UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Valdenise Noberto dos Santos

A Equação de Bessel e o problema da difusão de calor num cilindro infinito.

Cuité-PB

2015

Valdenise Noberto dos Santos

A Equação de Bessel e o problema da difusão de calor num cilindro infinito.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior

Cuité-PB

2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237e Santos, Valdenise Noberto dos.

A equação de Bessel e o problema da difusão de calor num cilindro infinito. / Valdenise Noberto dos Santos. – Cuité: CES, 2015.

83 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2015.

Orientador: Aluizio Freire da Silva Junior.

1. Calor – transferência. 2. Equação de difusão. 3. Equação de Bessel. I. Título.

CDU 536.6/.7

Valdenise Noberto dos Santos

A Equação de Bessel e o problema da difusão de calor num cilindro infinito.

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 25 de novembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior - UFCG

(Orientador)

Msc. Edna Cordeiro de Souza - UFCG

Msc. Marciel Medeiros de Oliveira - UFCG

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que nunca me abandonou mesmo nos momentos mais difíceis sendo meu amparo e refúgio.

A minha mãe, Maria Vilani,responsável por está conquista, pois não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

A meu filho, Ellyson Raul, sempre presentes em meu coração e pensamento, motivo forte para nunca desistir.

Ao professor Aluízio, pela paciência na orientação e incentivo que tornou possível a execução e conclusão desta monografia.

Aos meus queridos amigos, em especial, Johnyefeson, Aparecida, Fabiana, Desiane, Josevandro e Gerivaldo e tantos outros que de alguma forma colaboraram com incentivo e apoio constantes na elaboração desse trabalho.

Enfim, para todas às pessoas que contribuíram e participaram na reflexão e realização deste trabalho de modo particular, a banca examinadora, à professora Edna e o professor Marciel, pelas suas correções e observações na construção da presente monografia.

À minha família.

“ Os números governam o mundo.”

(Platão)

Resumo

Série de potências é de grande importância na resolução de equações diferenciais, com resultados que podem ser usados como base tanto para a representação de funções, principalmente, funções especiais, como para aplicação em vários tipos de problemas. Este trabalho é referente ao processo de difusão de calor através de um cilindro infinito, modelada por uma equação diferencial parcial. Tal equação, chamada de **Equação de difusão**. A resolução aqui estabelecida propõe-se a solucionar esta equação em sua formulação particular para o caso de um **cilindro infinito** com distribuição racial e temperatura prescrita. Dada particularmente através de método de separação na seguinte forma $t = \vartheta \exp[-ak^2\tau]$, onde ϑ é a solução da equação diferencial $\nabla^2\vartheta + k^2\vartheta = 0$. No nosso caso $\vartheta(x)$ é uma solução da **equação de Bessel**, representa por meio de séries de potências, em torno de um ponto ordinário ou de um ponto singular regular. Inicialmente, visando a aplicação do método de Frobenius, uma extensão do método da séries de potências, são estabelecidas condições para que o ponto ordinário seja caracterizado como um ponto singular regular removível, de tal modo que o método de Frobenius também produza as chamadas soluções analíticas em torno de um ponto ordinário, possivelmente multiplicando as séries por um termo logarítmico ou por uma potência de expoente fracionário. Em seguida, usando a sua respectiva relação de recorrência, a equação Euler-Cauchy, são determinadas duas soluções da EDO. A análise da dependência ou independência linear de tais soluções é feita por meio do Teorema da Solução Geral da Equação de Bessel.

Palavras-chave: Equação de difusão. Equação de Bessel. Cilindro infinito. Transferência de calor.

Abstract

Power series is of great importance in solving differential equations, with results that can be used as a basis both for the representation of functions, primarily special functions, such as for use in various kinds of problems. This work is related to the heat diffusion process through an infinite cylinder, shaped by a partial differential equation. This equation, called the **Diffusion Equation**. The resolution established here proposes to solve this equation in its particular formulation in case of an **infinite cylinder** with racial distribution and prescribed temperature. Given especially via separation method in the following manner $t = \vartheta \exp[-ak^2\tau]$, where ϑ is the solution of the differential equation $\nabla^2\vartheta + k^2\vartheta = 0$. In our case $\vartheta(x)$ is a solution of the **Bessel equation**, is through power series about an ordinary point or a regular singular point. Initially, aiming at applying the Frobenius method, an extension of the method of the power series, conditions are established so that the ordinary point is characterized as a removable regular singular point, so that the Frobenius method also produces the so-called analytical solutions about an ordinary point, possibly by a series multiplying the logarithmic power term or by a fractional exponent. Then, using their respective recurrence relationship of the Euler-Cauchy equation, the two solutions are determined EDO. The analysis of linear dependence or independence of such solutions is made by means of Theorem General Solution of Bessel Equation.

Keywords: Diffusion equation. Bessel equation. Infinite cylinder. Heat transfer.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Depois do reconhecimento da teoria de Fourier, do matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), no ano 1811, sobre a solução e formulação do problema da condução do calor em uma barra de metal, o qual é modelado por uma equação diferencial parcial, surgiram novos problemas em decorrência do seu trabalho, desde que se possa expressar uma função dada como uma série infinita de senos e cossenos.

Dentre as áreas que se desenvolveram em decorrência do estudo de Fourier destacam-se Equações diferencias, Análise e Teoria dos Conjuntos.

Existem diversas formulações da Equação de calor. Para determinar a distribuição de temperatura em um meio é necessário resolver a formulação correta. Esta solução vai depender das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, isto é das condições de contorno. A Equação de difusão, e uma versão mais geral da Equação de calor.

Na Referência [3], mostra-se a solução particular da equação de condução de calor através do método de separação é dada por:

$$t = \vartheta \exp[-ak^2\tau], \tag{1}$$

onde ϑ é a solução da equação diferencial:

$$\nabla^2\vartheta + k^2\vartheta = 0.$$

No nosso caso $\vartheta(x)$ é uma solução da **equação de Bessel**

$$\vartheta''(r) + \left(\frac{1}{r}\right)\vartheta'(r) + k^2\vartheta(r) = 0. \tag{2}$$

Nesse contexto, este trabalho está dividido em quadro capítulos, sendo o primeiro alguns conteúdos, necessário ao entender sobre séries de potência e série de Frobenius. Tais como sequência numéricas, séries numéricas, somas parciais, convergência;

No segundo capítulo capítulo, apresentaremos uma revisão sobre séries de potências, a idéia do método das séries de potências, definiremos a representação de uma função em forma de séries Taylor e por fim estudaremos as classificação dos Pontos do Domínio da EDO;

No terceiro capítulo, nos propomos a estudar o chamado método de Frobenius, uma extensão do método das séries de potências. O método de Frobenius é uma importante ferramenta para encontrar soluções de equações diferencias ordinárias de segunda ordem na forma de série de Taylor, assim como a equação de Bessel, que é mencionada nos tópicos essenciais e de grande importância para o nosso problema. Estudaremos também uma segunda solução independente, obtida pela forma indicada na equação indicial associada a equação de Euler-Cauchy;

O objetivo do capítulo quatro é encontrar uma função em função do tempo que seja a solução do nosso problema da difusão de calor ao longo de um cilindro infinito, com distribuição racial e temperatura prescrita.

Capítulo 1

Pré-Requisito

Neste capítulo definimos os conceitos de sequência e série numéricas, apresentaremos também alguns testes de convergência e divergência, para poder prosseguir em nosso estudos sobre série de Potências.

1.1 Sequência Numéricas

Nesta seção, todos os conceito e resultados importantes mencionados que referenciar a limites, será introduzidos por meio de sequências numérica.

Definição 1.1. (Sequência Numérica) *Uma sequência numérica é uma função* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida no conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ *dos números naturais e tomando valores no conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. O valor* $f(n)$ *será representado por* a_n*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, e chamado o termo geral (quando possui uma lei de formação) ou n-ésimo termo. Denotamos uma sequência escrevendo todos os seus termos* $(a_1, a_2, a_3, ...)$ *ou por* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou simplesmente por* (a_n)*.*

Exemplo 1.1. *São exemplos de sequências numéricas:*

1. $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots)$
2. $\left(\dfrac{1}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10^2}, \dfrac{1}{10^3}, \dfrac{1}{10^4}, \ldots\right)$

1.1.1 Conceito de Limite de Sequências

Dizemos que uma sequência (a_n) é convergente se, a medida que o índice n cresce, o elemento a_n vai tender para um certo número L, chamado o *limite* da sequência.

Definição 1.2. *Uma sequência (a_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|a_n - L| < \varepsilon$.*

Noção de Vizinhança

Seja $L \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, chama-se **vizinhança** ε de L, e denota-se por $V_\varepsilon(L)$ ao conjunto

$$V_\varepsilon(L) = \{x \in \mathbb{R}; |x - L| < \varepsilon\} = (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon).$$

Observação 1.1. *Note que n, a partir de um certo índice $n_0 = N + 1$, sempre vai estar dentro da vizinhança ε.*

Exemplo 1.2. *Vamos provar, segundo a definição anterior, que a sequência*

$$(a_n) = \frac{n-1}{n}$$

converge para o número 1.

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tome, $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, se $n > N$, temos

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Teorema 1.1. *Se $\lim a_n = L$ e $\lim a_n = L_1$, então $L = L_1$.*

Demonstração. (Ref. [16]) ■

Teorema 1.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente com limite L. Assim pela definição (1.2), fazendo $\varepsilon = 1$, existe um índice N a partir do qual se tem $|a_n - L| < 1$. Usando a desigualdade triangular podemos assegurar que:

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|, \forall\ n > N.$$

Os únicos termos da sequência que, possivelmente, não atendem à condição anterior são: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-1}$. Considerando o número real K como o maior entre os números $1 + |L|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N-1}|$. Então, $|a_n| \leq K$ para todo n, o que prova que a sequência é limitada. ■

Observação 1.2. *Nem toda sequência limitada é convergente.*

Exemplo 1.3. *Considere a sequência*

$$(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Note que, para n suficientemente grande, a sequência tende a 2 ou -2. Mas uma sequência só pode convergir para um único valor. Logo a sequência dada é limitada sem ser convergente.

Observação 1.3. *Dizemos que uma sequência que não converge é divergente. Neste caso, dado $K > 0$ existe N tal que $a_n \geq K$ para todo $n \geq N$. Deste modo não importa o K, teremos sempre um termo da sequência maior do que K.*

1.1.2 Operação com Limites

Mediante o conceito de limite e a definição 1.2, podemos estabelecer o teorema a seguir.

Teorema 1.3. *Sejam a_n e b_n duas sequências convergentes, com limites a e b, respectivamente. Então, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e (ka_n), onde k é uma constante qualquer, são sequências convergentes. Além disso,*

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;

b) $\lim(ka_n) = k(\lim a_n) = ak$;

c) $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab$

d) Se, além das hipóteses acima, $b \neq 0$, então $\lim (a_n/b_n) = a/b$.

1.1.3 Sequências Monótonas

Uma classe importante de sequências limitadas são as chamadas sequências monótonas.

Definição 1.3. *Diz-se que uma sequência a_n é crescente se*

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...;$$

e decrescente se

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...;$$

Diz-se que uma sequência a_n é não-decrescente se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ...;$$

e não-crescente se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ....$$

Diz-se que uma sequência é monótona se ela satisfaz qualquer uma dessas condições.

Teorema 1.4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência não-decrescente e limitada. Então, o conjunto dos termos da sequência (a_n) possui um supremo

$$K = sup_n\{a_n\}.$$

Vamos provar que esse número K é o limite de a_n. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K - \varepsilon < a_N.$$

Seja $n > N$. Como (a_n) é uma sequência não-decrescente, temos,

$$K - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq K < K + \varepsilon.$$

$$\lim a_n = K.$$

No caso de (a_n) ser não-crescente é análogo.

■

O teorema anterior nos permite saber se uma dada sequência monótona é convergente, sem conhecer seu limite. O teorema seguinte é um critério de convergência que pode ser aplicado em qualquer sequência.

Teorema 1.5. (Critério de convergência de Cauchy) *Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência numérica (a_n) seja convergente é que, dado $\varepsilon > 0$ exista $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo inteiro positivo p.*

$$n > N \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstração. (Referência [8]) ■

Observação 1.4. *Uma sequência é de Cauchy quando seus termos ficam arbitrariamente próximos uns dos outros a partir de um determinado índice.*

1.2 Séries Numéricas

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ infinita de termos, onde $s = \lim(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ pode existir ou não. Segue que quando o limite existe a série converge, caso contrario, dizemos que a série diverge. As demonstrações de alguns teoremas, apresentados nesta seção, fogem de nossos objetivos por isso serão ocultadas.

Definição 1.4. (Série Numérica) *Uma série numérica é a soma de todos os termos de uma sequência, ou seja, dada uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ temos que uma série numérica é o somatório $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.*

Exemplo 1.4. *São séries numéricas:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

1.2.1 Somas Parciais

Para determinar se uma série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$ tem uma soma ou não, usamos somas parciais:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

e, em geral,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Observação 1.5. *As somas parciais formam uma nova sequência (s_n), que pode ou não ter um limite. Assim, se*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

existir, então o chamamos de soma da série infinita, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Exemplo 1.5. *Considere* (s_n) *a sequência de somas parciais da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Assim

$$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^n}. \text{ Daí}$$

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Note que

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$s_n = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}\right).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9.10^n}\right) = \frac{1}{9}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}.$$

Teorema 1.6. *Se uma série converge, seu termo geral tende a* 0.

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica e s_n sua sequência de soma parciais, tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Temos que

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

e

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}.$$

Segue que,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \text{ e } \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0,$$

como queríamos demonstra.

■

Exemplo 1.6. *(**Série Geométrica**) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ uma série numérica, $x \neq 1$, e s_n sua sequência de soma parciais. Assim*

$$s_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

e

$$xs_n = x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1}.$$

Temos que

$$s_n - xs_n = x - x^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Agora podemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & |x| < 1 \\ -\infty & |x| > 1 \end{cases}$$

De fato, supondo $|x| < 1$, temos que x^n tende a zero, de forma que essa expressão converge para $\dfrac{x}{1-x}$, que é o limite de s_n. Note que no caso em que $|x| \geq 1$ a série diverge, pois seu termo geral não tende a zero.

O teorema 1.6 nos dá uma condição necessária para que uma série convirja, mas não suficiente.

Exemplo 1.7. ***(Série Harmônica)*** *Chama-se séria harmônica à série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots.$$

Note que o termo geral desta série tende a zero, mais Nicole Oresme, matemático do século XIV, provou que ela diverge.

Observação 1.6. *A série harmônica está compreendida entre as séries divergentes* $\sum \frac{1}{x^n}$ *com* $x \leq 1$ *e as séries convergentes* $\sum \frac{1}{x^n}$ *com* $x > 1$.

1.2.2 Testes de Convergência

Dada uma série, para que possamos saber se ela converge ou diverge temos vários testes que podemos aplicar, dos quais veremos alguns que serão necessários ao nosso estudo de séries de Potências. As demonstrações destes testes serão ocultadas neste trabalho, mas poderão ser encontradas em [7].

Teste do Termo Geral

Teorema 1.7. ***(Teste do Termo Geral)*** *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum a_n$ *diverge.*

Exemplo 1.8. *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. *Temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Portanto, pelo teste do termo geral a série diverge.

Teste de Comparação

Teorema 1.8. ***(Teste de Comparação)*** *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *duas série de termos não negativos, a primeira dominada pela segunda, isto é ,* $a_n \leq b_n$ *para todo* n. *Nessas condições podemos afirmar.*

a) $\sum b_n$ *converge* $\Rightarrow \sum a_n$ *converge e* $\sum a_n \leq \sum b_n$;

b) $\sum a_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum b_n$ *diverge.*

Exemplo 1.9. *Dada a série*

$$\sum \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1}.$$

Temos que

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

mas como

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

é uma p-série e converge, pois $p = \dfrac{3}{2} > 1$. *Logo, pelo teste de comparação, a série*

$$\sum \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1},$$

converge.

Teste da Razão

Teorema 1.9. ***(Teste da Razão)*** *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos tal que exista o limite* L *do quociente* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Então, a série converge se* $L < 1$ *e diverge se* $L > 1$, *sendo inconcluso o caso em que* $L = 1$.

Observação 1.7. *O teste da razão ou teste D'alembert é uma importante consequência do teste de comparação.*

Corolário 1.1. *A série de termos positivos* $\sum a_n$ *é convergente se a partir de um certo índice vale sempre* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq c < 1$; *e divergente se a partir de um certo índice vale sempre* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Exemplo 1.10. *Dada a série* $\sum \dfrac{n!}{n^n}$. *Verificaremos se converge ou não, usando o teste da razão. Segue que,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Logo pelo teste da razão a série converge.

1.2.3 Convergência Absoluta e Condicional

Dizemos que uma série $\sum a_n$ converge **absolutamente**, ou é **absolutamente convergente**, se a série $\sum |a_n|$ é convergente. Se $\sum |a_n|$ diverge e a série $\sum a_n$ converge, dizemos que a série $\sum a_n$ é **condicionalmente convergente**.

Teorema 1.10. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Sejam as séries $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$. Suponha que $\sum |a_n|$ converge. Considere p_n a soma dos termos $a_r \geq 0$ e q_n a soma dos valores absolutos dos termos $a_r < 0$, onde $r \leq n$. Se T_n e S_n são as somas parciais de $\sum |a_n|$ e $\sum a_n$, respectivamente. Temos

$$T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| = p_n + q_n$$

e

$$S_n = p_n - q_n,$$

As sequências (T_n), (p_n) e (q_n) são não decrescentes, a primeira das quais, por hipótese, é convergente. Seja T seu limite. Temos que $p_n \leq T_n \leq T$ e $q_n \leq T_n \leq T$, donde concluímos que (p_n) e (q_n) convergem. Sejam p e q seus respectivos limites. Então S_n também converge.

$$S_n = p_n - q_n \Rightarrow p - q.$$

■

Séries Alternadas e Convergência Condicional

Uma série é *alternada* quando seus termos têm sinais alternadamentes positivos e negativos. Para esta série vale a recíproca do Teorema 1.6, quando o valor absoluto do termo geral tende a zero de uma sequência não-crescente, isto é, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \to 0$. O que é equivalente a o Teorema seguinte.

Teorema 1.11. ***(Teste de Leibniz)*** *Seja (a_n) uma sequência que tende a zera não-crescente. Então, a série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

Exemplo 1.11. *Verificaremos se a série dada é convergente; e em caso afirmativo, se absoluta ou condicional.*

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Considere $\sum \frac{1}{n^2}$ *que converge e é o valor absoluto da série dada. Logo a série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *converge absolutamente. Portanto a série dada converge.*

Exemplo 1.12. *Verificaremos se a série dada é convergente; e em caso afirmativo, se absoluta ou condicional.*

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}.$$

Note que quando passamos o valor absoluto na série temos que $\sum \frac{1}{n}$ *diverge e nada podemos dizer. Aplicando o teste de Leibniz, temos que*

a) $\frac{1}{n}$ *é decrescente;*

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Portanto, pelo teste de Leibniz, a série $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ *converge condicionalmente.*

Capítulo 2

Método das Séries de Potências

Dada uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem com coeficientes constantes podemos encontrar soluções por funções elementares do Cálculo. Entretanto, nos perguntamos se é possível termos soluções por funções que conhecemos do Cálculo, para o caso de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem com coeficientes variáveis.

Para que isso ocorra é necessário que a função f possa ser representada por série de potências, isto é, f é uma função especial.

O objetivo desta seção é abrir caminho ao estudo principal deste trabalho, isto é, o estudo das séries de potências.

2.1 Séries de Potências

Uma **série de potências** em $(x - x_0)$, ou série de potências centrada em x_0 é uma série infinita da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

onde x é uma variável e $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ são constantes chamadas de **coeficientes** e x_0 é a constante chamada **centro** da série. Em particular, uma série de potência centrada em $x_0 = 0$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Para nosso estudo vamos supor que todas as variáveis e constantes sejam reais.

2.1.1 Representação de Funções como Séries de Potências

O principal uso das séries de potência é fornece uma maneira de representar funções especiais. A soma da série anterior é uma função

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

onde o domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge.

Em particular se $a_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

onde o domínio de convergência é o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x| < 1\}$.

Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em $(x - x_0)$, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \text{ onde } |(x - x_0)| < r,$$

então os coeficientes são dados pela fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

A série é chamada de **série de Taylor** para a função f em torno do ponto $x = x_0$.

Séries de Taylor e de Maclaurin

A **série de Taylor** da função f em torno de $x = x_0$, é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots.$$

Para o caso especial $x_0 = 0$, a série de Taylor recebe o nome especial de **Séries Maclaurin**.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \ldots.$$

Exemplo 2.1. *São exemplos de séries de potências as seguintes séries de Maclaurin*

a) $\dfrac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ $\qquad$ ($|x| < 1$, ***série geometrica***) *b)* $\dfrac{x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots$

c) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

d) $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$

e) $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} - + \ldots$

Observação 2.1. *Note que para o caso em que $x_0 = 0$, não temos nenhuma perda de generalidade da série, deste modo estudaremos a série na forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Lema 2.1. *Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge num certo ponto $x = x_0 \neq 0$, ela converge absolutamente em todos os pontos x do intervalo $|x| < |x_0|$; e se a série diverge em $x = x_0$, ela diverge em todo x fora desse intervalo, isto é, em $|x| > |x_0|$.*

Demonstração. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em x_0, temos que seu termo geral tende a zero, ou seja, $\lim a_n x_0^n = 0$, e é limitado por uma constante S. Donde

$$\begin{aligned} |a_n x_0^n| &\leq S \\ \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n &\leq S \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\ \Rightarrow \frac{1}{S}|a_n x^n| &\leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \end{aligned}$$

Nessas condições podemos afirmar: como a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ é convergente em $|x| < |x_0|$; temos pelo teste da comparação que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ também converge no intervalo $|x| < |x_0|$. Note que se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge em $x = x_0$, temos que a série dominada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ diverge também, o que é um absurdo. Portando, provamos que em $x = x_0$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ teria de convergir, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.1. *A toda série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que converge em algum valor $x' \neq 0$ e diverge em algum outro valor x'', corresponde um número positivo r tal que a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.*

Demonstração. Se r é o supremo de $|x|$, ou seja $|x'| \leq r$, com x variando entre os valores que a série converge. Temos que

$$|x'| < r \text{ e } r < |x''|.$$

De fato, se $r > |x''|$, teríamos um x tal que $|x''| < |x| \leq r$ (pois r é o supremo), e portanto a série converge em x. Por outro lado, pelo lema 2.1 a série converge em $|x''|$ o que é um absurdo. Temos ainda que, se $|x| < r$, existe um x_0 tal que $|x| < |x_0| < r$, e a série converge em x_0. Logo, pelo lema 2.1 a série converge absolutamente em x e diverge em x no intervalo $|x| > r$. Neste caso, basta considera o caso em que $|x| = |x''|$, onde r não seria mais o supremo. ■

Intervalo de Convergência. Raio de Convergência

Toda série de potência possui um **intervalo de convergência**. O intervalo de convergência são todos os valores x nos quais a série converge e para determiná-lo, usaremos o teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = L,$$

desde que este limite exista. Pelo critério da razão, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente se $L < 1$ e divergente se $L > 1$, sendo o caso extremo $L = 1$ analisado separadamente. Deste modo para determinar o intervalo de convergência, vamos aplicar o teste da razão, no caso em que $x \neq 0$, pois em $x = 0$ todos os termos se anulam, exceto talvez o primeiro a_0 que seria o único valor para que a série converge, o que não tem interesse prático. Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} |x|.0 & < 1 \\ |x|.\infty & > 1 \\ |x|.M \end{cases}$$

Logo temos três possibilidades para o limite: No primeiro caso a série pode convergir para outros valores de x. Nesse caso $r = \infty$. No segundo caso a série diverge para todo $x \neq 0$. Nesse caso $r = 0$. No terceiro caso a série converge para todo valor $x \neq 0$ tal que $|x|.M < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{M}$ e diverge para $|x|.M > 1 \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{M}$.

Note que o teorema anterior não garante se nos extremos $-r < x < r$ a série converge. Mas, podemos afirmar que só faz sentido falar de série de potências dentro do seu intervalo de convergência. Pois só neste intervalo a série é uma função. Devido ao fato, que os estudo natural das séries de potência é o plano complexo e quando x varia em $|x| < r$ é um círculo de centro na origem e raio r. O número r, apresentado no Teorema anterior, é chamado **raio de convergência** da série.

Por consequência do teste da Razão, podemos obtermos o **raio de intervalo da convergência** da seguinte forma,

$$r = \frac{1}{M},$$

o que é o mesmo que

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Exemplo 2.2. *Determine o intervalo de convergência e o raio de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Usando o teste da Razão, temos

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = |x| < 1.$$

Logo $-1 < x < 1$. Analisando as extremidades, temos: no caso em que $x = 1$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

como $\dfrac{1}{1+n}$ é uma sequência decrescente e o $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+n} = 0$. Segue que pelo teste de Leibniz a série alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

converge. No caso em que $x = -1$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

que é uma série harmônica que diverge. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1},$$

converge no intervalo $(-1, 1]$ e o raio de convergência é $r = 1$.

2.1.2 Operações com Séries de Potências

As séries de potências podem ser combinadas através das operação de adição, multiplicação e divisão. Os procedimentos são semelhantes á maneira pelo qual somamos, multiplicamos ou dividimos dois polinômios.

Proposição 2.1. *Se as séries de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

forem ambas convergentes para $|x| < r$*, então:*

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)\, x^n;$$

onde a série resultante converge para $|x| < r$*, pelo menos.*

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0,$$

onde a série resultante converge para $|x| < r$*, pelo menos. Se* $g(x) \neq 0$*, então podemos ter* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$*, onde na maiorias dos casos, os coeficientes* d_n *podem ser obtidos igualando-se os coeficientes correspondentes na seguinte equação:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right) x^n.$$

No caso da divisão, o raio de convergência do série de potências resultante pode ser menor do que r*.*

Temos ainda, que a função f é continua e possuiu derivadas de $f', f'', \ldots$, dentro do seu intervalo de convergência, que podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, isto é,

$$f' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$f'' = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

e assim por diante. Cada uma dessas séries converge absolutamente no intervalo $|x| < r$.

2.1.3 Propriedades das Séries de Potências

Teorema 2.2. *Toda série de potências* $\sum a_n x^n$, *com raio de convergência* $r > 0$ *(*r *podendo ser infinito), converge uniformemente em todo intervalo* $[-c, c]$, *onde* $0 < c < r$.

Demonstração. Fixado $c < r$, seja x_0 um número compreendido entre c e r. Como a série converge absolutamente em x_0, existe S tal que $|a_n x_o^n|$ é limitado por uma constante S; segue que para $|x| \leq c$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq S \left|\frac{c}{x_0}\right|^n.$$

Isso mostra que a série $\sum |a_n x^n|$ é dominada pela série numérica convergente $\sum S \left|\frac{c}{x_0}\right|^n$. Portanto, pelo teste da comparação, a série $\sum |a_n x^n|$ converge uniformemente em $|x| \leq c$. ■

Observação 2.2. *Note que o teorema anterior garante a convergência uniforme em qualquer intervalo* $|x| \leq c$ *contido no intervalo* $|x| < r$, *mas não garante nada em* $|x| < r$.

Teorema 2.3. *Se uma função* f *admite representação em série de potências num ponto* x_0, *essa representação é única.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha duas representações para todo x numa vizinhança da origem, $|x| < r$:

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n.$$

Essas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo, em seu intervalo aberto. Em particular, em $x = 0$, temos $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$. ■

Observação 2.3. ***(Consequência do teorema anterior)***

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0,$$

para todo x *em algum intervalo aberto centrado em* x_0, *tal que* $|x| < r$. *Então,*

$$a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_n = \ldots = 0.$$

2.2 A Idéia do Método das Séries de Potências

A idéia do método de séries de potência para resolver EDOs é bem simples. Descreveremos, nesta seção, o procedimento prático, que nos fornece soluções das EDOs na forma dessas séries, em seguida provaremos a existência da solução por séries de potências.

Para uma dada EDO na forma padrão

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.1}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

Suponha que existe uma solução na forma de uma série de potências, a qual estabeleceremos no próximo teorema, com coeficientes desconhecidos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{2.2}$$

O modo mais prático de determinar os coeficientes a_n é substituindo a solução y e suas derivadas y' e y'' na equação (2.1), no seu intervalo de convergência, o que resultará em uma fórmula de recorrência, pela qual podemos determinar sucessivamente os coeficientes, até então, desconhecidos. De modo que, as operações envolvidas no procedimento são justificáveis desde que permaneçamos no intervalo de convergência.

Raramente é possível reduzir uma representação fechada para a solução de uma equação, deste modo, não convém aplicar o método de série de potências de imediato, se não temos uma garantia. Prosseguiremos utilizaremos o seguinte conceito.

Definição 2.1. ***(Função Analítica Real)*** *Uma função real $f(x)$ é dita* ***analítica no ponto*** $x = x_0$ *, se ela pode ser representada numa série de Taylor relativa a esse ponto que tenha raio de convergência positivo.*

Basta considerarmos a equação diferencial de segunda ordem linear

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.3}$$

onde a_2, a_1 e a_0 são funções analíticas em $x = x_0$, que pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

dividindo-se pelo primeiro coeficiente $a_2(x)$. Segue-se, então:

- Se $a_2(x_0) \neq 0 \Rightarrow p(x)$ e $q(x)$ são analíticas;

- Se $a_2(x_0) = 0$ e a_2, a_1 e a_0 são polinômios sem fatores comuns. Então $p(x)$ e $q(x)$ não são analíticas.

Exemplo 2.3. *Verificaremos se a seguinte equação possui solução*

$$xy'' + (\sin x)y' + x^2y = 0.$$

Temos que,

$$a_2 = x,\ a_1 = \sin x \ e\ a_0 = x^2$$

são funções analíticas em $x = 0$. Reescrevendo a equação dada, obtemos

$$y'' + \frac{\sin x}{x}y' + \frac{x^2}{x}y,$$

donde só podemos garantir solução por série de potências se $p(x)$ e $q(x)$ forem analíticas. Note que $q(x) = x$ é analítica. Verificaremos agora se $p(x)$ também é. Segue que

$$p(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x^3}{3!x} + \frac{x^5}{5!x} - \ldots = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!},$$

usando o teste da razão na série, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1,$$

logo, pelo critério da razão, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ é absolutamente convergente e analítica. Portanto, a equação

$$xy'' + (\sin x)y' + x^2y,$$

possui solução em séries de potências.

Funções Harmônicas

Definição 2.2. *Seja u uma função de duas variáveis x e y, definidas em um domínio D. Suponha que u tenha derivadas de segunda ordem sobre D. A função u é harmônica se ela satisfaz a equação*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.4}$$

Exemplo 2.4. *São exemplos de função harmônica as chamadas* ***soluções fundamentais*** *da equação de Laplace $\Phi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$. Definida por:*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} ln|x| & se \quad n = 2 \\ \\ \dfrac{1}{n(2-n)\alpha(n)}|x|^{2-n} & se \quad n \geq 3 \end{cases}$$

2.2.1 Teorema da Existência de Soluções por Séries de Potências

Teorema 2.4. ***(Existência de Soluções por Séries de Potências)*** *Considere a equação*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios sem fatores comuns. Se $a_2(x_0) \neq 0$, a solução geral pode ser escrita como uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1 \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais da equação que convergem (pelo menos) para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $a_2(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Demonstração. Dividindo-se a equação (2.3) por a_2, obtemos uma equação na forma padrão

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Temos que $a_2(x_0) \neq 0$, $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas, logo podem ser representada em série de potências de x,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \text{ e } q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que converge para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $a_2(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$. Suponhamos que exista uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vamos mostrar que os coeficientes satisfazem uma recorrência de tal forma que $y(x)$ converge para $|x| < r$. Derivando-se termo a termo da série de $y(x)$, obtemos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

e

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Em seguida, substituindo-se na equação (2.1), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n,k=0}^{\infty} p_n (k+1) a_{k+1} x^{n+k} + \sum_{n,k=0}^{\infty} q_n a_k x^{n+k} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \left[p_{n-k}(k+1) a_{k+1} + q_{n-k} a_k \right] \right] x^n = 0.$$

Esta é a série nula, o que implica que todos os coeficientes são igualados a zero, o que garante que podemos obtermos duas soluções. Assim obtemos:

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} = - \sum_{k=0}^{n} \left[p_{n-k}(k+1) a_{k+1} + q_{n-k} a_k \right] \tag{2.5}$$

Essa equação é chamada de **relação de recorrência**. Por outro lado, da convergência das séries de $p(x)$ e $q(x)$, se $0 < x < r$, temos que existe $S > 0$, tal que

$$|p_n| x_0^n \leq S \text{ e } |q_n| x_0^n \leq S, \qquad \forall n \geq 0.$$

Segue que

$$|p_{n-k}| \leq \frac{S}{x_0^{n-k}} = \frac{S}{x_0^n} x_0^k \text{ e } |q_{n-k}| \leq \frac{S}{x_0^{n-k}} = \frac{S}{x_0^n} x_0^k, \qquad \forall n \geq 0.$$

Usando isso, temos da equação(2.5)

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq \frac{S}{x_0^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|\right]x_0^k \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{S}{x_0^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|\right]x_0^k + S|a_{n+1}|x_0. \tag{2.7}$$

Vamos considerar a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, com os coeficientes definidos por $A_0 = |a_0|$, $A_1 = |a_1|$. Donde

$$(n+1)(n+2)A_{n+2} = \frac{S}{x_0^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k + SA_{n+1}x_0. \tag{2.8}$$

Usando (2.7) e (2.8), por indução podemos provar que para $n \geq 0$ temos $a_n \leq A_n$. De fato, para $n = 0$, temos

$$2|a_2| \leq S\left[|a_1|+|a_0|\right] + S|a_1|x_0,$$

como $A_0 = |a_0|$ e $A_1 = |a_1|$, segue que

$$2|a_2| \leq S\left[A_0 + A_1\right] + SA_1x_0 = 2A_2$$

$$|a_2| \leq A_2.$$

Suponha que a desigualdade vale para todo $n < k$, com $k \in \mathbb{N}$. assim $a_{k-2} \leq |A_{k-2}|$ e $a_{k-1} \leq |A_{k-1}|$. Mostraremos que vale para k. Portanto, fazendo $n = k-2$, temos

$$(k-1)k|a_k| \leq \frac{S}{x_0^{k-2}}\sum_{i=0}^{k-2}\left[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|\right]x_0^k + S|a_{n-1}|x_0. \tag{2.9}$$

Como no lado direito de (2.9) a soma é até $k-2$, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}(k-1)k|a_k| &\leq \frac{S}{x_0^{k-2}}\sum_{i=0}^{k-2}\left[(k+1)|A_{k+1}|+|A_k|\right]x_0^k + S|A_{k-1}|x_0 \\ &= (k-1)kA_k.\end{aligned}$$

Logo $|a_k| \leq A_k$.

Vamos mostrar agora que a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ é convergente para $|x| < r$, o que implica que a série de $y(x)$ também é convergente. Usando a equação (2.8) para $n-1$, temos:

$$n(n+1)A_{n+1} = \frac{S}{x_0^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right] x_0^k + SA_n x_0$$

e

$$n(n-1)A_n = \frac{S}{x_0^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right] x_0^k + SA_{n-1} x_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
n(n+1)A_{n+1} &= \frac{1}{x_0}\left\{\frac{S}{x_0^{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k\right]\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{1}{x_0}\left\{\frac{S}{x_0^{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k + (nA_n + A_{n-1})\,x_0^{n-1}\right]\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{1}{x_0}\left\{\frac{S}{x_0^{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k\right] + \frac{S}{x_0^{n-2}}(nA_n + A_{n-1})\,x_0^{n-1}\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{1}{x_0}\left\{\frac{S}{x_0^{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k\right] + S(nA_n + A_{n-1})\,x_0\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{1}{x_0}\left\{\frac{S}{x_0^{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)A_{k+1}+A_k\right]x_0^k\right] + SA_{n-1}x_0 + SnA_n x_0\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{1}{x_0}\left\{n(n-1)A_n + SnA_n x_0\right\} + SA_n x_0 \\
&= \frac{A_n}{x_0}\left\{n(n-1) + Snx_0 + Sx_0^2\right\}.
\end{aligned}$$

Usando o teste da razão, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n-1)+Snx_0+Sx_0^2}{x_0 n(n+1)}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)+Snx_0+Sx_0^2}{x_0 n(n+1)}\,|x| \\
&= \frac{|x|}{x_0}.
\end{aligned}$$

Assim, a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ converge para $|x| < x_0$, para todo $x_0 < r$. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ é convergente para $|x| < r$. Como para $n \geq 0$ temos $a_n \leq A_n$, então a série

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ também é convergente para $|x| < r$.

Agora, fazendo $n = 0$ em (2.5), obtemos a_2 como combinação linear de a_0 e a_1. Substituindo este resultado em (2.5) para $n = 1$ obtemos também a_3 como combinação linear de a_0 e a_1. Continuando desta forma obtemos

$$a_n = b_n a_0 + c_n a_1, para\ n \geq 0.$$

Assim,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1 \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right).$$

Fica como exercício para leitor verificar se $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são solução fundamentais da equação.(veja na referência [5]) ■

2.2.2 Classificação dos Pontos do Domínio da EDO

Dizemos que um ponto x_0 é um **ponto ordinário** da equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ se tanto $p(x)$ como $q(x)$ na forma padrão forem analíticas em x_0. Dizemos, ainda, que um ponto que não é um ponto ordinário é dito um **ponto singular** da equação. Definimos da seguinte forma:

Definição 2.3. *Um ponto x_0 é um ponto ordinário da equação*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

*se $p(x)$ e $q(x)$ são **funções analíticas** em x_0. Caso contrário, dizemos que x_0 é um **ponto singular**. Além disso, x_0 é chamado de ponto singular regular se x_0 não é um ponto ordinário e as funções dadas por $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ são analíticas em x_0. Se x_0 não é um ponto ordinário e pelo menos uma desta funções não for analítica em x_0, diremos que ele é um ponto singular irregular.*

No caso da equação com coeficientes polinomiais, esta definição (2.3) pode ser reformulada de maneira mais específica, deste modo:

Definição 2.4. *Considere*

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

onde a_2, a_1 e a_0 são polinômios.

i) x_0 é um ponto singular da equação acima se $a_2(x_0) = 0$;

ii) Um ponto singular x_0 é dito regular se os limites forem finito.

$$\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad e \quad \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)};$$

iii) Se um ponto singular não é regular, dizemos que ele é um ponto singular irregular.

Observação 2.4. *Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da equação (2.3), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de série de potências, convergindo cada série, pelo menos, no intervalo $(x_0 - r,\, x_0 + r)$,em que r é a distância a partir do centro x_0 até o ponto singular (real ou não) mais próximo.*

Exemplo 2.5. *A solução da EDO*

$$(x - 1)y'' + xy' + y = 0,$$

é da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $x = 4$, é convergente no intervalo $(4-3, 4+3) = (1, 7)$. De fato, neste caso o ponto singular mais próximo, é o ponto $x = 1$, e o raio $r = |4 - 1| = 3$.

Exemplo 2.6. *A solução da EDO*

$$(x^2 - 9)y'' + xy' + y = 0,$$

é da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $z_1 = 4$, é convergente no intervalo $(4 - 5, 4 + 5) = (-1, 9)$. De fato, neste caso o ponto singular mais próximo, são os ponto $z_2 = \pm 3i$ do plano complexo, e raio $r = |z_1 - z_2| = |4 - 3i| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

2.2.3 Resolução na Vizinhança de um Ponto Ordinário

Dados os coeficientes analíticos, podemos procurar solução analítica em torno de um ponto ordinário x_0, ou seja, podemos supor solução formalmente representada por uma série de potências e tentar identificar os coeficientes a_n's e validar o resultado.

Exemplo 2.7. *Todo valor finito de x é um ponto ordinário da equação diferencial $y'' + (e^x)y' + (\sin x)y = 0$. Em particular, x_0 é um ponto ordinário. De fato, pois, tanto e^x como $\sin x$ são analíticas.*

2.2.4 Resolução na Vizinhança de um Ponto Singular Regular

Uma equação diferencial relativamente simples que tem um ponto singular regular é a **equação de Euler-Cauchy**. A resolução da equação de Euler-Cauchy pode ser resumida da seguinte maneira:

Dada a equação de Euler-Cauchy

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{2.10}$$

em qualquer intervalo que não contenha a origem, procuramos solução do tipo potência $y = x^s$, para s conveniente, ou seja, as soluções são determinada pelas raízes s_1 e s_2. Temos ainda que α e β são constantes reais. O que faz sentido, pois:

$$y' = sx^{s-1} \Rightarrow xy' = sx^s;$$

$$y'' = s(s-1)x^{s-2} \Rightarrow x^2y'' = s(s-1)x^s.$$

Substituindo na equação (2.10) y e suas derivadas y' e y''. Obtemos:

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = s(s-1)x^s + \alpha sx^s + \beta x^s = 0$$

$$\Leftrightarrow [s(s-1) + \alpha s + \beta]x^s = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-1) + \alpha s + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + (\alpha - 1)s + \beta = 0. \tag{2.11}$$

Essa equação quadrática é chamada de **Equação característica** ou **Equação indicial** associada à equação de Euler-Cauchy, a qual, estudaremos mais a adiante. Da equação característica, podemos obter o solução geral da EDO, determinando as raízes s_1 e s_2 da equação.

Soluções da Equação Indicial

- Se as raízes são reais e distintas, então a solução geral é dada por

$$y = c_1|x|^{s_1} + c_2|x|^{s_2}$$

- Se as raízes são reais iguais, então

$$y = (c_1 + c_2 ln|x|)|x|^{s_1}$$

- Se as raízes são complexas, $s_1, s_2 = \lambda \pm i\mu$, então

$$y = |x|^{\lambda} \left[c_1 \cos(\mu ln|x|) + c_2 \sin(\mu ln|x|)\right].$$

Generalizando este procedimento, temos que supor que x_0 é um ponto de singularidade regular da equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, que também pode ser escrita em sua forma padrão

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

fazendo

$$p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

e

$$q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

Como x_0 é um ponto de singularidade regular da equação, temos por definição, que pelo menos uma das funções $p(x)$ e/ou $q(x)$ não é analítica em x_0 e as funções dadas por

$$(x - x_0)p(x) = (x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

e

$$(x - x_0)^2 q(x) = (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

são analíticas em x_0. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x_0 = 0$. Logo poderemos representá-las por suas séries de Taylor:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots \tag{2.12}$$

e

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \dots \tag{2.13}$$

Note que se multiplicarmos a equação (2.1), por x^2,

$$x^2 y'' + x(xp(x))y' + x^2 q(x) y = 0 \tag{2.14}$$

que, no caso particular de p_0, $q_0 \neq 0$ e $p_n = q_n = 0$ $(\forall n \geq 1)$, recai na equação de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + x p_0 y' + x^2 q_0 y = 0.$$

Exemplo 2.8. $x_0 = 0$ *é um ponto singular para a equação de Cauchy-Euler*

$$x^2 y'' + axy' + by = 0.$$

De fato, dividindo por x^2*, obteremos* $p(x) = \dfrac{a}{x}$ *e* $q(x) = \dfrac{b}{x^2}$*. Logo, as singularidades destas funções podem ser removidas por multiplicação:*

$$xp(x) = a \text{ e } x^2 q(x) = b$$

Observação 2.5. *Da equação de Cauchy-Euler, podemos afirmar que existe solução da forma* $y = x^s$*, onde* s *não é necessariamente é um inteiro. Portanto no caso de ponto singular regular, não vamos poder procurar solução na forma de uma série de potências, assim, vamos ter que procurar a solução numa forma que contenha como caso particular as funções* $y = x^s$*.*

Na próximo capítulo, estudaremos o método chamado **Método de Frobenius**, que fornece a base das soluções em série da EDO linear (2.14) em torno de um ponto singular regular. Deste modo, uma das duas soluções terá sempre a forma

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (a_0 \neq 0),$$

onde s é a raiz da equação (2.11). A outra solução terá uma forma indicada pela equação indicial. Apresentaremos agora dois exemplos, dois fatos que motivam esse método:

Exemplo 2.9. *$y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 lnx$ são soluções de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$. Esta EDO tem um ponto singular em $x = 0$, em torno do qual, se queremos uma série de potências como solução, só obteríamos $y_1 = x^2$, pois o fator lnx na solução y_2 não tem representação em série de Taylor em torno de $x = 0$.*

Exemplo 2.10. *A equação de Bessel (que discutiremos no próxima capítulo)*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2 - v^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{2.15}$$

onde v é um parâmetro e $a_1(x) = 1$ e $a_0(x) = x^2 - v^2$ analíticas em $x = 0$, não pode ser tratada de modo geral pelo método de série de potências.

Capítulo 3

Método de Frobenius

Neste capítulo iremos estudar o chamado Método de Frobenius (George Ferdinand Frobenius 1849-1917). Uma importante ferramenta para encontrarmos soluções de Equações Diferencias Ordinárias de Segunda Ordem na forma de série de Taylor, independentemente se os coeficientes são ou não constantes.

O método é aplicável geralmente em EDOs de segunda ordem de considerável importância prática - entre elas, a equação de Bessel (Friedrich Wilheem Bessel 1784-1846), pois possuem coeficientes que embora não sejam analíticos é possível encontrarmos soluções, multiplicando as séries por um termo logarítmico ou por uma potência de expoente fracionário . A equação de Bessel surge com grande frequência, em engenharia e/ou física matemática, quando da resolução de equações diferenciais parciais pelo método da separação de variáveis.

3.1 Método de Frobenius

O Método de Frobenius é uma extensão do método das séries de potências, consiste fundamentalmente em procurar uma solução da equação diferencial de segunda ordem linear e homogênea, na forma de série de Taylor.

O método é aplicável a equações na sua forma padrão:

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \tag{3.1}$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ não são funções analíticas em torno de $z = 0$, mas $zp(z)$ e $z^2q(z)$ são. Se $p(z)$ e $q(z)$ forem analíticas em $z = 0$ o método não é todo necessário, basta tomarmos $s = 0$ e utilizarmos a resolução descrita para o método de séries de potências. O método de Frobenius para uma equação com ponto singular regular, afirma que podemos encontrar solução na forma:

$$y(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s},$$

com $a_0 \neq 0$ e onde s é um parâmetro livre.

Visto que sempre é possível deslocarmos a singularidade sem mudar essencialmente a equação diferencial, consideraremos $x = x_0 + z$ e restringiremos, sem perda de generalidade, nosso estudo ao caso do ponto $z = 0$. Deste modo, consideraremos somente a seguinte série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}.$$

Teorema 3.1. ***(Método de Frobenius)*** *Consideremos que a_1 e a_0 sejam funções quaisquer e analíticas em $x = 0$. Então a EDO*

$$y'' + \frac{a_1(x)}{x} y' + \frac{a_0(x)}{x^2} y = 0, \tag{3.2}$$

possui pelo menos uma solução que pode ser representada na forma

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = x^s (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \qquad (a_0 \neq 0) \tag{3.3}$$

onde o expoente s pode ser qualquer número (real ou complexo), sendo s escolhido de modo que $a_0 \neq 0$.

A EDO(3.2) tem também uma segunda solução (de tal modo que a essas duas solução são linearmente independentes), que pode ser similar a equação (3.3), com valores diferentes para s e para os coeficientes, podendo também ter um termo logarítmico.

Não demonstraremos esse teorema. O que importa para nosso estudo é que exista uma solução em série da forma (3.3).

3.1.1 Equação Indicial, Indicação da Forma das Soluções

Explicaremos agora o método de Frobenius para resolver a equação (2.14). Deste modo, devemos primeiro, supor soluções em série da forma (3.3). Em seguida, derivamos (3.3) termo a termo, em relação a x. Note que na derivada,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{n+s-1} = x^{s-1}\left[sa_0 + (s+1)a_1 x + \ldots\right],$$

o índice obrigatoriamente começa a variar a parir de $n = 0$, diferente do método de série de potências que podemos escolher começar da forma mais conveniente, como em geral o primeiro termo de $y = a_0x^s + a_1x^{s+1} + \cdots$ não é uma constante e não se anula por derivação. A mesma observação vale para a derivada de segunda ordem

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s-2} = x^{s-2}\left[s(s-1)a_0 + (s+1)sa_1 x + \ldots\right].$$

Substituindo (3.3) e suas derivadas, mas as séries (2.12) (2.13) em (2.14), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)a_k x^{k+s}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+s}\right) = 0.$$

Multiplicando as série e separando os termos, Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s} + \sum_{n,k=0}^{\infty} p_n(s+k)a_k x^{n+k+s} + \sum_{n,k=0}^{\infty} q_n a_k x^{n+k+s} = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(s+n)(s+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k\left[(s+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]\right\}x^{s+n} = 0.$$

$$\Rightarrow \left[s(s-1) + p_0 s + q_0\right]a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(s+n)(s+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(s+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]\right\} x^{s+n} = 0.$$

Uma vez que, por suposição, $a_0 \neq 0$, igualamos a zero a equação correspondente à x^s, obtemos

$$s(s-1) + p_0 s + q_0 = 0, \tag{3.4}$$

essa importante equação quadrática é chamada de **equação indicial**, exatamente a mesma equação de Cauchy-Euler. Deste modo, as raízes de (3.4), chamadas de **expoentes da equação na singularidade**, devemos sempre substituí-las na equação:

$$(s+n)(s+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(s+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right] = 0, \qquad n \geq 1$$

chamada **forma recorrência**. De modo que, o Teorema 3.1 garante que pelo menos uma solução na forma dessa série pode ser encontrada.

Exemplo 3.1. *A equação diferencial*

$$xy'' + 3y' - y = 0 \tag{3.5}$$

possui uma singularidade regular em $x = 0$. Pelo método de Frobenius, vamos mostrar que podemos ter pelo menos uma solução na forma de série:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}.$$

Derivamos y termo a termo, obtemos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{n+s-1} = x^{s-1}\left[sa_0 + (s+1)a_1 x + \ldots\right]$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s-2} = x^{s-2}\left[s(s-1)a_0 + (s+1)sa_1 x + \ldots\right].$$

Substituindo y e suas derivadas, na equação (3.5). Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(s+n)^2 - (s+n) + 3(s+n)\right] a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

$$\Rightarrow x^s\left[s(s+2)a_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(s+n)(s+n+2)\right] a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

Fazendo $n = n + 1$ na primeira série, obtemos:

$$x^s\left[s(s+2)a_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(s+n+1)(s+n+3)\right] a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

$$\Rightarrow x^s\left[s(s+2)a_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(s+n+1)(s+n+3)a_{n+1} - a_n\right] x^n\right] = 0$$

Deste modo, temos que a equação indicial é da forma $s(s+2) = 0$ *onde os expoentes são as raízes indicias* $s_1 = 0$ *e* $s_2 = -2$. *Como*

$$(s+n+1)(s+n+3)a_{n+1} - a_n = 0, \quad (n \geq 0), \tag{3.6}$$

Segue-se que, quando $s_1 = 0$ *em (3.6),temos:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(n+3)}$$

$$a_1 = \frac{a_0}{1 \times 3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2 \times 4} = \frac{a_0}{(1 \times 3)(2 \times 4)} = \frac{2a_0}{2!4!}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3 \times 5} = \frac{2a_0}{(3 \times 2! \times 5 \times 4!)} = \frac{2a_0}{3!5!}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4 \times 6} = \frac{2a_0}{(4 \times 3! \times 6 \times 5!)} = \frac{2a_0}{4!6!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2a_0}{n!(n+2)!}, \qquad (n \geq 1).$$

Logo, uma solução da série é

$$y_1 = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_0}{n!(n+2)!} x^n; \qquad (|x| < \infty).$$

Agora, quando $s_2 = -2$ *em (3.6),temos:*

$$(n-1)(n+1)a_{n+1} - a_n = 0. \tag{3.7}$$

Note que para $n = 1$ *e* $n = 0$, *temos em (3.7), respectivamente:*

$$0 \times 2a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

$$-1 \times 1a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Continuando, encontraremos:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n-1)(n+1)} \qquad (n \geq 2).$$

Deste modo

$$a_3 = \frac{a_2}{1 \times 3}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2 \times 4} = \frac{a_2}{(1 \times 3)(2 \times 4)} = \frac{2a_2}{2!4!}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{3 \times 5} = \frac{2a_2}{(3 \times 2! \times 5 \times 4!)} = \frac{2a_2}{3!5!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2a_2}{(n-2)!n!}. \qquad (n \geq 2)$$

Logo,

$$y_2 = a_2 x^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!n!} x^n. \tag{3.8}$$

Porém, se fizermos uma inspeção detalhada de (3.8) e fazendo $n = n - 2$, veremos que y_2 é um múltiplo de y_1 (veja no Exemplo (3.3)). Disto, concluirmos que o Método de Frobenius nos dá somente uma solução em série para (3.5).

Tecnicamente, o método de Frobenius é similar ao método das séries de potências, uma vez tendo-se determinado as raízes da equação indicial.

Veremos a seguir que existem três casos diferentes no Método de Frobenius, através de exemplos, nos quais $x = 0$ é o ponto singular regular em torno da qual desejaremos a solução, que dependendo dos valores reais s_1 e s_2, veja a seção(2.2.4), obtemos a solução geral da equação (3.2).

3.1.2 Caso de Raízes Indicias Distintas não se Deferindo por um Número Inteiro: $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, o método de Frobenius sempre fornece duas soluções linearmente independentes para a equação (2.14) na forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s_1} \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+s_2} \qquad (b_0 \neq 0).$$

Exemplo 3.2. *Encontre uma solução em série para a equação*

$$3xy'' + y' - y' = 0.$$

Devemos supor que exista uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s} \qquad (a_0 \neq 0),$$

deste modo, precisamos determinar todos $a_n's$. Seque-se, derivando-se a série termo a termo, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s+n) a_n x^{n+s-1}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1) a_n x^{n+s-2}.$$

Substituindo y e suas derivadas na equação dada, obtemos

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1) a_n x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (s+n) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0.$$

Deslocando o índice $n = n-1$ na terceira série, obtemos que

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1) a_n x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (s+n) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+s-1} = 0.$$

$$\Rightarrow [3(s-1)s + s]\, a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [3(s+n)(s+n-1) + (s+n)]\, a_n - a_{n-1} \right\} x^{n+s-1} = 0.$$

$$\Rightarrow [s(3s-2) + s]\, a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(3s+3n-2)(s+n) a_n - a_{n-1} \right] x^{n+s-1} = 0.$$

Deste modo, temos que a equação indicial e dá forma $s(3s-2)+s = 0$ onde os expoentes são as raízes indicias $s_1 = \dfrac{2}{3}$ e $s_2 = 0$. Como

$$(3s+3n-2)(s+n) a_n - a_{n-1} = 0, \quad (n \geq 0), \tag{3.9}$$

Segue-se que, quando $s_1 = \dfrac{2}{3}$ em (3.9),temos:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(3n+2)}; \qquad (n \geq 1)$$

$$a_1 = \frac{a_0}{1 \times 5} = \frac{a_0}{5}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2 \times 8} = \frac{a_0}{2!5 \times 8}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3 \times 11} = \frac{a_0}{3!5 \times 8 \times 11}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!5 \times 8 \times 11 \ldots (3n+2)}$$

Portanto, uma solução da série é

$$y_1 = x^{\frac{2}{3}} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \right) = a_0 x^{\frac{2}{3}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!5 \times 8 \times 11 \ldots (3n+2)} x^n \right].$$

Agora, quando $s_2 = 0$ em (3.9),temos:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(3n-2)}; \qquad (n \geq 1)$$

$$a_1 = \frac{a_0}{1 \times 1} = a_0$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2 \times 4} = \frac{a_0}{2!1 \times 4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3 \times 7} = \frac{a_0}{3!1 \times 4 \times 7}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!1 \times 4 \times 7 \ldots (3n-2)}$$

Portanto, a segunda solução da série é

$$y_2 = x^0 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \right) = a_0 x^0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1 \times 4 \times 7 \ldots (3n-2)} x^n \right].$$

Obtemos, assim, duas soluções linearmente independentes, podemos ainda demonstrar, pelo teste da razão, que ambas convergem para todos os valores de x. Temos ainda, pelo princípio de superposição, que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \left[x^{\frac{2}{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!5 \times 8 \times 11 \ldots (3n+2)} x^{n+\frac{2}{3}} \right] +$$
$$c_2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1 \times 4 \times 7 \ldots (3n-2)} x^n \right]; \quad |x| < \infty,$$

é outra solução, essa combinação linear é a solução geral da equação diferencial em qualquer intervalo que não contenha a origem.

3.1.3 Caso de Raízes Indicias que Diferem por um Inteiro Positivo: $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}$

Neste caso, o método de Frobenius para equação (2.14), nos dá

1. Com s_1 (a maior raiz indicial), sempre fornece uma única solução

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s_1}, \qquad (a_n \neq 0)$$

2. Como $s = s_2$ (a menor raiz indicial), sempre leva a uma das duas ocorrências:

a) Ela não fornece nenhuma solução.

b) Ela fornece a solução geral, que incluir, portanto, a solução correspondente á maior raiz (s_1). Na forma:

$$y(x) = cy_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+s_2}; \qquad (b_n \neq 0),$$

em que c é uma constante que pode ser zero.

Exemplo 3.3. *Da ocorrência de 2(a). Encontraremos uma solução em série para a equação:*

$$xy'' + 3y' - y = 0, \tag{3.10}$$

pelo método de Frobenius, vamos supor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}; \qquad (a_n \neq 0).$$

Em seguida, derivado $y(x)$, termo a termo e substituindo na equação (3.10), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_n x^{n+s-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0.$$

Deslocando o índece $n = n - 1$, na terceira série, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_n x^{n+s-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+s-1} = 0.$$

Logo,

$$[(s-1)s + 3s]\, a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{[(n+s-1)(n+s) + 3(n+s)]\, a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+s-1} = 0.$$

Daí,

$$[s(s+2)]\,a_0x^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(s+n+2)(s+n)a_n-a_{n-1}\right]x^{n+s-1}=0.$$

Deste modo, temos que a equação indicial é dá forma $s(s+2)=0$ *onde os expoentes são as raízes indicias* $s_1=0$ *e* $s_2=-2$. *Como*

$$(s+n+2)(s+n)a_n-a_{n-1}=0,\quad (n\geq 0), \tag{3.11}$$

Segue-se que, quando $s_1=-2$ *em (3.11),temos:*

$$n(n-2)a_n-a_{n-1}=0;\qquad (n\geq 1),$$

Daí, podemos determinar sucessivamente coeficientes a_n*:*

$$a_1=-a_0$$

$$0=a_1=-a_0.$$

Note, que $a_0=0$ *é contrário a nossa hipótese para série (3.3). Logo, não existe série associada á raiz indicial* $s-2$. *Agora, quando* $s_2=0$ *em (3.11), temos:*

$$n(n+2)a_n-a_{n-1}=0\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{n(n+2)};\qquad (n\geq 1)$$

$$a_1=\frac{a_0}{1\times 3}=\frac{2a_0}{3!}$$

$$a_2=\frac{a_1}{2\times 4}=\frac{2a_0}{4!2}$$

$$a_3=\frac{a_2}{5\times 3}=\frac{2a_0}{5!3}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2a_0}{(n+2)!n}$$

Portanto, a única solução linearmente independente na forma:

$$y(x)=x^0\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\right)=a_0x^0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!n}x^n\right].$$

Exemplo 3.4. *Da ocorrência de 2(b). Encontraremos a solução em série para a equação*

$$x^2y'' + (x^2 + x)y' - y = 0. \tag{3.12}$$

Pelo método de Frobenius, vamos supor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}; \qquad (a_n \neq 0).$$

Em seguida, derivado $y(x)$, termo a termo e substituindo na equação (3.12), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0.$$

Deslocando o índece $n = n-1$, na segunda série, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_n x^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0.$$

$$\Rightarrow [(s-1)s + s - 1]\, a_0 x^s \sum_{n=1}^{\infty} \{[(n+s-1)(n+s) + (n+s) - 1]\, a_n + (n+s-1)a_{n-1}\} x^{n+s} = 0.$$

$$\Rightarrow \left[(s^2-1)\right] a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} [(s+n-1)(s+n+1)a_n + (n+s-1)a_{n-1}]\, x^{n+s} = 0.$$

Deste modo, temos que a equação indicial e dá forma $s^2 - 1 = 0$ onde os expoentes são as raízes indicias $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$. Como

$$(s+n-1)\,[(s+n+1)a_n + a_{n-1}] = 0, \quad (n \geq 1), \tag{3.13}$$

Segue-se que, quando $s = -1$ em (3.13),temos:

$$(n-2)\,[na_n + a_{n-1}] = 0, \quad (n \geq 1),$$

Daí, podemos determinar sucessivamente coeficientes a_n:

$$a_1 = -a_0$$

$$0\,[2a_2 + a_1] = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Deste modo, a_2 é arbitrário. Note que para os valores $n \geq 3$, temos:

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{n}$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{3} = \frac{-2a_2}{2 \times 3}$$

$$a_4 = \frac{-a_3}{4} = \frac{2a_2}{2 \times 3 \times 4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n 2a_2}{n!}$$

Portanto, a série

$$y(x) = a_0 x^{-1} + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_0 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 2a_2 \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - + \ldots \right)$$

é a solução geral da equação (3.12), pois é a combinação linear das duas funções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$, formada com as constantes arbitrárias a_0 e $2a_2$. Não mostraremos aqui o cálculo com a maior raiz indícial, $s = 1$, onde verificaríamos a obtenção apenas $y_1(x)$. Note ainda, que

$$y_2(x) = \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - + \ldots = \frac{\frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - + \ldots}{x} = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}.$$

Deste modo, se não for possível encontrar uma segunda solução em forma de série, podemos sempre usar do fato de que

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)}dx}{y_1^2(x)} dx, \tag{3.14}$$

é também uma solução para a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, sempre quando $y_1(x)$ for uma solução conhecida. Como mostraremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.5. *Vimos no Exemplo (3.3) que o método de Frobenius proporciona somente uma solução para a equação*

$$xy'' + 3y' - y = 0.$$

De (3.14), obteremos agora a segunda solução, temos que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!n!} x^n = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + \ldots, \tag{3.15}$$

deste modo,

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{3}{x} dx}}{y_1^2(x)} dx = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{3}{x} dx}}{\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + \ldots\right]^2}$$

$$= y_1(x) \int \frac{dx}{x^3 \left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \ldots\right]}. \tag{3.16}$$

Mas, temos ainda da divisão,

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \ldots} = \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow 1 = \left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \ldots\right] \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right]$$

$$= 1a_0 + \left(1a_1 + a_0 \frac{2}{3}\right) x + \left(1a_2 - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + 1\frac{7}{36}\right) x^2 + \ldots,$$

o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_0 & = & 1 \\ a_1 + a_0 \frac{2}{3} & = & 0 \\ a_2 - \frac{4}{9} + \frac{7}{37} & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & -\frac{2}{3} \\ a_2 & = & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Substituindo todos a_n obtidos na equação (3.16). Ficamos agora com:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{x^3} \left[1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \ldots\right] dx.$$

Segue-que, que

$$y_2(x) = y_1(x) \int \left[\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{4x} + \ldots\right] dx.$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4}lnx + \dots\right],$$

ou

$$\Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{4}y_1(x)lnx + y_1(x)\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \dots\right].$$

Logo, no intervalo $(0, \infty)$, *a solução geral é*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2\left[\frac{1}{4}y_1(x)lnx + y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \dots\right)\right],$$

em que $y_1(x)$ *é definido por* (3.15).

3.1.4 Caso de Raízes Indicias Iguais: $s = s_1 = s_2$

Neste caso, como $s = s_1 = s_2$, então teremos sempre uma única solução pelo método de Frobenius para (2.14), na qual s é igual ao único valor da reais indicial.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}; \qquad (a_n \neq 0).$$

A segunda solução é análoga ou procedimento feito no estudo da equação Cauchy-Euler. Deste modo

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+s_2}; \qquad (b_n \neq 0),$$

sempre contém um logaritmo.

Exemplo 3.6. *Encontraremos uma solução em série para equação*

$$xy'' + y' - 4y = 0. \tag{3.17}$$

Supomos um solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}; \qquad (a_n \neq 0).$$

Em seguida, derivado $y(x)$, *termo a termo e substituindo na equação* (3.17), *obtemos:*

$$xy''+y'-4y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_nx^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s+1} + -4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} = 0.$$

Deslocando o índece $n = n-1$, *na terceira série, obtemos:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_nx^{n+s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}+-4\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+s-1}=0.$$

$$\Rightarrow [(s-1)s+s]\,a_0x^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[(n+s-1)(n+s)+(n+s)]\,a_n-4a_{n-1}\right\}x^{n+s-1}=0.$$

$$\Rightarrow s^2a_0x^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(s+n)^2a_n-4a_{n-1}\right]x^{n+s-1}=0.$$

Note que $s=0$ é o único valor para o expoente das raízes indicias s_1 e s_2. Como

$$(s+n)^2a_n-4a_{n-1}=0, \quad (n\geq 1), \tag{3.18}$$

Segue-se que, quando $s=0$ em (3.18), obteremos somente uma solução correspondendo a os coeficientes a_n, que vamos determinar sucessivamente pela iteração de:

$$a_n=\frac{4a_{n-1}}{n^2}, \quad (n\geq 1),$$

desse modo, temos:

$$a_1=\frac{4a_0}{1^2}$$

$$a_2=\frac{4a_1}{n^2}=\frac{4^2a_0}{(1\times 2)^2}$$

$$a_3=\frac{4a_2}{3^2}=\frac{4^3a_0}{(1\times 2\times 3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{4^na_0}{(n!)^2}$$

Portanto, o resultado é

$$y_1(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^na_0}{(n!)^2}x^n; \qquad (|x|<\infty). \tag{3.19}$$

Para obtermos a segunda solução linearmente independente, façamos $a_0=1$ em (3.19) e então usando a fórmula (3.14), teremos:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{1}{x}dx}}{y_1^2(x)}dx=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{1}{x}dx}}{\left[1+4x+4x^2+\frac{19}{9}x^3+\ldots\right]^2}.$$

Deste modo, repetindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, obteremos agora:

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + y_1(x)\left[-8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots\right].$$

Logo, no intervalo $(0, \infty)$*, a solução geral é*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2\left[\frac{1}{4}y_1(x)lnx + y_1(x)\left(-8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots\right)\right],$$

em que $y_1(x)$ *é definido por (3.19).*

3.2 Equação de Bessel

Uma das mais importantes EDOs em estudos avançado de matemática aplicada à física e a engenharia é a **equação de Bessel**. Vamos agora, direcionar nossos estudos para a solução (na forma de série infinita) da equação diferencial:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0; \qquad (\nu \geq 0), \tag{3.20}$$

chamada de **Equação de Bessel de ordem** ν. Vamos supor $\nu \geq 0$, onde ν e um número real. Por simplicidade, iremos considerar apenas o intervalo $(x > 0)$

3.2.1 Solução para a Equação de Bessel

Como mencionamos antes a equação de Bessel (veja o exemplo 2.10) não possui uma solução de forma fechada, no entanto, $x_0 = 0$ é um ponto singular regular da equação. Desse modo, devemos procurar soluções em séries infinitas usando o **método de Frobenius**, ou seja, aplicado o teorema 2.4. Dessa forma, vamos supor uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+s}; \qquad (a_n \neq 0).$$

Em seguida, derivado $y(x)$, termo a termo e substituindo $y(x)$ e suas derivadas na equação (3.20), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)(n+s)a_nx^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2} - \nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} = 0.$$

Deslocando o índece n para $n - 2$, na terceira série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+2} = \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+s}.$$

Deste modo, obtemos a série:

$$a_0\left[s(s-1)+s-\nu^2\right]x^s + a_1\left[(1+s)(1+s-1)+(1+s)-\nu^2\right]x^{1+s} +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n\left[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-\nu^2\right]+a_{n-2}\right\}x^{n+s} = 0.$$

Note que obtemos uma fórmula geral para todo s:

$$a_0\left[s(s-1)+s-\nu^2\right]; \quad (n=0), \tag{3.21}$$
$$\tag{3.22}$$

$$a_1\left[(1+s)(1+s-1)+(1+s)-\nu^2\right]; \quad (n=1), \tag{3.23}$$
$$\tag{3.24}$$

$$a_n\left[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-\nu^2\right]+a_{n-2}; \quad (n \geq 2). \tag{3.25}$$

De (3.22), assumindo $a_0 \neq 0$, obtemos a chamada *equação indicial*:

$$s^2 - \nu^2 = 0.$$

Logo as raízes indiciais são $s_1 = \nu$ e $s_2 = -\nu$. Note que tanto para $s = \nu$ como $s = -\nu$ em (3.24), temos: Se $\nu \neq \{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$, então $a_1 = 0$. Escolhendo $s_1 = \nu$ em (3.25), podemos reescrever-lá:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}; \qquad (n \geq 2). \tag{3.26}$$

Deste modo, a escolha $a_1 = 0$ em (3.26) implica $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Vamos agora tirar a relação de recorrência entre os coeficientes par. Fazendo $n = 2k$ em (3.26), obtemos:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)}; \qquad (k \geq 1).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2 \times 1(1+\nu)}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 \times 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \times 1 \times 2(1+\nu)(2+\nu)}, \\
a_6 &= -\frac{a_4}{2^2 \times 3(3+\nu)} = -\frac{a_0}{2^6 3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)},
\end{aligned}$$

e assim por diante. De maneira que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^r a_0}{2^{2r} r!(r+\nu)\dots(k+\nu)}; \qquad (k \geq 1). \tag{3.27}$$

Mostraremos esta última relação por indução finita. Note que para $r = 1$ em (3.27), vale. De fato, pois

$$a_{2k} = -\frac{a_0}{2^2 \times 1(1+\nu)} = a_2$$

Suponha que é verdade para $r = k$, isto é

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\nu)\dots(k+\nu)}. \tag{3.28}$$

Vamos provar que vale para $r = k + 1$. De fato, pois

$$a_{2k+2} = \frac{-a_{2n}}{2^2(n+1)(n+1+\nu)}.$$

Por hipótese, temos $r = k$ vale, segue-se que

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)(k+1+\nu)} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\nu)\dots(k+\nu)}.$$

Note que $(k+1)k! = (k+1)!$. Deste modo

$$a_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{2^{(2k+1)}(k+1)!(k+1+\nu)(k+\nu)\dots(1+\nu)}.$$

Como queríamos provar. Logo, a **primeira solução** é:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0 x^{2k+\nu}}{2^{2k} k!(1+\nu)\dots(k+\nu)}; \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.29}$$

3.2.2 Função de Bessel de Primeira Espécie $J_\nu(x)$ para Inteiros Não-Negativos

Como a_0 é arbitrário. Se $\nu \in \mathbb{N}$, uma escolha possível seria $a_0 = 1$, porém o mais prático vem a ser, então:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}, \tag{3.30}$$

devido ao fato de $\nu!(\nu+1)\cdots(\nu+k) = (k+\nu)!$ em (3.29). E assim obteremos, simplesmente, a solução particular de (3.20):

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!}; \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.31}$$

Denotaremos aqui por $J_\nu(x)$ as funções dada por:

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+\nu} k!(\nu+k)!}.$$

$J_\nu(x)$ é chamada de **função de Bessel de primeira espécie** de ordem ν.

3.2.3 Função de Bessel de Primeira Espécie $J_\nu(x)$ para Inteiros $\nu \geq 0$

Estenderemos nossos estudos em inteiros para quaisquer valores de $\nu \geq 0$. Neste caso, é uma prática padrão escolher para a_0 um valor específico,

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)},$$

em que $\Gamma(1+\nu)$ é a função Gama (veja em [2]). Como ele possui a conveniente propriedade $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Deste modo, podemos escrever (3.28) como:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!(1+\nu)\ldots(k+\nu)\Gamma(1+\nu)} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(1+\nu+k)}; \qquad (k \geq 0). \end{aligned}$$

Logo, uma solução é:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

A série convergente pelo menos no intervalo $[0, \infty)$. Esta é denotada por $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{3.32}$$

$J_\nu(x)$ é chamada de **função de Bessel de primeira espécie** de ordem ν.

Exemplo 3.7. ***Funções de Bessel*** $J_0(x)$ ***e*** $J_1(x)$. *Os gráficos de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ estão representados na Figura 3.1. Temos que para $\nu = 0$ em (3.32) a função de Bessel é de ordem 0 ($J_0(x)$) , isto seja*

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}; \qquad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.33}$$

que é similar á função cosseno. E de $\nu = 1$ em (3.32) a função de Bessel é de ordem 1 ($J_0(x)$) , isto seja

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1!)^2}; \qquad n \geq 1, \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

que é similar á função seno. Isto corre pelo fato que a função de Bessel pertence a uma classe de funções chamadas "quase periódicas".

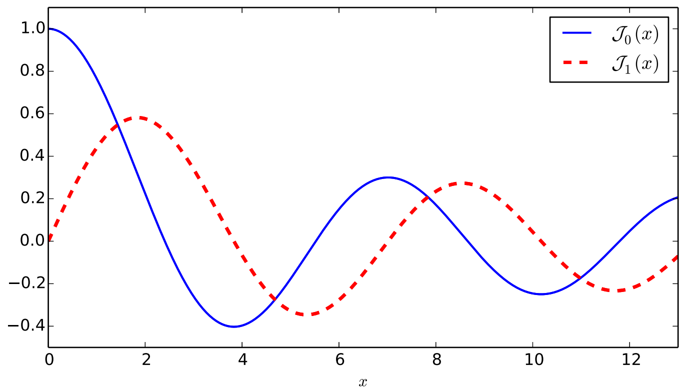

Figura 3.1: Funções de Bessel primeira especie J_0 e J_1.

3.2.4 Solução Geral para Valores Não-Inteiros de ν. Solução $J_{-\nu}$

Dada uma equação de Bessel, para termos uma solução geral, além de J_ν, precisamos também de uma segunda solução linearmente independente de J_ν (pois a equação de Bessel é uma EDO de segunda ordem). De modo que, se $s = -\nu$, a segunda solução linearmente independente da EDO de Bessel depende de:

$$
s_1 - s_2 = \begin{cases} 2\nu \in \mathbb{N} \\ 2\nu \notin \mathbb{N} \end{cases}
$$

Primeiro Caso

Se $2\nu \notin \mathbb{N}$, então para $-\nu$, basta substituirmos ν por $-\nu$ em (3.32), ou seja, $s_2 = -\nu$. Neste caso iremos obter a chamada **função de Bessel de primeira espécie** de ordem $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1-\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{3.35}$$

Dependendo do valor de ν, a função (3.35) pode conter potências negativas de x e então converge em $(0, \infty)$, deste modo, se trocarmos x por $|x|$, as séries dadas em (3.32) e (3.35) convergem em $0 < |x| < \infty$.

Neste caso, as funções $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são soluções linearmente independentes em $(0, \infty)$ e a solução geral para (3.2) é da forma:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x); \qquad 0 < |x| < \infty.$$

Teorema 3.2. *Se ν não for número inteiro, uma solução geral da equação de Bessel para todo $x \neq 0$ é*

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \tag{3.36}$$

Observação 3.1. *Se ν for inteiro, então teremos que (3.36) não é uma solução geral devido à dependência linear.*

Segundo Caso

Se $2\nu \in \mathbb{N}$, então poderemos ter uma segunda solução na forma,

$$y_2(x) = cJ_\nu(x)ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m-\nu}; \qquad (b_m \neq 0),$$

em que c é uma constante que pode ser zero, isto é, para $2\nu \in \mathbb{N}$ podemos distinguir duas possibilidade:

1. Quando $\nu = n$, $n \in \mathbb{Z}$ pode ser um inteiro quando ν for metade de um inteiro ímpar, as funções $J_{-n}(x)$ e $J_n(x)$ são soluções linearmente independentes, isto é, a solução geral para (3.2) em $(0, \infty)$ é dada por $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$, $\nu \neq$ *inteiro.*

2. Quando $\nu = n =$ inteiro positivo, as funções $J_{-\nu}(x)$ e $J_\nu(x)$ não são soluções linearmente independentes. Pode-se mostrar que neste caso $J_{-n}(x)$ é um múltiplo de $J_n(x)$, veja o seguinte teorema:

Teorema 3.3. ***(Dependência Linear das Funções de Bessel*** $J_\nu(x)$ ***e*** $J_{-\nu}(x)$ *)* *Para números inteiros* $\nu = n$*, as funções de Bessel* $J_\nu(x)$ *e* $J_{-\nu}(x)$ *são linearmente dependentes, porque*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n \geq 1).$$

Exemplo 3.8. *A solução Geral para a equação*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,$$

em $(0,\infty)$ *é* $y = c_1J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$*. De fato, pois* $v^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow v = \pm\dfrac{1}{2}$.

3.2.5 Função de Bessel de Segunda Espécie $Y_\nu(x)$

Da última subseção, vimos que $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ formam uma base de soluções da equação de Bessel, desde que v não seja um número inteiro. Porém, quando ν é inteiro, essas duas soluções são linearmente dependentes num intervalo qualquer, veja o teorema anterior. Logo, para que tenhamos uma solução geral também nos casos em que $\nu = n$ é um inteiro, precisamos de uma segunda solução linearmente independente, além de $J_\nu(x)$. Essa solução é chamada de **função de Bessel de segunda espécie**, vamos denotar por Y_n. Obteremos agora uma solução dessa função, começando com o caso $n = 0$.

3.2.6 Função de Bessel de Segunda Espécie $Y_0(x)$

Quando $\nu = 0$, podemos escrever a equação de Bessel como

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{3.37}$$

Note que este é o Caso 3 da Seção (3.1), onde a equação indicial possui uma dupla raiz $s = 0$. Desse modo, pelo método de Frobenius, teremos sempre uma solução, $J_0(x)$, a segunda solução que desejamos deve ter a forma

$$y_2(x) = J_0(x)lnx + \sum_{m=1}^{\infty} b_mx^m; \qquad (b_m \neq 0). \tag{3.38}$$

De fato, substituindo então y_2 e suas derivadas:

$$y_2' = J_0'lnx + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_nx^{n-1}$$

e

$$y_2'' = J_0'' lnx + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2},$$

em (3.37), obtemos:

$$x\left(J_0'' lnx + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2}\right) + J_0' lnx + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + x\left(J_0 lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = 0.$$

$$\Rightarrow xJ_0'' lnx + 2J_0' - \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + J_0' lnx + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + xJ_0 lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0.$$

Note que os termos $\frac{J_0}{x}$ e $-\frac{J_0}{x}$, se cancelam. Daí

$$lnx\left[xJ_0'' + J_0' + xJ_0\right] + 2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0.$$

Note que, a soma dos termos entre corchetes é zero. De fato, pois J_0 é uma solução de (3.37). Deste modo ficamos agora com

$$2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0.$$

somando a primeira e a segunda série, obtemos:

$$2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0. \tag{3.39}$$

Lembrando que

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + - \ldots.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
J_0'(x) &= -\frac{2x}{2^2(1!)^2} + \frac{4x^3}{2^4(2!)^2} - \frac{6x^5}{2^6(3!)^2} + - \ldots \\
&= -\frac{2x}{2^2(1!)^2} + \frac{2.2x^3}{2^{2.2}(2!)^2} - \frac{2.3x^5}{2^{2.3}(3!)^2} + - \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2nx^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!} \frac{2}{2^{2n}} \frac{n}{n!}.
\end{aligned}$$

Usando $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ ficamos com

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \tag{3.40}$$

Substituindo (3.40) na equação (3.39), obtemos

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-1} n!(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = 0. \tag{3.41}$$

Vamos abrir as séries:

$$\begin{aligned}
&2 \quad \left(-\frac{2x}{2^{2.1}(1!)^2} + \frac{2.2x^3}{2^{2.2}(2!)^2} - \frac{2.3x^5}{2^{2.3}(3!)^2} + - \dots\right) \\
&+ \quad \left(b_1x^0 + 4b_2x + 9b_3x^2 + 16b_4x^3 + 25b_5x^4 + 36b_6x^5 + \dots\right) \\
&+ \quad \left(b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4 + b_4x^5 + b_5x^6 + b_6x^7 + \dots\right) = 0
\end{aligned}$$

Note que: $b_1 = 0$. Segue-se:

$$9b_3 + b_1 = 0 \Rightarrow 9b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 0;$$

$$25b_5 + b_3 = 0 \Rightarrow 25b_5 = 0 \Rightarrow b_5 = 0.$$

E assim por diante, temos que a soma dos termos b_m, com subscrito ímpares são nulos.

Vamos agora trabalhar com as potências de x ímpares. Igualando a soma dos coeficientes de x a zero, isso nos dar

$$2\left(-\frac{2}{2^{2.1}(1!)^2}\right) + 4b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}.$$

Para outros valores dos b_n, com subscrito pares, vamos tirar uma relação de recorrência entre coeficientes par de x em (3.41). Fazendo na primeira série $2m-1 = 2k+1$, temos $m = k+1$, na segunda série $m-1 = 2k+1$ e na terceira, $m+1 = 2k+1$. Portanto, obtemos

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}(k+1)!k!} + (2k+2)^2 b_{2k+2} + b_{2k} = 0. \tag{3.42}$$

Para $k = 1$, (3.42) fornece

$$\frac{1}{8} + 16b_4 + b_2 = 0 \Rightarrow b_4 = -\frac{3}{128};$$

$$\vdots$$

$$b_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

Mostraremos a relação acima por indução finita. De fato, se $m = 1$, já mostramos que vale. Agora, suponha que é verdade para $m = k$, isto é

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right).$$

Vamos então, provar que é verdade também para $m = k + 1$. De fato, pois de (3.42), obtemos:

$$b_{2k+2} = \left[-\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}(k+1)!k!} - b_{2k}\right]\frac{1}{(2k+2)^2} = 0.$$

Por hipótese $m = k$, vale, segue-se

$$b_{2k+2} = \left[-\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}(k+1)!k!} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)\right]\frac{1}{(2k+2)^2} = 0.$$

Usando o fato que $(k+1)!k! = (k+1)(k!)^2$. Obtemos:

$$\begin{aligned} b_{2k+2} &= \left[\frac{-(-1)^k(-1)}{2^{2k}(k+1)(k!)^2} - \frac{(-1)^k(-1)^{-1}}{2^{2k}(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)\right]\frac{1}{(2k+2)^2} \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+2)^2 2^{2k}(k+1)(k!)^2} + \frac{(-1)^k}{(2k+2)^2 2^{2k}(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+2)^2 2^{2k}(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{(K+1)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (2k+2)^2 2^{2k}(k!)^2 &= (4k^2 + 8k + 4)2^{2k}(k!)^2 \\ &= 2^{2k}2^2(k^2 + 2k + 1)(k!)^2 \\ &= 2^{2k+2}\left[(k+1)\right]^2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Portanto,

$$b_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1-1}}{2^{2(k+1)}\left[(k+1)\right]^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)}\right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Como queríamos provar. Usando as notações curtas, para simplificar nosso estudo aqui consideremos

$$h_1 = 1 \qquad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{3.44}$$

e inserindo (3.44) e $b_1 = b_3 = \ldots = 0$ em (3.38), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x)lnx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \\ &= J_0(x)lnx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^m x^{2m} \\ &= J_0(x)lnx + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + - \ldots. \end{aligned}$$

Como J_0 e y_2 são funções linearmente independentes, elas formam uma base de (3.37) para $x > 0$. Naturalmente, obtemos uma outra solução base. Se substituirmos y_2 por uma solução particular independente na forma $a(y_2 + bj_0)$, onde $a \neq 0$ e b são constantes, obetemos um elemento linearmente independente com J_0. É uma pratica escolhermos $a = 2/\pi$ e $b = \gamma - ln2$, onde o número $\gamma = 0,57721566490...$ é a **chamada constante de Euler**, que se define como o limite de

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{s} - lns$$

à medida que s tende ao infinito. A solução particular assim obtida é chamada de **função de Bessel de segunda espécie** *de ordem zero* (veja a figura 3.2) ou **função de Neumann** *de ordem zero*, sendo denotada por $Y_0(x)$. Segue-se que

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}h_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\right]. \tag{3.45}$$

Para pequenos valores de $x > 0$, a função $Y_0(x)$ tem um comportamento parecido com o de lnx, e $Y_0(x) \to -\infty$ à medida que $x \to 0$.

3.2.7 Solução Geral da Equação de Bessel: Funções de Bessel de Segunda Espécie $Y_n(x)$

Para $\nu = n = 1, 2, \ldots$, podemos obter uma segunda solução através de manipulações semelhantes às que fizemos para $n = 0$. Note que esse é o Caso 2 da Seção (3.1), onde as raízes indicias diferem por um inteiro, logo a solução também contém um termo logarítmico. Note que a situação não está ainda completamente satisfatória, porque a segunda solução é definida diferentemente, dependendo da ordem ν ser ou não um número inteiro. Para darmos unidade ao formalismo, é desejável adotarmos uma segunda solução-padrão $Y_\nu(x)$ para todo ν, consideremos:

(i) Quando ν não é um inteiro, defina

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]; \tag{3.46}$$

(ii) Quando ν é um inteiro, defina

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x). \tag{3.47}$$

Essa função é chamada de **função de Bessel de segunda espécie** de ordem ν ou **função de Nemann** de ordem ν, em que $Y_n(x)$ não tem limite finito quando $x \to 0$. A Figura 3.2 mostra $Y_0(x)$ e $Y_1(x)$.

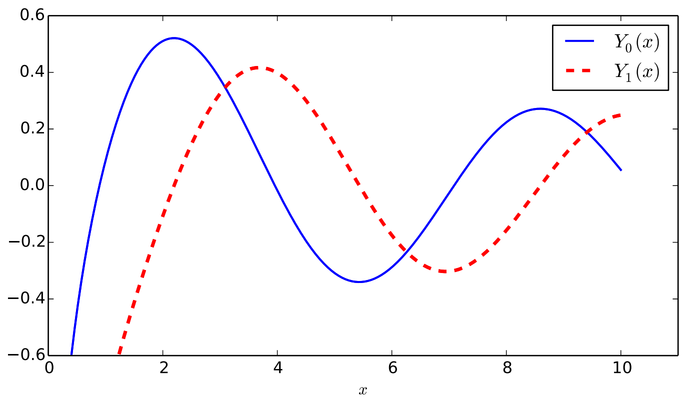

Figura 3.2: Funções de Bessel segunda especie Y_0 e Y_1.

Donde, $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ são soluções da equação de Bessel linearmente independentes. Deste modo, o resultado é:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\left(ln\frac{x}{2}+\gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\left(h_m+h_{m+n}\right)}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{mn}$$
$$-\frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}, \tag{3.48}$$

Onde $x > 0$, $n = 0, 1, \cdots$ e [como em (3.44)] $h_0 = 0$, $h_1 = 1$,

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \qquad h_{m+n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m+n}.$$

Consideremos os seguintes resultados:

(i) O limite (3.47) existe e pode ser mostrado, donde, Y_n é uma solução da equação de Bessel para ordens infinitas,(veja a Ref.[2]);

(ii) É possível mostrar que as funções $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ são de fato soluções da equação de Bessel linearmente independentes para todo ν e para $x > 0$;

(iii) Dada uma ordem ν não-inteiro, a função $Y_\nu(x)$ é uma solução de Bessel. De fato, pois para esses valores de ν, as soluções $J_n(x)$ e $J_n(x)$ são soluções linearmente independentes;

(iv) Observe também, que em $n = 0$, a última soma em (3.48) será 0. Além disso, podemos mostrar que

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

Agora, podemos considerar como o principal resultado o seguinte Teorema:

Teorema 3.4. ***Solução Geral da Equação de Bessel***

Uma solução geral da equação de Bessel para todos os valores de ν e $x > 0$ é

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x). \tag{3.49}$$

Consideremos também, se a variável independente x em (3.20) é substituída por xk (k constante), a equação resultante é (veja a Ref. [10]):

$$x_2 y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0,$$

com solução geral

$$y(x) = c_1 J_\nu(kx) + c_2 Y_\nu(kx).$$

Capítulo 4

Cilindro Infinito

Se um cilindro de um comprimento l é consideravelmente maior do que o diâmetro $2R$, (isto é, $l/2R \gg 1$), então, podemos considera-lo como um cilindro infinito, cujo comprimento é infinitamente maior em comparação com seu diâmetro.

Deste modo, se a transferência de calor entre a superfície do cilindro e o ambiente ocorre uniformemente sobre toda a superfície, a sua temperatura vai depender apenas do tempo e do raio (problema simétrico).

4.1 Problema Simétrico

Dado um cilindro infinito consideremos uma distribuição radial de temperatura prescrita, isto é, na forma da função $f(r)$, uma função que determina a temperatura inicial de um ponto qualquer no instante inicial $t = 0$ dentro do intervalo $0 < r < R$.

Observe a seguinte figura:

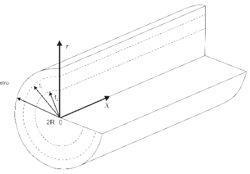

Figura 4.1: Cilindro infinito com uma distribuição radial de temperatura prescrita, $f(r)$, no intervalo $0 < r < R$

De modo que, no instante de tempo inicial a superfície do cilindro é instantaneamente resfriada a alguma temperatura t_a que é mantida constante durante todo o processo de resfriamento. Logo, a distribuição de temperatura e a taxa de calor específico são descrito como uma função de tempo $t(r,\tau)$. Entretanto, para determinarmos a taxa de calor especifica e a distribuição de tempo, em um meio é necessário resolver a formulação correta da equação de calor.

No nosso caso, ao longo de um cilindro infinito, a equação diferencial de condução de calor é escrita como:

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t(r,\tau)}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau}\right), \qquad (\tau > 0; \quad 0 < r < R)\,. \tag{4.1}$$

As condições de contorno são as seguintes (Fig. 4.2):

$$t(r,0) = f(r), \tag{4.2}$$

$$t(R,\tau) = t_a = constante, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r} = 0, \quad t(0,\tau) \neq \infty. \tag{4.4}$$

A última condição significa que essa temperatura ao longo do eixo do cilindro, durante todo o processo de transferência de calor, deve ser finito. Veja a Figura 4.2.

Solução do Problema por Separação de Variáveis

Na referência [10], mostra-se que a seguinte solução particular da equação de condução de calor através do método de variáveis é dada por:

$$t = \vartheta \exp[-ak^2\tau], \tag{4.5}$$

onde ϑ é a solução da equação diferencial

$$\nabla^2\vartheta + k^2\vartheta = 0.$$

No nosso caso $\vartheta(x)$ é uma solução da **equação de Bessel**

$$\vartheta''(r) + \left(\frac{1}{r}\right)\vartheta'(r) + k^2\vartheta(r) = 0, \tag{4.6}$$

a qual podemos, ainda, escreve-lá na forma

$$r\vartheta''(r) + \vartheta'(r) + k^2 r\vartheta(r) = 0. \tag{4.7}$$

Fazendo $\vartheta = y(x)$ e substituindo $k^2 r$ em (4.7) pela variável independente x. Deste modo, supondo uma solução para a equação de Bessel:

$$xy'' + y' + xy = 0, \tag{4.8}$$

na forma de uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \quad a_n \neq 0. \tag{4.9}$$

Derivando termo a termo em (4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3^2 x + 4a_4 x^3 + \ldots, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3^2 x + 12 a_4 x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Substituindo $y(x)$ e suas derivadas $y'(x)$ e $y''(x)$ em (4.8). Obtemos:

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vamos abrir as séries:

$$\begin{aligned} &\left(2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12 a_4 x^3 + \ldots\right) + \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots\right) \\ &\qquad + \left(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \ldots\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_0 + 4a_2)\, x + (a_1 + 9a_3)\, x^2 + (a_2 + 16 a_4)\, x^3 + \ldots = 0.$$

$$\Rightarrow a_1 + \left(a_0 + 2^2 a_2\right) x + \left(a_1 + 3^2 a_3\right) x^2 + \left(a_2 + 4^2 a_4\right) x^3 + \ldots = 0. \tag{4.10}$$

Note que $a_1 = 0$. Daí

$$a_1 + 3^2 a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-a_1}{3^2} = 0.$$

E assim, por diante, temos que a soma dos termos a_n, com subscrito ímpares são nulos. De fato, basta igualarmos a zero a soma de todos coeficientes para cada valor de x, isso nos dar:

$$a_0 + 2^2 a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0;$$

$$a_1 + 3^2 a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-a_1}{3} = 0;$$

$$a_2 + 4^2 a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4^2} a_2 = \frac{1}{2^2 4^2} a_0,$$

e assim por diante. De maneira que:

$$a_{n-2} + n^2 a_n = 0.$$

Substituindo, os valores obtidos para os a_n em (4.9), teremos:

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \right). \tag{4.11}$$

Segue que, se $a_0 = 1$ em (4.11), então, teremos em particular que a equação será igual a **funções de Bessel primeira espécie de ordem** 0, isto é:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}, \tag{4.12}$$

A segunda solução particular da equação (4.8) pode ser encontrado usando seguinte fórmula:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx, \tag{4.13}$$

onde $y_1(x) = J_0(x)$ é a primeira solução particular de (4.8). Repetindo o mesmo procedimento do Exemplo (3.5), obteremos agora:

$$y_2(x) = J_0(x) ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} \right) - \cdots . \tag{4.14}$$

Normalmente, em vez da função $y_2(x)$, é utilizado $Y_0(x)$, chamada **função de Bessel de segunda espécie** de ordem zero (veja a Seção 3.2.6), de modo $Y_0(x)$ é uma solução particular independente de $y_1(x)$ que esta ligada a $y_2(x)$ de tal maneira que:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} y_2(x) + \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\gamma - ln 2 \right), \tag{4.15}$$

onde $\gamma = 0,5772$ é a chamada **constante de Euler**.

Como as soluções particulares $y_1(x) = J_0(x)$, $y_2(x)$ ou $Y_0(x)$ são linearmente independente desde que $Y_0(x)/J_0(x) \neq const.$, deste modo, a solução geral da equação Bessel será

$$y(x) = c_1 J_0(x) = c_2 Y_0(x), \tag{4.16}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Consideremos o seguinte resultado, a equação (4.7) reduzida a equação (4.8) assumindo $r = x/k$, nos dá a seguinte solução para (4.7):

$$\vartheta(r) = c_1 J_0(kr) + c_2 Y_0(kr), \tag{4.17}$$

uma vez que a temperatura ao logo do eixo do cilindro (r = 0) deve ser finito, a solução não pode conter a função de Bessel de segunda espécie, pois a medida que $r \to 0$, $Y_0(kr) \to -\infty$ (veja a Figura 3.2). Assim, a partir das condições física do problema, teremos $c_2 = 0$. E a função $J_0(kr)$ da seguinte forma:

$$J_0(kr) = 1 - \frac{(kr)^2}{2^2} + \frac{(kr)^4}{2^2 4^2} - \frac{(kr)^6}{2^2 4^2 6^2},$$

a qual satisfaz a condição (4.4) como

$$\begin{aligned} J_0'(kr) &= -k\left[\frac{(kr)}{2} - \frac{(kr)^3}{2^2 4} + \frac{(kr)^5}{2^2 4^2 6} - \cdots\right] \\ &= -kj_1(kr), \end{aligned}$$

visto que, a medida $r \to 0$, $J_0'(kr)$ também tente a 0.

Nós iremos encontrar as constantes k e c_1 a partir do limite e condições iniciais.

Para simplificar nossos calculo, tomaremos $t_a = 0$, isto significa, que o ponto de referência(inicial) da temperatura é t_a. Assim, da condição de contorno (4.4) em (**??**), obteremos:

$$t_a = c_1 J_0(kR) \exp[-ak^2\tau] = 0.$$

Conseqüentemente, durante o processo de arrefecimento $(0 < \tau < \infty)$ devemos considera válida a seguinte igualdade

$$J_0(kR) = 0. \tag{4.18}$$

Esta igualdade é referida como uma função característica, a partir dela podemos definir os valores k_n.

Esta função $J_0(kR)$ é semelhante a uma função trigonométrica $\cos(kR)$ (3.1); temos assim um número infinito de raízes $k_n R = \mu_n$, ou seja, $\mu_1 = 2,4048$, $\mu_2 = 5,5201$, $\mu_3 = 8,6537$ e assim por diante. Devemos, considerar para grandes valores de n a diferença $\mu_{n+1} - \mu_n$ está perto de π.

Logo,

$$k_n = \mu_n/R. \tag{4.19}$$

Assim, temos um número infinito de soluções na forma particular:

$$t = c_1 J_0(k_n r) \exp[-a k_n^2 \tau]. \tag{4.20}$$

Essas soluções são chamadas de funções fundamentais. Todos eles vão ser válido não só para a equação de difusão (4.1), mas também para a condição contorno (4.4). A solução geral será uma série na forma:

$$t(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n r) \exp[-a k_n^2 \tau]. \tag{4.21}$$

Usaremos agora a condição inicial (4.1) para determinar o valor das constantes c_n, isto é,

$$t(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n r). \tag{4.22}$$

A equação (4.22) representa a transformação de Fourier-Bessel. Assim, para a determinação das constantes c_n's devemos usar o mesmo método como descrito anteriormente, mas, primeiramente devemos provar que o sistema das funções $\sqrt{x}J_0(ax)$, $\sqrt{x}J_0(bx)$ é ortogonal.

Apresentaremos as seguintes notações:

$$y_1 = J_0(ax), \qquad y_2 = J_0(bx) \tag{4.23}$$

As funções $J_0(ax)$ e $J_0(bx)$ satisfazem as equações diferenciais apropriados em y_1. É, portanto, é parte integrante da equação

$$xy'' + y' + a^2 xy = 0,$$

e y_2 a parte integrante da seguinte equação

$$xy'' + y' + b^2 xy = 0.$$

Note que, estas equações podem ser escritas como

$$(xy')' = -a^2 xy, \qquad (xy')' = -b^2 xy.$$

Assim, temos

$$(xy_1')' = -a^2 xy_1, \tag{4.24}$$

$$(xy_2')' = -b^2 xy_2. \tag{4.25}$$

Multiplicando, a igualdade (4.24) por y_2 e a igualdade (4.25) por y_1. Em seguida, subtraindo-se a segunda a partir da primeira, obtemos (também responsável por igualdade (4.23)):

$$\begin{aligned}
b^2xy_1y_2 - a^2xy_1y_2 &= y_2(xy_1')' - y_1(xy_2')' \\
&= y_2(xy_1'' + x'y_1') - y_1(xy_2'' + x'y_2') \\
&= y_2(xy_1'') + y_2(x'y_1') - y_1(xy_2'') - y_1(x'y_2') \\
&= (y_2x)y_1'' + (y_2x')y_1' - (y_1x)y_2'' - (y_1x')y_2' \\
&= (y_2x)y_1'' + y_2y_1' - [(y_1x)y_2'' + y_1y_2'] \\
&= (y_2xy_1')' - (y_1xy_2')' = (y_2xy_1' - y_1xy_2')'.
\end{aligned}$$

Reescrever essa igualdade, assim, teremos:

$$(b^2 - a^2)xy_1y_2 = (y_2xy_1' - y_1xy_2')'. \tag{4.26}$$

Após a integração de ambos os lados da igualdade de 0 a x, temos:

$$(b^2 - a^2)\int_0^x xy_1y_2 = xy_2y_1' - xy_1y_2'.$$

Substituindo as ex-notações de (4.23), obtemos:

$$\int_0^x xJ_0(ax)J_0(bx)dx = \frac{bxJ_0(ax)J_1(bx) - axJ_0(bx)J_1(ax)}{b^2 - a^2}, \tag{4.27}$$

como

$$\begin{aligned}
y_1' &= aJ_0'(ax) = -aJ_1(ax), \\
y_2' &= bJ_0'(bx) = -bJ_1(bx).
\end{aligned}$$

Note que, se $b \to a$, o lado direito de (4.27) torna-se uma indefinido do tipo 0/0. Aplicando a regra L'Hospital, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^x xJ_0^2(ax)dx &= \lim_{b\to a} \frac{xJ_0(ax)J_1(bx) + bx^2J_0(ax)J_1'(bx) - ax^2J_0'(bx)J_1(ax)}{2b} \\
&= \frac{1}{2a}\left\{xJ_0(ax)J_1(ax) + ax^2J_0(ax)\left[J_0(x) - \frac{J_1(ax)}{ax}\right] + ax^2J_1^2(ax)\right\},
\end{aligned}$$

desde

$$\begin{aligned} J_0'(ax) &= -J_1(ax), \\ J_1'(ax) &= J_0(ax) - (1/ax)J_1(ax). \end{aligned}$$

Consequentemente, finalmente, temos:

$$\int_0^x xJ_0^2(ax)dx = \frac{1}{2}x^2\left[J_0^2(ax) + J_1^2(ax)\right]. \tag{4.28}$$

Esta fórmula é válida para todos os valores de a e b e vai ser usada mais tarde.

Multiplicando ambos os lados da igualdade (4.22) por $rJ_0(K_m r)$ onde $K_m r$ são as raízes da função $J_0(K_m r)$ e integrando nos limites de 0 a R:

$$\begin{aligned} \int_0^R rf(r)J_0(k_m r)dr &= \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} c_n rJ_0(k_n r)J_0(k_m r)dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^R rJ_0(k_n r)J_0(k_m r)dr. \end{aligned} \tag{4.29}$$

De acordo com a igualdade (4.27), para $m \neq n$, temos:

$$\int_0^R rJ_0(k_n)rJ_0(k_m r)dr = R\frac{k_m J_o(k_n R)J_1(k_m R) - k_n J_0(k_m R)J_1(k_n R)}{k_m^2 - k_n^2} = 0,$$

pois, $J_0(k_n R) = J_0(k_m R) = 0$, (No contorno, veja (4.18)). Para $m = n$, de acordo com a fórmula (4.28), teremos

$$\int_0^R rJ_0^2(k_n r)dr = \frac{1}{2}R^2 J_1^2(k_n R).$$

Assim, por (4.29), temos

$$c_n = \frac{(2/R^2)\int_0^R rf(r)J_0(k_n r)dr}{J_1^2(k_n R)}.$$

Finalmente, a solução do nosso problema será de forma:

$$t(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(y_n r/R)}{J_1^2(y_n)} \frac{2}{R^2} x \int_0^R rf(r)J_0(y_n r/R)dr \exp[-y_n^2 a\tau/R^2].$$

Apesar do problema solucionado estar aplicado ao resfriamento de um corpo cilíndrico, este problema pode ser aplicado também à transferência de massa. Na figura abaixo, a solução encontrada foi utilizada para descrever a perda de água de uma banana num processo de desidratação osmótica.

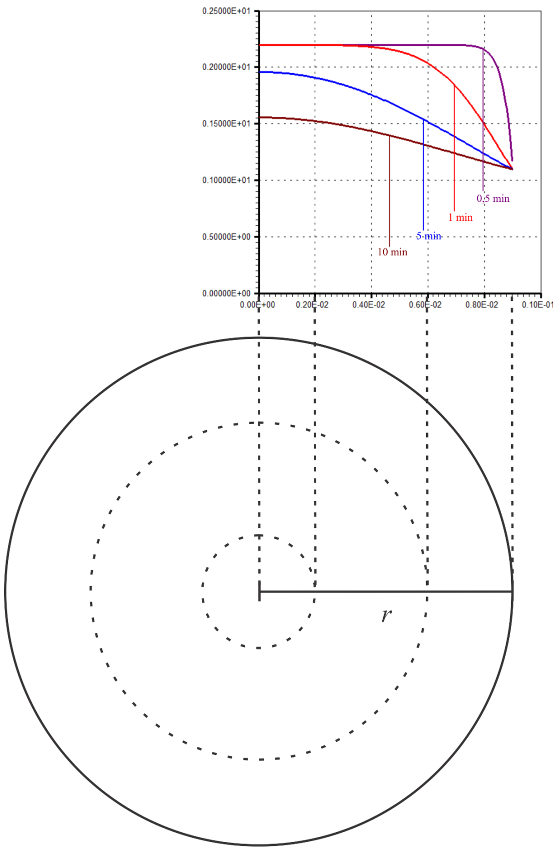

Figura 4.2: Conétrias da perda de água de banana num processo de desidratação osmótica

Capítulo 5

Conclusão

As mais diversas formulações da equação de calor são utilizadas para determinar a distribuição de temperatura em um meio, onde para obtermos a solução torna-se necessário resolver a formulação correta. Neste trabalho, apresentamos a formulação mais geral da equação de calor, a equação de difusão.

A solução da equação de difusão para o cilindro infinito tratada em nosso trabalho dependeu das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, isto é, das condições de contorno, a qual apresentou um termo que é uma solução da equação de Bessel.

A equação de Bessel surgiu em sua resolução particular pelo método da separação de variáveis, donde estabelecemos condições para sua solução, que embora não possuindo coeficientes analíticos, foram representadas por meio de uma série de potências. Analisando uma extensão do método das séries de potências, aplicando o método de Frobenius, o mesmo nos forneceu a base das soluções em série, que geralmente trataram-se de EDOs lineares e de segunda ordem, sendo de considerável importância prática por tratarmos a equação de Bessel em torno de um ponto singular regular.

Apesar do problema aqui estabelecido estar aplicado ao resfriamento de um corpo cilíndrico, este problema pode ser aplicado também à transferência de massa. Dessa maneira, a equação de difusão torna-se uma ferramenta imprescindível para a resolução de inúmeros problemas, sendo possível realizar estudos no que diz respeito à distribuição da temperatura e o fluxo de calor de um determinado meio.

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução: Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[2] KREYSZIG, Erwin. *Matemática Superior para Engenharia, volume I*. 9 ed. Tradução: Luís Antônio Fajardo Portes; Revisão Técnica: Ricardo Nicolau Nassar Koury, Luiz Machado. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[3] LUIKOV, A. V. *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, Inc. Lid: London, 1968, 685 p.

[4] SANTOS, Reginaldo J.. *Existência de Soluções de Equações Diferenciais em Série de Potências*. Disponível em: https://www.mat.ufmg.br/ regi/eqdif/iedo.pdf. Acesso em: 11 de dezembro de 2014.

[5] COUTO, Roberto Toscano. *Equações Diferenciais (GMA00024)*. Disponível em: https://www.professores.uff.br/rtoscano/eqsdif.pdf. Acesso em: 11 de dezembro de 2014.

[6] ZILL, Dennis G. ; CULLEN, Michael R. *Matemática Avançada para Engenharia - Vol I*. 9 ed. São Paulo: Bookman, 2009.

[7] LIMA, Elon Lages. *Análise Real vol. 1 - Funções de uma Variável Real*. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Coleção Matemática Universitária, 2012.

[8] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 13 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Coleção Projeto Euclides, 2011.

[9] RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth S. *Física 2*. 1 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

[10] MIRANDA, Felipe Dias de. *Equação do Calor*. Disponível em `https://metodosmatematicosuff.files.wordpress.com/2011/03/trabalho-mc3a9todos.doc`. Acesso em: 01 de junho de 2015.

[11] Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA (Departamento de Matemática). *RESOLUÇÂO DE EDO'S POR SERIES (RESUMO)*. Disponível em: `http://www.mat.ita.br/ botelho/sites/default/files/resumo32wk16.pdf`. Acesso em: 04 de fevereiro de 2015.

[12] OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. *Funções Especiais com Aplicações*. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Fisica, 2005.

[13] WEIR, Maurice D.; HASS, Joel; GIORDANO, Frank R. *Cálculo (George B. Thomas Jr.), volume II*. 11 ed. Tradução: Luciana do Amaral Teixeira, Leila Maria Vasconcelos Fiqueiredo; Revisão Técnica: Cláudio Hirofume Asano. São Paulo: Pearson, 2009.

[14] VILCHES, Mauricio A..*EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: MÉTODOS DE SÉRIES*. Disponível em: `https://aiecp.files.wordpress.com/2012/07/calculo4.pdf`. Acesso em: 09 de junho de 2015.

[15] FURTADO, Marcelo A..*Notas de EDP2 (versão 1.2)*. Disponível em: `http://www.mat.unb.br/ furtado/homepage/notas-edp2.pdf`. Acesso em: 13 de novembro de 2015.

[16] GALDINO, André Luiz.*Sequências de Números Reais*. Disponível em: `https://galdino.catalao.ufg.br/up/635/o/sequencia.pdf`. Acesso em: 29 de novembro de 2015.