Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Soluções Blow-up para uma classe de Equações Elípticas

**por**

**Geizane Lima da Silva** †

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Soluções Blow-up para uma classe de Equações Elípticas

**por**

**Geizane Lima da Silva**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós Graduação em Metemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

---

**Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG**
**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

**Março de 2010**

# Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções positivas do tipo blow-up para uma classe de equações elípticas semilineares. Usamos argumentos desenvolvidos por Cîrstea & Radulescu [6], Lair & Wood [20] e as técnicas empregadas são o Método de Sub e Supersolução, Teoremas de Ponto fixo e em alguns resultados exploramos a simetria radial e algumas estimativas para equações elípticas.

**Palavras-chave:** Sub e supersolução, Soluções Blow-up, Princípio de máximo.

# Abstract

In this work we studied the existence of blow-up positive solutions for the class of semilinear elliptic equations. We used arguments developed by Cîrstea & Radulescu [6] and by Lair & Shaker [20] and the techniques used are the method of Sub and Supersolution, Fixed point theorems and some results explored radial symmetry and some estimates for elliptic equations.

**Keywords:** Sub and supersolutions, Blow-up solutions, Maximum principle.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Jeová Deus, por tudo.

Aos meus pais, Braz (in Memorian) e Zinalva, por todo amor e carinho dedicado e pelos sacrifícios feitos para possibilitar a educação dos filhos.

Aos meus irmãos, Genivaldo, Gilvan, Gilvanete, Jaison, Jairan e Júnior pelo incentivo, compreensão e amizade.

As Minhas amigas, Jamile, Indiara, Ruth, Bruna e Norma por acreditarem em mim, pelo apoio, pelas palavras de incentivo e conforto nos momentos de desânimo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A meu orientador, Angelo Roncalli, pela orientação, disponibilidade, paciência e por toda ajuda concedida por meio dos conhecimentos transmitidos.

Aos professores Aldo Trajano Lourêdo e Claudianor Alves, membros da banca, pela disposição na avaliação deste trabalho.

Aos professores do DME da UFCG, em especial ao Daniel Cordeiro, ao Braúlio, ao Francisco Júlio, ao Henrique Fernandes, ao Claudianor Alves e ao Angelo Roncalli pelas disciplinas lecionadas que contribuiram na minha formação acadêmica.

As "Ridículas", Leidmar, Sheila e a Clara, por tornarem os estudos menos pesados, com brincadeiras e piadas engraçadas, em especial a Leidmar, por toda ajuda prestada nos primeiros semestres e pelo seu bom humor.

Aos companheiros da pós graduação, Joseane, Rodrigo, David, Suene, Leomaques, Rawlilson, Denilson, Joseluis, Clara, Paulo, Marciel, Nercionildo e Adriano pela ajuda e os estudos compartilhados, especialmente a Luciano, Jackson, Éder, Sabrina, Sheila, Jéssyca, Natan e Désio.

Aos colegas de Graduação da Uesc, Alex, Joice, Érico, Cris, Welton, Alexandre, Kaliana, Karine, Priscila, Edilêide e ao professor Cícero, pelo incentivo e pela recomendação ao mestrado.

A todos que fazem parte do DME da UFCG, especialmente a Salete, Argentina, Severina (Dona Dú), Suenia e Shirley.

# Dedicatória

*À minha mãe, dona Zinalva, a memória do meu pai Braz e ao meu sobrinho Tarley.*

*“ Sem sonhos, a vida não tem brilho. Sem metas, os sonhos não têm alicerces. Sem prioridades, os sonhos não se tornam reais.”*

**Augusto Cury**

# Conteúdo

# Notações

- $|A|$ - Volume (medida de Lebesgue) do conjunto $A$;
- $B(x, R)$ - Bola aberta de centro $x$ e raio $R$;
- $C^k(\Omega)$ - Espaço das funções $k$ vezes diferenciáveis em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$;
- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ - Espaço das funções $k$ vezes diferenciáveis, cujas derivadas são Hölder contínuas com expoente $\alpha$;
- $C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega)$ - Espaço das funções $k$ vezes diferenciáveis, cujas derivadas são localmente Hölder contínuas com expoente $\alpha$;
- $C^\infty(\Omega)$ - Espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$;
- $< f >$ - Valor médio da função $f$;
- $L^p(\Omega, \mu)$ - Espaço das funções Lebesgue mensuráveis sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, p-integráveis, com $1 \leq p \leq \infty$, segundo a medida $\mu$.
  Se $\mu$ denota a medida de Lebesgue, poremos $L^p(\Omega)$;
- $W^{k,p}(\Omega), H^1(\Omega)$ - Espaço de Sobolev, com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto;
- $r \nearrow R$ - $r$ converge para $R$ com valores $r < R$;
- $r \searrow R$ - $r$ converge para $R$ com valores $R < r$;
- $w_N$ - Volume da esfera no $\mathbb{R}^n$.

# Introdução

Nos últimos anos os problemas elípticos tem recebido atenção dos pesquisadores em Equações Diferenciais Parciais motivados pela amplitude de suas aplicações em modelos físicos, nas ciências biológicas e em diversas áreas do conhecimento humano.

Os métodos matemáticos e os argumentos de análise matemática desenvolvidos, fundamentados pela teoria elíptica, podem ser aplicados em muitos problemas.

Muitas vezes, a busca por soluções para as equações diferenciais parciais elípticas, não é simples, surgem dificuldades, especialmente com relação ao domínio em que estamos trabalhando. Um problema diretamente relacionado com o domínio, é o fato deste ser limitado ou não, como por exemplo o $\mathbb{R}^N$.

Em particular, nesta dissertação, deteremos nossa atenção ao estudo da existência e das propriedades das soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{$P$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio regular.

Um número considerável de problemas do tipo $(P)$ apresentam singularidades sobre a fronteira do tipo *blow-up*. Uma solução de $(P)$, sujeita a condição de fronteira singular $u(x) \to \infty$ quando $dist(x, \partial\Omega) \to 0$, se $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ é limitado ou ilimitado com fronteira compacta, ou $u(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, para $\Omega = \mathbb{R}^N$, é chamada de solução do tipo *blow-up* ou simplesmente, *solução blow-up*.

Problemas desse tipo tiveram origem nos estudos feitos por Bieberbach em 1916, motivado por um problema em Geometria Riemanniana, em que considera $f(u) = e^u$ (*modelo exponencial*) e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N = 2$, e Rademacher em 1943 que estuda o mesmo problema com $N = 3$. Em 1974, Loewner e Niremberg, também motivados por um problema em Geometria Riemaniana considerou o caso em que $f(u) = u^p$ *(modelo potência)*, com $p = (N+2)/(N-2)$.

Inicialmente, no **Capítulo 1**, apresentamos um método clássico de resolução de equações diferenciais parciais, conhecido como método de subsolução e supersolução. Usamos a técnica de Interação Monôtonica desenvolvida por Figueiredo em [10], técnicas similares as de Ni [26] e um argumento tipo boot-strap, conforme Lazer & Mckenna [22].

Em seguida, no **Capítulo 2**, mostraremos a existência de solução blow-up para o problema $(P)$ quando $\Omega$ é limitado, ilimitado com fronteira compacta e quando $\Omega = \mathbb{R}^N$. Uma hipótese fundametal é a condição de **Keller-Osserman**,

$$\int_1^\infty [2F(t)]^{-1/2} dt < \infty \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s)ds. \tag{$KO$}$$

Utilizaremos princípios do máximo e os argumentos e técnicas desenvolvidas no artigo de Cîrstea e Radulescu [6].

No **Capítulo 3**, tomando por base o artigo de Lair & Wood [20], consideramos um caso particular que é o problema sublinear

$$\Delta u = p(x)u^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$N \geq 3$ e $0 < \gamma \leq 1$. Neste caso, restrigimos o problema ao caso radial e mostramos que

$$\int_0^\infty rp(r)dr = \infty$$

é uma condição necessária e suficiente para existência de solução blow-up. Mostramos também, alguns resultados de não existência de solução quando $\Omega$ é limitado. Aqui usaremos teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff, argumentos e técnicas desenvolvidas por Kusano & Oharu em [18] e Lair & Wood em [19].

No **Apêndice A**, apresentamos alguns conceitos relacionados a Espaços Vetoriais Topológicos que são utilizados na dissertação. Além disso, mostramos que $C([0, \infty))$ é um espaço de Fréchet, o que é importante para o desenvolvimento do primeiro teorema do capítulo III.

Por fim, no **Apêndice B**, enunciamos os principais resultados utilizados ao longo do nosso trabalho.

# Capítulo 1

# Sub e Supersoluções

Neste capítulo apresentaremos o método de subsolução e supersolução, que será útil no estudo do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, \ u \neq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{$P$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado (ou ilimitado) ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.

No que segue, consideraremos as seguintes hipóteses sobre as funções $p$ e $f$:

- $(P_0)$ $\quad p \geq 0$, $p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ se $\Omega$ é limitado e $p \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ caso contrário, onde $0 < \alpha < 1$.

- $(F)$ $\quad f \in C^1[0,\infty)$, $f' \geq 0, f(0) = 0$ e $f > 0$ em $(0,\infty)$.

Considere a família de problemas

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, \ u \neq 0 \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_g$}$$

onde $g : \partial\Omega \longrightarrow (0,\infty)$ é contínua[1] e a fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^N$.

[1] Ver Apêndice B

**Definição 1.1 (Subsolução)** *Uma função* $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é uma subsolução de* $(P_g)$ *se*

$$\begin{cases} \Delta \underline{u} & \geq & p(x)f(\underline{u}) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \underline{u} & \leq & g \ \text{ em } \ \partial\Omega, \\ \underline{u} & \geq & 0, \ \underline{u} \neq 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{$\underline{P_g}$}$$

**Definição 1.2 (Supersolução)** *Uma função* $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é uma supersolução de* $(P_g)$ *se*

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} & \leq & p(x)f(\overline{u}) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \overline{u} & \geq & g \ \text{ em } \ \partial\Omega, \\ \overline{u} & \geq & 0, \ \overline{u} \neq 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{$\overline{P_g}$}$$

## 1.1 Sub e supersolução para $\Omega$ limitado

Nesta seção mostraremos um resultado que será uma ferramenta de fundamental importância na demonstração do Teorema de Sub e Supersolução.

**Lema 1.1** *Seja* $f$ *uma função satisfazendo a condição* $(F)$ *e* $p$ *satisfazendo a condição* $(P_0)$ *para* $\Omega \subset \mathbb{R}^N, (N \geq 3)$ *limitado. Suponha que* $g \in C(\partial\Omega)$ *e* $v_k$ *é única solução não negativa de*

$$\begin{cases} \Delta v_k & = & p(x)f(v_{k-1}) \ \text{ em } \ \Omega, \quad \text{com } \ k = 1, 2, \ldots \\ v_k & = & g \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*tal que a sequência* $\{v_k\}$ *é monótona,* $v_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e existem funções contínuas* $\underline{v}, \overline{v} \in \Omega$ *tais que*

$$0 < \underline{v}(x) \leq v_k(x) \leq \overline{v}(x), \quad x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ k = 1, 2, \ldots$$

*Então a função* $v(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$ *é solução clássica do problema*

$$\begin{cases} \Delta v & = & p(x)f(v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ v & = & g \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_g$}$$

**Prova.** Para provarmos o lema acima, utilizaremos um argumento do tipo boot-strap. Seja $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, escolhido de tal forma que $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$, onde $B(x_0, r)$ é uma bola aberta de raio $r$, centrada em $x_0$. Considere a função[2] $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, dada por

$$\psi \ = \begin{cases} 1 & \text{em} \ \ \overline{B(x_0, r/2)}, \\ 0 & \text{em} \ \ (B(x_0, r))^C. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi v_k)}{\partial x_i} &= v_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2(\psi v_k)}{\partial {x_i}^2} &= v_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_i}^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial^2 v_k}{\partial {x_i}^2}, \quad \text{com} \ \ i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta(\psi v_k) = 2 \nabla v_k \nabla \psi + q_k, \tag{1.1}$$

onde $q_k = v_k \Delta \psi + \psi \Delta v_k$.

Desde que,

$$|\Delta v_k| = |p(x) f(v_{k-1})| \leq \max_{B(x_0, r)} p(x) |f(\overline{v})| \leq C_4,$$

com $C_4$ independente de $k$, temos

$$|q_k| \leq |v_k||\Delta \psi| + |\psi||\Delta v_k| \leq C_1 C_2 + C_3 C_4 \leq \tilde{C},$$

de onde segue que, $\|q_k\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq \tilde{C}$ [3].

Além disso, multiplicando (1.1) por $(\psi v_k)$, obtemos

$$\psi v_k \Delta(\psi v_k) = 2 v_k \nabla \psi (\psi \nabla v_k) + \psi v_k q_k.$$

Denotando

$$S_k = \psi v_k q_k - v_k [\nabla \psi (2 v_k \nabla \psi)]$$

e

$$A_k = 2 v_k \nabla \psi,$$

[2] Ver livro de análise do Elon, [23]

[3] Com $\tilde{C}$ independente de $k$. As demais funções que posteriormente aparecem indexadas a $k$ e que forem limitadas terão por limitação uma constante independente de $k$.

obtemos

$$\psi v_k \Delta(\psi v_k) = A_k \nabla(\psi v_k) + S_k. \tag{1.2}$$

Desde que

$$|A_k| = 2|v_k \nabla\psi| \leq 2|v_k||\nabla\psi| \leq C_5,$$

$$|S_k| \leq |\psi||v_k||q_k| + 2|v_k|^2|\nabla\psi|^2 \leq C_6.$$

Temos

$$\|A_k\|_\infty \leq C_5 \ \text{ e } \ \|S_k\|_\infty \leq C_6.$$

Mostrando que $A_k$ e $S_k$ são limitadas em $L^\infty(B(x_0,r))$.

Agora, fazendo $\psi v_k = u$, usando $(\star)$ e a Identidade de Green, temos

$$\int_{B(x_0,r)} u\Delta u = -\int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 dx, \tag{1.3}$$

pois $u = \psi v_k = 0$ em $\partial B(x_0,r)$.

Integrando (1.2) e utilizando (1.3), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r)} |\nabla(\psi v_k)|^2 dx &= -\int_{B(x_0,r)} [A_k \nabla(\psi v_k) + S_k] dx \\
&\leq \int_{B(x_0,r)} |A_k \nabla(\psi v_k) + S_k| dx \\
&\leq \int_{B(x_0,r)} |A_k||\nabla(\psi v_k)| dx + \int_{B(x_0,r)} |S_k| dx \\
&\overset{hölder}{\leq} \|A_k\|_{L^2(B(x_0,r))} \left( \int_{B(x_0,r)} |\nabla(\psi v_k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|S_k\|_{L^2(B(x_0,r))} |B(x_0,r)| \\
&\leq C_1 \left( \int_{B(x_0,r)} |\nabla(\psi v_k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{C}_2.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|\nabla(\psi v_k)\|^2_{L^2(B(x_0,r))} - C_1 \|\nabla(\psi v_k)\|_{L^2(B(x_0,r))} - \tilde{C}_2 \leq 0.$$

Note que a expressão acima é uma equação do 2° grau na variável $\|\nabla(\psi v_k)\|_{L^2(B(x_0,r))}$, de onde segue que,

$$\|\nabla(\psi v_k)\|^2_{L^2(B(x_0,r))} \leq C_1^2 + 2\tilde{C}_2 \leq C.$$

Portanto, $\nabla(\psi v_k)$ é limitada em $L^2(B(x_0,r))$ e $C$ independe de $k$. Por $(\star)$ concluímos que $\nabla v_k$ é limitado em $L^2(B(x_0,r/2))$.

Agora, para $k \geq 1$, defina a função $\psi_1 \in C(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\psi_1 \;=\; \begin{cases} 1 & \text{em } \overline{B(x_0, r/4)}, \\ 0 & \text{em } (B(x_0, r/2))^C. \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

Observe que,

$$\Delta(\psi_1 v_k) = 2\nabla v_k \nabla \psi_1 + q_{1k}, \tag{1.4}$$

onde $q_{1k} = v_k \Delta\psi_1 + \psi_1 \Delta v_k$ e $q_{1k}$ é limitado em $L^\infty(B(x_0, r/2))$ por uma constante que independe de $k$.

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta(\psi_1 v_k) = h_{1_k} & \text{em } B(x_0, r/2), \\ \psi_1 v_k = 0 & \text{em } \partial B(x_0, r/2), \end{cases} \tag{$P_{1k}$}$$

com $h_{1_k} = 2\nabla v_k \nabla\psi_1 + q_{1k}$ e $h_{1_k} \in L^2(B(x_0, r/2))$. Por regularidade Elíptica[4], temos

$$\psi_1 v_k \in W^{2,2}(B(x_0, r/2)) \;\text{ e }\; \|\psi_1 v_k\| \leq \tilde{C}\|h_{1_k}\| \leq C$$

Assim, $v_k$ é limitado em $W^{2,2}(B(x_0, r/4))$, de onde segue que $\nabla v_k$ é limitado em $W^{1,2}(B(x_0, r/4))$ .

Da imersão contínua

$$W^{1,2}(B(x_0, r/4)) \hookrightarrow L^{2^*}(B(x_0, r/4)), \quad 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

obtemos que, $\nabla v_k$ é limitado em $L^{2^*}(B(x_0, r/4)$.

Seja $\psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\psi_2 \;=\; \begin{cases} 1 & \text{em } \overline{B(x_0, r/8)}, \\ 0 & \text{em } (B(x_0, r/4))^C. \end{cases} \tag{$\star\star\star$}$$

Temos

$$\Delta(\psi_2 v_k) = 2\nabla v_k \nabla\psi_2 + q_{2k}, \tag{1.5}$$

onde $q_{2k}$ limitado na norma $L^\infty(B(x_0, r/4))$.

[4]Ver Apêndice B, Teorema B.28.

Novamente, considerando o problema

$$\begin{cases} \Delta(\psi_2 v_k) & = & h_{2_k} \text{ em } B(x_0, r/4), \\ \psi_2 v_k & = & 0 \text{ em } \partial B(x_0, r/4). \end{cases} \tag{$P_{2k}$}$$

onde $h_{2_k} = 2\nabla v_k \nabla \psi_2 + q_{2k}$ é limitado em $L^{2^*}(B(x_0, r/4))$. Por regularidade elíptica, obtemos

$$\psi_2 v_k \in W^{2,2^*}(B(x_0, r/4)) \text{ e } \|\psi_2 v_k\|_{2,2^*,r/4} \leq \tilde{C}\|h_{2_k}\|_{2^*,r/4} \leq C.$$

Daí, $v_k$ é limitado em $W^{2,2^*}(B(x_0, r/8))$. Consequentemente, $\nabla v_k$ é limitado em $W^{1,2^*}(B(x_0, r/8))$.

Considere os seguintes casos:

(i) Se $N < 2^*$, isto é, $N < \frac{2N}{N-2}$ $(N = 3)$, temos $0 < \frac{N}{2^*} < 1$ pelo Teorema das Imersões de Sobolev[5] obtemos

$$W^{2,2^*}(B(x_0, r/8)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/8))}.$$

Portanto, $v_k \in C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/8))}$.

(ii) Se $N \geq 2^*$ observamos que

Para $N = 2^*$ $(N = 4)$, aplicando o Teorema das Imersões de Sobolev temos

$$W^{1,2^*}(B(x_0, r/8)) \hookrightarrow L^q(B(x_0, r/8)),$$

para todo $q \geq 2^*$.

Para $N > 2^*$, isto é, $N > \frac{2N}{N-2}$ $(N = 5, 6, 7, \ldots)$, temos $1 < \frac{N}{2^*}$ pelo Teorema das Imersões de Sobolev, obtemos

$$W^{1,2^*}(B(x_0, r/8)) \hookrightarrow L^q(B(x_0, r/8)),$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{2^*} - \frac{1}{N} = \frac{N-4}{2N}$, ou seja, $q = \frac{2N}{N-4} > 2^*$. Seja $\psi_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\psi_3 = \begin{cases} 1 & \text{em } \overline{B(x_0, r/16)}, \\ 0 & \text{em } (B(x_0, r/8))^C. \end{cases} \tag{1.6}$$

[5] Ver Apêndice B, Teorema B.23.

E argumentando como antes, considerando o problema

$$\begin{cases} \Delta(\psi_3 v_k) &= h_{3_k} \text{ em } B(x_0, r/8), \\ \psi_3 v_k &= 0 \text{ em } \partial B(x_0, r/8). \end{cases} \tag{$P_{3k}$}$$

onde $h_{3_k} = 2\nabla v_k \nabla \psi_3 + q_{3k}$ é limitado em $L^q(B(x_0, r/8))$, temos

$$\psi_3 v_k \in W^{2,q}(B(x_0, r/8)) \text{ e } \|\psi_3 v_k\|_{2,q,r/8} \leq \tilde{C}\|h_{3_k}\|_{q,r/8} \leq C.$$

Portanto, $v_k$ é limitado em $W^{2,q}(B(x_0, r/16))$.

Para $N = 2^*$, temos $q \geq 2^*$ arbitrário. Daí, tomando $q$ de maneira que $N < q$, obtemos, por Imersões de Sobolev

$$W^{2,q}(B(x_0, r/16)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/16))}.$$

Logo, $v_k \in C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/16))}$ é limitado.

Se $N > 2^*$ temos para $q = \frac{2N}{N-4} > N$, $(N = 5)$ e consequentemente

$$W^{2,q}(B(x_0, r/16)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/16))}.$$

Daí, $v_k \in C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r/16))}$.

Continuando com este raciocínio, com um número finito de passos, fixado uma dimensão $N$, obtemos $r_1 > 0$ e $q_1 > 0$, tais que

$$W^{2,q_1}(B(x_0, r_1)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r_1))}$$

para $q_1 > N/(1-\alpha)$.

Assim, $v_k$ é limitado em $C^{1,\alpha}\overline{(B(x_0, r_1))}$. Portanto, a menos de subsequências, $\nabla v_k \in C^{0,\alpha}\overline{(B(x_0, r_1))}$, para $k$ fixado.

Seja $\tilde{\psi} \in C^\infty$ uma função, tal que,

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} 1 & \text{em } \overline{B(x_0, r_1/2)}, \\ 0 & \text{em } (B(x_0, r_1))^C. \end{cases}$$

Então

$$\Delta(\tilde{\psi} v_k) = 2\nabla v_k \nabla \tilde{\psi} + \hat{q}_k, \tag{1.7}$$

com $\hat{q}_k = v_k \Delta \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \Delta v_k$. Como o lado direito da equação (1.7) converge pontualmente em $C^{0,\alpha}(\overline{B(x_0, r_1)})$, do Teorema B.20, temos que $\tilde{\psi} v_k$ converge em $C^{2,\alpha}(\overline{B(x_0, r_1)})$, pois $(\tilde{\psi}v_k) \in C^2(\Omega)$ e $[2\nabla v_k \nabla\tilde{\psi} + \hat{q}_k]$ é limitado em $C^\alpha(\overline{B(x_0, r_1)})$ e pelo Teorema das estimativas interiores obtemos,

$$\|v_k\|_{2,\alpha,B(x_0,r_1/2)} \leq K\left(\|\tilde{\psi}v_k\|_{\infty,B(x_0,r_1)} + \|2\nabla v_k \nabla\tilde{\psi} + \hat{q}_k\|_{\alpha,B(x_0,r_1)}\right).$$

Sendo $v_k$ uma sequência de funções contínuas que converge monotonicamente para a função contínua $v$ em $(\overline{B(x_0, r_1/2)})$, obtemos $v_k$ convergindo uniformemente em $C^{2,\alpha}(\overline{B(x_0, r_1/2)})$. Desde que

$$C^{2,\alpha}(\overline{B(x_0, r_1/2)}) \hookrightarrow C^2(\overline{B(x_0, r_1/2)}).$$

Segue que $v \in C^2(\overline{B(x_0, r_1/2)}$, e como $x_0 \in \Omega$ arbitrário, temos que $v \in C^2(\Omega)$ é solução de $(P_g)$. ■

**Teorema 1.3** *Seja $f$ uma função satisfazendo a condição $(F)$ e $p$ satisfazendo $(P_0)$. Suponha que $g \in C(\partial\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$.Se $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são respectivamente sub e supersolução de $(P_g)$ tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\Omega$, então $(P_g)$ possui uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.*

**Prova.** Considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} \Delta u - \lambda u &= p(x)f(\underline{u}) - \lambda\underline{u} \text{ em } \Omega; \\ u &= g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$A_1$}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, escolhido convenientemente, de modo que a função

$$h(t) = p(x)f(t) - \lambda t$$

seja não crescente em $t \in [M_1, M_2]$, para $M_1 = \min_{\overline{\Omega}} \overline{u}$ e $M_2 = \max_{\overline{\Omega}} \underline{u}$.
Observe que, $h$ dada por

$$h(\underline{u}) = p(x)f(\underline{u}) - \lambda\underline{u},$$

é uma função Hölder contínua em $\overline{\Omega}$ e uniforme em $x$.
Sendo $(A_1)$ um problema linear, existe única $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, solução[6] de $(A_1)$. Assim,

$$\begin{cases} \Delta u_1 - \lambda u_1 &= p(x)f(\underline{u}) - \lambda\underline{u} \text{ em } \Omega; \\ u_1 &= g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$*$}$$

[6]Ver Apêndice B, Teorema B.21.

**Afirmação 1.4** *$\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.*

De fato, desde que $h$ é monótona

$$\begin{cases} \Delta u_1 - \lambda u_1 & = & p(x)f(\underline{u}) - \lambda \underline{u} \\ & \geq & p(x)f(\overline{u}) - \lambda \overline{u} \\ & \geq & \Delta \overline{u} - \lambda \overline{u} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_1 & \leq & \overline{u} \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

do Teorema B.22 obtemos,

$$u_1 \leq \overline{u} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}. \tag{1.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} \Delta u_1 - \lambda u_1 & \stackrel{(*)}{=} & p(x)f(\underline{u}) - \lambda \underline{u} \leq \Delta \underline{u} - \lambda \underline{u} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_1 & \geq & \underline{u} \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Novamente, do Teorema B.22,

$$\underline{u} \leq u_1 \ \text{ em } \ \overline{\Omega}. \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) segue a afirmação acima.

Agora, defina

$$\begin{cases} \Delta u - \lambda u & = & p(x)f(u_1) - \lambda u_1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u & = & g \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{$A_2$}$$

Outra vez, usando o Teorema B.21, temos que $u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução única de $(A_2)$, daí

$$\begin{cases} \Delta u_2 - \lambda u_2 & = & p(x)f(u_1) - \lambda u_1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_2 & = & g \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{$**$}$$

**Afirmação 1.5** *$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.*

Com efeito, desde que $\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}$, segue da monotonicidade de $h$ que

$$\begin{cases} \Delta u_2 - \lambda u_2 & \stackrel{(**)}{=} & p(x)f(u_1) - \lambda u_1 \geq p(x)f(\overline{u}) - \lambda \overline{u} \\ & \geq & \Delta \overline{u} - \lambda \overline{u} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u_2 & \leq & \overline{u} \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto,

$$u_2 \leq \overline{u} \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{1.10}$$

Além disso,

$$\begin{cases} \Delta u_2 - \lambda u_2 & \stackrel{(**)}{=} & p(x)f(u_1) - \lambda u_1 \leq p(x)f(\underline{u}) - \lambda \underline{u} \\ & \stackrel{(*)}{\leq} & \Delta u_1 - \lambda u_1 \text{ em } \Omega, \\ u_2 & = & u_1 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e pelo Teorema B.22, concluímos que

$$u_1 \leq u_2 \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{1.11}$$

De (1.10),(1.11) e da afirmação anterior, obtemos o resultado desejado.

Seja

$$\begin{cases} \Delta u - \lambda u & = & p(x)f(u_2) - \lambda u_2 \text{ em } \Omega, \\ u & = & g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$A_3$}$$

Sabemos que existe única solução de $(A_3)$, $u_3 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_3 - \lambda u_3 & = & p(x)f(u_2) - \lambda u_2 \text{ em } \Omega; \\ u_3 & = & g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$***$}$$

**Afirmação 1.6** $\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \overline{u}$ *em* $\overline{\Omega}$.

Pela Afirmação 1.5 e a monotonicidade da função $h$, temos

$$\begin{cases} \Delta u_3 - \lambda u_3 & \stackrel{(***)}{=} & p(x)f(u_2) - \lambda u_2 \geq p(x)f(\overline{u}) - \lambda \overline{u} \\ & \geq & \Delta \overline{u} - \lambda \overline{u} \text{ em } \Omega, \\ u_3 & \leq & \overline{u} \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$u_3 \leq \overline{u} \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{1.12}$$

E também,

$$\begin{cases} \Delta u_3 - \lambda u_3 & \stackrel{(***)}{=} & p(x)f(u_2) - \lambda u_2 \leq p(x)f(u_1) - \lambda u_1 \\ & \stackrel{(**)}{\geq} & \Delta u_2 - \lambda u_2 \text{ em } \Omega, \\ u_3 & = & u_2 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

Daí, aplicando o Teorema B.22, obtemos

$$u_2 \leq u_3 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}. \tag{1.13}$$

De (1.12), (1.13) e da Afirmação 1.5 obtemos o resultado.

Interando este procedimento, encontramos uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u_n - \lambda u_n &= p(x)f(u_{n-1}) - \lambda u_{n-1} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_n &= g \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$A_n$}$$

com

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \ldots \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Assim, construímos uma sequência crescente e limitada, consequentemente, pontualmente convergente.

Seja $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$, do lema anterior concluímos que

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Por fim, fazendo $n \to \infty$ em $(A_n)$, obtemos que $u$ é uma solução de $(P_g)$, satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. ■

## 1.2 Sub e supersolução para $\Omega = \mathbb{R}^N$

Na presente seção, iremos mostrar um resultado de Sub e Supersolução, para $\Omega = \mathbb{R}^N$.

**Teorema 1.7** *Suponha que $\overline{u}$ é supersolução de*

$$\begin{cases} \Delta u &= p(x)f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \\ u &\geq 0, u \neq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{$P_2$}$$

*onde $p(x)f(u)$ é uma função localmente Hölder contínua em $x \in \mathbb{R}^N$ e localmente lipschitz em $u$.*

*Se $\underline{u}$ é subsolução de $(P_2)$ com $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\mathbb{R}^N$. Então, $(P_2)$ possui uma solução $u \in \mathbb{R}^N$ com $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\mathbb{R}^N$.*

**Prova.** Seja $B_R$ uma bola centrada na origem, com raio $R > 0$. Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u &= p(x)f(u) \;\text{ em }\; B_R, \\ u &\geq 0,\; u \neq 0 \;\text{ em }\; B_R, \\ u &= \varphi \;\text{ em }\; \partial B_R, \end{cases} \tag{$P_2'$}$$

onde $\varphi : \partial B_R \longrightarrow (0, \infty)$ é contínua.

Como $B_R \subset \mathbb{R}^N$, temos para $(P_2')$, que $\overline{u}$ é uma supersolução (para cada $R$) e $\underline{u}$ é uma subsolução (para cada $R$) com $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $B_R$.

Do teorema anterior, decorre que para cada $R$, existe $u_R$, solução de $(P_2')$, tal que, $u_R \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$, com $\underline{u} \leq u_R \leq \overline{u}$ em $\overline{B}_R$.

Fixemos os inteiros $R_1, R_2$, com $R_1 < R_2$, tal que, para cada inteiro $n > R_2$, obtemos $u^n \in C^2(B_n) \cap C(\overline{B}_n)$, satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u^n &= p(x)f(u^n) \;\text{ em }\; B_n, \\ u^n &= \varphi \;\text{ em }\; \partial B_n, \end{cases}$$

e

$$\underline{u} \leq u^n \leq \overline{u} \;\text{ em }\; \overline{B}_n.$$

Portanto

$$\begin{cases} \Delta u^n = p(x)f(u^n) \;\text{ em }\; B_{R_2}, \\ \underline{u} \leq u^n \leq \overline{u} \;\text{ em }\; \overline{B}_{R_2}. \end{cases} \tag{$P_{2n}'$}$$

Desde que, $pf \in C^{0,\alpha}_{loc}(B_n), B_n$ é um domínio de $\mathbb{R}^N, u^n \in C^2(B_n)$ e $B_{R_1}, B_{R_2} \subset B_n$, com $\overline{B}_{R_1} \subset B_{R_2}$ e $\overline{B_{R_2}} \subset B_n$, com $\overline{B}_{R_2}$ compacto, temos, pelo Teorema B.20[7], que

$$u^n \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{B}_{R_1}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\begin{aligned} \|u^n\|_{2,\alpha,B_{R_1}} &\leq M\left\{\|u^n\|_{\infty,B_{R_2}} + \|p(\cdot)f(u^n(\cdot))\|_{0,\alpha,B_{R_2}}\right\} \\ &\leq M(R_1, R_2) \\ &\leq M_{R_1}. \end{aligned}$$

[7] Ver Apêndice B, Teorema da Estimativa interior.

Em resumo, fazendo $R_1 = 1, 2, 3, \ldots$ encontramos $M_1, M_2, M_3, \ldots$ tais que

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_{2,\alpha,B_1} &\leq M_1, \quad n \geq 2 \\
\|u^n\|_{2,\alpha,B_2} &\leq M_2, \quad n \geq 3 \\
\|u^n\|_{2,\alpha,B_3} &\leq M_3, \quad n \geq 4 \qquad (1.14) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\|u^n\|_{2,\alpha,B_{R_1}} \leq M_{R_1}, \quad n \geq R_1 + 1.$$

Agora, para cada inteiro $i \geq 1$, defina

$$u_i^n = u^n\big|_{B_i}, \quad n \geq i+1.$$

Temos, $B_i \subset B_{i+1}$ e que $\{u_{i+1}^n\}_{n=i+2}^{\infty}$ é uma subsequência de $\{u_{i+1}^n\}_{n=i+1}^{\infty}$. De (1.14) e usando a imersão compacta,

$$C^{2,\alpha}(\overline{B}_i) \hookrightarrow C^2(\overline{B}_i); \quad i = 1, 2 \ldots$$

obtemos, $u_i \in C^2(\overline{B_i})$; $\;i = 1, 2 \ldots$ tais que, a menos de subsequências,

$$\begin{aligned}
u_1^2, u_1^3, u_1^4, \ \ldots &\overset{C^2(\overline{B}_1)}{\longrightarrow} u_1, \\
u_2^3, u_2^4, u_2^5, \ \ldots &\overset{C^2(\overline{B}_2)}{\longrightarrow} u_2, \\
u_3^4, u_3^5, u_3^6, \ \ldots &\overset{C^2(\overline{B}_3)}{\longrightarrow} u_3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

com $u_{i+1}\big|_{B_i} = u_i$.

Definindo

$$u(x) = u_i(x) \ \text{ para } \ x \in B_i,$$

temos $u \in C^2$. Além disso, a sequência

$$U_n = u_n^{2n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

isto é, a sequência diagonal

$$\{u_2^4, u_3^6, u_4^8, u_5^{10}, \ldots, u_n^{2n}, \ldots\} \ \text{ com } \ n = 2, 3, \ldots$$

verifica

$$U_n \overset{n}{\longrightarrow} u \ \text{ em } \ C^2(\overline{B}_{R_1}),$$

para cada inteiro $R \geq 1$.

Assim, de $(P'_{2n})$ e usando o fato que $B_{R_1} \subset B_{R_2}$, temos

$$\begin{cases} \Delta U_n = p(x)f(U_n) \quad \text{em} \quad B_{R_1}, \\ \underline{u} \leq U_n \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \overline{B}_{R_1}. \end{cases}$$

Finalmente, fazendo $n \to \infty$, obtemos $u \in C^2(B_{R_1})$. Desde que $R_1$ é arbitrário, concluímos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é solução de $(P_2)$, com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\mathbb{R}^N$. ■

# Capítulo 2

# Problemas Semilineares sob a condição de Keller-Osserman

Neste capítulo apresentaremos resultados devido a Cîrstea & Radulescu [6], sobre a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \qquad (P)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio regular limitado (ou ilimitado) com fronteira compacta ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. As funções $p$ e $f$ satisfazem as condições $(P_0)$ e $(F)$, respectivamente.

Veremos, que sob certas condições o problema $(P)$ possui *Solução Blow-up*, conforme definição abaixo:

**Definição 2.1 (Solução Blow-up)** *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é uma Solução Blow-up de $(P)$ se:*

- *$u(x) \to \infty$ quando $dist(x, \partial\Omega) \to 0$, para $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.*
- *$u(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, para $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

Para a existência de solução blow-up do problema $(P)$, veremos que uma hipótese fundamental é

$$\int_1^{\infty} [2F(t)]^{-1/2} dt < \infty \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds, \tag{$KO$}$$

conhecida como Condição de **Keller-Osserman**.

Podemos citar, como exemplo de funções que satisfazem a condição acima, as funções

- $f(t) = t^p, \quad p > 1, \quad t > 0,$
- $f(t) = e^t, \quad t > 0.$

## 2.1 O Laplaciano para Funções Radiais

Seja $v$ uma função regular, radialmente simétrica, isto é, $v(x) = v(|x|)$ onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Considere $r := |x|$ e observe que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = v'(r)\ \frac{x_i}{r} \text{ com } i = 1, 2, \ldots, N$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v'(r)\ \frac{x_i}{r}\right) \\ &= v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{r^2 - x_i^2}{r}/r^2\right) \\ &= v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^3}\right) \quad \forall \ \ i = 1, 2, \ldots N. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \left[ v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^3}\right) \right] = v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r),$$

assim,

$$\Delta v = v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r).$$

## 2.2 Um Problema Auxiliar

A partir de agora, mostraremos um resultado que nos auxiliará na demonstração do problema $(P)$, para tanto, considere a equação

$$\Delta v = \phi(r) \ \text{ em } \ A(\underline{r}, \overline{r}) = \{x \in \mathbb{R}^N, \underline{r} < |x| < \overline{r}\}, \tag{$P_\phi$}$$

onde

$$\underline{r} = \inf\{\tau > 0;\ \partial B(0,\tau) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset\}, \quad \overline{r} = \sup\{\tau > 0;\ \partial B(0,\tau) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset\} \ \text{ e}$$

$$\phi(r) = \max_{|x|=r} p(x) \ \text{ para } \ r \in [\underline{r}, \overline{r}].$$

Desde que o operador laplaciano é invariante por translações, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \notin \Omega$.

Observe que

$$v(r) = 1 + \int_{\underline{r}}^{r} \left( t^{1-N} \int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds \right) dt,\ r \in [\underline{r}, \overline{r}] \tag{2.2}$$

satisfaz a equação $(P_\phi)$.

De fato, derivando (2.2) com relação $r = |x|$,, obtemos

$$v'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds,$$

implicando que

$$r^{N-1}v'(r) = \int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds.$$

Derivando novamente, temos

$$(r^{N-1}v'(r))' = r^{N-1}\phi(r), \quad r \in [\underline{r}, \overline{r}]. \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (r^{N-1}v'(r))' &= (N-1)r^{N-2}v'(r) + r^{N-1}v''(r) \\ &= r^{N-1}\left[v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r)\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) decorre

$$v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = \phi(r),$$

ou seja,

$$\Delta v = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) = \phi(r).$$

**Proposição 2.2** *Seja $\Omega$ um domínio limitado. Assuma que $p$ satisfaz a condição $(P_0)$, $f$ satisfaz $(F)$ e $g : \partial\Omega \to (0, \infty)$ é contínua. Então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \Delta u = p(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, \quad u \neq 0 \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_g$}$$

*tem uma solução clássica única, a qual é positiva.*

**Prova.** Inicialmente, mostraremos que o problema acima possui uma subsolução e uma supersolução. Em seguida, aplicando o Teorema 1.3, encontraremos uma solução de $(P_g)$ e por fim, utilizando os princípios de máximo, concluíremos que tal solução é única.

**EXISTÊNCIA**

**Supersolução de** $(P_g)$

A função $\overline{u} = n$, para $n \in \mathbb{N}$ escolhido adequadamente, é uma supersolução para o problema $(P_g)$. De fato, sendo $f$ e $p$ funções não negativas em $\Omega$, temos que

$$\Delta\overline{u} = 0 \leq p(x)f(\overline{u}). \tag{2.5}$$

Além disso, $g \in C(\partial\Omega)$ e $\partial\Omega$ é um conjunto compacto. Logo, existe $K > 0$, tal que $|g(x)| \leq K$, para todo $x \in \partial\Omega$, de onde escolhemos $n \geq K$ e obtemos

$$\overline{u}(x) = n \geq g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.6}$$

Por (2.5) e (2.6), concluímos que $\overline{u} = n$ é supersolução do problema $(P_g)$.

**Subsolução de** $(P_g)$

As hipóteses sobre f e g implicam:

(i) $g_0 = \min_{\partial\Omega} g > 0$.

De fato, sendo $g$ contínua na fronteira (conjunto compacto), $g$ assume um mínimo positivo em $\partial\Omega$. Seja $g_0$ tal número.

(ii) $\lim_{z\to 0^+} \int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} = \infty$.

Com efeito, como $f \in C^1([0,\infty))$ e $f' \geq 0$, então, existe $M > 0$, tal que

$$0 \leq f'(t) \leq M, \quad \forall \quad t \in [z, g_0] \subset [0, \infty).$$

O que implica

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{f'(t)}, \quad \text{se} \quad f'(t) \neq 0. \tag{2.7}$$

(.) Se $f$ é constante em $[z, g_0]$, temos

$$\int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} = \int_z^{g_0} \frac{dt}{f(z)} = \frac{1}{f(z)}(g_0 - z) \overset{z \to 0^+}{\longrightarrow} \infty.$$

(..) Se $f$ não é constante, existe $t_0 \in [z, g_0]$, tal que $f'(t_0) \neq 0$. Assim, obtemos $[z_0, z_1]$, com $t_0 \in [z_0, z_1]$, tal que $f'(t) \neq 0, \quad \forall \quad t \in [z_0, z_1] \subset [z, g_0]$.

Daí,

$$\int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \int_{z_0}^{z_1} \frac{dt}{f(t)} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{f'(t)dt}{f'(t)f(t)}. \tag{2.8}$$

Por (2.7) e (2.8),

$$\int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \frac{1}{M}[\ln f(z_1) - \ln f(z_0)].$$

Note que, se $z_0 \to 0^+$, então $z \to 0^+$, visto que, $0 < z \leq z_0 \leq z_1 \leq g_0$. Portanto,

$$\lim_{z \to 0^+} \int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \lim_{z_0 \to 0^+} \left[ \frac{1}{M}(\ln f(z_1) - \ln f(z_0)) \right] = \infty$$

ou seja,

$$\lim_{z \to 0^+} \int_z^{g_0} \frac{dt}{f(t)} = \infty.$$

Como (ii) ocorre, existe[1] $c > 0$, tal que

$$\int_c^{g_0} \frac{dt}{f(t)} = K = \max_{\partial\Omega} v. \tag{2.9}$$

Agora, defina $\underline{u}$ implicitamente por

$$v(x) = \int_c^{\underline{u}(x)} \frac{dt}{f(t)}, \quad x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Decorre de (2.9), (2.10) e do príncipio de máximo que

$$\int_c^{g_0} \frac{dt}{f(t)} \geq \int_c^{\underline{u}(x)} \frac{dt}{f(t)}.$$

[1]Considere $h(b) = \displaystyle\int_b^{g_0} \frac{dt}{f(t)}$ e observe que $\lim_{b \to 0^+} h(b) = \infty$ e $\lim_{b \to g_0^-} h(b) = 0$, assim, pelo teorema do Valor Intermediário, existe um $c > 0$, tal que $h(c) = K$.

Logo,

$$g_0 \geq \underline{u}(x),$$

já que $f$ é não negativa. Daí,

$$g(x) \geq \min_{\partial\Omega} g(x) = g_0(x) \geq \underline{u}(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.11}$$

Além disso,

$$\Delta v = \phi(r) = \max_{|x|=r} p(x) \geq p(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.12}$$

Por (2.10), deduzimos que

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{f(\underline{u}(x))} \frac{\partial(\underline{u}(x))}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{f(\underline{u}(x))} \frac{\partial(\underline{u}(x))}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial^2(\underline{u}(x))}{\partial {x_i}^2} \frac{1}{f(\underline{u}(x))} + \left(\frac{1}{f}\right)'(\underline{u}(x))\left(\frac{\partial \underline{u}(x)}{\partial x_i}\right)^2.$$

Portanto,

$$\Delta v = \Delta\overline{u}(x)\frac{1}{f(\underline{u}(x))} - \frac{f'(\underline{u}(x))}{f(\underline{u}(x))^2}|\nabla \underline{u}(x)|^2$$

e

$$\Delta v \leq \Delta\underline{u}(x)\frac{1}{f(\underline{u}(x))}.$$

Usando (2.12) e (2.11),

$$\begin{cases} \Delta\underline{u}(x) & \geq & \Delta v f(\underline{u}(x)) \geq p(x)f(\underline{u}(x)) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \underline{u}(x) & \leq & g(x) \;\text{ em }\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, vamos mostrar que $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para concluirmos que $\underline{u}$ é uma supersolução de $(P_g)$.

Desde que $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x, y \in \overline{\Omega};\; \|x - y\| < \delta \;\text{ temos }\; |v(x) - v(y)| \leq \frac{\epsilon}{T}, \tag{2.13}$$

onde $T = \max_{t\in[c,g_0]} f(t)$ com $g_0 = \max_{\partial\Omega} g$. Segue que

$$|v(x) - v(y)| = \Big|\int_c^{\underline{u}(x)} \frac{dt}{f(t)} - \int_c^{\underline{u}(y)} \frac{dt}{f(t)}\Big| = \Big|\int_{\underline{u}(y)}^{\underline{u}(x)} \frac{dt}{f(t)}\Big|. \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14), obtemos

$$\frac{\epsilon}{T} \geq |v(x) - v(y)| \geq \frac{1}{T}\Big|\int_{\underline{u}(y)}^{\underline{u}(x)} dt\Big| \geq \frac{1}{T}|\underline{u}(x) - \underline{u}(y)|.$$

Portanto, para quaisquer $x, y \in \overline{\Omega}$, vale

$$|\underline{u}(x) - \underline{u}(y)| < \epsilon, \quad \text{sempre que} \quad \|x - y\| < \delta, \quad \text{ou seja,} \quad \underline{u} \in C(\overline{\Omega}).$$

Segue da regularidade de $f$ e $v$ que $\underline{u} \in C^2(\Omega)$. De fato,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{f(\underline{u}(x))}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}(x), \quad x \in \Omega \;\text{ e }\; i = 1, 2, \ldots N.$$

Logo

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) f(\underline{u}(x)) \in C(\Omega).$$

Implicando que

$$\underline{u} \in C^1(\Omega).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(x) f(\underline{u}(x)) + \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}(x) f'(\underline{u}(x)) \in C(\Omega).$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_j \partial x_i} \in C(\Omega),$$

e consequentemente $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de $(P_g)$, satisfazendo

$$\underline{u} \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso, $p(x)f(u)$ é uma função Hölder contínua em $\Omega$ com $(x, u) \in \overline{\Omega} \times [0, \infty)$. De fato, sendo $p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $0 < \alpha < 1$ e $f$ de classe $C^1[0, \infty)$, segue que

$$\begin{aligned} |p(x)f(u) - p(y)f(u)| &\leq |f(u)||p(x) - p(y)| \\ &\leq C_1 C_2 |x - y|^{\alpha} \\ &\leq C|x - y|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.3, concluímos que $(P_g)$ tem uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, verificando $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\Omega$.

**UNICIDADE**

Sejam $u_1$ e $u_2$ soluções arbitrárias de $(P_g)$. Mostraremos que $u_1 \geq u_2$.

Suponhamos, por contradição, que existe $x_0 \in \Omega$, tal que $u_1(x_0) < u_2(x_0)$.

Considere

$$\omega = \{x \in \Omega;\ u_1 < u_2\} \neq \emptyset.$$

Sendo $f$ não decrescente e $f(0) = 0$, temos $f(u_1(x)) - f(u_2(x)) \leq 0$. Daí, obtemos

$$\Delta\tilde{u} = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = p(x)(f(u_1(x)) - f(u_2(x))) \leq 0,$$

implicando que a função $\tilde{u} = u_1 - u_2 < 0$, satisfaz

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} & < & 0 \text{ em } \omega, \\ \tilde{u} & = & 0 \text{ em } \partial\omega. \end{cases}$$

Logo, $\tilde{u}$ é uma função superharmônica[2], que se anula na fronteira de $\omega$, já que

$$\partial\omega = \{x \in \Omega;\ u_1 = u_2\}.$$

Segue, do princípio do máximo[3], que

$$\tilde{u} \geq \inf_{\omega} \tilde{u} = \inf_{\partial\omega} \tilde{u} = 0$$

Assim, $\tilde{u} = 0$ ou $\tilde{u} > 0$ em $\omega$.

Se $\tilde{u} = 0$ então $u_1 = u_2$ em $\omega$.

Se $\tilde{u} > 0$ então $u_1 > u_2$ em $\omega$, contrariando a hipótese de que, $u_1 < u_2$ em $\omega$. Portanto

$$u_1 \geq u_2 \text{ em } \Omega.$$

De maneira análoga, prova-se que

$$u_1 \leq u_2 \text{ em } \Omega.$$

De onde concluímos que o problema $(P_g)$ tem única solução $u$, positiva. ■

[2]Ver Apêndice B, Definição B.4.

[3]Ver Apêndice B, Teorema B.18.

## 2.3 Lemas Técnicos

Nesta seção apresentaremos alguns lemas que serão utilizados na demonstração dos resultados posteriores do presente Capítulo.

**Lema 2.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(F)$ e $(KO)$. Suponha que $u$ é a única solução de*

$$\Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

*onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com $N \geq 3$.*
*Então existe uma função não-crescente $\mu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que*

$$u(x) \leq \mu((R(x)), \tag{2.15}$$

*onde $R(x) = dist(x, \partial\Omega), \quad x \in \Omega$.*
*A função $\mu(R)$ tem os seguintes limites*

$$\mu(R) \longrightarrow \infty \qquad \text{quando} \qquad R \rightarrow 0, \tag{2.16}$$

$$\mu(R) \longrightarrow -\infty \qquad \text{quando} \qquad R \rightarrow \infty. \tag{2.17}$$

**Prova.** Observe que cada $x \in \Omega$ é centro de uma bola de raio $R = R(x) > 0$, inteiramente contida em $\Omega$. Por translação, vamos considerar $x$ como sendo a origem. Agora, suponha que $u$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \;\; \text{em} \;\; B(0,R), \\ u &= \alpha \;\; \text{em} \;\; \partial B(0,R), \end{cases} \tag{$B_1'$}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva.

A existência e a unicidade da solução $u$, é assegurada pela Proposição 2.2, além disso, $u$ cresce com $\alpha$, ou seja,

$$\text{se } \alpha_1 < \alpha_2, \text{ então } u_{\alpha_1} < u_{\alpha_2}.$$

Agora, defina a função $\mu(R)$ por

$$\mu(R(x)) = \lim_{\alpha \to \infty} (u_\alpha(x)) \tag{2.18}$$

isto é,

$$u_{\alpha_1}(x) \leq u_{\alpha_2}(x) \leq \ldots \leq u_{\alpha_n}(x) \longrightarrow \mu(R_x) \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para todo $\alpha$,

$$u = u_\alpha \leq \mu(R).$$

Continuando a demostração, mostraremos que $\mu(R)$ é finito. Antes porém, afirmamos que $u$ é uma função radial, pois caso contrário, obteríamos diferentes soluções para $(B_1')$, contrariando a unicidade[4].

Sendo $u$ solução radial, segue que

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) &= f(u) \text{ em } B(0,R), \quad (2.19)\\ u'(0) &= 0, \quad (2.20)\\ u(R) &= \alpha \text{ em } \partial B(0,R). \quad (2.21) \end{aligned}$$

A igualdade (2.20) é consequência da regularidade de $u$ em $r = 0$, pois

$$u'(r) = r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds,$$

daí,

$$\lim_{r\to 0} u'(r) = u'(0). \quad (2.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} u'(r) &= \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds}{r^{N-1}}\\ &\overset{*1}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^{N-1}f(u(r))}{(N-1)r^{N-2}}\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{rf(u(r))}{(N-1)} = 0, \end{aligned}$$

usamos a regra de L'Hôpital em $(*1)$ e concluímos que

$$u'(0) = 0.$$

Todo número real $\alpha$ é unicamente determinado por $u_\alpha(0) = u(0)$, o qual determina uma sequência monótona que cresce com $\alpha$. Isto nos permite substituir (2.21) por

$$u(0) = u_0.$$

De fato, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe única solução $u_\alpha$ de $(B_1')$, onde $u_\alpha(0) = u_0$. Se existe uma $\tilde{u}$ satisfazendo a equação em $(B_1')$ e $\tilde{u}(0) = u_0$, então

$$\tilde{u}(R) = \alpha = u_\alpha(R).$$

[4]Ver observação 2.1.

Pois caso contrário, se $\tilde{u}(R) \neq u_\alpha(R)$, por exemplo, supondo

$$\tilde{u}(R) = \tilde{\alpha} < \alpha = u_\alpha(R),$$

obtemos,

$$u_0 = \tilde{u}(0) = u_{\tilde{\alpha}}(0) < u_\alpha(0) = u_0.$$

O que é absurdo. Portanto, podemos substituir a condição de fronteira $u(R) = \alpha$ pela condição inicial $u(0) = u_0$.

É conveniente reescrevermos (2.19) na forma

$$(r^{N-1}u'(r))' = r^{N-1}f(u). \tag{2.23}$$

Integrando (2.23) de 0 a $r$ temos

$$u'(r) = r^{1-N}\int_0^r x^{N-1}f[u(x)]dx.$$

Daí, observamos que $u' \geq 0$. Portanto, $u$ é uma função não decrescente. Além disso,

$$u'(r) \leq r^{1-N}f[u(r)]\int_0^r x^{N-1}dx = \frac{r}{N}f[u(r)]. \tag{2.24}$$

Inserido (2.24) em (2.19), temos

$$u''(r) = f(u(r)) + \left(\frac{1-N}{r}\right)u'(r) \geq f(u(r)) + \left(\frac{1-N}{N}\right)f(u(r)) = \frac{1}{N}f(u(r))$$

Portanto,

$$u''(r) \geq \frac{f[u(r)]}{N}. \tag{2.25}$$

Também,

$$u''(r) = f[u(r)] - u'(r)\frac{N-1}{r} \leq f[u(r)]$$

já que $u'(r) \geq 0$. Combinando com (2.25) deduzimos

$$f[u(r)] \geq u''(r) \geq \frac{f[u(r)]}{N}. \tag{2.26}$$

Multiplicando (2.26) por $u'(r)$, temos

$$f[u(r)]u'(r) \geq u''(r)u'(r) \geq \frac{f[u(r)]}{N}u'(r). \tag{2.27}$$

Integrando (2.27) de 0 a $r$, fazendo uma mudança de variável obtemos

$$\int_{u_0}^{u(r)} f(z)dz \geq \int_{u'(0)}^{u'(r)} s\ ds \geq \frac{1}{N}\int_{u_0}^{u(r)} f(z)dz.$$

Fazendo $H(u(r), u_0) = 2\int_{u_0}^{u(r)} f(z)dz$, ficamos com

$$H(u(r), u_0) \geq (u'(r))^2 \geq \frac{1}{N} H(u(r), u_0). \tag{2.28}$$

Extraindo a raiz quadrada de cada termo em (2.28) e tomando o inverso, temos

$$[H(u(r), u_0)]^{-1/2} \leq [u'(r)]^{-1} \leq \sqrt{N}[H(u(r), u_0)]^{-1/2}.$$

Multiplicando a inequação acima por $u'(r)$, fazendo $z = u(r)$ e integrando de 0 a $r$, deduzimos que

$$\int_{u_0}^{u(r)} H^{-1/2}(z, u_0)dz \leq r \leq \sqrt{N} \int_{u_0}^{u(r)} H^{-1/2}(z, u_0)dz. \tag{2.29}$$

Observamos que a integral em (2.29) converge para qualquer valor positivo de $u_0$, de onde segue que

$$R(u_0) \leq r \leq \sqrt{N} R(u_0), \tag{2.30}$$

onde

$$R(u_0) = \lim_{u \to \infty} \int_{u_0}^{u} H^{-1/2}(z, u_0)dz = \int_{u_0}^{\infty} H^{-1/2}(z, u_0)dz. \tag{2.31}$$

A função $R(u_0)$ é contínua e não crescente e satisfaz

$$\begin{aligned} R(u_0) &\to +\infty \text{ quando } u_0 \to -\infty \\ R(u_0) &\to 0 \text{ quando } u_0 \to +\infty. \end{aligned}$$

Agora, definimos $\mu(R)$ como o inverso de $R(u_0)$, isto é

$$\mu(R) = \{u_0 | R(u_0) = R\}.$$

Esta função é a função desejada $\mu(R)$ do Lema 2.2, a qual é decrescente e satisfaz (2.16) e (2.17). O que completa a prova do lema. ■

**Observação 2.1** *Se $u$ não é radialmente simétrica, então obtemos*

$$u(x) \neq u(y) := v(x), \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^N,$$

*onde $y = y(x)$ é obtido de $x$, pela rotação de um certo ângulo $\theta$.*

*Sendo o Laplaciano invariante por rotações obtemos*

$$\Delta u(x) = \Delta v(x),$$

*de onde segue que*

$$\begin{cases} \Delta v(x) &= h(v(x)) \text{ em } B(0,R), \\ v(x) &= \alpha \text{ em } \partial B(0,R), \end{cases} \tag{2.32}$$

*o que contraria a unicidade de solução.*

**Lema 2.2** *Assuma que as condições $(F)$ e $(KO)$ são satisfeitas. Então*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < \infty.$$

**Prova.** Fixado $R > 0$, considere $B = B(0,R)$. Segue da Proposição 2.2 que

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \text{ em } B, \\ u &\geq 0, \ u \neq 0 \text{ em } B, \\ u &= n \text{ em } \partial B, \end{cases} \tag{$P'_1$}$$

tem única solução positiva, $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando o princípio do máximo e o fato de $f$ ser não decrescente, mostraremos que $u_n$ cresce com $n$.

De fato, suponha, por contradição, que existe $x_0 \in B$ tal que $u_{n+1}(x_0) < u_n(x_0)$.

Considere $\omega = \{x \in B; u_{n+1}(x) < u_n(x)\} \neq \emptyset$. Da monotonicidade de $f$ temos $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ em $\omega$. Daí, para $w = u_{n+1} - u_n$ temos

$$\begin{cases} \Delta w = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n) \leq 0 \text{ em } \omega, \\ w = 0 \text{ em } \partial\omega. \end{cases}$$

Isto é, $w$ é uma função superharmônica em $\omega$. Logo

$$0 = \inf_{\partial\omega} w = \inf_{\omega} w \leq w < 0.$$

O que é um absurdo! Portanto $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$, para cada $x \in B$.

Prosseguindo, veremos que $u_n$ é uniformemente limitada em todo subdomínio compacto de $B$.

Com efeito, seja $K \subset B$ um compacto e $d = dist(K, \partial B)$. Então

$$0 < d \leq dist(x, \partial B) \ \ \forall \ \ x \in K. \tag{2.33}$$

Pelo Lema 2.1, existe uma função contínua, não crescente

$$\mu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad \text{tal que}$$

$$0 < u_n(x) \leq \mu\left(dist(x, \partial B)\right), \ \forall\, x \in K \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N}.$$

Logo, de (2.33) obtemos uma sequência $u_n$ com

$$0 \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \ldots \leq u_n(x) \leq \mu\left(dist(x, \partial B)\right) \leq \mu(d).$$

Mostrando que $u_n$ é uma sequência uniformemente limitada.
Como toda sequência monótona e limitada é convergente, para cada $x \in B$, defina

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x).$$

Agora mostraremos que $u$ é uma Solução Blow-up do problema

$$\Delta u = f(u) \ \text{ em } \ B. \tag{2.34}$$

Usando os mesmos argumentos do Lema 1.1, obtemos $u_n$ convergindo em $C^{2,\alpha}(\overline{B(x_0, r_1)})$, para algum $r_1 > 0$. Desde que $x_0 \in B$ é arbitrário, concluímos que $u \in C^2(B)$ é solução positiva de (2.34) e por Gidas-Ni-Niremberg[5] $u$ é uma solução radialmente simétrica em $B$. Neste caso, $u(x) = u(r), \ r = |x|$.
Assim,

$$\Delta u = u''(r) + u'(r)\frac{N-1}{r}.$$

Por (2.34) temos,

$$u''(r) + u'(r)\frac{N-1}{r} = f(u(r)), \quad 0 < r < R.$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira

$$(r^{N-1}u'(r))' = r^{N-1}f(u(r)), \quad 0 < r < R.$$

Integrando a equação acima no intervalo $(0, r)$, obtemos

$$\int_0^r (s^{N-1}u'(s))'ds = \int_0^r s^{N-1}f(u(s))ds, \qquad 0 < r < R.$$

[5]Ver Apêndice B, Teorema B.27.

Portanto

$$u'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds > 0, \qquad 0 < r < R,$$

mostrando que $u$ é uma função não decrescente. Logo, $u(s) \leq u(r)$, para todo $s \in (0, r)$ e da monotonicidade de $f$ temos

$$f(u(s)) \leq f(u(r)), \quad 0 < r < R.$$

Daí,

$$\begin{aligned} u'(r) &= r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u(r))ds \\ &\leq f(u(r)) r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} ds \\ &\leq f(u(r)) \, \frac{r}{N}, \qquad 0 < r < R. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Continuando, mostraremos que $u$ é uma solução Blow-up de (2.34), isto é,

$$u(r) \to \infty \ \text{ quando } \ r \nearrow R.$$

Suponha, por contradição, que existe $D > 0$, tal que

$$u(r) < D, \quad \text{quando} \quad 0 \leq r < R.$$

Fixe $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\lim_{r \nearrow R} u_{N_1}(r) = N_1 \geq 2D.$$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$R - r \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |u_{N_1}(r) - N_1| < \varepsilon$$

Fazendo $r_1 = R - \delta$, obtemos $r_1 = R - \delta \leq r < R$. Assim, $N_1 - \varepsilon \leq u_{N_1}(r) \leq N_1 + \varepsilon$, para todo $r \in [r_1, R)$. Escolha $0 < \varepsilon < D$, de modo que

$$u_{N_1}(r) \geq N_1 - \varepsilon > D,$$

obtemos

$$u_{N_1}(r) > D, \quad \forall \, r \in [r_1, R).$$

Desde que $u_n$ cresce com $n$, temos

$$D < u_{N_1}(r) \leq u_{N+1}(r) \leq \ldots \leq u_n(r) \leq u_{n+1}(r) \ \ldots \quad \forall \, n \geq N_1, \ \ \forall \, r \in [r_1, R).$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$u(r) \geq D, \quad \forall\, r \in [r_1, R).$$

O que contraria a nossa hipótese.

Voltando para a equação (2.35), temos

$$0 \leq \frac{u'(r)}{f(u(r))} \leq \frac{r}{N}.$$

Por integração, obtemos

$$\int_0^{u(r)} \frac{dt}{f(t)} = \int_0^r \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds \leq \int_0^r \frac{s}{N} ds,$$

onde $t = u(s)$ e $dt = u'(s)ds$.

Sendo $u$ solução do tipo blow-up, se $r \nearrow R$, então $u(r) \to \infty$, consequentemente

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \int_0^R \frac{s}{N} ds = \frac{s^2}{2N}\Big|_0^R = \frac{R^2}{2N}.$$

Portanto

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \frac{R^2}{2N} < \infty.$$

■

## 2.4 Resultados de Existência para Domínios Limitados

Antes de apresentarmos o resultado de existência, faremos a seguinte observação.

**Observação 2.2** *Se $p > 0$ em $\partial\Omega$, então*

*$(P_1)$ $\forall\, x_0 \in \Omega$ com $p(x_0) = 0$, existe um domínio $\Omega_0 \ni x_0$, tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $p > 0$ em $\partial\Omega_0$ é satisfeito.*

De fato, desde que $p$ é contínua e $\partial\Omega$ compacta, segue que existe um $\zeta > 0$, tal que

$$p(y) \geq \zeta > 0, \quad \text{para todo } y \in \partial\Omega.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon = \zeta/2$, existe $\delta > 0$, tal que para $x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega$,
com $\|x - y\| < \delta$, então

$$|p(x) - p(y)| < \varepsilon.$$

Assim,

$$p(x) > p(y) - \varepsilon > \zeta - \frac{\zeta}{2} > 0.$$

Portanto, $p > 0$ em $\Omega_\delta$, onde

$$\Omega_\delta = \{x \in \overline{\Omega}; \;\; dist(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

Logo, todos os zeros de $p$ estão incluídos em $\Omega_0 = \overline{\Omega} \backslash \Omega_\delta \subset\subset \Omega$ e como $p > 0$ em $\partial\Omega_0$, segue que $(p_1)$ é satisfeito.

**Teorema 2.3** *Supondo $\Omega$ um domínio limitado e $p$ satisfazendo $(P_1)$. Então, o problema $(P)$ tem Solução Blow-up positiva.*

**Prova.** Considere o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta v_n &= p(x)f(v_n) \;\text{ em }\; \Omega, \\ v_n &\geq 0 \;\text{ em }\; \Omega, \\ v_n &= n \;\text{ em }\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{$A_1'$}$$

Observe que $v_n$ é uma sequência monótona, que cresce com $n$, para $x \in \Omega$ fixado. Por outro lado, pela proposição 2.1, temos que o problema

$$\begin{cases} \Delta \xi &= \|p\|_\infty f(\xi) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \xi &> 0 \;\text{ em }\; \Omega, \\ \xi &= 1 \;\text{ em }\; \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução única e positiva.

Observe que $\xi \leq v_1$. De fato, pois do contrário, existe $x_0 \in \Omega$, tal que $v_1(x_0) < \xi(x_0)$ em $\Omega$. Com isso,

$$\begin{cases} \Delta(v_1 - \xi) &= p(x)f(v_1) - \|p\|_\infty f(\xi) \leq 0 \;\text{ em }\; \omega_1, \\ v_1 - \xi &= 0 \;\text{ em }\; \partial\omega_1, \end{cases}$$

onde $\omega_1 = \{x \in \Omega; v_1(x) < \xi(x)\} \neq \emptyset$.

Pelo princípio do máximo,

$$v_1 < \xi \leq v_1 \;\text{ em }\; \Omega.$$

O que é contradição.

Agora, observemos que

(A) Para todo $x_0 \in \Omega$, existe um conjunto aberto $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$ contendo $x_0$ e $M_0(x_0) = M_0 > 0$, tal que $v_n \leq M_0$ em $\mathcal{O}$, para todo $n \geq 1$.

Isso mostra que a sequência $\{v_n\}$ é uniformemente limitada em todo subconjunto compacto de $\Omega$.

Para mostrarmos (A) consideremos dois casos:

**Caso 1 -** $p(x_0) > 0$

Pela continuidade de $p$, existe uma bola $B = B(x_0, r) \subset\subset \Omega$, tal que

$$m_0 = \min_{\overline{B}} p(x) > 0.$$

Segue do Teorema B.26[6] que o problema

$$\begin{cases} \Delta w = m_0 f(w) \;\text{ em }\; B, \\ w(x) \to \infty \;\text{ quando }\; d(x, \partial B) \to 0, \end{cases}$$

tem solução $w$, clássica e positiva.

**Afirmação 2.4** *$v_n \leq w$ em $B$*

De fato, suponhamos, por contradição, que existe um $x_0 \in B$, tal que $w(x_0) < v_n(x_0)$, então

$$\Delta w - \Delta v_n = m_0 f(w) - p(x)f(v_n) \leq p(x)f(v_n) - p(x)f(v_n) = 0 \;\text{ em }\; \omega_2,$$

$$v_n = n < w \;\text{ em }\; \partial\omega_2,$$

assim,

$$\begin{cases} \Delta(v_n - w) > 0 \;\text{ em }\; \omega_2, \\ v_n - w = 0 \;\text{ em }\; \partial\omega_2, \end{cases}$$

onde $\omega_2 = \{x \in \Omega; w(x) < v_n(x)\} \neq \emptyset$.

Pelo princípio do máximo , segue-se que

$$0 < (v_n - w) < \max_{\overline{\omega_2}}(v_n - w) = \max_{\partial\omega_2}(v_n - w) = 0.$$

Absurdo!

[6] Ver Apêndice B.

Além disso, sendo $w$ solução clássica, obtemos $w$ limitada em $\overline{B(x_0, r/2)}$ e podemos definir o supremo de $w$ como $M_0 = \sup\limits_{\mathcal{O}} w$, onde $\mathcal{O} = B(x_0, r/2)$. Deduzimos da Afirmação 2.4, que

$$v_n \leq w(x) \leq M_0 \ \text{ em } \ \mathcal{O}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

**Caso 2 -** $p(x_0) = 0$

Nossa hipótese $(P_1)$ e a limitação de $\Omega$ implicam a existência de um domínio $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, contendo $x_0$, tal que $p > 0$ em $\partial\mathcal{O}$.

Como no caso anterior, segue que, para cada $x \in \partial\mathcal{O}$, existe uma bola $B(x, r_x)$, estritamente contida em $\Omega$ e uma constante $M_x > 0$, tal que $v_n \leq M_x$ em $B(x, r_x/2)$, para todo $n \geq 1$. Desde que $\partial\mathcal{O}$ é compacta, podemos cobri-lá com um número finito de bolas. Sejam,

$$B(x_i, r_{x_i}/2) \ \ i = 1, \ldots, K_0.$$

Considerando $M_0 = \max\{M_{x_1}, \ldots, M_{x_{k_0}}\}$, temos $v_n \leq M_0$ em $\partial\mathcal{O}$, para algum $n \geq 1$. Aplicando o princípio do máximo, obtemos $v_n \leq M_0$ em $\mathcal{O}$. Demonstrando (A).

Desta maneira,

$$0 < v_n \leq M_0 \ \text{ em } \ \Omega.$$

E definindo $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, segue do Lema 1.1 que $v$ é solução de (P).

Para concluir a prova do teorema, resta-nos mostrar

(B) $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} v(x) = \infty$.

Seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta z &=& p(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ z &\geq& 0, \ z \not\equiv 0 \text{ em } \ \Omega, \\ z &=& 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{$A_2'$}$$

Segue-se que $(A_2')$[7] tem solução única e positiva em $\Omega$.

Observe inicialmente, que para provarmos (B) é suficiente mostrarmos que

$$\int_{v(x)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq z(x), \quad \text{para todo } \ x \in \Omega, \tag{2.36}$$

[7] Ver Apêndice B, Teorema B.25 (Lax-Milgran).

pois, se $x \in \partial\Omega$, então $z = 0$. Logo

$$\int_{v(x)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} = 0 \;\Leftrightarrow\; v(x) = \infty, \text{ ou seja, } \lim_{x\to\partial\Omega} v(x) = \infty.$$

Sendo $v_n \geq 1$, segue do Lema 2.2 que

$$\int_{v(x)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} < \infty.$$

Daí, o lado esquerdo de (2.36) está bem definido em $\Omega$.

Desde que $v_n = n$ em $\partial\Omega$, fixado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 = n_1(\varepsilon)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} = \lim_{n\to\infty} \int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} = 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \quad \forall\, n \geq n_1,$$

mas como $z \geq 0$, temos

$$\int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq \varepsilon(1+R^2)^{-1/2} \leq z(x) + \varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2} \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \quad \forall\, n \geq n_1, \tag{2.37}$$

onde $R > 0$ é escolhido de modo que $\overline{\Omega} \subset B(0,R)$.

Para mostrarmos (2.36), basta provarmos que

$$\int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \leq z(x) + \varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2} \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, n \geq n_1. \tag{2.38}$$

Realmente, fazendo $n \to \infty$ em (2.38) deduzimos (2.36), já que $\varepsilon > 0$ é escolhido arbitrariamente. Assuma, por contradição, que (2.38) não é válido. Então

$$\int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} - z(x) - \varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2} > 0, \quad \text{para algum } x \in \Omega \; \text{ e algum } n \geq n_1,$$

daí,

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \left\{ \int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} - z(x) - \varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2} \right\} > 0.$$

De (2.37) deduzimos que o máximo é atingido no interior de $\Omega$. Seja $x_0$ tal ponto de máximo, temos

$$\begin{aligned}
0 \;&\geq\; \Delta\left( \int_{v_n}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} - z(x) - \varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2} \right)_{|x=x_0} \\
&= \left( \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left( \frac{1}{f(v_n)} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) - \Delta z(x) - \varepsilon\Delta(1+|x|^2)^{-1/2} \right)_{|x=x_0} \\
&= \left( -\frac{1}{f(v_n)}\Delta v_n - \left(\frac{1}{f}\right)'(v_n)|\nabla v_n|^2 - \Delta z(x) - \varepsilon\Delta(1+|x|^2)^{-1/2} \right)_{|x=x_0} \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Por $(A_1')$ e $(A_2')$,

$$\frac{1}{f(v_n)}\Delta v_n = p(x) \quad \text{e} \quad -\Delta z(x) = p(x). \tag{2.40}$$

De (2.39) e (2.40), temos

$$0 \geq \left(-p(x) - \left(\frac{1}{f}\right)'(v_n)|\nabla v_n|^2 + p(x) - \varepsilon\Delta(1+|x|^2)^{-1/2}\right)_{|x=x_0}. \tag{2.41}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\Delta(1+|x|^2)^{-1/2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2(1+|x|^2)^{-1/2}}{\partial {x_i}^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-(1+|x|^2)^{-3/2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\
&= \left(3(1+|x|^2)^{-5/2}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n(1+|x|^2)^{-3/2} \\
&= 3(1+|x|^2)^{-5/2}|x|^2 - n(1+|x|^2)^{-3/2} \\
&= 3(1+|x|^2)^{-5/2}|x|^2 + 3(1+|x|^2)^{-5/2} - n(1+|x|^2)^{-3/2} - 3(1+|x|^2)^{-5/2} \\
&= 3(1+|x|^2)^{-5/2}(|x|^2+1) - n(1+|x|^2)^{-3/2} - 3(1+|x|^2)^{-5/2} \\
&= (3-n)(1+|x|^2)^{-3/2} - 3(1+|x|^2)^{-5/2},
\end{aligned}$$

e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(v_n) = -\frac{f'(v_n)}{(f(v_n))^2}.$$

Daí e de (2.41),

$$0 \geq \left(\frac{f'(v_n)}{(f(v_n))^2}|\nabla v_n|^2 + \varepsilon(n-3)(1+|x|^2)^{-3/2} + 3\varepsilon(1+|x|^2)^{-5/2}\right)_{|x=x_0} > 0.$$

O que é contradição. Portanto, (2.36) é válido, consequentemente (B) está provado e a prova do teorema esta completa. ■

## 2.5 Resultados de Existência para Domínios Ilimitados

Agora, consideremos o problema $(P)$ quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

**Observação 2.3** *A solução Blow-up de $(P)$, caso exista, é positiva.*

Com efeito, vamos assumir que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tal que $u(x_0) = 0$. Sendo $u$ uma solução Blow-up de $(P)$, segue que, existe $R > 0$, tal que $|x_0| < R$, onde $u > 0$ em $\partial B(0, R)$.
O problema

$$\begin{cases} \Delta\xi & = & p(x)f(u) \ \text{ em } \ B(0,R), \\ \xi & \geq & 0 \ \text{ em } \ B(0,R), \\ \xi & = & u \ \text{ em } \ \partial B(0,R), \end{cases} \qquad (A_3')$$

tem solução clássica única, a qual é positiva[8]. Daí, segue que $\xi = u$, o que contradiz o fato de $u(x_0) = 0$, com $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pois $\xi = u > 0$; Implicando que $u$ não se anula no $\mathbb{R}^N$.

**Teorema 2.5** *Assuma que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e que o problema $(P)$ tem ao menos uma solução. Suponha que a função $p$ satisfaz a condição*

- $(P_1)'$ *Existe uma sequência de domínios[9] regulares limitados $(\Omega_n)_{n\geq 1}$, tal que $\overline{\Omega}_n \subseteq \Omega_{n+1}$, $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, e $(P_1)$ é válido em $\Omega_n$, para todo $n \geq 1$.*

*Então, existe uma Solução clássica Maximal[10] $U$ de $(P)$.*

*Se a função $p$ verifica a condição adicional*

- $(P_2)$ $\int_0^\infty r\phi(r)dr < \infty$, onde $\phi(r) = \max_{|x|=r} p(x)$.

*Então $U$ é uma Solução Blow-up em $\mathbb{R}^N$.*

**Observação 2.4** *Nos pontos externos, a solução $U$ independe da escolha dos domínios $\Omega_n$ e do número de soluções do problema $(P)$. Isto segue diretamente da unicidade da solução maximal.*

[8] Segue-se da Proposição 2.2.
[9] Por exemplo, as bolas centradas na origem, de raio natural
[10] É maximal no sentido de que, qualquer outra solução $u$ de $(P)$, vai está abaixo de $U$, isto é, $u \leq U$.

Observe agora que se $p(x) > 0$ para $|x|$ suficientemente grande, então $(P_1)'$ é satisfeito. Portanto, é natural que se questione, se existe $p > 0$, de modo que sejam satisfeitas as condições $(P_1)'$ e $(P_2)$, com $p(x) = 0$ quando $|x| \to \infty$.

A resposta é positiva, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1** *Assumindo* $p(r) = 0$ *para* $r = |x| \in [n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}]$, $n \geq 1$ *e* $p(r) > 0$ *em* $\mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}[n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}]$, *com* $p \in C^1[0, \infty)$ *e* $\displaystyle\max_{[n,n+1]} p(x) = \frac{2}{n^2(2n+1)}$.

Claro que $(P_1)'$ é satisfeito, para $\Omega_n = B(0, n + \frac{1}{2})$. Além disso, a condição $(P_2)$ é também satisfeita, visto que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} r\phi(r)dr &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} rp(r)dr \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{2}{n^2(2n+1)} rdr \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

**Prova(Teorema 2.5).** Pelo Teorema 2.3, o problema de valor de contorno

$$\begin{cases}
\Delta v_n = p(x)f(v_n) \;\; \text{em} \;\; \Omega_n, \\
v_n > 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega_n, \\
v_n(x) \to \infty \;\; \text{quando} \;\; \mathrm{d}(x, \partial\Omega_n) \to 0,
\end{cases} \tag{$P_3'$}$$

tem Solução Blow-up e positiva.

Desde que $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$, nós aplicamos para cada $n \geq 1$, o princípio do máximo e da mesma maneira como na prova da Proposição 2.2, temos a unicidade da solução.

Segue do princípio do máximo, que $v_n \geq v_{n+1}$ em $\Omega_n$.

Por outro lado, $\mathbb{R}^N = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$, assim $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^N$, existe $n_0 = n_0(x_0)$ tal que $x_0 \in \Omega_n$, para todo $n \geq n_0$.

Em vista da monotonicidade da sequência $\{v_n(x_0)\}_{n \geq n_0}$ e pelo fato de

$$0 < \ldots \leq v_n(x_0) \leq \ldots \leq v_2(x_0) \leq v_1(x_0) < M,$$

pois $v_1$ é uma solução clássica de $(P_3')$, definimos

$$U(x_0) = \lim_{n \to \infty} v_n(x_0).$$

Aplicando o argumento padrão boot-strap[11], temos $U \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta U = p(x)f(U)$ em $\Omega$.

Mostraremos agora que $U$ é a solução maximal do problema $(P)$.

Com efeito, seja $u$ uma solução arbitrária de $(P)$. Aplicando o princípio do máximo, obtemos $v_n \geq u$ em $\Omega_n$, para todo $n \geq 1$.
Pela definição de $U$, temos

$$u(x_0) \leq v_n(x_0), \quad \text{implicando que,} \quad u(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} v_n(x_0) = U(x_0),$$

desde que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ é arbitrário, segue que $u \leq U$ em $\mathbb{R}^N$.

Agora, supondo que $p$ satisfaz $(P_2)$, provaremos que $U$ tem um comportamento explosivo quando $|x| \to \infty$. Para este propósito, é suficiente encontrarmos uma função positiva $W \in C(\mathbb{R}^N)$, tal que $U \geq W$ em $\mathbb{R}^N$ e $W(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Inicialmente, observamos que

$$k = \int_0^\infty r^{1-N}\left(\int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds\right)dr < \infty. \tag{2.42}$$

Note que, (2.42) é simples consequência[12] do fato que, para todo $R > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^{1-N}\left(\int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds\right)dr &= \frac{1}{2-N}\int_0^R \frac{d}{dr}(r^{2-N})\left(\int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds\right)dr\\
&= \frac{R^{2-N}}{2-N}\int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds - \frac{1}{2-N}\int_0^R r\phi(r)dr\\
&= \frac{1}{N-2}\int_0^R r\phi(r)dr - \frac{R^{2-N}}{N-2}\int_0^r s^{N-1}\phi(s)ds\\
&\leq \frac{1}{N-2}\int_0^\infty r\phi(r)dr < \infty.
\end{aligned}$$

Por (2.42) e o princípio do máximo, concluímos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta z = \phi(r), \quad r = |x| < \infty, \\ z(|x|) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

tem única solução radial[13] positiva, a qual é dada por

$$z(r) = k - \int_0^r s^{1-N}\left(\int_0^s t^{N-1}\phi(t)dt\right)ds \quad \forall\, r \geq 0.$$

[11] Ver Capítulo I, Lema 1.1.

[12] Nesta inequação usamos Integração por partes.

[13] Ver Seção: Um problema auxiliar.

Seja $w$ a função positiva definida implicitamente por

$$z(x) = \int_{w(x)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.43}$$

Desde que $z(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \to \infty$, então, pela definição (2.43),

$$w(x) \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty.$$

Assumindo $(F)$ e usando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \searrow 0} f'(t) = f'(0) \in [0, \infty),$$

implicando, que existe algum $\delta > 0$, tal que

$$\frac{f(t)}{t} - f'(0) < 1 \quad \text{para todo} \quad 0 < t < \delta.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{t[f'(0)+1]} < \frac{1}{f(t)}.$$

Assim, para todo $s \in (0, \delta)$, temos

$$\int_s^{\delta} \frac{dt}{f(t)} > \frac{1}{f'(0)+1} \int_s^{\delta} \frac{dt}{t} = \frac{1}{f'(0)+1}[\ln \delta - \ln s],$$

fazendo $s \searrow 0$, segue-se que

$$\lim_{s \searrow 0} \int_s^{\delta} \frac{dt}{f(t)} = \infty.$$

E isto possibilita definirmos $w$ como em (2.43).

Agora, vamos mostrar que

$$w \leq v_n \quad \text{em} \quad \Omega_n, \quad \text{para todo} \quad n \geq 1. \tag{2.44}$$

Claramente, temos

$$w \leq v_n \quad \text{em} \quad \partial\Omega_n, \quad \text{para todo} \quad n \geq 1,$$

já que $w(x) \longrightarrow \infty$ quando $|x| \to \infty$ e $v_n(x) \longrightarrow \infty$ quando $d(x, \partial\Omega_n) \longrightarrow 0$.
A fim de mostrarmos que (2.44) é válido, é suficiente demonstrarmos que

$$w \leq v_n + \varepsilon(1 + |x|^2)^{\frac{-1}{2}} \quad \text{em} \quad \Omega_n, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

para $\varepsilon > 0$ fixado.

Com os mesmos argumentos utilizados na demonstração da desigualdade (2.38)[14], no Teorema 2.4, obtemos (2.44). Consequentemente, $U \geq w$ e por (2.43),

$$w(x) \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty.$$

Isto completa a prova do teorema. ■

**Teorema 2.6** *Suponha que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ é ilimitado e que o problema $(P)$ tenha ao menos uma solução. Assuma que $p$ satisfaz a condição $(P_1)'$ em $\Omega$. Então existe uma Solução Maximal clássica $U$ do problema $(P)$.*

*Se $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash \overline{B(0,R)}$ e $p$ satisfaz a condição adicional $(P_2)$ com $\phi(r) = 0$ para $r \in [0,R]$, então a Solução Maximal $U$ é uma Solução Blow-up que explode no infinito.*

**Prova.** Usaremos argumentos similares a prova do Teorema 2.5, com algumas escolhas diferentes, lembrando que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.

Seja $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ sequência de domínios limitados, suaves, que satisfazem a condição $(P_1)'$. Para $n \geq 1$ fixado, considere $v_n$, solução positiva do problema $(P_3')$ e recorde que $v_n \geq v_{n+1}$ em $\Omega_n$.

Fazendo

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x), \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega$$

e utilizando os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.6, obtemos que $U$ é solução clássica de $(P)$ e que $U$ é uma solução maximal.

Deste modo, a primeira parte do teorema esta provada.

Para a segunda parte, onde $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{B(0,R)}$, supondo que a hipótese $(P_2)$ é satisfeita, com $\phi(r) = 0$ para $r \in [0,R]$.

Inicialmente, para demonstrar que $U$ é uma solução, mostraremos a existência de uma função positiva $w \in C(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B(0,R)})$, tal que $U \geq w$ em $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B(0,R)}$ e $w(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$ e quando $|x| \searrow R$. O que é obtido, quando na prova do Teorema 2.6, a função $z$ dada agora é única solução radial positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta z = \phi(r), \quad |x| = r > R \\ z(|x|) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty, \\ z(|x|) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \searrow R. \end{cases}$$

[14]Com $\Omega$ substituído por $\Omega_n$.

A unicidade de $z$, segue-se do princípio do máximo. Além disso,

$$z(r) = \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}}\right) \int_R^\infty s^{1-N} \left(\int_0^s t^{N-1}\phi(t)dt\right) ds$$
$$-\frac{1}{R^{N-2}} \int_R^r s^{1-N} \times \left(\int_0^s t^{N-1}\phi(t)dt\right) ds.$$

Isto completa a prova. ■

**Teorema 2.7** *Assuma que $p \in C(\mathbb{R}^N)$ é uma função não negativa, não trivial que satisfaz $(P_2)$. Seja $f$ uma função satisfazendo a condição $(F)$. Então a condição*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{f(t)} < \infty \tag{2.45}$$

*é necessária para a existência de Soluções do tipo Blow-up para o problema $(P)$ no $\mathbb{R}^N$.*

**Prova.** Seja $u$ uma solução Blow-up do problema $(P)$. Seja $\hat{u}$ dada por

$$\hat{u}(r) = \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} \left(\int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)}\right) ds.$$

Usando a fórmula de mudança de váriavel[15]

$$\int_{h(x)} f(y)dy = \int_x f(h(x)).|\det h'(x)|dx,$$

com

$$\begin{aligned} h: \ & \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \\ & x \ \rightsquigarrow h(x) = r\xi = (r\xi_1, r\xi_2, \ldots, r\xi_{N-1}) \end{aligned}$$

e fazendo

$$x = r\xi \Rightarrow \|x\| = \|r\xi\| = r\|\xi\| \Rightarrow \|\xi\| = \frac{\|x\|}{r} = 1,$$

obtemos

$$\hat{u}(r) = \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|\xi|=1} \left(\int_a^{u(\xi r)} \frac{dt}{f(t)}\right) |h'(x)| ds.$$

Desde que

$$h'(x) = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{bmatrix}$$

[15] Ver Apêndice B.

temos $|\det h'(x)| = r^{N-1}$. Portanto,

$$\hat{u}(r) = \frac{1}{w_N}\int_{|\xi|=1}\left(\int_a^{u(\xi r)}\frac{dt}{f(t)}\right)ds,$$

onde $w_N$ denota a área da superfície esférica unitária no $\mathbb{R}^N$ e $a$ é escolhido de maneira que $a \in (0, u_0)$ e $u_0 = \inf u > 0$. Assim

$$\hat{u}'(r) = \frac{1}{w_N}\int_{|\xi|=1}\frac{1}{f(u(r\xi))}\nabla(u(r\xi))\xi ds.$$

Novamente, fazendo mudança de variável, para $y = r\xi$, temos $\xi = \frac{y}{r} = h(y)$. Daí

$$\begin{aligned} h:\ \mathbb{R}^{N-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \\ y &\rightsquigarrow h(y) = \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

Logo, $|\det h'(x)| = \frac{1}{r^{N-1}}$, e

$$\begin{aligned} \hat{u}'(r) &= \frac{1}{w_N r^{N-1}}\int_{|y|=r}\frac{1}{f(u(y))}\nabla(u(y))\frac{y}{r}ds \\ &= \frac{1}{w_N r^N}\int_{|y|=r}\frac{1}{f(u(y))}\nabla(u(y))yds \\ &= \frac{1}{w_N r^N}\int_{|y|=r}\nabla\left(\int_a^{u(y)}\frac{dt}{f(t)}\right)yds \\ &= \frac{1}{w_N r^{N-1}}\int_{|y|=r}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\int_a^{u(y)}\frac{dt}{f(t)}\right)ds \\ &= \frac{1}{w_N r^{N-1}}\int_{B(0,r)}\Delta\left(\int_a^{u(x)}\frac{dt}{f(t)}\right)dx \qquad (2.46) \end{aligned}$$

onde utilizamos em (2.46) a Identidade de Green[16].

Sendo $u$ solução clássica positiva, segue que

$$|\hat{u}'(r)| \leq Cr \to 0 \ \text{ quando } \ r \to 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w_N(R^{N-1}\hat{u}'(R) - r^{N-1}\hat{u}'(r)) &= \int_D \Delta\left(\int_a^{u(x)}\frac{dt}{f(t)}\right)dx \\ &= \int_r^R\left[\int_{|x|=z}\Delta\left(\int_a^{u(x)}\frac{dt}{f(t)}\right)ds\right]dz, \end{aligned}$$

[16]Ver Apêndice B, Teorema B.6.

onde $D = \{x \in \mathbb{R}^N;\ r < |x| < R\}$. Dividindo a desigualdade acima por $R-r$ e fazendo $R \to r$, temos

$$\begin{aligned}
w_N(r^{N-1}\hat{u}'(r))' &= \int_{|x|=r} \Delta\left(\int_a^{u(x)} \frac{dt}{f(t)}\right) ds \\
&= \int_{|x|=r} div\left(\frac{1}{f(u(x))}\nabla u(x)\right) ds \\
&= \int_{|x|=r} \left[\left(\frac{1}{f(u(x))}\right)' |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{f(u(x))}\Delta u(x)\right] ds \\
&\leq \int_{|x|=r} \frac{p(x)f(u(x))}{f(u(x))} ds \leq w_N r^{N-1} \max p(x)_{|x|=r} = w_N r^{N-1}\phi(r).
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima, obtemos

$$\hat{u}(r) \leq \hat{u}(0) + \int_0^r s^{1-N}\left(\int_0^s t^{N-1}\phi(t)dt\right) ds, \quad \text{para todo} \ \ r \geq 0.$$

Como $(P_2)$ implica em (2.42), segue-se que

$$\hat{u}(r) \leq \hat{u}(0) + K, \quad \forall\ r \geq 0.$$

Assim $\hat{u}$ é limitada. Portanto, se assumirmos que (2.45) não ocorre, obtemos que $u$ não é solução do tipo blow-up. ■

# Capítulo 3

# Problemas Semilineares: Caso Sublinear

Neste capítulo abordaremos os resultados apresentados no artigo de Lair & Shaker [20]. Estabeleceremos resultados de existência e não existência para o seguinte problema

$$\triangle u = p(x)u^{\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{$P_2$}$$

onde $0 < \gamma \leq 1,\ p(x) \geq 0$ e $N \geq 3$.

Em alguns caso, mostramos que a solução do problema $(P_2)$, é do tipo blow-up em $\mathbb{R}^n$, isto é, $u(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$.

## 3.1 Resultados de Existência

No caso em que $p(x)$ é radial, isto é, $p(x) = p(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.1** *Suponha que $0 < \gamma \leq 1$ e $p$ é uma função radial, contínua e não-negativa em $\mathbb{R}^N$. Então o problema $(P_2)$ tem uma solução blow-up e positiva em $\mathbb{R}^N$ se, e somente se*

$$\int_0^{\infty} rp(r)dr = \infty. \tag{3.1}$$

**Prova.** Suponhamos, por contradição, que

$$\int_0^\infty rp(r)dr < +\infty. \tag{3.2}$$

Nestas condições, mostraremos que

**Afirmação 3.2** *O Problema $(P_2)$ não tem solução positiva do tipo blow-up.*

Com efeito, considere $u(x)$ uma solução positiva de $(P_2)$ e defina $\hat{u}$ como sendo

$$\hat{u}(r) = \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} u(x)d\sigma_r = \int_{|x|=r} u(x)d\sigma, \tag{3.3}$$

onde $w_N$ é o volume da esfera de $(N-1)$ dimensão e $\sigma_r$ é a medida da esfera. Desde que $\hat{u}$ é radial,

$$\begin{aligned} \hat{u}'' + \frac{N-1}{r}\,\hat{u}' &= \triangle\hat{u} \overset{3.3}{=} \int_{|x|=r} \triangle u \, d\sigma \overset{(P_2)}{=} \int_{|x|=r} p(|x|)u^\gamma \, d\sigma = \\ &= p(r)\int_{|x|=r} u^\gamma \, d\sigma \overset{B.4}{\leq} p(r)\left[\int_{|x|=r} u \, d\sigma\right]^\gamma = p(r)\hat{u}^\gamma(r), \end{aligned}$$

onde utilizamos em $B.4$ a desigualdade de Jensen[1].

Daí, obtemos

$$\hat{u}'' + \frac{N-1}{r}\,\hat{u}' \leq p(r)\hat{u}^\gamma(r). \tag{3.4}$$

Como

$$(r^{N-1}\hat{u}'(r))' = r^{N-1}\left(\hat{u}''(r) + \frac{N-1}{r}\,\hat{u}'(r)\right),$$

segue de (3.4) que

$$(r^{N-1}\hat{u}'(r))' \leq r^{N-1}p(r)\hat{u}^\gamma(r). \tag{3.5}$$

Integrando (3.5) no intervalo $[0,s]$, com a condição inicial $\hat{u}'(0) = 0$, obtemos

$$\int_0^s (r^{N-1}\hat{u}'(r))'dr \leq \int_0^s t^{N-1}p(t)\hat{u}^\gamma(t)dt$$

donde

$$s^{N-1}\hat{u}'(s) \leq \int_0^s t^{N-1}p(t)\hat{u}^\gamma(t)dt,$$

[1] Ver Apêndice B, Teorema B.10.

isto é,

$$\hat{u}'(s) \leq s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} p(t) \hat{u}^\gamma(t) dt. \tag{3.6}$$

Integrando (3.6), no intervalo $[r_0, r]$ temos

$$\hat{u}(r) - \hat{u}(r_0) \leq \int_{r_0}^r \left( s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} p(t) \hat{u}^\gamma(t) dt \right) ds \quad \text{para} \quad r \geq r_0 \geq 0.$$

Desde que $\hat{u}' \geq 0$, segue que $\hat{u}$ é crescente. Assim, $0 \leq s \leq t \;\Rightarrow\; \hat{u}^\gamma(s) \leq \hat{u}^\gamma(t)$ . Daí para $r \geq r_0 \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &\leq \hat{u}(r_0) + \int_{r_0}^r \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) \hat{u}^\gamma(t) dt \right) ds \\ &\leq \hat{u}(r_0) + \int_{r_0}^r \left( s^{N-1} \hat{u}^\gamma(s) \int_0^s t^{N-1} p(t) dt \right) ds, \end{aligned}$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &\leq \hat{u}(r_0) + \hat{u}^\gamma(r) \int_{r_0}^r \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) dt \right) ds \\ &\leq \hat{u}(r_0) + \hat{u}^\gamma(r) \int_{r_0}^\infty \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) dt \right) ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, iremos mostrar que:

- (i)

$$\int_0^r \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) dt \right) ds = \frac{1}{N-2} \left[ \int_0^r t p(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) dt \right].$$

- (ii)

$$\hat{u}^\gamma(r) \leq 1 + \hat{u}(r), \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

**Verificação de (i)**

Considere $f(s) = s^{2-N}$ e $g(s) = \int_0^s t^{N-1} p(t) dt$, observe que

$$f'(s) = (2-N) s^{1-N} \qquad g'(s) = s^{N-1} p(s)$$

Integrando $(fg(s))' = f'(s)g(s) + f(s)g'(s)$ no intervalo $[0, r]$, temos

$$[f(s)g(s)]\,\Big|_0^r = \int_0^r f'(s)g(s)\; ds + \int_0^r f(s)g'(s)\; ds.$$

Logo,

$$\left[s^{2-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right]\Bigg|_0^r = \int_0^r \left((2-N)s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds + \int_0^r s^{2-N}s^{N-1}p(s)ds \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}p(t)dt = (2-N)\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds + \int_0^r sp(s)ds \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (N-2)\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds = \int_0^r tp(t)dt - r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}p(t)dt.$$

Portanto,

$$\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds = \frac{1}{N-2}\left[\int_0^r tp(t)dt - r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}p(t)dt\right]. \qquad (3.8)$$

Provando (i).

**Verificação de (ii)**

De fato, para $a \in \mathbb{R}$, temos $a^\alpha \leq 1 + a$

$$\text{Se } a \leq 1, \text{ então } a^\alpha \leq 1 \leq 1 + a.$$

$$\text{Se } a > 1, \text{ então } a^\alpha < a \Rightarrow a^\alpha < 1 + a.$$

Assim, segue de (ii) e de (3.7), que para todo $r \geq r_0$,

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &\leq \hat{u}(r_0) + (1 + \hat{u}(r))\,\beta \\ &\leq \hat{u}(r_0) + \beta + \beta\hat{u}(r), \end{aligned}$$

isto é,

$$(1-\beta)\hat{u}(r) \leq \hat{u}(r_0) + \beta,$$

logo,

$$\hat{u}(r) \leq [\hat{u}(r_0) + \beta](1-\beta)^{-1} \quad \forall \quad r \geq r_0.$$

Mostrando assim, que $\hat{u}$ é limitada, e portanto $u$ não pode ser uma solução blow-up de $(P_2)$. Desta maneira, mostramos a afirmação e consequentemente a primeira parte do teorema.

Para demonstrarmos a recíproca do Teorema, vamos mostrar que a equação

$$\triangle v = p(r)v^\gamma = v''(r) + \frac{N-1}{r}\; v'(r)$$

tem uma solução positiva, a qual satisfaz a condição de fronteira singular $v(r) \to +\infty$ quando $r \to \infty$.

Sabemos que

$$\left(u'(r)r^{N-1}\right)' = r^{N-1}\left(u''(r)\frac{N-1}{r} + u'(r)\right),$$

assim,

$$\left(u'(s)s^{N-1}\right)' = s^{N-1}\left(p(s)u^{\gamma}\right). \tag{3.9}$$

Integrando (3.9) no intervalo $[0,t]$ com a condição inicial $u'(0) = 0$

$$u'(t)t^{N-1} = \int_0^t s^{N-1}p(s)u^{\gamma}(s)ds,$$

isto é,

$$u'(t) = t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p(s)u^{\gamma}(s)ds$$

Integrando a equação acima no intervalo $[0,r]$, com as condição inicial $u(0) = C$, obtemos:

$$\begin{aligned} u(r) &= C + \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)u^{\gamma}(t)dt\right)ds, \\ &\geq C + C^{\gamma}\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $C$ é uma constante positiva.

Assim, considere o operador $T : C([0,\infty)) \longrightarrow C([0,\infty))$,

$$T(u(r)) = C + \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)u^{\gamma}(t)dt\right)ds.$$

Mostraremos que $T$ tem um ponto fixo em $C([0,\infty))$ e com isso provamos que $u$ é solução de $(P_2)$.

Inicialmente, vamos supor que tal ponto fixo, $u$, existe e provaremos que

$$u(r) \longrightarrow \infty \text{ quando } r \longrightarrow \infty.$$

Supondo que a igualdade

$$\int_0^{\infty} rp(r)dr = \infty,$$

é satisfeita, obtemos

$$\int_0^{\infty}\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right)ds = \infty. \tag{3.11}$$

De fato, como

$$\begin{aligned}\int_0^r tp(t)dt - r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}p(t)dt &= \frac{\left[\int_0^r r^{N-2}tp(t)dt - \int_0^r t^{N-1}p(t)dt\right]}{r^{N-2}} \\ &= \frac{1}{r^{N-2}}\int_0^r (r^{N-2}-t^{N-2})tp(t)dt.\end{aligned}$$

Para $0 < t \leq r$, segue que $(r^{N-2}-t^{N-2}) \geq 0$, assim

$$\begin{aligned}\int_0^r tp(t)dt - r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}p(t)dt &\geq \frac{1}{r^{N-2}}\int_0^{\frac{r}{2}} (r^{N-2}-t^{N-2})tp(t)dt \\ &\geq \frac{1}{r^{N-2}}\left[r^{N-2}-\left(\frac{r}{2}\right)^{N-2}\right]\int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt \\ &\geq \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right]\int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Por (3.12) e (i),

$$\int_0^r \left(s^{N-1}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right) ds \geq \frac{1}{N-2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}\right]\int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt. \qquad (3.13)$$

Fazendo $r \longrightarrow \infty$ em (3.13), obtemos

$$\int_0^\infty \left(s^{N-1}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right) ds = \infty,$$

logo, por (3.10) temos

$$u(r) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad r \longrightarrow +\infty.$$

Agora, mostraremos que $T$ tem um ponto fixo em $C([0,\infty))$. Para isso, primeiro estabeleceremos um ponto fixo em $C([0,R])$, para $R > 0$ arbitrário.

Seja $u_0 = C$ e defina $u_{k+1} = T_{u_k}$ para $k = 0,1,2,\ldots$. Nota-se, pela definição de $T$, que $C \leq u_k$ para $k = 0,1,2,\ldots$, além disso

$$u_k'(r) = r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}p(t){u_{k-1}}^\gamma(t)dt \geq 0,$$

portanto $u_k$ é crescente.

Assim, para $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{aligned}u_{k+1}(r) &= C + \int_0^r \left(s^{N-1}\int_0^s t^{N-1}p(t){u_k}^\gamma(t)dt\right) ds \\ &\leq C + \int_0^r \left({u_k}^\gamma(s)s^{N-1}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right) ds \\ &\leq C + {u_k}^\gamma(r)\int_0^r \left(s^{N-1}\int_0^s t^{N-1}p(t)dt\right) ds.\end{aligned}$$

Logo

$$u_{k+1}(r) \leq C + {u_k}^{\gamma}(r)H(r), \tag{3.14}$$

onde $H(r) = \int_0^r s^{N-1} \left( \int_0^s t^{N-1} p(t) dt \right) ds$.

De onde segue que

$$u_{k+1}(r) \leq C + \gamma u_k(r) + (1-\gamma) H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r). \tag{3.15}$$

Para mostrarmos a desigualdade acima, usaremos a definição de função convexa[2]. Sabe-se que uma função $f$ é convexa, se para todo $0 \leq \gamma \leq 1$, tem-se

$$f(\gamma x + (1-\gamma)y) \leq \gamma f(t) + (1-\gamma) f(y), \quad \text{para} \quad x, y \geq 0.$$

Desde que a função exponencial é convexa, temos

$$e^{\gamma x + (1-\gamma) y} \leq \gamma e^x + (1-\gamma) e^y \quad \text{para} \quad x, y \geq 0. \tag{3.16}$$

Sendo $u_k(r)$ e $H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)$ valores positivos, fazendo $x = \ln u_k(r)$ e $y = \ln H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)$ em (3.16), obtemos

$$e^{\gamma \ln u_k(r) + (1-\gamma) \ln H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)} \leq \gamma e^{\ln u_k(r)} + (1-\gamma) e^{\ln H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)},$$

ou seja,

$$e^{\ln(u_k^{\gamma}(r) H(r))} \leq \gamma u_k(r) + (1-\gamma) H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r).$$

Logo,

$$u_k^{\gamma}(r) H(r) \leq \gamma u_k(r) + (1-\gamma) H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r). \tag{3.17}$$

De (3.14) e (3.17) decorre (3.15).

Usando o princípio de Indução matemática, mostraremos que

$$u_k(r) \leq \frac{C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r) \equiv M_r \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

i) Para $k = 0$, temos

$$u_0 = C \leq \frac{C}{1-\gamma} \leq \frac{C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)$$

com $0 < \gamma < 1$.

[2]Ver Apêndice B, Definição B.8.

ii) Suponhamos que a desigualdade em 3.18 seja válido para $k$.

iii) Mostraremos que (3.18) é válido para $k+1$.

De fato, já vimos que

$$u_{k+1}(r) \leq C + \gamma u_k(r) + (1-\gamma)H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r).$$

Por (3.18),

$$\begin{aligned} u_{k+1}(r) &\leq C + \gamma\left(\frac{C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r)\right) + (1-\gamma)H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r) \\ &\leq C + \frac{\gamma C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r) = \frac{C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_{k+1}(r) \leq \frac{C}{1-\gamma} + H^{\frac{1}{1-\gamma}}(r) \quad \forall \quad k \in \mathbb{N},$$

de onde segue o resultado.

Deste modo

$$C \leq u_k(r) \leq M_r \leq M_R, \quad \text{para todo} \quad r \in [0, R], \tag{3.19}$$

visto que $H(r) = \int_0^r \left(s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t)dt\right) ds$.

O que implica

$$H'(r) = r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} p(t)dt \geq 0.$$

Isso mostra que $H$ é crescente, logo, se $r \leq R$, então $M_r \leq M_R$, pois $M(r) = M(H(r))$.

**Afirmação 3.3** *$u_k'$ é limitado.*

De fato, para todo $0 \leq r \leq R$,

$$\begin{aligned} u_k'(r) &= r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) u_{k-1}^{\gamma}(t)dt \\ &\leq r^{1-N} u_{k-1}^{\gamma}(r) \int_0^r t^{N-1} p(t)dt, \end{aligned}$$

por (3.19),

$$\begin{aligned} u_k'(r) &\leq M_r^{\gamma} r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} p(t)dt \leq M_r^{\gamma} r^{1-N} r^{N-1} \int_0^r p(t)dt \\ &\leq M_r^{\gamma} \int_0^R p(t)dt \leq M_r^{\gamma} \int_0^R \max p(t)dt \\ &\leq M_r^{\gamma} \max_{0 \leq t \leq r} p(t) R \equiv M_R, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $p$ é localmente Hölder Contínua em $\mathbb{R}^N$. E portanto $0 \leq u_k'(r) \leq M_R$.

Assim, para $0 < \gamma < 1$, a sequência $\{u_k\}$ é limitada e equicontínua[3] em $[0, R]$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli[4], $\{u_k\}$ tem uma subsequência convergente em $[0, R]$.

Desde que $\{u_{kj}\}$ é uma sequência de funções contínuas, e $u_{kj} \to u$ em $[0, R]$, segue que a convergência $u_{kj} \to u$ é uniforme no compacto $[0, R]$ e portanto
$u \in C([0, R])$; Além disso, $Tu = u$, isto é,

$$\begin{aligned} u(r) &= \lim u_{k+1}(r) = C + \lim_{k \to 0} \int_0^r \left( s^{1-N} \int_0^S t^{N-1} p(t) u_{kj}^{\gamma}(t) dt \right) ds \\ &= C + \int_0^r \left( s^{1-N} \int_0^S t^{N-1} p(t) u^{\gamma}(t) dt \right) ds = T(u(r)). \end{aligned}$$

De fato, note que se $u_{kj} \to u$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall \;\; j > j_0$, temos $\forall \;\; t \in [0, R]$

$$|u_{kj}^{\gamma}(t) - u^{\gamma}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{P_0 R^2},$$

onde $P_0 = \max\limits_{t \in [0,R]} p(t)$.
Assim,

$$\left| \int_0^r s^{1-N} \left( \int_0^s t^{N-1} p(t) u_{kj}^{\gamma}(t) dt \right) ds - \int_0^r s^{1-N} \left( \int_0^s t^{N-1} p(t) u^{\gamma}(t) dt \right) ds \right| =$$

$$\begin{aligned} = \left| \int_0^r s^{1-N} \left( \int_0^s t^{N-1} p(t) (u_{kj}^{\gamma}(t) - u^{\gamma}(t)) dt \right) ds \right| &\leq \int_0^r s^{1-N} \left( \int_0^s t^{N-1} p(t) \big| u_{kj}^{\gamma}(t) - u^{\gamma}(t) \big| dt \right) ds \\ \leq \frac{\varepsilon}{P_0 R^2} \int_0^r \left( s^{1-N} s^{N-1} \int_0^s p(t) dt \right) ds &\leq \frac{\varepsilon P_0}{P_0 R^2} \int_0^r \left( \int_0^s p(t) dt \right) ds \leq \varepsilon; \end{aligned}$$

logo

$$Tu = u \quad \forall \;\; u \in C([0, R]).$$

Para provarmos que $T$ tem um ponto fixo em $C([0, \infty))$, consideremos $\{w_k\}$ definida da seguinte maneira:

$$Tw_k = w_k \;\text{ em }\; [0, k]; \quad w_k \in C([0, k]).$$

[3] Ver Apêndice B, Definição B.12.
[4] Ver Apêndice B, Teorema B.16.

Vimos anteriormente, que $u_k$ é uma sequência equicontínua e limitada em $[0,R]$, donde podemos concluir que $\{w_k\}$ é limitada e equicontínua em $[0,1]$, já que

$$w_1 = Tw_1 \ \text{ em } \ [0,1], \quad w_1 \in C([0,1])$$

$$w_2 = Tw_2 \ \text{ em } \ [0,2], \quad w_2 \in C([0,2])$$

$$w_3 = Tw_3 \ \text{ em } \ [0,3], \quad w_3 \in C([0,3])$$

$$\vdots$$

$$w_k = Tw_k \ \text{ em } \ [0,k]; \quad w_k \in C([0,k]).$$

Logo $\{w_k\}$ tem uma subsequência[5] $\{w_k^1\}$, a qual converge uniformemente em $[0,1]$.

Seja $w_k^1 \to v_1$ em $[0,1]$, quando $k \to \infty$. Observe, que a sequência $\{w_k^1\}$ é limitada e equicontínua em $[0,2]$, logo, temos uma subsequência $\{w_k^2\}$, a qual converge uniformemente em $[0,2]$.

Considere $w_k^2 \to v_2$ em $[0,2]$ quando $k \to \infty$. Note que, $w_k^2 \to v_1$ em $[0,1]$, pois $\{w_k^2\}$ é uma subsequência de $\{w_k^1\}$. Daí, $v_2 = v_1$ em $[0,1]$.

Continuando com o raciocínio, nos obtemos uma sequência $\{v_k\}$, a qual tem a seguinte propriedade: $\{v_k\} \in C([0,k])$ $k = 1,2,\dots$, pois

$$w_k^j \to v_j \ \text{ em } \ [0,j] \ \text{ quando } \ k \to \infty$$

Além disso, esta convergência é uniforme num conjunto compacto $[0,j]$, logo $v_j \in C([0,j])$ com $j = 1,2\dots$ e

$$v_k(r) = v_1(r), \quad \forall\ r \in [0,1]$$

$$v_k(r) = v_2(r), \quad \forall\ r \in [0,2]$$

$$\vdots$$

$$v_k(r) = v_{k-1}(r), \quad \forall\ \ r \in [0,k-1].$$

[5]Ver Apêndice B, Definição B.14.

Definindo

$$v_1(r) = v(r) \quad \text{se} \quad r \in [0,1]$$

$$v_2(r) = v(r) \quad \text{se} \quad r \in [0,2]$$

$$\vdots$$

$$v_k(r) = v(r), \quad \text{para todo} \quad r \in [0,k].$$

Obtemos

$$v_{k+j}(r) = \ldots = v_k(r) = v_{k-1}(r) = v_{k-2} = \ldots = v_2(r) = v_1(r), \quad r \in [0,1].$$

Mostrando que $\{v_k\}$[6] converge para $v$, e esta convergência é uniforme em conjuntos compactos[7].

Portanto $v_k \to v$ uniformemente em $[0,k]$ e $v \in C([0,k])$. Fazendo $k \to \infty$, temos $v_k \to v$ uniformemente em $[0,\infty)$ e $v \in C([0,\infty))$ satisfaz

$$Tv = v \quad \text{se} \quad 0 < \gamma < 1.$$

Assim, mostramos o primeiro Caso.

Para o caso $\gamma = 1$, a prova é idêntica a anterior, exceto que a limitação de $u_k$ dada na desigualdade

$$u_k(r) \leq \frac{C}{1-\gamma} + H(r)^{\frac{1}{1-\gamma}} \equiv M_r \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}$$

não é válida.

Usaremos a expressão[8] abaixo, para mostrarmos uma limitação para $u$.

$$\int_0^r \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) u_k(t) dt \right) ds = \frac{1}{N-2} \left[ \int_0^r t p(t) u_k(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) u_k(t) dt \right], \tag{3.20}$$

[6] $\{v_k\}$ é uma sequência constante.

[7] A convergência uniforme, deve-se a construção da sequência $v_k$.

[8] Esta expressão é facilmente encontrada, se integrarmos por partes, as funções $f(s) = s^{N-2}$ e $g(s) = \int_0^s t^{N-1} p(t) u_k(t) dt$ no intervalo $[0,r]$.

Sendo $\gamma = 1$, temos

$$\begin{aligned} u_{k+1}(r) &= C + \int_0^r \left( s^{N-1} \int_0^s t^{N-1} p(t) u_k(t) dt \right) ds \\ &\overset{3.20}{=} C + \frac{1}{N-2} \left[ \int_0^r t p(t) u_k(t) dt - r^{2-N} \int_0^r t^{N-1} p(t) u_k(t) dt \right] \\ &\leq C + \frac{1}{N-2} \int_0^r t p(t) u_k(t) dt \\ &\leq C + \int_0^r \frac{1}{N-2} t p(t) u_k(t), \end{aligned}$$

logo

$$u_{k+1}(r) \leq C + \int_0^r h(t) u_k(t) dt,$$

onde $h(t) = \frac{1}{N-2} t p(t)$.

Agora, mostraremos que

$$u_k(r) \leq C e^{\int_0^r h(t)dt}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

De fato, se $k = 0$

$$u_0 = C = Ce^0 \leq ce^{\int_0^r h(t)dt}.$$

Suponha que a desigualdade em (3.21) seja válida e observe que

$$\begin{aligned} u_{k+1}(r) &\leq C + \int_0^r h(t) u_k(t) dt \\ &\overset{3.21}{\leq} C + \int_0^r h(t) C e^{\int_0^r h(t)dt} \end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall[9],

$$u_{k+1}(r) \leq C e^{\int_0^r h(t)dt}.$$

Assim,

$$u_k(r) \leq C e^{\int_0^r h(t)dt}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

O restante da prova, é feito da mesma maneira que para $0 < \gamma < 1$. ■

[9]Ver Apêndice B, Lema B.1.

**Observação 3.1** *No caso particular em que $p(x) = |x|^\alpha$, para alguma constante $\alpha \geq 0$; A equação*

$$\Delta u = p(x)u^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.22}$$

*tem uma solução $u$, dada por $u(x) = c|x|^\beta$, onde $\beta = \frac{\alpha+2}{1-\gamma}$ e*

$$c^{1-\gamma} = \frac{1}{(N+\gamma+\beta\gamma)(\alpha+\beta\gamma+2)}.$$

Com efeito, se $u(x) = c|x|^\beta$, então

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = c\beta|x|^{\beta-1}\frac{x_i}{|x|} = c\beta x_i|x|^{\beta-2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = c\beta(\beta-2)|x|^{\beta-3}\frac{x_i^2}{|x|} + c\beta|x|^{\beta-2}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = c\beta(\beta-2)|x|^{\beta-4}|x|^2 + Nc\beta|x|^{\beta-2},$$

daí,

$$\Delta u = \beta c|x|^{\beta-2}(N+\beta-2).$$

Por outro lado,

$$\Delta u = p(x)u^\gamma = c^\gamma|x|^{\alpha+\beta\alpha}.$$

Assim, para mostrarmos a observação, basta que

$$\beta c|x|^{\beta-2}(N+\beta-2) = c^\gamma|x|^{\alpha+\beta\alpha}. \tag{3.23}$$

Para tanto, note que se

$$c^{1-\gamma} = \frac{1}{(N+\gamma+\beta\gamma)(\alpha+\beta\gamma+2)} \qquad e \qquad \beta = \frac{\alpha+2}{1-\gamma}$$

então

$$c = [(N+\gamma+\beta\gamma)(\alpha+\beta\gamma+2)]^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left[\frac{2\alpha+2N+4\gamma+\alpha^2+\alpha N+2\alpha\gamma-N\alpha\gamma-2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Fazendo as devidas substituições no lado esquerdo de (3.23), temos

$$\beta c|x|^{\beta-2}(N+\beta-2) = |x|^{\frac{\alpha+2\gamma}{1-\gamma}}\frac{(\gamma+2)}{(1-\gamma)}\left[\frac{2\alpha+2N+4\gamma+\alpha^2+\alpha N+2\alpha\gamma-N\alpha\gamma-2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$= |x|^{\frac{\alpha+2\gamma}{1-\gamma}}\frac{(\alpha+2)(N-N\gamma+\alpha+2\gamma)}{(1-\gamma)^2}\left[\frac{2\alpha+2N+4\gamma+\alpha^2+\alpha N+2\alpha\gamma-N\alpha\gamma-2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$= |x|^{\frac{\alpha+2\gamma}{1-\gamma}} \left[\frac{2\alpha + 2N + 4\gamma + \alpha^2 + \alpha N + 2\alpha\gamma - N\alpha\gamma - 2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]$$
$$\times \left[\frac{2\alpha + 2N + 4\gamma + \alpha^2 + \alpha N + 2\alpha\gamma - N\alpha\gamma - 2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

logo,

$$\beta c|x|^{\beta-2}(N+\beta-2) = |x|^{\frac{\alpha+2\gamma}{1-\gamma}} \left[\frac{2\alpha + 2N + 4\gamma + \alpha^2 + \alpha N + 2\alpha\gamma - N\alpha\gamma - 2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{3.24}$$

Substituindo no lado direito de (3.23), os valores de $c$ e $\beta$, obtemos

$$c^{\gamma}|x|^{\alpha+\beta\alpha} = |x|^{\frac{\alpha+2\gamma}{1-\gamma}} \left[\frac{2\alpha + 2N + 4\gamma + \alpha^2 + \alpha N + 2\alpha\gamma - N\alpha\gamma - 2N\gamma}{1-\gamma^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) decorre (3.23).

O exemplo abaixo mostra que existe uma solução não radial para a equação (3.22).

**Exemplo 2** *Considere a equação*

$$\Delta u = p(x)\sqrt{u}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.26}$$

*onde* $p(x) = 8/(\sqrt{2x^2+y^2+z^2+1})$.

Sendo $u = 2x^2+y^2+z^2+1$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$$

implicando

$$\Delta u = 8.$$

Por outro lado

$$p(X)\sqrt{u} = \frac{8}{(\sqrt{2x^2+y^2+z^2+1})}\sqrt{u} = 8.$$

Mostrando que u é solução de (3.26), apesar de não ser uma solução radial.

Desta maneira, notamos o seguinte problema em aberto:

A equação (3.22) tem uma Solução do tipo Blow-up, inteira e positiva se $p$ é não radial e satisfaz

$$\int_0^{\infty} r\psi(r)dr = \infty \quad \text{onde} \quad \psi(r) = \min_{|x|=r} p(x)?$$

## 3.2 Resultados de Não Existência

**Teorema 3.4** *Suponha $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ e $p$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Se $0 < \gamma \leq 1$, então*

$$\Delta u = p(x)u^{\gamma}; \qquad x \in \Omega, \tag{$P_\gamma$}$$

*não tem uma Solução do tipo blow-up em $\Omega$.*

**Prova.** Suponhamos, por contradição, que exista uma Solução Blow-up, $u$ em $\Omega$, para a equação acima. Considere

$$v(x) = \log(1 + u(x)).$$

Observe que,

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = (1 + u(x))^{-1} \ \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial {x_i}^2} = (1 + u(x))^{-1} \ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} - (1 + u(x))^{-2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2$$

e

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial {x_i}^2} = (1 + u(x))^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial {x_i}^2} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2 (1 + u(x))^{-2} \\ &= (1 + u(x))^{-1}\Delta u - |\nabla u|^2 (1 + u(x))^{-2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta v \leq (1 + u(x))^{-1}\Delta u = \frac{u^{\gamma}}{1 + u(x)} p(x).$$

Daí e por (ii),

$$\Delta v \leq p(x) \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} p(x) = K. \tag{3.27}$$

Usando o fato que $p$ é uma função contínua no compacto $\bar{\Omega}$, obtemos que p atinge um máximo.

Além disso $\Delta(|x|^2) = 2N$, daí e de (3.27),

$$\begin{aligned} \Delta(v - K|x|^2) &= \Delta v - K\Delta(|x|^2) \\ &\leq K - 2NK \\ &\leq K(1 - 2N) < 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Portanto,

$$\Delta(v - K|x|^2) < 0, \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega.$$

Agora, defina $w(x) = v(x) - K|x|^2$. Já vimos que $\Delta w < 0$, para todo $x \in \Omega$, além disso, $K|x|^2$ é limitada[10].

Assim,

$$w \to \infty, \quad \text{sempre que} \ \ d(x, \partial\Omega) \to 0.$$

De fato, para $d(x, \partial\Omega) \to 0$ temos $u(x) \to \infty$, daí $\log(1 + u(x)) \to \infty$. Desde que $K|x|^2$ é uma função limitada, temos

$$w(x) = v(x) - K|x|^2 \to \infty, \quad \text{quando} \ \ d(x, \partial\Omega) \to 0$$

**Afirmação 3.5** *$w \to \infty$ quando $d(x, \partial\Omega) \to 0$, não pode ocorre, a não ser que $w \equiv \infty$.*

Com efeito, seja $x_0 \in \Omega$ e $M > 0$. Provaremos que $w(x_0) > M$.

Suponhamos, por contradição, que $w(x_0) \leq M$. Escolha $\delta > 0$ tal que $w(x) > M$, para todo $x$ verificando $d(x, \partial\Omega) \leq \delta$.

Considere $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \ / \ d(x, \partial\Omega) > \delta\}$ e observe que $x_0 \in \Omega_\delta$, já que $w(x_0) \leq M$.

Sendo $\partial\Omega_\delta = \{x \in \Omega \ / \ d(x, \partial\Omega) = \delta\}$, segue que $w(x) > M, \ \ \forall \ x \in \partial\Omega_\delta$.

Como por hipótese, $w(x_0) \leq M$ temos que, $M - w(x_0) \geq 0$ com $x_0 \in \Omega_\delta$.

Faça $M - w(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}_\delta}(M - w)$ e note que,

$$M - w(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}_\delta}(M - w) \geq M - w(x_0) \geq 0$$

Portanto $M \geq w(\bar{x})$ se, e somente se, $\bar{x} \in \Omega_\delta \subset \bar{\Omega}_\delta$.

Mas, sendo $M - w(\bar{x})$ ponto de máximo,

$$\Delta[M - w(\bar{x})] \leq 0,$$

logo,

$$\Delta w(\bar{x}) \geq 0, \quad \text{com} \ \ \bar{x} \in \Omega.$$

O que contraria o fato de $\Delta w < 0$, para todo $x \in \Omega$.

Mostramos que se uma função verifica $\Delta w < 0$ *em* $\Omega$ *e* $w \to \infty$, esta deve ser $w \equiv \infty$. Mas a função $w(x) = v(x) - K|x|^2 \neq \infty$.

O absurdo se deu, ao supor que existia uma solução $u$ do tipo blow-up. ■

[10] Visto que $\Omega$ é um domínio limitado.

**Observação 3.2** *Isto é interessante para mostrarmos que, para o caso superlinear,* $\gamma > 1$, *a solução positiva da equação (3.22) em um domínio limitado, existe, contanto que a função* $p(x)$ *seja suficientemente regular. [Ver [1]]*

**Teorema 3.6** *Suponha que* $p$ *é localmente Hölder contínua em* $\mathbb{R}^N$ *e satisfaz*

$$\int_0^\infty t\phi(t)dt < \infty, \quad \textit{onde} \quad \phi(t) = \max_{|x|=t} p(t). \tag{3.29}$$

*Então,*

*(a) A equação*

$$\Delta u = p(x)u^\gamma; \quad 0 < \gamma \leq 1; \quad N \geq 3, \tag{3.30}$$

*tem uma solução não negativa e limitada em* $\mathbb{R}^N$.

*(b) Se* $p$ *satisfaz a equação,*

$$\int_0^\infty t\psi(t)dt = \infty, \quad \textit{onde} \quad \psi(t) = \min_{|x|=t} p(t). \tag{3.31}$$

*Então (3.30) não tem solução limitada e não negativa em* $\mathbb{R}^N$.

**Prova de (a).** Dividiremos a prova do teorema em dois casos:

$1^\circ$ **Caso.** $0 < \gamma < 1$

Para resolver este problema, vamos considerar o problema auxiliar

$$\Delta u = -f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \tag{3.32}$$

o qual é equivalente ao problema inicial (3.30).

Suponhamos, que além da condição (3.29) valham as seguintes condições:

(A) A função $f(x,u)$, definida em $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, é localmente Hölder contínua em $x$ e localmente contínua lipschitz em $u$;

(B) Existe uma função localmente Hölder contínua $\phi(r) \geq 0$ em $[0,\infty)$ e uma função localmente lipschitz $F(u) > 0$ em $[0,\infty)$, tal que

$$|f(x,u)| \leq \phi(|x|)F(u) \ \text{ para } \ (x,u) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(C) Existe uma $u_2 > 0$, tal que $F(u)$ é não decrescente para $u > u_2$ e

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u} = 0.$$

Observe que o nosso problema satisfaz as condições acima.

**Condição (A)**

Para $f(x,u) = p(x)u^{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned}|f(x,u_1) - f(x,u_2)| &= |p(x)u_1^{\gamma} - p(x)u_2^{\gamma}| \leq |p(x)||u_1^{\gamma} - u_2^{\gamma}| \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} p(x)|u_1 - u_2| \leq k|u_1 - u_2|,\end{aligned}$$

o que mostra que $f(x,u)$ é lipschitz na variável $u$.

Agora, vamos mostrar que $F(x) = x^{\gamma},\ 0 < \gamma < 1$ é localmente Hölder contínua. Seja $K \subset [0,+\infty)$ um compacto, note que para $x \neq y$, obtemos da desigualdade[11] $(B.9)$

$$|F(x) - F(y)| = |x^{\gamma} - y^{\gamma}| \leq C(\gamma)|x-y|.$$

Consideremos dois casos

**(i)** Se $0 < |x-y| \leq 1$, então

$$|F(x) - F(y)| \overset{B.8}{\leq} C(\gamma)|x-y| \leq C_1(\gamma)|x-y|^{\gamma} + C_2(\gamma)|x-y|^{\gamma} \leq \tilde{C}(\gamma)|x-y|^{\gamma}$$

**(ii)** Se $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2C$, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &\overset{B.8}{\leq} C(\gamma)|x-y| = C(\gamma)|x-y|^{\gamma}|x-y|^{1-\gamma} \\ &\leq C(\gamma)(2C)^{1-\gamma}|x-y|^{\gamma} = C_1(\gamma)|x-y|^{\gamma}\end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $x, y \in K,\ x \neq y$, temos

$$|F(x) - F(y)| \leq \tilde{C}(\gamma)|x-y|^{\gamma}.$$

Implicando que $F \in C^{0,\gamma}_{loc}([0,+\infty))$.

Desde que $f(x,u) = p(x)F(u)$ e produto de funções Hölder contínuas é ainda Hölder contínua, segue que $f(x,u)$ é localmente Hölder contínua em $x$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}|f(x,u) - f(y,u)| &= |p(x)u(x)^{\gamma} - p(y)u(y)^{\gamma}| \\ &\leq |p(x)u(x)^{\gamma} - p(x)u(y)^{\gamma}| + |p(x)u(y)^{\gamma} - p(y)u(y)^{\gamma}| \\ &\leq |p(x)||u(x)^{\gamma} - u(y)^{\gamma}| + |u(y)^{\gamma}||p(x) - p(y)| \\ &\leq C_3|x-y|^{\gamma} + C_4|x-y|^{\gamma} \\ &\leq \hat{C}|x-y|^{\gamma}.\end{aligned}$$

Mostrando assim, que $f(x,u) \in C^{0,\gamma}_{loc}([0,+\infty))$ em $x$.

[11] Ver apêndice B.

**Condição (B)**

Considere $\phi(|t|) = \max\limits_{|x|=t} p(t) \geq 0$, observe que

$$|f(x,u)| = |p(x)u^\gamma| \leq \phi(t)u^\gamma = \phi(t)F(u), \quad \text{para} \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

**Condição (C)**

Desde que $0 < \gamma < 1$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^\gamma}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^{1-\gamma}} = 0.$$

Mostraremos, com essas condições, que a equação (3.32) possui infinitas soluções inteiras, positivas e limitadas.

Inicialmente, iremos construir uma supersolução, $v(x) = y(|x|)$ de (3.30). A qual resolve o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + \frac{N-1}{r}\, y' + \phi(r)F(y) = 0, \quad r > 0, \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{$P_F$}$$

Para isso, é suficiente considerarmos a solução $y(r)$ da equação integral

$$y(r) = \alpha - \frac{1}{N-2} \int_0^r \left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] s\phi(s)F(y(s))ds \quad r \geq 0, \tag{3.33}$$

para alguma constante positiva $\alpha$, suficientemente grande, de modo que

$$\frac{2F(\alpha)}{(N-2)\alpha} \int_0^\infty r\phi(r)dr \leq 1 \tag{3.34}$$

é satisfeito[12].

Com esta escolha de $\alpha$, considere o conjunto

$$Y = \left\{ y \in C([0,\infty)); \quad \frac{\alpha}{2} \leq y(r) \leq \alpha; \quad \text{para} \quad r \geq 0 \right\}, \tag{3.35}$$

onde $C([0,\infty))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo[13], com a topologia da convergência uniforme em cada subintervalo compacto $K_n = [0,n] \subset [0,\infty)$.

[12] O que é possível, já que por hipótese (3.29) ocorre.

[13] Ver Apêndice A, Definição A.9.

**(i) Y é convexo.**

De fato, sejam $y_1$ $e$ $y_2 \in Y$, então

$$\frac{\alpha}{2} \leq y_1(r) \leq \alpha \quad \text{para} \quad r \geq 0,$$
$$\frac{\alpha}{2} \leq y_2(r) \leq \alpha \quad \text{para} \quad r \geq 0.$$

Logo, para $t \in [0,1]$ temos

$$\frac{\alpha}{2} \leq ty_1(r) + (1-t)y_2(r) \leq \alpha; \quad \text{para} \quad r \geq 0,$$

implicando que $Y$ é convexo.

**(ii) Y é fechado.**

Seja $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Y$, tal que $d(y_j, y_0) \to 0$, quando $j \to \infty$, com $y_0 \in C([0,\infty))$. Temos

$$d(y_j, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(y_j - y_0)}{1 + p_n(y_j - y_0)} \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty, \; n \in \mathbb{N},$$

assim,

$$\frac{2^{-n} p_n(y_j - y_0)}{1 + p_n(y_j - y_0)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty, \; n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$p_n(y_j - y_0) \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$y_j(r) \to y_0(r) \quad \text{quando} \quad j \to 0, \; \text{em } K_n = [0,n], \; n \in \mathbb{N}$$

e como

$$\frac{\alpha}{2} \leq y_j(r) \leq \alpha \quad \text{para} \quad r \geq 0 \quad \text{então} \quad \frac{\alpha}{2} \leq y_0(r) \leq \alpha, \quad \text{para} \quad r \geq 0$$

de onde deduzimos que $y_0 \in Y$. Portanto, $Y$ é fechado.

Assim $Y$ é um subconjunto convexo e fechado do espaço topólogico localmente convexo $C([0,\infty))$.

Agora, definamos o operador integral

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}: \; Y &\longrightarrow Y \\ y &\rightarrowtail \mathfrak{F}(y), \end{aligned}$$

onde

$$\mathfrak{F}(y) = \alpha - \frac{1}{N-2}\int_0^r \left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] s\phi(s)F(y(s))ds, \quad r \geq 0$$

e $\alpha$ é escolhido de modo que (3.34) seja satisfeito.

Como iremos aplicar o Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff, vejamos que:

**(I) $\mathfrak{F}$ está bem definido.**

Por definição, $\mathfrak{F}(y(r)) \leq \alpha, \quad r \geq 0$. Além disso,

$$\mathfrak{F}(y(r)) \geq \alpha - \frac{1}{N-2}\int_0^r s\phi(s)F(y(s))ds.$$

Sendo $F$ não decrescente e $\alpha$ grande, tal que $y(s) \leq \alpha, \ \forall \ 0 \leq s \leq r$, temos

$$F(y(s)) \leq F(\alpha) \Rightarrow -F(y(s)) \geq -F(\alpha).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(y(r)) &\geq \alpha - \frac{F(\alpha)}{N-2}\int_0^r s\phi(s)ds \\ &\geq \alpha - \frac{F(\alpha)}{N-2}\int_0^\infty s\phi(s)ds. \end{aligned} \tag{3.36}$$

De (3.34),

$$-\frac{F(\alpha)}{N-2}\int_0^\infty s\phi(s)ds \geq -\frac{\alpha}{2}. \tag{3.37}$$

Por (3.36) e (3.37) conclui-se

$$\frac{\alpha}{2} \leq \mathfrak{F}(y(r)) \leq \alpha, \quad r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{F}(Y) \subset Y.$$

**(II) $\mathfrak{F}$ é contínua.**

Seja $\{y_k\} \subset y$ uma sequência convergindo para $y \in Y$, na topologia $C([0,\infty))$. Então, temos $d(y_k, y) \longrightarrow 0$. Logo

$$|\mathfrak{F}(y_k(r)) - \mathfrak{F}(y_r)| =$$

$$= \left|\frac{1}{N-2}\int_0^r s\phi(s)\left(F(y_k(s)) - F(y(s))\right)ds - \frac{1}{N-2}\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2} s\phi(s)\left(F(y_k(s)) - F(y(s))\right)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{N-2}\int_0^r s\phi(s)\big|F(y_k(s)) - F(y(s))\big|ds,$$

portanto

$$|\mathfrak{F}(y_k(r)) - \mathfrak{F}(y_r)| \leq \frac{1}{N-2}\int_0^r s\phi(s)\big|F(y_k(s)) - F(y(s))\big|ds. \tag{3.38}$$

Note que, $\phi_k(s)$ é dominada por uma função integrável, isto é,

$$\begin{aligned}\phi_k(s) &= s\phi(s)\big|F(y_k(s)) - F(y(s))\big| \\ &\leq s\phi(s)|F(y_k(s))| + s\phi(s)|F(y(s))| \\ &\leq 2s\phi(s)F(\alpha).\end{aligned}$$

Além disso, $\phi_k(s) \to 0$, já que $F$ é contínua e $y_k \to y$ quando $k \to \infty$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\mathfrak{F}(y_k) \longrightarrow \mathfrak{F}(y) \ \text{ quando } \ k \to \infty, \ \text{ em } \ K_n, n = 1, 2, \dots$$

Daí,

$$p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y)) \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} 0 \ \text{ quando } \ k \to \infty, \ \ n \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))}{1 + p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))} \leq p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y)) \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} 0 \ \text{ quando } \ K \to \infty, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))}{1 + p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Portanto, $d(\mathfrak{F}(y_k), \mathfrak{F}(y)) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mostrando que $\mathfrak{F}$ é contínua em $(C([0,\infty)), d)$.

**(III) $\mathfrak{F}(Y)$ é relativamente compacto.**

(i)$\mathfrak{F}(Y)$ é uniformemente limitado.

De fato,

$$d(\mathfrak{F}(y_1), \mathfrak{F}(y_2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))}{1 + p_n(\mathfrak{F}(y_k) - \mathfrak{F}(y))} \leq 1$$

(ii) Vamos mostrar a equicontinuidade de $\mathfrak{F}(Y)$.

Observe que

$$\begin{aligned}|(\mathfrak{F}(y))'(r)| &= \left|r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}\phi(s)F(y(s))ds\right| \\ &= \left|\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} \phi(s)F(y(s))ds\right| \\ &\leq F(\alpha)\int_0^r \phi(s)ds \\ &\leq F(\alpha)\int_0^\infty \phi(s)ds.\end{aligned}$$

Concluímos que $\mathfrak{F}(Y)$ é equicontínuo[14].

Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, deduzimos que $\mathfrak{F}(Y)$ é relativamente e compacto em cada $K_n \subset [0,\infty),$ com $n \in \mathbb{N}$.

Considere agora

$$\mathfrak{F}(\{u_j\})_{j\geq 1} \subset \mathfrak{F}(Y) \subset C([0,\infty)).$$

Neste caso, $(\mathfrak{F}(\{u_j\})) \subset \mathfrak{F}(Y)$ é uma sequência de funções que contêm subsequências convergentes em cada $K_n = [0,n],\ n \in \mathbb{N}$. Defina

$$\mathfrak{F}(\{u_j^n\}) = \mathfrak{F}(\{u_j\})\big|_{[0,n]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $n = 1$, temos que existe $(\mathfrak{F}(u_{jk}^1) \subset (\mathfrak{F}(u_j)^1)$, tal que

$$\mathfrak{F}(u_{jk})^1 \longrightarrow \mathfrak{F}(u^1).$$

Para $n = 2$, existe $(\mathfrak{F}(u_{jk}^2) \subset (\mathfrak{F}(u_j)^1)$, de modo que

$$\mathfrak{F}(u_{jk})^2 \longrightarrow \mathfrak{F}(u^2).$$

Com este argumento repetitivo, construímos a sequência "diagonal" $(\mathfrak{F}(u_{jk})^k)$, tal que

$$\mathfrak{F}(u_{jk})^k \longrightarrow \mathfrak{F}(u) \text{ em cada } K_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí $(\mathfrak{F}(u_{jk})^k) \subset (\mathfrak{F}(u_j))$, verifica $d(\mathfrak{F}(u_{jk})^k, \mathfrak{F}(u_j)) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$.
Mostrando assim que $\mathfrak{F}(Y)$ é relativamente compacto na topologia $C([0,\infty))$.

Recorde que $Y$ é fechado, convexo e que $\mathfrak{F}(Y) \subset Y$. Então,

$$\overline{\mathfrak{F}(Y)} \subset \overline{Y} = Y \Rightarrow \overline{\mathfrak{F}(Y)} \subset Y \quad \text{e}$$

$$\tilde{Y} = \overline{conv}(\overline{\mathfrak{F}(Y)}) \subset \overline{conv}(Y)^{15} = Y.$$

Desde que $(C([0,\infty)), d)$ é completo e $\overline{\mathfrak{F}(Y)} \subset C([0,\infty))$ é compacto; Obtemos que $\tilde{Y}$ é compacto e está contido em $Y$ (Teorema de Mazur).
Além disso,

$$\tilde{Y} \subset \mathfrak{F}(Y) \subset \overline{\mathfrak{F}(Y)} \subset \overline{Y}$$

[14]Ver Apêndice B, teorema B.15.

[15]Onde $\overline{conv}(Y)$ é a envoltória convexa do conjunto $Y$.

Agora, podemos aplicar o Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff e concluir que $\mathfrak{F}$ tem um ponto fixo, isto é,

$$\mathfrak{F}(y(r)) = y(r).$$

Este ponto fixo $y = y(r)$ é uma solução de $P_F$. Assim, nós obtemos uma super-solução $v(x)$ de (3.30) em $\mathbb{R}^n$, definida por $v(x) = y(|x|)$, visto que

$$\Delta v = -\phi(r)F(v) \leq f(x, v).$$

Da mesma maneira, nós consideramos uma subsolução $w(x)$ de (3.30) em $\mathbb{R}^N$; onde $z$ é um ponto fixo do operador $\mathcal{G} : Z \longrightarrow Z$, definido por

$$\mathcal{G}(z(r)) = \beta + \frac{1}{N-2}\int_0^r \left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] s\phi(s)F(z(s))ds, \quad r \geq 0, \tag{3.39}$$

em um subconjunto convexo e fechado de $C([0,\infty))$,

$$Z = \{z \in C([0,\infty));\ \beta \leq z(r) \leq 2\beta;\ \text{para } r \geq 0\}, \tag{3.40}$$

onde escolhemos uma constante $\beta$, tal que

$$\frac{F(2\beta)}{(N-2)\beta}\int_0^\infty r\phi(r)dr \leq 1, \tag{3.41}$$

seja satisfeito.

O ponto fixo $z = z(r)$ de $\mathcal{G}$ satisfaz a equação integral

$$z(r) = \beta + \frac{1}{N-2}\int_0^r \left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] s\phi(s)F(z(s))ds, \quad r \geq 0. \tag{3.42}$$

E assim é uma solução do problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{c} z'' + \frac{N-1}{r}\, z' - \phi(r)F(z) = 0 \quad r > 0 \\ z(0) = \beta, \quad z'(0) = 0. \end{array}\right. \tag{$P_{\mathcal{G}}$}$$

Isto nos dá uma subsolução de (3.30) em $\mathbb{R}^N$.

Se $2\beta \leq \dfrac{\alpha}{2}$, então a função $v(|x|)$ e $w(|x|)$ satisfaz

$$\beta \leq z(r) \leq 2\beta \leq \frac{\alpha}{2} \leq y(r) \leq \alpha$$

Portanto, $z(r) \leq y(r)$ se, e somente se, $w(x) \leq v(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

O Teorema 1.7, garante a existência de uma solução inteira positiva $u(x)$ satisfazendo

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x) \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Mostramos que dados $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ com $\alpha \geq 4\beta$, existe uma solução $u(x)$ de (3.30), satisfazendo $u(x) \in [\beta, \alpha]$, já que $\beta \leq w(x) \leq u(x) \leq v(x) \leq \alpha$, com $x \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha$ e $\beta$ escolhidos como em (3.34) e (3.41).

$2^\circ$ **Caso.** $\gamma = 1$

Do mesmo modo em que mostramos, para a prova de suficiência do Teorema 3.1, mostra-se que existe uma função $w$, não negativa em $C([0, \infty))$, tal que

$$w(r) = 1 + \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \phi(s) w(s) ds \right) dt \quad \forall \ r \geq 0$$

onde $T : C([0, \infty)) \longrightarrow C([0, \infty))$ e

$$Tw(r) = 1 + \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \phi(s) w(s) ds \right) dt \quad \forall \ r \geq 0.$$

Segue de (ii)[16] que

$$w(r) \leq 1 + \frac{1}{N-2} \int_0^r t\phi(t) w(t) dt,$$

usando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$w(r) \leq e^{\int_0^r \frac{t\phi(t)}{N-2} dt} \leq e^{\int_0^\infty \frac{t\phi(t)}{N-2} dt} \overset{3.29}{\leq} M, \tag{3.43}$$

mostrando que $w$ é limitada. Assim $w(|x|)$ é solução limitada, positiva(radial) de

$$\Delta w = \phi(|x|) w; \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora, considere $v$ uma solução não negativa, definida por

$$v(r) = M + \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \psi(s) ds \right) dt \quad \forall \ r \geq 0, \tag{3.44}$$

onde $M$ é a mesma constante da inequação (3.43).

Então, $v(|x|)$ é uma solução limitada, positiva (radial) de

$$\Delta v = \psi(|x|) v; \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por (ii) e (3.44),

$$v(r) \leq M + \frac{1}{N-2} \int_0^r t\psi(t) v(t) dt,$$

[16]Ver Seção - Resultados de Existência.

e da desigualdade de Gronwall,

$$v(r) \leq Me^{\int_0^r \frac{t\psi(t)}{N-2}dt}.$$

Portanto

$$M \leq v(r) \leq e^{\int_0^r \frac{t\psi(t)}{N-2}dt}. \tag{3.45}$$

Como

$$\phi(t) = \max_{|x|=t} p(x) \quad \text{e} \quad \psi(t) = \min_{|x|=t} p(x),$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta w &= \phi(|x|)w \geq p(|x|)w \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \Delta v &= \psi(|x|)v \leq p(|x|)v \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Segue de (3.43) e (3.45) que

$$w(r) \leq M \leq v(r) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Daí, $w$ é subsolução da equação (3.30) e $v$ é supersolução da equação (3.30), com $\gamma = 1$.

Desta forma, a equação (3.30) tem uma solução $u$, satisfazendo $w \leq u \leq v$ em $\mathbb{R}^N$, desde que, $w \ \ e \ \ v$ são soluções positivas e limitadas, obtemos a solução desejada para $\gamma = 1$.

**Prova de (b).**

Suponha agora, que a equação (3.31) é válida e suponha que a conclusão é falsa, isto é, suponha que $u$, não negativa, não trivial é solução inteira da equação (3.30) com $0 \leq u \leq M$.

Considere

$$\hat{u}(r) \equiv \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} u(x)d\sigma_r \equiv \int_{|x|=r} u(x)d\sigma.$$

Então,

$$\Delta \hat{u} = \int_{|x|=r} \Delta u = \int_{|x|=r} pu^\gamma d\sigma.$$

Desde que $\hat{u}$ é radial,

$$\Delta \hat{u} = (\hat{u}(r)' r^{N-1})' r^{1-N} = \int_{|x|=r} pu^\gamma d\sigma,$$

daí,

$$\hat{u}(r)' r^{N-1} = \int_0^r \left( s^{N-1} \int_{|x|=r} pu^\gamma d\sigma \right) ds,$$

assim

$$\hat{u}'(r) = r^{1-N} \int_0^r \left( s^{N-1} \int_{|x|=r} pu^\gamma d\sigma \right) ds \geq 0,$$

implicando que $\hat{u}$ é uma função não decrescente.

Além disso, $u$ é não negativa e não trivial, logo existem $R > 0$ e $\varepsilon > 0$, tais que $\hat{u} \geq \varepsilon$ , para todo $r \geq R$, disso temos

$$\hat{u}(r) = \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} u(x) d\sigma_r \leq \frac{1}{w_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} d\sigma_r = u(r) \leq M$$

Logo

$$\begin{aligned} M &\geq \hat{u}(r) = \hat{u}(0) + \int_0^r \left[ t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \left( \int_{|x|=r} pu^\gamma d\sigma \right) ds \right] dt \\ &\geq \hat{u}(0) + \int_0^r \left[ t^{1-n} \int_0^t s^{N-1} \psi(s) \left( \int_{|x|=r} u^\gamma d\sigma \right) ds \right] dt. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Mas

$$u = u^\gamma u^{1-\gamma} \leq u^\gamma M^{1-\gamma}, \text{ implicando que } u^\gamma \geq u M^{\gamma-1}.$$

Assim,

$$\int_{|x|=r} u^\gamma d\sigma \geq M^{\gamma-1} \int_{|x|=r} u d\sigma = M^{\gamma-1} \bar{u}(s) \geq \varepsilon M^{\gamma-1} \text{ se } s \geq R. \tag{3.47}$$

De (3.46) e (3.47),

$$\begin{aligned} \hat{u}(r) &\geq \hat{u}(0) + \varepsilon M^{\gamma-1} \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \psi(s) ds \right) dt \\ &\geq \varepsilon M^{\gamma-1} \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \psi(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $\hat{u}(0) \geq 0$.

Portanto

$$M \geq \hat{u}(r) \geq \varepsilon M^{\gamma-1} \int_0^r \left( t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \psi(s) ds \right) dt. \tag{3.48}$$

Como por hipótese

$$\int_0^\infty r\psi(r) dr = \infty,$$

fazendo $r \to \infty$ em (3.48), obtemos

$$M \geq \hat{u}(r) \geq \infty.$$

Isso é absurdo! Logo, é impossível a existência de tal solução $u$. ■

**Observação 3.3** *Observamos que a existência de solução inteira, limitada, positiva da equação (3.30), é um problema aberto, se p satisfaz*

$$\int_0^\infty t\phi(t)dt = \infty \quad e \quad \int_0^\infty t\psi(t)dt < \infty.$$

# Apêndice A

# Espaços Vetoriais Topológicos

Agora, iremos apresentar alguns conceitos e resultados de espaços vetoriais topológicos, que serão importantes para o entendimento do teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff, o qual é uma ferramenta básica na demostração do Teorema 2.2.2 (Capítulo 2), no caso em que $0 < \gamma < 1$.

**Definição A.1 (Topologia)** [Ver [27], p.6] *Seja $X$ um conjunto não vazio. Uma coleção $\Im$ de subconjuntos de $X$ é uma topologia em $X$ se*

*(i)* $\emptyset, X \in \Im$;

*(ii) Se* $V_1, V_2 \in \Im$ *então* $V_1 \cap V_2 \in \Im$;

*(iii) Se* $\{V_i\}_{i\in I} \in \Im$ *então* $\displaystyle\bigcup_{i\in I} V_i \in \Im$.

*Neste caso, dizemos que $(X, \Im)$ é um* **espaço topológico** *e os $V_i$ são os abertos de $\Im$.*

**Definição A.2 (Vizinhança)** [Ver [27], p.7] *Uma vizinhança de um ponto $p \in X$ é qualquer aberto que contém $p$.*

**Definição A.3 (Base)**[Ver [27], p.7] *Uma coleção $\Im' \subset \Im$ é uma base para $\Im$ se dado $V \in \Im$ então $V = \displaystyle\bigcup_{V_i\in\Im'} V_i$.*

**Definição A.4 (Base Local)** [Ver [27], p.7] *Uma coleção $\tau$ de vizinhanças de um ponto $p \in X$ é uma base local de $p$, se qualquer vizinhança de $p$ contém um membro de $\tau$. Isto é, se $\tau = \{V_i\}, V_i \in \Im$ então*

*(i)* $p \in V_i, \quad \forall \quad V_i \in \tau$;

*(ii) Se $V \in \Im$ contém $p$, existe $V_i \in \tau$ tal que $p \in V_i \subset V$.*

**Observação A.1** *A coleção dos abertos de um Espaço métrico $(X, d)$ satisfaz os axiomas da definição de espaço topológico, assim obtemos uma topologia denominada* **topologia induzida** *pela métrica $d$.*

**Definição A.5 (Espaço Metrizável)** [Ver [27], p.8] *Um espaço topológico $(X, \Im)$ se diz metrizável se existe uma métrica $d$ em $X$ tal que a coleção dos abertos de $(X, d)$ coincide com $\Im$.*

**Definição A.6 (Função Contínua)** [Ver [27], p.13]*Sejam $X_1, X_2$ espaços topológicos. Uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é contínua em $p \in X_1$ se dado um aberto $V_2$ de $X_2$, com $f(p) \in V_2$, existe um aberto $V_1$ de $X_1$ tal que $p \in V_1$ e $f(V_1) \subset V_2$.*

*Dizemos que $f$ é contínua, quando é contínua em todos os pontos de $X_1$.*

**Definição A.7 (Espaços Vetoriais Topológicos)** [Ver [27], p.7] *Suponha que $X$ é um espaço vetorial e $\Im$ uma topologia em $X$ tal que*

*(i) Todo ponto de $X$ é um conjunto fechado;*

*(ii) As operações de espaço vetorial são contínuas com relação a $\Im$.*

*Neste caso, dizemos que $X = (X, \Im)$ é um espaço vetorial Topológico.*

Em um espaço vetorial topológico $X$ , dizemos que $V \subset X$ é aberto se, e só se $a + V$ é aberto para cada $a$ em $X$. Portanto, qualquer topologia fica completamente determinada por uma base local. Neste contexto, base local será considerada como base local em 0.

**Definição A.8 (Métrica Invariante)** [Ver [27], p.8] *Uma métrica $d$ sobre um espaço vetorial $X$ é invariante se*

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall \quad x, y, z \ \in X.$$

**Definição A.9 (Espaço Localmente Convexo)** [Ver [27], p.8] *Um espaço vetorial topológico é localmente convexo se existir uma base local $\beta$ formada por conjuntos convexos.*

**Definição A.10 (Espaço de Fréchet)** [Ver [27], p.8] *Um espaço localmente convexo é um espaço de* **Fréchet** *se sua topologia $\Im$ é induzida por uma métrica invariante e em relação a esta métrica o espaço é completo.*

**Teorema A.11** *Seja $X$ um espaço vetorial topológico com uma base local enumerável, então $X$ é metrizável.*

**Prova.** Conforme Teorema 1.24 em [27] p.18. ■

**Definição A.12 (Conjunto Equilibrado)** [Ver [27], p.6] *Um conjunto $E \subset X$ é dito equilibrado se $\alpha E \subset E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};\ |\alpha| \leq 1$.*

**Definição A.13 (Conjunto Limitado)** [Ver [27], p.8] *Seja $X$ espaço vetorial topológico. Um conjunto $E \subset X$ é limitado se para toda vizinhança $V$ de "0"em $X$, corresponde $s > 0, s \in \mathbb{R}$ tal que $E \subset tV$ para todo $t > s$.*

**Definição A.14 (Seminorma)** [Ver [27], p.24]*Uma seninorma sobre um espaço vetorial $X$ é uma função $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

*(i)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall \ x, y \ \in X;$

*(ii)* $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X.$

**Definição A.15 (Família Separada)** [Ver [27], p.24] *Uma família de seminormas sobre $X$ é dita separada se para cada $x \neq 0$ corresponde pelo menos um $p \in \wp$ tal que $p(x) \neq 0$, onde $\wp$ denota a família de seminormas.*

**Definição A.16 (Espaço Normável)** [Ver [27], p.8] *Um espaço vetorial topólogico $X = (X, \Im)$ é normável se existir uma norma em $X$ tal que a métrica induzida pela norma é compatível com $\Im$.*

**Teorema A.17** *Um espaço vetorial topológico $X = (X, \Im)$ é normável se, e somente se, sua origem tem uma vizinhança convexa e limitada.*

**Prova.** Conforme teorema 1.39 em [27], p.28. ■

**Teorema A.18** *Seja $\wp$ uma família separada de seminormas em um espaço vetorial $x$. Dado $p \in \wp$ e $n \in \mathbb{N}$ defina*

$$V(p,n) = \left\{ x \in X \ / \ p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

*Seja $\beta$ a coleção de todas as intersecções finitas dos conjuntos $V(p,n)$. Então $\beta$ é uma base local equilibrada para uma topologia $\Im$ de $X$ que torna $X$ um espaço localmente convexo tal que*

*(i) Qualquer $p \in \wp$ é contínua;*

*(ii) Um conjunto $E \subset X$ é limitado se, e só se, todo $p \in \wp$ é limitado em $E$.*

**Prova.** Conforme teorema 1.37 em [27], p.26. ■

**Observação A.2** *Se $\wp = \{p_i, \ i = 1, 2, \ldots\}$ é uma família enumerável e separada de seminormas em $X$, o teorema acima, mostra que $\wp$ induz uma topologia $\Im$ com uma base local enumerável. Do teorema B.0.17 obtemos que $\Im$ é metrizável.*

Uma métrica invariante por translação, compatível com a topologia $\Im$ gerada por $\wp$ é dada por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}.$$

Para provar que $d$ é compatível com $\Im$, basta mostrar que as bolas

$$B_r(0) = \{x \ / \ d(x,0) < r\}$$

formam uma base local para $\Im$.

Desde que cada $p_i$ é $\Im$-contínua segue que $d$ é contínua na topologia produto. Então

$$B_r(0) = \{x \ / \ d(x,0) < r\} = d^{-1}(-\infty, r) \times \{y = 0\}$$

é aberto em $\Im$. Seja $W$ uma vizinhança de 0, logo $W \supset V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k)$. Se $x \in B_r(0)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r \Rightarrow \frac{p_i(x)}{1 + p_i(x)} < 2^i r.$$

Tome $r < \frac{2^{-i}}{1+n_i}$, $i = 1, \ldots k$. Daí $\frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < \frac{\frac{1}{n_i}}{1+\frac{1}{n_i}}$

$$\Rightarrow p_i(x) < \frac{1}{n_i} \Rightarrow x \in W \supset V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k) \Rightarrow x \in W.$$

Portanto $B_r(0) \subset W$, é base local.

**Exemplo 3** [Ver [27], p.31]*: O espaço $C([0, \infty))$ é um espaço de Fréchet.*

De fato, note que

$$[0, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} K_n,$$

onde cada $K_n = [0, n]$ é compacto e $K_n \subset K_{n+1} \quad \forall\ n$.

Defina $p_n : C([0, \infty)) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$p_n(y) = \max_{r \in K_n} |y(r)| \quad n = 1, 2, \ldots$$

**Afirmação A.19** *$p_n$ é seminorma e compõe uma família separada.*

Com efeito, dados $x, y\ \in C([0, \infty))$ temos

$$\begin{aligned}
(i) p_n(x + y) &= \max_{r \in K_n} |(y + x)(r)| \leq \max_{r \in K_n} \{|y(r)| + |x(r)|\} \\
&\leq \max_{r \in K_n} |y(r)| + \max_{r \in K_n} |x(r)| \leq p_n(x) + p_n(y) \\
(ii) p_n(\alpha x) &= \max_{r \in K_n} |\alpha x(r)| = |\alpha| \max_{r \in K_n} |x(r)| = |\alpha| p(x)
\end{aligned}$$

Se $y \neq 0$, existe $r_0 \in K_{n_0}$ tal que $y(r_0) \neq 0$, logo

$$p_{n_0}(y) = \max_{r \in k_{n_0}} \{|y(r)|\} \geq |y(r_0)| > 0.$$

Portanto $\wp = \{p_n\}$ é uma família de seminormas separada e enumerável.

Do teorema B.0.24, segue que $\wp$ induz uma topologia $\Im$ localmente convexa em $C([0, \infty))$. Além disso, como $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots$ temos que os conjuntos

$$\beta_n = \left\{ y \in C([0, \infty)) \ / \ p_n(y) < \frac{1}{n} \right\},$$

determina uma base local convexa e enumerável.

Logo $C([0,\infty)) = (C([0,\infty),\Im)$ é metrizável, e a topologia obtida de $\beta_n$ é compatível com a métrica

$$d(y_1, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(y_1 - y_2)}{1 + p_n(y_1 - y_2)}.$$

**Afirmação A.20** *$(C([0,\infty)), d)$ é completo.*

Sejam $\{y_i\} \subset (C([0,\infty)), d)$ sequência de Cauchy

$$\Rightarrow d(y_i, y_j) \stackrel{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow p_n(y_i - y_j) \stackrel{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow |y_i(x) - y_j(x)| \stackrel{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ em } K_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow y_i \longrightarrow w_n, \quad \text{uniformemente em} \quad K_n, n = 1, 2, \ldots$$

Agora defina $w : C([0,\infty)) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $w|_{k_n} = w_n$. Segue que $y_i \to w$ uniformemente em $K_n, n = 1, 2, \ldots$ com $w \in C([0,\infty))$

$$\Rightarrow p_n(y_i - w) \longrightarrow 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow d(y_i, w) \longrightarrow 0$$

logo $d$ é uma métrica completa.

Portanto $C([0,\infty)) = (C([0,\infty)), d)$ é um espaço de Fréchet.

**Exemplo 4** *: $C([0,\infty))$ é não normável.*

Observe que em cada $V_n$ podemos tomar $y$ tal que $p_{n+1}(y)$ seja tão grande quanto desejarmos. Segue do item (ii) do teorema B.0.29 que nenhuma vizinhança $V_n$ é limitada em $C([0,\infty))$, assim deduzimos do teorema B.0.28 que $C([0,\infty))$ é não normável.

**Teorema A.21 (A. Tychonoff)** *Seja $X$ um espaço topológico localmente convexo e seja $Y \subset X$ um subconjunto compacto e convexo. Se $f : Y \longrightarrow Y$ é contínua então tem um ponto fixo.*

**Prova.** Conforme teorema 2.2 em [8], p.414. ■

**Teorema A.22 (J. Schauder)** *Seja $X$ um espaço de Banach e seja $Y \subset X$ um subconjunto convexo e fechado e $f : Y \longrightarrow Y$ contínua. Se $\overline{f(Y)}$ é compacto, então $f$ tem um ponto fixo.*

**Prova.** Conforme teorema 3.2 em [8], p.415. ■

# Apêndice B

# Resultados Utilizados na dissertação

Neste apêndice enunciaremos as principais definições e teoremas utilizados no decorrer deste trabalho.

**Teorema B.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda a parte para uma função mensurável* $f$*. Se existe uma função integrável* $g$ *tal que*

$$|f| \leq g \ \ para \ \ todo \ \ n \in \mathbb{N},$$

*então* $f$ *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

**Prova.** Conforme teorema 5.6 em [3], p.44. ■

**Teorema B.2 (Desigualdade de Hölder)** *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $1 \leq p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

**Prova.** Conforme teorema 7 em [2], p. 115. ■

**Teorema B.3 (Teorema de Riesz-Fréchet)** *Todo funcional linear $f$ sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle,$$

*onde $z$ é unicamente determinado e verifica*

$$\|f\| = \|z\|.$$

**Prova.** Conforme teorema V.5 em [4], p. 81. ■

**Definição B.4 (Funções contínuas em superfícies)** (Ver [24], p.309) *Dizemos que uma aplicação $g : (\partial\Omega) \longrightarrow (0, \infty)$ é contínua quando, para cada $x \in \partial\Omega$, existe uma parametrização $\Phi : V_0 \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow V \subset \partial\Omega$, com $x \in V$, tal que $g \circ \Phi : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

**Definição B.5 (Função Harmônica)** (Ver [13], p.13) *Seja $\Omega$ um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$. A função $u$ é dita* **harmônica (sub-harmônica; super-harmônica)** *em $\Omega$ se satisfaz*

$$\Delta u = 0 \quad em \quad \Omega \quad (\Delta u \geq 0; \quad \Delta u \leq 0),$$

*onde $\Delta u$ denota o Laplaciano de $u$, definido como sendo*

$$\Delta u = \sum_{i=j}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

**Teorema B.6 (Teorema da Divergência)** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, $\partial\Omega \in C^1$ e seja $\nu$ a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Para uma função vetorial $F$ em $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds$$

*onde $divF = \nabla F = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ e $ds$ indica o elemento de área de dimensão $N-1$ em $\partial\Omega$.*

**Prova.** Conforme [7] ■

**Teorema B.7 (Identidades de Green)** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o* **teorema da divergência** *e sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Então*

*(I) Primeira Identidade de Green*

$$\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

*(II) Segunda Identidade de Green*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} \left( v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds$$

**Prova.** Conforme [7] ■

**Definição B.8 (Função Convexa)** (Ver [21], p.44) *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ é dito convexo se $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ para todo $x$ e $y \in K$ e todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Uma função $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, é dita* **função convexa** *em um conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ se é uma função de valor real satisfazendo:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{B.1}$$

*para todo $x, y \in K$ e todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Se a igualdade não ocorre em $B.1$ quando $x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$ então $f$ é* **estritamente convexa**. *Mas geralmente, nós dizemos que $f$ é estritamente convexa em um ponto $x \in K$ se $f(x) < \lambda f(y) + (1+\lambda)f(z)$ onde $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ para $0 < \lambda < 1$ e $y \neq z$. Se temos a inequação $B.1$ ao contrário, $f$ é dita* **convexa** *(alternativamente, $f$ é côncava $\Leftrightarrow -f$ é convexa). Além disso, se $k$ é um conjunto aberto, então a função convexa é contínua.*

**Teorema B.9** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável no intervalo aberto $I$. Para que $f$ seja convexa é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.*

**Prova.** Conforme teorema 11 em [23] , p. 287. ■

**Teorema B.10 (Desigualdade de Jensen)** *Sejam $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $f$ uma função real definida em um conjunto $\Omega$, mensurável. Desde que $J$ é convexa, ela é contínua e $(J \circ f)(x) = J(f(x))$ é mensurável em $\Omega$.*

*Assuma que $\mu(\Omega) = \int_\Omega \mu \, dx$ é finita e suponha que $f \in L^1(\Omega)$, onde $\langle f \rangle$ é valor médio de $f$, isto é,*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f \, d\mu.$$

*Então*

$$\langle J \circ f \rangle \quad \geq \quad J(\langle f \rangle).$$

**Prova.** Conforme teorema 2.2 em [21], p.45. ■

**Caso B.11** *Considere* $J(t) = -t^{\gamma}$ *com* $0 < \gamma \leq 1$.

Note que $J$ é convexa, pois

$$J'(t) = -\gamma t^{\gamma-1} \quad ; \quad J''(t) = -\gamma(\gamma-1)t^{\gamma-2} \geq 0,$$

usando o fato de $\gamma - 1 \leq 0$.

Portanto

$$J''(t) \geq 0, \quad \forall \;\; t > 0.$$

Definindo $f(t) = t$, temos

$$J(\langle f(t)\rangle) = J(\langle t\rangle) = J\left[\frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} t d\sigma_r\right] = -\left[\frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} t d\sigma_r\right]^{\gamma} \quad \text{(B.2)}$$

onde $v_0(S^{N-1}r)$ denota o volume da esfera de $(N-1)$ dimensão e $\sigma_r$ é a medida da esfera.

Por outro lado,

$$\langle J \circ f(t)\rangle = \langle J(t)\rangle = \frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} -t^{\gamma} d\sigma = -\frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} t^{\gamma} d\sigma, \qquad \text{(B.3)}$$

De (B.2), (B.3) e aplicando teorema acima segue que

$$\frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} t^{\gamma} d\sigma_r \leq \left[\frac{1}{v_0(S^{N-1}r)} \int_{|x|=r} t d\sigma_r\right]^{\gamma},$$

isto é,

$$\int_{|x|=r} t^{\gamma} d\sigma \leq \left[\int_{|x|=r} t d\sigma\right]^{\gamma}. \qquad \text{(B.4)}$$

**Definição B.12** (Ver [9], p.226) *Seja* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência de funções contínuas, definidas em um intervalo* $[a,b]$. *Dizemos que a sequência* $f_n$ *é:*

- **Equicontínua** -*Se dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que* $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x$ *e* $y \in [a,b]$ *com* $|x - y| \leq \delta$.

- **Equilimitada**(*ou uniformemente limitada*) - *Se existe* $C > 0$, *tal que*

$$|f_n(t)| \leq C, \quad \forall t \in [a,b] \;\; e \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Seja $h$ um difeomorfismo de classe $C^1$ numa vizinhança de $X$, e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ integrável. A fórmula de **mudança de variáveis** para integrais múltiplas, é dada por

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|\det h'(x)|dx.$$

**Definição B.13 (Função localmente Lipschitziana)** (Ver [24], p.356) *Uma aplicação* $f : X \to \mathbb{R}^N$*, definida num conjunto* $X \subset \mathbb{R}^M$*, diz-se* **localmente Lipschitziana** *quando, para todo* $x \in X$*, existem* $V_x \subset \mathbb{R}^M$ *aberto contendo* $x$ *e* $k_x > 0$ *tais que* $y, z \in V_x \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq k_x|y - z|$*. Noutras palavras, existe uma cobertura aberta* $X \subset \cup V_x$ *tal que cada restrição* $f\big|(V_x \cap X)$ *é Lipschitziana.*

**Definição B.14 (Critério de Compacidade)** (Ver [17]) *Sejam* $X$ *e* $Y$ *espaços normados. Um operador linear* $T : X \to Y$ *é compacto se, e somente se, toda sequência limitada* $\{x_n\} \subset X$ *tem a propriedade que a sequência* $\{T(x_n)\} \subset Y$ *possui uma subsequência convergente.*

**Teorema B.15** *Seja* $\{f_n\}$ *uma sucessão uniformemente convergente de funções contínuas em um intervalo fechado* $[a, b]$*. Então, os elementos de* $\{f_n\}$ *formam um conjunto equicontínuo de funções.*

**Prova.** Conforme teorema 9.15 em [9], p.226. ∎

**Teorema B.16 (Teorema de Arzela-Ascoli)** *Se* $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma sequência de funções* **equilimitada** *e* **equicontínua**.*Então,* $\{f_n\}$ *possui uma subsequência convergente em* $[a, b]$*.*

**Prova.** Conforme teorema 9.16 em [9], p.227. ∎

**Lema B.1 (Lema de Gronwall)** *Sejam* $\alpha, \beta$ *e* $\delta$ *funções contínuas em um intervalo* $(a, b)$*, tais que* $\beta \geq 0$ *e*

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)\ ds. \tag{B.5}$$

*Então*

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}\ ds. \tag{B.6}$$

*Em particular se* $\alpha(x) = K$ *=const, temos*

$$\delta(x) \leq Ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds}. \tag{B.7}$$

**Prova.** Conforme Lema 3.9 em [11], p. 61. ∎

Agora, daremos algumas definições necessárias para o entendimento do Príncipio do Máximo Forte.(Ver [13])

Considere operador diferencial elíptico linear da forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad i,j = 1,2,\ldots N \;\; e \;\; a_{ij}, b^iec \;\in C(\bar{\Omega})$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ está em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ para $N \geq 2$.

Dizemos que L é um operador elíptico num ponto $x \in \Omega$ se a matriz $[a^{ij}(x)]$ é positiva; isto é, se $\alpha(x) \;\; e \;\; A(x)$ denotam respectivamente, o mínimo e o máximo dos autovalores de $[a^{ij}(x)]$, então

$$0 < \alpha(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq A(x)|\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N \backslash 0$. Se $A/\alpha$ é limitado em $\Omega$ dizemos que $L$ é uniformemente elíptico.

**Exemplo 5** *O operador Laplaciano $\Delta$ é uniformemente elíptico.*

De fato, por definição

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Note que esse operador é da forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \;\; , \;\; \text{se} \;\; i = j \\ 0 \;\; , \;\; \text{se} \;\; i \neq j \end{cases}$$

e $b = c = 0, \;\; \forall \;\; x \in \Omega \subset \;\mathbb{R}^N$.

Então dado $\xi \in \mathbb{R}^N$ qualquer, onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, temos

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{N} {\xi_i}^2 = \|\xi\|^2,$$

fazendo $\theta = 1$ obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta\|\xi\|^2.$$

Portanto, $\Delta$ é um operador uniformemente elíptico.

**Teorema B.17 (Princípio do Máximo Forte de Hopf)** *Sejam, $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$) num domínio $\Omega$ (não necessariamente limitado). Então se $u$ atinge o seu máximo (mínimo) no interior de $\Omega$, $u$ é uma constante. Consequentemente, a função harmônica não pode atingir um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de $\Omega$ a menos que seja constante.*

**Prova.** Conforme Teorema 2.2 em [13], p. 15. ■

**Teorema B.18 (Princípio do Máximo Fraco)**
*Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, e $\Omega$ limitado. Então*

(i) *Se $\Delta u \geq 0$ em $\Omega$,* $\quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

(ii) *Se $\Delta u \leq 0$ em $\Omega$,* $\quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

**Prova.** Conforme Teorema 2.3 em [13], p. 15. ■

**Definição B.19 (Função Hölder Contínua)** (Ver [10]) *Uma função $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua de expoente $\alpha, 0 < \alpha < 1$, se*

$$H_\alpha[u] = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

**Teorema B.20 (Estimativa Interior)** *Sejam $\Omega$ um domínio de $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^{0,\nu}_{loc}(\Omega)$ tal que $\Delta u = f$ em $\Omega$. Então $u \in C^{2,\nu}_{loc}(\Omega)$, e para $\Omega_0$, $\Omega_1 \subset \Omega$ , com $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}_1$ compacto, temos*

$$\|u\|_{2,\nu,\Omega_0} \leq K \left( \|u\|_{\infty,\Omega_1} + \|f\|_{0,\nu,\Omega_1} \right),$$

*onde $K = K(\Omega_0, \Omega_1)$.*

**Prova.** Conforme Teorema 4.6 em [13], p. 60 e Teorema 1.7 em [10], p.11. ■

**Teorema B.21** *Seja $c \geq 0$, constante. Se $f \in C^{0,\nu}_{loc}(\Omega)$ e $\varphi \in C(\partial\Omega)$ então*

$$\begin{cases} \Delta u - cu &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

*tem solução única $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

**Prova.** Conforme Teorema 6.13 em [13], p. 106. ■

**Teorema B.22** *Suponha que $u$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$, constante. Se*

$$\begin{cases} \Delta u - cu & \geq & \Delta v - cv \ \text{ em } \ \Omega, \\ \quad u & \leq & v \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*então $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.*

**Prova.** Conforme Teorema 3.3 em [13], p. 33. ■

**Teorema B.23 (Imersões de Sobolev)** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio de classe $C^1$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$ temos as seguintes imersões contínuas:*

*(i) Se $m < \dfrac{N}{p}$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \ \forall q \in [p, p*], \ \text{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, \quad \text{ou seja } p^* = \frac{2N}{N-2m};$$

*(ii) Se $m = \dfrac{N}{p}$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \ \forall q \in [p, \infty);$$

*(iii) Se $m > \dfrac{N}{p}$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

*Onde $C_B^j(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que juntamente com as suas derivadas até a ordem $j$ são limitadas em $\Omega$. Neste espaço usamos a norma*

$$\|u\|_{C_b^j(\Omega)} = \max \sup_{0 \leq |\alpha| \leq j} |D^\alpha u(x)|$$

*(iv) Se $m > \dfrac{N}{p} > m - 1$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leq m - \frac{N}{p}.$$

**Prova.** Ver [10]. ■

**Lema B.2 (Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica)** *Se* $a_i > 0$ *e* $p_i > 0$ *são números reais, com* $i = 1, 2, \ldots, n$ *e* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *então*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i,$$

*isto é,*

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n.$$

**Prova.** Ver [9]. ■

**Caso B.24** *Um caso particular da desigualdade acima:*
*Se* $a, b > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, *então,*

$$a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b, \quad \textit{onde } \beta = 1 - \alpha; \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Da desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} a^{\alpha} &\leq (\alpha a + \beta b) b^{-\beta} \\ &= [\alpha a + (1-\alpha) b] b^{\alpha - 1} \\ &\leq \alpha a b^{\alpha-1} + b^{\alpha} - \alpha b b^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$a^{\alpha} - b^{\alpha} \leq \alpha b^{\alpha-1}(a - b), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

De onde segue, que existe uma constante $C = C(\alpha) > 0$, tal que

$$|a^{\alpha} - b^{\alpha}| \leq C(\alpha)|a - b|. \tag{B.8}$$

**Teorema B.25 (Lax-Milgran)** *Seja* $H$ *um espaço de Hilbert e* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma transformação bilinear, contínua e coerciva. Isto é,*
*(i)* **Contínua**, *se existe uma constante* $C$, *tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall\, u, v \in H,$$

*(ii)* **Coerciva**, *se existe uma constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(u, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall\, v \in H.$$

*Então, para toda* $\varphi \in H'$, *existe único* $u \in H$ *tal que*

$$\varphi(v) = a(u, v) \quad \forall \quad v \in H.$$

**Prova.** Conforme teorema V.6 e Corolário V.8 em [4], p. 82-84. ■

**Teorema B.26** *Se f(u) é não decrescente e satisfaz as condições* $(F)$ e $(KO)$, *isto é,*

- $(F)$ $f \in C^1[0,\infty), f' \geq 0, f(0) = 0$ e $f > 0$ em $(0,\infty)$

  *e a condição de Keller-Ossermam*

- $(KO)$
$$\int_1^\infty [2F(t)]^{-1/2} dt < \infty \quad \text{onde} \quad F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

*Então, em algum domínio limitado* $\Omega$ *existe uma solução de*

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to \partial\Omega. \end{cases}$$

**Prova.** Conforme Teorema III em [16], p.504. ■

**Teorema B.27** *Na bola* $\Omega : |x| < R$ em $\mathbb{R}^N$, *considere* $u > 0$ *uma solução positiva em* $C^2(\overline{\Omega})$ *de*

$$\begin{cases} \Delta u & = & -f(u) \quad \text{quando} \quad |x| < R, \\ u & = & 0 \quad \text{quando} \quad |x| = R. \end{cases}$$

*Se* $f$ *é de classe* $C^1$. *Então* $u$ *e radialmente simétrica e*

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0, \quad \text{para} \quad 0 < r < R.$$

**Prova.** Conforme Teorema 1 em [12], p.209. ■

**Teorema B.28** *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < \infty$. *Então, existe uma única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

*além disso, existe uma constante* $C$ *independente de* $f$ *e* $u$ *tal que*

$$\|u\|_{2,p,\Omega} \leq C\|f\|_{p,\Omega}.$$

*Em particular, se* $p > \frac{N}{2}$ *e* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, *então, existe uma única solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & \varphi \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

**Prova.** Conforme Teorema 11.3 em [15], p.42. ■

# Bibliografia


[1] BANDLE, C. & Marcus, M., Large Solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and assymptotic behavior, J. Anal. Math. 58 (1992), 9-24.

[2] BARRA, G. de,. Measure theory e Integration. New York: John Wiley, p. 239, [ 1981].

[3] BARTLE, Robert Gardner,. The elements of integration and Lebesgue measure. [1st ed.] New York: John Wiley, p. 179, [1955].

[4] BRÉZIS, H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications . Paris: Masson, p. 233, [1983].

[5] CHENG, K-S., & NI, Wei-Ming, On the structure of the conformal scalar curvature equation on $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 261-278.

[6] CÎRSTEA, Florica St., & RADULESCU, Vicentiu D., Blow-up boundary solutions of semilinear elliptic problems, Nonlinear Anal. 48 (2002), 521-534.

[7] EVANS, L. C.Partial Differential Equations. American Mathematical Society, [1998].

[8] DUGUNDJI, James. Topology. Boston: Allyn and Bacon, Inc. p. 447, [1966].

[9] FIGUEIREDO, Djairo G. Análise I. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A. p. 256, [1996]. Janeiro - RJ.

[10] FIGUEIREDO, Djairo G., Equações Elípticas não Lineares. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq, (IMPA), Rio de Janeiro - RJ.

[11] FIGUEIREDO, Djairo G., Equações Diferenciais Aplicadas ( 2. Edição). Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq, (IMPA), Rio de Janeiro, p. 61-62, [2002].

[12] GIDAS B., NI, W. M. & NIRENBERG, L., Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68 (1979) , p. 209-243, [1972].

[13] GILBARD, D. & TRUDINGER, N.S. Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag Berlin. p. 517,[1998].

[14] HOLANDA, Angelo Rocalli Furtado de. Soluções Positivas de Problemas Singulares tipo Blow-up. Brasília-DF: UNB, [2005].

[15] KAVIAN, O., Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques Springer-Verlag, [1993].

[16] KELLER, J. B., On Solution of $\Delta u = f(u)$, Commm. Pure. Appl. MAth. 10(1957), 503-510.

[17] KREYSZIG, Erwin. Introductory functional analysis with applications. New York: Wiley, p. 688, [1978].

[18] KUSANO, Takaŝi & OHARU, Shinnosuke, Bounded entire solutions of second-order semilinear elliptic equations witth application to a parabolic initial value problem, Indiana Univ. Math. J. 34 (1)(1985) 85-95.

[19] LAIR, Alan V. & SHAKER, Aihua W., Classical And weak solutions of a singular semilinear elliptic problem, J. Math. Anal. Appl. 211 (1997) 371-385.

[20] LAIR, Alan V. & SHAKER, Aihua W., Large solutions of sublinear elliptic equations, Nonlinear Anal. 39(2000), 745-753.

[21] LIEB, Elliott H. Real analysis. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, p. 346, [2001].

[22] LAZER, A. C. & MCKENNA, P. J., On a singular nonlinear elliptic boudary-value problem, Proc. Amer. Math. Soc. 111(1991), 721-730.

[23] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise Vol. 1(12 Edição), Projeto Euclides. [Rio de Janeiro]: IMPA/CNPq, p. 431, [2006].

[24] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise Vol. 2(9 Edição), Projeto Euclides. [Rio de Janeiro]: IMPA/CNPq, p. 546, [2006].

[25] LIMA, Elon Lages,. Espaços métricos. [Rio de Janeiro]: IMPA/CNPq, São Paulo: Edgard Blucher, p. 299, [1977].

[26] NI, Wei-Ming, On the elliptic equation $\Delta u + K(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations, and applications in geometry, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 493-529.

[27] RUDIN, Walter. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill, Inc. p. 397, [1973].