \int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1) &\leq \alpha||u||_2^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{|x|\geq r}u^{2k}\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1, temos

$$\int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1)\leq \alpha||u||_2^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\left(\pi^{-1/2}||u||_2\right)^{2k}\int_{|x|\geq r}\frac{1}{|x|^{2k}}$$

Por outro lado, temos

$$\int_{|x|\geq r}\frac{1}{|x|^{2k}}=2\pi\int_r^{\infty}t^{1-2k}dt=\pi\frac{r^{2-2k}}{k-1}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1) &\leq \alpha||u||_2^2+\pi r^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha^k}{(k-1)k!}\left(\frac{||u||_2}{\pi^{1/2}r}\right)^{2k}\\ \int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1) &\leq \alpha||u||_2^2+\pi r^2\sum_{k=2}^{\infty}\alpha^k\left(\frac{||u||_2}{\pi^{1/2}r}\right)^{2k}\end{aligned}$$

Usando a Teoria das séries de números reais, ver Figueiredo [12] a série

$$\sum_{k=2}^{\infty}\alpha^k\left(\frac{||u||_2}{\pi^{1/2}r}\right)^{2k}$$

converge, desde que escolhamos $r>\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}||u||_2$. Então, considerando, por exemplo, $r=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}(1+M)$, concluímos que

$$\int_{|x|\geq r}(e^{\alpha u^2}-1)<\infty. \tag{1.8}$$

Por conseguinte, de (1.7) e (1.8) obtemos a primeira parte do teorema.

Sobre a segunda parte do Teorema. Seja $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$. Sem perda de generalidade, considere $u\geq 0$. Assim podemos fazer uso da Simetrização de Schwarz.

Por $(p.3)$, sabemos que

$$\int (e^{4\pi u^2} - 1) = \int (e^{4\pi |u^*|^2} - 1)$$

e para um número real $r > 1$ a ser determinado, temos

$$\int (e^{4\pi |u^*|^2} - 1) \leq \int_{|x|<r} e^{4\pi |u^*|^2} + \int_{|x|\geq r} (e^{4\pi |u^*|^2} - 1)$$

O que faremos agora é estudar a integral

$$\int_{|x|<r} e^{4\pi |u^*|^2}$$

No que segue denotaremos a função u^* simplesmente por u. Além disso, escrevendo $|x|^2 = r^2 e^{-t}$ e considerando a função $w(t) = 2\sqrt{\pi} u(x)$, obtemos

$$w'(t) = 2\sqrt{\pi} u'(s) \frac{ds}{dt}$$

onde $s = |x|$ $(s^2 = r^2 e^{-t})$ e $\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{s}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$w'(t) = -\sqrt{\pi} u'(s) s \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$|w'(t)|^2 = \pi s^2 |u'(s)|^2 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Com isso,

$$\int_{|x|<r} |\nabla u(x)|^2 = 2\pi \int_0^r s |u'(s)|^2 ds = \int_0^\infty |w'(t)|^2 dt \tag{1.9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<r} (\pi r^2)^{-1} e^{4\pi u^2} &= \int_0^r (\pi r^2)^{-1} 2\pi s e^{4\pi |u(s)|^2} ds \\
\int_{|x|<r} (\pi r^2)^{-1} e^{4\pi u^2} &= \int_0^r (\pi r^2)^{-1} 2\pi s e^{4\pi \frac{1}{4\pi} |w(t)|^2} \frac{s}{2} dt \\
\int_{|x|<r} (\pi r^2)^{-1} e^{4\pi u^2} &= \int_0^r (r^2)^{-1} s^2 e^{|w(t)|^2} dt
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{|x|<r} (\pi r^2)^{-1} e^{4\pi u^2} = \int_0^r e^{w^2(t) - t} dt \tag{1.10}$$

Assim, por (1.9) e pela desigualdade de Hölder, ver [7] temos

$$\begin{aligned}
w(t) &= w(0) + \int_0^t w'(s)ds \\
w(t) &\leq 2\pi^{1/2}u(rx_0) + \left(\int_0^\infty |w'(s)|^2 ds\right)^{1/2} t^{1/2} \\
w(t) &\leq 2\pi^{1/2}u(rx_0) + \left(\int_{|x|<r} |\nabla u|^2\right)^{1/2} t^{1/2} \\
w(t) &\leq 2\pi^{1/2}u(rx_0) + ||\nabla u||_2 t^{1/2}
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^2$ com $|x_0| = 1$.

Pela desigualdade de Young, para todos $t > 0$ e $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
|w(t)|^2 &\leq 4\pi|u(rx_0)|^2 + 4\pi^{1/2}u(rx_0)||\nabla u||_2 t^{1/2} + ||\nabla u||_2^2 t \\
|w(t)|^2 &\leq 4\pi|u(rx_0)|^2 + 4\left(\frac{\pi}{2\epsilon}\right)^{1/2} u(rx_0)||\nabla u||_2(2t\epsilon)^{1/2} + ||\nabla u||_2^2 t \\
|w(t)|^2 &\leq 4\pi|u(rx_0)|^2 + \frac{4\pi}{3}|u(rx_0)| + \epsilon||\nabla u||_2^2 t + ||\nabla u||_2^2 t \\
|w(t)|^2 &\leq 4\pi\frac{(\epsilon+1)}{\epsilon}|u(rx_0)|^2 + t(\epsilon+1)||\nabla u||_2^2
\end{aligned}$$

Com isso, usando (1.10), para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &= \pi r^2 \int_0^\infty e^{w^2(t)-t} \\
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \pi r^2 e^{4\pi\frac{(\epsilon+1)}{\epsilon}|u(rx_0)|^2} \int_0^\infty e^{(1+\epsilon)||\nabla u||_2^2 t - t} dt
\end{aligned}$$

Assim, considerando $\epsilon = \dfrac{1-m}{2m} > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \pi r^2 e^{4\pi\frac{1+m}{1-m}|u(rx_0)|^2} \int_0^\infty e^{\frac{1+m}{2m}||\nabla u||_2^2 t - t} dt \\
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \pi r^2 e^{\frac{8\pi}{1-m}|u(rx_0)|^2} \int_0^\infty e^{\left(\frac{m-1}{2}\right)t} dt \\
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \frac{2\pi r^2}{1-m} e^{\frac{8\pi}{1-m}|u(rx_0)|^2}
\end{aligned}$$

Logo, usando o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \frac{2\pi r^2}{1-m} e^{\frac{8\pi}{1-m}\frac{1}{r}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}||u||_2} \\
\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} &\leq \frac{2\pi r^2}{1-m} e^{\frac{8M\pi}{(1-m)r\sqrt{2\pi}}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{|x|<r} e^{4\pi u^2} \leq C, \tag{1.11}$$

onde $C = C(m, M, r)$.

Agora, estudaremos a integral

$$\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1).$$

Veja que,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\pi)^n u^{2n}}{n!} &= \int_{|x|\geq r} \left[4\pi u^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi)^n u^{2n}}{n!}\right] \\
\int_{|x|\geq r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\pi)^n u^{2n}}{n!} &= 4\pi \int_{|x|\geq r} u^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi)^n}{n!} \int_{|x|\geq r} u^{2n}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1) &\leq 4\pi ||u||_2^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi)^n}{n!} \int_{|x|\geq r} \frac{||u||_2^{2n}}{\pi^n |x|^{2n}} \\
\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1) &\leq 4\pi ||u||_2^2 + 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n ||u||_2^{2n}}{n!} \int_r^{\infty} s^{1-2n} ds \\
\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1) &\leq 4\pi ||u||_2^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n ||u||_2^{2n}}{n!} \frac{r^{2-2n}}{n-1} \\
\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1) &\leq 4\pi ||u||_2^2 + \pi r^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n ||u||_2^{2n}}{r^{2n}}
\end{aligned}$$

A série na expressão acima, converge desde que $r > 2||u||_2$. Então, escolhendo, por exemplo, $r = 2(1 + M)$, concluímos que a constante em (1.11) depende apenas de m e M. Além disso,

$$\int_{|x|\geq r} (e^{4\pi u^2} - 1) \leq C(M). \tag{1.12}$$

Portanto, de (1.11) e (1.12) tem-se o resultado. ■

Lema 1.2 *Sejam $1 \leq p < 2$ e $p^* = \dfrac{2p}{2-p}$. Se $h \in D^{1,p}(\mathbb{R}^2)$[2], então*

$$||h||_{p^*} \leq K(p) ||\nabla h||_p \tag{1.13}$$

onde

$$K(p) = \begin{cases} \dfrac{(\Gamma(3/2))^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}, & se \quad p = 1 \\[2ex] \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\dfrac{p-1}{2-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\dfrac{1}{\Gamma(\frac{2}{p})\Gamma(3-\frac{2}{p})}\right)^{\frac{1}{2}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

[2] $D^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ denota o espaço das funções $h \in L^{p^*}(\mathbb{R}^2)$ tais que $|\nabla h| \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

G. Talenti e T. Aubin [2] provaram, independentemente, o resultado acima, estudando problemas de minimização que envolviam desigualdades de Sobolev ótima.

A prova do próximo resultado é devida a D.M. Cao em 1992, ver [9].

Teorema 1.5 (Trudinger-Moser) *Dado* $0 < M < 1$, *existe* $C = C(M) > 0$ *tal que*

$$\int |u|(e^{4\pi u^2} - 1 - 4\pi u^2) \leq C||u||_2^2||\nabla u||_2 \quad \textit{para todo} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

tal que $4\pi e||\nabla u||_2^2 \leq M$.

Prova. Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $n \geq 2$. Considerando $h = |u|^\xi$, onde $\xi = \dfrac{2n+1}{2n-1}$, temos $h \in L^{p^*}(\mathbb{R}^2)$, onde $p^* = 2n-1$. Além disso, temos

$$|\nabla h(x)| = \xi |u(x)|^{\xi - 1}|\nabla u(x)| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Afirmação. $|\nabla h| \in L^p(\mathbb{R}^2)$, onde $p = 2 - \dfrac{4}{2n+1}$.

Prova da Afirmação. Vejamos,

$$\begin{aligned} \int |\nabla h|^p &= \xi^p \int |u|^{p(\xi-1)}|\nabla u|^p \\ \int |\nabla h|^p &= \xi^p \int |u|^{\frac{4}{2n+1}}|\nabla u|^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Além disso, podemos observar que

$$|u|^{\frac{4}{2n+1}} \in L^{\frac{2n+1}{2}}(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad |\nabla u|^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \in L^{\frac{2n+1}{2n-1}}(\mathbb{R}^2).$$

Logo, pela desigualdade de Hölder

$$\int |\nabla h|^p = \xi^p \int |u|^{\frac{4}{2n+1}}|\nabla u|^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} < \infty.$$

Com isso, usando o Lema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\int |u|^{2n+1}\right)^{\frac{2}{2n+1}} \leq \\ &\leq \left[K\left(2 - \frac{4}{2n+1}\right)\right]^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \int |u|^{\frac{4}{2n+1}}|\nabla u|^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \\ &\leq \left[K\left(2 - \frac{4}{2n+1}\right)\right]^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \left(\int |u|^2\right)^{\frac{2}{2n+1}} \left(\int |\nabla u|^2\right)^{\frac{2(2n-1)}{2n+1}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int |u|^{2n+1} \leq \left[K\left(2 - \frac{4}{2n+1}\right)\right]^{2n-1} \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{2n-1} ||u||_2^2||\nabla u||_2^{2n-1}$$

Agora, observe que

$$\left[K\left(2-\frac{4}{2n+1}\right)\right]^{2n-1}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{2n-1} \leq Cn^n,$$

onde $C > 0$.

Assim, obtemos uma desigualdade do tipo Gagliardo-Niremberg, ver [14]

$$\int |u|^{2n+1} \leq Cn^n ||u||_2^2 ||\nabla u||_2^{2n-1}$$

Com isso,

$$\int |u| \frac{(4\pi|u|^2)^n}{n!} \leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2 \frac{(4\pi||\nabla u||_2 n)^n}{n!} ||\nabla u||_2^{n-2}$$

Usando o fato de que $||\nabla u||_2^2 < 4\pi e$, para todo $m > 2$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m} \int |u| \frac{(4\pi|u|^2)^n}{n!} &\leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2 \sum_{n=2}^{m} \frac{(4\pi||\nabla u||_2 n)^n}{n!} ||\nabla u||^{n-2} \\
\int |u| \sum_{n=2}^{m} \frac{(4\pi|u|^2)^n}{n!} &\leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2 \sum_{n=2}^{m} \frac{(4\pi||\nabla u||_2 n)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando m tende ao infinito na expressão anterior e usando o Teorema da Convergência Monótona, ver [7], temos

$$\int |u| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi|u|^2)^n}{n!} \leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi||\nabla u||_2 n)^n}{n!}$$

Pelo Teste d'Alembert, a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi||\nabla u||_2 n)^n}{n!}$$

converge, desde que $||\nabla u||_2^2 < \dfrac{1}{4\pi e}$.

Portanto, existe $C > 0$ (independente de u), tal que

$$\begin{aligned}
\int |u| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4\pi|u|^2)^n}{n!} &\leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2 \\
\int |u|(e^{4\pi u^2} - 1 - 4\pi u^2) &\leq C||\nabla u||_2 ||u||_2^2.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.3 *Assumindo (1.1), a função F satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$|F(x,s)| \leq C|s|(e^{\alpha s^2} - 1) + bs^2 \quad \textit{para todos} \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Veja que (1.1) implica que f e $tf(x,t)$ satisfazem uma desigualdade do tipo (1.14).

Prova. Por simplicidade de notação, no que segue C e b denotam constantes genéricas estritamente positivas.

Veja que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned} |F(x,s)| &\leq \int_0^s |f(x,t)|dt \leq C\int_0^s (e^{\alpha t^2}-1)dt + b\int_0^s |t|dt \\ |F(x,s)| &\leq \int_0^s (e^{\alpha t^2}-1)dt + \frac{b}{2}s^2 \end{aligned}$$

Ora, a função

$$\begin{aligned} h : [0,s] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = e^{\alpha t^2} - 1 \end{aligned}$$

é contínua. Logo, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, ver [12], existe $c \in (0,s)$ tal que,

$$\int_0^s h(t) = h(c)s$$

ou seja,

$$\int_0^s (e^{\alpha t^2}-1)dt = (e^{\alpha c^2}-1)s \leq (e^{\alpha s^2}-1)s$$

Com isso,

$$|F(x,s)| \leq Cs(e^{\alpha s^2}-1) + bs^2 \tag{1.15}$$

Agora, se $s < 0$, então usando o mesmo argumento acima com $-s > 0$, obtemos

$$|F(x,s)| \leq C(-s)(e^{\alpha s^2}-1) + bs^2 \tag{1.16}$$

Portanto, de (1.15) e (1.16), obtemos

$$|F(x,s)| \leq C|s|(e^{\alpha s^2}-1) + bs^2 \text{ para todos } x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

■

Proposição 1.6 *Se (u_n) converge para u em $H^1(\Omega)$, então existem $h \in H^1(\Omega)$ e uma subseqüência (u_k) de (u_n) tais que: $u_k(x) \longrightarrow u(x)$ e $|u_k(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em Ω. Caso a convergência seja no espaço $H_0^1(\Omega)$, teremos $h \in H_0^1(\Omega)$.*

Prova. Da seqüência (u_n), não é difícil ver que podemos extrair uma subseqüência, denotada por (u_k) tal que

$$||u_{k+1} - u_k|| \leq \frac{1}{2^k} \ \text{ para todo } \ k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a função

$$\begin{aligned} g_n : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \end{aligned}$$

Como (g_n) é uma combinação linear de funções em $H^1(\Omega)$, temos $g_n \in H^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, (g_n) é uma seqüência monótona com

$$\begin{aligned} ||g_n||_2 &\leq \sum_{k=1}^{n} ||u_{k+1} - u_k||_2 \leq \sum_{k=1}^{n} ||u_{k+1} - u_k|| \\ ||g_n||_2 &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona de Beppo Levi, ver [7], concluímos que (g_n) converge q.t.p. em Ω para uma função $g \in L^2(\Omega)$.

Por outro lado, observe que

$$\nabla g_n = \sum_{k=1}^{n} \nabla |u_{k+1} - u_k| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, considerando $m, n \in \mathbb{N}$ com $2 \leq m \leq n$ (para fixar as idéias), obtemos

$$|g_n - g_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |u_{k+1} - u_k| \tag{1.17}$$

e

$$|\nabla g_n - \nabla g_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |\nabla u_{k+1} - \nabla u_k| \tag{1.18}$$

De (1.17) e (1.18) concluímos que a seqüência (g_n) é de Cauchy em $H^1(\Omega)$, por conseguinte $g \in H^1(\Omega)$. Além disso, veja que se $2 \leq m \leq n$, então

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq |u_n(x) - u_{n-1}(x)| + \ldots + |u_{m+1}(x) - u_m(x)| \leq g(x) - g_{m-1}(x)$$

q.t.p. em Ω, logo $(u_k(x))$ é de Cauchy, e $u_k(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω. Além disso,

$$|u(x) - u_k(x)| \leq g(x) \text{ para todo } k \neq 2$$

q.t.p. em Ω, e portanto,

$$|u_k(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

onde $h = u + g$. ■

Lema 1.4 *Se f satisfaz (1.1), então a aplicação de Nemytskii*

$$\begin{aligned} N_f : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow L^k(\Omega) \\ u &\longmapsto N_f(u) = f(\cdot, u(\cdot)) \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua para todo $k \geq 2$. Além disso, por (1.14) o mesmo resultado vale para $N_F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^k(\Omega)$.

Prova. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Por (1.1) e pela desigualdade de Young, para todo $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |f(x,u)|^2 &\leq 2C^2(e^{\alpha u^2} - 1)^2 + 2b^2|u|^2 \\ |f(x,u)|^2 &\leq 2C^2(e^{2\alpha u^2} - 2e^{\alpha u^2} + 1) + 2b^2|u|^2 \\ |f(x,u)|^2 &\leq 2C^2(e^{2\alpha u^2} - 1) + 2b^2|u|^2 \end{aligned}$$

e pelo Teorema 1.3 a aplicação $N_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ está bem definida.

Com um raciocínio análogo, obtemos

$$|f(x,u)|^4 \leq 8C^4(e^{4\alpha u^2} - 1) + 8b^4|u|^4 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

e a aplicação $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^4(\Omega)$ está bem definida. Usando este procedimento concluímos que a aplicação $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^k(\Omega)$ está bem definida para todo $k = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Por interpolação concluímos que a aplicação de Nemytskii está bem definida para todo $k \geq 2$.

Sobre a continuidade de N_f. Seja $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Pela Proposição 1.6 existe $h \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subseqüência, $|u_n(x)| \leq h(x)$ e $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω. Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^k(\Omega)$ com $k \geq 2$, temos $h \in L^k(\Omega)$. Além disso,

$$|N_f(u_n)| = |f(x,u_n)| \leq C(e^{\alpha h^2} - 1) + bh \in L^k(\Omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k \geq 2$. Pela continuidade de f, temos $N_f(u_n) \longrightarrow N_f(u)$ q.t.p. em Ω. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$||N_f(u_n) - N_f(u)||_k = o_n(1)^3$$

[3] $o_n(1)$ denota uma quantidade que tem limite zero quando n tende ao infinito.

Para o operador N_F a demonstração segue argumentos análogos. ■

Teorema 1.7 *Assumindo (1.1) o funcional* $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. *Além disso,*

$$J'(u) \cdot v = \int_\Omega f(x,u)v \quad \textit{para todos} \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Prova. A princípio, mostraremos que o funcional J está bem definido. Usando o Lema 1.3 e a desigualdade de Young, para todos $x \in \Omega$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
|F(x,u)| &\leq C|u|(e^{\alpha u^2} - 1) + bu^2 \\
|F(x,u)| &\leq Cu^2 + C(e^{2\alpha u^2} - 2e^{\alpha u^2} + 1) \\
|F(x,u)| &\leq Cu^2 + C(e^{2\alpha u^2} - 1).
\end{aligned}$$

O Teorema 1.4, implica que

$$\int_\Omega |F(x,u)| \leq C \int_\Omega |u|^2 + C \int_\Omega (e^{2\alpha u^2} - 1) < \infty \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Fixadas as funções $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$ e $t > 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(x,t) \in (0,1)$ tal que

$$F(x, u+tv) - F(x,u) = f(x, u+\theta tv)tv$$

ou melhor,

$$h_t(x) = \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u+\theta tv)v$$

Pela continuidade da função f, temos

$$h_t(x) \longrightarrow f(x,u)v \text{ quando } t \to 0.$$

Além disso, como $|u + \theta tv| \leq |u| + |v| = h \in H_0^1(\Omega)$, usando (1.1), obtemos

$$|h_t(x)| \leq |f(x, u+\theta tv)v| \leq C|v|(e^{\alpha h^2} - 1) + b|uv| + b|v|^2.$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$|h_t(x)| \leq C(e^{2\alpha h^2} - 1) + b_t|v|^2 + b|u|^2,$$

onde $h \in H_0^1(\Omega)$ e $b, b_t > 0$ são constantes.

Além disso,

$$C(e^{2\alpha h^2} - 1) + b_t|v|^2 + b|u|^2 \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, ver [7], concluímos que

$$J'(u)\cdot v = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \int_\Omega f(x,u)v.$$

Sobre a continuidade de J'. Seja $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, pela continuidade da aplicação de Nemytskii $N_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ a seqüência $(N_f(u_n))$ converge para $N_f(u)$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, se $v \in H_0^1(\Omega)$ com $||v|| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} |J'(u_n)\cdot v - J'(u)\cdot v| &\leq ||N_f(u_n) - N_f(u)||_2||v||_2^2 \\ |J'(u_n)\cdot v - J'(u)\cdot v| &\leq ||N_f(u_n) - N_f(u)||_2 \end{aligned}$$

Assim,

$$||J'(u_n) - J'(u)||_{H^{-1}(\Omega)} = o_n(1).$$

■

Agora, vejamos um resultado para $\Omega = \mathbb{R}^2$. Para isto, consideremos $\alpha = 4\pi$ e que f satisfaça a seguinte propriedade: para cada $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq C_\epsilon |s|(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2) + \epsilon s^2 \text{ para todos } x \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Observação 1.1 *As condições $(f.1)$ e $(f.2)$, ver Teorema 0.4, são suficientes para que f verifique a condição (1.19).*

Com efeito, por $(f.2)$, fixado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon s, \text{ se } |s| \leq \delta_\epsilon.$$

Logo,

$$|F(x,s)| \leq \frac{\epsilon}{2}s^2, \text{ se } |s| \leq \delta_\epsilon. \tag{1.20}$$

Por outro lado, se $|s| \geq \delta_\epsilon$ (trataremos o caso $s \geq \delta_\epsilon$, já que se $s \leq -\delta_\epsilon$ o argumento é análogo), então

$$\begin{aligned} |F(x,s)| &\leq \int_0^s |f(x,t)|dt = \int_0^{\delta_\epsilon} |f(x,t)|dt + \int_{\delta_\epsilon}^s |f(x,t)|dt \\ |F(x,s)| &\leq \int_0^{\delta_\epsilon} |f(x,t)|dt + \frac{C}{\delta_\epsilon}\int_{\delta_\epsilon}^s te^{4\pi t^2}dt \\ |F(x,s)| &\leq \frac{\epsilon}{3}\delta_\epsilon^3 + \frac{C}{8\pi\delta_\epsilon}[e^{4\pi s^2} - e^{4\pi\delta_\epsilon^2}] \\ |F(x,s)| &\leq C_{1,\epsilon} + \frac{C}{8\pi\delta_\epsilon}e^{4\pi s^2} \end{aligned}$$

Ora, se $|s| \geq \delta_\epsilon$*, então* $1 \leq \dfrac{s}{\delta_\epsilon}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} |F(x,s)| &\leq C_{0,\epsilon} + \frac{C}{8\pi\delta_\epsilon^2} s e^{4\pi s^2} \\ |F(x,s)| &\leq \left(\frac{C_{1,\epsilon}}{s e^{4\pi s^2}} + \frac{C}{8\pi\delta_\epsilon^2} \right) s e^{4\pi s^2} \\ |F(x,s)| &\leq \left(\frac{C_{1,\epsilon}}{\delta_\epsilon e^{4\pi\delta_\epsilon^2}} + \frac{C}{8\pi\delta_\epsilon^2} \right) s e^{4\pi s^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$|F(x,s)| \leq C_{2,\epsilon} s e^{4\pi s^2} \tag{1.21}$$

Afirmação. *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$e^{4\pi s^2} \leq C(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2), \quad \textit{desde que } s \geq \delta_\epsilon.$$

Prova da Afirmação. *Inicialmente, observemos que*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2}{e^{4\pi s^2}} = 1$$

Com isso, fixado $0 < \epsilon < 1$*, existe* $\delta_\epsilon^1 > 0$*, tal que*

$$(1-\epsilon)e^{4\pi s^2} \leq e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2,$$

desde que $|s| \geq \delta_\epsilon^1$*. Logo, por (1.20), temos*

$$|F(x,s)| \leq C_{2,\epsilon} s e^{4\pi s^2} \leq C_\epsilon s(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2), \tag{1.22}$$

se $s \geq \max\{\delta_\epsilon^1, \delta_\epsilon\} \geq \delta_\epsilon$*.*

Por (1.20) e (1.22), tem-se

$$|F(x,s)| \leq C_\epsilon s(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2) + \epsilon s^2 \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, existe $C_\epsilon > 0$*, tal que*

$$|F(x,s)| \leq C_\epsilon |s|(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2) + \epsilon s^2 \ \textit{para todos} \ \ x \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.5 (D.M. Cao) *Seja* (u_n) *uma seqüência em* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *com*

$$\int |u_n|^2 \leq M \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

para algum $M > 0$*, e suponhamos que exista* $R > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^2} \int_{B_R(z)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) = 0.$$

Se f *verifica (1.19), então*

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x,u_n) = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \int u_n f(x,u_n) = 0.$$

Prova. Escrevendo

$$s_n = \sup_{z\in\mathbb{R}^2} \int_{B_R(z)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, temos $s_n = o_n(1)$. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| > R \\ 1, & \text{se} \quad |x| \leq \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

com $|\nabla\varphi(x)| \leq \dfrac{4}{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Para cada $z \in \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{N}$, defina a função

$$\begin{array}{rcl} v_{z,n} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & v_{z,n}(x) = \varphi(x+z)u_n(x) \end{array}$$

Pela desigualdade de Young, para todos $z \in \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \int |\nabla v_{z,n}|^2 &\leq 2\int (|\nabla\varphi|^2|u_n|^2 + |\varphi|^2|\nabla u_n|^2) \\ \int |\nabla v_{z,n}|^2 &\leq \left(\frac{32}{R^2} + 2\right) \int_{B_R(z)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) \\ \int |\nabla v_{z,n}|^2 &\leq \left(\frac{32}{R^2} + 2\right) s_n. \end{aligned}$$

Dado $0 < \epsilon < \left[\left(\dfrac{32}{R^2} + 2\right) 4\pi e\right]^{-1}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$s_n < \epsilon < \left[\left(\frac{32}{R^2} + 2\right) 4\pi e\right]^{-1} \text{ se } n \geq n_0.$$

De onde temos

$$\int |\nabla v_{z,n}|^2 \leq \frac{1}{4\pi e} \tag{1.23}$$

sempre que $n \geq n_0$.

Por outro lado, pela condição (1.19), para todos $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |F(x,u_n)| &\leq C_\epsilon \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |u_n|(e^{4\pi u_n^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) + \epsilon \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |u_n|^2 \\ \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |F(x,u_n)| &\leq C_\epsilon \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |v_{z,n}|(e^{4\pi|v_{z,n}|^2} - 1 - 4\pi|v_{z,n}|^2) + \epsilon \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |u_n|^2 \\ \int_{|x-z|\leq\frac{R}{2}} |F(x,u_n)| &\leq C_\epsilon \int |v_{z,n}|(e^{4\pi|v_{z,n}|^2} - 1 - 4\pi|v_{z,n}|^2) + \epsilon \int_{|x-z|\leq R} |u_n|^2 \end{aligned}$$

Por (1.23) e usando o Teorema 1.5, para todo $z \in \mathbb{R}^2$ para $n \geq n_0$, obtemos

$$\int_{|x-z|\leq \frac{R}{2}} |F(x,u_n)| \leq CC_\epsilon ||\nabla v_{z,n}||_2 ||v_{z,n}||_2^2 + \epsilon \int_{|x-z|\leq R} |u_n|^2$$

Observe que, para todo $z \in \mathbb{R}^2$, temos

$$||v_{z,n}||_2 \leq \int_{|x-z|\leq R} |u_n|^2$$

logo, para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x-z|\leq \frac{R}{2}} |F(x,u_n)| &\leq (CC_\epsilon ||\nabla v_{z,n}||_2 + \epsilon) \int_{|x-z|\leq R} |u_n|^2 \\ \int_{|x-z|\leq \frac{R}{2}} |F(x,u_n)| &\leq (CC_\epsilon \sqrt{s_n} + \epsilon) \int_{|x-z|\leq R} |u_n|^2 \end{aligned}$$

Considerando o conjunto $\Sigma = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2;\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ e fixando uma enumeração do mesmo, podemos cobrir o $\mathbb{R}^2$ com a família de bolas abertas $\{B_{R/2}(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde z_k é o k-ésimo elemento do conjunto Σ considerando a enumeração fixada acima. Assim, cada ponto do $\mathbb{R}^2$ pertence no máximo a m bolas em $\{B_{R/2}(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Logo, para cada $z \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B_{R/2}(z_k)}(z) \leq m. \tag{1.24}$$

Com efeito, se $z \in \mathbb{R}^2$, como z pertence a no máximo m bolas centradas em $z_k's$ de raio R, então

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_R(z_k)}(z) \leq m, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e isto implica que (1.24) se verifica como verdade. Assim, para $n \geq n_0$, temos

$$\int |F(x,u_n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{R/2}(z_k)} |F(x,u_n)| \leq (CC_\epsilon \sqrt{s_n} + \epsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{R/2}(z_k)} |u_n|^2 \tag{1.25}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{R/2}(z_k)} |u_n|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \chi_{B_{R/2}(z_k)} |u_n|^2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{R/2}(z_k)} |u_n|^2 &= \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B_{R/2}(z_k)} \right) |u_n|^2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{R/2}(z_k)} |u_n|^2 &\leq m \int |u_n|^2 \leq mM. \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por (1.25), se $n \geq n_0$

$$\int |F(x,u_n)| \leq (CC_\epsilon \sqrt{s_n} + \epsilon)mM$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \int |F(x,u_n)| \leq mM\epsilon$$

logo,

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |F(x,u_n)| \leq \limsup_{n\to\infty} \int |F(x,u_n)| \leq mM\epsilon$$

e isto completa a demonstração de um dos limites. De maneira análoga, observa-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n f(x,u_n) = 0.$$

concluindo a prova. ■

Lema 1.6 (Djairo-Olímpio-Ruf) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado e* (u_n) *uma seqüência em* $L^1(\Omega)$ *tal que* $u_n(x)$ *converge para* $u(x)$ *q.t.p. em* Ω, *onde* $u \in L^1(\Omega)$. *Seja* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

$$\int_\Omega |f(x,u_n)| + \int_\Omega |f(x,u)| < \infty \textit{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e suponha que exista $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| \leq C \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n) = \int_\Omega f(x,u).$$

Prova. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependente de ϵ) tal que

$$\int_A |f(x,u)| \leq \epsilon, \text{ se } |A| < \delta.$$

e como $u \in L^1(\Omega)$ existe $M_1 > 0$, com $|\{x \in \Omega; |u(x)| \geq M_1\}| < \delta$. Considerando $M = \max\{M_1, (4\epsilon)^{-1}C\} > 0$, temos

$$\left| \int_\Omega f(x,u_n) - \int_\Omega f(x,u) \right| \leq \int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| + \int_{|u|\geq M} |f(x,u)| + r_n$$

onde

$$r_n = \left| \int_{|u_n|<M} f(x,u_n) - \int_{|u|<M} f(x,u) \right|.$$

No que segue mostraremos que as integrais

$$\int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| \text{ e } \int_{|u|\geq M} |f(x,u)|$$

são pequenas e estimaremos r_n.

Vejamos, da escolha de M, temos

$$\int_{|u_n|\geq M} |f(x,u_n)| \leq \int_{|u_n|\geq M} \frac{|f(x,u_n)u_n|}{M} \leq \int_{\Omega} \frac{|f(x,u_n)u_n|}{M} \leq \frac{C}{M} \leq \frac{\epsilon}{4}$$

e da escolha de δ e M_1

$$\int_{|u|\geq M} |f(x,u)| \leq \int_{|u|\geq M_1} |f(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Denotando

$$r_n = \left| \int_{\Omega} q_n(x) \right| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

onde $q_n(x) = \chi_{|u_n|<M} f(x,u_n) - \chi_{|u|<M} f(x,u)$, temos

$$q_n(x) = s_n(x) + t_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = \chi_{|u_n|<M}(x)[f(x,u_n) - f(x,u)]$$

e

$$t_n(x) = [\chi_{|u_n|<M} - \chi_{|u|<M}](x) f(x,u)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando que $\{|u_n| < M\} \diagdown \{|u| < M\} \subset \{|u| \geq M\}$, vemos

$$\left| \int_{\Omega} t_n(x) \right| = \left| \int_{\Omega} [\chi_{|u_n|<M} - \chi_{|u|<M}](x) f(x,u) \right| \leq \int_{|u|\geq M} |f(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Por outro lado, como $s_n = o_n(1)$ q.t.p em Ω, e

$$|s_n(x)| = |\chi_{|u_n|<M}(x)[f(x,u_n) - f(x,u)]| \leq \overline{C} + |f(x,u)|$$

q.t.p em Ω, onde $\overline{C} = \sup\{f(x,s); x \in \Omega, |s| \leq M\}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega} |s_n(x)| < \frac{\epsilon}{4} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Combinando as desigualdades acima, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} f(x,u_n) - \int_{\Omega} f(x,u) \right| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

■

Lema 1.7 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado e* (u_n) *uma seqüência em* $L^1(\Omega)$ *tal que* $u_n(x)$ *converge para* $u(x)$ *q.t.p. em* Ω*, onde* $u \in L^1(\Omega)$*. Além disso, sejam* $V \in L^1(\Omega)$ *e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

$$\int_\Omega |f(x,u_n)| + \int_\Omega |f(x,u)| < \infty \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Também, suponha que exista $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq C \textit{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e que f *satisfaça a seguinte desigualdade*

$$f(x,s)s \geq -V(x) - s^2 \textit{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Se $||u_n||_2$ *é limitada, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n) = \int_\Omega f(x,u).$$

Prova. Pelo Lema 1.6, basta observar que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos, sejam $\Omega_n^+ = \{x \in \Omega; f(x,u_n) \geq 0\}$ e $\Omega_n^- = \Omega \diagdown \Omega_n^+$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| = \int_{\Omega_n^+} f(x,u_n)u_n - \int_{\Omega_n^-} f(x,u_n)u_n$$

e

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n = \int_{\Omega_n^+} f(x,u_n)u_n + \int_{\Omega_n^-} f(x,u_n)u_n$$

Com isso,

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| = \int_\Omega f(x,u_n)u_n - 2\int_{\Omega_n^-} f(x,u_n)u_n \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega_n^-} f(x,u_n)u_n \geq -\int_\Omega (V(x) + |u_n|^2) \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando as desigualdades acima e a limitação de V, obtemos

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| \leq C + 2\int_\Omega (V(x) + |u_n|^2) \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}$$

que juntamente com o Lema 1.6 garantem o resultado em questão. ■

Teorema 1.8 *Suponha que* (u_n) *seja uma seqüência limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n(x)$ *converge para* $u(x)$ *q.t.p. em* Ω*, onde* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $u_n \longrightarrow u$ *em* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$*,* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e*

$$J'(u_n) \cdot \varphi = \int (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi) - \int f(x, u_n)\varphi = o_n(1) \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (1.26)$$

Então, u *é a solução fraca de* $-\triangle u + u = f(x, u)$ *no sentido* $H^1(\mathbb{R}^N)$*.*

Prova. Vamos usar o Lema 1.6 para a função $\widetilde{f}(x, s) = f(x, s)\varphi(x)$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e supp$\varphi \subset \Omega$. Note que

$$\int_\Omega \widetilde{f}(x, u_n)u_n = \int f(x, u_n)(\varphi u_n) = o_n(1) + \int [\nabla u_n \nabla(\varphi u_n) + u_n(\varphi u_n)]$$

ou seja,

$$\left| \int_\Omega \widetilde{f}(x, u_n)u_n \right| \leq o_n(1) + 2||u_n||^2||\varphi||_\infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O Lema 1.6, implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x, u_n)\varphi = \int f(x, u_n)\varphi \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, de $u_n \longrightarrow u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi) = \int (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Agora, passando ao limite em (1.26) quando n tende ao infinito, obtemos

$$\int (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) = \int f(x, u)\varphi \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Um problema elíptico com crescimento exponencial num domínio limitado do $\mathbb{R}^2$

2.1 Introdução

Propomo-nos neste capítulo a estudar problemas do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Além disso, f possui crescimento subcrítico e crítico, conforme definições abaixo:

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado.

Definição 2.1 *Dizemos que uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui crescimento subcrítico em $+\infty$ quando,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0 \text{ para todo } \alpha > 0$$

e f possui crescimento crítico em $+\infty$ quando, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= 0 \text{ para todo } \alpha > \alpha_0 \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= +\infty \text{ para todo } \alpha < \alpha_0. \end{aligned}$$

Analogamente, definimos crescimento subcrítico e crítico em $-\infty$.

Exemplo 1 *A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = g(x)e^t$*, onde a função* $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua possui crescimento subcrítico em* $\pm\infty$*.*

Exemplo 2 *Fixado* $\alpha_0 > 0$*. A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = e^{\alpha_0 t^2}$ *possui crescimento crítico em* $\pm\infty$*.*

Exemplo 3 *Fixado* $0 < \sigma < 2$*. A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = e^{t^\sigma}$ *possui crescimento crítico em* $+\infty$ *com* $\alpha_0 = 0$*.*

Exemplo 4 *A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = g(x)te^{t^2}$*, onde a função* $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua possui crescimento crítico em* $\pm\infty$ *com* $\alpha_0 = 1$*.*

Este capítulo é baseado num artigo de D.G. de Figueiredo, O. H. Miayagaki e B. Ruf, ver [13], também fomos motivados a estudar o problema (2.1) por [4] e [5]. A saber, fornecemos condições suficientes para existência de solução para o problema (2.1) conforme os Teoremas (0.1), (0.2) e (0.3) utilizando o Teorema do Passo da Montanha na versão de Ambrosetti-Rabinowitz. Sobre o Teorema (0.3), completamos o texto original estudando um resultado "mais fraco" que o enunciado no artigo [13].

Definição 2.2 *Dizemos que um número real* d *é o raio interno de um conjunto* Ω *quando* d *é o raio da maior bola aberta contida em* Ω*.*

Observação 2.1 *Denotaremos por*

$$M_0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n e^{n(t^2-t)} dt.$$

A definição de M_0 *nos mostra que* $M_0 < \infty$*, pois*

$$M_0 = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} n e^{n(t^2-t)} dt.$$

Analisemos agora a integral

$$\int_0^{1/2} n e^{n(t^2-t)} dt.$$

Vejamos, usando a Fórmula de Integração por Partes, ver [12], temos

$$\int_0^{1/2} n e^{n(t^2-t)} dt = -e^{-\frac{n}{4}} + 1 + 2 \int_0^{1/2} n t e^{n(t^2-t)} dt.$$

Como $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$ *equivale a* $t^2 - t \leq -t^2$*, temos*

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} n e^{n(t^2-t)} dt &\leq -e^{-\frac{n}{4}} + 1 + 2 \int_0^{1/2} n t e^{-nt^2} dt \\
\int_0^{1/2} n e^{n(t^2-t)} dt &\leq -e^{-\frac{n}{4}} + 1 + 2 \int_0^{1} n t e^{-nt^2} dt.
\end{aligned}$$

Usando novamente a Fórmula de Integração por Partes, obtemos

$$\int_0^1 nte^{-nt^2}dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} ne^{n(t^2-t)}dt &\leq -e^{-\frac{n}{4}} + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \\
\int_0^{1/2} ne^{n(t^2-t)}dt &\leq 2 - e^{-\frac{n}{4}} - e^{-n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_0 = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} ne^{n(t^2-t)}dt \leq 2 \lim_{n\to\infty} (2 - e^{-\frac{n}{4}} - e^{-n}) = 4.$$

Observação 2.2 *As condições (h.1) e (h.2) garantem um crescimento exponencial em t para as funções $f(\cdot, t)$ e $F(\cdot, t)$, ver afirmação 2, abaixo.*

Observação 2.3 *A condição (h.3) é satisfeita sempre que assumirmos que f é de classe C^1 e que $f'(x,t) \geq f(x,t)t^{-1}$ para todo $t \neq 0$. Com efeito, derivando a função $f(x,t)t^{-1}$ em relação a t, obtemos*

$$[f(x,t)t^{-1}]' = f'(x,t)t^{-1} - f(x,t)t^{-2} = t^{-1}(f'(x,t) - f(x,t)t^{-1})$$

para todos $x \in \Omega$, $t \neq 0$.

Assim, $[f(x,t)t^{-1}]' \geq 0$ desde que $f'(x,t) \geq f(x,t)t^{-1}$ para todo $t \neq 0$. Donde concluímos que, $[f(x,t)t^{-1}]$ define uma função não-decrescente em t.

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(x,s) &= \int_0^s f(x,t)dt \\
F(x,s) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^s \frac{f(x,t)}{t} tdt \\
F(x,s) &\leq \frac{f(x,s)}{s} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^s tdt \\
F(x,s) &\leq \frac{f(x,s)}{s} \lim_{\epsilon\to 0^+} (\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2} f(x,s)s \quad \textit{para todos } x \in \Omega, s \neq 0.$$

Observação 2.4 *A condição (h.5) é satisfeita se assumirmos que f é de classe C^1 e*

$$\lambda_k \leq \inf_{x\in\overline{\Omega}} f'(x,0) \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} f'(x,0) < \lambda_{k+1}.$$

Com efeito, chamamos atenção para a seguinte afirmação:
Afirmação. *Existe* $\mu > 0$ *tal que* $\lambda_k \leq \mu < \lambda_{k+1}$. *Além disso,*

$$f'(x,0) < \mu \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Prova da Afirmação. *Basta tomar (por exemplo),*

$$\mu = \frac{1}{2}(\lambda_{k+1} + \sup_{x\in\overline{\Omega}} f'(x,0)) > 0$$

pois se $\lambda_k \leq \inf_{x\in\overline{\Omega}} f'(x,0) \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} f'(x,0) < \lambda_{k+1}$, *então* μ *da maneira que foi escolhido verifica as desigualdades*

$$\lambda_k \leq \mu < \lambda_{k+1}$$

$$f'(x,0) < \mu \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Com isso, sendo

$$f'(x,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s}.$$

Existe $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x,s) \leq \mu s, \text{ se } |s| \leq \delta.$$

Portanto, se $x \in \Omega$ *e* $|s| \leq |t| \leq \delta$, *então*

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \leq \mu \int_0^t sds \\ F(x,t) &\leq \frac{1}{2}\mu t^2. \end{aligned}$$

Além disso, se $f'(x,t) \geq f(x,t)t^{-1}$ *para todo* $t \neq 0$, *então a condição (h.6) é satisfeita.*

2.2 A Formulação Variacional

Por simplicidade de notação, no que segue C denota uma constante genérica estritamente positiva, salvo menção explícita. No que segue assumiremos as hipóteses $(h.1)$, $(h.2)$ e a existência de constantes $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq Ce^{\beta t^2} \text{ para todos } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

A condição (2.2) se verifica como verdade sempre que f possui crescimento subcrítico ou crítico. De fato, para fixar as idéias, suponhamos que a função f tenha crescimento crítico em α_0, então fixado $\beta > \alpha_0$, temos

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} = 0$$

Logo, para $\epsilon = 1$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq e^{\beta t^2}, \quad \text{se} \quad |t| \geq M, x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Tomando

$$C = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[-M,M]} \frac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} > 0 \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq Ce^{\beta t^2} \quad \text{para todos } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga trata-se o caso em que f possui crescimento subcrítico.

Afirmação 1. O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (2.1) é dado por

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \end{aligned}$$

é de classe C^1.

Prova da Afirmação 1. Veja que, $J = J_1 + J_2$, onde

$$\begin{aligned} J_1 : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_2(u) = -\int_\Omega F(x,u) \end{aligned}$$

Não é difícil ver que $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e do estudo feito no **Capítulo 1**, podemos concluir que $J_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, ou seja, J é combinação linear de funcionais de classe C^1 definidos em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, temos $J' : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$\begin{aligned} J'(u) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J'(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v \end{aligned}$$

Afirmação 2. Segue de $(h.1)$ e $(h.2)$ que

$(i.)$ Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq Ce^{\frac{1}{M}|t|} \quad \text{para todos } x \in \Omega, |t| \geq t_0.$$

$(ii.)$ Para cada $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$F(x,t) \leq \epsilon f(x,t)t \;\; \text{para todos } x \in \Omega, |t| \geq t_\epsilon.$$

Prova da Afirmação 2. Por $(h.2)$ fixado $|t| \geq t_0$, se $x \in \Omega$ e $t \geq t_0$, então

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds &\geq \int_{t_0}^{t} \frac{1}{M} ds \\ F(x,t) &\geq \frac{F(x,t_0)}{e^{\frac{1}{M}t_0}} \cdot e^{\frac{1}{M}t} \end{aligned}$$

Tomando

$$C = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{F(x,t_0)}{e^{\frac{1}{M}t_0}} > 0.$$

Conlcuimos que

$$F(x,t) \geq Ce^{\frac{1}{M}t} \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Um argumento análogo é feito se $t \leq -t_0$, logo podemos concluir que

$$F(x,t) \geq Ce^{\frac{1}{M}|t|} \quad \text{para todos} \quad x \in \Omega, |t| \geq t_0.$$

Para o item (ii) é suficiente observar que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{F(x,t)}{tf(x,t)} = 0 \;\; \text{uniformemente em} \;\; \Omega.$$

De fato, por $(h.2)$ temos

$$\left|\frac{F(x,t)}{tf(x,t)}\right| \leq \left|\frac{M}{t}\right| \text{ para todos } x \in \Omega, |t| \geq t_\epsilon.$$

donde se conclui a Afirmação 2.

Definição 2.3 *Sejam E um espaço vetorial normado e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(E,\mathbb{R})$. Dizemos que a seqüência (x_n) em E é uma seqüência Palais-Smale para o funcional J no nível $c \in \mathbb{R}$, ou simplesmente, uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional J, quando*

$$\begin{aligned} J(u_n) &= c + o_n(1) \;\; \textit{em } \mathbb{R} \\ J'(u_n) &= o_n(1) \;\; \textit{em } E'. \end{aligned}$$

Definição 2.4 *Sejam E um espaço vetorial normado e $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(E,\mathbb{R})$. Dizemos que o funcional J verifica a condição Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ quando toda seqüência $(PS)_c$ admite uma subseqüência convergente em E.*

Se o funcional J verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, então dizemos que J verifica a condição Palais-Smale, ou simplesmente, que J verifica a condição (PS).

Proposição 2.5 *Supondo (h.1), (h.2), (h.3) e a condição (2.2). O funcional J verifica a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$.

Prova. Sejam $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$ e (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional J, ou seja,

$$\begin{aligned} J(u_n) - c &= o_n(1) \text{ em } \mathbb{R} \\ J'(u_n) &= o_n(1) \text{ em } H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Escrevendo $\epsilon_n = \sup\limits_{||v||\leq 1} |J'(u_n)\cdot v|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|J'(u_n)\cdot v| \leq ||v||\epsilon_n,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\epsilon_n = o_n(1)$.

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega F(x,u_n) = c + o_n(1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

$$\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla v - \int_\Omega f(x,u_n)v\right| \leq ||v||\epsilon_n \text{ para todos } n \in \mathbb{N},\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Por (2.5) e pelo item (ii) da Afirmação 2, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \epsilon + c + \int_\Omega F(x,u_n) \leq C_\epsilon + \epsilon\int_\Omega f(x,u_n)u_n$$

sempre que $n \geq n_0$, e usando (2.6) com $v = u_n$, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)||u_n||^2 \leq C_\epsilon + \epsilon_n ||u_n|| \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Portanto, a seqüência (u_n) é limitada. Ora, sendo (u_n) limitada em $H_0^1(\Omega)$, um espaço de Banach reflexivo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que, a menos de subseqüência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Além disso, pelas imersões compactas de Sobolev, temos

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^q(\Omega),\ q \geq 1; \quad u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado, usando (2.6) com $v = u_n$, temos

$$\begin{aligned} -\epsilon_n||u_n|| &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n \\ \int_\Omega f(x,u_n)u_n &\leq ||u_n||^2 + \epsilon_n||u_n|| \leq C^2 + \epsilon_n C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Com maior razão, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq C \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, por $(h.3)$, temos

$$\int_\Omega F(x,u_n) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq \int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veja que, pelo Lema 1.6, temos $f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$. Logo existe $h \in L^1(\Omega)$, tal que, a menos de subseqüência, temos

$$|f(x,u_n)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por $(h.2)$, temos

$$|F(x,u_n)| \leq Mh(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, usando o fato de que $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω, obtemos $F(x,u_n) \longrightarrow F(x,u)$ q.t.p. em Ω. Por conseguinte, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, temos

$$F(x,u_n) \longrightarrow F(x,u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega)$$

Com isso,

$$\int_\Omega F(x,u_n) - \int_\Omega F(x,u) = o_n(1).$$

Logo, por (2.5), tem-se

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u) - c = o_n(1).$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||^2 = 2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right). \tag{2.7}$$

Usando (2.6) com $v = u_n$, obtemos

$$\left| ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n \right| \leq o_n(1).$$

Com isso,

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n)u_n - 2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)\right| \leq$$

$$\leq \quad \left| ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n \right| + \left| ||u_n||^2 - 2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)\right| \leq o_n(1).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)u_n = 2\left(c+\int_\Omega F(x,u)\right). \tag{2.8}$$

Além disso, por $(h.3)$ obtemos

$$2\int_\Omega F(x,u) \leq 2\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n) \leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)u_n = 2c + 2\int_\Omega F(x,u),$$

ou seja, $c \geq 0$, i.e., seqüências Palais-Smale do funcional J se aproximam de níveis não-negativos.

Afirmação 1. Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi$$

Prova da Afirmação 1. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Note que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi\right| \leq \left|\int_\Omega \nabla u_n\nabla\varphi - \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\right| &+ \left|\int_\Omega f(x,u_n)\varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi\right| + \\ &+ \left|\int_\Omega \nabla u_n\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi\right|\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando o Lema 1.6 e a estimativa (2.6), obtemos

$$\left|\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi\right| \leq o_n(1) + ||\varphi|| o_n(1).$$

De onde conluímos que

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por densidade e $(h.3)$, concluímos que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u)u \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0.$$

Para concluir a demonstração analisaremos os seguintes casos:

Caso 1. O nível $c = 0$. Pela semicontinuidade inferior da norma, temos

$$||u|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}||u||^2 \leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} ||u_n||^2$$

Com isso, usando (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u) \leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ 0 &\leq J(u) \leq \int_\Omega F(x,u) - \int_\Omega F(x,u)\end{aligned}$$

ou seja, $J(u) = 0$ e pela definição de J,

$$||u||^2 = 2\int_\Omega F(x,u).$$

Novamente por (2.7), concluímos que

$$||u_n|| - ||u|| = o_n(1).$$

Além disso, sendo $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, temos

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)$$

e isto significa J verifica a condição $(PS)_c$.

Caso 2. O nível $c \neq 0$ e a função $u \equiv 0$. O que faremos é mostrar que este fato não ocorre para seqüências Palais-Smale do funcional em questão.

Afirmação 2. Existe $q > 1$, de modo que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q < C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

para alguma constante $C > 0$.

Prova da Afirmação 2. De (2.7), para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que, $||u_n||^2 \leq 2c + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Além disso, usando (2.2), temos

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q \leq C\int_\Omega e^{q\beta u_n^2} = C\int_\Omega e^{q\beta||u_n||^2(\frac{u_n}{||u_n||})^2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De onde concluímos pelo Teorema 1.2, que a última integral na expressão acima é limitada, se $q\beta||u_n||^2 \leq 4\pi$ e isto de fato ocorre quando tomamos $q > 1$ suficientememente próximo de 1 e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno pois $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$. Mostrando a afirmação.

Assim, usando (2.6) com $v = u_n$, obtemos

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n\right| \leq ||u_n||\epsilon_n \leq C\epsilon_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com isso,

$$||u_n||^2 \leq Co_n(1) + \int_\Omega f(x,u_n)u_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder, podemos estimar a segunda integral na expressão acima

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u_n)u_n| &\leq \left(\int_\Omega |f(x,u_n)|^q\right)^{1/q} ||u_n||_{q'} \\ \int_\Omega |f(x,u_n)u_n| &\leq C||u_n||_{q'}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $u_n \longrightarrow 0$ em $L^q(\Omega)$ $(q \geq 1)$, temos

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u_n| = o_n(1).$$

Portanto, usando (2.9) obtemos

$$||u_n||^2 = o_n(1).$$

No entanto, de (2.7) podemos afirmar que $||u_n||^2 \longrightarrow 2c \neq 0$, o que é uma contradição. Mostrando assim que este caso não ocorre.

Caso 3. O nível $c \neq 0$ e a função $u \not\equiv 0$. A princípio, note que $J(u) \leq c$, pois pela semicontimuidade inferior da norma, temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u) \leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} ||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ J(u) &\leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} ||u_n||^2 - \int F(x,u_n) \leq c. \end{aligned}$$

Afirmação 3. $J(u) = c$.

Prova da Afirmação. Suponha por absurdo que $J(u) < c$, pela definição de J, temos

$$||u||^2 < 2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right). \tag{2.10}$$

Por outro lado, considerando as funções

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n}{||u_n||}, \\ v &= \frac{u}{\sqrt{2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)}} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Não é difícil ver que $||v_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $||v|| < 1$. Além disso, $v_n \rightharpoonup v$, pois fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla\varphi = \frac{1}{||u_n||}\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)}}\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \nabla v \nabla\varphi,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla\varphi - \int_\Omega \nabla v \nabla\varphi = o_n(1).$$

Afirmação 4. Existe $q > 1$, de modo que

$$\int_\Omega |f(x, u_n)|^q < C \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$.

Prova da Afirmação 4. Da condição (2.2), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_n)|^q &\leq C\int_\Omega e^{q\beta u_n^2} = C\int_\Omega e^{q\beta ||u_n||^2\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2} = \int_\Omega e^{q\beta||u_n||^2 v_n^2} \\ \int_\Omega |f(x,u_n)|^q &\leq \int_\Omega e^{4\pi p(q\beta||u_n||^2\frac{1}{4\pi p})v_n^2}\end{aligned}$$

A última integral na expressão acima é limitada, conforme Corolário 1.3, desde que escolhamos $q > 1$ e suficientemente próximo de 1, tal que

$$q\beta||u_n||^2 \leq 4\pi\frac{1}{1-||v||^2}$$

ou seja,

$$\frac{q\beta||u_n||^2}{4\pi} \leq \frac{c + \int_\Omega F(x,u)}{c - J(u)}$$

usando (2.7), é suficiente, que ocorra

$$\frac{q\beta\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)}{2\pi} < \frac{c + \int_\Omega F(x,u)}{c - J(u)}.$$

Assim, a limitação da integral acima ocorre para n suficientemente grande, desde que

$$\frac{\beta}{2\pi} < \frac{1}{c - J(u)}$$

e isto de fato ocorre, pois $J(u) \geq 0$ e $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$. Donde, podemos concluir que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u_n) &\leq ||f(x,u_n)||_q||u_n - u||_{q'} \\ \int_\Omega f(x,u_n) &\leq C||u_n - u||_{q'}.\end{aligned}$$

Como $u_n \longrightarrow u$ em $L^q(\Omega)$ $(q \geq 1)$, temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u) = o_n(1).$$

Usando (2.6) com $v = u_n - u$, obtemos $< u_n - u, u_n >= o_n(1)$. Assim, como $u_n \rightharpoonup u$, temos

$$||u_n - u||^2 =< u_n - u, u_n > - < u_n - u, u >= o_n(1).$$

O que implica, $||u_n||^2 \longrightarrow ||u||^2$ e isto juntamente com (2.7) contradiz (2.10).

Por conseguinte,

$$||u||^2 = 2\left(c + \int_\Omega F(x,u)\right)$$

Além disso, por (2.7), temos $||u_n|| \longrightarrow ||u||$, donde $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. ■

Corolário 2.6 *Supondo (h.1), (h.2), (h.3). Se f possui crescimento subcrítico em $-\infty$ e $+\infty$, então J verifica a condição Palais-Smale. Se f possui crescimento crítico em $-\infty$ e $+\infty$ com algum α_0, então J verifica a condição $(PS)_c$, para todo $c \in (-\infty, \frac{2\pi}{\alpha_0})$.*

Prova. Sobre a primeira afirmação do Corolário. Seja $c \in \mathbb{R}$. Como f possui crescimento subcrítico, temos

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0 \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Logo, para cada $\alpha > 0$ existe $C > 0$, de modo que

$$|f(x,t)| \leq Ce^{\alpha t^2} \text{ para todos } x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ora, fixado $\alpha > 0$, tal que $c < \dfrac{2\pi}{\alpha}$ estaremos diante das hipóteses da Proposição 2.6 e por este resultado J verifica a condição $(PS)_c$.

Sobre a segunda afirmação do Corolário. Seja $c \in (-\infty, \frac{2\pi}{\alpha_0})$. Como f possui crescimento crítico com α_0, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= 0 \text{ para todo } \alpha > \alpha_0. \\
\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} &= \infty \text{ para todo } \alpha < \alpha_0.
\end{aligned}$$

Logo, para cada $\alpha > \alpha_0$ existe $C > 0$, de modo que

$$|f(x,t)| \leq Ce^{\alpha t^2} \text{ para todos } x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ora, fixado $\alpha > \alpha_0$, tal que $c < \dfrac{2\pi}{\alpha}$ estamos diante das hipóteses da Proposição 2.6 e por este resultado J verifica a condição $(PS)_c$. ■

Proposição 2.7 *Supondo (h.1) e (h.2). Seja Z um subespaço de dimensão finita do $H_0^1(\Omega)$, cuja norma em questão será denotada por $||\cdot||_Z$. Então, J é limitado superiormente em Z. Além disso, para cada $M > 0$, existe $R > 0$ tal que*

$$J(u) \leq -M \quad \textit{para todo } u \in Z \textit{ com } ||u|| \geq R.$$

Prova. Para cada $u_0 \in Z$ com $|u_0|_Z = 1$ considere a função

$$\begin{array}{rcl} \xi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \xi(t) = J(tu_0) = \dfrac{t^2}{2}||u_0||^2 - \displaystyle\int_\Omega F(x, tu_0) \end{array}$$

Seja $p > 2$. Usando a condição (ii) da Afirmação 2 com $\epsilon = \dfrac{1}{p} > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$pF(x,t) \leq f(x,t)t \text{ para todos } x \in \Omega, |t| \geq t_\epsilon.$$

o que implica, a existência de uma constante $C > 0$. tal que $F(x,t) \geq C|t|^p - C$ para todos $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, pois fixado $t > t_\epsilon$, temos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{t_\epsilon}^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds & \geq & \displaystyle\int_{t_\epsilon}^t \frac{p}{s} ds \\ F(x,t) & \geq & F(x,t_\epsilon)\dfrac{t^p}{t_\epsilon^p} \end{array}$$

Tomando

$$C_1 = \frac{1}{t_\epsilon^p} \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x, t_\epsilon) > 0$$

temos

$$F(x,t) \geq C_1 t^p \text{ para todos } x \in \Omega,\ t > t_\epsilon \tag{2.11}$$

Agora, considerando

$$C_2 = \min_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_\epsilon]} F(x,t) > 0$$

obtemos

$$F(x,t) \geq C_2 \text{ para todos } x \in \Omega,\ t \in [0, t_\epsilon].$$

A partir deste momento, desejamos encontrar uma constante $C_3 > 0$, de modo que

$$F(x,t) \geq C_1 t^p - C_3 \text{ para todos } x \in \Omega,\ t \in [0, t_\epsilon].$$

Para isto, basta tomar $C_3 > 0$ tal que $C_3 > C_1 t^p - C_2$ $(t \in [0, t_\epsilon])$, pois

$$F(x,t) \geq C_2 > C_1 t^p - C_3 \text{ para todos } x \in \Omega, t \in [0, t_\epsilon]. \tag{2.12}$$

Por (2.11), temos

$$F(x,t) \geq C_1 t^p \geq C_1 t^p - C_3 \text{ para todos } x \in \Omega, t \in (t_\epsilon, +\infty). \tag{2.13}$$

Portanto, de (2.11) e (2.12), temos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq Ct^p - C \text{ para todos } x \in \Omega, t \geq 0.$$

Com maior razão, existe $C > 0$, de modo que

$$F(x,t) \geq C|t|^p - C \text{ para todos } x \in \Omega, t \geq 0.$$

Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\xi(t) &\leq \frac{t^2}{2}||u_0||^2 - \int_\Omega [C|tu_0|^p - C] \\
\xi(t) &\leq \frac{t^2}{2}||u_0||^2 - C|t|^p \int_\Omega |u_0|^p + C|\Omega| \\
\xi(t) &\leq \frac{t^2}{2}||u_0||^2 - C|t|^p ||u_0||_p^p + C.
\end{aligned}$$

Pela equivalência das normas em Z, para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\xi(t) \leq \frac{t^2}{2}||u_0||^2 - C|t|^p||u_0||^p + C$$

o que implica

$$\xi(t) \longrightarrow -\infty \text{ quando } t \to \infty$$

Seja $v \in Z$, então $v = tu$, onde $u \in Z$ e $||u||_Z = 1$. Do argumento acima, existe $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$J(v) = \xi(t) \leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - C|t|^p||u||^p + C$$

Além disso, da equivalência das normas em Z, existem constantes α e $\beta > 0$ com $\alpha|u|_z \geq ||u|| \leq \beta|u|_z$. Assim, $\alpha \leq ||u|| \leq \beta$. Logo,

$$J(v) \leq \frac{t^2\alpha^2}{2} - C|t|^p\beta^p - C$$

o que implica

$$J(v) \longrightarrow -\infty \text{ quando } ||v|| \to \infty.$$

■

Proposição 2.8 *Supondo (h.1), (h.2), (h.4) e a condição (2.2). Então, existem constantes $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tais que*

$$J(u) \geq \alpha, \ \textit{desde que} \ ||u|| = \rho.$$

Prova. Por $(h.4)$ fixado $\mu < \lambda_1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2 \text{ para todos } x \in \Omega, |t| \leq \delta \tag{2.14}$$

Por outro lado, de (2.2) e $(h.2)$, para $q > 2$ existe $C > 0$, tal que

$$F(x,t) \leq Ce^{\beta t^2}|t|^q \text{ para todos } x \in \Omega, |t| > \delta \tag{2.15}$$

Por (2.14) e (2.15), temos

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2 + Ce^{\beta t^2}|t|^q \text{ para todos } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$$

pela caracterização variacional de λ_1, ver [7], temos

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u) \\
J(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\mu}{2}||u||_2^2 - C\int_\Omega e^{\beta u^2}|u|^q \\
J(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)||u||^2 - C\int_\Omega e^{\beta u^2}|u|^q
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega e^{\beta u^2}|u|^q \leq \left(\int_\Omega e^{\beta p u^2}\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u|^{qp'}\right)^{1/p'}$$

onde

$$\int_\Omega e^{\beta p u^2} = \int_\Omega e^{\beta p ||u||^2\left(\frac{u}{||u||}\right)^2} \leq C$$

se $||u|| \leq \sigma$, $\beta p \sigma^2 \leq 4\pi$ conforme o Teorema 1.2.

Assim

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)||u||^2 - C||u||_{p'}^q.$$

Logo, pela imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$, obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)||u||^2 - C||u||^q.$$

Analisando a função $g(s) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) s^2 - Cs^q$ para $s \geq 0$, obtemos $g(0) = 0$ e

$$g'(s) = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) s - Cqs^{q-1} = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) s \left[1 - \frac{Cqs^{q-2}}{(1 - \frac{\mu}{\lambda_1})}\right]$$

donde concluímos que $g'(s) > 0$, que equivale a dizer que

$$s < \left[\frac{1}{Cq}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{q-2}}.$$

Logo, $g(s) > 0$ é equivalente a

$$s < \left[\frac{1}{Cq}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{q-2}}.$$

Desde modo, concluímos que existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$, tais que

$$J(u) \geq \alpha, \quad \text{se} \quad ||u|| = \rho.$$

■

O próximo resultado será fortemente usado na prova do Teorema 0.2. Seja $k \in \mathbb{N}$. No que segue denotaremos por V o subespaço do $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas autofunções associadas aos autovalores λ_j para $j = 1, \ldots, k$. Além disso, denotaremos por $W = V^{\perp}$ o complemento ortogonal de V.

Proposição 2.9 *Supondo (h.1), (h.2), (h.5) e a condição (2.2). Então, existem constantes $\alpha > 0$ e $\rho > 0$, tais que*

$$J(u) \geq \alpha \quad \textit{para todo } u \in W \textit{ com } ||u|| = \rho.$$

Prova. Pela condição $(h.5)$, existem $\delta > 0$ e $\lambda_k \leq \mu < \lambda_{k+1}$ tais que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2 \quad \text{para todos } x \in \Omega, |t| \leq \delta.$$

Por outro lado, por $(h.2)$ e pela condição (2.2), obtemos

$$F(x,t) \leq Ce^{\beta t^2}|t|^q$$

para todos $x \in \Omega$, $|t| > \delta$, onde $q > 2$.

Usando simultaneamente as duas últimas desigualdades, obtemos

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2 + Ce^{\beta t^2}|t|^q \quad \text{para todos } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

Procedendo como na prova da Proposição 2.6 e usando simultaneamente a desigualdade do tipo Trudinger-Moser, ver Observação 1.1 e a caracterização variacional do autovalor λ_{k+1}, obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right)||u||^2 - C||u||^q \ \text{ para todo } u \in W.$$

Com isso, a prova da Proposição 2.7 segue com argumentos análogos aos da Proposição 2.6. ■

2.3 Prova dos principais resultados

Sobre o **Teorema 0.1**

Prova do Teorema 0.1. Para a prova da primeira parte do Teorema 0.1 invocaremos o Teorema do Passo da Montanha na versão de Ambrosetti-Rabinowitz, ver Teorema B.2 com $E = H_0^1(\Omega)$.

Pela Formulação Variacional do problema, temos $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e pelo Corolário 2.7 o funcional J verifica condição Palais-Smale. A seguir, o que faremos é mostrar que J verifica a geometria do Passo da Montanha. A princípio, veja que pela definição de J juntamente com $(h.1)$, temos $J(0) = 0$.

Sobre (I_1). Ver **Apêndice B**. A Proposição 2.8 é suficiente.

Sobre (I_2). Fixado $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ considere $Z = \{tu;\ t \geq 0\}$ (subespaço de dimensão finita do $H_0^1(\Omega)$), pela Proposição 2.7, temos

$$J(tu) \longrightarrow -\infty \text{ quando } t \to +\infty$$

logo, para $\rho > 0$ (definido na condição anterior, ver Proposição 2.6), existe $t_0 > 0$ (suficientemente grande), de modo que, $||t_0 u|| > \rho$. Tomando $e = t_0 u$, obtemos $e \in H_0^1(\Omega)\setminus\overline{B}_\rho$ com

$$J(e) \leq 0.$$

Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha, ver Teorema B.2, o funcional J possui um valor crítico $c \geq \alpha$ com

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E);\ \ \gamma(0) = 0\ \text{ e }\ \gamma(1) = e\}$.

Da relação que há entre os pontos críticos do funcional J e as soluções do problema (2.1), o argumento acima garante que o problema (2.1) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ não trivial, pois $J(u) = c \geq \alpha > 0$.

Sobre a segunda parte do Teorema 0.1. Admitindo que $f(x,t)$ seja uma função ímpar em t, as hipóteses da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, ver Teorema B.5, se verificam para o funcional J com $E = H_0^1(\Omega)$, $V = \{0\}$ e $W = V^{\perp}$. Note que, sendo a primitiva de uma função ímpar, a função F é par, o que implica, que J trata-se de uma funcional par. Além disso,

Sobre (I_1'''), ver **Apêndice B**. A Proposição 2.8 é suficiente.

Sobre (I_2'''). A Proposição 2.7 é suficiente.

Logo, pelo resultado citado, o funcional J possui uma infinidade enumerável de valores críticos. ■

Sobre o **Teorema 0.2**

Prova do Teorema 0.2. Para garantir a primeira parte do Teorema 0.2 faremos uso do Teorema do Passo da Montanha Generalizado, ver Teorema B.4, com $E = H_0^1(\Omega)$, $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}$ e $W = V^{\perp}$, onde $\dim V < \infty$.

Inicialmente, sabemos que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que verifica a Condição Palais-Smale conforme a Formulação Variacional do problema.

Sobre (I_1''), ver **Apêndice B**. A Proposição 2.9 é suficiente.

Sobre (I_2''). Considerando normalizadas as autofunções associadas aos autovalores do operador $(-\triangle, H_0^1(\Omega))$. Em particular, temos $||\phi_{k+1}|| = 1$ e $\phi_{k+1} \in W$, pela caracterização variacional de λ_{k+1}. Note que, usando a Proposição 2.7 com $Z = V \oplus V_{\lambda_{k+1}}$, existe $R_1 > 0$ tal que $J(u) \leq 0$, desde que $u \in Z$ com $||u|| \geq R_1$. Seja $R > \max\{R_1, \rho\}$, então $R > \rho$ e

$$J(u) \leq 0, \quad \text{se} \quad u \in Z \quad \text{com} \quad ||u|| \geq R \geq R_1.$$

Escrevendo,

$$Q = \{v + s\phi_{k+1}; v \in V \quad \text{com} \quad ||v|| \leq R \quad \text{e} \quad 0 < s < R\}$$

e ∂Q a fronteira de Q em relação a $V \oplus V_{\lambda_{k+1}}$, temos

Afirmação. Se $u \in \partial Q$, então $J(u) \leq 0$.

Prova da Afirmação. De fato, se $u \in \partial Q$, então u é dado por:

$(i.)$ $u = v + R\phi_{k+1}$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$, ou

$(ii.)$ $u = v + s\phi_{k+1}$, onde $||v|| = R$ e $0 < s < R$, ou então

$(iii.)$ $u = v$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$.

Caso (i)**.** Veja que, $u \in Z$ com

$$||u||^2 = ||v + R\phi_{k+1}||^2 = (v + R\phi_{k+1}, v + R\phi_{k+1}) = ||v||^2 + ||R||^2,$$

logo $||u|| \geq R$, pois $(v, \phi_{k+1}) = 0$. Portanto, $J(u) \leq 0$ pelos argumentos acima.

Caso (ii)**.** Veja que, $u \in Z$ com

$$||u||^2 = ||v + s\phi_{k+1}||^2 = (v + s\phi_{k+1}, v + s\phi_{k+1}) = ||R||^2 + ||s||^2,$$

logo $||u|| \geq R$, pois $(v, \phi_{k+1}) = 0$. Portanto, $J(u) \leq 0$ pelos argumentos acima.

Caso (iii)**.**. Sendo $u \in V$, temos $||u||^2 \leq \lambda_k ||u||_2^2$, novamente, conforme a caracterização variacional de λ_k. Assim, por $(h.6)$

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ J(u) &\leq \frac{\lambda_k}{2}||u||_2^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega u^2 dx \\ J(u) &\leq 0. \end{aligned}$$

Mostrando que a afirmação se verifica como verdade, e portanto, para verificar a condição (I_2'') do resultado citado, basta considerar $e = \phi_{k+1} \in \partial B_1 \cap W$, uma vez que, dos argumentos acima, temos $J(u) \leq 0$ para todo $u \in \partial Q$ com $Q = (\overline{B}_R \cap V) \oplus \{se; 0 < s < R\}$.

Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha Generalizado, ver Teorema B.4, o funcional J possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} J(h(u)),$$

onde $\Gamma = \{h \in C(\mathbb{R}, E); \quad h = id \text{ em } \partial Q\}$.

Da relação que há entre os pontos críticos do funcional J e as soluções do problema (2.1), o argumento acima garante que o problema em questão possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ não trivial, pois $J(u) = c \geq \alpha > 0$.

Sobre a segunda parte do Teorema 0.2. Admitindo que $f(x,t)$ seja uma função ímpar em t, as hipóteses da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, ver Teorema B.5, se verificam para o funcional J com $E = H_0^1(\Omega)$, $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}$ e $W = V^{\perp}$. Note que, sendo a prmitiva de uma função ímpar, a função F é par, o que implica, que J trata-se de uma funcional par. Além disso,

Sobre (I_1'''). Ver **Apêndice B**. A Proposição 2.9 é suficiente.

Sobre (I_2'''). A Proposição 2.7 é suficiente.

Logo, o funcional J possui uma infinidade enumerável de valores críticos. ■

Sobre o **Teorema 0.3**

Prova do Teorema 0.3. A princípio, deve-se ressaltar que pelo Corolário 2.4 o funcional J verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c < \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$. Para garantir a existência de solução para o problema (2.1) usaremos o Teorema do Passo da Montanha, ver Teorema B.3 com $E = H_0^1(\Omega)$.

Sabemos que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $J(0) = 0$ conforme a Formulação Variacional do problema. Além disso, temos

Sobre (I_1'). Ver **Apêndice B**. A Proposição 2.8 é suficiente.

Portanto, nos resta mostrar que existe $\omega \in H_0^1(\Omega)$ com $||\omega|| = 1$, a fim de que tenhamos

$$\max\{J(t\omega); t \geq 0\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

Para isto, consideremos a seqüência de funções não-negativas (ϖ_n), onde

$$\varpi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\ln n)^{1/2}, & \text{se} \quad 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{\ln \frac{1}{|x|}}{(\ln n)^{1/2}}, & \text{se} \quad \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que, $\varpi_n \in H_0^1(B_1(0))$ e $||\varpi_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $B_1(0)$ denota a bola unitária centrada na origem do $\mathbb{R}^2$ e d denota o raio interno de Ω conforme Definição 1.4.

Agora, definindo uma nova seqüência de funções não-negativas

$$\omega_n(x) = \varpi_n\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $B_d(x_0) \subset \Omega$.

Note que $\omega_n \in H_0^1(B_1(0))$ e $||\omega_n|| = 1$ com supp $\omega_n \subset B_d(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max\{J(t\omega_{n_0}); t \geq 0\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

Prova da Afirmação. Suponhamos por absurdo que

$$\max\{J(t\omega_n); t \geq 0\} \geq \frac{2\pi}{\alpha_0} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n > 0$ tal que

$$J(t_n\omega_n) = \max\{J(t\omega_n); t \geq 0\} \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

Pela definição de J, temos

$$\frac{1}{2}t_n^2 - \int_\Omega F(x, t_n\omega_n) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

por $(h.3)$ implica que

$$t_n^2 \geq \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{2.16}$$

Como $g(t) = J(t\omega_n)$ assume máximo global em $t = t_n$, temos $g'(t_n) = 0$, ou seja,

$$\frac{dJ}{dt}(t\omega_n) = 0 \quad \text{em} \quad t = t_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} t_n &= \int_\Omega f(x, t_n\omega_n)\omega_n \\ t_n^2 &= \int_\Omega f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \end{aligned}$$

logo,

$$t_n^2 \geq \int_{B_d(x_0)} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n. \tag{2.17}$$

Por outro lado, por $(h.7)$, para cada $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$, tal que

$$f(x,t)t \geq (\beta - \epsilon)e^{\alpha_0 t^2} \quad \text{para todo } t \geq t_\epsilon.$$

Daí, usando (2.17) com n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq (\beta - \epsilon)\int_{B_{d/n}(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} \\ t_n^2 &\geq (\beta - \epsilon)\int_{B_{d/n}(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \frac{1}{2\pi}\ln n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$t_n^2 \geq (\beta-\epsilon)\pi\frac{d^2}{n^2}e^{\alpha_0 t_n^2 \frac{1}{2\pi}\ln n}$$

donde

$$t_n^2 \geq (\beta-\epsilon)\pi d^2 e^{2\ln n(\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi}-1)}, \tag{2.18}$$

logo a seqüência (t_n) é limitada. Além disso, usando (2.16) temos $t_n^2 \longrightarrow \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$.

Agora, escrevendo

$$A_n = \{x \in B_d(x_0); t_n\omega_n(x) \geq t_\epsilon\}, \quad B_n = B_d(x_0)\diagdown A_n$$

por (2.17), temos

$$t_n^2 \ \geq \ \int_{B_d(x_0)} f(x,t_n\omega_n)t_n\omega_n = \int_{A_n} f(x,t_n\omega_n)t_n\omega_n + \int_{B_n} f(x,t_n\omega_n)t_n\omega_n$$

o que implica

$$t_n^2 \geq \int_{B_n} f(x,t_n\omega_n)t_n\omega_n + (\beta-\epsilon)\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2} - (\beta-\epsilon)\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2}. \tag{2.19}$$

Como $|B_n| = o_n(1)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, temos $\chi_{B_n} \longrightarrow 1$ q.t.p. em $B_d(x_0)$, e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2} = \lim_{n\to\infty}\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2}\chi_{B_n} = \int_{B_d(x_0)} = \pi d^2.$$

Passando ao limite em (2.19) quando n tende ao infinito, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\alpha_0} \ &\geq \ (\beta-\epsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2} - (\beta-\epsilon)\pi d^2 \\ \frac{4\pi}{\alpha_0} \ &\geq \ (\beta-\epsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{B_d(x_0)} e^{4\pi\omega_n^2} - (\beta-\epsilon)\pi d^2\end{aligned}$$

devido a (2.16), e escrevendo $I_n = \displaystyle\int_{B_d(x_0)} e^{4\pi\omega_n^2}$, temos

$$\begin{aligned} I_n \ &= \ \int_{B_d(x_0)} e^{4\pi\omega_n^2} = \int_{B_1(0)} e^{4\pi\varpi_n^2} \\ I_n \ &= \ d^2\left\{\int_{B_{1/n}(0)} e^{4\pi\varpi_n^2} + \int_{B_1(0)\diagdown B_{1/n}(0)} e^{4\pi\varpi_n^2}\right\} \\ I_n \ &= \ d^2\left\{\frac{\pi}{n^2}e^{4\pi\frac{1}{2\pi}\ln n} + 2\pi\int_{1/n}^{1} e^{4\pi-\frac{1}{2\pi}\frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{\ln n}} rdr\right\}.\end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis

$$s = -\frac{\ln r}{\ln n}, \quad rdr = -\frac{1}{2s}\ln nds$$

Concluímos que

$$I_n = d^2 \left\{ \pi + 2\pi \ln n \int_0^1 e^{2s^2 \ln n - 2s \ln n} ds \right\}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha_0} &\geq (\beta - \epsilon) \lim_{n\to\infty} I_n - (\beta - \epsilon)\pi d^2 \\ \frac{4\pi}{\alpha_0} &\geq (\beta - \epsilon)\pi d^2 \lim_{n\to\infty} 2 \ln n \int_0^1 e^{2 \ln n (s^2 - s)} ds. \end{aligned}$$

Assim, pela Observação 2.1, para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\frac{4\pi}{\alpha_0} \geq (\beta - \epsilon)\pi d^2 M_0.$$

Portanto,

$$\beta \leq \frac{4}{\alpha_0 d^2 M_0}$$

o que contraria a condição $(h.7)$. ■

Capítulo 3

Um problema elíptico assintoticamente linear com crescimento exponencial em $\mathbb{R}^2$

3.1 Introdução

Neste capítulo nos propomos a estudar problemas do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u), & \mathbb{R}^2 \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f(x,u) = o(t)$ próximo da origem e $|f(x,u)| \leq ce^{4\pi t^2}$ para todos $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, para alguma constante $c > 0$.

Este capítulo é baseado no artigo de D.M. Cao, ver [9], também fomos motivados a estudar o problema (3.1) por [4] e [5]. A saber, fornecemos condições suficientes para existência de solução para o problema (3.1) conforme os teoremas (0.4) e (0.5).

O que faremos é mostrar que o funcional energia associado ao problema (3.1) verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, \nu)$, onde ν é uma constante a ser determinada. *A fortiori*, garantiremos a existência de solução não-trivial para o problema (3.1) utilizando o primeiro lema de Concentração de Compacidade de P.L. Lions e argumentos do tipo Passo da Montanha.

3.2 A Formulação Variacional

Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$||u|| = \left(\int |\nabla u|^2 + |u|^2 \right)^{1/2}$$

define a norma em $H^1(\mathbb{R}^2)$ considerada neste trabalho.

O funcional energia associado ao problema (3.1) é dado por

$$\begin{array}{rcl} J : H^1(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \int F(x, u) \end{array}$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

Do estudo feito no capítulo 1 o funcional J está bem definido. Além disso, $J \in C^1(H^1(\mathbb{R}^2), \mathbb{R})$, onde

$$J'(u) \cdot v = \int (\nabla u \nabla v + uv) - \int f(x, u)v \text{ para todos } u, v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Agora, considere o funcional

$$\begin{array}{rcl} J^\infty : H^1(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J^\infty(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (|\nabla u|^2 + |u|^2) - \int \overline{F}(u) \end{array}$$

Além disso, considerando a variedade de Nehari

$$M^\infty = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}; \int (|\nabla u|^2 + |u|^2) = \int u \overline{f}(u) \right\}$$

a constante

$$C^\infty = \begin{cases} \inf\{J^\infty(u); u \in M^\infty\}, & \text{se } M^\infty \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } M^\infty = \emptyset \end{cases}$$

fica bem definida, ver a hipótese $(f.3)$. Também, não é difícil ver que

$$J_0^\infty = \inf \left\{ \int |\nabla u|^2; u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} \text{ e } \int \overline{F}(u) = \frac{1}{2} \int |u|^2 \right\}$$

está bem definida.

Observação 3.1 *Se $\overline{f}$ verifica $(f.1)$ e $(f.2)$, então $J_0^\infty > 0$.*

De fato, do contrário, existiria uma seqüência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ com

$$\int \overline{F}(u_n) = \frac{1}{2} \int |u_n|^2 \quad e \quad \int |\nabla u_n|^2 = o_n(1).$$

De onde concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$\int |\nabla u_n|^2 < \frac{1}{4\pi e}, \text{ se } n \geq n_0.$$

Além disso. veja que a condição (f.1) nos mostra que f *verifica uma desigualdade do tipo (1.1) com* $\alpha = 4\pi$. *Logo, pela Observação 1.1, uma desigualdade tipo (1.19) é satisfeita (note que uma condição suficiente para (1.19) é (f.2)), i.e., fixado* $\epsilon > 0$, *existe* $C_\epsilon > 0$, *tal que*

$$|F(x,s)| \leq C_\epsilon |s|(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2) + \epsilon s^2 \text{ para todos } x \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}.$$

Com isso, para $\epsilon = \frac{1}{4}$ *e pelo Teorema 1.5, temos*

$$\begin{aligned} \left|\int \overline{F}(u_n)\right| &\leq \frac{1}{4}\int |u_n|^2 + C_\epsilon \int |u_n|(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) \\ \left|\int \overline{F}(u_n)\right| &\leq \frac{1}{4}\int |u_n|^2 + C_{1,\epsilon}\left(\int |\nabla u_n|^2\right)^{1/2} \int |u_n|^2 \end{aligned}$$

desde que $n \geq n_0$.

Portanto,

$$\frac{1}{4}\int |u_n|^2 \leq C_{1,\epsilon}\left(\int |\nabla u_n|^2\right)^{1/2} \int |u_n|^2, \text{ se } n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$\int |\nabla u_n|^2 \geq \frac{1}{4C_{2,\epsilon}}, \text{ se } n \geq n_0.$$

O que contraria o fato de que $\int |\nabla u_n|^2$ *é de ordem 1 quando* n *tende ao infinito.*

Antes de apresentarmos o próximo resultado sobre J_0^∞. Estudaremos um lema de compacidade devido a W.A. Strauss.

Lema 3.1 (Lema de Compacidade de Strauss) *Sejam* $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas tais que*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = o(1) \quad \text{quando} \quad |s| \to \infty \tag{3.2}$$

Além disso, seja (u_n) *uma seqüência de funções mensuráveis, com* $u_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |Q(u_n)| < \infty \tag{3.3}$$

e

$$P(u_n(x)) \longrightarrow v(x) \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N \tag{3.4}$$

Então, para todo conjunto Borel mensurável e limitado $B \subset \mathbb{R}^N$, *temos*

$$\int_B |P((u_n)) - v| = o_n(1).$$

Se assumirmos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = o(1) \quad quando \quad s \to 0 \tag{3.5}$$

e

$$u_n(x) = o(1) \quad quando \quad |x| \to \infty \tag{3.6}$$

uniformemente em n.

Então, $P(u_n)$ *converge para* v *em* $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Prova. Sobre a primeira parte do Lema. Seja $B \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Borel mensurável e limitado. Por (3.2), para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|P(s)| < \epsilon |Q(s)|, \quad \text{se} \ \ |s| \geq \ \delta_\epsilon.$$

Tomando

$$C_1 = \max_{s \in [-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon]} |P(s)| > 0$$

temos

$$|P(s)| \leq C_1, \quad \text{se } s \in [-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon].$$

Logo, existe $C > 0$, tal que

$$|P(s)| \leq C + C|Q(s)| \ \ \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \int_B |P(u_n)| &\leq C|B| + C \int_B |Q(u_n)| \\ \int_B |P(u_n)| &\leq C|B| + C \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_B |Q(u_n)| \end{aligned}$$

Logo, $P(u_n) \in L^1(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, sendo limitada a seqüência das integrais de $P(u_n)$, usando o Lema de Fatou e a condição (3.4), obtemos $v \in L^1(B)$.

Novamente pela condição (3.4) temos v, uma função mensurável, logo pelo Teorema de Egoroff, para cada $\delta > 0$, existe um conjunto fechado $E \subset B$ tal que $|B \setminus E| < \delta$ e $P(u_n)$ converge uniformente para v em E. Portanto,

$$\int_E |P(u_n) - v| = o_n(1).$$

Resta-nos provar que $\int_{B \setminus E} |P(u_n) - v| = o_n(1)$. Inicialmente observemos que

$$\int_{B \setminus E} |P(u_n) - v| \leq \int_{B \setminus E} |P(u_n)| + \int_{B \setminus E} |v|.$$

Sendo v integrável e $|B\setminus E| < \delta$ resulta que, dado $\epsilon > 0$, tem-se

$$\int_{B\setminus E} |v| < \epsilon$$

se δ é suficientemente pequeno. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$E_n = \{x \in B\setminus E; G(u_n) < M\}$$

onde $M > 0$, e denotemos por $E_n' = (B\setminus E)\setminus E_n$. Sobre E_n' tem-se

$$\int_{E_n'} |P(u_n)| \le \int_{\{|u_n(x)|\ge\varphi(M)\}\cap(B\setminus E)} |P(u_n)| \le \epsilon(M) \int_{B\setminus E} |Q(u_n)| \le C\epsilon(M),$$

onde $\epsilon(M) = o_n(1)$. (Veja que, estamos usando o fato de que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{M\to\infty} \epsilon(M) = 0,$$

onde $\epsilon(M) = \sup\limits_{|s|\ge M} \dfrac{P(s)}{Q(s)}$).

Sobre E_n tem-se, considerando $M = \dfrac{C}{\epsilon}$, onde C é definido em (3.3). Assim,

$$\int_{E_n} |P(u_n)| \le \int_{E_n} \frac{|G(u_n)|}{M}|P(u_n)| = \frac{C_1}{M}\int_{E_n} |G(u_n)| < \frac{C_1}{M}C = \epsilon C.$$

Portanto,

$$\int_{B\setminus E} |P(u_n) - v| \le o_n(1).$$

Sobre a segunda parte do Lema. Para cada $\epsilon > 0$, usando as condições (3.5) e (3.6), existem $R_0 > 0$ tal que

$$|P(u_n(x))| \le \epsilon|Q(u_n(x))|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, desde que $|x| \ge R_0$.

Portanto, pelo Lema de Fatou, concluímos que $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{|x|\ge R_0} |v| \le \epsilon C.$$

Agora, veja que da primeira parte do Teorema, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x|<R_0} |P(u_n) - v| < \epsilon, \quad \text{se} \quad n \ge n_0 (n_0 = n_0(\epsilon)).$$

Logo,

$$\int |P(u_n) - v| \le \int_{|x|<R_0} |P(u_n) - v| + \int_{|x|\ge R_0} |P(u_n) - v| \le 2\epsilon C + \epsilon$$

se $n \ge n_0$. $\blacksquare$

Lema 3.2 *Se $\overline{f}$ satisfaz (f.1), (f.2) e existe $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que $\overline{u} \not\equiv 0$ com*

$$\int \overline{F}(\overline{u}) \geq \frac{1}{2}\int \overline{u}^2 \quad e \quad \int |\nabla \overline{u}|^2 < 1.$$

Então, J_0^∞ pode ser atingido. Além disso,

$$J_0^\infty \leq \int |\nabla \overline{u}|^2.$$

Prova. Pela continuidade da função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \displaystyle\int \overline{F}(t\overline{u}) - \frac{1}{2}\int |t\overline{u}|^2 \end{array}$$

existe $\bar{t} \in (0,1]$, tal que $\varphi(\bar{t}) = 0$, i.e.,

$$\int \overline{F}(\bar{t}\overline{u}) = \frac{1}{2}\int |\bar{t}\overline{u}|^2$$

Como $\overline{u} \not\equiv 0$, temos $\bar{t}\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)\diagdown\{0\}$, logo

$$J_0^\infty \leq \bar{t}\int |\nabla \overline{u}|^2 \leq \int |\nabla \overline{u}|^2.$$

Veja que

$$J_0^\infty < \frac{1}{2}\left(\int |\nabla \overline{u}|^2 + 1\right). \tag{3.7}$$

Resta-nos mostrar que existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $u_0 \not\equiv 0$, de modo que

$$\int \overline{F}(u_0) = \frac{1}{2}\int |u_0|^2 \;\text{ e }\; J_0^\infty = \int |\nabla u_0|^2$$

Vejamos, seja (u_n) a seqüência minimizante de J_0^∞, i.e.,

$$\int \overline{F}(u_n) = \frac{1}{2}\int |u_n|^2 \;\text{ e }\; \int |\nabla u_n|^2 - J_0^\infty = o_n(1).$$

Sem perda de generalidade, por (3.7) podemos assumir que

$$\int |\nabla u_n|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\int |\nabla \overline{u}|^2 + 1\right) = m < 1 \;\text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para mostrar que u_0 existe, sem perda de generalidade, consideremos $u_n \geq 0$. Assim podemos substituir u_n por $|u_n|$ e por conseguinte, fazer uso da Simetrização de Schwarz, ver prova do Teorema 1.4 para as propriedades básicas.

Por (p.3), temos

$$\int \overline{F}(u_n^*) = \int \overline{F}(u_n) = \frac{1}{2}\int |u_n|^2 = \frac{1}{2}\int |u_n^*|^2.$$

Logo, pela definição de J_0^∞, obtemos

$$J_0^\infty \leq \int |\nabla u_n^*|^2 \leq \int |\nabla u_n|^2.$$

Com isso, novamente por $(p.3)$, obtemos

$$J_0^\infty \leq \int |\nabla u_n^*|^2 \leq \int |\nabla u_n|^2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De onde concluímos que

$$\int |\nabla u_n^*|^2 - J_0^\infty = o_n(1),$$

ou seja, (u_n^*) é uma seqüência minimizante de J_0^∞. No que segue denotaremos por a seqüência (u_n^*) por (u_n). Vale lembrar que

$$\int |\nabla u_n^*|^2 \leq m < 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$u_n \rightharpoonup u_0{}^1 \ \text{ em } \ H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad u_n(x) \longrightarrow u_0(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^2.$$

Fazendo $\widetilde{u}_n(x) = u_n(\sigma_n x)$, onde $\sigma_n = ||u_n||_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{u}_0(x) = u_0(\sigma x)$, onde $\sigma = ||u_0||_2$, temos

$$||\widetilde{u}_n||_2 = 1, \quad ||\nabla \widetilde{u}_n||_2 = ||\nabla u_n||_2 \quad \text{e} \quad \int F(\widetilde{u}_n) = \frac{1}{2} \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

No que segue denotaremos as funções $\widetilde{u}_n$ e $\widetilde{u}_0$ por u_n e u_0 respectivamente.

Afirmação.

$$\int \overline{F}(\widetilde{u}_n) - \int \overline{F}(\widetilde{u}) = o_n(1)$$

Prova da Afirmação. Definindo as funções $P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} P(s) &= \overline{F}(s) \\ Q(s) &= e^{\frac{8\pi}{1+m}s^2} - 1 + s^2 \end{aligned}$$

para todos $s \in \mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema 1.4, temos

$$\int |Q(\widetilde{u}_n)| = \int (e^{\frac{8\pi}{1+m}|\widetilde{u}_n|^2} - 1) + \int |\widetilde{u}_n|^2 \leq C \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

[1] a notação u_0 é sugestiva, motivada pelo nosso objetivo.

onde $C > 0$, i.e.,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |Q(\widetilde{u}_n)| < \infty.$$

Por outro lado, pela continuidade de $\overline{F}$, temos $\overline{F}(\widetilde{u}_n)$ converge para $\overline{F}(u_0)$ e do Lema 1.1, temos $\widetilde{u}_n \longrightarrow 0$ quando $|x| \to \infty$, uniformemente em n.

Portanto, pelo Lema 3.1, concluímos a prova da Afirmação, i.e.,

$$\int P(\widetilde{u}_n) - \int P(u_0) = o_n(1).$$

De volta ao Lema 3.2, concluímos que $u_0 \not\equiv 0$. Pela semicontinuidade inferior da norma, ver [7], e pela afirmação acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int |u_0| &\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\int |u_n|^2 \\ \frac{1}{2}\int |u_0| &\leq \liminf_{n\to\infty}\int \overline{F}(u_n). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{1}{2}\int |u_0| \leq \int \overline{F}(u_0).$$

Se a desigualdade acima fosse estrita, definindo a função

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \frac{1}{2}\int |tu_0|^2 - \int \overline{F}(tu_0) \end{aligned}$$

existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\varphi(t_0) = 0$, i.e.,

$$\frac{1}{2}\int t_0^2 u_0^2 = \int \overline{F}(t_0 u_0)$$

Portanto, semicontinuidade inferior da norma, temos

$$J_0^\infty \leq t_0^2 \int |\nabla u_0|^2 < \int |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |\nabla u_0|^2 = J_0^\infty$$

o que é absurdo, logo

$$\frac{1}{2}\int |u_0|^2 = \int \overline{F}(u_0)$$

e isto significa que J_0^∞ é atingido, pois

$$\int |\nabla(u_n - u_0)|^2 = o_n(1)$$

o que implica

$$\int |\nabla u_n|^2 - \int |\nabla u_0|^2 = o_n(1).$$

■

3.3 Prova dos principais resultados

A princípio, provaremos um resultado de compacidade local. A saber, mostraremos que J verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, \nu)$, onde $\nu = \min \left\{ C^\infty, \frac{1}{2} - \theta \right\}$.

Lema 3.3 *Supondo que f verifique as codições (f.1)-(f.3) e que (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ seja uma seqüência (PS) do funcional J no nível $c \in (0, \nu)$, onde $\nu = \min \left\{ C^\infty, \frac{1}{2} - \theta \right\}$. Então, (u_n) é limitada e a menos de subseqüência, existe $l > 0$, tal que*

$$\int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) - l = o_n(1).$$

Prova. Como (u_n) é uma seqüência (PS) no nível c do funcional J, temos

$$\frac{1}{2} \int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) - \int F(x, u_n) = c + o_n(1) \tag{3.8}$$

e

$$\left| \int (\nabla u_n \nabla v + u_n v) - \int f(x, u_n) v \right| \leq \epsilon_n ||v|| \tag{3.9}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, onde $\epsilon_n = o_n(1)$.

Usando (3.9) com $v = u_n$, temos

$$\left| \int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) - \int f(x, u_n) u_n \right| \leq \epsilon_n ||u_n|| \tag{3.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por $(f.3)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \theta\right) ||u_n||^2 &\leq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) ||u_n||^2 + \int [\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n)] \\
\left(\frac{1}{2} - \theta\right) ||u_n||^2 &\leq J(u_n) - \theta J'(u_n) \cdot u_n \\
\left(\frac{1}{2} - \theta\right) ||u_n||^2 &\leq c + o_n(1) + \theta |J'(u_n)||u_n|
\end{aligned}$$

o que implica

$$\left(\frac{1}{2} - \theta\right) ||u_n||^2 \leq c + o_n(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||u_n||^2 &\leq \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{-1} c + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{-1} o_n(1) \\
||u_n||^2 &\leq \frac{1}{2} + \frac{c}{1 - 2\theta} + o_n(1)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $c \in (0, \nu)$ e $\nu \leq \dfrac{1 - 2\theta}{2}$.

Usando o argumento acima existe $l \geq 0$, tal que, a menos de subseqüência, temos

$$\int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) = l + o_n(1).$$

Afirmação. $l > 0$.

Prova da Afirmação. Suponhamos por absurdo que $l = 0$, fixado $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{1-2\theta}$, $(c \in (0, \nu))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |\nabla u_n|^2 \leq ||u_n||^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{1-2\theta} + \epsilon < 1 \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Tomando $m = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{1-2\theta} + \epsilon < 1$, temos

$$\int |\nabla u_n|^2 \leq m < 1$$

sempre que $n \geq n_0$. Além disso, a menos de subseqüência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad u(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Além disso, por $(f.3)$

$$\left| \int F(x, u_n) \right| \leq \theta \left| \int f(x, u_n) u_n \right|$$

onde, pelo Teorema 1.5 e Observação 1.1, fixado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left| \int f(x, u_n) u_n \right| &\leq \int |u_n||f(x, u_n)| \\
\left| \int f(x, u_n) u_n \right| &\leq C_\epsilon \int |u_n|(e^{4\pi |u_n|^2} - 1 - 4\pi |u_n|^2) + \epsilon \int |u_n|^2 \\
\left| \int f(x, u_n) u_n \right| &\leq C_{1,\epsilon} \int |u_n|^2 \left(\int |\nabla u_n|^2 \right)^{1/2} + \epsilon \int |u_n|^2
\end{aligned}$$

desde que $n \geq n_0$. O que implica

$$\left| \int F(x, u_n) \right| \leq C \int C|u_n|^2 \leq ||u_n||^2 = o_n(1).$$

Portanto,

$$J(u_n) = \frac{1}{2} \int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) - \int F(x, u_n) = o_n(1)$$

o que contraria o fato de que $c = \lim_{n \to \infty} J(u_n) \neq 0$. ∎

Lema 3.4 (Lema Auxiliar) *Seja (Q_n) uma seqüência de funções não-decrescentes de $[0, A]$ em $[0, B]$. Então, existem uma subseqüência (Q_{n_k}) e uma função não-decrescente Q de $[0, A]$ em $[0, B]$ tais que (Q_{n_k}) converge para Q q.t.p. em $[0, A]$.*

Prova. Para cada $t \in [0, A]$, a seqüência $(Q_n(t))$ é limitada, e como $[0, A] \cap \mathbb{Q}$ é um subconjunto enumerável de $[0, A]$, seja $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ uma enumerável dos racionais de $[0, A]$, utilizando o argumento da seqüência diagonal sobre as seqüências $(Q_n(r_m))_m$, onde $n \in \mathbb{N}$. Obtemos uma subseqüência (Q_{n_k}) de (Q_n) tal que

$$Q_{n_k}(t) - Q(t)^2 = o_n(1)$$

para todo $t \in [0, A] \cap \mathbb{Q}(t)$.

Definindo a função

$$\begin{aligned} Q : [0, A] &\longrightarrow [0, B] \\ t &\longmapsto Q(t) = \sup\{Q(s); s \in \mathbb{Q} \;\; e \;\; s \leq t\} \end{aligned}$$

Veja que Q é não-decrescente. Logo, $D(Q)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de Q é enumerável.

Consideremos $x_0 \in (0, A) \diagdown D(Q)$. Seja $\epsilon > 0$, então existem $y, z \in [0, A] \cap \mathbb{Q}$ tais que $y \leq x_0 \leq z$. Além disso,

$$|Q(y) - Q(x_0)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad |Q(z) - Q(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Como

$$Q_{n_k}(y) - Q(y) = o_n(1)$$

$$Q_{n_k}(z) - Q(z) = o_n(1)$$

Para k suficientemente grande, temos

$$|Q_{n_k}(y) - Q(x_0)| \leq |Q_{n_k}(y) - Q(y)| + |Q(y) - Q(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|Q_{n_k}(z) - Q(x_0)| \leq |Q_{n_k}(z) - Q(z)| + |Q(z) - Q(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Além disso, $Q_{n_k}(y) \leq Q_{n_k}(x_0) \leq Q_{n_k}(z)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$Q_{n_k}(x_0) = Q(x_0) + o_k(1).$$

Logo, (Q_{n_k}) converge para Q q.t.p. em $[0, A]$. ■

[2]esta notação é sugestiva, motivada pelo nosso objetvo.

Lema 3.5 (Lema Auxiliar) *Seja $\delta > 0$. Dizer que*

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,t) = \overline{f}(t), \quad \textit{uniformemente em } t \textit{ limitado.}$$

É equivalente a dizer que,

$$\lim_{R\to\infty} \epsilon(R,\delta) = 0,$$

onde

$$\epsilon(R,\delta) = \sup_{\substack{|x|\geq R\\ |t|\leq\delta}} |f(x,t) - \overline{f}(t)|.$$

Prova. Não é difícil ver que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,t) = \overline{f}(t)$ é uma condição necessária para que $\lim\limits_{R\to\infty} \epsilon(R,\delta) = 0$ ocorra. Reciprocamente, se $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,t) = \overline{f}(t)$ em t limitado, veja que, para todo $R > 0$, temos

$$|f(x,t) - \overline{f}(t)| \leq \epsilon(R,\delta) \leq |f(x,t) - \overline{f}(t)| + \frac{1}{R}, \quad \text{se } |x| \geq R, |t| \leq \delta.$$

Então, passando ao limite na expressão acima quando $R \to \infty$, temos $|x| \to \infty$, e portanto, $\lim_{R\to\infty} \epsilon(R,\delta) = 0$. ■

Lema 3.6 *Supondo que f verifique as codições (f.1)-(f.3) e que (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ seja uma seqüência (PS) do funcional J no nível $c \in (0,\nu)$, onde $\nu = \min\left\{C^\infty, \frac{1}{2} - \theta\right\}$. Então, J verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0,\nu)$.*

Prova. Pelo Lema 3.3, existe $l > 0$, tal que

$$\int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) = l + o_n(1).$$

Assim, escrevendo $\rho_n = |\nabla u_n|^2 + |u_n|^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, usaremos o primeiro lema de Concentração de Compacidade de P.L. Lions, ver [10] e [15] com a seqüência (ρ_n) para mostrar que (u_n) possui uma subseqüência convergente em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Dividiremos a prova nos seguintes passos:

Passo 1. A menos de uma dilatação, não ocorre o anulamento para (ρ_n);

Passo 2. Não ocorre a dicotomia para (ρ_n);

Passo 3. Aqui, concluímos que ocorre apenas a compacidade para (ρ_n). *A fortiori*, mostraremos que seqüência (u_n) possui uma subseqüência convergente em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Conluíndo assim a prova do Lema.

Passo 1. Suponhamos por absurdo, que ocorra o anulamento para (ρ_n), i.e.,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^2} \int_{y+B_R} \rho_n = o_n(1)$$

para todo $R > 0$. Além disso, do Lema 3.3, temos

$$\int |u_n|^2 \leq M.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Lema 1.5, obtemos

$$\int F(x, u_n) = o_n(1) \quad \text{e} \quad \int u_n f(x, u_n) = o_n(1).$$

Com isso, usando (3.10) tem-se

$$\int (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) = o_n(1)$$

o que contradiz o fato de que $l > 0$.

Passo 2. Suponhamos por absurdo, que ocorra a dicotomia para (ρ_n). Consideremos a função de Concentração de P. Levy de ρ_n:

$$\begin{array}{rcl} Q_n : [0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & Q_n(t) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{y+B_t} \rho_n \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veja que,

(i.) Q_n é uma seqüência de funções não-negativas, naõ-decrescentes e uniformemente limitada.

Com efeito, se $t_1 \leq t_2$, então $y + B_{t_1} \subset y + B_{t_2}$ para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\int_{y+B_{t_1}} \rho_n \leq \int_{y+B_{t_2}} \rho_n \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, $Q_n(t_1) \leq Q_n(t_2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii.) Pelo Lema 1.4, a menos de subseqüência, $Q_n(t)$ converge para $Q(t)$ q.t.p. em $[0, +\infty)$, onde $Q : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e não-negativa. Além disso, sendo Q limitada, existem $\alpha = \lim\limits_{t \to \infty} Q(t) \in (0, l)$ e $\alpha_n = \lim\limits_{t \to \infty} Q_n(t)$.

Com isso, fixado $\epsilon > 0$ com $\epsilon < \dfrac{1}{8\pi e}$, existe $t_0 > 0$ tal que $Q(t) \geq \alpha - \dfrac{\epsilon}{4}$ se $t \geq t_0$. Além disso, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$\alpha_n < \alpha + \frac{\epsilon}{8} \quad \text{para todo } \; n \geq n_0,$$

Assim,

$$Q_n(t) \leq \alpha_n < \alpha + \frac{\epsilon}{8} \quad \text{para todos } \; n \geq n_0, \; t \geq 0.$$

Como $\alpha - \frac{\epsilon}{8} < Q(t)$ para todo $t \geq t_0$. Existe, $n_1 = n(\epsilon, t_0) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha - \frac{\epsilon}{8} < Q(t), \quad \text{se} \quad n \geq n_1.$$

Portanto, se $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, então

$$\alpha - \frac{\epsilon}{8} \leq Q(t) \leq Q_n(t) \leq \alpha + \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{se} \quad t \geq t_0.$$

Além disso, existe $y_n \in \mathbb{R}^2$, de modo que

$$\int_{y_n + B_t} \rho_n \in (\alpha - \frac{\epsilon}{4}, \alpha + \frac{\epsilon}{4}) \quad \text{para todos} \;\; t \geq t_0, n \geq n_0.$$

Podemos encontrar (t_n) com $t_n \longrightarrow \infty$, de modo que

$$\int_{y_n + B_{2t_n+2}} \rho_n \in (\alpha - \frac{\epsilon}{2}, \alpha + \frac{\epsilon}{2}).$$

Sejam ξ, $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções cortes com $0 \leq \xi, \varphi \leq 1$, tais que

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| \geq 3 \\ 1, & \text{se} \quad |x| \leq 2 \end{cases}$$

e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

Afirmação 1. Denotanto $\xi_n = \xi\left(\frac{\cdot - y_n}{t_1}\right)$, onde $t_1 > 0$ é definido acima, temos

$$\int_{|x-y_n| \leq 3t_1} \rho_n \xi_n, \quad \int_{|x-y_n| \leq t_1} \rho_n \xi_n \in (\alpha - \frac{\epsilon}{2}, \alpha + \frac{\epsilon}{2}), \quad \text{se } n \geq n_0.$$

Prova da Afirmação 1. De fato, se t_1 é suficientemente grande e $n \geq n_0$, temos

$$\int_{|x-y_n| \leq 3t_1} \rho_n \xi_n \geq \int_{|x-y_n| \leq t_1} \rho_n \xi_n = \int_{|x-y_n| \leq t_1} \rho_n \geq \alpha - \frac{\epsilon}{4} > \alpha - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.11}$$

Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq 3t_1$ se $n \geq n_0$, logo

$$\int_{|x-y_n| \leq 3t_1} \rho_n \xi_n \leq \int_{|x-y_n| \leq 3t_1} \rho_n \leq \int_{|x-y_n| \leq t_n} \rho_n \leq \int_{|x-y_n| \leq 2t_n+2} \rho_n < \alpha + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.12}$$

se $n \geq n_0$.

As desigualdades (3.11) e (3.12) mostram a afirmação para primeira integral. Além disso,

$$\int_{|x-y_n| \leq t_1} \rho_n \xi_n \leq \int_{|x-y_n| \leq 3t_1} \rho_n \xi_n < \alpha + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.13}$$

e

$$\int_{|x-y_n|\leq t_1} \rho_n \xi_n \geq \alpha - \frac{\epsilon}{4} > \alpha - \frac{\epsilon}{2} \tag{3.14}$$

Finalmente, as desigualdades (3.13) e (3.14) mostram a afirmação para segunda integral.

No que segue denotaremos $\varphi_n = \varphi\left(\dfrac{\cdot - y_n}{t_n}\right)$, $v_n = \xi_n u_n$ e $w_n = \varphi_n u_n$.

Afirmação 2. $J(u_n) \geq J(v_n) + J(w_n) - \epsilon$.

Antes de apresentarmos a prova da Afirmação 2, cabe esclarecer o seguinte: uma vez que, a Afirmação 2 é verificada, analisaremos a situação em questão trabalhando com a seqüência (w_n) e supondo que (y_n) seja limitada , a fim de mostrar que a dicotomia não ocorre quando se estuda o comportamento do funcional J próximo da origem. *A fortiori*, analisaremos o comportamento do funcional J supondo que (y_n) seja ilimitada e trabalhando com a seqüência (v_n), a fim de, obtermos a mesma conclusão da situação anterior.

Prova da Afirmação 2. Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned}
\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) &= \int(-2\xi_n|\nabla u_n|u_n|\nabla\xi_n| - w_n|\nabla\xi_n|^2)\\
\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) &\leq \int \frac{2}{t_1}|\nabla u_n|u_n|\nabla\xi_n| + \frac{1}{t_1^2}u_n^2|\nabla\xi_n|\\
\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) &\leq C\int \frac{2}{t_1}|\nabla u_n||u_n|\frac{C}{t_1^2}u_n^2\\
\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) &\leq \frac{C}{t_1}||u_n||^2
\end{aligned}$$

o que implica

$$\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) \leq \frac{C}{t_1}.$$

Logo,

$$\left|\int(\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2)\right| < \epsilon. \tag{3.15}$$

Por outro lado, se n suficientemente grande, de modo que $t_n > 3t_1$, temos

$$\left|\int[\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\left(\int_{|x-y_n|\le 2t_1} + \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1} + \int_{3t_1\le|x-y_n|}\right)[\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| \\
&= \left|\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}[\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| \\
&= \left|\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n||\xi_n f(x,u_n) - \xi_n f(x,\xi_n u_n)|\right| \\
&\le \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n||f(x,u_n)| + \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2\frac{|f(x,\xi_n u_n)|}{|u_n|} \\
&\le \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n||f(x,u_n)| + \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2\frac{|f(x,\xi_n u_n)|}{|\xi_n u_n|}.
\end{aligned}$$

Usando a condição $(f.2)$, obtemos

$$\left|\int[\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| =$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n||f(x,u_n)| + \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|} \\
&\le 2\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n||f(x,u_n)|.
\end{aligned}$$

Agora, usando a Observação 1.1, segue que

$$\left|\int[\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| =$$

$$\begin{aligned}
&\le C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) + C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2 \\
&\le C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 2t_n}|u_n|(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) + C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2 \\
&\le C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 2t_n}|\eta_n u_n|(e^{4\pi|\eta_n u_n|^2} - 1 - 4\pi|\eta_n u_n|^2) + C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2 \\
&\le C\int_{2t_1<|x-y_n|}|\eta_n u_n|(e^{4\pi|\eta_n u_n|^2} - 1 - 4\pi|\eta_n u_n|^2) + C\int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1}|u_n|^2
\end{aligned}$$

onde $\eta_n \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $0 \le \eta_n \le 1$ com

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x-y_n| < t_1 \quad \text{ou} \quad |x-y_n| \ge 2t_n + 2 \\ 1, & \text{se} \quad 2t_1 < |x-y_n| < 2t_n \end{cases}$$

e $|\nabla\eta_n(x)| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\int (|\nabla \eta_n|^2|u_n|^2 + |\eta_n|^2|\nabla u_n|^2) \\
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\int (|u_n|^2 + |\eta_n|^2|\nabla u_n|^2) \\
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\int_{t_1\leq|x-y_n|<2t_n+2} (|u_n|^2 + |\eta_n|^2|\nabla u_n|^2) \\
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\int_{t_1\leq|x-y_n|<2t_n+2} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\left(\int_{|x-y_n|<2t_n+2} \rho_n - \int_{|x-y_n|<t_1} \rho_n\right) \\
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2\left(\int_{|x-y_n|<2t_n+2} \rho_n - \int_{|x-y_n|<t_1} \rho_n\xi_n\right) \\
\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 &\leq 2(\alpha + \frac{\epsilon}{2} - \alpha + \frac{\epsilon}{2}),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int |\nabla \eta_n(u_n)|^2 < \frac{1}{4\pi e}.$$

Assim, pelo Teorema 1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int [\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| &\leq C\int |\eta_n u_n|^2 + C\int_{2t_1<|x-y_n|\leq 3t_1} |u_n|^2 \\
\left|\int [\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| &\leq C\int_{t_1<|x-y_n|<2t_n+2} |\eta_n u_n|^2 + C\int_{2t_1<|x-y_n|\leq t_n} |u_n|^2 \\
\left|\int [\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| &\leq C\left(\int_{t_1<|x-y_n|<2t_n+2} |\eta_n u_n|^2 + \int_{2t_1<|x-y_n|\leq 2t_n+2} |u_n|^2\right) \\
\left|\int [\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| &\leq C\int_{t_1<|x-y_n|<2t_n+2} |u_n|^2.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\left|\int [\xi_n^2 u_n f(x,u_n) - v_n f(x,v_n)]\right| \leq C\int_{t_1<|x-y_n|<2t_n+2} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) < \epsilon. \tag{3.16}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$\left|\int (\varphi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| < \epsilon. \tag{3.17}$$

e

$$\left|\int [\varphi_n^2 u_n f(x,u_n) - w_n f(x,w_n)]\right| < \epsilon. \tag{3.18}$$

Por (3.17), obtemos

$$\left|\int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| =$$

$$\begin{aligned} &= \int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n| + \varphi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2 - \varphi_n^2|\nabla u_n|^2) \\ &= \int (\varphi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2) + \int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - \varphi_n^2|\nabla u_n|^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| =$$

$$= \int (\varphi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla w_n|^2) + \int (\xi_n^2|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2) + \int (|\nabla u_n|^2 - \xi_n^2|\nabla u_n|^2 - \varphi_n^2|\nabla u_n|^2).$$

Com isso,

$$\left|\int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| = 3\int |\nabla u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2).$$

Assim,

$$\left|\int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{|x-y_n|\le t_1} |\nabla u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2) + \int_{t_1\le|x-y_n|\le 2t_1} |\nabla u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2) + \\ &+ \int_{2t_1<|x-y_n|\le 3t_1} |\nabla u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2) + \int_{3t_1<|x-y_n|} |\nabla u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla v_n|^2 - |\nabla w_n|^2)\right| \le C\int_{t_1<|x-y_n|\le 2t_n+2} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) < \epsilon. \qquad (3.19)$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \int (|u_n|^2 - |v_n|^2 - |w_n|^2) &= \int (|u_n|^2 - \xi_n^2|u_n|^2 - \varphi_n^2|u_n|^2) \\ \int (|u_n|^2 - |v_n|^2 - |w_n|^2) &= \int |u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2) \\ \int (|u_n|^2 - |v_n|^2 - |w_n|^2) &= \int_{t_1<|x-y_n|\le 3t_1} |u_n|^2(1 - \xi_n^2 - \varphi_n^2) \end{aligned}$$

Assim, pela definições de ξ_n e φ_n, temos

$$\int (|u_n|^2 - |v_n|^2 - |w_n|^2) < C\int_{t_1<|x-y_n|<2t_n+2} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) < \epsilon. \qquad (3.20)$$

Por $(f.1)$ e $(f.4)$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\int [F(x,u_n) - F(x,v_n) - F(x,w_n)]\right| &= \\
&\leq C\int |u_n|[(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2 - F(x,v_n) - F(x,w_n)] + \epsilon\int |u_n|^2 \\
&\leq C\int_{2t_1<|x-y_n|<2t_n} |u_n|(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) + \epsilon\int_{2t_1<|x-y_n|<2t_n} |u_n|^2.
\end{aligned}
$$

Com um argumento análogo ao que foi feito na prova de (3.16), obtemos

$$
\left|\int [F(x,u_n) - F(x,v_n) - F(x,w_n)]\right| < \epsilon. \tag{3.21}
$$

Assim, pela definição de J e por (3.19), (3.20), (3.21) concluímos que

$$
J(v_n) + J(w_n) - J(u_n) < \epsilon
$$

mostrando a Afirmação 2.

Seguindo o comentário que fizemos antes apresentarmos a prova da Afirmação 2. Se (y_n) é uma seqüência limitada e $\delta > 1$, então

$$
\begin{aligned}
J(w_n) &= \frac{1}{2}\int (|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2) - \int F(x,w_n) \\
J(w_n) &= \frac{1}{2}\int (|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2) - \int \overline{F}(w_n) - \left(\int F(x,w_n) - \int \overline{F}(w_n)\right) \\
J(w_n) &= J^{\infty}(w_n) - \left(\int F(x,w_n) - \int \overline{F}(w_n)\right),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\left|\int F(x,w_n) - \int \overline{F}(w_n)\right| &= \left|\int_{|x-y_n|\geq t_n} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)]\right| \\
\left|\int F(x,w_n) - \int \overline{F}(w_n)\right| &= \left|\left(\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|\leq\delta}} + \int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} + \int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}}\right)[F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)]\right|.
\end{aligned}
$$

Sobre a integral

$$
\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|\leq\delta}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)].
$$

Pela condição $(f.4)$, obtemos

$$
\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|\leq\delta}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] \leq \frac{1}{2}\int \epsilon(t_n)|w_n|^2
$$

onde $\epsilon(t_n) = o_n(1)$, ver Lema 3.5. Assim,

$$\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|\leq\delta}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] \leq o_n(1).$$

Sobre a integral

$$\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)].$$

Usando a desigualdade de Hölder e a condição $(f.4)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] &\leq \epsilon(t_n)|\{\delta < |w_n| \leq \frac{1}{\delta}\}| \\
\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] &\leq \frac{1}{\delta^2}\epsilon(t_n)\int |w_n|^2 \\
\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] &\leq C\delta^{-2}\epsilon(t_n).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ \delta<|w_n|\leq\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)] \leq o_n(1).$$

Sobre a integral

$$\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)].$$

Veja que

$$\left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} [F(x,w_n) - \overline{F}(w_n)]\right| \leq \left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} F(x,w_n)\right| + \left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} \overline{F}(w_n)\right|$$

Sobre a integral

$$\left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} F(x,w_n)\right|$$

Veja que

$$\left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} F(x,w_n)\right| = \left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} \frac{F(x,w_n)}{e^{\frac{8\pi|w_n|^2}{1+m}} - 1}(e^{\frac{8\pi|w_n|^2}{1+m}} - 1)\right|$$

sabendo que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{e^{\frac{8\pi|w_n|^2}{1+m}} - 1} = 0 \iff \lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = 0$$

onde $\omega(\delta) = \sup\limits_{t\geq\delta} \dfrac{F(x,t)}{e^{\frac{8\pi|w_n|^2}{1+m}} - 1}$. Pelo Teorema 1.4, obtemos

$$\left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n \\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} F(x,w_n)\right| \leq \omega(\delta)\int_{|w_n|>\frac{1}{\delta}} (e^{\frac{8\pi|w_n|^2}{1+m}} - 1) \leq C\omega(\delta) \tag{3.22}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\left|\int_{\substack{|x-y_n|\geq t_n\\ |w_n|>\frac{1}{\delta}}} \overline{F}(w_n)\right| \leq C\omega(\delta). \tag{3.23}$$

Com isso, considerando $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ em (3.22) e (3.23), concluímos

$$\left|\int F(x,w_n) - \int \overline{F}(w_n)\right| = o_n(1) \tag{3.24}$$

e portanto,

$$J(w_n) \geq J^{\infty}(w_n) - o_n(1). \tag{3.25}$$

Afirmação 3. $J(w_n) > C^{\infty} - o_n(1)$.

Prova da Afirmação 3. Veja que

$$\begin{aligned}
&\int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n f(x,w_n)] = \\
&= \int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n\overline{f}(w_n) - w_n\overline{f}(w_n) - w_n f(x,w_n)] \\
&= \int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n\overline{f}(w_n)] + \int (w_n\overline{f}(w_n) - w_n f(x,w_n)).
\end{aligned}$$

Argumentando como na prova de (3.24), obtemos

$$\int (w_n\overline{f}(w_n) - w_n f(x,w_n)) = o_n(1). \tag{3.26}$$

e

$$\epsilon_n := \int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n\overline{f}(w_n)] = o_n(1) + \omega(\delta) \tag{3.27}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com isso, considerando as funções $\overline{w}_n(x) = w_n(\sigma x)$, temos

$$\nabla\overline{w}(x) = \sigma^2 \nabla w_n(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int [|\nabla \overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2 f(\overline{w}_n)] = \\
&= \int |\nabla w_n|^2 + \sigma^{-2}\int (|w_n|^2 - w_n\overline{f}(w_n)) \\
&= \sigma^{-2}\int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n\overline{f}(w_n)] + \int |\nabla w_n|^2 - \sigma^{-2}\int |\nabla w_n|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int[|\nabla\overline{w}_n|^2+|\overline{w}_n|^2+|\overline{w}_n|^2f(\overline{w}_n)]=\sigma^{-2}(\sigma^2-1)\int|\nabla w_n|^2+\sigma^{-2}\epsilon_n \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Desejamos mostrar que $\overline{w}_n\in M^\infty$ para uma escolha de σ apropriada, a saber, σ tal que

$$(\sigma^2-1)\int|\nabla w_n|^2=-\epsilon_n.$$

Para isto, mostraremos que existe $A_0>0$ tal que

$$\int|\nabla w_n|^2\geq A_0>0 \quad \text{para todo} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Inicialmente, seja (σ_n) tal que σ_n converge para 1. Se não houvesse $A_0>0$ como acima, existiria $\delta_m=o_m(1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int|\nabla w_n(\delta_m)|^2=\omega(\delta_m), \quad \text{onde} \quad \omega(\delta_m)=o_m(1)$$

e $w_n(\delta_m)$ é uma subseqüência de (w_n) definida pelos argumentos acima, para cada δ_m. Por simplicidade de notação, no que segue denotaremos $w_n(\delta_m)$ simplesmente por w_n.

Pela ocorrência da dicotomia à seqüência (ρ_n), temos

$$\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2)\geq l-\alpha-\delta_m$$

Assim, pela Observação 1.1, temos

$$\begin{aligned}
\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2) &= \int[|\nabla w_n|^2+|w_n|^2-w_n\overline{f}(w_n)]+\int w_n\overline{f}(w_n)\\
\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2) &= \omega(\delta_m)+o_n(1)+\int w_n\overline{f}(w_n)\\
\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2) &\leq \omega(\delta_m)+o_n(1)+\frac{1}{2}\int|w_n|^2+C\int|w_n|(e^{4\pi|w_n|^2}-1-4\pi|w_n|^2)\\
\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2) &\leq \omega(\delta_m)+o_n(1)+\frac{1}{2}\int|w_n|^2+C\left(\int|\nabla w_n|^2\right)^{1/2}\int|w_n|^2
\end{aligned}$$

para δ_m suficientemente pequeno.

Com isso,

$$\int(|w_n|^2+|w_n|^2) \leq \omega(\delta_m)+o_n(1)+Co(1)$$

quando $\delta_m\longrightarrow 0$. No entanto, isto contradiz o fato de que

$$\int(|\nabla w_n|^2+|w_n|^2)\geq l-\alpha-\delta_m.$$

Logo,

$$\int |\nabla w_n|^2 \geq A_0 > 0 \ \text{ para todo } \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, escolhendo

$$\sigma_n = 1 + \epsilon_n \left(\int |\nabla w_n|^2 \right)^{-1} \tag{3.28}$$

obtemos $\overline{w}_n \in M^\infty$, o que implica que M^∞ é não-vazio.

Por (3.28), temos

$$\sigma_n = 1 + \omega(\delta) + o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J^\infty(\overline{w}_n) &= \frac{1}{2}\int |\overline{w}_n|^2 + \frac{1}{2}\int |\overline{w}_n|^2 - \int \overline{F}(\overline{w}_n) \\
J^\infty(\overline{w}_n) &= \frac{1}{2}\int |\overline{w}_n|^2 + \frac{\sigma_n^{-2}}{2}\int |\overline{w}_n|^2 - \sigma_n^{-2}\int \overline{F}(\overline{w}_n) \\
J^\infty(\overline{w}_n) &= J^\infty(w_n) + \left(\frac{1}{\sigma_n^{-2}} - 1 \right) J^\infty(w_n) + \frac{1}{2\sigma_n^2}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla w_n|^2
\end{aligned}$$

Por (3.19) e (3.20) podemos supor que $\int |\nabla w_n|^2 < \dfrac{1+m}{2}$, e portanto da expressão acima, concluímos que $J^\infty(w_n)$ é limitado, o que nos mostra

$$C^\infty = \inf_{u \in M^\infty} J^\infty(u)$$

Finalmente, para concluir a prova da afirmação 3, observemos que

$$\begin{aligned}
J^\infty(w_n) &\geq J^\infty(\overline{w}_n) - \omega(\delta) - o_n(1) \\
J^\infty(w_n) &\geq \inf_{u \in M^\infty} J^\infty(u) - \omega(\delta) - o_n(1)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$J^\infty(w_n) \geq C^\infty - \omega(\delta) - o_n(1).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
J(v_n) &= \frac{1}{2}\int (|v_n|^2 + |\nabla v_n|^2) - \int F(x, v_n) \\
J(v_n) &= \frac{1}{2}\int [|v_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - v_n f(x, v_n)] + \int [\frac{1}{2} v_n f(x v_n) - F(x, v_n)]
\end{aligned}$$

Por $(f.3)$, temos

$$J(v_n) \geq \frac{1}{2}||v_n||^2 - \frac{1}{2}\int v_n f(x, v_n) + (\frac{1}{2} - \theta)\int v_n f(x, v_n)$$

Fazendo $v = u_n\xi_n^2$ em (3.9) e usando (3.15) e (3.16), obtemos

$$\int [|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2 - v_n f(x, v_n)] = \omega(\delta) + o_n(1) \tag{3.29}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(v_n) &\geq (\frac{1}{2} - \theta) \int v_n f(x, v_n) + \omega(\delta) + o_n(1) \\ J(v_n) &\geq (\frac{1}{2} - \theta) \int (|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2) + \omega(\delta) + o_n(1) \\ J(v_n) &\geq (\frac{1}{2} - \theta)\alpha + \omega(\delta) + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$J(u_n) \geq C^\infty + (\frac{1}{2} - \theta) - \omega(\delta) - o_n(1).$$

Com a condição (3.8) e a afirmação 2, obtemos

$$c \geq C^\infty + (\frac{1}{2} - \theta)$$

o que é absurdo.

Agora, suponhamos que (y_n) seja ilimitada. Usando um argumento análogo ao que foi usado no caso anterior, trocando os "papéis" das seqüências (v_n) e (w_n) obtemos a mesma conclusão. Assim, se preferir o leitor pode ir para o Passo 3, do contrário, segue abaixo a prova.

Podemos assumir, se necessário que, a menos de subseqüência, temos $|y_n| \longrightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned} J(w_n) &= \frac{1}{2} \int (|w_n|^2 + |\nabla w_n|^2) - \int F(x, w_n) \\ J(w_n) &= \frac{1}{2} \int [|w_n|^2 + |\nabla w_n|^2 - w_n f(x, w_n)] + \int [\frac{1}{2} w_n f(x, w_n) - F(x, w_n)] \end{aligned}$$

Por $(f.3)$, temos

$$J(w_n) \geq \frac{1}{2}||w_n||^2 - \frac{1}{2} \int w_n f(x, w_n) + (\frac{1}{2} - \theta) \int w_n f(x, w_n)$$

Fazendo $v = u_n\xi_n^2$ em (3.9) e usando (3.17) e (3.18), obtemos

$$\int [|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 - w_n f(x, w_n)] = \omega(\delta) + o_n(1) \tag{3.30}$$

Portanto,

$$J(w_n) \geq (\frac{1}{2} - \theta)\alpha + \omega(\delta) + o_n(1).$$

Por outro lado, para $\delta > 1$, temos

$$J(v_n) = J^\infty(v_n) - \left(\int F(x,v_n) - \int \overline{F}(v_n)\right),$$

onde

$$\left|\int F(x,v_n) - \int \overline{F}(v_n)\right| = \left|\left(\int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ |v_n|\le\delta}} + \int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ \delta<|v_n|\le\frac{1}{\delta}}} + \int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ |v_n|>\frac{1}{\delta}}}\right)[F(x,v_n) - \overline{F}(v_n)]\right|.$$

Raciocinando como no caso anterior, podemos observar que

$$\int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ |v_n|\le\delta}} [F(x,v_n) - \overline{F}(v_n)], \int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ \delta<|v_n|\le\frac{1}{\delta}}} [F(x,v_n) - \overline{F}(v_n)] \le o_n(1)$$

e

$$\int_{\substack{|x-y_n|<3t_n\\ |v_n|>\frac{1}{\delta}}} [F(x,v_n) - \overline{F}(v_n)] \le o_n(1).$$

Assim,

$$J(v_n) \ge J^\infty(v_n) - o_n(1).$$

O que nos resta fazer é mostrar que

$$J(v_n) \ge C^\infty - o_n(1).$$

Para isto, consideraremos as funções $\overline{v}_n(x) = v_n(\sigma x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int [|\nabla \overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2 f(\overline{w}_n)] = \\
&= \int |\nabla v_n|^2 + \sigma^{-2}\int (|v_n|^2 - v_n\overline{f}(v_n)) \\
&= \sigma^{-2}\int [|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2 - v_n\overline{f}(v_n)] + \int |\nabla v_n|^2 - \sigma^{-2}\int |\nabla v_n|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int [|\nabla \overline{v}_n|^2 + |\overline{v}_n|^2 + |\overline{v}_n|^2 f(\overline{v}_n)] = \sigma^{-2}(\sigma^2 - 1)\int |\nabla v_n|^2 + \sigma^{-2}\epsilon_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Raciocinando como no caso anterior, podemos mostrar que existe σ tal que

$$(\sigma^2 - 1)\int |\nabla v_n|^2 = -\epsilon_n.$$

ou seja, $\overline{v}_n \in M^\infty$.

Assim,

$$J(v_n) \geq C^\infty - o_n(1).$$

Novamente com a condição (3.8) e a afirmação 2, obtemos

$$c \geq C^\infty + (\frac{1}{2} - \theta)$$

o que é absurdo.

Portanto, a dicotomia não ocorre para (ρ_n).

Passo 3. Sendo este o caso, existe uma seqüência (y_n) em $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $t = t(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_{|x-y_n|>t} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) < \epsilon$$

Afirmação 4. A Seqüência (y_n) é limitada.

Prova da Afirmação 4. Suponhamos por absurdo que (y_n) seja ilimitada. Dado $0 < \epsilon < \frac{1}{32\pi e}$, existe $t = t(\epsilon)$ tal que considerando a função corte $0 \leq \eta_n \leq 1$, onde

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0, & se \quad |x - y_n| \leq t \\ 1, & se \quad |x - y_n| \geq t + 1 \end{cases}$$

com $|\nabla \eta_n(x)| \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \int |\nabla \eta_n u_n|^2 &\leq 2 \int (|\nabla \eta_n u_n|^2 + |\eta_n u_n|^2) \\ \int |\nabla \eta_n u_n|^2 &\leq 2 \int_{|x-y_n|\geq t} (|\nabla \eta_n u_n|^2 + |\eta_n u_n|^2) \\ \int |\nabla \eta_n u_n|^2 &\leq 8 \int_{|x-y_n|\geq t} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x-y_n|>t+1} F(x, u_n) \right| &\leq C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|^2 + C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|(e^{4\pi|u_n|^2} - 1 - 4\pi|u_n|^2) \\ \left| \int_{|x-y_n|>t+1} F(x, u_n) \right| &\leq C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|^2 + C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|(e^{4\pi|\eta_n u_n|^2} - 1 - 4\pi|\eta_n u_n|^2) \\ \left| \int_{|x-y_n|>t+1} F(x, u_n) \right| &\leq C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|^2 + C \left(\int_{|x-y_n|>t+1} |\nabla \eta_n u_n|^2 \right)^{1/2} \int_{|x-y_n|>t+1} |\eta_n u_n|^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_{|x-y_n|>t+1} F(x, u_n) \right| \leq C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|^2 \leq \omega(\delta) \tag{3.31}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\left|\int_{|x-y_n|>t+1} \overline{F}(u_n)\right| \leq C \int_{|x-y_n|>t+1} |u_n|^2 \leq \omega(\delta) \tag{3.32}$$

Usando o mesmo raciocínio usado na prova da estimativa (3.24) e as estimativas acima, obtemos

$$\int_{|x-y_n|<t+1} [F(x,u_n) - \overline{F}(u_n)] = o_n(1). \tag{3.33}$$

Logo,

$$J(u_n) = J^\infty(u_n) - \omega(\delta) - o_n(1).$$

Com um argumento análogo ao que foi usado prova da **Afirmação 3**, podemos concluir que M^∞ é não-vazio e $J^\infty(u_n)$ é limitado, obtendo

$$J(u_n) \geq C^\infty - \omega(\delta) - o_n(1).$$

de onde concluímos que $c \geq C^\infty$, o que é absurdo.

Agora, considerando as translações de u_n $\widetilde{u}_n = u_n(x - y_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Dado $\epsilon > 0$, existe $t = t(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_{|x|>t} (|\nabla \widetilde{u}_n|^2 + |\widetilde{u}_n|^2) < \epsilon \tag{3.34}$$

No que segue denotaremos as funções $P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} P(s) &= sf(x,s) \\ Q(s) &= e^{\frac{8\pi s^2}{1+m}} - 1 - s^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0.$$

e

$$\int Q(u_n) \leq C \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pela primeira parte do Lema 3.1, para todo conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel mensurável e limitado, temos

$$\int u_n f(x,u_n) - \int uf(x,u) = o_n(1) \tag{3.35}$$

Raciocinando como na prova de (3.31), obtemos

$$\left|\int_{|x|>t} u_n f(x,u_n)\right| \leq \omega(\delta). \tag{3.36}$$

Assim,

$$\left|\int u_n f(x,u_n) - \int uf(x,u)\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{|x|>t} u_n f(x,u_n) - \int_{|x|>t} uf(x,u)\right| + \left|\int_{|x|\leq t} u_n f(x,u_n) - \int_{|x|\leq t} uf(x,u)\right|.$$

Logo,

$$\left|\int u_n f(x,u_n) - \int uf(x,u)\right| \leq \omega(\delta) + o_n(1),$$

o que implica

$$\int u_n f(x,u_n) - \int uf(x,u) = o_n(1).$$

Por outro lado, fazendo $v = u$ em (3.9), obtemos

$$\int (|\nabla u|^2 + |u^2|) = \int uf(x,u). \tag{3.37}$$

Portanto, de (3.10), (3.35) e (3.37), temos $||u_n|| \longrightarrow ||u||$, e portanto, $u_n \longrightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Completando a prova do Lema 3.6. ■

Teorema 3.1 *Suponha que f verifique as condições $(f.1)-(f.4)$ e que exista $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\int (|\nabla u_0|^2 + |u_0|^2) = \int u_0 f(x,u_0) \quad e \quad J(u_0) < \nu = \min\left\{\frac{1}{2} - \theta, C^\infty\right\}.$$

Então, o problema (3.1) possui uma solução não-trivial.

Prova. Faremos uso do Teorema do Passo da Montanha. Inicialmente por $(f.1)$ e $(f.2)$. Fixado $\epsilon > 0$, usando a Observação 1.1, obtemos

$$|F(x,u)| \leq \frac{\epsilon s^2}{2} + C(e^{4\pi s^2} - 1 - 4\pi s^2) \ \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Assim, para $||u||$ suficientemente pequena, temos $||\nabla u||_2 < \dfrac{1}{4\pi e}$ e usando o Teorema 1.5, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int F(x,u) \\ J(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{2}||u||^2 - C\int (e^{4\pi u^2} - 1 - 4\pi u^2) \\ J(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} - C||\nabla u||_2\right)||u||. \end{aligned}$$

Portanto, raciocinando como na prova da Proposição 2.9, obtemos $\rho > 0$ e $\alpha > 0$, tais que

$$J(u) > \alpha \quad \text{desde que} \quad ||u|| = \rho, ||u_0|| > \rho.$$

Raciocinando como na prova da Proposição 2.8, podemos observar que uma desigualdade do tipo (2.13) é satisfeita, uma vez que, uma condição suficiente para esta é uma condição do tipo (f.3), ver Afirmação 2 da Formulação Variacional do **Capítulo 2**.

Logo,

$$J(tu_0) \longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Assim, para $t_0 >$ suficientemente grande, temos $J(t_0 u_0) < 0$.

Agora, considerando a família $\Gamma = \{g : [0, t_0] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2); g(0) = 0, g(t_0) = t_0 u_0\}$, seja g_0 o seguinte caminho

$$\begin{array}{rcl} g_0 : [0, t_0] & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^2) \\ t & \longmapsto & g_0(t) = tu_0. \end{array}$$

Afirmação 1. $\max\limits_{t \in [0,t_0]} J(g_0(t)) = J(u_0)$.

Prova da Afirmação 1. Seja a função

$$\begin{array}{rcl} h_0 : [0, t_0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = J(tu_0) \end{array}$$

Incialmente, note que

$$h'(t) = \frac{d}{dt} J(tu_0) = t||u_0||^2 - \int f(x, tu_0)u_0,$$

onde $h'(1) = 0$.

Além disso,

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & t\left(||u_0||^2 - \displaystyle\int \frac{f(x, tu_0)}{tu_0} u_0^2\right) \\ h'(t) & \leq & t\left(||u_0||^2 - \displaystyle\int \frac{f(x, su_0)}{su_0} u_0^2\right) \end{array}$$

se $s > t$, i.e., $|su_o| > |tu_0|$, conforme $(f.2)$. Com isso, se $s > t$, então

$$h'(t) \leq \frac{t}{s} h'(s).$$

Além disso, se $s = 1$ e $t < 1$, então $h'(t) \leq 0$. Por outro lado, se $t = 1$ e $s > 1$, então $h'(s) \geq 0$. Logo,

$$\max_{t>0} h(t) = h(1) = I(u_0)$$

i.e.,

$$\max_{t\in[0,t_0]} Jg_0(t)) = \max_{t>0} h(t) = h(1) = J(u_0).$$

Seja

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,t_0]} J(g(t)) \leq J(u_0) < \nu,$$

pelo Teorema B.3, $c \geq \alpha$ e existe uma seqüência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} J(u_n) - c &= o_n(1) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R} \\ J'(u_n) &= o_n(1) \quad \text{em} \;\; H^{-1}(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema 1.6 concluímos a prova. ■

Teorema 3.2 *Suponha que* $\overline{f}$ *verifique as condições (f.1)-(f.3). Além disso, suponha que exista* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *tal que*

$$\int (|\nabla u_0|^2 + |u_0|^2) = \int u_0 \overline{f}(u_0) \quad e \quad J(u_0) < \frac{1}{2} - \theta.$$

Então, o problema (3.1) possui uma solução não-trivial $\overline{u}$*, tal que* $J(\overline{u}) \leq J(u_0)$.

Prova. Inicialmente, cabe observar que este resultado pode se visto como uma versão do Teorema 3.1 para a função $\overline{f}$. Assim, pelo Teorema 3.1, existe uma seqüência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} J(u_n) - c &= o_n(1) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R} \\ J'(u_n) &= o_n(1) \quad \text{em} \;\; H^{-1}(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Além disso, pela definição de c na prova do Teorema 3.1 e usando o fato de que $J(u_0) < \frac{1}{2} - \theta$, temos $c < \frac{1}{2} - \theta$.

Como usamos fato de que $c < C^\infty$ na prova do Lema 3.6, ver o caso em que $|y_n| \to +\infty$, para mostrar que ocorria apenas a compacidade. Substituindo u_n pela sua translação por $-y_n$, i.e., por $u_n(x + y_n)$, onde $|y_n| \to +\infty$, podemos observar que $(u_n(x+y_n))$ converge, a menos de subseqüência, para u em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e usando argumentos análogos aos da prova do Teorema 3.1, concluímos a prova. ■

Teorema 3.3 *Suponha que $\overline{f}$ verifique as condições (f.1)-(f.3) e*

$$\overline{f}(t) \geq C_p|t|^{p-2}t, \quad C_p > \frac{p}{2}S_p^p(1-2\theta)^{1-\frac{p}{2}},$$

onde

$$S_p = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ u \neq 0}} \frac{||u||}{|u|_p}$$

Então, o problema (3.1) possui uma solução não-trivial.

Prova. Pela definição de S_p, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $u_\epsilon \neq 0$ tal que

$$\frac{||u||}{|u|_p} < S_p + \epsilon.$$

Escrevendo

$$v_\epsilon = \frac{\sqrt{1-2\theta}}{||u_\epsilon||}u_\epsilon, \quad ||v_\epsilon||^2 = 1 - 2\theta.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} S_p + \epsilon &> \frac{||u_\epsilon||}{||u_\epsilon||_p} \\ S_p + \epsilon &> \frac{\sqrt{1-2\theta}}{(\int |v_\epsilon|^p)^{1/p}} \end{aligned}$$

logo,

$$\int |v_\epsilon|^p > \frac{(1-2\theta)^{p/2}}{(S_p+\epsilon)^p}. \tag{3.38}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$C_p > \frac{p}{2}(S_p + 2\epsilon)^p(1-2\theta)^{1-\frac{p}{2}}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{p}\int |v_\epsilon|^p &> \frac{1-2\theta}{2}\left(\frac{S_p+2\epsilon}{S_p+\epsilon}\right)^p \\ \frac{C_p}{p}\int |v_\epsilon|^p &> \frac{1}{2}\left(\frac{S_p+2\epsilon}{S_p+\epsilon}\right)^p \int (|\nabla v_\epsilon|^2 + |v_\epsilon|^2) \\ \frac{C_p}{p}\int |v_\epsilon|^p &> \frac{1}{2}\int (|\nabla v_\epsilon|^2 + |v_\epsilon|^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \overline{F}(v_\epsilon) &= \int \int_0^{v_\epsilon} \overline{f}(s)dsdx \\ \int \overline{F}(v_\epsilon) &\geq \int \int_0^{v_\epsilon} C_p|s|^{p-2}sdsdx \\ \int \overline{F}(v_\epsilon) &\geq \frac{C_p}{p}\int |v_\epsilon|^p \\ \int \overline{F}(v_\epsilon) &\geq \frac{1}{2}\int (|\nabla v_\epsilon|^2 + |v_\epsilon|^2). \end{aligned}$$

Com isso, pelo Lema 3.2 J_0^∞ pode ser atingido e

$$J_0^\infty < \int |\nabla v_\epsilon|^2 \leq ||v_\epsilon||^2 = 1 - 2\theta.$$

Seja u_0 o ponto sobre o qual J_0^∞ é atingido, i.e.,

$$\int |\nabla u_0|^2 = \inf \left\{ \int |\nabla u|^2 ; u \in H^1(\mathbb{R}^2) \diagdown \{0\} \quad \text{e} \quad \int (\overline{F}(u) - \frac{1}{2}u^2) = 0 \right\}$$

então considerando o vínculo

$$V = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2); \int (\overline{F}(u) - \frac{1}{2}u^2) = 0 \right\}$$

pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, ver [14] e [15], sobre os funcionais

$$J_1(u) = \int |\nabla u|^2 \quad \text{e} \quad J_2(u) = \int (\overline{F}(u) - \frac{1}{2}u^2)$$

existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$-\Delta u_0 = \lambda (f(u_0) - u_0).$$

Por $(f.3)$, obtemos $\lambda > 0$. Seja $u(x) = u_0(\sqrt{\lambda} x)$, então u verifica (3.1). Pela Identidade de Pohozaev, ver [15] e [21], obtemos

$$\int \overline{F}(u) = \frac{1}{2} \int u^2$$

e

$$J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int |\nabla u_0|^2 < \frac{1}{2} - \theta.$$

Logo, pelo Teorema 3.2 concluímos a prova do Teorema 3.3. ■

Prova do Teorema 0.4. Faremos uso do Teorema do tipo Passo da Montanha, ver Teorema B.3. Podemos observar que as hipóteses do Teorema 3.3 são satisfeitas para $\overline{f}$, logo existe $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$-\Delta \overline{u} + \overline{u} = \overline{f}(\overline{u}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Além disso, $J^\infty(\overline{u}) < \dfrac{1}{2} - \theta$.

Considerando a função

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = J^\infty(t\overline{u}) \end{aligned}$$

Por $(f.2)$ e usando o fato de que

$$\int (|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2) = \int \overline{f}(\overline{u})\overline{u},$$

temos

$$\begin{aligned} h'(t) &\geq 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ h'(1) &= 0 \\ h'(t) &\leq 0 \quad \text{se} \quad t > 1 \end{aligned}$$

Portanto, $h(1) = \max_{t \geq 0} h(t)$, i.e.,

$$J^\infty(\overline{u}) = \max_{t \geq 0} J^\infty(t\overline{u}).$$

Seja $t_0 > 0$, tal que $J(t_0\overline{u}) = \max_{t \geq 0} J(t\overline{u})$. Por $(f.5)$, temos

$$\begin{aligned} J(tu_0) &< J^\infty(t_0\overline{u}) \\ J(tu_0) &\leq \max_{t \geq 0} J^\infty(t\overline{u}) = J^\infty(\overline{u}) \end{aligned}$$

de concluímos que

$$J(t_0\overline{u}) < C^\infty < \frac{1}{2} - \theta.$$

Escolhendo $t_1 > t_0$ suficientemente grande, tal que $J(t\overline{u}) < 0$ se $t > t_1$ e considerando a família $\Gamma = \{g : [0, t_1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2); g(0) = 0, g(t_1) = t_1\overline{u}\}$, de maneira análoga à prova do Teorema 3.1, seja

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, t_1]} J(g(t))$$

Note que

$$\begin{aligned} c &\leq \max_{t \in [0, t_1]} J(t\overline{u}) \\ c &\leq \max_{t \geq 0} J(t\overline{u}) \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$c < C^\infty.$$

e pelo Teorema B.3, temos $c \geq \alpha > 0$ e existe uma seqüência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\begin{aligned} J(u_n) - c &= o_n(1) \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \\ J'(u_n) &= o_n(1) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Logo, J verifica a condição $(PS)_c$ e portanto (u_n) converge, a menos de subseqüência, em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Assim, $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$, o que implica, que u é uma solução não-trivial do problema (3.1). $\blacksquare$

Com argumentos análogos aos que usamos na prova do Teorema 0.4, podemos estudar o Teorema 0.5.

Apêndice A

Estimativas do potencial

Dedicaremos esta seção do trabalho[1] aos resultados utilizados para obtenção das desigualdades tipo Trudinger-Moser. No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado.

Seja $\mu \in (0,1)$ o parâmetro. Considere o operador $V_\mu : L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ definido pelo potencial de Riesz

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)} f(y)dy \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega. \tag{A.1}$$

O próximo Lema garante que V_μ está bem definido.

Lema A.1 *Seja $\mu \in (0,1)$. A aplicação $V_\mu : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo q, $1 \leq q \leq \infty$ satisfazendo*

$$0 \leq \delta = p^{-1} - q^{-1} < \mu, \quad \delta = \delta(p,q). \tag{A.2}$$

Além disso, para todo $f \in L^p(\Omega)$ temos

$$||V_\mu f||_q \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_{N-1}^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} ||f||_p \tag{A.3}$$

Prova. A princípio, observe que se $f \equiv 1$ em (A.1), então

$$\int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)} dy \leq \mu^{-1} \omega_{N-1}^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \tag{A.4}$$

De fato, fixado $x \in \Omega$ e escolhido $R > 0$ tal que $|\Omega| = |B_R(x)| = |B_1|R^N$, onde $|B_1|$ denota a medida da bola unitária N-dimensioanl, temos

$$\int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)} dy \;\; = \;\; \int_{\Omega \cap B_R(x)} |x-y|^{N(\mu-1)} dy + \int_{\Omega \cap B_R^c(x)} |x-y|^{N(\mu-1)} dy$$

[1]baseada na seção 7.8 "*Estimativas do Potencial e Teoremas de Imersão*", Capítulo 7 de [14].

Pela definição de R, temos $|\Omega \cap B_R^c(x)| = |\Omega^c \cap B_R(x)|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)}dy &\leq \int_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{N(\mu-1)}dy + \int_{\Omega^c\cap B_R(x)} |x-y|^{N(\mu-1)}dy \\
\int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)}dy &\leq \int_{B_R(x)} |x-y|^{N(\mu-1)}dy \\
\int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)}dy &\leq \mu^{-1}|B_1|^{1-\mu}|\Omega|^{\mu}.
\end{aligned}$$

De volta ao Lema 1. Seja $r \geq 1$ tal que

$$r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1} = 1 - \delta \tag{A.5}$$

Afirmação. Fixado $x \in \Omega$, a função $h(x-y) = |x-y|^{N(\mu-1)} \in L^r(\Omega)$. Além disso,

$$||h||_r \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} |B_1|^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}. \tag{A.6}$$

De fato, seja $\mu_1 > 0$ tal que $r(1-\mu) = 1-\mu_1$. Assim,

$$\int_\Omega h^r(x-y)dy = \int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)r}dy = \int_\Omega |x-y|^{N(\mu_1-1)}dy$$

Por (A.4) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h^r(x-y)dy &\leq \mu_1^{-1}|B_1|^{1-\mu_1}|\Omega|^{\mu_1} \\
\int_\Omega h^r(x-y)dy &\leq \mu^{-1}|B_1|^{r(1-\mu)}|\Omega|^{1-r(1-\mu)},
\end{aligned}$$

Logo $h \in L^r(\Omega)$ com

$$||h||_r \leq \mu_1^{-1/r}|B_1|^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta} = \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} |B_1|^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}.$$

Usando (A.5), veja que

$$h|f| = h^{r/q}h^{r(1-1/p)}|f|^{p/q}|f|^{p\delta}.$$

Assim, para cada $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|(V_\mu f)(x)| &\leq \int_\Omega |x-y|^{N(\mu-1)}|f(y)|dy \\
|(V_\mu f)(x)| &\leq \int_\Omega h^{r/q}(x-y) \cdot h^{r(1-1/p)}(x-y) \cdot |f(y)|^{p/q} \cdot |f(y)|^{p\delta}dy \\
|(V_\mu f)(x)| &\leq \int_\Omega [h^r(x-y)|f(y)|^p]^{1/q} \cdot [h^r(x-y)]^{1-1/p} \cdot [|f(y)|^p]^{\delta}dy,
\end{aligned}$$

Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, de modo que $x - y \in \Omega$, a função $y \mapsto [h^r(x-y)|f(y)|^p]^{1/q}$ pertence a $L^q(\Omega)$, porque a função; $y \mapsto h^r(x-y)|f(y)|^p$ é integrável em Ω pela definição de convolução; a função $y \mapsto [h^r(x-y)]^{1-1/p}$ pertence a $L^{p/(p-1)}(\Omega)$; e a função $y \mapsto [|f(y)|^p]^\delta$ pertence a $L^{1/\delta}(\Omega)$. Além disso, $q^{-1} + 1 - p^{-1} + \delta = 1$. Logo, pela Desigualdade de Hölder Generalizada, ver [14] temos

$$|(V_\mu f)(x)|^q \leq \left(\int_\Omega h^r(x-y)|f(y)|^p dy\right) \cdot \left(\int_\Omega h^r(x-y)dy\right)^{(1-1/p)q} \cdot ||f||_p^{p\delta q}$$

Integrando em relação a x, segue

$$\int_\Omega |(V_\mu f)(x)|^q dx \;\; \leq \;\; ||f||_p^{p\delta q} \cdot \int_\Omega \left(\int_\Omega h^r(x-y)|f(y)|^p dy\right) \cdot \left(\int_\Omega h^r(x-y)dy\right)^{(1-1/p)q} dx.$$

Pelo teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(V_\mu f)(x)|^q dx &\leq ||f||_p^{p\delta q} \cdot \int_\Omega |f(y)|^p \cdot \left(\int_\Omega h^r(x-y)dx\right)^{1+(1-1/p)q} dy \\
\int_\Omega |(V_\mu f)(x)|^q dx &\leq ||f||_p^{p\delta q} \cdot \int_\Omega |f(y)|^p \cdot \left(\int_\Omega h^r(x-y)dx\right)^{q/r} dy \\
\int_\Omega |(V_\mu f)(x)|^q dx &\leq ||f||_p^{p\delta q + p} \cdot \left\{\sup_\Omega \left(\int_\Omega h^r(x-y)dx\right)^{1/r}\right\}^q
\end{aligned}$$

Portanto, de (A.6) concluímos que

$$||V_\mu f||_q \;\; \leq \;\; \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} |B_1|^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}||f||_p.$$

■

Lema A.2 *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g = V_{1/q}f$, *então existem constantes* c_1, $c_2 > 0$ *dependendo de* N *e* p *tais que*

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'}} dx \leq c_2|\Omega|, \tag{A.7}$$

onde p *e* p' *são índices conjugados.*

Prova. Pelo Lema 1, para todo $q \geq p$, temos

$$\begin{aligned}
||g||_q &\leq \left(\frac{1-1/p+1/q}{1/q}\right)^{1-1/p+1/q} |B_1|^{1-1/p}|\Omega|^{1/q}||f||_p \\
||g||_q &\leq q^{1-1/p+1/q}|B_1|^{1-1/p}|\Omega|^{1/q}||f||_p
\end{aligned}$$

Assim

$$\int_\Omega |g|^q dx \leq q^{1+q/q'}|B_1|^{q/p'}|\Omega|||f||_p^q.$$

Observe que, se $q \geq p-1$ podemos substituir "q" por "qp' " no argumento acima,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g|^{p'q}dx &\leq (p'q)^{1+q}|B_1|^q|\Omega|||f||_p^{p'q} \\
\int_\Omega |g|^{p'q}dx &\leq (p'q)(p'q|B_1|||f||_p^{p'})^q|\Omega|.
\end{aligned}$$

Sejam $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; p \leq n\}$ e $c_1 > 0$ (constante a ser definida). Do argumento acima, temos

$$\int_\Omega \frac{1}{n_0!}\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'n_0} dx \leq p'|\Omega|\left(\frac{p'|B_1|}{c_1^{p'}}\right)^{n_0}\frac{n_0^{n_0}}{(n_0-1)!}$$

o que implica

$$\int_\Omega \frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'k} dx \leq p'|\Omega|\left(\frac{p'|B_1|}{c_1^{p'}}\right)^{k}\frac{k^{k}}{(k-1)!}, \quad k \geq n_0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \sum_{k=n_0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'k} dx \leq p'|\Omega|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{p'|B_1|}{c_1^{p'}}\right)^{k}\frac{k^{k}}{(k-1)!}, \quad m \geq n_0.$$

Com a soma que aparece no lado direito da expressão anterior obtemos uma série convergente desde que $c_1^{p'} > e|B_1|p'$, ver [12]. Então, passando ao limite quando m tende ao infinito, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'}} dx &\leq c_2'|\Omega| + \int_\Omega \sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'k} dx \\
\int_\Omega e^{\left(\frac{|g|}{c_1||f||_p}\right)^{p'}} dx &\leq c|\Omega|.
\end{aligned}$$

■

Lema A.3 *Se $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ então*

$$u(x) = \frac{1}{N|B_1|}\int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i - y_i}{||x-y||^N}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy \quad q.t.p \quad em \quad \Omega. \tag{A.8}$$

Prova. Suponha que $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sabe-se que, para $g \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se

$$g(0) = -\int_\Omega g'(r)dr,$$

escrevendo $g(r) = u(x + r\omega)$, onde $\omega \in \mathbb{R}^N$, com $|\omega| = 1$, tem-se

$$g'(r) = \omega \cdot \nabla u(x + r\omega),$$

logo $u(x) = g(0) = -\int_\Omega \omega \cdot \nabla u(x + r\omega)dr$ q.t.p. em Ω.

Integrando em relação a ω, temos

$$\begin{aligned}\int_{|\omega|=1} u(x)dx &= -\int_{|\omega|=1}\left(\int_0^\infty \omega \cdot \nabla u(x + r\omega)dr\right)d\omega\\ u(x) &= -\frac{1}{N|B_1|}\int_{|\omega|=1}\left(\int_0^\infty \omega \cdot \nabla u(x + r\omega)dr\right)d\omega\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω. Fazendo $y = x + r\omega$, temos $d\omega = r^{1-N}dy$. Assim,

$$u(x) = \frac{1}{N|B_1|}\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy \ \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Agora, da densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,1}(\Omega)$, na topologia do $W^{1,1}(\Omega)$, dado $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, existe (u_n) em $C_0^\infty(\Omega)$ com $u_k \longrightarrow u$ em $W_0^{1,1}(\Omega)$. Daí, $u_k \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, e a menos de, subseqüência, temos $u_k(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω. Assim,

$$\begin{aligned}u(x) &= \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \frac{1}{N|B_1|}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(y)dy\\ u(x) &= \frac{1}{N|B_1|}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(y)dy,\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω. Além disso, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, temos

$$\left|\frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(y)\right| \leq ||x-y||^{N-1}||\nabla u(y)|| \leq ||x-y||^{N(\frac{1}{N}-1)}||\nabla u(y)||,$$

q.t.p. em Ω. Sendo,

$$[V_{1/N}(||\nabla u||)](x) = \int_\Omega ||x-y||^{N(\frac{1}{N}-1)}||\nabla u(y)||dy < \infty \ \text{ para todo } \in \Omega.$$

Logo, pelo Teorema da Covergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$u(x) = \frac{1}{N|B_1|}\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy \quad q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

■

Observação A.1 *Seja $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, segue do Lema A.3, que*

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{N|B_1|}\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{x_i - y_i}{||x-y||^N} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega.\\ |u(x)| &\leq \frac{1}{N|B_1|}\int_\Omega ||x-y||^{N(\frac{1}{N}-1)}||\nabla u(y)||dy \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega.\end{aligned}$$

Assim,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{N|B_1|}[V_{1/N}(||\nabla u||)](x) \quad q.t.p. \ em \ \Omega. \tag{A.9}$$

Apêndice B

Teoremas do tipo minimax

Dedicaremos esta seção do trabalho aos resultados clássicos da Teoria dos Pontos Críticos. A fim de discutir apenas os resultados que consideramos preliminares ao presente trabalho adotamos um instante inicial, a saber, uma versão do Teorema de Deformação. A seguir, citaremos o Teorema do Passo da Montanha na versão de Ambrosetti-Rabinowitz, Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), Teorema do Passo da Montanha Generalizado e um Teorema do tipo Passo da Montanha para multiplicidade de pontos críticos, para estes, ver [8], [11], [18] e [21].

Observação B.1 *Sendo E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de J se existe $u \in E$ com $J'(u) = 0$ e $J(u) = c$. O conjunto de todos os pontos críticos de J no nível c será denotado por*

$$K_c = \{u \in E; \quad J'(u) = 0 \quad e \quad J(u) = c\}$$

e denotaremos por J^c o conjunto de todos os pontos em nível menores ou iguais a c, isto é,

$$J^c = \{u \in E; \quad J(u) \leq c\}.$$

Teorema B.1 (Teorema de Deformação) *Seja E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional que verifica a condição Palais-Smale. Se $c \in \mathbb{R}$ não é valor crítico de J. Então, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que, para todo $u \in E$ e $t \in [0,1]$, tem-se*
(i.) $\eta(0, u) = u$;
(ii.) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin J^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(iii.) $\eta(1, J^{c+\epsilon}) \subset J^{c-\epsilon}$;
(iv.) $\eta(1, \cdot) : E \longrightarrow E$ *é um homeomorfismo.*

Teorema B.2 (Teorema do Passo da Montanha) *Sendo E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional que verifica a condição Palais-Smale. Se $J(0) = 0$ e as seguintes condições são satisfeitas:*
(I_1) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $J\mid_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
(I_2) Existe $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $J(e) \leq 0$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \quad \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}$.

Prova. A definição c mostra que $c < \infty$, porque para cada $\gamma \in \Gamma$, a função $J \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua definida no compacto $[0,1] \subset \mathbb{R}$, logo $J \circ \gamma$ possui um máximo em $[0,1]$.

Afirmação. $\max\limits_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \alpha$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Prova da Afirmação. Para cada $\gamma \in \Gamma$ defina a função

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \psi(t) = ||\gamma(t)|| \end{array}$$

Observe que ψ é uma função contínua, e sendo $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$, temos $\psi(0) < \rho < \psi(1)$, logo pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\psi(t_0) = ||\gamma(t_0)|| = \rho$ e pela condição (I_1), temos $J(\gamma(t_0)) \geq \alpha$. Logo,

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \alpha \quad \text{para todo} \quad \gamma \in \Gamma. \tag{B.1}$$

Agora, definindo $H = \left\{ \max\limits_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma \right\}$, segue da **Afirmação** que $H \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e α é uma de suas cotas inferiores. Assim, fica bem definido

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Além disso, $c \geq \alpha$.

Supondo por absurdo, que c não seja valor crítico de J, pelo Teorema de Deformação, dado $0 < \epsilon < \dfrac{c - \alpha}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que
$(i.)$ $\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ e $t \in [0,1]$;
$(ii.)$ $\eta(1, J^{c+\epsilon}) \subset J^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma_\epsilon(t)) \leq c+\epsilon. \tag{B.2}$$

Considerando a função $h(t)=\eta(1,\gamma_\epsilon(t))$, sendo $\eta \in C([0,1]\times E, E)$ e $\gamma_\epsilon \in C([0,1],E)$ seque que $h \in C([0,1],E)$. Também afirmamos que $h(0)=0$ e $h(1)=e$. De fato, sendo $J(0)=0<\alpha<c-2\epsilon$, tem-se $J(0)\notin[c-2\epsilon,c+2\epsilon]$, ou seja, $0\notin J^{-1}([c-2\epsilon,c+2\epsilon])$, logo de (i), temos

$$h(0)=\eta(1,\gamma(0))=\eta(1,0)=0.$$

Por outro lado, $J(e)<\alpha<c-2\epsilon$, daí $J(e)\notin[c-2\epsilon,c+2\epsilon]$ o que implica $e\notin[c-2\epsilon,c+2\epsilon]$, e novamente de (i), temos

$$h(1)=\eta(1,\gamma(1))=\eta(1,e)=e,$$

de onde concluímos que $h\in\Gamma$. Por (B.2), obtemos

$$J(\gamma_\epsilon(t))\leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma_\epsilon(t))\leq c+\epsilon \text{ para todo } t\in[0,1].$$

O que implica, $\gamma_\epsilon(t)\in J^{c+\epsilon}$, para todo $t\in[0,1]$. Por (ii), obtemos

$$h(t)=\eta(1,\gamma_\epsilon(t))\in J^{c-\epsilon} \text{ para todo } t\in[0,1].$$

ou seja, $J(h(t))\leq c-\epsilon$ para todo $t\in[0,1]$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} J(h(t))\leq c-\epsilon,$$

e sendo $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$, temos $c\leq\max\limits_{t\in[0,1]} J(h(t))\leq c-\epsilon$, uma vez que $h\in\Gamma$. Assim, $c\leq c-\epsilon$, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para J, concluindo a prova. ■

Tendo em vista o resultado acima, observaremos que a ausência da condição Palais-Smale, dentre as propriedades satisfeitas pelo funcional energia em questão, irá nos garantir apenas a existência de uma seqüência $(PS)_c$ para o mesmo. Nesta pesquisa nos deparamos com situações em que funcional energia estudado não verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c\in\mathbb{R}$. Entretanto, resolvemos nossos problemas mostrando que funcional se situa na região Palais-Smale. O resultado utilizado é:

Teorema B.3 (Teorema do tipo Passo da Montanha) *Sendo E um espaço de Banach real, considere que o funcional $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ verifique as condições:*
(I_1') Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $J\mid_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
(I_2') Existem $u_0 \in B_\rho$ e $u_1 \in E \diagdown \overline{B}_\rho$, tais que $\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \alpha$. *Suponha que*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \quad \gamma(0) = u_0 \quad e \quad \gamma(1) = u_1\}$.

Então, $c \geq \alpha$ e existe uma seqüência (u_n) em E, tal que

$$J(u_n) \longrightarrow c, \quad J'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Antes de provarmos o Teorema B.3, enunciemos um resultado provado em diferentes momentos por, Brézis, Aubin, Ekelend, Mawhin-Willem e Figueiredo. Para uma demostração deste resultado ver [11].

Lema B.1 *Sendo E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Seja K um espaço métrico compacto, $K_0 \subset K$ com $K_0 \neq K$ um subespaço não-vazio fechado e $f_0 \in C(K_0, E)$. Se*

$$\Gamma = \{f \in C(K, E); f\mid_{K_0} \equiv f_0\}$$

e

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \max_{v\in K} J(f(v))$$

e vale

$$\max_{v\in K_0} J(f(v)) < \max_{v\in K} J(f(v)) \text{ para todo } f \in \Gamma.$$

Então, existe uma seqüência (u_n) tal que

$$J(u_n) \longrightarrow c, \quad J'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Prova do Teorema B.3. Dado $\gamma \in \Gamma$, Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho$, logo por (I_1), temos

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \geq J(\gamma(t_0)) \geq \alpha, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Portanto, $c \geq \alpha$. Invocando o Lema B.1 com $K = [0,1]$, $K_0 = \partial K = \{0,1\}$ e $f_0 : K_0 \longrightarrow E$ definida por $f_0(0) = u_0$ e $f_0(1) = u_1$, então $f_0 \in C(K_0, E)$. Além disso, por (I_1) e (I_2), temos

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq J(\gamma(t_0)) \geq \alpha > \max\{J(u_0), J(u_1)\}, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Portanto, pelo Lema B.1, existe uma seqüência (u_n) em E tal que

$$J(u_n) \longrightarrow c, \quad J'(u_n) \longrightarrow 0.$$

■

Teorema B.4 (Teorema do Passo da Montanha Generalizado) *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach real, onde $dimV < \infty$. Considere $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional que verifique a condição Palais-Smale. Além disso, suponha que J verifique as condições:*
(I_1'') Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $J\,|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$;
(I_2'') Existe $e \in \partial B_1 \cap W$ e $R > \rho$ tais que, se

$$Q = (\overline{B}_R \cap V) \oplus \{re; 0 < r < R\}$$

então, $J(u) \leq 0$ para todo $u \in \partial Q$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} J(h(u)),$$

onde $\Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, E); h = id \quad em \quad \partial Q\}$.

Prova. A definição de c mostra que $c < \infty$, porque para cada $\gamma \in \Gamma$ a função $J \circ \gamma : \overline{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua definida num compacto $\overline{Q}$, logo a função $J \circ \gamma$ possui um máximo em $\overline{Q}$.

Afirmação 1. Se $\gamma \in \Gamma$, então $\gamma(Q) \cap \partial B_\rho \cap W \neq \emptyset$.

Prova da Afirmação 1. Seja P a projeção de E sobre V, então $\gamma(Q) \cap \partial B_\rho \cap W \neq \emptyset$, i.e.

$$\begin{cases} P\gamma(u) = 0 \\ ||(id - P)\gamma(u)|| = \rho \end{cases}$$

para algum $u \in Q$ (dependendo de γ). Expressando $u \in \overline{Q}$ como $u = v + re$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 \leq s \leq R$. Defina

$$\varphi(r, v) = (||(id - P)\gamma(v + re)||, P\gamma(v + re)).$$

Note que, $\varphi \in C(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$, pois φ é a composição de funções contínuas. Além disso, sndo $\gamma|_{\partial Q} = id$, para $u \in \partial Q$ tem-se

$$\varphi(r, v) = (||(id - P)(v + re)||, P(v + re))$$

o que implica

$$\begin{aligned}\varphi(r,v) &= (||(v+re)-v||,v)\\ \varphi(r,v) &= (r||e||,v)\end{aligned}$$

i.e., $\varphi(r,v)=(r,v)$, ou seja $\varphi \equiv$ em ∂Q. Em particular, de (I_2) temos $\varphi(r,v)\neq(\rho,0)$ para $u\in\partial Q$ e $(\rho,0)\in Q$. De fato, sendo $0<\rho<R$ temos $(\rho,0)\neq\partial Q$, pois para que $(\rho,0)\in\partial Q$ deveríamos ter $\rho=0$ ou $\rho=R$, mas isto não é possível. Por outro lado, sendo $0\in\overline{B}_R\cap V$ e $0<\rho<R$, temos $(\rho,0)\in Q$.

Identificando o $\mathbb{R}\times V$ com $\mathbb{R}^N$, onde $\dim(\mathbb{R}\times V)=N$ observamos que o grau de Brouwer $d(\varphi,Q,(\rho,0))$ está bem definido e pelas propriedades do Grau Topológico, ver [15], obtemos

$$d(\varphi,Q,(\rho,0))=d(id,Q,(\rho,0))=1.$$

Logo, existe $u\in Q$ tal que $\varphi(u)=(\rho,0)$, ou seja,

$$(||(id-P)\gamma(u)||,P\gamma(u))=(\rho,0)$$

o que implica

$$\begin{cases} P\gamma(u)=0\\ ||(id-P)\gamma(u)||=\rho\end{cases}$$

Afirmação 2. $c\geq\alpha$.

Prova da Afirmação 2. De fato, pela **Afirmação 1**, existe $u\in Q$ tal que $\gamma(u)=\partial B_\rho\cap X$. Da condição (I_1) temos $J(\gamma(u))\geq\alpha$, o que implica

$$\max_{u\in\overline{Q}} J(\gamma(u))\geq\alpha \text{ para todo } \gamma\in\Gamma.$$

Assim, o conjunto $H=\left\{\max_{u\in\overline{Q}} J(\gamma(u));\gamma\in\Gamma\right\}$ é limitado inferiormente, e consequentemente

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{u\in\overline{Q}} J(\gamma(u))$$

está bem definido. Além disso, α é uma cota inferior de H. Logo, $c\geq\alpha$.

Agora, suponha por absurdo que c não seja um valor regular crítico de J, então pelo Teorema de Deformação, dado $0<\epsilon<\dfrac{c-\alpha}{2}$, existe $\eta\in C([0,1]\times E,E)$ tal que
$(i.)$ $\eta(t,u)=u$ se $u\in J^{-1}([c-2\epsilon,c+2\epsilon])$, $t\in[0,1]$
$(ii.)$ $\eta(1,J^{c+\epsilon})\subset J^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{u \in \overline{Q}} J(\gamma(u)) \leq c + \epsilon$. Considerando a função $h(u) = \eta(1, \gamma_\epsilon(u))$, sendo $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ e $\gamma_\epsilon \in C(\overline{Q}, E)$ temos $h \in C(\overline{Q}, E)$. Note ainda que, sendo $u \in \partial Q$ temos $J(u) \leq 0 < \alpha < c - 2\epsilon$, logo $J(u) \neq [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, o que implica, $u \neq J^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$. Assim, por (i) se $u \in \partial Q$, $h(u) = \eta(1, \gamma_\epsilon(u)) = \eta(1, u) = u$, de onde segue que $h \in \Gamma$.

Logo,

$$\gamma_\epsilon(u) \in J^{c+\epsilon} \quad \text{para todo } u \in \overline{Q}.$$

Além disso, de (ii) segue

$$h(u) = \eta(1, \gamma_\epsilon(u)) \in J^{c-\epsilon} \quad \text{para todo } u \in \overline{Q}$$

ou seja,

$$J(h(u)) \leq c - \epsilon \quad \text{para todo } u \in \overline{Q}.$$

Portanto,

$$\max_{u \in \overline{Q}} J(h(u)) \leq c - \epsilon$$

e sendo $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} J(\gamma(u))$, temos $c \leq \max\limits_{u \in \overline{Q}} J(h(u)) \leq c - \epsilon$ uma vez que, $h \in \Gamma$. Assim, $c \leq c - \epsilon$, o que é absurdo. ■

Estudamos multiplicidade de soluções para o problema proposto no capítulo 2, onde fizemos uso do seguinte resultado:

Teorema B.5 *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par, que verifica a condição Palais-Smale. Se $J(0) = 0$ e $E = V \oplus W$, onde V é um subespaço de dimensão finita em E. Além disso, se J verifica as condições:*
(I_1''') Existem constantes $\alpha, \rho > 0$, tais que $J\,|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$;
(I_2''') Para cada subespaço de dimensão finita $\widehat{E}$ de E, existe $R > 0$, tal que

$$J \leq 0 \quad \text{em} \quad \widehat{E} \setminus B_R.$$

Então, J possui uma infinidade enumerável de valores críticos.

Para demonstração e aplicações deste resultado, ver [4], [13], [18] e [21]. A saber, em [18] uma demonstração do mesmo é apresentada.

Bibliografia

[1] AUBIN, T. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] AUBIN, T. *Some nonlinear problems in Riemmian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] BERESTYCKI, H. & LIONS, P.L. *Nonlinear scalar field equations, I Existence of a ground state*, Arch. Rat. Mech. Anal, 313-346, 1983.

[4] BEZERRA DO Ó, J.M. *Existência de soluções para algumas equações elípticas quasilineares*, Dissertação de Doutorado, UNICAMP, 1995.

[5] BEZERRA DO Ó, J.M. *On a class of semilinear problems with critical growth to the N-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Abstr. Appl. Anal. 2, 301–315, 1997.

[6] BEZERRA DO Ó, J.M. & SOUTO, M.A.S. *On a Class of nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^2$ *involving critical growth*, Journal of Differential Equations 174, 289-311, 2001.

[7] BREZIS, H. *Analyse Functionnelle-Théorie et applications*, Masson, Paris, 1996.

[8] BRITO, DE J.F. *Teoremas do tipo minimax e aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFCG, 2005.

[9] CAO, D.M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical Exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Diff. Eq. 17, 407-435, 1992.

[10] DINIZ, H.A.C. *Sobre os lemas de concentração de compacidade de P.L. Lions e aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2002.

[11] FERNANDES, J. DE A. *Princípios de minimax e algumas aplicações ao problema de Dirichlet semilinear*, Dissertação de Mestrado, UNB, 1993.

[12] FIGUEIREDO, DE D.G. *Análise I*, Livros Técnicos e Científicos, Ed.UnB, 1975.

[13] FIGUEIREDO, DE D.G., MIAYAGAKI, O.H. & RUF, B. *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus of Variations 3, 139-153, 1995.

[14] GILBARG, D & TRUDINGER, D. *Elliptic differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Nancy, 1993.

[16] LIONS, P.L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, parte 1.* Revista Matemática Iberoamericana. Vol.1, n.1, 145-201, 1985.

[17] OHTSUKA, H. & SUZUKI, T. *Palais-Smale sequence relative to the Trudinger-Moser inequality*, Calculus of Variations 17, 235-255, 2003.

[18] RABINOWITZ, P.H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, A.M.S, n. 65, 1988.

[19] RUF, B. *On a result by Carleson-Chang concerning the Trudinger-Moser inequality*, Milão, Itália, 2000.

[20] RUF, B. *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$*. J. Funct. Anal. 219, no. 2, 340–367, 2005.

[21] WILLEM, M. *Minimax theorems.* Birkhäuser, 1996.