UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

José Anderson Santos de souza

O Teorema de Baire

CUITÉ - PB
2019

JOSÉ ANDERSON SANTOS DE SOUZA

O Teorema de Baire

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador: Luciano Martins Barros.

CUITÉ - PB
2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S729t Souza, José Anderson Santos de.

O teorema de Baire. / José Anderson Santos de Souza – Cuité: CES, 2019.

81 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2019.

Orientação: Dr. Luciano Martins Barros.

1. Espaços métricos. 2. Funções contínuas. 3Topologia. I. Título.

Biblioteca do CES – UFCG CDU 515.1

JOSÉ ANDERSON SANTOS DE SOUZA

Teorema de Baire

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 02 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Jogli Gidel da Silva Araújo - UFRPE
Examinador

Prof. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG
Examinador

Este trabalho é dedicado à minha mãe Maria José, a minha irmã Aline e ao meu irmão Alan.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e à minha família, minha mãe Maria José, minha irmã Aline, meu irmão Alan, ao meu tio Marinaldo e família, e a minha namorada Andréia por todo o apoio.

Também agradeço aos vários amigos que fiz durante o curso, em especial, André, Brenda, Alane, Marcos Vagner, Marcos Sérgio, Mônica, Samara, Leandro, William, Isaac Ferreira e Isaac Guedes pelas inúmeras ajudas e momentos de alegria e descontração.

Aos professores da Unidade de Física e Matemática da UFCG-CES, que contribuíram para que eu conseguisse chegar até aqui. Em especial, ao professor Luciano Martins, por toda a paciência, compreensão, apoio e empenho na orientação deste trabalho.

Aos professores, Jogli Gidel e Maria de Jesus por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora deste trabalho, e por toda a paciência e compreensão.

A UFCG e ao CAPES pela concessão de bolsas com as quais consegui me manter e continuar com os meus estudos.

Enfim, a todos que contribuíram e me apoiaram de maneira direta ou indireta, o meu muito obrigado.

“ Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente ”

(Elon Lages Lima)

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo sobre os Espaços Métricos apresentando sua definição junto com alguns exemplos e resultados, buscando ferramentas suficientes para demonstrar o teorema de Baire. Teorema este que possui aplicações tanto na Análise Funcional, quanto na Topologia, o qual destaca sua importância. Para poder demonstrá-lo fizemos o estudo na teoria dos Espaços Métricos como: bolas e esferas, conjuntos limitados, distância entre ponto e conjunto e entre conjuntos. Além destes, estudamos sequências, bem como a topologia dos espaços métricos, conjuntos abertos e conjuntos fechados. Também estudamos as funções contínuas, destacando a definição de homeomorfismo e de continuidade uniforme. E para podermos analisar o teorema de Baire investigamos os espaços métricos completos e suas relações com as sequências de Cauchy. Porém, antes de apresentar o teorema em si e demonstrá-lo, fizemos uma breve biografia de René-Louis Baire, e em seguida, realizamos a generalização do Princípio dos Intervalos Encaixantes em Análise, o qual é um resultado básico importante para a teoria.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Funções contínuas. Topologia.

ABSTRACT

In this paper we conducted a study on Metric Spaces presenting its definition along with some examples and results, looking for enough tools to demonstrate the theorem from Baire. This theorem that has applications in both Functional Analysis, how much in topology, which highlights its importance. In order to demonstrate this, we have done the study in the theory of spaces Metrics as: balls and spheres, limited sets, distance between point and set and between sets. Besides these, we study sequences, as well as the topology of metric spaces, open sets and closed sets. We also study the continuous functions, destacando a definição de homeomorfismo e de continuidade uniforme. And so we can analyze the theorem Baire's investigation investigated the complete metric spaces and their relationships with the sequences of Cauchy. However, before presenting the theorem itself and demonstrating it, we made a brief biography from René-Louis Baire, and after that, we realize the generalization of the Interval Principle Fits in Analysis, which is an important basic result for the theory.

Keywords: Metric Spaces. Continuous Functions. Topology.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática, bem como seus ramos, encontra-se bastante ampla e desenvolvida. Mas, ainda assim, existem lacunas a serem preenchidas, uma vez que cada resultado gera novos questionamentos. E assim, são necessários novos estudos para a ampliação dos significados. Dentre os diversos campos da Matemática, está a Topologia que, conforme Marcon (2000), tem uma vasta quantidade de aplicações. Este fato deixa clara a importância de ter uma base relevante de "ferramentas", que neste caso, podem ser: definições, proposições, exemplos, dentre outros.

Um conceito importante é o de distância, ao qual Domingues (1982) explana que:

> Tanto no Cálculo como na Geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudados de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de "distância entre dois pontos"ou conceitos derivados dessa noção, como o de "vizinhança de um ponto", por exemplo. Citemos entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância (ou da noção de vizinhança). Assim parece lógico quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando a resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de "espaço"em que intervem tal noção (DOMINGUES, 1982, P. 37).

Os espaços métricos vem exatamente obter essa generalização, o que coloca em exposição a sua importância. Desse modo, esse pode ser utilizado tanto pra resolver problemas que estão sendo estudados quanto para abrir novas possibilidades. Isto pode ocorrer, pelo fato de estarem relacionados, em meio ao conteúdo de espaços métricos, conceitos como sequências, conjuntos, funções, continuidade uniforme, dentre vários outros, que possuem diversas aplicações. De maneira específica, se focarmos apenas no conteúdo de funções, já teremos um grande campo de estudo e de aplicações tanto realizadas no cotidiano quanto na própria Matemática. E isso, pode servir de base para indicar o quão extenso pode ser o potencial dos espaços métricos.

Por outro lado, um dos grandes resultados sobre os espaços métricos é o Teorema de Baire que serve de suporte para o desenvolvimento de conceitos importantes para Análise funcional e a Topologia, ao qual objetivamos demonstrar. Através do Teorema de Baire, é possível, por exemplo, mostrar que existem funções contínuas em todo domínio e não derivável para qualquer ponto do domínio.

Mas, para podermos realizar nossos objetivos, serão precisos ferramentas, definições e resultados preliminares. Estes resultados que estão presentes em diversas áreas como na Topologia e no Cálculo serão organizados e apresentados em 4 capítulos. Após estes, será apresentada uma breve biografia de René-Louis Baire baseada em O'Connor e Robertson (2000), e além disso, enunciado e demonstrado o Teorema de Baire, baseado em Lima (2011), no

Capítulo 5.

O primeiro Capítulo será composto da definição e exemplos de espaços métricos, bem como os conceitos de bolas e esferas, métricas equivalentes, conjuntos limitados, distância entre ponto e conjunto, e entre conjuntos. Esses resultados foram baseados em Domingues (1982) e Marcon (2009).

Posteriormente, no segundo Capítulo, tendo como referência Domingues (1982) e Lima (2011), serão apresentadas as sequências em espaços métricos e topologia, onde serão expostos os conceitos de limite de sequências, sequências em espaços vetoriais normados, conjuntos abertos e conjuntos fechados.

Além disso, no Capítulo 3, serão exibidos, baseando-se em Domingues (1982) , os principais resultados relacionados a funções contínuas. Ou seja, definição e exemplos, homeomorfismo e continuidade uniforme. Já o Capítulo 4 será composto pelos espaços métricos completos, porém antes da definição desses espaços serão definidas as sequências de Cauchy. Este capítulo foi desenvolvido através de uma revisão bibliográfica das obras de Lima (2011) e Lima (2010), e será encerrado após serem definidos os espaços de Banach e de Hilbert.

1 ESPAÇOS MÉTRICOS

1.1 Definição e exemplos

Primeiramente vejamos algumas definições referentes aos espaços métricos e alguns exemplos. Estes espaços, são constituídos por propriedades que os relacionam com diversos resultados importantes, pois generaliza os conceitos de distância de maneira que independa do espaço.

Podemos perceber que, embora não muito complexa a sua definição é bastante relevante, pois para verificar se determinado espaço a satisfaz, é necessário conhecer também as propriedades particulares de cada um destes. Isto ficará mais claro a medida que vamos apresentando os exemplos.

A primeira definição, mas não menos importante, é a de métrica em um conjunto, a qual veremos a seguir:

Definição 1.1 *Uma métrica em um conjunto não vazio M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ que satisfaz as propriedades:*

(i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$;

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in M$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in M$.

O número real $d(x, y)$ descrito é chamado de distância de x a y. Chamaremos os elementos do conjunto M de pontos. E agora, podemos definir o que é um espaço métrico.

Definição 1.2 *Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Quando não houver confusão, ou seja, quando a métrica d já estiver subentendida no contexto, diremos "o espaço métrico M".

Observação 1.1 *A propriedade (iv) é chamada desigualdade triangular.*

Proposição 1.1 *Se x, y e z são elementos do espaço métrico, então*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Demonstração. Queremos mostrar que

$$-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z).$$

Mas, pela desigualdade triangular (iv) temos que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Observe que reorganizando os termos obtemos a seguinte desigualdade:

$$-\, d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z). \tag{1.1}$$

Por outro lado, utilizando a desigualdade triangular sob $d(x,y)$ teremos que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Isto é,

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y).$$

Porém por (iii) $d(z,y) = d(y,z)$. Assim,

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z). \tag{1.2}$$

Portanto, pelas equações 1.1 e 1.2,

$$-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z),$$

como queríamos. ■

Definição 1.3 *Sejam (M, d) espaço métrico e $S \subset M$ um subconjunto de M não vazio. Se considerarmos a função $\mathrm{d} := \mathrm{d}|_{S \times S}$ temos que d é uma métrica sobre S e portanto (S, d) é um espaço métrico. Nestas condições, dizemos que (S, d) é um subespaço métrico de (M, d) e que $\mathrm{d}|_{S \times S}$ é chamada de métrica induzida por d.*

Observação 1.2 *Muitas vezes a métrica $\mathrm{d}|_{S \times S}$ é também denotada por d.*

Vejamos agora exemplos de espaços métricos e suas particularidades.

Exemplo 1.1 (A métrica "zero - um") *Qualquer conjunto não vazio M é um espaço métrico tomando $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x = y \\ 1, & se \quad x \neq y \end{cases}.$$

Vamos justificar que d é uma métrica.

(i) $d(x,y)=0$, se $x=y$ ou $d(x,y)=1$, se $x\neq y$, $\forall x,y\in M$. Logo,

$$d(x,y)\geq 0, \forall x,y\in M;$$

(ii) $d(x,y)=0$, se $x=y$, $\forall x,y\in M$. E se $x=y$, $d(x,y)=0$, $\forall x,y\in M$;

(iii) $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall x,y\in M$;

(iv) Se $x=y$ então vale

$$d(y,z)+d(x,y)\geq 0=d(x,z).$$

Se $x\neq z$ então $y\neq x$ ou $y\neq z$ e assim, a desigualdade continua válida, pois

$$d(x,y)+d(y,z)\geq 1=d(x,z).$$

Veja que se $x\neq z$, $x\neq y$ e $y\neq z$ vale também a desigualdade

$$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z).$$

Portanto, d é uma métrica em M.

Observação 1.3 *Embora a métrica zero-um seja bastante trivial ela é importante na construção de contra-exemplos.*

Exemplo 1.2 (A reta $\mathbb{R}$) *Considere a função*

$$d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$(x,y)\mapsto d(x,y)=|x-y|.$$

Verifica-se que $(\mathbb{R},d)$ *é um espaço métrico.*

De fato,

(i) Note que por propriedade modular, $|x-y|\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$;

(ii) Agora se $|x-y|=0$, então $x-y=0$. Isto é, $x=y$. Reciprocamente, se $x=y$ então $x-y=0$. Ou seja, $|x-y|=0$.

(iii) Veja que

$$\begin{aligned}|x-y| &= |(-1)(y-x)|\\ &= |(-1)(y-x)|\\ &= 1\cdot|y-x|\\ &= |y-x|, \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(iv) Temos que

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $|z-y| = |y-z|$, por (iii). Ou seja,

$$|x-y| = |x-z| + |y-z|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, d é uma métrica em $\mathbb{R}$, e como $\mathbb{R}$ é não vazio, o par $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) *Em $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n); x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., n\}$ definiremos três métricas importantes. Para isso, consideremos*

$$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

arbitrários. Definimos:

(1) Métrica euclidiana
$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$

(2) Métrica da soma
$d_s(x,y) = |x_1-y_1| + ... + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$

(3) Métrica do máximo
$d_m(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$

E denotaremos por d, d_s e d_m, respectivamente.

Observação 1.4 *A menos que seja mencionado o contrário, sempre que nos referirmos ao espaço métrico $\mathbb{R}^n$, estaremos tratando do conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana.*

Vamos mostrar agora que d, d_s e d_m definem métricas em $\mathbb{R}^n$.

(1) Métrica euclidiana

(i) Notemos que $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$d(x,y) = (x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2 \geq 0, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dessa forma, podemos garantir que

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \geq 0,$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Percebamos que em $\mathbb{R}$, $\sqrt{(x-y)^2}=0$, se e somente se, $x=y$.

Logo,

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}=0,$$

se e somente se,

$$(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2=0.$$

Mas,

$$(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2=0,$$

se e somente se, $x_1=y_1,...,x_n=y_n$.

(iii) Temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{[(-1)(y_1-x_1)]^2+...+[(-1)(y_n-x_n)]^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(y_1-x_1)^2+...+(-1)^2(y_n-x_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2} \\ &= d(y,x), \forall x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Para verificarmos a propriedade (iv) utilizaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^n$ cujo enunciado é: Se x_1, ... , x_n e y_1, ... , y_n são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{1/2}.$$

Observemos que dados quaisquer $r,s\in\mathbb{R}$,

$$(r-s)^2=r^2-2rs+s^2\geq 0,$$

isto é, $2rs\leq r^2+s^2$.

Nesse sentido, se fizermos $p=\sqrt{(x_i^2)+...+(x_n^2)}$ e $r=\sqrt{(y_i^2)+...+(y_n^2)}$, é verdade que

$$2\cdot\frac{|x_i|}{p}\cdot\frac{|y_i|}{q}\leq\frac{x_i^2}{p^2}+\frac{y_i^2}{q^2}$$

para qualquer i, com $1\leq i\leq n$. Somando-se em relação ao índice i obteremos que

$$\frac{2}{p\cdot q}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leq 1+1,$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leq p\cdot q=\sqrt{x_i^2+...+x_n^2}\cdot\sqrt{y_i^2+...+y_n^2}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora podemos verificar a propriedade (iv).

(iv) Considere $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\right]^2 \\
&= [d(x,z) + d(z,y)]^2.
\end{aligned}$$

Com isso, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Assim, podemos concluir que a métrica euclidiana define uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

(2) Métrica da soma

(i) Veja que $|x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \geq 0, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Temos que $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$, ou seja, $x = y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, por (i)

$$d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0.$$

Mas,

$$|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0.$$

Isto é, $x_i = y_i$. Logo,

$$d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i = y_i|.$$

(iii) Percebamos que

$$\begin{aligned}
d_s(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
&= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\
&= |(-1)(y_1 - x_1)| + ... + |(-1)(y_n - x_n)| \\
&= |(-1)||y_1 - x_1| + ... + |(-1)||y_n - x_n| \\
&= |y_1 - x_1| + ... + |y_n - x_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\
&= d_s(y,x), \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

(iv) Temos que

$$\begin{aligned}
d_s(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
&= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\
&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n + z_n - y_n| \\
&\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\
&= d_s(x,z) + d_s(z,y).
\end{aligned}$$

Mas por (iii) $d_s(z,y) = d_s(y,z)$. Ou seja, $d_s(x,y) \leq d_s(x,z) + d_s(y,z)$.

(3) Métrica do máximo

(i) Sabe-se que $d_m(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$. Mas, $|x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$|x_i - y_i| \geq 0,$$

onde $0 \leq i \leq n$. Logo,

$$d_m(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq 0, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Temos que

$$d_m(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i,$$

onde $0 \leq i \leq n$.

(iii) Observa-se que

$$|x - y| = |y - x|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ onde $0 \leq i \leq n$, e portanto,

$$d_m(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \max_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i| = d_m(y, x), \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) Notemos que

$$|x_i - y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$

Além disso,

$$|x_i - z_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i|$$

e,

$$|z_i - y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i|.$$

Mas,

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

com $0 \leq i \leq n$. Assim,

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i|.$$

Isto é,

$$d_m(x, y) \leq d_m(x, z) + d_{m(z,y)}, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Com isso, d_m é uma métrica.

1.2 Métricas equivalentes

As métricas equivalentes têm sua importância devido o fato de que em determinados espaços, é mais simples utilizar uma destas do que outra.

Dadas as métricas d e d' no mesmo conjunto M, escreveremos,
$M_1 = (M, d), M_2 = (M, d'), B_1(a, r) =$ bola de centro a e raio r segundo a métrica d, etc.

Definição 1.4 *Diremos que d é equivalente a d', indicamos por $d \sim d'$, se para todo $p \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(p, \delta) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$. Isto é, $d \sim d'$ se, e somente se, toda bola aberta segundo d' contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d.*

Proposição 1.2 *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem números reais $r, s > 0$ tais que*

$$rd(x, y) \leq d'(x, y) \leq sd(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.

Demonstração. Seja p um ponto de M e consideremos a bola $B_d(p,\varepsilon)$. Mostremos que

$$B_{d'}(p,r\varepsilon)\subset B_p(p,\varepsilon).$$

De fato, dado $x\in B_{d'}(p,r\varepsilon)$, então $d'(x,p)<r\varepsilon$ e como $rd(x,p)\leq d'(x,p)$, obtemos que $rd(x,p)<r\varepsilon$. De onde segue que $d(x,p)<\varepsilon$, e assim, $x\in B_d(p,\varepsilon)$.

Consideremos agora a bola $B_{d'}(p,\varepsilon)$ e provemos que $B_d\left(p,\dfrac{\varepsilon}{s}\right)\subset B_{d'}(p,\varepsilon)$. Dado $x\in B_d\left(p,\dfrac{\varepsilon}{s}\right)$ então $d(x,p)<\dfrac{\varepsilon}{s}$ e daí $d(x,p)<\varepsilon$. Mas,

$$d'(x,p)\leq sd(x,p)$$

e portanto, $d'(x,p)<\varepsilon$ o que implica que $x\in B_{d'}(p,\varepsilon)$. ■

Mostremos agora as seguintes relações em $\mathbb{R}^n$:

$$d_m(x,y)\leq d(x,y)\leq d_s(x,y)\leq nd_m(x,y).$$

Primeiramente, vamos verificar a desigualdade $d_m(x,y)\leq d(x,y)$. Temos que para algum j com $1\leq j\leq n$,

$$d_m(x,y)=|x_j-y_j|.$$

Mas,

$$|x_j-y_j|=\sqrt{(x_j-y_j)^2}\leq\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}=d(x,y).$$

Agora vamos verificar que $d(x,y)\leq d_s(x,y)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
d(x,y)=&\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}\\
\leq&\sqrt{|x_1-y_1|^2+...+|x_n-y_n|^2+2|x_1-y_1||x_2-y_2|+...+2|x_{n-1}-y_{n-1}|+|x_n-y_n|}\\
=&|x_1-y_1|+...+|x_n-y_n|\\
=&d_s(x,y).
\end{aligned}$$

Por fim, para prova a desigualdade $d_s(x,y)\leq nd_m(x,y)$ vamos supor que

$$|x_j-y_j|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$$

Assim,

$$|x_1-y_1|\leq|x_j-y_j|,...,|x_n-y_n|\leq|x_j-y_j|.$$

E consequentemente,

$$d_s(x,y)=|x_1-y_1|+...+|x_n-y_n|\leq n|x_j-y_j|=nd_m(x,y).$$

Exemplo 1.4 (Espaços vetoriais normados) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em E é uma aplicação*

$$||\cdot||:E\to\mathbb{R}$$

que associa cada vetor $v\in E$ a um número real não negativo $||v||$ que satisfaz:

N1) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

N2) $||\alpha v|| = |\alpha|||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

N3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E.$

Observação 1.5 *Seja um espaço vetorial E. Então*

$$|||u|| - ||v||| \leq ||u - v||, \forall u, v \in E.$$

Vamos mostrar que

$$-||u - v|| \leq ||u|| - ||v|| \leq ||u - v||, \forall u, v \in E.$$

Notemos que

$$||v + u - u|| + ||u|| \leq ||v - u|| + 2||u||.$$

Somando-se $-2||u||$ em ambos os lados da inequação, obtemos

$$\begin{aligned} ||v|| - ||u|| &\leq ||v - u|| \\ &= ||(-1)(u - v)|| \\ &= |(-1)|||u - v|| \\ &= ||u - v||. \end{aligned}$$

Isto é,

$$||v|| - ||u|| \leq ||u - v||.$$

Multiplicando ambos os termos por (-1) obtemos

$$-||u - v|| \leq ||u|| - ||v||.$$

O que satisfaz a primeira desigualdade.

Por outro lado,

$$||u + v - v|| + ||v|| \leq ||u - v|| + 2||v||.$$

Somando-se $-2||v||$ em ambos os lados, temos que

$$||u|| - ||v|| \leq ||u - v||,$$

o que satisfaz a segunda desigualdade.

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial E munido de uma norma $|| \cdot ||$.

Se E é um espaço vetorial normado, com a norma $|| \cdot ||$, a função

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto d(u, v) := ||u - v||$$

é uma métrica em E.

De fato,

(i) $d(u, v) = ||u - v|| \geq 0, \forall u, v \in E$.

(ii) $d(u, v) = ||u - v|| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v$.

(iii) $d(u, v) = ||u - v|| = |(-1)|||u - v|| = ||(-1)(u - v)|| = ||v - u|| = d(v, u), \forall u, v \in E$.

(iv) $d(u, v) = ||u - v|| = ||u - w + w - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u, w) + d(w, v)$. Mas, por (iii) $d(w, v) = d(v, w)$. Portanto,

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w).$$

Dessa forma, d é uma métrica em E.

Esta métrica é chamada de métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.5 (Espaço das funções reais limitadas) *Seja $B(X; R)$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$, isto é,*

$$B(X; R) := \{f : X \to \mathbb{R}; f \textit{ é limitada}\}.$$

Tem-se que $B(X; R)$ é um espaço vetorial munido das operações de soma e produto por escalar, isto é,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in B(X; R);$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in B(X; R).$$

Neste espaço vetorial a função dada por:

$$|| \cdot || : B(X; R) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto ||f||$$

onde $||f|| := sup\{|f(x)|; x \in X\}$ é uma norma.

Com efeito, percebamos que $||f||$ está bem definida, pois pelo fato de f ser limitada, existe $sup\{|f(x)|; x \in X\}$. E ainda, $||f|| \in \mathbb{R}$, para qualquer $f \in B(X; R)$.

Além disso,

N1) $||f|| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X$;

N2)

$$\begin{aligned}||\alpha f|| &= sup\{|\alpha f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\}\\ &= sup\{|\alpha||f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\}\\ &= |\alpha| sup\{|f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\}\\ &= |\alpha|||f||.\end{aligned}$$

N3) Dadas $f, g \in B(X; R)$, então para qualquer $x \in X$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq sup\{|f(x)|; x \in X\} + sup\{|g(x)|; x \in X\}.$$

Notemos que $sup\{|f(x)|; x \in X\} + sup\{|g(x)|; x \in X\}$ é constante, logo é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x) + g(x)|; x \in X\}$. Consequentemente,

$$sup\{|f(x) + g(x)|; x \in X\} \leq sup\{|f(x)|; x \in X\} + sup\{|g(x)|; x \in X\}.$$

Portanto,

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

E com isso, $B(X; R)$ é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma dada por $d(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}$ para quaisquer $f, g \in B(X; R)$.

Exemplo 1.6 (Espaço das funções contínuas em um intervalo fechado) *Denotemos por $C([a, b])$ o conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com as operações de soma e produto usuais. Temos que $C([a, b])$ é um espaço vetorial.*

Neste espaço vetorial a função $|| \cdot || : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida por

$$||f|| := \int_a^b |f(x)|dx$$

é uma norma em E.

De fato,

N1) Como a função $|f(x)|$ é contínua no intervalo $[a, b]$, e além disso, $|f(x)| \geq 0, \forall x \in [a, b]$, se $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, então $|f|$ é identicamente nula, e consequentemente, $f(x) = 0$.

De fato, se existisse algum ponto $x_0 \in [a, b]$ onde $|f(x_0)| = c > 0$, existiria um intervalo não degenerado $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $|f(x)| > \dfrac{c}{2}$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Então como $|f(x)| \geq 0$, teríamos

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0,$$

o que é uma contradição.

Reciprocamente, se $f(x) = 0$ então $|f(x)| = 0$. Dessa forma, $\int_a^b |f(x)|dx = 0$.

N2) Temos que

$$\begin{aligned}||\alpha f|| &= \int_a^b |\alpha f(x)|dx \\ &= \int_a^b |\alpha||f(x)|dx \\ &= |\alpha| \int_a^b |f(x)|dx \\ &= |\alpha|||f||, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

N3) Temos que dadas $f, g \in C([a,b])$ é satisfeita a seguinte desigualdade

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Então para todo $x \in [a,b]$ segue que

$$s(|f+g|; P) \leq s(|f| + |g|; P)$$

e

$$S(|f+g|; P) \leq S(|f| + |g|; P)$$

para toda partição P, e portanto,

$$\int_a^b |f+g|dx \leq \int_a^b (|f| + |g|)dx = \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx.$$

Portanto,

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||, \forall f, g \in C([a,b]).$$

Logo $C([a,b])$ é um espaço vetorial normado, e portanto é um espaço métrico com a métrica induzida da norma dada por

$$d(f,g) := ||f-g|| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx, \forall f, g \in C([a,b]).$$

Exemplo 1.7 (Um subespaço das funções reais limitadas) *Observemos que $C([a,b])$ pode ser considerado um subespaço vetorial de $B([a,b];\mathbb{R})$, pois toda função contínua definida em um conjunto compacto é limitada.*

Assim, $C([a,b])$ é um espaço métrico com a métrica induzida de $B([a,b];\mathbb{R})$, isto é,

$$d(f,g) := sup|f(x) - g(x)|; x \in [a,b], \forall f, g \in C([a,b]).$$

Exemplo 1.8 (Espaços vetoriais com produto interno) *Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R},$$

que associa a cada par $(u,v) \in E \times E$ um número real $\langle u, v \rangle$ que satisfaz:

(P1) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle, \forall u, v \in E$;

(P2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall u, v \in E$;

(P3) $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle, \forall u, v, w \in E$;

(P4) $\langle u, u\rangle > 0, \forall u \in E, u \neq 0$.

Um espaço vetorial E munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é chamado de espaço vetorial com produto interno.

Considerando o espaço vetorial E com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$, mostraremos que:

(a) $u = 0 \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = 0$;

(b) $\langle 0, u\rangle = 0, \forall u \in E$;

(c) $\langle au_1 + bu_2, cv_1 + dv_2\rangle = ac\langle u_1, v_1\rangle + ad\langle u_1, v_2\rangle + bc\langle u_2, v_1\rangle + bd\langle u_2, v_2\rangle$, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$.

De fato, se $u \neq 0$, então por (P4) $\langle u, u\rangle > 0$, o que é equivalente ao item (a).

Por outro lado $0 = 0u$, assim, $\langle 0, u\rangle = \langle 0u, u\rangle$, e por (P3)

$$\langle 0u, u\rangle = 0\langle u, u\rangle = 0,$$

que valida (b).

Por fim,

$$\begin{aligned}
\langle au_1 + bu_2, cv_1 + dv_2\rangle &= \langle au_1, cv_1 + dv_2\rangle + \langle bu_2, cv_1 + dv_2\rangle \\
&= \langle cv_1 + dv_2, au_1\rangle + \langle cv_1 + dv_2, bu_2\rangle \\
&= \langle cv_1, au_1\rangle + \langle dv_2, au_1\rangle + \langle cv_1, bu_2\rangle + \langle dv_2, bu_2\rangle \\
&= c\langle v_1, au_1\rangle + d\langle v_2, au_1\rangle + c\langle v_1, bu_2\rangle + d\langle v_2, bu_2\rangle \\
&= c\langle au_1, v_1\rangle + d\langle au_1, v_2\rangle + c\langle bu_2, v_1\rangle + d\langle bu_2, v_2\rangle \\
&= ca\langle u_1, v_1\rangle + da\langle u_1, v_2\rangle + cb\langle u_2, v_1\rangle + db\langle u_2, v_2\rangle \\
&= ac\langle u_1, v_1\rangle + ad\langle u_1, v_2\rangle + bc\langle u_2, v_1\rangle + bd\langle u_2, v_2\rangle.
\end{aligned}$$

Se E é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ então

$$|| \cdot || : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(u, u) \mapsto ||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

é uma norma em E.

Com efeito, temos que

N1) $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0;$

N2)

$$\begin{aligned} ||\alpha u|| &= \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha\langle u, \alpha u\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha\langle \alpha u, u\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2\langle u, u\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &= |\alpha|\sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &= |\alpha|||u||; \end{aligned}$$

N3) Para mostrarmos que $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ será necessário utilizar a Desigualdade de Cauchy Schwarz a qual irá ser demonstrada inicialmente.

A Desigualdade de Cauchy Schwarz é a seguinte:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||, \forall u, v \in E.$$

Se $x = y = 0$ não há o que se provar. Sejam $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq ||u + \alpha v||^2 =& \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u + \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u + \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle u + \alpha v, \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \alpha\langle v, u\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \alpha\langle v, \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \alpha\langle v, u\rangle + \alpha\langle v, u\rangle + \alpha\langle \alpha v, v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + 2\alpha\langle v, u\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle \\ &= ||u||^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2||v||^2. \end{aligned}$$

Logo, temos um trinômio do segundo grau em α cujo valor é sempre não negativo, o que equivale a:

$$\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq ||u||^2||v||^2,$$

e assim,

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||.$$

Agora mostraremos que $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E$. De fato,

$$\begin{aligned}
||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\
&= \langle u+v, u\rangle + \langle u+v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2 \\
&\leq ||u||^2 + 2||u||||v|| + ||v||^2 \\
&= (||u|| + ||v||)^2.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E.$$

Se considerarmos o espaço vetorial $C([a,b])$ onde $a < b$, a aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

é um produto interno em $C([a,b])$.

De fato, observemos que

(P1)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f, g\rangle &= \int_a^b (\alpha f)(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b \alpha f(x)g(x)dx \\
&= \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx \\
&= \alpha\langle f, g\rangle, \forall f, g \in C([a,b]), \forall \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(P2)

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b g(x)f(x)dx \\
&= \langle g, f\rangle, \forall f, g \in C([a,b]).
\end{aligned}$$

(P3)

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f+g)(x)h(x)dx\\ &= \int_a^b [f(x)+g(x)]h(x)dx\\ &= \int_a^b [f(x)h(x)+g(x)h(x)]dx\\ &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx\\ &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle, \forall f,g,h \in C([a,b]).\end{aligned}$$

(P4)

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2dx.$$

Notemos que $[f(x)]^2 \geq 0$ e é contínua em $[a,b]$. Consideremos $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$. Seja $m = \dfrac{f(c)}{2}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > m$ para todo $x \in [c-\delta, c+\delta]$. Então, para toda partição P que contenha os pontos $c-\delta$ e $c+\delta$, tem-se $s(f;P) > 2m\delta$. Segue-se que

$$\int_a^b f(x)dx \geq s(f;P) > 0.$$

Dessa forma,

$$\langle f,f\rangle > 0, \forall f \in C([a,b]), f \neq 0.$$

Portanto, a aplicação é um produto interno em $C([a,b])$. Além disso, a função

$$||\cdot|| : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) \mapsto ||f-g|| = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

é uma métrica em $C([a,b])$ induzida pela norma $||f|| := \int_a^b |f(x)|dx$.

1.3 Bolas e esferas

Vejamos agora aos conceitos de bola aberta, bola fechada e esfera, os quais são importantes para conseguirmos definir os próximos resultados. Seja M um espaço métrico e a um ponto pertencente a M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

(i) A bola aberta de centro a e raio r, denotada por $B(a,r)$, como o conjunto de pontos de M cuja distância ao ponto a é a menor que r, ou seja,

$$B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

(ii) A bola fechada de centro a e raio r, denotada por $B[a, r]$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r, ou seja,

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

(iii) A esfera de centro a e raio r, denotada por $S(a, r)$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r, ou seja,

$$S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Observação 1.6 $B[a, r] = B(a, r) \cup S(a, r)$, *sendo a reunião disjunja. Além disso, quando a métrica* d *provém da norma do espaço vetorial* E, *podemos escrever:*

- $B(a, r) = \{x \in E; ||x - a|| < r\}$;
- $B[a, r] = \{x \in E; ||x - a|| \leq r\}$;
- $S(a, r) = \{x \in E; ||x - a|| = r\}$.

Seja X um subespaço do espaço métrico M. Para cada $a \in X$ e cada $r > 0$, seja $B_X(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio r, relativamente à métrica induzida em X. Tem-se que

$$B_X(a, r) = B(a, r) \cap X,$$

onde $B(a, r)$ é a bola aberta de centro a e raio r no espaço M. Analogamente, valem

$$B_X[a, r] = B[a, r] \cap X$$

e

$$S_X(a, r) = S(a, r) \cap X.$$

Exemplo 1.9 (Bolas na reta usual) *Na reta real temos que:*

- $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\} =]a - r, a + r[$.
- $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}; a - r \leq x \leq a + r\} = [a - r, a + r]$.
- $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| = r\}$.

Exemplo 1.10 (Bolas num espaço M cuja métrica é zero-um) *Temos que com relação a bola aberta, há dois casos a considerarmos:*

- Se $0 < r \leq 1$,
$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\} = \{a\},$$
pois o único ponto cuja distância a a é menor que 1 é o próprio a.

- Se $1 < r$,
$$B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\} = M,$$
pois todos os pontos de M estão a uma distância e a igual a zero ou igual a um, e assim, menor que r.

Já com relação a bola fechada temos que

$$B[a,r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\} = M.$$

Por fim, com relação a esfera temos dois casos:

- Se $r \neq 1$, $S(a,r) = \emptyset$.
- Se $r = 1$, $S(a,r) = M - \{a\}$.

Exemplo 1.11 (No plano $\mathbb{R}^2$) *Temos:*

- Usando a métrica usual:
$$B(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < y\}.$$
Notemos que
$$d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r \Leftrightarrow (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2) < r^2,$$
que é o interior de um círculo de centro $a = (a_1,a_2)$ e raio r.
- Usando a métrica
$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|,$$
segue-se que
$$B(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r\}.$$
Mas,
$$d_1((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = |x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r$$
que é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1,a_2)$ e diagonais $2r$, paralelas aos eixos.
- Usando a métrica
$$d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\},$$
tem-se que
$$B(a,r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) < r\}.$$

E
$$d((x_1,x_2),(a_1,a_2)) = \max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} < r \Rightarrow |x_1-a_1| < r$$
e
$$|x_2-a_2| < r$$
que é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1,a_2)$ e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos.

Exemplo 1.12 *Seja $f \in B([a,b];\mathbb{R})$ e $B[f,r] = \{g \in B([a,b];\mathbb{R}); d(f,g) \leq r\}$ a bola fechada na métrica*
$$d(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$

A condição para que $g \in B([a,b];\mathbb{R})$ pertença à bola fechada $B[f,r]$ é que
$$\sup_{[a,b]} |f(x)-g(x)| \leq r,$$
isto é,
$$|f(x)-g(x)| \leq r, \forall x \in [a,b].$$

Consideremos
$$G(f) = \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b]\}.$$
Como
$$\begin{aligned} |f(x)-y| = |y-f(x)| &\leq r \\ &\Rightarrow -r \leq y - f(x) \leq r \\ &\Rightarrow f(x) - r \leq y \leq f(x) + r, \forall x \in [a,b], \end{aligned}$$
então
$$G(g) = \{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b]\}$$
está contido numa faixa de amplitude $2r$ em torno de $G(f)$.

Agora, para que
$$g \in B(f,r), |f(x)-g(x)| < r, \forall x \in [a,b],$$
geometricamente, $G(g)$ está contido numa "faixa aberta"de amplitude $2r$ em torno do $G(f)$.

Exemplo 1.13 *No produto cartesiano $M = M_1 \times ... \times M_n$, tomemos a métrica*
$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}\{d(x_i,y_i)\},$$
onde $x = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ e $y = (y_1,...,y_i,...,y_n)$. Então todas as bolas em M são produtos cartesianos de bolas nos fatores $M_i, 1 \leq i \leq n$:

- $B(a,r) = B(a_1,r) \times ... \times B(a_n,r)$;
- $B[a,r] = B[a_1,r] \times ... \times B[a_n,r]$, onde $a = (a_1,...a_n)$.

Assim, por exemplo, tomando em $\mathbb{R}^2$ a métrica

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\},$$

a bola fechada de centro (a,b) e raio r é o quadrado $[a-r, a+r] \times [b-r, b+r]$.

Em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a métrica análoga faz com que as bolas sejam cubos com arestas paralelas aos eixos. Por outro lado, se pensarmos no $\mathbb{R}^3$ como o produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^2$ tem a métrica euclidiana e tomarmos em $\mathbb{R}^3$ a distância

$$d((x,t),(y,s)) = \max\{d(x,y), d(t,s)\}$$

com $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $t, s \in \mathbb{R}$ as bolas correspondentes serão cilindros de base circular e altura paralela ao eixo vertical.

Proposição 1.3 *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a,b)$. Então as bolas abertas $B(a,r)$ e $B(b,s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Sejam a e b pontos distintos. Assim, $d(a,b) > 0$.

Sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a,b)$. Tomando $r = \dfrac{d(a,b)}{4}$ e $s = \dfrac{d(a,b)}{4}$, queremos mostrar que $B(a,r) \cap B(b,s) = \emptyset$. Vamos supor por absurdo que $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \emptyset$.

Seja $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Então $x \in B(a,r)$ e $x \in B(b,s)$, e assim, $d(x,a) < r$ e $d(x,b) < s$.

Logo,

$$d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) < r + s < \frac{d(a,b)}{4} + \frac{d(a,b)}{4} = \frac{d(a,b)}{2} < d(a,b).$$

Absurdo, portanto, $B(a,r) \cap B(b,s) = \emptyset$.

■

Corolário 1.1 *$r + s < d(a,b)$ então as bolas fechadas $B[a,r]$ e $B[b,s]$ são disjuntas.*

Demonstração. Se as bolas fechadas $B[a,r]$ e $B[b,s]$ são disjuntas então $B[a,r] \cap B[b,s] = \emptyset$. Vamos supor então que $B[a,r] \cap B[b,s] \neq \emptyset$. Seja $x \in B[a,r] \cap B[b,s]$. Então $x \in B[a,r]$ e $x \in B[b,s]$, e assim, $d(x,a) \leq r$ e $d(x,b) \leq s$.

Logo,

$$d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) \leq r + s < d(a,b).$$

Absurdo. Portanto, $B[a, r] \cap B[b, s] = \emptyset$.

■

Definição 1.5 (Ponto Isolado de M) *Seja M espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se um ponto isolado de M quando ele é uma bola aberta em M, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$. Isto é, não existem pontos de M, além do a, que estão a uma distância de a inferior à r.*

Dizer que um ponto $a \in M$ não é isolado significa afirmar que para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in A$ tal que $0 < d(a, x) < r$.

Exemplo 1.14 *Seja (M, d) um espaço cuja a métrica é a "zero-um". Então todo ponto $p \in M$ é isolado porque, tomando $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que $0 < \varepsilon \leq 1$, então $B(p, \varepsilon) = \{p\}$ conforme já vimos antes.*

Exemplo 1.15 (Todos os pontos isolados) *Seja o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$ (ou seja, consideramos $\mathbb{N}$ subespaço de $\mathbb{R}$). Para qualquer $p \in \mathbb{N}$ vamos ter*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{N}; |x - p| < \varepsilon\}.$$

E portanto, se $0 < \varepsilon \leq 1$, $B(p, \varepsilon) = \{p\}$.

Definição 1.6 (Espaço Métrico Discreto) *Um espaço Métrico M chama-se discreto quando todo ponto de M é isolado.*

Um subconjunto $X \subset M$ chama-se discreto quando o subespaço X (métrica induzida) é discreto. Isto é, para cada $x \in X$ existe um bola aberta $B(x, r)$ tal que $X \cap B(x, r) = \{x\}$.

1.4 Conjuntos limitados

Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$. O menor desses números c será chamado o diâmetro de X. Se

$$x, y \in X => d(x, y) \leq c,$$

então c é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Assim, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real $diam(X) = \sup d(x, y)$.

Observação 1.7 *Quando X não é limitado, escreve-se $diam(X) = \infty$. Ou seja, para todo $c \in R$, existem pontos $x, y \in X$ tais que $d(x, y) > c$.*

Proposição 1.4 *Se X é limitado e $Y \subset X$ tal que $Y \neq \emptyset$ então Y também é limitado, valendo $diam(Y) \leq diam(X)$.*

Demonstração. Se X é limitado, então existe $c > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq c, \forall x, y \in X.$$

Sejam $x, y \in Y$. Como $Y \subset X$ então $x, y \in X$. Logo, $d(x, y) \leq c$. Portanto Y é limitado. E pelo fato de $Y \subset X$, segue-se que

$$\{d(x, y); x, y \in Y\} \subset \{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Portanto, $diam(Y) \leq diam(X)$.

■

Exemplo 1.16 *Toda bola $B(a, r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$.*

De fato, dados dois pontos $x, y \in B(a, r)$ temos que $d(x, a) < r$ e $d(a, y) < r$. Pela desigualdade triangular

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

De maneira análoga, para $B[a, r]$. Como

$$B[a, r] = B(a, r) \cup S(a, r)$$

então $S(a, r)$ também é limitada.

Exemplo 1.17 *Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(a, r)$ tem diâmetro $2r$.*

Com efeito sabemos que $diam(B) = 2r$. Basta mostrarmos que nenhum positivo s, menor que $2r$, pode ser diâmetro de B. Tomemos $y \neq 0$ em E e um número real t tal que $s < 2t < 2r$.

Tomando $x = t\dfrac{y}{||y||}$, segue-se que

$$||x|| = \left|\left|t\frac{y}{||y||}\right|\right| = \frac{t||y||}{||y||} = t < r.$$

Logo, $a + x$ e $a - x$ pertencem a B. Além disso,

$$d(a + x, a - x) = |(a + x) - (a - x)| = 2|x| = 2t > s,$$

logo s não é diâmetro de B, como queríamos provar.

Uma aplicação $f : X \to M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M. Chama-se limitada quando sua imagem $f(x)$ é um subconjunto limitado de M.

1.5 Distância entre ponto e conjunto, e entre conjuntos

Seja a um ponto e X uma reta no plano. O ponto $x_0 \in X$, pé da perpendicular baixada de a sobre X, é o ponto de X que está mais próximo de a. Assim, qualquer outro ponto $x \in X$ determina o triângulo retângulo ax_0x e, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d(a, x)^2 = d(a, x_0)^2 + d(x_0, x)^2$, e desse modo, $d(a, x_0) \leq d(a, x)$. Portanto, podemos escrever

$$d(a, x_0) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

Generalizando:

Seja a um ponto e X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Definiremos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

O conjunto de números reais não-negativos $\{d(a, x); x \in X\}$, formado pelas distâncias de a aos diversos pontos de X é, não vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância $d(a, X)$. Mas pode não existir um elemento $x_0 \in X$ mais próximo de a do que os outros pontos de X.

A noção de ínfimo de um conjunto de números reais existe precisamente para generalizar a ideia de elemento mínimo.

Pela definição, temos:

1) $d(a, X) \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$;

2) Se $d(a, X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

Por 1), o número $d(a, x)$ é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de a aos pontos de X. Por 2), nenhum número maior do que $d(a, X)$ é cota inferior desse conjunto.

Ou seja, $d(a, X)$ é a menor das cotas inferiores do conjunto $\{d(a, x); x \in X\}$. Assim, reformulando:

2') Se $c \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$, então $c \leq d(a, X)$.

Observação 1.8 *Se $a \in X$ então $d(a, X) = 0$, e se $X \subset Y$ então $d(a, Y) \leq d(a, X)$. Além disso, $d(a, X) = 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ com $d(a, x) < \varepsilon$.*

Exemplo 1.18 *Num espaço vetorial normado E, seja $B = B(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio $r > 0$. Dado $b \in E$, tem-se $d(b, B) = 0$ se, e somente se, $b \in B[a, r]$.*

De fato, suponhamos $b \in B[a, r]$, ou seja, $|b - a| \leq r$. Se for $|b - a| < r$, então dado $\varepsilon > 0$, obteremos um ponto $x \in B$ tal que $d(b, x) < \varepsilon$. Começamos chamando de $u = \dfrac{b - a}{r}$ o vetor unitário de raio ab. Em seguida, tomamos um número real t, tal que

$$r - \varepsilon < t < r + \varepsilon.$$

Temos portanto que $0 < r - t < \varepsilon$. Após isso, pomos $x = a + tu$. Então segue-se que

$$d(x, a) = |x - a| = t < r,$$

logo $x \in B$. Além disso,

$$d(x, b) = |b - x| = |b - a - tu| = |ru - tu| = r - t > \varepsilon.$$

Portanto, se $x \in B[a, r]$, então $d(x, B) = 0$, onde $B = B(a, r)$.

Reciprocamente, tomemos em E um ponto $p \notin B[a, r]$ e provemos que $d(p, B) > 0$. Temos $|p - a| = r + c$, com $c > 0$. Para todo $x \in B$, vale $|x - a| < r$ e, como

$$|p - a| = |p - x + x - a| \leq |p - x| + |x - a|,$$

concluímos que

$$d(p, x) \geq |p - a| - |x - a| = r + c - r \geq c.$$

Segue-se que $d(p, B) \geq c > 0$.

Proposição 1.5 *Seja M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não-vazio $X \subset M$, vale:*

$$|d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b).$$

Demonstração. Devemos mostrar que

$$-d(a, b) \leq d(a, X) - d(b, X) \leq d(a, b).$$

Temos que para todo $x \in X$,

$$d(a, X) \leq d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x).$$

Ou seja,

$$d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,x), \forall x \in X.$$

Mas pela definição

$$d(b,X) = \inf_{x \in X} d(b,x).$$

Isto é,

$$d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,X).$$

Ou ainda,

$$d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b),$$

o que verifica a segunda desigualdade.

Por outro lado, para todo $x \in X$,

$$d(b,X) \leq d(b,x) + d(a,x).$$

E assim,

$$d(b,X) - d(a,b) \leq d(a,x).$$

Pelo fato de

$$d(a,X) = \inf_{x \in X} d(a,x),$$

segue-se que

$$d(b,X) - d(a,b) \leq d(a,X).$$

Logo,

$$-d(a,b) \leq d(a,X) - d(b,X).$$

■

Corolário 1.2 *Dados a, b, x em M, tem-se* $|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b)$.

Demonstração. Temos que $d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x)$. Isto é,

$$d(a,x) - d(b,x) \leq d(a,b).$$

Por outro lado,

$$d(b,x) \leq d(a,b) + d(a,x).$$

Ou seja,

$$d(b,x) - d(a,x) \leq d(a,b).$$

Logo,

$$-d(a,b) \leq d(a,x) - d(b,x).$$

Dessa forma, $|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b)$. ■

Pode-se também definir, a distância entre dois subconjuntos não vazios $X, Y \subset M$. Põe-se

$$d(X,Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} d(x,y).$$

Quando $X \cap Y \neq \varnothing$, tem-se $d(X,Y) = 0$. Porém a recíproca é falsa, como podemos ver na reta, com $X = (-\infty, 0)$ e $Y = (0, +\infty)$. Tem-se que $X \cap Y = \varnothing$, mas $d(X,Y) = 0$.

As únicas propriedades que ainda continuam válidas para conjuntos são:

- $d(X,X) = 0$;
- $d(X,Y) = d(Y,X)$.

2 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLOGIA

Definição 2.1 *Seja (M,d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \to x_n$, de $\mathbb{N} \to M$ é chamada de sequência de elementos de M e a notação para se indicar uma tal sequência é $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada imagem x_n é chamada termo da sequência. Dessa forma, o conjunto dos termos dessa sequência é $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, ...\}$.

Seja uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M. Se $\{n_1, n_2, ..\} \subset \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < ...$, então a aplicação dada por $x_k \to x_{n_k}$ é indicada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ e recebe o nome de subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.1 *Considerando a sequência $(1,2,3,1,2,3,...)$ de elementos de $\mathbb{R}$, então*

$$(1,1,1,...) = (x_1, x_4, x_7, ...)$$

desde que façamos

$$(1,2,3,...) = (x_1, x_2, x_3, ...).$$

Observação 2.1 *Toda subsequência pode ser também encarada como uma sequência como realmente é.*

2.1 Limite de sequências

Definição 2.2 *Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M se, para toda bola $B(p,\varepsilon)$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(p,\varepsilon).$$

Para indicar que p é limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usa-se a notação $\lim x_n = p$, ou ainda, $x_n \to p$. Dizemos assim, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente ou que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p.

Proposição 2.1 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Demonstração. Notemos que

$$x_n \in B(p, \varepsilon) \Leftrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon,$$

ou seja, a proposição vale. ■

Observação 2.2 *Pela definição, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p, então para qualquer índice n_0, a subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para p.*

Exemplo 2.2 *Seja num espaço métrico M uma sequência estacionária, isto é, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice n_0. Assim,*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, ..., x_{n_0}, p, p, p, ...).$$

Tais sequências são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $(x_1, ..., x_{n_0}, p, p, ...) \to p$; pois $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = ... = p$. Então para todo $\varepsilon > 0$,

$$n \geq n_0 + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

Em particular as sequências constantes $(p, p, ...)$ convergem para a constante p.

Exemplo 2.3 *Consideremos $\mathbb{R}$ dotado da métrica usual. A sequência $(x_1, x_2, ...)$, onde*

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

converge para o ponto 1.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Então, para todo $n \geq n_0$, temos

$$d(x_n, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon.$$

Exemplo 2.4 *Consideremos o conjunto $C([0,1])$ das funções reais definidas no intervalo $[0,1]$ e, nesse conjunto, a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

A sequência $(f_1, f_2, ...)$, onde $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ para todo $x \in [0,1]$, converge para a função constante nula, isto é, a função definida por $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$. Observemos que, para todo número natural n,

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n - f| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Assim, considerando um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ temos

$$d(f_n, f) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Exemplo 2.5 *Seja (M, d) um espaço métrico cuja métrica é a zero-um. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M converge se, e somente se, é estacionária.*

De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, então converge. Suponhamos que $\lim x_n = p \in M$. Tomando $0 < \varepsilon \leq 1$, então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, ... \in B(p, \varepsilon) = \{p\}.$$

Por esse motivo, $x_{n_0} = x_{n_0+1} = ... = p$.

Exemplo 2.6 *Seja (M, d) um espaço métrico tal que M não é um conjunto unitário. Então, se $p, q \in M$ e $p \neq q$, a sequência $(p, q, p, q, ...)$ não é convergente para nenhum ponto de M.*

Com efeito, suponhamos que tal sequência converge para $a \in M$. Então, sendo $\dfrac{d(p,q)}{2}$, a bola $B(a, \varepsilon)$ deve conter todos os pontos da sequência, a partir de um deles, e assim deve conter p e q. Com isso,

$$d(p, q) \leq d(p, a) + d(a, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é um absurdo.

Proposição 2.2 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente num espaço métrico M. Então é único o limite dessa sequência.*

Demonstração. Suponhamos $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\varepsilon = \dfrac{d(p,q)}{2}$ é maior que zero e portanto existem índices $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

$$n \geq k_0 \Rightarrow d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Tomando-se $t = \max\{n_0, k_0\}$, então $n \geq t$ implica que $d(x_n, p) < \varepsilon$ e $d(x_n, q) < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq t$

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q).$$

O que é um absurdo. ■

Proposição 2.3 *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre um conjunto M. Então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$ se, e somente se, essa sequência em (M, d') converge para o mesmo ponto p.*

Demonstração. Por hipótese, $x_n \to p$ no espaço (M, d). Dada uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon)$, como $d \sim d'$, existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $p \in (M, d)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_d(p, \lambda).$$

E assim,

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_{d'}(p, \varepsilon).$$

A recíproca é análoga. ∎

Proposição 2.4 *Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de M converge para $p \in M$, então toda subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para p.*

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ uma subsequência da sequência dada e consideremos $\varepsilon > 0$. Por hipótese, $\lim x_n = p$, e assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Mas, como cada $n_k \in \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < ...$, então existe $n_t > n_0$, e com isso, $n_k \geq n_t$, vale a relação

$$d(x_{n_k}, p) < \varepsilon.$$

∎

Definição 2.3 *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de um espaço métrico M se diz limitada se o conjunto $\{x_n; n = 1, 2, 3, ...\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$, para quaisquer termos x_r e x_k da sequência dada.*

Sejam M e N espaços métricos arbitrários. Vamos considerar sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas habituais num produto cartesiano. Uma sequência de pontos de $M \times N$, sendo definida por $((x_1, y_1); (x_2, y_2); ...)$ onde cada $x_i \in M$ e cada $y_i \in N$, determina a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de M, e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de pontos de N. Estabelecemos a condição que dá a convergência de $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em termos da convergência das sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposição 2.5 *Uma sequência$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos do produto $M \times N$ de dois espaços métricos M e N converge para $(p, q) \in M \times N$ se, e somente se, $x_n \to p$ em M e $y_n \to q$ em N.*

Demonstração. Vamos utilizar a métrica da soma d_s e, para tanto, indicaremos por d tanto a métrica de M como a de N. Seja $\varepsilon > 0$, então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d_s((x_n, y_n), (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \varepsilon.$$

Consequente, para todo $n \geq n_0$, temos

$$d(x_n, p) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(y_n, q) < \varepsilon$$

o que nos garante que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$. Reciprocamente, seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese existem índices r e s tais que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geq s \Rightarrow d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando então $t = \max\{r, s\}$, então

$$n \geq t \Rightarrow d_s((x_n, y_n), (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim, $(x_n, y_n) \to (p, q)$. ■

Observação 2.3 *A generalização do que acabamos de ver, para n espaços métricos $(n \geq 2)$ é imediata: dados os espaços métricos $M_1, M_2, ..., M_n$, uma sequência*

$$((x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}), ...)$$

de pontos de $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ determina n sequências, a saber,

$$(x_{11}, x_{21}, ...), (x_{12}, x_{22}, ...), ..., (x_{1n}, x_{2n}, ...)$$

respectivamente em $M_1, M_2, ...M_n$, e se demonstra de maneira análoga, que a sequência dada em $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ converge para o ponto $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ desse espaço se, e somente se,

$$(x_{1i}, x_{2i}, ...) \to p_i (i = 1, 2, ..., n).$$

Exemplo 2.7 *No espaço $\mathbb{R}^2$ a sequência*

$$((1, 2); (\frac{1}{2}, 2); (\frac{1}{3}, 2); ...)$$

converge para $(0, 2)$ uma vez que $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $(2, 2, ...) \to 2$.

Ainda no $\mathbb{R}^2$ a sequência

$$((1, 2); (\frac{1}{2}, 2); (\frac{1}{3}, 2); (\frac{1}{4}, 1); ...)$$

não converge em $\mathbb{R}^2$, pois embora $\lim \frac{1}{n} = 0$, a sequência $(2, 1, 2, 1, ...)$ dos segundos termos, não converge em $\mathbb{R}$.

2.2 Sequências em espaços vetoriais normados

No espaço $\mathbb{R}$ tem muito interesse as chamadas sequências monótonas que compreendem os seguintes tipos:

- Crescentes são as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \leq x_{n+1}$, para qualquer índice n. Se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se diz estritamente crescente.
- Decrescentes são as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para as quais se tem $x_{n+1} \leq x_n$, para todo índice n. Quando $x_{n+1} < x_n$, para qualquer $n \geq 1$, então a sequência se diz estritamente decrescente.

Exemplo 2.8 *A sequência* $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...\right)$ *é estritamente decrescente ao passo que* $(1, 1, 2, 2, 3, 3, ...)$ *é crescente. Por outro lado,* $(1, 2, 1, 2, ...)$ *não é monótona.*

Proposição 2.6 *Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.*

Demonstração. Suponhamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < ... < p$ e seja $p = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Vamos mostrar que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$, não se pode ter $x_n < p - \varepsilon$ para todo índice n, pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto $\{x_n\}$ menor que p.

Assim, para um certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tem-se

$$p - \varepsilon < x_{n_0} < p + \varepsilon$$

e então,

$$p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$$

para todo

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - p| < \varepsilon$$

como queríamos. ■

Para sequência crescente é análogo.

Observação 2.4 *Do mesmo modo prova-se que "Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo desse conjunto".*

Proposição 2.7 (Conservação de sinal) *Temos que:*

(a) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ e $\lim x_n = p > 0$, então existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tais que $x_n < c$ tais que $x_n < 0$ para qualquer $n \geq 0$.

(b) Se $\lim x_n = p < 0$ então existe uma constante $c < 0$ e existe um índice n_0 tal que $x_n < c$, para qualquer $n \geq n_0$.

Demonstração.

(a) Tomemos $\varepsilon = \dfrac{p}{2}$. Então existe um índice n_0 tal que para $n \geq n_0$ se tem $|x_n - p| < \dfrac{p}{2}$, ou seja,

$$-\frac{p}{2} < x_n - p < \frac{p}{2}.$$

Assim, somando p temos que $\dfrac{p}{2} < x_n$, para qualquer $n \geq n_0$. Então basta tomarmos $c = \dfrac{p}{2}$.

(b) Neste caso, a demonstração é semelhante, basta tomarmos $\varepsilon = \dfrac{|p|}{2}$ e teremos que $c = \dfrac{p}{2}$ satisfaz a condição a partir de um certo índice.

■

Proposição 2.8 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de um espaço vetorial normado E que converge para $p \in E$. Então existe uma bola de centro na origem que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) = ||x_n - p|| < 1$$

Como porém,

$$||x_n|| = ||x_n - p + p|| \leq ||x_n - p|| + ||p||$$

então para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$||x_n|| < 1 + ||p||.$$

Seja $\lambda > \max\{||x_1||, ..., 1 + ||p||\}$. Então, para todo índice n

$$d(x_n, 0) = ||x_n - 0|| = ||x_n|| < \lambda.$$

■

Definição 2.4 *Seja $f = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $g = (y_n)_{n\in N}$ sequências de um espaço vetorial normado E. Chama-se soma de f com g a sequência $f + g = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$. Se $k = (\alpha_n)_{n\in N}$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$, então o produto kf é definido naturalmente do seguinte modo: $kf = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$.*

Proposição 2.9 *Sejam* $(x_n)_{n\in N}$ *e* $(y_n)_{n\in N}$ *sequências de um espaço vetorial normado* E*. Se* $\lim x_n = p$ *e* $\lim y_n = q$*, então* $\lim(x_n + y_n) = p + q$*.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Então, por hipótese, existem índices r e s tais que

$$n \geq r \Rightarrow ||x_n - p|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geq s \Rightarrow ||y_n - q|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando $t = \max\{r, s\}$ temos então:

$$n \geq t \Rightarrow ||(x_n - y_n) - (p + q)|| \leq ||x_n - p|| + ||y_n - q|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

E portanto, $(x_n + y_n) \to p + q$. ■

A topologia dos espaços métricos

De um modo geral uma coleção Γ de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ é uma topologia sobre E se:

(i) $\emptyset, E \subset \Gamma$;

(ii) $X, Y \subset \Gamma \Rightarrow X \cap Y \subset \Gamma$;

(iii) se (X_i) é uma família de membros de Γ, então $\cup(X_i) \subset \Gamma$. O par (M, Γ) é chamado espaço topológico.

2.3 Conjuntos abertos

Definição 2.5 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Um subconjunto* $A \subset M$ *se diz aberto se, para todo* $p \in A$*, existe um número real* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(p, \varepsilon) \subset A$*.*

Observação 2.5 *Pela definição, se* $A \neq \emptyset$ *é um conjunto aberto, então A é a união de bolas abertas. Reciprocamente, se* A *é uma união de bolas abertas,* A *é aberto.*

Suponhamos que $A = \cup B_i$*, onde cada* B_i *é uma bola aberta. Assim, dado* $p \in A$*, existe um índice* s *tal que* $p \in B_s$*.*

Ora, por propriedade de bolas abertas, existe $\delta > 0$ *tal que* $B(p, \delta) \subset B_s$*. Daí*

$$B(p, \delta) \subset A,$$

e isto prova nossa afirmação.

Exemplo 2.9 *Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Então $A =]a, +\infty[$ é aberto, para todo $a \in \mathbb{R}$, uma vez que dado $p \in A$, tomando $\varepsilon = \dfrac{p-a}{2}$, então*

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset A.$$

De maneira análoga prova-se que são abertos neste espaço todos os inteiros do tipo $]a, b[$. De fato, se $p \in]a, b[$ tomando $\varepsilon < \min\{p - a, b - p\} (\varepsilon > 0)$, então

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset]a, b[.$$

Nesse mesmo espaço os conjuntos $[a, b[$ e $[a, +\infty[$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, não são abertos porque nenhuma bola aberta de centro a está contida nesses conjuntos. Também não são abertos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pois nenhum intervalo é formado só de números racionais ou só de números irracionais.

Exemplo 2.10 *Toda bola aberta $B(p, \varepsilon)$ num espaço M é um conjunto aberto, pois por propriedade, para todo $q \in B(p, \varepsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$.*

Exemplo 2.11 *Se d é a métrica "zero-um"sobre um conjunto M, então todo $A \subset M$ é aberto. Pois, se $A = \emptyset$ é imediato, já se $A \neq \emptyset$, então $A = \cup_{p \in A}\{p\}$. Assim, como cada $\{p\}$ é uma bola aberta (centro p e raio $\varepsilon \leq 1$), então A é aberto.*

Exemplo 2.12 *No espaço $\mathbb{R}^n$ o conjunto*

$$A = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$$

é aberto em relação a qualquer das métricas usuais d, d_s ou d_m de $\mathbb{R}^n$.

De fato, vamos utilizar a métrica do máximo. Seja $p = (p_1, ..., p_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e tomemos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \varepsilon < \min\{p_i\}.$$

Vamos mostrar que $B(p, \varepsilon) \subset A$. Se $x = (x_1, ..., x_n) \in B(p, \varepsilon)$, então

$$d(x, p) = \max\{|x_1 - p_1|, ..., |x_n - p_n|\} < \varepsilon,$$

e assim, $|x_i - p_i| < \varepsilon$, ou seja,

$$p_i - \varepsilon < x_i < p_i + \varepsilon (1 \leq i \leq n).$$

Mas, $p_i - \varepsilon > 0$, e consequentemente, cada $x_i > 0$. Portanto, $x \in A$.

Exemplo 2.13 *Seja M um espaço métrico e seja N um subespaço de M. Um subconjunto $A \subset N$ é aberto (em relação a N) se, e somente se, $A = G \cap N$, onde G é um subconjunto aberto de M.*

Com efeito, se A é aberto (em N), então $A = \cup(B_i \cap N)$, onde cada B_i é uma bola aberta em M. Assim,

$$A = (\cup B_i) \cap N = G \cap N,$$

sendo $G = \cup B_i$ um subconjunto aberto do espaço M.

Reciprocamente, dado $p \in G \cap N$, então $p \in G$, e desse modo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset G$. Com isso,

$$B(p, \varepsilon) \cap N \subset G \cap N.$$

Mas, $B(p, \varepsilon) \cap N$ é uma bola aberta em N, e portanto, $G \cap N$ é um subconjunto aberto do subespaço N.

Proposição 2.10 *Seja τ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d). Então:*

(i) $\emptyset, M \subset \tau$;

(ii) $A, B \subset \tau \Rightarrow A \cap B \subset \tau$;

(iii) *Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \subset \tau$, então $\cup A_i \subset \tau$.*

Demonstração.

(i) Temos que $\emptyset$ é aberto, pois não contém pontos, e assim não contraria a definição. E com relação a M, por definição, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M;

(ii) Seja $p \in A \cup B$. Assim, existem $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que

$$B(p, \varepsilon) \subset A$$

e

$$B(p, \lambda) \subset B.$$

Por propriedade de bolas abertas, se supormos que $\varepsilon \leq \lambda$, temos que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda).$$

Consequentemente, $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$;

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_t$. Logo, $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$.

■

Observação 2.6 *Temos as seguintes observações:*

1. *Notemos que podemos dizer que* τ *é uma topologia sobre* M *e que* (M, τ) *é um espaço topológico.*

2. *Dados* $A_1, ..., A_n \subset \tau(n \geq 1)$, *então* $A_1 \cap ... \cap A_n \subset \tau$.

3. *A intersecção de uma família de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. De fato, na família* (A_i), *onde* $A_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$, $i = 1, 2, ...$ *cada* A_i *é aberto em* $\mathbb{R}$ *(métrica usual). Porém,*
$$\cap A_i = \{0\}$$
não é aberto pois, não existe nenhum intervalo em $\mathbb{R}$ *formado apenas pelo ponto* 0.

Proposição 2.11 *Sejam* d *e* d' *métricas equivalentes sobre* M. *Se* τ *é a coleção dos conjuntos abertos de* M, d *e* τ' *é a coleção dos conjuntos abertos de* (M, d'), *então* $\tau = \tau'$.

Demonstração. Seja $A \in \tau$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \tau$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(p, \varepsilon) \subset A$. Pelo fato de $d \sim d'$ existe $\lambda > 0$ tal que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$. Assim, $B_{d'}(p, \lambda) \subset A$, logo $A \in \tau'$. Com isso, temos que $\tau \subset \tau'$. Analogamente, $\tau' \subset \tau$. Portanto, $\tau = \tau'$. ■

Exemplo 2.14 *Sejam* M *e* N *espaços métricos e sobre* $M \times N$ *consideremos a métrica do máximo. Isto é,*
$$d_m(p, q) = \max\{d(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$$
para quaisquer $p = (x_1, x_2)$ *e* $q = y_1, y_2$ *de* $M \times N$.

Vamos mostrar que se $G \subset M$ *e* $H \subset N$ *são conjuntos abertos, então* $G \times H$ *é aberto em* $M \times N$.

Se $p = (a, b) \in G \times H$, *então* $a \in G$ *e* $b \in H$ *e, assim, existem* $\varepsilon, \lambda > 0$ *tais que*
$$B(a, \varepsilon) \subset G$$
e
$$B(b, \lambda) \subset H.$$
Tomando $\delta = \min\{\varepsilon, \lambda\}$, *então* $B(a, \delta) \subset G$ *e* $B(b, \delta) \subset H$ *e daí*
$$B(a, \delta) \times B(b, \delta) \subset G \times H.$$
Mas,
$$B_{d_m}(p, \delta) = B(a, \delta) \times B(b, \delta),$$
e consequentemente,
$$B_{d_s}(p, \delta) \subset G \times H.$$
Portanto, $G \times H$ *é aberto segundo a métrica* d_m. *E assim, também será segundo as métricas* d *e* d_s.

Definição 2.6 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado interior de A e é indicado por $intA$. Além disso, $intA \subset A$.*

Observação 2.7 *Se todos os pontos de A são interiores, ou seja, se $A = intA$, então A é aberto. Isto é equivalente a: A é aberto se, e somente se, $A = intA$.*

Exemplo 2.15 *Na reta real consideremos $A = [a, b[$ e $B[a, +\infty[$. Em ambos os casos só o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ não está contido nem em A e nem em B. Assim, $intA =]a, b[$ e $intB =]a, +\infty[$.*

Exemplo 2.16 *Seja d a métrica "zero-um"sobre um conjunto M. Como todos os subconjuntos de M são abertos, $intA = A$, para todo $A \subset M$.*

2.4 Conjuntos fechados

Definição 2.7 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, F^c (complementar) é aberto.*

Exemplo 2.17 *Num espaço métrico (M, d), qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\} \subset M$ é fechado. Seja $p \in F^c$ e tomemos $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\varepsilon < \min_{a_i \in F} d(p, a_i)$$

e mostremos que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ ou, que $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

Mas, se algum a_i pertencesse à bola $B(p, \varepsilon)$, então $d(a_i, p) < \varepsilon$ o que é impossível.

Exemplo 2.18 *Considerando sobre um conjunto $M \neq \emptyset$ a métrica "zero-um", então todo $F \subset M$ é fechado. Isto ocorre pelo fato de F^c ser aberto devido todos os subconjuntos de M serem abertos neste caso.*

Exemplo 2.19 *Sejam M e N espaços métricos quaisquer. Dados $F \subset M$ e $L \subset N$, se F e L são subconjuntos fechados, então $F \times L$ é fechado relativamente a qualquer das métricas usuais d, d_s ou d_m sobre este espaço produto.*

De fato, notemos que a equivalência $d \sim d_s \sim d_m$ implica que essas métricas determinam a mesma coleção de abertos sobre $M \times N$. Assim, determinam também a mesma coleção de fechados. Então, como

$$(F \times L)^c = (F^c \times N) \cup (M \times L^c)$$

e tanto $F^c \times N$ como $M \times L^c$ são abertos em $M \times N$, segue-se que $(F \times L)^c$ é aberto, e consequentemente, $F \times L$ é fechado.

Proposição 2.12 *Seja T a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(i) $\emptyset, M \subset T$;

(ii) $H, F \subset T \Rightarrow H \cup F \subset T$;

(iii) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \subset T$.

Demonstração.

(i) $\emptyset$ e M estão contidos em T porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ estão contidos em τ (coleção de abertos de M);

(ii) Se H e T são fechados, então H^c e T^c são abertos. E assim, $(H^c \cup T^c)$ é aberto. Ou seja, $H \cup T$ é fechado;

(iii) Como cada F_i é fechado, então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Consequentemente, $\cap F_i$ é fechado.

■

Definição 2.8 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz aderente ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao conjunto A chama-se fecho de A e é indicado por $\overline{A}$. Além disso, $A \subset \overline{A}$.

Exemplo 2.20 *Na reta real se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\overline{A} = [a, b]$. Isto se dá ao fato de a e b serem pontos aderentes a esse intervalo, pois qualquer bola (ou seja, intervalo aberto) de centro num deles, intercepta o conjunto A. No entanto, se $p < a$ ou $p > b$, então $p \notin \overline{A}$, já que no primeiro caso, por exemplo, tomando $\varepsilon = \dfrac{a-p}{2}$, a bola $B(p, \varepsilon) =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ não intercepta A.*

Exemplo 2.21 *Ainda na reta real temos: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

De fato, dado $p \in \mathbb{R}$, todo intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ contém números racionais, e assim,

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\quad \cap \quad \mathbb{Q} \neq \varnothing.$$

Portanto, $p \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Proposição 2.13 *Seja (M, d) um espaço métrico. Então para todo $A \subset M$, o complementar do fecho de A é igual ao interior do complementar de A.*

Demonstração. Temos que p pertence ao complementar do fecho de A se, e somente se, $p \notin \overline{A}$. Mas, $p \notin \overline{A}$ se, e somente se, exite $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Porém, isto ocorre se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$; $B(p, \varepsilon) \subset A^c$, o que acontece se, e somente se, p pertence ao interior do complementar de A.

■

Corolário 2.1 *$F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração. Temos que $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $intA = A$. Dessa forma F é fechado se, e somente se, F^c é aberto, o que ocorre se, e somente se, o interior do complementar de F for igual ao complementar de F. Mas, isso só acontece se, e somente se, $(\overline{F})^c = F^c$. isto é, se, e somente se, $\overline{F} = F$. ■

Proposição 2.14 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.*

Demonstração. Primeiramente, dado $\varepsilon > 0$, como

$$d(p, A) = \inf_{x \in A} d(p, x) = 0,$$

existe $a \in A$ tal que $0 \leq d(p, a) < \varepsilon$.

Assim, $a \in B(p, \varepsilon)$, e consequentemente,

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Ou seja, $a \in \overline{A}$.

Reciprocamente, vamos supor que $d(p, A) = \varepsilon > 0$. Mas, por hipótese,

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Isto é, existe $a \in A$ tal que

$$d(a, p) < \varepsilon.$$

Segue então que

$$\varepsilon = d(p, A) < d(p, a) \leq \varepsilon$$

o que é um absurdo. ■

Proposição 2.15 *Para todo subconjunto não vazio A de um espaço métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\overline{A})$.*

Demonstração. Temos que $A \subset \overline{A}$, e assim, $d(A) \leq d(\overline{A})$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para quaisquer $x, y \in \overline{A}$, existem $a, b \in A$ tais que

$$d(x,a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$d(y,b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) < \varepsilon + d(A).$$

Portanto,

$$d(\overline{A}) \leq \varepsilon + d(A).$$

Isto é,

$$0 \leq d(\overline{A}) - d(A) \leq \varepsilon,$$

para todo ε dado. Desse modo, $d(\overline{A}) - d(A) = 0$ ou $d(\overline{A}) = d(A)$ como queríamos. ■

Proposição 2.16 *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, ...)$ de pontos de A tal que* $\lim x_n = p$.

Demonstração. Pelo fato de $p \in \overline{A}$, cada bola $B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, onde $(n = 1, 2, ...)$, contém pontos de A. A sequência $(x_1, x_2, ...)$, onde $x_n \in A \cap B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \geq 1$, converge para p. Ora, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B\left(p, \frac{1}{r}\right)$, desde que $\frac{1}{r} < \varepsilon$, e assim, contém $x_r, x_{r+1}, ...$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de A, a proposição está provada. ■

Definição 2.9 *Dado um espaço métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz denso em M se $\overline{A} = M$.*

Proposição 2.17 *Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Proposição 2.18 *Dado $p \in G$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset G$. Pelo fato de $\overline{A} = M$, existe $a \in A$ tal que $d(p, a) < \varepsilon$, isto é, $a \in B(p, \varepsilon)$. Assim, $a \in G$, e consequentemente, $G \cap A \neq \emptyset$.*

Exemplo 2.22 *$intX = \emptyset$ se, e somente se, $M - X$ é denso em M.*

Demonstração. Suponhamos que $intX = \emptyset$. Assim, para cada $x \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$ temos que $B(x, \varepsilon)$ não está contida em X. O que implica que existem pontos em $B(x, \varepsilon)$ que pertencem a $M - X$.

Dado $a \in M$ então
$$a \in M - X \Rightarrow a \in \overline{M - X}$$
ou $a \in X$ implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M - X$ tal que
$$d(a, x_n) \leq \frac{1}{n}.$$
Dessa forma, podemos obter $(x_n) \subset M - X$ tal que $x_n \to a$. Ou seja, $a \in \overline{M - X}$, e portanto, $M = \overline{M - X}$.

Reciprocamente, se $\overline{M - X} = M$, dado $x \in X$, como então $x \in \overline{M - X}$, isto implica que existe $(x_n) \subset M - X$ tal que $x_n \to x$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ temos $B(x, \varepsilon)$ não está contida em X. Pois, para algum $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in b(x, \varepsilon)$. Portanto, $intX = \emptyset$. ■

Definição 2.10 *Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto p é ponto de acumulação de A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, a interseção*
$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$$
é um conjunto infinito. Ou seja, toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de conjunto derivado de A e se indica por A'.

Exemplo 2.23 *No espaço $\mathbb{R}$ usual o único ponto de acumulação de $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ é o ponto 0. De fato, uma bola $B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contém todos os elementos*
$$\frac{1}{r} < \varepsilon (\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < r).$$
Por outro lado, para qualquer outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ cuja interseção com A não é infinita. Assim, $A' = \{0\}$.

Proposição 2.19 *Seja M um espaço métrico. Então $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Assim, $p \in F^c$, que é aberto. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$B(p, \varepsilon) \subset F^c,$$
ou seja,
$$B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset.$$
Porém $p \in F'$ então $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito, e consequentemente, $B(p, \varepsilon) \cap F$ é infinito, ou seja, não vazio. o que é um absurdo.

Reciprocamente, seja $p \in F^c$. pelo fato de $F' \subset F$, $\quad F^c \subset (F')^c$, então $p \in (F')^c$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset.$$

porém, $p \notin F$, segue então que

$$B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$$

que equivale a $B(p, \varepsilon) \subset F^c$, o que no garante que todos os pontos de F^c são interiores, isto é, F^c é aberto. Desse modo, F é fechado. ■

3 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 3.1 *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Equivalentemente, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

No importante caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \to M$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a-\delta < x < a+\delta$ implicam $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Observação 3.1 *A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em M uma bola aberta B, de centro a, tal que $f|_B$ seja contínua no ponto a, então $f : M \to N$ é contínua no ponto a. Segue-se daí que se, para toda parte limitada $X \subset M$, $f|_X$ for contínua, então $f : M \to N$ é contínua.*

Exemplo 3.1 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que $d(f(x), f(c)) \leq cd(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana. Neste caso, f é contínua (em cada ponto $a \in M$).*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$. Então

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq cd(x, a) < c\delta = \varepsilon.$$

Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f + g$ e kf, onde $k \in \mathbb{R}$. Daí, toda combinação linear $k_1 f_1 + ... + k_n f_n$ de funções reais lipschitzianas é lipschitziana.

Para uma função real de variável real f, a condição Lipschitz significa que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c$$

e isto equivale a afirmar que a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, em valor absoluto, menor do que ou igual a c.

Se uma função real $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então, pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe um ponto z, entre x e y, tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ e daí

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Assim, toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser definido) é lipschitziana.

Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se localmente lipschitziana quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = (a, r)$ tal que a restrição $f|_B$ é lipschitziana. Uma aplicação lipschitziana é contínua.

Exemplo 3.2 *A função, dada por $f(x) = x^n$, (n inteiro positivo) é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}$.*

Com efeito, temos que $|x| \leq a \Rightarrow |f'(x)| = n|x|^{n-1} \leq na^{n-1}$.

Se $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ então

$$\begin{aligned} |x^n - y^n| &= |x - y||x^{n-1} + x^{n-2}y + ...y^{n-1}| \\ &\leq |x - y|(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + ... + |y|^{n-1}) \\ &\leq c|y - x|, \end{aligned}$$

onde $c = na^{n-1}$. Segue-se que um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ cumpre a condição lipschitz em cada intervalo $[a, b]$.

Consequentemente, todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Exemplo 3.3 *A função $r : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $\frac{1}{x}$ é contínua.*

De fato, provemos primeiro que, para todo $k > 0, r$ é lipschitziana no conjunto $X_k = \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq k\}$.

Ora, se $|x| \geq k$ e $|y| \geq k$, então

$$|r(x) - r(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x - y|}{|xy|} \leq c|x - y|,$$

onde $c = \frac{1}{k^2}$.

Segue que cada número real $a \neq 0$ é centro de um intervalo, restrito ao qual r é contínua. Logo, r é contínua.

Exemplo 3.4 (Contrações Fracas) *Se $f : M \to N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, então f é uma contração fraca. Neste caso, f é lipschitziana (com $c = 1$) e portanto contínua.*

Exemplo 3.5 (Descontinuidade) *Se $f : M \to N$ não é contínua no ponto a, então f é descontínua nesse ponto.*

De fato, isto significa que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 3.6 *A função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, característica do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, dada por*

$$\xi = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua.

Com efeito, tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Dado $\delta > 0$ tomemos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo x_δ racional se a for racional e x_δ irracional se a for racional.

Então

$$|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq \frac{1}{2}.$$

Observação 3.2 *Dada uma aplicação $f : M \to N$, seja $N_1 \subset N$ um subespaço tal que $f(x) \in N_1$ para todo $x \in M$. Então f pode ser considerada como uma aplicação de M em N_1, digamos $f_1 : M \to N_1$. Assim, f é contínua se, e somente se, f_1 é contínua.*

Proposição 3.1 *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Ou seja, se $f : M \to N$ é contínua no ponto a e $g : N \to P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \to P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. A continuidade de g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que $x \in M$,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

■

Corolário 3.1 *Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua.*

Demonstração. Com efeito, $f|_X = f \circ i$, onde $i : X \to M$ é a aplicação de inclusão, $i(x) = x, x \in X$. ■

Exemplo 3.7 (Continuidade Conjunta e Separada) *Uma aplicação $f : M \times N \to P$ é comumente vista com uma "função de duas variáveis" $f(x, y)$, onde x varia em M e y em N.*

Com efeito, sua continuidade no ponto (a, b) pode ser expressa como: para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \quad \text{e} \quad d(y, b) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b)) < \varepsilon.$$

Tomemos em $M \times N$ a métrica

$$d[(x, y), (a, b)] = \max\{d(x, a), d(y, b)\},$$

se tomarmos $f(x, y)$ suficientemente próximos de $f(a, b)$, desde que x seja suficientemente próximo de a e y de b esta formulação acima decorre da definição de continuidade. Diz-se então que f é contínua conjuntamente nas variáveis x e y.

Em contraposição, diz-se que $f : M \times N \to P$ é contínua em relação a primeira variável (no ponto (a, b)) quando a aplicação parcial $f_B : M \to P$, dada por $f_B(x) = f(x, b)$, é contínua (no ponto $x = a$). De maneira semelhante, f é contínua em relação a segunda variável (no ponto (a, b)) quando a aplicação parcial $f^a(y) = f(a, y)$, é contínua (no ponto $y = b$). Se ambos os casos ocorrem, dizemos que f é contínua separadamente em relação a cada uma de suas variáveis.

Observação 3.3 $f^a = f \circ i_a$ *e* $f_b = f \circ i_b$.

Exemplo 3.8 (Continuidade da Multiplicação) *Seja E um espaço vetorial normado. A soma $s : E \times E \to E$, é uma contração fraca, e consequentemente, é contínua. consideremos agora a outra operação de E, ou seja, a aplicação $m : \mathbb{R} \times E \to E$, onde $m(\lambda, x) = \lambda x$. Mostremos que m é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R} \times E$.*

De fato, se $|\lambda|, |\mu|, |x|, |y|$ são menores do que ou iguais a a então

$$\begin{aligned} d[m(\lambda, x), m(\mu, y)] &= |\lambda x - \mu y| \\ &= |\lambda x - \mu x + \mu x - \mu y| \\ &\leq |\lambda - \mu||x| + |\mu||x - y| \\ &\leq a(|\lambda - \mu| + |x - y|) \\ &= ad[(\lambda, x), (\mu, y)]. \end{aligned}$$

Logo, m é lipschitziana.

Dessa forma, m é contínua em cada parte limitada de $\mathbb{R} \times E$, e consequentemente, $m : \mathbb{R} \times E \to E$ é contínua.

Dados os espaços métricos M, N_1 e N_2, uma aplicação $f : M \to N_1 \times N_2$ equivale a um par de aplicações $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$, chamadas as coordenadas de f, tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in M$. Escreve-se $f = (f_1, f_2)$. Considerando-se as projeções $p_1 : N_1 \times N_2 \to N_1$ e $p_2 : n_1 \times N_2 \to N_2$, têm-se $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$.

Proposição 3.2 *A aplicação $f : M \to N_1 \times N_2$ é contínua (no ponto $a \in M$) se, e somente se, suas coordenadas $f_1 : M \to N_1$ e $f_2 : M \to N_2$ são contínuas (no ponto a).*

Demonstração. Se f é contínua então $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$, pois p_1 e p_2 são contínuas. Reciprocamente, usaremos em $N_1 \times N_2$ a métrica $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$.

Dados $\varepsilon > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$$

e

$$d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon.$$

Logo, f é contínua no ponto a. ■

Corolário 3.2 *Se $f_1 : M_1 \to N_1$ e $f_2 : M_2 \to N_2$ são contínuas, então também é contínua a aplicação:*

$$\varphi = f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2,$$

definida por

$$\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Demonstração. Considerando as projeções $p_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $p_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$, vemos que as coordenadas de φ são $f_1 \circ p_1 : M_1 \times M_2 \to N_1$ e $f_2 \circ p_2 : M_1 \times M_2 \to N_2$. Pela proposição 2.6, φ é contínua. ■

Proposição 3.3 *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g : M \to E, \alpha, \beta : M \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f + g : M \to E, \alpha f : M \to \mathbb{R}$ e $\dfrac{\alpha}{\beta} : M \to \mathbb{R}$, definidas por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x), (\frac{\alpha}{\beta})(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração. Temos que as aplicações $r : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad s : E \times E \to E$ e $m : \mathbb{R} \times E \to E$, dadas por $r(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad s(x,y) = x + y =$ e $m(\lambda, x) = \lambda x$ são contínuas. Pois,

- $M \xrightarrow{f,g} E \times E \xrightarrow{s} E$
  $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x)$

  Isto é, $f + g = s \circ (f, g)$;

- $M \xrightarrow{\alpha,f} \mathbb{R} \times E \xrightarrow{m} E$
  $x \mapsto (\alpha(x), f(x)) \mapsto \alpha(x) f(x)$

  Ou seja, $\alpha f = m \circ (\alpha, f)$;

- $M \xrightarrow{\alpha,\beta} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{id \times r} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R}$
  $x \mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \mapsto (\alpha(x), \dfrac{1}{\beta(x)}) \mapsto \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

  Assim, $\dfrac{\alpha}{\beta} = m \circ (id \times r) \circ (\alpha, \beta)$.

Logo, pelas proposições 2.5 e 2.6 temos que $f + g, \alpha f$ e $\dfrac{\alpha}{\beta}$ são contínuas (onde $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação identidade). ■

Definição 3.2 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se uma imersão isométrica quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Neste caso, diz-se também que f preserva distâncias.*

Definição 3.3 *Uma imersão isométrica $f : M \to N$ é sempre injetora, pois $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$. Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva. Toda imersão isométrica $f : M \to N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.*

A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria ainda são isometrias.

Sejam X um conjunto, M, d um espaço métrico e $f : X \to M$ uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos $x, y \in X$, ponhamos $d'(x,y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma métrica d' em X, chamada a métrica induzida por f. Ela é a única métrica em X que torna $f : X \to M$ uma imersão isométrica. Um exemplo particular desta situação é o caso de um subconjunto $X \subset M$. A métrica que torna X um subespaço de M é induzida pela aplicação de inclusão $i : X \to M$, tal que $i(x) = x$ para todo $x \in X$.

Um dos métodos mais frequentes de introduzir uma métrica num conjunto X é induzí-la através de uma aplicação injetiva $f : X \to M$, de X num espaço métrico M.

3.1 Homeomorfismo

Na área da Álgebra Linear, a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear. Por outro lado, na Teoria dos Grupos, o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo. Porém, na Topologia, existem funções contínuas bijetivas $f : M \to N$ tais que $f^{-1} : N \to M$ é descontínua.

Exemplo 3.9 *Seja M a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade $i : M \to \mathbb{R}$ é contínua, mas sua inversa $j : \mathbb{R} \to M$ (que também é dada por $j(x) = x$) é descontínua em cada ponto $a \in \mathbb{R}$.*

De fato, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, temos $B\left(f(a), \dfrac{1}{2}\right) = \{f(a)\}$ em M. Logo, não existe $\delta > 0$ tal que $f((a-\delta, a+\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Definição 3.4 *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \to N$ é chamada homeomorfismo se, e somente se,*

(a) f é bijetiva;

(b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.

Proposição 3.4 *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Para que d e d' sejam equivalentes é necessário e suficiente que a aplicação $i : (M, d) \to (M, d')$, definida por $i(x) = x, \forall x \in M$, seja um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $p \in M$. Dada uma bola $B_{d'}(i(p), \varepsilon)$, por hipótese existe uma bola $B_d(p, \delta) = B_d(i(p), \delta) \subset B_{d'}(i(p), \varepsilon)$. Mas, $B_d(p, \delta) = i(B_d(p, \delta))$ o que implica $i(B_d(p, \delta)) \subset B_{d'}(i(p), \varepsilon)$ e portanto, i é contínua em p. De maneira análoga se prova que a inversa de i é contínua.

Reciprocamente, dada uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon) = B_{d'}(i(p), \varepsilon)$, como i é contínua em p existe uma bola $B_d(p, \varepsilon)$ de maneira que $i(B_d(p, \varepsilon)) = B_d(p, \delta) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$.

Usando o fato de que a inversa de i ser contínua, prova-se de maneira análoga que dada uma bola $B_d(p, \varepsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(p, \delta) \subset B_d(p, \varepsilon)$. ■

3.2 Continuidade uniforme

Seja $f : M \to N$ uma função contínua num ponto $p \in M$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ para todo $x \in B(p, \delta)$. Este δ depende, em geral, não só de ε

como também do ponto p. Mas há casos em que pode-se usar o mesmo δ em todos os pontos de M, no seguinte sentido:

Definição 3.5 *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \to N$ se diz uniformemente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Observação 3.4 *Toda função uniformemente contínua é também contínua. Porém, a recíproca não vale.*

Exemplo 3.10 *As aplicações lipschitzianas são uniformemente contínuas.*

De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f, então

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in M.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ a definição é satisfeita.

Exemplo 3.11 *A função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é uma função contínua, mas não é uniformemente contínua.*

Com efeito, a continuidade de f decorre dos fatores

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2n(2n+1)\pi} < \delta$. Tomemos $x = \dfrac{1}{2n\pi}$ e $y = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$. Então:

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi}\right| \\ &= \left|\frac{(2n+1)\pi - 2n\pi}{2n(2n+1)\pi^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\right| \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)\pi}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\cos(2n\pi) - \cos[(2n+1)\pi]| \\ &= |\cos(2\pi) - \cos(\pi)| \\ &= |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

Definição 3.6 (Homeomorfismos uniformes) *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se homeomorfismo uniforme se f é bijetora, é uniformemente contínua e sua inversa f^{-1} também é uniformemente contínua.*

Exemplo 3.12 *Toda isometria $f : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme posto que é bijetora, lipschitziana e sua inversa é também uma isometria.*

4 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Uma propriedade importante de sequências convergentes é que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente de um espaço métrico M e se $\lim x_n = p$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n).$$

Assim,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

4.1 Sequência de Cauchy

Definição 4.1 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M é chamada sequência de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

Ou equivalentemente, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Segue diretamente da definição 4.1 que toda subsequência de uma sequência de Cauchy também é uma sequência de Cauchy.

Observamos alguns resultados:

Proposição 4.1 *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente em M e dado $\varepsilon > 0$. Denotaremos por

$$x = \lim x_n,$$

temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. ■

Observação 4.1 *A recíproca desta proposição não é válida, como mostra o exemplo 4.1.*

Exemplo 4.1 *Consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$, definida por*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1,1 \\ x_3 &= 1,101 \\ x_4 &= 1,101001 \\ x_5 &= 1,1010010001 \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}$ temos que essa sequência é convergente com $x_n \to x = 1,1010010001....$ Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ (com a métrica induzida de $\mathbb{R}$). Verifiquemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em $\mathbb{Q}$. Para isso, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{Q}$ para y. Então $x_n \to y$ em $\mathbb{R}$, e pela unicidade de limite em $\mathbb{R}$ tem-se que $x = y$, de onde segue que $x = 1,101001000100001... \in \mathbb{Q}$. O que é um absurdo, pois x não admite representação decimal finita nem periódica, logo $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 4.2 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Se existe uma subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a um ponto $x \in M$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para x.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M e $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$ em M. Queremos mostrar que

$$x_n \to x.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

e como $x_{n_k} \to x$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_2 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $n_k > n_0$ temos

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De onde $x_n \to x$. ■

Corolário 4.1 *Se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de um espaço métrico possui duas subsequências que convergem a limites distintos, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$x_{n_k} \to x$$

e

$$x_{n_l} \to y$$

em M, com $x \neq y$. Suponhamos por contradição que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Pela proposição anterior temos que

$$x_n \to x$$

e

$$x_n \to y.$$

Pela unicidade do limite tem-se que $x = y$. O que é um absurdo. ■

Proposição 4.3 *Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1.$$

Seja

$$k_1 = \max\{d(x_n, x_{n_0}); 1 \leq n \leq n_0\}.$$

Tomando

$$k = \max\{2k_1, 2\},$$

temos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) \leq \frac{k}{2} + \frac{k}{2} \leq k, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ então

$$diam(A) = \sup\{d(x_n, x_m); m, n \in \mathbb{N}\} \leq k.$$

Logo, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

Observação 4.2 *A recíproca desta proposição não é verdadeira. Por exemplo, a sequência* $(1, 0, 1, 0, ...)$ *é limitada, mas é uma sequência de Cauchy. Embora a recíproca da última proposição não seja válida, estabelecemos um resultado relacionando sequências de Cauchy e diâmetro de conjuntos.*

Proposição 4.4 *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy em* M*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, seja* $A_n = \{x_n, x_{n+1,...}\}$*. Então, a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy se, e somente se*

$$\lim_{n\to+\infty} diam(A_n) = 0.$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ....$$

Agora suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$é uma sequência de Cauchy, pela proposição anterior $diam(A_1) < +\infty$. Como $A_n \subset A_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $diam(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Então, para cada $n \geq n_0$ temos

$$i, j \geq n \Rightarrow d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon, \forall x_i, x_j \in A_n.$$

De onde $diam(A_n) < \varepsilon$. Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} diam(A_n) = 0.$$

Provaremos a volta. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que

$$\lim_{n\to+\infty} diam(A_n) = 0.$$

Vamos supor que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não seja uma sequência de Cauchy. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existem $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$d(x_n, x_{n+1}) \geq \varepsilon.$$

Assim,

$$diam(A_n) \geq d(x_n, x_{n+p}) \geq \varepsilon,$$

mas como

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} \supset ....$$

Isto é,

$$diam(A_1) \geq diam(A_2) \geq ... \geq diam(A_n) \geq ....$$

Logo,

$$diam(A_{n_0}) \geq diam(A_n) \geq \varepsilon.$$

Como $n_0 \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que $diam(A_m) \geq \varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}$ o que contradiz a hipótese

$$\lim_{n \to +\infty} diam(A_n) = 0.$$

■

Vejamos alguns resultados e exemplos envolvendo sequências de Cauchy e continuidade de funções.

Proposição 4.5 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Se $f : M \to N$ é uma aplicação uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma uma sequência de Cauchy em N.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Portanto, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. ■

Observação 4.3 *(1) A recíproca da última proposição, em geral, não é válida. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua, mas é uma sequência de Cauchy. De fato, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo resultado anterior, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$ então temos*

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_m)| &= |x_n^2 - x_m^2| \\ &= |x_n + x_m||x_n - x_m| \\ &\leq (|x_n| + |x_m|)|x_n - x_m| \\ &\leq 2k|x_n - x_m|. \end{aligned}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

De onde,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| \leq 2k|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Portanto, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

(2) A última proposição não é válida para funções que são contínuas, mas não são uniformemente contínuas. Por exemplo, a função $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma e transforma a sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \dfrac{1}{n}$, na sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f(x_n) = f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$, que não é uma sequência de Cauchy.

Segue direto a última proposição o resultado abaixo.

Corolário 4.2 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de M. Se $f : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M se, e somente se, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.*

Corolário 4.3 *Se d e d' são métricas uniformemente equivalentes sobre M, então as sequências de Cauchy de (M,d) e de M, d' são as mesmas.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (M,d). Como $i : (M,d) \to (M,d')$, onde i indica a aplicação idêntica de M, é uniformemente contínua, então $(i(x_n)) = (x_n)$ é uma sequência de Cauchy em (M,d'). Analogamente se mostra que toda sequência de Cauchy em (M,d') também é sequência de Cauchy em (M,d). ■

Proposição 4.6 *Sejam M e N são espaços métricos e $M \times N$ munido da métrica euclidiana, da soma, ou do máximo. Então, a sequência $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $M \times N$ se, se somente se, as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e N, respectivamente.*

Demonstração. Por estudos anteriores sabemos que as métricas euclidiana, do máximo e da soma em $M \times N$ são uniformemente equivalentes, Então, demonstramos para uma destas métricas. Aqui será demonstrado para a métrica do máximo.

Iniciamos, seja $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n > n_0 \Rightarrow d_m((x_n,y_n),(x_m,y_m)) < \varepsilon,$$

de onde

$$m,n > n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

e

$$d(y_n,y_m) < \varepsilon.$$

Logo, as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e N, respectivamente.

Agora, seja $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M e N, respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$m,n > n_1 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

e

$$m, n > n_2 \Rightarrow d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$m, nn_0 \Rightarrow d_m((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = \max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} < \varepsilon.$$

Portanto, $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$. ■

4.2 Espaços métricos completos

Definição 4.2 *Dizemos que um espaço métrico M é chamado completo se toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M.*

Exemplo 4.2 *O espaço métrico $\mathbb{Q}$ munido da métrica usual não é completo. De fato, já vimos num exemplo de sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ não converge a nenhum ponto de $\mathbb{Q}$.*

O exemplo mais importante de espaço métrico é dado pela proposição 4.7.

Proposição 4.7 *A reta $\mathbb{R}$ (munida da métrica euclidiana) é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o conjunto

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}.$$

Temos que

$$X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto X_n é limitado. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar

$$a_n = \inf X_n$$

e temos que

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq \sup X_1.$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e monótona em $\mathbb{R}$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Agora vamos mostrar que $x_n \to x$. Para isso, fixemos $\varepsilon > 0$, como $a_n \to x$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow d(a_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pelo fato de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sequência de Cauchy, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_2 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, temos que existe $N > n_0$ tal que

$$a_{n_0} \leq x_n < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow d(x_N, a_{n_0}).$$

Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Logo, $x_n \to x$, e portanto $\mathbb{R}$ é completo. ■

Agora observamos alguns resultados envolvendo completude de espaços métricos.

Proposição 4.8 *Se F é um subconjunto fechado de um espaço métrico completo M, então F é completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em F. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M. Como M é completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$.

Precisamos mostrar que $x \in F$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ e $x_n \to x$ então $x \in \overline{F}$. Mas como F é fechado, segue que $x \in F$.

■

Proposição 4.9 *Se F é um subespaço fechado de um espaço métrico M, então F é fechado em M.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que $x_n \to x$ em M. Para mostrar que F é fechado em M verificamos que $x \in F$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em M, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em F. Segue da completude de F que existe $y \in F$ tal que $x_n \to y$ em F. Logo, $x_n \to y$ em M. Pela unicidade do limite, temos que $x = y \in F$. ■

Proposição 4.10 *Seja $M \times N$ munido de uma das três métricas usuais (isto é, da euclidiana, da soma ou do máximo). Então o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. Suponhamos que $M \times N$ é completo e mostramos que M é completo. Fixemos $b \in N$ e definamos a aplicação $f : M \times \{b\}$ dada por $f(x) = (x, b), \forall x \in M$.

A aplicação f é uma isometria, e portanto um homeomorfismo uniforme entre os espaços M e $M \times \{b\}$.

Afirmamos: $M \times \{b\}$ é um subespaço fechado do espaço métrico completo $M \times N$.

De fato, seja $((x_n, b)) \subset M \times \{b\}$ tal que $(x_n, b) \to (x, y) \in M \times N$. Então, $x_n \to x$ em M e $b \to y$ em N. Logo, $y = b$. Assim

$$(x_n, b) \to (x, b)$$

em $M \times \{b\}$. Logo, $M \times \{b\}$ é fechado em $M \times N$.

Pela afirmação anterior $M \times \{b\}$ é completo de onde segue que M é completo. De forma, análoga mostra-se que N é completo.

Agora, suponhamos que M e N são completos e mostramos que $M \times N$ é completo. Para isso, consideremos uma sequência de Cauchy $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $M \times N$. Como as projeções $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ são uniformemente contínuas, estas transformam sequências de Cauchy em $M \times N$ em sequências de Cauchy em M e N, respectivamente.

Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e N, respectivamente. Como M e N são completos então existem $x \in M$ e $y \in N$ tais que $x_n \to x$ em M e $y_n \to y$ em N. Assim,

$$(x_n, y_n) \to (x, y)$$

em $M \times N$, e portanto $M \times N$ é completo. ■

Aplicando sucessivamente $n - 1$ vezes esta proposição prova-se o seguinte corolário.

Corolário 4.4 *Seja $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ munido de uma das métricas usuais. Então $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ é completo se, e somente se, M_i é completo para todos $1 \leq i \leq n$.*

Corolário 4.5 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Definição 4.3 *(1) O espaço de Banach é um espaço vetorial que é completo na métrica que provém da norma.*

(2) O espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido do produto interno que é completo na métrica que provém do produto interno.

Exemplo 4.3 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach como também de Hilbert, pois*

$$d(x, y) = ||x - y||,$$

com $||z||^2 = \langle z, z \rangle$.

5 O TEOREMA DE BAIRE

5.1 Biografia de René-Louis Baire

Antes do teorema vamos expor uma breve biografia sobre René-Louis Baire, baseada em O'Connor e Robertson (2000). Este nasceu em 21 de Janeiro de 1874 em Paris, França, e faleceu no dia 05 de Julho de 1932 em Chambéry, França. René cresceu em Paris na época em que a torre Eiffel estava sendo construída. Seu pai era alfaiate e René era um de três filhos que tiveram que lutar sob difíceis circunstâncias financeiras. Ele estudou no Lycée Lakanal e se tornou um excelente aluno ganhando duas menções honrosas no Concours Général, uma competição entre os melhores alunos de todos os Lycées da França.

Em 1886, quando tinha doze anos, René ganhou uma bolsa de estudos para lhe permitir ter uma boa educação, e em 1890, concluiu as aulas avançadas no Lycée Lakanal e entrou na seção de matemática especial do Lycée Henri IV. Após um ano passou nos exames de admissão para a École Polytechnique e a École Normale Supérieure, onde escolheu a segunda opção. Nesta ele destacou-se nos exames escritos, porém apresentou dificuldades em oralidade. Após sua formação obteve seu primeiro cargo como professor o que lhe proporcionou uma razoável condição financeira. Entretanto, o mesmo tinha pouco contato com a vida universitária.

Baire, trabalhou na teoria das funções e no conceito de limite, descobrindo condições sob as quais uma função é o limite de uma sequência de funções contínuas. E pouco tempo depois, estabeleceu sua classificação de funções. Ele recebeu uma bolsa para continuar seus estudos na Itália e lá conheceu e estabeleceu uma estreita amizade com Volterra, e enquanto trabalhava no colégio, escreveu uma tese de doutorado sobre funções descontínuas que foi examinada em 24 de março de 1899 por um conselho formado por Darboux, Appell e Émile Picard, e assim, lhe concederam o doutorado.

No entanto, Baire sofria de problemas de saúde e, após a concessão de seu doutorado, ele só conseguiu contribuir com a matemática por alguns períodos curtos. Ele ensinou em vários colégios mas, só em 1901 que foi nomeado para a Universidade de Montpellier como "Maitre des conference", onde preparou alunos para o exame de "agregação", uma posição que ele desfrutou muito mais do que ensinar em colégios.

Em 1904, Baire recebeu uma bolsa da Fundação Peccot, onde passou o semestre no Collège de France, lecionando sobre o assunto de sua tese e teve as palestras publicadas no ano seguinte, sendo também nomeado para um cargo universitário quando ingressou na Faculdade de Ciências de Dijon, onde foi promovido a professor de análise. Entretanto, devido a problemas de saúde que o debilitaram, ele tornou-se incapaz de realizar trabalhos que exigiam concentração, e a pesquisa em matemática tornou-se impossível nesses momentos.

Próximo ao início de 1914, Baire pediu licença para tentar se recuperar. Foi para Alésia, e depois para Lausanne, não conseguindo voltar devido o início da Primeira Guerra Mundial, e assim, permaneceu por lá até o ano de 1918 em condições financeiras complicadas.

Após isso, incapaz de retomar suas funções, Baire morava às margens do lago Genebra e estava lá quando recebeu o Chevalier da Legião de Honra e foi eleito para a Academia de Ciências em 1922. Aposentou-se em 1925 e passou seus últimos anos às margens do lago de Leman.

Apesar de não poder trabalhar, Baire escreveu uma série de importantes livros de análise, incluindo Théorie des nombres irrationels, limites e continuidade (1905) e Leçons sur lesories générales of l'analyse 2, 2 Vols. (1907-8).

Nesta secção buscamos compreender um dos mais férteis teoremas da Teoria de Espaços Métricos, o qual é objetivo de estudo deste trabalho. Mas, antes de enunciá-lo estudaremos alguns resultados preliminares. Começamos introduzindo uma classe de conjuntos que em certo sentido, são insignificantes dentro do espaço métrico que os contém.

5.2 Teorema de Baire

Definição 5.1 (Conjuntos magros) *Um subconjunto X de um espaço métrico M, diz-se magro em M quando é uma reunião enumerável*

$$X = \cup X_n$$

tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $int\overline{X} = \emptyset$.

Para que X seja magro em M é necessário e suficiente que $X \subset \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde F_1, ..., F_n, ... são fechados com interior vazio em M. A noção de conjuntos magros desempenha em Espaços Métricos papel semelhante ao da noção de conjunto de medida nula em Análise.

Na terminologia antiga, um conjunto magro era chamado de conjunto de primeira categoria. Eram chamados, de conjuntos de segunda categoria, aqueles que não eram magros.

Observação 5.1 *As propriedades seguintes são imediatas:*

(i) A reunião de uma família enumerável de subconjuntos magros em M é subconjunto magro;

(ii) Se X é magro em M e Y é magro em X, então Y é magro em M.

Exemplo 5.1 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$. De fato, sabemos que o conjunto dos números racionais é enumerável e temos*

$$\mathbb{Q} = \cup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}.$$

Assim, $\mathbb{Q}$ é uma reunião enumerável de conjuntos $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$, com $int\overline{\{x\}} = \emptyset$.

Exemplo 5.2 *Não é verdade, porém, que todo subconjunto magro $X \subset M$ tenha interior vazio em M. Por exemplo, $\mathbb{Q}_+$ (racionais positivos) é magro em $\mathbb{Q}$, pelo mesmo fato do exemplo anterior. Observemos, no entanto, $\mathbb{Q}_+$ não tem interior vazio em $\mathbb{Q}$.*

Exemplo 5.3 *$\mathbb{R} \times \{0\}$ é magro em $\mathbb{R}^2$. De fato, notemos que*

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1] \times \{0\}.$$

Sendo $\mathbb{Z}$ um conjunto enumerável e

$$int\overline{[k, k+1] \times \{0\}} = \emptyset$$

em $\mathbb{R}^2$, segue que $\mathbb{R} \times \{0\}$ é magro em $\mathbb{R}^2$.

Observação 5.2 *Mostramos no exemplo (2.22) que $intX = \emptyset$ se, e somente se $M - X$ é denso em M. Neste sentido, um subconjunto $F \subset M$ é um fechado com interior vazio se, e somente se, seu complementar $M - F$ é um aberto denso em M. Portanto, $int\overline{X} = \emptyset \Leftrightarrow X$ está contido num fechado com interior vazio $\Leftrightarrow M - X$ contém um aberto denso em $M \Leftrightarrow int(M - X)$ é denso em M.*

A proposição seguinte generaliza o "Princípio dos intervalos encaixantes", um importante fato básico sobre números reais. Esse resultado é chamado Teorema de Cantor.

Teorema 5.1 (Teorema de Cantor) *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que*

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que M seja completo. Consideremos $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que goza das condições dadas acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}.$$

Ora, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ tem-se $diam(F_n) < \varepsilon$. Então,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

e portante (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Sendo M completo, então $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos $n \geq p$ implica que $x_n \in F_p$. Sendo F_p fechado concluímos que

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in F_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Logo, $a \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Afirmamos que não pode existir dois pontos $a \neq b$ nesta interseção porque obrigaria $d(a, b) \leq diam(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ então $d(a, b) = 0$. Portanto,

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}.$$

Reciprocamente, suponhamos que a interseção de toda sequência decrescente de fechados não vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M, neste sentido provamos que M é completo. De fato, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M, Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o seguinte conjunto

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

Note que

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$$

sendo $X_n \subset \overline{X_n}$ para todo $\in \mathbb{N}$, segue que $(\overline{X})$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios. Além disso, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy então
$0 = \lim\limits_{n\to\infty} diam(X_n) = diam(\overline{X_n})$. Nessas condições, existe $a \in M$ tal que

$$\cap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \{a\}.$$

Como $a \in \overline{X_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com índices arbitrariamente grande, ou seja, a é limite de uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Teorema 5.2 (Teorema de Baire) *Seja M um espaço métrico completo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Todo conjunto magro em M tem interior vazio;

(ii) Se $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $intF = \emptyset$;

(iii) Se $A_n \subset M$ é um conjunto aberto denso em M, então $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.

Equivalências. Inicialmente, demonstramos que as afirmações são equivalentes. Começamos (i)⇔(ii): sendo F_n fechado então $F_n = \overline{F_n}$ e $intF_n = int\overline{F_n} = \emptyset$. Logo, por (i) $intF = \emptyset$. Reciprocamente, seja $X \subset M$ conjunto magro. Temos que $X \subset F$, onde F satisfaz as condições (ii). Note que $intX \subset intF$, mas $intF = \emptyset$, logo, $intX = \emptyset$.

Agora (ii)⇔(iii): Sejam A_n, $n \in \mathbb{N}$, conjuntos abertos e densos em M. Denotamos $F_n = A_n^c$ de onde segue que F_n é fechado. Pela observação anterior $intF_n = \emptyset$. Seja $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, por (ii) temos que $intF = \emptyset$. Sabemos que

$$\emptyset = int \cup_{n=1}^{\infty} F_n = int \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right).$$

Como
$$int\,((\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = int\,(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \tag{5.1}$$
então $int\,((\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = \emptyset$ isto implica que
$$\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = M$$
Portanto, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.

Reciprocamente, seja $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado e tem interior vazio em M. Denotando, $A_n = F_n^c$ temos que A_n é aberto e pela última observação A_n é denso em M. Por (iii) tem-se $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é densa em M, isto implica $int\,((\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = \emptyset$. Assim, (5.1) temos
$$int\,(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \emptyset,$$
mas $A_n^c = F_n$ donde segue
$$\emptyset = int\,(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = F.$$
Portanto, as afirmações do Teorema de Baire estão provadas. ■

Demonstração. Agora vamos mostrar o Teorema de Baire, para isso, utilizaremos a terceira destas afirmações, ou seja, queremos provar que a interseção enumerável de conjuntos abertos e densos em M é densa em M. Sejam A_1, A_2, ..., A_n, ... uma sequência de conjuntos abertos e densos no espaço métrico completo M e
$$A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n.$$
Dada uma bola aberta qualquer $B(a;r)$, não vazia em M mostramos que $B(a;r) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, que A é denso em M. Por hipótese, A_1 é denso em M então
$$B(a;r) \cap A_1 \neq \emptyset.$$
Consideremos $a_1 \in B(a;r) \cap A_1$. Como $B(a;r) \cap A_1$ é um aberto e todo conjunto aberto contém uma bola fechada, existe $r_1 > 0$ tal que
$$B_1 = B[a_1;r_1] \subset B(a;r) \cap A_1.$$
Sem perda de generalidade, podemos supor $r_1 \leq 1$. Pelo fato, de que A_2 ser denso em M temos
$$B(a_1;r_1) \cap A_2 \neq \emptyset.$$
Seja $a_2 \in B(a_1;r_1) \cap A_2$. Como $B(a_1;r_1) \cap A_2$ é um aberto e todo conjunto aberto contém uma bola fechada, existe $r_2 > 0$ tal que
$$B_2 = B[a_2;r_2] \subset B(a_1;r_1) \cap A_2.$$
Podemos também supor $r_2 \leq \frac{1}{2}$. Notamos que $B_1 \supset B_2$, $diam(B_1) \leq 2$ e $diam(B_2) \leq 1$. Continuando com este raciocínio, construímos uma sequência de bolas fechadas B_n satisfazendo

(1) $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$;

(2) $B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} diam(B_n) = 0$.

Então pelo Teorema de Cantor, temos

$$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \{p\}.$$

Agora nos resta mostrar que $p \in B(a; r) \cap A$. Sendo $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$, ..., $B_n \subset A_n$, ... segue que

$$\{p\} = \cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por outro lado, $B_1 \subset B(a; r)$ e $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, assim $B_n \subset B(a; r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\{p\} = \cap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B(a; r).$$

Portanto,

$$p \in B(a; r) \cap A,$$

e portanto A é denso em M. ■

CONCLUSÃO

Com este estudo pude expandir os meus conhecimentos adquiridos durante a vida acadêmica, pois já que os Espaços Métricos é uma área ampla e uma disciplina optativa, não tive a oportunidade de cursá-la.

Dessa forma, podemos concluir que os Espaços Métricos são importantes não só pela suas características com relação a generalização dos conceitos de distância, mas também pelas ligações com outras áreas, como por exemplo, a Análise Funcional e a Topologia.

O presente trabalho teve, inicialmente, o objetivo de mostrar que existem funções contínuas em todos os pontos, mas não possui derivada em nenhum ponto desses. Porém, devido ao curto tempo, e às demais disciplinas do curso, infelizmente, não foi possível concluir este objetivo.

Nesse sentido, optamos por demonstrar o teorema de Baire, que tem fortes aplicações, como essa citada anteriormente, e também na Análise Funcional. E para que isso acontecesse, fizemos este estudo dos Espaços Métricos.

REFERÊNCIAS

Domingues, H. H., **Espaços métricos e introdução a topologia**, São Paulo: Atual (1982).

Guidorizzi, L. H., **Um curso de cálculo**,vol.04, 5ªed Rio de Janeiro: LTC, (2002).

Lima, E. L., **Análise real**, vol.01, 10ªed Rio de Janeiro: IMPA (2010).

Lima, E. L., **espaços métricos.**, 4ªed Rio de Janeiro: IMPA (2011).

Marcon, D., **Espaços Métricos**. vol.01, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96813/Divane_Marcon.PDF?->. Acesso em: 26. out. 2019.

O'Connor, J. J.; Robertson, E. F., **René-Louis Baire**. School of Mathematics and Statistics University St Andrews, Scotland 2000. Disponível em:<http:mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baire.html>. Acesso em: 27. nov. 2019.