

KATIA MARA FRANÇA

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO

DO

METODO MULTI-GRID

Dissertação apresentada ao Curso de
Mestrado em Sistemas e Computação
da Universidade Federal da Paraíba,
em cumprimento a parte das
exigências para obtenção do Grau de
Mestre.

MARIO TOYOTARO HATTORI

- Orientador -

Campina Grande - PB

Março - 1988

Aos meus pais
França e Mico
e
minha irmã
Greicy.

AGRADECIMENTOS

A minha família

" Foste presença na minha solidão...

mas respeitaste profundamente a minha maneira única de amar.

A tua presença, a tua companhia, o teu sorriso, as tuas palavras e mesmo a tua ausência foram expressão do amor profundo.

Quando eu sofri tu sofreste comigo e, sem dizeres nada, fizeste-me entender que é amor é irmão gêmeo da dor, e experimentei a alegria íntima de uma renúncia, alegria que jamais havia experimentado ."

Ao meu orientador

Que na nobre missão de ensinar contribui para o meu êxito, tendo sido, no transcorrer destes anos, fonte inesgotável dos mais puros e sublimes exemplos, e cujas orientações ensinarem incessante estímulo para a minha formação.

A todos... ao tempo.. ao espaço... a esperança, a glória, a dor e alegria tudo parte... tudo se conclui: naquele, que ora e sempre é o maior merecedor de tudo: Deus.



F814e Franca, Katia Mara
Estudo e implementacao do metodo multi-grid / Katia Mara Franca. - Campina Grande, 1988.
65 p.

Dissertacao (Mestrado em Sistemas e Computacao) - Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

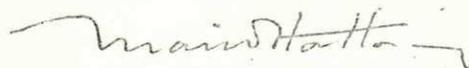
1. Programas Tutoriais 2. Multi-grid - Metodo 3. Multigrid Tutorial 4. Dissertacao I. Hattori, Mario Toyotaro, Dr. II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 004.558(043)

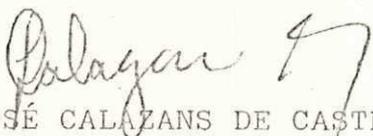
ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO MULT-GRID

KÁTIA MARA FRANÇA

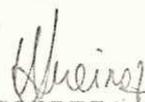
DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/03/88.



MÁRIO TOYOTARO HATTORI
Orientador



JOSÉ CALAZANS DE CASTRO
Componente da Banca



BRUNO CORREIA DA N. QUEIROZ
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE
MARÇO-1988

RESUMO

O método multi-grid é uma estratégia numérica para a solução de problemas contínuos tais como equações integrais e diferenciais parciais e problemas de minimização.

Neste trabalho damos ênfase principalmente a solução numérica de problemas de equações diferenciais parciais. O estudo é dirigido para a solução numérica de equações de Poisson com condições de contorno de Dirichlet.

O trabalho é uma tentativa de compilar os conhecimentos práticos e teóricos da área. Dois algoritmos são estudados em detalhe, com formas distintas de relaxação. O comportamento dos erros na solução numérica de equações de Poisson fornecida por esses algoritmos é também considerado.

ABSTRACT

The multi-grid method is a numeric strategy to solve continuous problems as partial differential and integral equations as well as minimization problems.

In this work emphasis is given to numerical solution of partial differential equations by studying numerical solution of Poisson's equations with Dirichlet's boundary condition.

The work is an attempt to compile practical and theoretical results of area. Two algorithms are studied in detail with different forms of relaxation. The behaviour of errors in numerical solution of Poisson's equations provided by those algorithms is also studied.

SUMARIO

	Página
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Lista de Figuras	xi
Lista de Símbolos	xiv

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação	01
1.2 Visão Global	03

CAPITULO II

CONCEITOS MATEMATICOS PARA O ESTUDO

2.1 Introdução	05
2.2 Classificação das equações	06
2.3 Domínio	08
2.4 Condição de contorno	09

CAPITULO III

DIFERENÇAS FINITAS

3.1 Introdução	12
3.2 Diferenças finitas	13
3.3 Consistência	17
3.4 Convergência	19
3.5 Métodos de discretização	20
3.6 Métodos de solução	26
3.7 Métodos de relaxação	28

CAPITULO IV

O METODO

4.1 Introdução	31
4.2 Histórico e perspectivas	32
4.3 Idéia básica do método	35
4.4 Uma aplicação do método MG na equação de Poisson	38
4.5 O método MG em malhas irregulares	50

4.5.1 Transformação das coordenadas usando uma malha
uniforme sobre o domínio transformado52

4.5.2 Métodos de elementos finitos52

CAPITULO V

TESTES E CONCLUSOES

5.1 Introdução56

5.2 Procedimentos adotados durante os testes e análise dos
resultados57

5.3 Dificuldades encontradas61

5.4 Sugestões para trabalhos posteriores61

5.5 Comentários finais62

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS63

LISTA DE SIMBOLOS

A = matrizes

J

$\partial\Omega$ = contorno da malha

E = aproximação obtida em malhas irregulares

J

EMAX = erro máximo

ϵ = tolerância

FAS = esquema de aproximação completa

FG = valor da função no ponto $P(i-1, j)$

$F(x, y)$ = valor da função no ponto

F = mapeamentos contínuos

J

FMG = Multi-Grid completo

FN = valor da função no ponto $P(i, j-1)$

FO = valor da função no ponto $P(i+1, j)$

FP = valor da função no ponto $P(i, j)$

FR = valor da função nos pontos da malha refinada

FRR = valor da função nos pontos da malha refinada excluindo o
contorno

FS = valor da função no ponto $P(i-1, j)$

G = malhas no domínio

h

G'_h = sub-malhas, sub-conjuntos de G_h

GS/L = Gauss Seidel com ordenação lexicográfica

h = espaçamento da malha na direção da coordenada x
 h_j = tamanho da malha
 k = espaçamento da malha na direção da coordenada y
 M = número de refinamentos da malha
 MG = Multi-Grid
 MGR = relaxação dos Multi-Grid
 MI = número máximo de iterações
 NPG = número de pontos na malha grosseira da relaxação V/P
 NPR = número de pontos na malha refinada da relaxação V/P
 NTP = número total de pontos da malha trabalhada após o refinamento
 Ω = domínio da malha
 R_j = mapeamentos contínuos
 r_j = resíduos obtidos em malhas irregulares
 RMQ = raiz quadrada da média dos quadrados
 T_j = triângulos em malhas irregulares
 u_n = derivada de U em direção normal do contorno
 $u(x,y)$ = solução exata da equação
 UG = solução aproximada em malhas grosseiras da relaxação V/P
 $U^{(k)}$ = solução aproximada na malha de trabalho, no caso da relaxação GS/L, malha grosseira
 $U^{(k+1)}$ = solução aproximada na malha de trabalho, no caso da relaxação GS/L, malha refinada
 UR = solução aproximada em malhas refinadas na relaxação V/P

$U(x,y)$ = solução aproximada da equação

LISTA DE FIGURAS

	Página
3.1 - Aproximacção de diferença central.....	14
4.1 - Malha quadrada inicial	40
4.2 - Malha com refinamento $M = 1$, onde $k = h$	41
4.3 - Malha com refinamento $M = 2$, onde $k = h$	41
4.4 - Mapeamento dos valores de U dos pontos da malha refinada para a malha grosseira, com $M = 2$	43
4.5 - Mapeamento dos valores de U_G para U_R com índices pares	45
4.6 - Mapeamento de U_G para U_R com índices ímpares.....	46
4.7 - Malha inicial	48
4.8 - Malha grosseira com refinamento $M = 1$, onde $k = h$ - cálculo de $U^{(k)}(e)$	49
4.9 - Malha refinada com $M = 2$, onde $k = h$ - cálculo de $U^{(k+1)}(x)$	50
4.10 - Malha irregular.....	51

CAPITULO I

1 . INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Equações diferenciais parciais são ferramentas importantes para modelagem matemática em vários campos. Na verdade, muitos avanços na mecânica estrutural, ciências atmosféricas, projetos de reatores nucleares, engenharia elétrica e química dependem da solução rápida dessas equações.

A solução analítica de problemas que envolvem equações diferenciais parciais é raramente possível. Como consequência muitas pesquisas nos últimos anos foram direcionadas para a solução numérica dessa classe de problemas, e os resultados destes trabalhos podem ser agora apreciados.

Um dos problemas cruciais para o desenvolvimento de integrações automáticas de equações diferenciais parciais é uma boa estimativa do erro cometido (os resultados teóricos não servem para este fim [17]).

O método multi-grid inicia a solução com uma discretização inicial e procura refinar esta discretização. Nesse refinamento é possível fazer uma boa estimativa do erro cometido que abre as portas para o desenvolvimento de um software automatizado de modo que o usuário não precisa se preocupar com a discretização, apenas especifica a tolerância do erro desejada.

O desenvolvimento do método iniciou-se na segunda metade da década de 1970 [05], [10] e até hoje o método continua sendo objeto de pesquisa como atestam as quatro sessões dedicadas a ele no SIAM Meeting do outono de 1987 e a realização de uma conferência internacional em outubro de 1987 na Alemanha Ocidental. O desenvolvimento do assunto parece não ter chegado a maturação, haja visto a não existência de programas publicados em periódicos especializados (somente em anais de congresso) e um primeiro tutorial ter sido publicado somente em setembro de 1987 [06] quando esse trabalho cujo

objetivo é de tentar organizar os conhecimentos sobre o método, já se encontrava em andamento.

1.2 Visão Global do Trabalho

Nossa descrição do princípio multi-grid é muito geral, as considerações concretas referem-se de acordo com o seu caráter introdutório a uma classe de problemas: explicitamente tratamos apenas de equações a duas variáveis e das discretizações fundamentais baseadas no método das diferenças finitas. O trabalho considera problemas de valor de contorno de Dirichlet. Muitas dessas restrições, em particular, a de duas variáveis, tem o propósito principal de simplificar a apresentação da técnica.

Nesta introdução damos uma visão deste trabalho com os seus objetivos.

No segundo capítulo fazemos um resumo matemático: classificação das equações; domínio e as condições de contorno.

Um pequeno resumo de diferenças finitas, consistência, convergência, métodos de discretização, solução de um sistema linear e métodos de relaxação são apresentados no terceiro capítulo.

No quarto capítulo apresentamos um breve histórico

do método e a sua descrição através de uma aplicação na solução da equação de Poisson e o comportamento do MG em malhas irregulares.

Finalmente, no quinto capítulo fazemos uma análise dos resultados obtidos nos testes, listando as dificuldades encontradas e citamos alguns assuntos para futuros trabalhos.

CAPITULO 11

2. CONCEITOS MATEMATICOS PARA O ESTUDO

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar um resumo da matemática necessária para o estudo do método multi-grid.

Em primeiro lugar damos a classificação das equações diferenciais. Logo a seguir apresentamos os tipos de domínio nos quais a equação é definida. Para encerrar este capítulo

descrevemos as condições de contorno com suas devidas especificações num dado problema.

2.2 Classificação das Equações

Qualquer equação diferencial que contenha derivadas parciais chama-se equação diferencial parcial (EDP), cuja ordem é igual, por analogia com a teoria das equações diferenciais ordinárias, a da derivada parcial de maior ordem. A variável dependente (a função incógnita) em qualquer EDP deve ser uma função de pelo menos duas variáveis independentes, pois de outra forma as derivadas parciais não surgiriam, e podem ser, em geral, uma função de n (>2) variáveis independentes.

Uma EDP de segunda ordem pode ser escrita na forma:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (1)$$

onde a, b, c, d, e, f e g são constantes ou funções que envolvem x, y, u , ou derivadas parciais de primeira ordem de u .

Notemos que quando u e suas derivadas parciais ocorrem somente no primeiro grau e que produtos de u e suas derivadas estiverem ausentes, isto é, se f for igual a zero e

a, b, e, d e g não dependerem de u ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou $\frac{\partial u}{\partial y}$ a equação é

dita linear. Caso contrário a equação diferencial é dita não linear.

Podemos classificá-la em:

Elíptica	se	$b^2 - 4ac < 0$
Parabólica	se	$b^2 - 4ac = 0$
Hiperbólica	se	$b^2 - 4ac > 0$

No caso de equações elípticas, algumas são clássicas.

Se $a = c = 1$ e $b = d = e = f = 0$, tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0 \quad (2)$$

chamada equação de Poisson.

Se $a = c = 1$ e $b = d = e = f = g = 0$, tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

chamada equação de Laplace.

Se $a = c = 1$; $b = d = e = 0$ e $f \neq 0$, tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + fu = 0 \quad (4)$$

chamada equação de Helmholtz.

Se no caso (4) f for uma constante a equação é dita simplesmente de Helmholtz tendo um problema de valor de contorno e se f for um parâmetro a ser determinado a equação é dita de Helmholtz generalizada, que é um problema de autovalor para equações diferenciais parciais.

2.3 Domínio

Podemos distinguir dois tipos de domínio, nos quais a equação é definida.

O domínio mais simples é o retangular onde

$$\Omega = \{ (x,y) \mid x_1 < x < x_n, y_1 < y < y_n \}$$

e vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos para obter vantagens de sua estrutura especial. Em nossa terminologia, domínio geral significa um domínio limitado e não retangular, podendo ter buracos ou fendas removidas do seu interior (nos quais as condições de contorno devem ser também especificadas), mas ele deve ser convexo, isto é, quaisquer dois pontos no interior de deve ser conectável por uma linha poligonal.

Problemas elípticos também podem ser definidos em domínios sem contorno (neste caso as condições de contorno "no infinito" são requeridas), mas os domínios são usualmente truncados ao resolvê-los numericamente.

2.4 Condições de Contorno

O tipo mais comum de condição de contorno especificada em problemas elípticos é da forma geral

$$p(x,y)u_n + q(x,y)u = r(x,y) \quad ((x,y) \in \partial\Omega) \quad (5)$$

onde u_n é a derivada de u em direção normal ao contorno.

Normalmente uma terminologia é associada a vários casos especiais. Em particular, os seguintes casos são incluídos:

$$p(x,y) = 0 \quad \text{condição de Dirichlet}$$

$$q(x,y) = 0 \quad \text{condição de Neumann}$$

$$p \cdot q = 0 \quad \text{condição de Robbin}$$

Quando $p \cdot q = 0$ e $p^2 + q^2 > 0$, a condição é chamada separada. Se $r = 0$ em $\partial\Omega$ então as condições são chamadas homogêneas.

Domínios retangulares também admitem condições do tipo periódico,

$$u(x_1, y) = u(x_n, y), \quad y_1 < y < y_n \quad (6)$$

e/ou

$$u(x, y_1) = u(x, y_n), \quad x_1 < x < x_n \quad (7)$$

isto é, a solução é uma função periódica de x , y ou de ambos.

Certos termos são comuns também na discretização dos problemas de valor de contorno como um todo (isto é, combinações particulares de operador diferencial, domínio, e/ou condições de contorno). Entre eles são:

- Problemas de Dirichlet

As condições de contorno especificam a solução ao longo de todo o contorno, (isto é, $p = 0$ em $\partial\Omega$).

- Problemas de Neumann

As condições de contorno especificam a derivada normal para fora do contorno (isto é, $q = 0$ em $\partial\Omega$).

- Problema separável

O operador diferencial parcial é separável, o domínio é retangular e as condições de contorno são periódicas ou da forma (5) com p e q constantes ao longo de cada lado. Problemas separáveis podem ser resolvidos numericamente de modo

eficiente pela separação de variáveis discretas. Estas são as
tão faladas técnicas de soluções "diretas rápidas".

- Problema auto-adjunto

O problema é baseado num princípio variacional, isto
é, aparece ao minimizar uma integral que descreve a energia de
um sistema físico.

CAPÍTULO III

3. DIFERENÇAS FINITAS

3.1 Introdução

No presente capítulo, estudamos as chamadas "diferenças finitas" frequentemente usadas na resolução numérica das equações diferenciais parciais.

Além disso apresentamos algumas noções sobre consistência, convergência, métodos de discretização, métodos

de solução de sistemas de equações lineares e métodos de relaxação.

3.2 Diferenças Finitas

Pelo teorema de Taylor, quando uma função u e suas derivadas são funções contínuas, finitas de x , temos:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + (1/2)h^2 u''(x) + (1/6)h^3 u'''(x) + \dots \quad (8)$$

e

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + (1/2)h^2 u''(x) - (1/6)h^3 u'''(x) + \dots \quad (9)$$

Somando (8) a (9) obtemos a seguinte expressão :

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + O(h^4) \quad (10)$$

onde $O(h^4)$ denota o termo contendo a quarta ou maior potência de h .

Assumindo que $O(h^4)$ seja desprezível em comparação com h^3 , segue que

$$u''(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2} \{u(x+h) - 2u(x) - u(x-h)\}, \quad (11)$$

com um erro da ordem $O(h^2)$ no segundo membro.

Subtraindo (9) de (8) e desprezando o termo de ordem h^3 ,

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h} \{u(x+h) - u(x-h)\}. \quad (12)$$

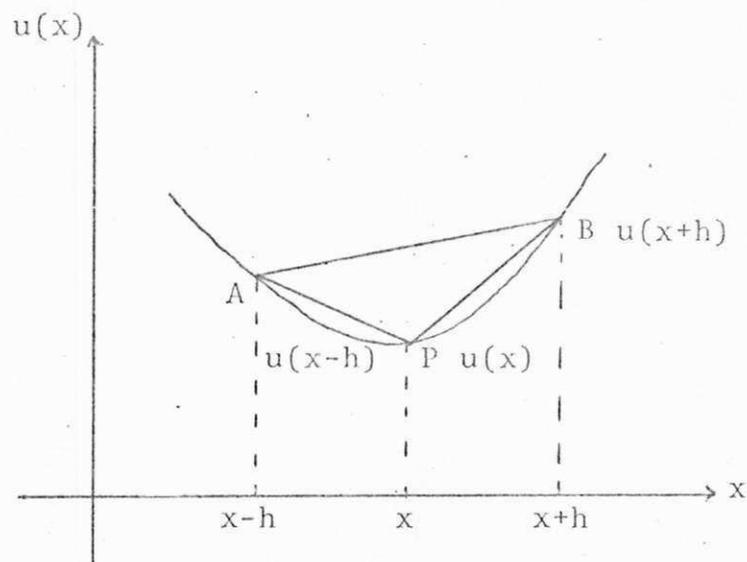


figura 3.1 - Aproximação de diferença central

A equação (12) aproxima a inclinação da tangente em P pela inclinação da corda AB, e é chamada uma aproximação de diferença central. A aproximação pode ser realizada pela inclinação da corda PB, resultando a fórmula de diferença

progressiva

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{ u(x+h) - u(x) \} \quad (13)$$

ou a inclinação da corda AP resultando a fórmula de diferença regressiva

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{ u(x) - u(x-h) \} \quad (14)$$

Podemos observar que as equações (13) e (14) resultam imediatamente de (8) e (9), respectivamente, assumindo que as potências dois ou maiores de h são desprezíveis. Por isso podemos dizer que nas fórmulas de diferença progressiva e regressiva o erro em ambos é $O(h)$.

As diferenças finitas são amplamente usadas para a representação dos polinômios de interpolação e na utilização destes polinômios na solução de equações diferenciais e na quadratura numérica.

A utilização dessas diferenças é de grande importância para a obtenção de aproximação das derivadas de certas funções.

Abaixo são apresentadas as derivadas aproximadas pelas diferenças:

$$a) \quad u'_i \approx \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$b) \quad u''_i \approx \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+2} + 2u_{i+1} + u_i}{h^2}$$

$$c) \quad u'''_i \approx \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i}{h^3}$$

$$d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$

$$e) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+2h, y) - 2u(x+h, y) + u(x, y)}{h^2}$$

$$f) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \approx \frac{u(x+3h, y) - 3u(x+2h, y) + 3u(x+h, y) - u(x, y)}{h^3}$$

A aproximação por diferença central é relevante para a solução numérica da equação de Poisson.

Na malha de discretização tomamos sempre 3 pontos, ao longo de um eixo, sendo que dois deles são simétricos em relação ao terceiro.

3.3 Consistência

$$\text{Sendo } Lu = \nabla^2 u$$

onde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Para resolver o problema

$$\begin{aligned} Lu(x,y) &= F(x,y) & F &\in \Omega \\ u &= f & f &\in \partial\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

as condições gerais do método das diferenças finitas são dadas pela

Definição 1 : A seqüência

$$S = \{(G_h, F_j, R_j)\}_{j,h=1, \dots, \infty}$$

é dita ser um método de diferenças finitas, para solucionar (15) se as três condições abaixo forem satisfeitas.

C1) Os G_h são malhas em Ω com tamanho

$$h = \max_j |G_h| \text{ tendendo a zero.}$$

C2) Os F_j são mapeamentos contínuos

$$C^0(\partial\Omega, R) \times C^0(G_h, R) \rightarrow C^0(G_h, R).$$

Para cada $f \in C^0(\partial\Omega, R)$ fixo, todos os $F_j(f)$ são mapeamentos de $C^0(G_h, R)$ para $C^0(G_h, R)$ continuamente diferenciáveis.

C3) Os R_j são mapeamentos lineares

$$C^0(G_h, R) \rightarrow C^0(M_j, R)$$

O método S é dito ser consistente se a seguinte condição for satisfeita.

C4) Existe um m maior ou igual a 2 tal que para todo u pertencente a $C^m(\bar{\Omega}, R)$,

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|F_J(f, r_J(u)) - R_J(r_J(q))\| = 0$$

Aqui $r_J = r_G$, $f = r_{\partial\Omega}(u)$, e $q(x,y) = Lu(x,y)$ para

todo $(x,y) \in \Omega$, em que $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3.4 Convergência

Seja u a representação da solução exata da equação diferencial parcial e U uma solução aproximada.

Então a solução é dita convergente quando U tende para u quando h tende a zero.

Embora a condição segundo a qual U converge para u estando bem estabelecida para equações diferenciais parciais elípticas, parabólicas e hiperbólicas lineares de segunda ordem com soluções satisfazendo justamente as condições gerais de contorno e inicial, elas não são conhecidas para equações não lineares, exceto em poucos casos particulares. Como o nosso estudo refere-se a equações diferenciais parciais elípticas lineares de segunda ordem, com soluções satisfazendo as condições de Dirichlet não nos importamos com as equações não lineares.

3.5 Métodos de Discretização

Existem dois estágios para a solução de problemas de valor de contorno elíptico por métodos numéricos. A primeira fase chamada discretização, requer uma substituição do problema contínuo por sua aproximação discreta. No caso das equações (1) e (5) obtemos um sistema de equações algébricas lineares. Em geral, maior o sistema linear, melhor a aproximação. A segunda fase é a solução do sistema linear.

No método das diferenças finitas utiliza-se uma malha retangular $G = (x_i, y_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ sobre o domínio com o propósito de determinar as aproximações para a solução de cada ponto da malha em $G' = G \cap \mathbb{R}^2$.

Para fazer isto, nós escrevemos uma equação algébrica para cada ponto de G' que localmente é uma aproximação da equação diferencial. A aproximação mais simples é de trocar as derivadas na equação diferencial por uma simples diferença dividida.

Nós ilustramos o procedimento no caso do retângulo R onde $G' = G$.

Neste caso os $u(x_i, y_j)$ são incógnitas, denotados por $U_{i,j}$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$. No caso dos pontos da malha serem igualmente espaçados, a equação a diferenças finitas aproxima a equação (1) nos pontos $(x_i, y_j) = (ih, jk)$ com:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy} \approx \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}}{4hk}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k}$$

onde h e k são os espaçamentos da malha nas direções das coordenadas x e y , respectivamente. Para a equação

$$Lu = (a u)_{xx} + (c u)_{yy} + fu = g \quad (16)$$

temos:

temos:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim a \frac{[U_{1+1,J} - U_{1,J}] - a [U_{1,J} - U_{1-1,J}]}{h^2},$$

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim c \frac{[U_{1,J+1} - U_{1,J}] - c [U_{1,J} - U_{1,J-1}]}{k^2},$$

onde

$$a_+ = a(x_1 + h/2, y_J),$$

$$c_+ = c(x_1, y_1 + k/2),$$

$$a_- = a(x_1 - h/2, y_J),$$

$$c_- = c(x_1, y_J - k/2).$$

No caso da equação (1), capítulo 2, com $b = 0$ conduz a diferenças finitas da forma

$$\alpha_0 U_{1,J} + \alpha_1 U_{1-1,J} + \alpha_2 U_{1,J-1} + \alpha_3 U_{1-1,J} + \alpha_4 U_{1,J-1} = g$$

onde

$$\alpha_0 = f - \frac{2a}{h^2} + \frac{2c}{k^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{a}{h^2} + \frac{e}{2h},$$

$$\alpha_2 = \frac{c}{k^2} + \frac{e}{2k},$$

$$\alpha_3 = \frac{a}{h^2} - \frac{d}{2h},$$

$$\alpha_4 = \frac{c}{k^2} - \frac{e}{2k}.$$

Neste caso, todas as funções são avaliadas no ponto (x_1, y_1) . Para a equação (16) obtemos:

$$\alpha_0 = f - \frac{a - a}{h^2} - \frac{c + c}{k^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{a}{2h}, \quad \alpha_2 = \frac{c}{2k}$$

$$\alpha_3 = \frac{a}{2h}, \quad \alpha_4 = \frac{c}{2k}$$

Condições de contorno também devem ser incorporadas na discretização e as condições periódicas e de Dirichlet são tratadas diretamente. Para um ponto em $\partial\Omega$ onde a equação (5) é satisfeita com $p \neq 0$, a aproximação mais simples deve ser escrita na forma de diferenças finitas de (1) para este ponto. Então usa-se um aproximação a diferenças finitas em (5) para eliminar as incógnitas introduzidas fora do domínio.

$$\alpha_0 = f - 2\frac{a}{h} - 2\frac{c}{h} - \frac{2hq}{p} \left\{ \frac{a}{2h} + \frac{d}{2h} \right\},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{c}{2k} + \frac{e}{2k},$$

$$\alpha_3 = \frac{2a}{h}, \quad \alpha_4 = \frac{c}{k} - \frac{e}{2k}$$

onde o lado direito da equação deve ser trocado por

$$- 2hr \left[\frac{a}{h} + \frac{d}{(2h)} \right] / p.$$

A aproximação da equação (16) resulta em

$$\alpha_0 = f - \frac{\frac{a_+ + a_-}{h^2} - \frac{c_+ + c_-}{k^2} - \frac{2hq}{p}}{\frac{a_+}{h^2}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{c_+}{k^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{a_+ + a_-}{h^2}}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{c_-}{k^2},$$

onde o lado direito é modificado para $g = 2hr \left[\frac{a}{h} + \frac{d}{(2h)} \right] / p.$

Na equação a diferenças finitas a aproximação em cada ponto da malha envolve aproximações em mais quatro pontos quando $b=0$; os cinco pontos constituem a estrela de 5 pontos.

Para suavizar U em uma malha uniforme, o erro de aproximação é $O(h^2 + k^2)$, isto é, o erro tende a zero tão rápido quanto $h^2 + k^2$.

Portanto dizemos que as fórmulas a diferenças finitas são de segunda ordem.

3.6 Métodos de solução

A discretização de um problema elíptico produz um sistema de equações algébricas lineares, que denotamos por $Au=b$.

Métodos para a solução deste sistema podem ser classificados em diretos e iterativos (embora existam atualmente vários métodos híbridos). Métodos diretos se prestam aos sistemas de pequeno porte com matrizes dos coeficientes densas; também resolvem satisfatoriamente vários sistemas lineares com a matriz dos coeficientes produzem a resposta num número finito de passos (sem considerar o erro de arredondamento), ao passo que métodos iterativos quando há convergência garantida são bastantes vantajosos na resolução de sistemas de grande porte com a matriz dos coeficientes do tipo "esparsa" (grande proporção de zeros entre seus elementos). Os sistemas oriundos da discretização de equações diferenciais parciais apresentam um caso típico. Neles, os zeros da matriz original são preservados e as iterações são conduzidas com matriz original; tornando os valores autocorregíveis, o que tende a minimizar os erros de arredondamento, produzindo uma seqüência de aproximações que convergem para solução u apenas no limite e sob determinadas condições.

A solução x de um sistema linear $Ax = b$ pode ser obtida utilizando-se o método iterativo, que consiste em calcular uma seqüência $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(p)}$, ... de

Duas das técnicas usadas no método iterativo são:

a) Gauss-Seidel que gera as aproximações pela relação

$$x_k^{(p)} = 1/a_{kk} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^{(p)} - \sum_{j=k+1}^n x_j^{(p-1)} \right)$$

b) Jacobi que produz as aproximações pela relação

$$x_k^{(p)} = 1/a_{kk} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j^{(p-1)} \right)$$

Em ambas as técnicas continua-se a gerar aproximações até que um dos critérios abaixo seja satisfeito:

$$\max_i |x_i^{(p-1)} - x_i^{(p)}| \leq \epsilon, \text{ onde } \epsilon \text{ é a tolerância}$$

ou

$p > MI$, onde MI é o número máximo de iterações.

A estrutura da matriz A depende de como numeramos as incógnitas e a ordenação das equações. Em diferenças finitas, as equações e as incógnitas correspondem aos pontos da malha, e conseqüentemente numerar os pontos da malha é equivalente a numerar as equações e incógnitas da mesma maneira. Nesta tão

numerar as equações e incógnitas da mesma maneira. Nesta tão falada ordenação natural numeramos os pontos em G da esquerda para a direita e de baixo para cima.

Ordenações similares existem no caso de elementos finitos.

3.7 Métodos de Relaxação

Métodos de relaxação são métodos iterativos para a solução de sistemas de equações algébricas lineares, e estão diretamente relacionados aos métodos multi-grid.

No contexto do método MG, sejam

h = tamanho da malha

G_h = malha de trabalho

h

G'_h = subconjunto de G_h , a cada relaxação

h

V = conjunto de índices de espaçamento composto de três subconjuntos

V^0

V^0 : caracteriza aqueles pontos da malha onde os valores da malha são solucionados simultaneamente com o processo de relaxação.

V^-

V^- : caracteriza aqueles pontos da malha onde os

valores prévios da malha são usados com o processo de relaxação.

V^+ : caracteriza aqueles pontos da malha onde os novos valores da malha já analisados são usados em vez dos valores prévios.

Temos

(i) Relaxação de Gauss Seidel com ordenação lexicográfica dos pontos da malha (GS, aqui da esquerda para a direita, de baixo para cima) é caracterizada por $G_h = G'_h$ e

$$V^0 = \{(0,0)\}, V^+ = \{k \ V_1 \mid k < 0 \text{ ou } (k = 0 \text{ e } k < 0)\}.$$

(cf. cap.4, 4.4.2)

(ii) Relaxação de Gauss Seidel com ordenação linha por linha (linha GS, aqui: linhas na direção da abcissa x da esquerda para a direita) é caracterizada por G_h e G'_h e

$$V^0 = \{k \ V_1 \mid k = 0\}, V^+ = \{k \ V_1 \mid k < 0\}.$$

(iii) Relaxação de Jacobi é caracterizada por $G_h = G'_h$ e

$$V^0 = \{(0,0)\}, V^+ = \emptyset.$$

(iv) Relaxação vermelho/preto procede em dois passos parciais. Para ambos os passos o espaçamento de V é o mesmo de

(iii). No primeiro passo G'_h consiste de pontos vermelho e no segundo passo G''_h consiste de pontos pretos (cf. cap.4, 4.4.1).

(v) Relaxação de Gauss Seidel com ordenação vermelho/preto dos pontos da malha (vermelho/preto GS) é obtida pela escolha de G'_h como em (iv) e

$$V^0 = \{(0,0)\}, \quad V^+ = \{k \mid k_1 < 0 \text{ ou } (k_1 = 0 \text{ e } k_2 < 0)\} \\ (k_1 + k_2 \text{ par}).$$

Convém ressaltar que este método é equivalente a relaxação vermelho/preto se e somente se o operador diferença for descrito pela estrela de 5 pontos).

C A P I T U L O I V

4. O METODO

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o histórico do método MG com seu respectivo conceito além de descrevermos sua aplicação em malhas quadradas com dois tipos de relaxação distintas ([04], [17]).

Para facilitar o estudo, primeiramente é apresentada uma visão geral e em seguida desenvolvida diretamente sob a forma de aplicação.

Finalizando, fazemos alguns comentários sobre o método em malhas irregulares (não uniformes) com o intuito de dar uma pequena noção nesta área.

4.2 Histórico e Perspectivas

O princípio multi-grid é simplesmente constituído de aproximações com erros suavizados, obtidos pela aplicação correta dos métodos de relaxação. Devido à suavização de erros a correção destas aproximações pode ser calculada em malhas grosseiras recursivamente, utilizando-se de malhas grosseiras para obter uma aproximação inicial que refinada permite obter aproximações para malhas refinadas.

Para o desenvolvimento do método multi-grid podemos distinguir três estágios:

- a) Suavização de erros pela relaxação.
- b) Correções das aproximações obtidas em malhas grosseiras e a aplicação recursiva dessas correções.
- c) Combinação de iteração aninhada.

O efeito da suavização de erro dos métodos de

relaxação é usado para a aceleração da convergência.

A utilização recursiva das malhas grosseiras para a solução eficiente dos problemas de valor de contorno elíptico discreto específico era feita no contexto dos "métodos de redução", introduzidos por Schroder ([14]).

Os primeiros estudos introduzem e investigam o método multi-grid no sentido restrito como a convergência da solução da equação de Poisson num quadrado unitário, problemas de valor de contorno geral de segunda ordem com coeficientes variáveis num quadrado unitário e combinações do método multi-grid com iterações aninhadas.

O primeiro reconhecimento da eficiência dos métodos multi-grid (MG) foi feito por Achi Brandt que contribuiu com a introdução dos MG não linear (esquema de aproximação completa FAS) e a técnica adaptativa (MLAT, [05]), a discussão dos domínios gerais e do refinamento local da malha, a aplicação sistemática da iteração aninhada (FMG - multi-grid completo) e por fim a utilização da análise local de Fourier para a investigação teórica e otimização do método ([03], [04]).

Ainda podemos citar contribuições relevantes para o futuro do método multi-grid como os resultados de convergência das condições de contorno por Astrakhanstev ([01]), aproximação multi-grid como um predecessor do método MGR (relaxação dos multi-grid) e as idéias MG em conexão com a discretização usada em elementos finitos de Nicolaides ([10]), sendo o último de

interesse mais teórico.

Entre 1975 e 1976 Hackbush desenvolveu os elementos fundamentais do método MG, contendo investigações teóricas e práticas, entre as quais: análise do problema modelo, métodos de relaxação vermelho/preto, tratamento de domínios não retangulares, problemas não lineares e teoria de convergência para o método multi-grid.

O método multi-grid tem sido aplicado na solução numérica de problemas de autovalores, de bifurcação, parabólicos e hiperbólicos em fluido-dinâmica numérica. Além das equações diferenciais, equações integrais podem ser também eficientemente resolvidas pelo método MG de segunda ordem.

Uma extensão do campo de aplicações do método MG é a combinação de MG com princípios matemáticos de análise numérica, como a combinação dos métodos de extrapolação e os métodos de correção do defeito.

O uso do método MG em computadores vetoriais e paralelos são referenciados por Brandt, sendo tão eficientes quanto a "solução rápida direta" do algoritmo de Bunemann ([07]) ou o método de redução total de Schröder.

Contudo, a vantagem decisiva do método multi-grid está na sua fácil aplicabilidade aos problemas nos quais as exigências de soluções rápidas diretas e as técnicas da matriz de capacitância ([12]) não são satisfeitas, ou não completamente satisfeitas.

Dúvidas na alta eficiência foram levantadas pelas teorias de convergência do MG. As teorias abstratas são freqüentemente muito pessimistas e usualmente não fornecem critérios construtivos dos métodos ótimos em situações concretas.

4.3 Idéia Básica do Método

Dizemos que os métodos MG são aproximações com erros suavizados obtidos pela aplicação correta dos métodos de relaxação. Devido à suavização de erros, a correção destas aproximações pode ser calculada em malhas grosseiras (Brandt, [04]).

Para as finalidades de descrição, referimo-nos a $G = \{G^0, G^1, \dots, G^M\}$ como um conjunto de malhas no domínio Ω , em que as malhas são quadradas e regulares, e os tamanhos dessas satisfazem $h^0 > h^1 > \dots > h^M$ e $h^k : h^{k+1} = 1 : 2$.

Seja a equação de Poisson

$$Lu(x) = F(x) \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\Delta u(x) = \phi(x) \text{ em } \partial\Omega$$

um problema diferencial sobre cada malha G^k .

Podemos aproximar este problema por equações a diferenças finitas da forma

$$L^k U^k(x) = F^k(x), \quad x \in G^k \quad (17)$$

$$\Lambda^k U^k(x) = \phi^k(x), \quad x \in G^k$$

A principal do meta MG é de solucionar (17) na malha refinada G^M . O fato de que o problema discreto na malha grosseira G^k , ser uma aproximação do problema diferencial pode ser usado como uma aproximação na malha refinada G^M .

O primeiro passo a ser dado é de resolver o problema G^k , mais fácil, envolvendo um sistema algébrico menor do que de G^M . Em seguida, pela interpolação das soluções em G^k obtém-se uma primeira aproximação da solução G^M que, após algumas iterações de relaxação, chegará à solução desejada G^M .

Dada U^M como uma solução aproximada do problema G^M e assumindo que L e Λ são lineares temos:

$$L^M U^M = F^M - f^M,$$

$$\Lambda^M U^M = \phi^M - \psi^M,$$

onde f^M e ψ^M são funções residuais.

Logo a solução exata pode ser escrita

$$u^M = U^M + V^M,$$

onde a correção V^M satisfaz as equações residuais

$$L^M V^M = f^M,$$

$$\Lambda^M V^M = \psi^M.$$

(18)

Uma questão é levantada; nem todos os problemas G^M tem aproximação significativa em G^k . De que maneira podemos solucionar (18) como primeira boa aproximação? Como a resposta é geralmente negativa, nem todos os problemas G^M possuem aproximação significativa em malhas grosseiras G^k . Por exemplo, se f^M oscila rapidamente em G^M com comprimento de onda menor que $4h^M$, estas oscilações não são visíveis na malha grosseira e portanto não podem ser aproximadas nas malhas grosseiras.

Tais resíduos f^M surgem quando a aproximação U^M é obtida pela interpolação da malha grosseira. Logo vemos que as oscilações aproximadas por malhas grosseiras são desaconselháveis.

Um modo eficiente de evitar o surgimento de resíduos é sanado pela utilização dos métodos de relaxação (cf. cap.3).

Para as primeiras iterações tais métodos usualmente convergem rapidamente com os resíduos decrescendo rapidamente de uma iteração para a outra, mas logo a razão de convergência torna-se muito baixa. Estudos mostram que a convergência é

rápida contanto que os resíduos tenham um certo número de oscilações na sequência de refinamento. A medida que os resíduos vão sendo suavizados, a convergência torna-se mais lenta.

4.4 Uma Aplicação do Método MG na Solução da Equação de Poisson.

Através de um problema modelo damos uma idéia básica do método multi-grid.

Seja a equação $Lu = F$ onde u e F são funções de x e y , isto é, funções de duas variáveis, com a condição de contorno de Dirichlet

$$u(x,y) = 0 \text{ para } (x, y)$$

para a região retangular.

$$\Omega = \{x, y \mid 0 < x < a, 0 < y < b\} \subset \mathbb{R}^2,$$

com o contorno

Após a discretização da equação de Poisson no modo usual numa malha de n por m pontos, nós obtemos para os valores aproximados $U_{1,j}$ de $u(x_1, y_j)$, $x_1 = ih$, $y_j = jk$, $h = a / (n+1)$, $k = b / (m+1)$, as equações

$$+ U_{i-1,J} + U_{i,J-1} - 4U_{i,J} + U_{i,J+1} + U_{i+1,J} = F(i,J)$$

onde $F(i,J) = HF(x_i, y_J)$,

$$H = h^2 \text{ e } h = k.$$

Para $i = 1, \dots, n$ e $J = 1, \dots, m$ juntamente com os valores de contorno temos:

$$U_{0,J} = U_{n+1,J} = 0 \text{ para } J = 0, \dots, m+1$$

$$U_{i,0} = U_{i,m+1} = 0 \text{ para } i = 0, \dots, n+1$$

obtendo assim um sistema de equações lineares que pode ser escrito na forma

$$A \underline{U} = \underline{B} \text{ onde}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_M \end{bmatrix} \quad \underline{U} = [U_{J,1}, U_{J,2}, \dots, U_{J,n}]^T$$

com $J = 1, \dots, m.$

Partindo da discretização o método multi-grid calcula os valores de \underline{U} na malha refinada tomando por base a estrela de 5 pontos.

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

O processo inicial do método MG, pode ser visto da seguinte forma:

Fazendo-se $a=b=1$ e $M=2$, onde M é o número de refinamentos, como exemplo temos:

1)

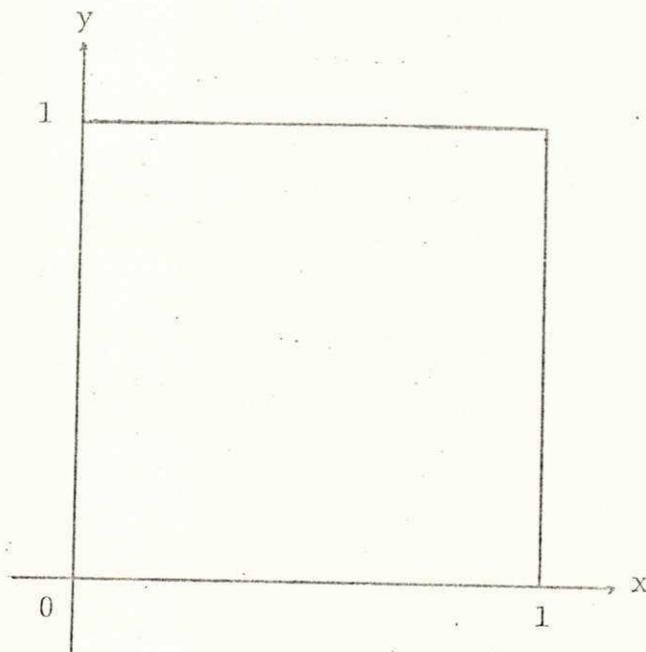


figura 4.1 - malha quadrada inicial

ii)

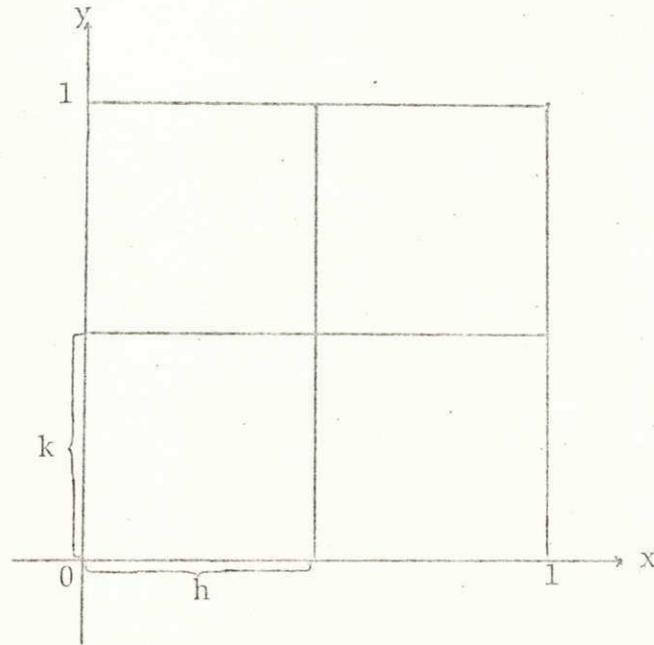


figura 4.2 - malha com refinamento $M = 1$, onde $k = h$.

iii)

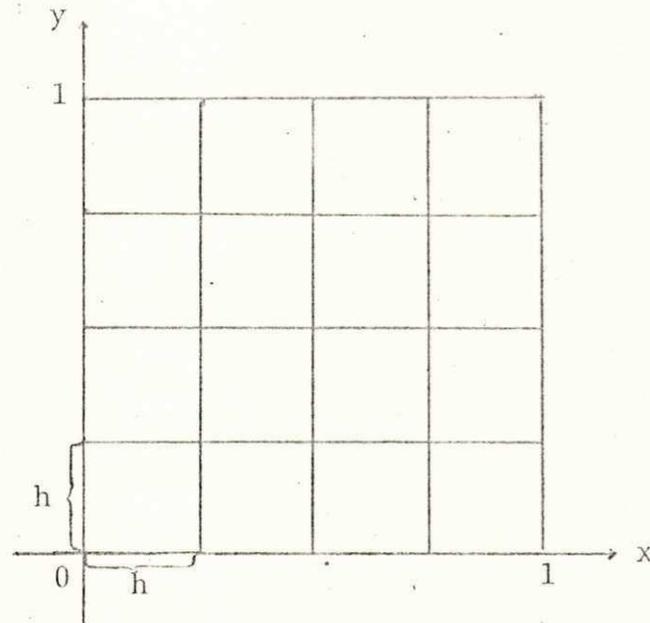


figura 4.3 - malha com refinamento $m = 2$, onde $k = h$.

Inicialmente calculamos os valores da solução aproximada da função nos pontos da malha refinada (UR). Esses

valores que serão utilizados como aproximação inicial dos métodos de relaxação.

Assim procedemos da seguinte forma:

a) Mapeamos os valores de U da malha refinada para a malha grosseira:

a1) Para

$$UG_{1,J} = UR_{1,JR}, \quad J = 2, \dots, NG$$

onde $NG = NPG - 1$ ($NPG =$ número de pontos da malha grosseira) e $JR = 2J - 1$, então mapeamos os valores de U dos pontos no contorno para os quais $i = 1$.

a2) Para

$$UG_{1,J} = UR_{iR,JR}$$

$$FG_{1,J} = -4 * FR_{iR,JR}, \quad i, J = 2, \dots, NG$$

onde $iR = 2i - 1$ e $JR = 2J - 1$, então mapeamos os valores de U do ponto central da estrela de 5 pontas.

a3) Para

$$UG_{NPG,J} = UR_{NPR,JR}, \quad J = 2, \dots, NG$$

onde $JR = 2J - 1$ e $NPR =$ número de pontos na malha refinada, mapeamos os valores de U do contorno para os quais $i = NPG$.

a4) Para

$$U_{i,1} = U_{iR,1}$$

$$U_{i,NPG} = U_{iR,NPR} \quad , \quad i = 1, \dots, NPG$$

onde $iR = 2i - 1$, mapeamos os valores de U dos pontos que não são centrais e não pertencem ao contorno.

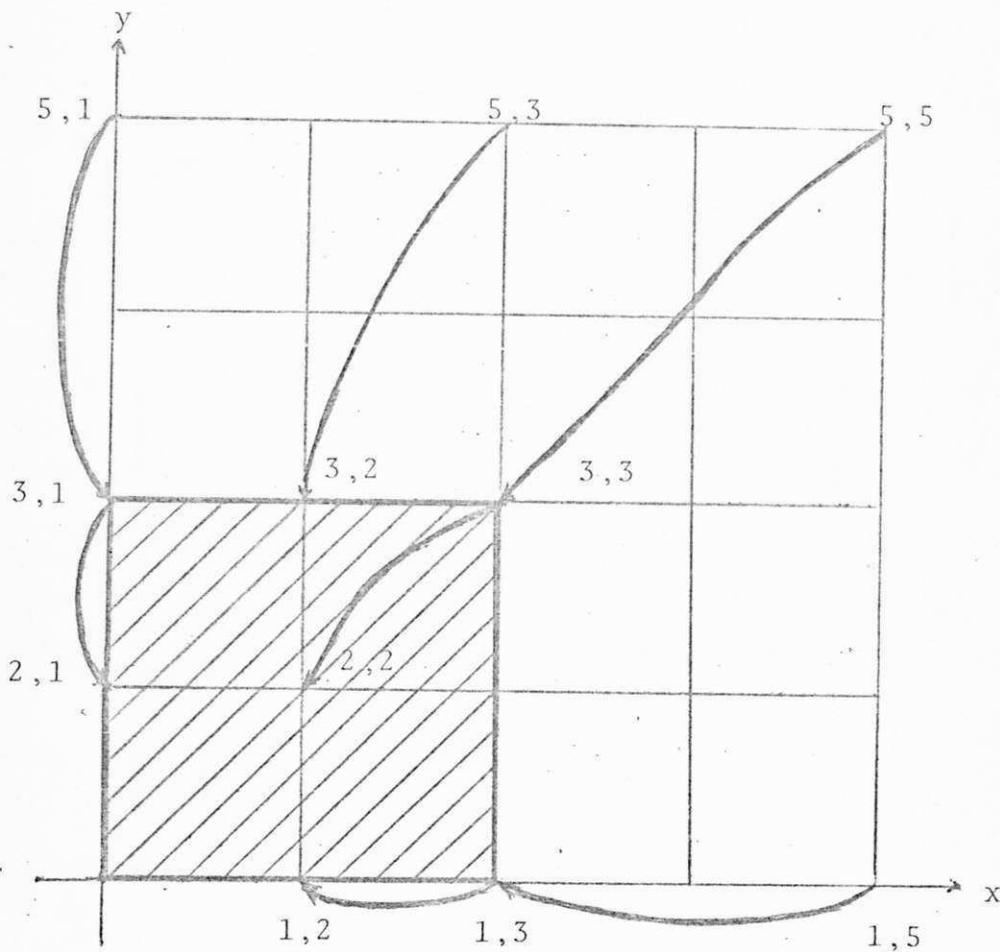


figura 4.4 - mapeamento dos valores de U dos pontos da malha refinada para a malha grosseira, com $M = 2$.

b) Após o mapeamento temos a relaxação na malha refinada que pode ser feita de várias maneiras (ver cap. 3), mas apresentaremos somente dois tipos.

b.1) Relaxação Vermelho/Preto.

Na relaxação vermelho/preto os valores de U dos pontos na malha refinada são calculados da seguinte maneira:

$$UR_{i,j} = H(F_P + F_N + F_S + F_L + F_O), \quad i = 2, \dots, n \\ j = 2, \dots, m$$

onde P, N, S, L, O são respectivamente

P = ponto central	N
	⋮
N = ponto acima de P	⋮
	⋮
S = ponto abaixo de P	L.....P.....O
	⋮
L = ponto à esquerda de P	⋮
	⋮
O = ponto à direita de P	S

conforme figura.

O mapeamento dos valores da malha grosseira para a refinada, no caso da relaxação vermelho/preto é feita:

i) Utilizando uma interpolação de 4a. ordem, para os pontos de índice par em relação a i e j.

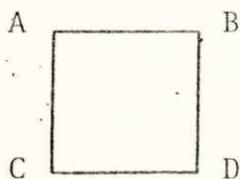
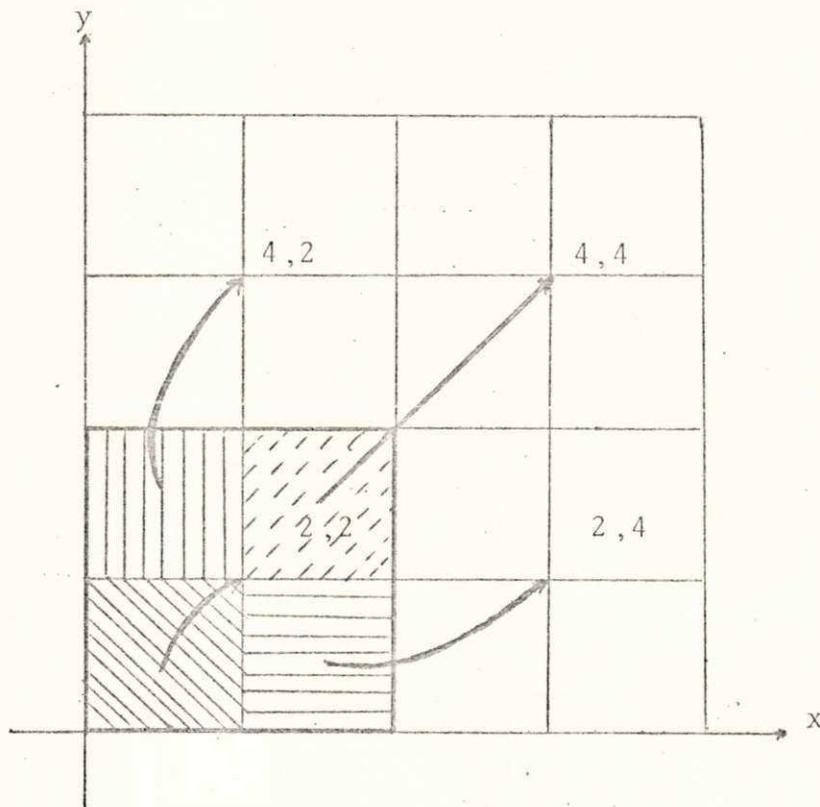
$$UR_{iR,jR} = UG_{i,j}, \quad i, j = 2, \dots, NG$$

onde $iR = 2i + 2$ e $JR = 2j + 2$.

Interpolando

$$UR_{iR, JR} = H(2FRR_{iR, JR} + 2UG_{1, JM} + 2UG_{1, J}),$$

onde FRR = valores da função F nos pontos da malha refinada excluindo os de contorno, $iR = 2i + 2$, $JR = 2j + 2$ e $JM = j + 1$.



$$UR = (UG_A + UG_B + UG_C + UG_D + FR) \cdot H$$

figura 4.5 - mapeamento dos valores de UG para UR com índices pares utilizando interpolação de quarta ordem.

b.2) Relaxação de Gauss-Seidel com ordenação lexicográfica.

Sejam as equações de três pontos consecutivos da equação discretizada

$$U_{i-2,J} + U_{i-1,J} + U_{i,J} - 4U_{i-1,J} + U_{i-1,J-1} = b_{i-1,J}$$

$$U_{i-1,J-1} + U_{i,J} + U_{i,J-2} - 4U_{i,J-1} - U_{i+1,J-1} = b_{i,J-1}$$

$$U_{i-1,J} + U_{i,J-1} - 4U_{i,J} + U_{i,J+1} + U_{i+1,J} = b_{i,J}$$

Isolando U que tem coeficiente -4 tem-se

$$U_{i-1,J}^{(k+1)} = -1/4 [F_{i-1,J} - U_{i-2,J}^{(k)} - U_{i,J}^{(k)} - U_{i-1,J+1}^{(k)} + U_{i-1,J}^{(k)}]$$

$$U_{i,J-1}^{(k+1)} = -1/4 [F_{i,J-1} - U_{i-1,J-1}^{(k)} - U_{i+1,J-1}^{(k)} - U_{i,J-2}^{(k)} + U_{i,J}^{(k)}]$$

$$U_{i,J}^{(k+1)} = -1/4 [F_{i,J} - U_{i-1,J}^{(k+1)} - U_{i+1,J}^{(k)} - U_{i,J-1}^{(k)} + U_{i,J+1}^{(k)}]$$

temos $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Com as seguintes condições:

Para $i-1 < 1$, $i-2 < 1$, $i+1 > n$,

$j-1 < 1$ e $j-2 < 1$ e $j+1 > m$

temos $U_{i,j} = 0$.

Os índices superiores $k+1$ indicam os elementos dos novos conjuntos em função dos anteriores.

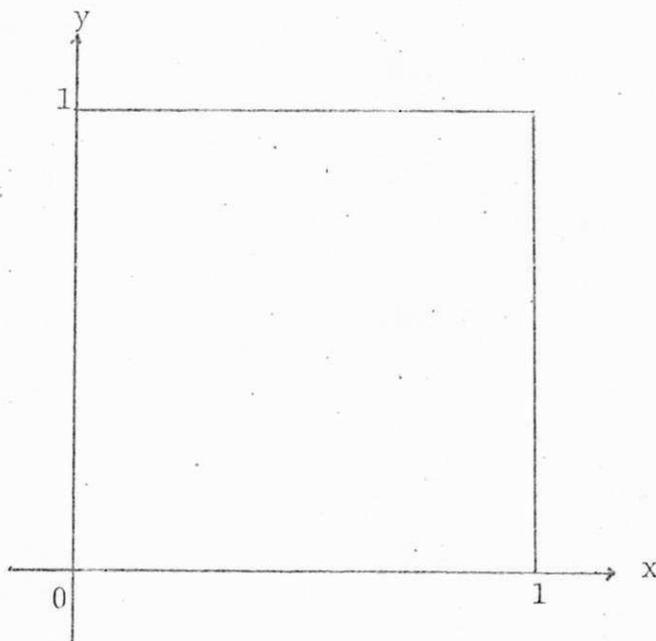


figura 4.7 - Malha inicial

O método consiste em :

b.2.1) Calcular os valores de $U_{i,j}^{(k+1)}$ tomando por base os valores iniciais $U_{i,j}^{(k)}$, neste caso

(0)
 $U_{i,j}$ representa os valores da função f nos pontos da malha grosseira.

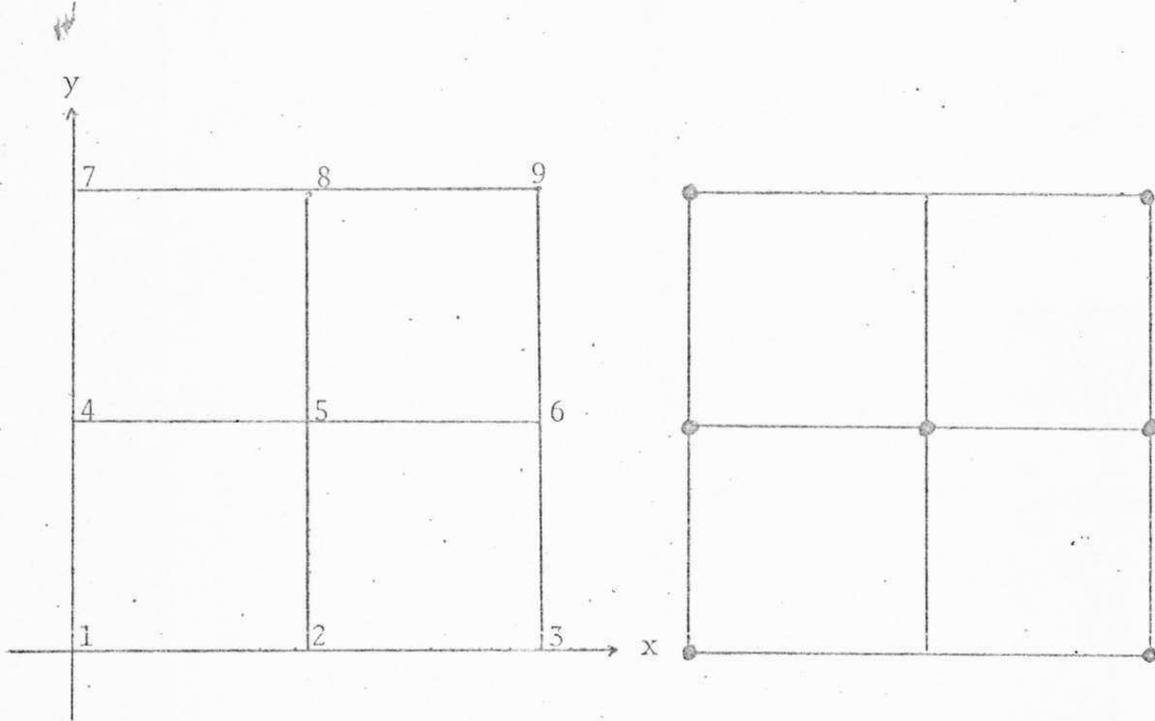


figura 4.8 - Malha grosseira com refinamento $M = 1$, onde $k = h$ - cálculo de $U_{i,j}^{(k)}$ (e).

b.2.2) Cada vez que o valor de $U_{i,j}^{(k+1)}$ é obtido, faz-se a relaxação da malha grosseira para a refinada.

Os passos b.2.1 e b.2.2 são repetidos, até que a convergência seja alcançada, isto é

$$\max_{i,j} |U_{i,j}^{(k+1)} - U_{i,j}^{(k)}| < \epsilon$$

onde ϵ é a tolerância de erro admitida.

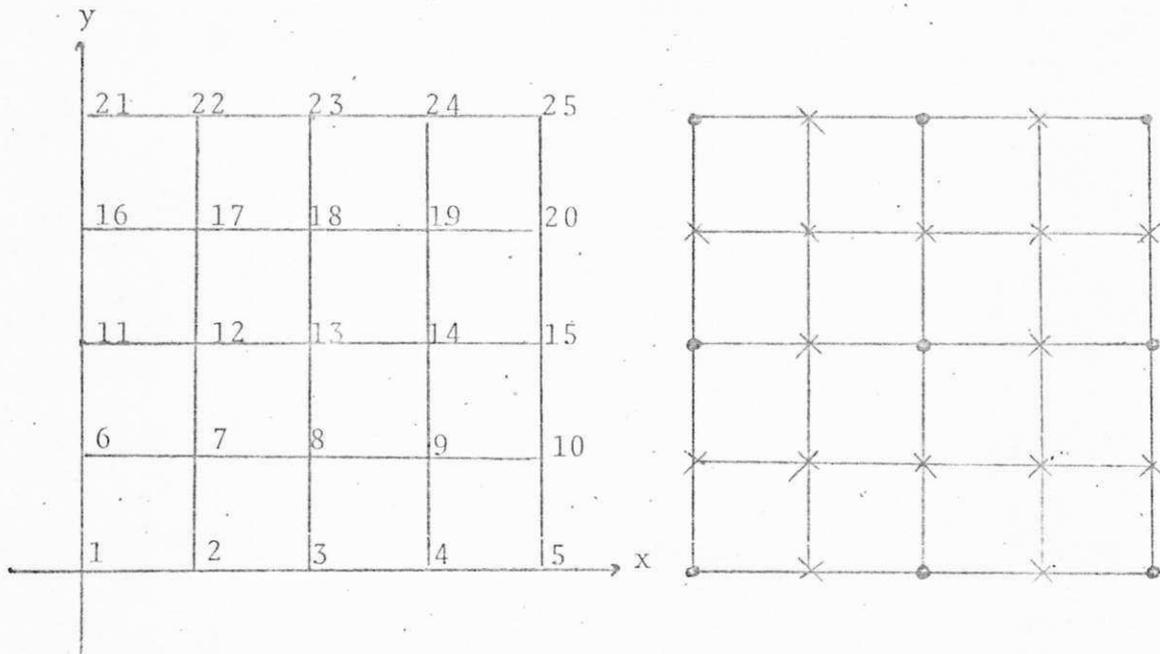


figura 4.9 - Malha refinada com $M = 2$, onde $k = h$ - cálculo de $U^{(k+1)}(x)$, com base nos valores de $U^{(k)}$ da malha grosseira

4.5 O Método MG em Malhas Irregulares

Dizemos que uma malha irregular é a união de submalhas uniformes G_0, G_1, \dots, G_M , com seus respectivos tamanhos

de malha h_0, h_1, \dots, h_M . Normalmente $h_k : h_{k+1} = 2$, contudo estas sub-malhas não pertencem necessariamente ao mesmo domínio.

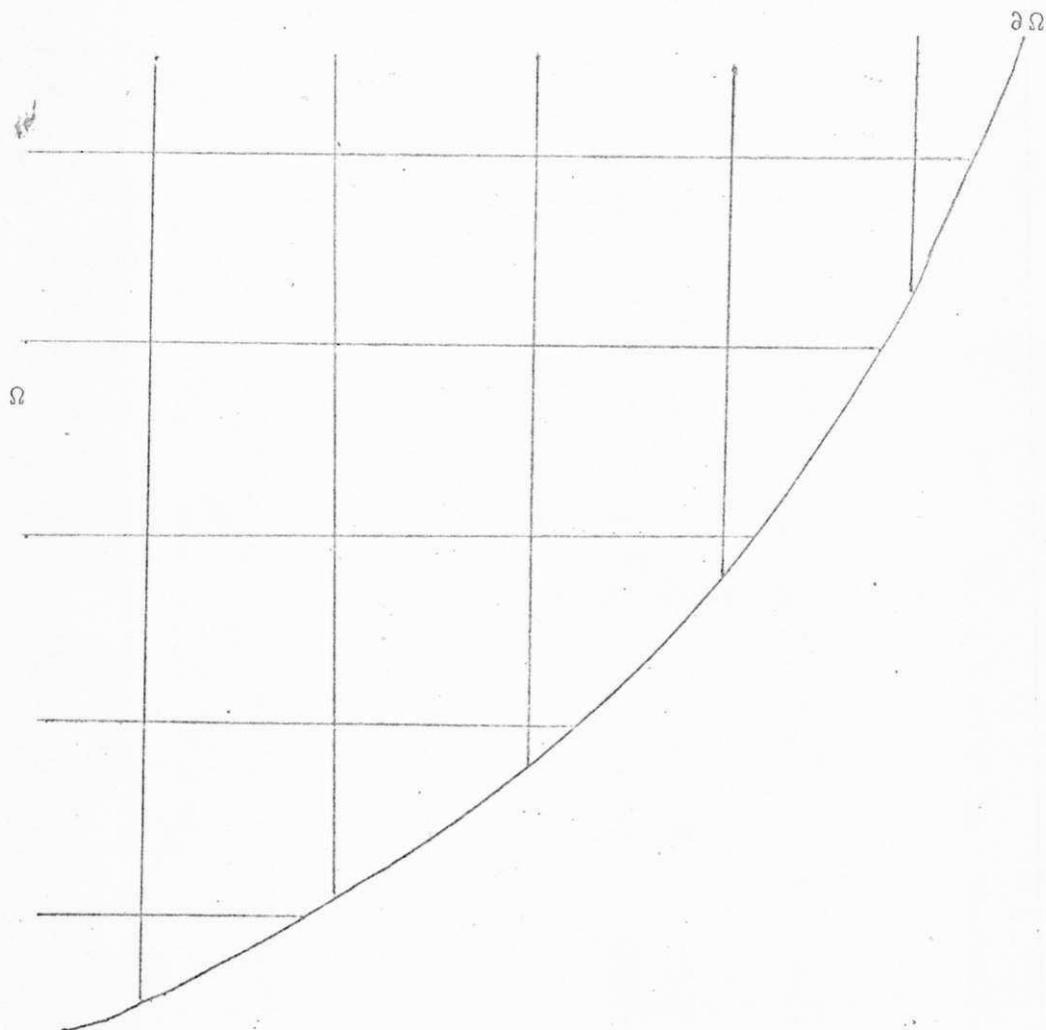


figura 4.10 - Malha irregular

Devido a isto podemos ter vários níveis de refinamento e diferentes sub-domínios.

Atualmente existem duas aproximações para a organização das malhas irregulares (não uniformes).

4.5.1 Transformação das coordenadas, usando uma malha uniforme sobre o domínio transformado.

Em tais malhas, o domínio Ω é topologicamente retangular, onde o método multi-grid pode ser implementado normalmente pelas linhas das malhas grosseiras pertencentes às malhas refinadas. Após a transformação das equações decidiremos qual o critério de parada, o método de relaxação e as ponderações do resíduo, a serem usados.

As transformações das coordenadas são bastante flexíveis, apenas em uma dimensão, um refinamento local não é fácil de se realizar. As dificuldades vão crescendo a medida que o processo é adaptado.

Contudo, a transformação usualmente faz com que a equação se torne muito mais complicada, especialmente quando sofisticada, requerendo memória auxiliar para armazenar os coeficientes, ou trabalho adicional para a computação de todas as iterações. Ainda em particular, se as aproximações são de ordem elevada, estas devem ser usadas em alguns sub-domínios ou às vezes em todos.

4.5.2 Método dos Elementos Finitos

É uma outra técnica de discretização alternativa, porém seu sistema é muito flexível, onde cada ponto da malha pode localizar-se em qualquer parte do domínio Ω .

Devido à disposição dos pontos, a implementação dos métodos MG necessita de uma grande área de armazenamento ou talvez de uma memória auxiliar, onde as posições dos pontos são distribuídas e a localização dos pontos vizinhos na malha é realizada por apontadores.

Ainda podemos observar que as iterações sobre a malha são complicadas, a obtenção dos coeficientes das equações requerem muitos cálculos, devido à repetição da iteração de relaxação.

Mais difícil ainda é a organização da solução multi-grid numa malha completamente irregular. A estrutura e o processo de solução do perfil acima pode ser generalizado de várias maneiras.

Apresentamos aqui apenas uma maneira como exemplo, onde a malha inicial (refinada) é particionada geometricamente, isto é, por triangularizações ([13]).

Numa maneira sistemática, supomos que, através de um procedimento adaptativo, temos uma seqüência de triângulos T_1 ,

T_2, \dots, T_k e a seqüência de matrizes A_1, A_2, \dots, A_k .

Então a seqüência da solução do k-ésimo sistema de elementos finitos,

$$A_k u_k = b_k \text{ em } T_k,$$

a seguinte iteração ciclo-V ([17]) é usada.

$$1 - \text{Efetue } E_k \leftarrow u_k, r_k \leftarrow b_k.$$

2 - Execute os passos 2a-2c para $j = k, k-1, \dots,$

$K_{\min} + 1.$

2a) Resolva $A_{JJ} E_J = r_J$ (p iterações), sendo E_J^1 a

aproximação obtida.

2b) Ache o resíduo $r_J^1 = r_J - A_{JJ} E_J^1$.

2c) Transfira o resíduo r_J para T_{J-1} , sendo r_{J-1} o

resíduo transferido.

3 - Solucione o sistema $A_{\min}^k b_{\min} = r_{\min}^k$.

4 - Faça $E_{\min}^k = E_{\min}^1$.

5 - Execute os passos 5a-5c para $j = k_{\min} + 1, \dots,$

$k-1:$

5a) Transfira E_J^1 para T_{J+1} sendo E_{J+1}^1 o vetor transferido.

5b) Corrija $E_{J+1}^2 = E_{J+1}^1 + E_{J+1}^1$.

5c) Resolva $A_{j+1} E_{j+1} = r_{j+1}$ (q iterações) como a estimativa inicial, sendo E_{j+1} a aproximação obtida.

$$6 - \text{Corrija } u_k = u_k + E_k^1$$

Podemos observar então, que o método dos elementos finitos soluciona problemas de autovalor que envolvam equações diferenciais parciais (Equação de Helmholtz [17]).

CAPITULO V

TESTES E CONCLUSOES

5.1 Introdução

Para finalizar este trabalho, neste capítulo fazemos uma análise dos resultados obtidos aplicando os métodos MG na solução numérica da equação de Poisson.

Ainda relacionamos as dificuldades encontradas e sugerimos alguns tópicos para futuros trabalhos.

Os programas testados foram adaptados de programas

Os programas testados foram adaptados de programas publicados, sendo efetuadas algumas alterações e adaptações para as devidas implementações (devem ser considerados protótipos).

5.2 Procedimentos Adotados Durante os Testes e Análise dos Resultados.

As duas variações do método MG em função da relaxação foram testadas no computador IBM 4341 cujo sistema operacional é o VM370 controlador do OS/VS1 sob o qual roda o compilador WATFIV, instalado na Universidade Federal da Paraíba.

Inicialmente testamos os programas para regiões quadradas $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ com as condições de contorno de Dirichlet $u(x,y) = 0, (x,y) \in \partial\Omega$.

O método MG foi testado com duas formas de relaxação: vermelho/preto (RVP) em dupla precisão publicado em [17] e a segunda a relaxação de Gauss-Seidel (RGS) em precisão simples publicado em [04].

A seqüência dos testes foi realizada no computador IBM 4381, num ambiente VM e o compilador FORTRAN VS, instalado na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Foram feitas as devidas conversões nos programas, e testados em precisões simples e dupla.

O comportamento do erro também foi analisado sob dois aspectos:

- Raiz quadrada da média dos quadrados (RMQ).

$$RMQ = \sqrt{\frac{1}{NTP} \sum_{i,j} (u - U_{i,j})^2} \quad (19)$$

onde NTP é o número total de pontos da malha.

- Erro máximo (EMAX)

$$EMAX = \max_{i,j} |u - U_{i,j}|$$

As equações testadas foram as seguintes:

$$a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2(x(1-x) - y(1-y))$$

$$u(x,y) = 0 \text{ no contorno}$$

$$\text{Solução exata : } u(x,y) = (x(1-x))(y(1-y)).$$

$$b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -18 \sin(3(x+y)).$$

$u(x,y) = 0$ no contorno

Solução exata : $u(x,y) = \sin(3(x+y))$.

$$c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -10 \sin(3x+y)$$

$u(x,y) = 0$ no contorno.

Solução exata : $u(x,y) = \sin(3x+y)$

$$d) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy e^{x+y} (xy+x+y-3)$$

$u(x,y) = 0$ no contorno

Solução exata : $u(x,y) = 3e^{x+y} (x-x^2)(y-y^2)$.

$$e) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 (\sin^2 x)(\sin^2 y)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ no contorno}$$

$$\text{Solução exata : } u(x,y) = (\sin \pi x)(\sin \pi y).$$

Observamos pela tabela 5.1 que para equações lineares de Poisson, com as condições de Dirichlet, o método multi-grid com a relaxação de Gauss Seidel com ordenação lexicográfica, do ponto de vista do comportamento do erro RMQ observado é mais eficiente do que as demais formas de relaxação aqui apresentadas.

Tabela 5.1- Erros RMQ(eq. 19) para o MG com relaxação V/P, GS/L e SD.

METODO		RV/P	RGS/L	SD
Função	M			
a	2	0.02657398580	0.02469134700	0.04276662320
	3	0.02964646740	0.02915449440	0.03077539430
	4	0.03138117860	0.03124910220	0.03140670810
b	2	0.48759454400	0.68618470400	0.68401819500
	3	0.50310403100	0.70377254500	0.70405960100
	4	0.49643552300	0.70677149300	0.70204752700
c	2	0.63465303200	0.64002448300	0.66111672640
	3	0.65698933600	0.68470033500	0.68740982000
	4	0.66886729000	0.70201546000	0.70204752500
d	2	0.52776545300	0.16679465800	0.47410309300
	3	0.58269399400	0.19880694200	0.22649240500
	4	0.60372549300	0.21316617700	0.21564650500
e	2	0.82892345000	0.37499994000	0.45927894100
	3	0.91722542000	0.44816839700	0.44911152100
	4	0.98066389600	0.46874612600	0.47009468100

onde

M = número de refinamentos da malha

RV/P = relaxação vermelho/preto

RGS/L = relaxação de Gauss Seidel com ordenação lexicográfica.

SD = Solução direta.

5.3 Dificuldades Encontradas

Neste trabalho podemos observar que os maiores obstáculos foram:

- A quase não existência de equações de Poisson com sua respectiva solução analítica.

- A mudança de ambiente durante a fase de testes.

- A impossibilidade de testes envolvendo um número superior a 4 refinamentos no método da solução direta, devido a grande quantidade de pontos envolvidos e a capacidade de memória.

- A não padronização dos símbolos e termos utilizados na literatura do MG.

5.4 Sugestões para Trabalhos Posteriores

Vimos que a versão implementada e testada do método MG funciona somente para malhas quadradas com as condições de

contorno de Dirichlet, com sua respectiva relaxação.

Implementamos e testamos apenas duas variações de relaxação ambas em precisões simples e dupla.

Para completar o estudo sugerimos :

- método MG em malhas retangulares com a condição de contorno de Neumann.

- método MG em malhas quadradas utilizando 9 pontos (discretização de Menhrstellen, [02]).

- método MG em malhas não retangulares utilizando 5 pontos ([08]).

- método MG aplicado a dimensões maiores que 2.

- testar o método com as demais relaxações ([09], [14], [15]).

- aplicar o método a outros tipos de equações diferenciais.

5.5 Comentários finais

A utilização do método MG na solução de equações diferenciais elípticas mostrou que:

- exige conhecimento matemático por parte do usuário;

- é aplicável a malhas com diferentes contornos, visto que adaptações necessárias podem ser feitas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [01] Astrakhantsev, G. P.; An iterative method of solving elliptic net problems, U.S.S.R. Computational Math. and Phys, Vol. 11, 1977, p. 171-182.
- [02] Banegas, A.; Fast Poisson Solvers for Problems with Sparsity, Math. Comp., Vol.32, 1978, p. 441-446.

- [031] Brandt, A.; Guide to Multigrid development, in Multi-Grid Methods . (W. Hackbush, U. Trottenberg eds), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 960, Springer-Verlag, N.Y., 1982, p. 153 -
- 187.
- [041] Brandt, A.; Multi-Level Adaptive Solution to boundary-value problems. Math. Comp., Vol. 31, 1977, p. 333-390.
- [051] Brandt, A.; Multi-level adaptive techniques (MLAT). The multi-grid method, in Mathematical Software IIIb, (J. R. Rice, ed.), Academic Press, N.Y., 1977, p. 277-318.
- [061] Briggs, W. I.; A Multigrid Tutorial, SIAM, Philadelphia ; 1987.
- [071] Buzbee, B. L., Dorr, F. W., George, J. A. and Golub, G. H.; The Discrete Poisson Equation on Irregular Regions, SIAM J. Numer. Anal , Vol. 28, 1971, p. 722-736.
- [081] Ehrlich, L. W.; A Marching Technique for Nonseparable Equations, Math. Comp., Vol. 33, 1979, p. 881-890.

- [09] Fedorenko R. P. ; A relaxation Method for solving elliptic difference equations, Z. Vyeisl. Mat. I Mat. Fiz., Vol. 1, 1961, p. 922-927.
- [10] Hackbush, W.; Multi-Grid Convergence Theory in Multi-Grid Methods. (W. Hackbush, U. Trottenberg eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 960, Springer - Verlag, N.Y., 1982, p. 153-187.
- [11] Nicolaides, R. A. ; On the L^2 convergence of an algorithm for solving finite element equation, Math. Comp., Vol. 31, 1977, p. 892-906.
- [12] Proskurowski, W. , Widlund, O. ; On the numerical solution of Helmholtz equation by capacitance matrix method, Math. Comp., Vol. 30, p. 443-468.
- [13] Rivara, M. C. ; Design and Data Structure of Fully Adaptive, Multigrid, Finite-Element Software, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 10, 1984, p. 242-264.

- [14] Schroder, J., Trottenberg, U., Witsh, K.; On fast Poisson Solvers and Applications, in Numerical Treatment of Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 631, Springer-Verlag, Berlin, 1978, p. 153-187.
- [15] Southwell, R. V. ; Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford Univ. Press, N. Y. , 1940, p. 3-152.
- [16] Southwell, R. V. ; Relaxation Methods in Theoretical Physics, Clarendon Press, Oxford, 1946, p. 8-355.
- [17] Stuben, K., Trottenberg, U. ; Multigrid methods: Fundamental Algorithms, model problem analysis and applications, in Multi-Grid methods, (W. Hackbush and U. Trottenberg eds.), Lectures Notes in Mathematics., Vol. 960, Springer-Verlag, N.Y., 1982, p. 1-176.