

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Estudo sobre algumas Famílias de Distribuições de Probabilidades Generalizadas

por

Rosilda Sousa Santos

sob orientação de

Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Setembro/2012

# Estudo sobre algumas Famílias de Distribuições de Probabilidades Generalizadas

por

**Rosilda Sousa Santos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Estatística e Probabilidade

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Manoel Raimundo de Sena Junior (UFPE)**

---

**Profa. Dra. Amanda dos Santos Gomes (UFCG)**

---

**Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti(UFCG)**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Setembro/2012**

# Resumo

A proposta desta dissertação está relacionada com o estudo das principais famílias de distribuições de probabilidade generalizadas. Particularmente, estudamos as distribuições Beta Pareto, Beta Exponencial Generalizada, Beta Weibull Modificada, Beta Fréchet e a  $Kw$ -G. Para cada uma delas foram obtidas expressões para as funções densidades de probabilidade, funções de distribuição acumuladas, funções de taxa de falha, funções geratrizes de momentos, bem como foram obtidos os estimadores dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança. Finalmente, para cada distribuição foram feitas aplicações com dados reais.

**Palavras-chave:** Distribuição Beta Pareto, distribuição Beta Exponencial Generalizada, distribuição Beta Weibull Modificada, distribuição Beta Fréchet, distribuição  $Kw$ -G, momentos, método da máxima verossimilhança.

# Abstract

The purpose of this dissertation is to study the main families of generalized probability distributions. Particularly we study the distributions Beta Pareto, generalized Beta Exponential, Beta Modified Weibull, Beta Fréchet and  $Kw$ -G. For each one of these distributions we obtain expressions for the probability density function, cumulative distribution function, hazard function and moment generating function as well as parameter estimates by the method of maximum likelihood. Finally, we make real data applications for each one of the studied distributions.

**Keywords:** Distribution Beta Pareto, Distribution Beta Generalized Exponential, Distribution Beta Modified Weibull, Distribution Beta Fréchet, Distribution  $Kw$ -G, moments, method maximum likelihood.

# Agradecimentos

## Meus sinceros agradecimentos:

A **Deus**, força maior que nos inspira e nos faz persistir diante dos obstáculos.

Aos meus pais, **Nivaldo e Maristela**, pelo amor, educação e anos de dedicação.

Ao meu irmão, tios, ao meu esposo Joab Lima e demais familiares pelo afeto, amizade e apoio nas horas difíceis.

A minha avó, **Da. Evonita**, pelos primeiros ensinamentos.

Aos professores do DME/UFCG pela minha formação.

Ao meu orientador do Mestrado, professor Alexsandro Bezerra Cavalcanti, pela confiança, orientação, companheirismo, seriedade, paciência e toda a ajuda que me concedeu com o seu conhecimento matemático.

Ao professor Manoel Ferreira dos Santos Neto pela ajuda na parte computacional.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Matemática da UFCG que contribuíram direta ou indiretamente com a minha formação e para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos e companheiros de Mestrado, pessoas que me encorajaram a seguir com esse e outros projetos, em especial, Leomarques, Sirlene, Joelson e Paulo Célio.

Aos professores da Banca Examinadora que avaliaram o trabalho e cujas sugestões ajudaram a melhorar consideravelmente o nosso trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos, meu muito obrigado.

# Dedicatória

Aos meus pais, Nivaldo e Maristela.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1 A Distribuição Beta-Pareto</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 A distribuição Beta-Pareto . . . . .	4
1.2.1 Casos especiais . . . . .	6
1.2.2 Outros tipos de distribuições beta-Pareto . . . . .	10
1.3 Algumas propriedades para DBP . . . . .	12
1.3.1 O comportamento do limite . . . . .	12
1.3.2 Transformação . . . . .	13
1.3.3 Unimodalidade . . . . .	14
1.3.4 Função taxa de falha . . . . .	15
1.4 Momentos para a DBP . . . . .	20
1.5 O Desvio médio . . . . .	23
1.6 As entropias de Rényi e Shannon . . . . .	26
1.7 Os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros . . . . .	27
1.8 Aplicação da DBP . . . . .	29
1.8.1 Os dados do Rio Wheaton . . . . .	30
<b>2 A Distribuição Beta Exponencial generalizada</b>	<b>34</b>
2.1 Introdução . . . . .	34
2.2 Expansão para as funções de distribuição e densidade . . . . .	38
2.3 Expansões para as estatísticas de ordem . . . . .	40
2.4 Função geratriz de momentos . . . . .	41
2.5 Momentos . . . . .	43
2.6 Estimação e Inferência . . . . .	45

2.7	Aplicação . . . . .	48
<b>3</b>	<b>A Distribuição Beta-Weibull modificada</b>	<b>51</b>
3.1	Introdução . . . . .	51
3.2	A definição do modelo . . . . .	52
3.3	Expansões para a distribuição e funções densidade . . . . .	56
3.4	Confiabilidade . . . . .	57
3.5	Expressões gerais para os momentos . . . . .	58
3.6	Momentos das Estatísticas de Ordem . . . . .	59
3.7	Estimadores de Máxima Verossimilhança . . . . .	63
3.8	Aplicação . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Alguns resultados para a distribuição Beta Fréchet</b>	<b>68</b>
4.1	Introdução . . . . .	68
4.2	Expansões para a distribuição e a função de densidade . . . . .	72
4.3	Estatísticas de Ordem . . . . .	74
4.4	Momentos . . . . .	74
4.4.1	L - Momentos . . . . .	75
4.5	Estimação e Matriz de informação . . . . .	75
4.6	Aplicação . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Família de distribuições Kw generalizadas</b>	<b>79</b>
5.1	Introdução . . . . .	79
5.2	Distribuições Especias <i>Kw</i> Generalizada . . . . .	81
5.2.1	<i>Kw</i> -normal . . . . .	82
5.2.2	<i>Kw</i> -Weibull . . . . .	82
5.2.3	<i>Kw</i> -gama . . . . .	82
5.2.4	<i>Kw</i> -Gumbel . . . . .	83
5.2.5	<i>Kw</i> Gaussiana inversa . . . . .	83
5.2.6	<i>Kw</i> Fréchet . . . . .	84
5.3	Uma expansão geral para a função de densidade . . . . .	86
5.4	Fórmula Geral para os momentos . . . . .	87
5.5	Estatísticas de ordem . . . . .	87
5.6	Inferência . . . . .	90



5.7 Aplicação . . . . .	92
<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>

# Introdução

Neste trabalho, estudamos alguns modelos de distribuições de probabilidade baseados na distribuição Beta.

No capítulo 1, apresentamos a distribuição Beta Pareto (DBP) introduzida por Akinsete, Famoye e Lee (2008), cuja distribuição é muito importante na literatura, pelo fato de ser uma generalização da família da distribuição Pareto. Neste capítulo, discutimos algumas propriedades desta distribuição, bem como expressões para a média, desvio médio, variância, curtose e entropia.

No capítulo 2, definimos a distribuição Beta Exponencial Generalizada (BEG) introduzida por Barreto, Santos e Cordeiro (2010), motivada pela ampla utilização da distribuição Exponencial, e também pelo fato de que essa generalização proporciona maior flexibilidade para analisar situações mais complexas. A distribuição BEG representa uma generalização de algumas distribuições, tais como, a distribuição Beta Exponencial discutida por Nadarajah e Kotz (2005) e a distribuição Exponencial Generalizada introduzida por Gupta e Kundu (1999).

No capítulo 3, trabalhamos com a Beta Weibull Modificada (BWM) introduzida por Silva, Ortega e Cordeiro (2010). Essa distribuição é capaz de melhorar a modelagem de dados cujo ajuste é realizado por modelos tradicionais. Além disso, permite testar a qualidade do ajuste de várias distribuições conhecidas, como submodelos.

No capítulo 4, apresentamos a distribuição Beta Fréchet (BF) introduzida por Barreto, Cordeiro e Simas (2011). Ela unifica algumas distribuições anteriormente propostas, proporcionando uma visão geral destas distribuições para estudos teóricos. A distribuição BF é motivada pela ampla utilização da distribuição de Fréchet, e também pelo fato de que a generalização fornece mais flexibilidade para análise de dados assimétricos.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos a distribuição  $Kw$ -G, introduzida por

Cordeiro e Castro (2010), em que estudamos alguns casos dessa distribuição, em particular, a distribuição a  $Kw$  Fréchet que é nossa contribuição teórica para esta dissertação. Esta distribuição foi baseada nas distribuições Fréchet e de Kumaraswamy.

Vale salientar que em todos os capítulos foram discutidas expressões para a função de densidade de probabilidade, função de distribuição acumulada, expansões para as funções de distribuição e densidade, expressões gerais para os momentos, momentos das estatísticas de ordem, e estimação dos parâmetros. Ao final de cada capítulo, apresentamos aplicações para mostrar que a distribuição em discussão tem o melhor ajuste em relação aos outros modelos.

Os gráficos apresentados neste trabalho foram feitos utilizando-se a linguagem de programação computacional  $R$  em sua versão 2.15.0.

Todos os capítulos foram escritos de forma independente, de tal maneira que cada um deles possa ser lido independente de outro. Desta forma, algumas definições e/ ou resultados podem aparecer em mais de um capítulo.

# Capítulo 1

## A Distribuição Beta-Pareto

### 1.1 Introdução

A família da distribuição de Pareto é bem conhecida na literatura por causa de sua capacidade em modelagem do tempo de duração de componentes ou tempo de vida de indivíduos. Este fato é justificado, em função das distribuições existentes, muitas vezes não se ajustarem de forma satisfatória ao conjunto de dados reais em estudo. Existem na literatura várias formas da distribuição de Pareto e suas generalizações como por exemplo a distribuição de Pareto Generalizada (DPG), que é utilizada na modelagem de dados de valores extremos devido à sua densidade apresentar cauda longa. A distribuição de Pareto foi estendida para a distribuição de Pareto transformada chamada de distribuição Burr. Outras distribuições como a exponencial, a potência, a logística e a distribuição qui-quadrado são relacionadas com a distribuição de Pareto por meio de algumas transformações. Muitos autores, incluindo Choulakian e Stephens (2001) tinham reivindicado a versatilidade da DPG na modelagem de vários tipos de dados com cauda longa. Isso motivou uma outra generalização da distribuição Pareto, a distribuição Beta Pareto. Neste capítulo, vamos iniciar com uma discussão sobre a distribuição Beta Pareto, introduzida por Akinsete, Famoye e Lee (2008), assim como discutir algumas propriedades desta distribuição. Expressões para a média, desvio médio, variância, curtose e entropia serão obtidas. Utilizaremos o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros desta distribuição.

## 1.2 A distribuição Beta-Pareto

**Definição 1.2.1** *X tem distribuição Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  se sua função densidade é dada por*

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, x \in (0, 1), \alpha, \beta > 0,$$

onde  $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ , é a função beta.

A função de distribuição acumulada (fda) para uma classe de distribuições generalizadas é definida por Eugene (2002) como sendo uma aplicação inversa da fda  $F(x)$  para uma variável aleatória da distribuição beta,

$$G(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{F(x)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad (1.1)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  são dois parâmetros adicionais, cujo papel é introduzir assimetria e variação do peso da cauda, respectivamente.

**Definição 1.2.2** *Definimos a função densidade de probabilidade (fdp) correspondente de  $G(x)$  como sendo*

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [F(x)]^{\alpha-1} [1-F(x)]^{\beta-1} F'(x), x \in R. \quad (1.2)$$

No presente estudo,  $F(x)$  é a fda de uma variável aleatória Pareto com função densidade definida por  $f(y) = k\theta^k / y^{k+1}$ ,  $k > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $y \geq \theta$ . A fda da distribuição Pareto é dada por

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}.$$

**Definição 1.2.3** *Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição Beta-Pareto com parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ , e  $k$  denotada por  $BP(\alpha, \beta, \theta, k)$  como sendo*

$$g(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1}, \quad x \geq \theta, \alpha, \beta, \theta, k > 0. \quad (1.3)$$

Considere  $y = (x/\theta)^{-k}$ , desta forma podemos mostrar que

$$\int_{\theta}^{\infty} g(x) dx = 1$$

De fato, como  $dy/dx = -k(x/\theta)^{-k-1}\theta \implies dx = (-\theta/k(x/\theta)^{-k-1})dy$ , então

$$\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{k}{\theta B(\theta, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} dx.$$

Fazendo a substituição de  $y = (x/\theta)^{-k}$  na integral acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\infty} g(x)dx &= \int_{\theta}^{\infty} \frac{k}{\theta B(\theta, \beta)} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-1} \frac{\theta}{ky\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-1}} dy \\ &= \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = 1. \end{aligned}$$

A fda da distribuição beta-Pareto obtida da expressão (1.1), denotada por  $G(x)$ , pode ser descrita por  $G^*(x) = 1 - G(x)$ . Podemos obter a função densidade para a distribuição beta-Pareto (DBP) a partir da expressão (1.3), assim

$$G^*(x) = \int_x^{\infty} \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{-k\beta-1} dt, t \geq \theta. \quad (1.4)$$

Considere  $y = (t/\theta)^{-k}$ , assim

$dy/dx = -k(t/\theta)^{-k-1}1/\theta = (-k/\theta)(t/\theta)^{-k-1} \implies dx = -\theta/k(t/\theta)^{-k-1}$ , substituindo em (1.4) temos:

$$\begin{aligned} G^*(x) &= \int_x^{\infty} -\frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{-1} \frac{\theta}{k\left(\frac{t}{\theta}\right)^{-k} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{-1}} dt \\ &= \int_0^z \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\beta-1} (1-y)^{\alpha-1} dy = \frac{B(z; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}, 0 < z < 1, \end{aligned}$$

em que  $B(z; \alpha, \beta)$  é a função beta incompleta com  $z = (x/\theta)^{-k}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
G(x) &= 1 - \frac{B(z; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} & (1.5) \\
&= 1 - \frac{z^\beta}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta+1}z + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)}z^n + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Note que, substituindo  $\alpha = 1 = \beta$ , na expressão (1.5) reduz-se a fda da distribuição Pareto.

De fato, a expressão (1.5) é dada por

$$G(x) = 1 - \frac{z^\beta}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta+1}z + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)}z^n + \dots \right\},$$

onde  $z = (x/\theta)^{-k}$ . Para  $\alpha = 1 = \beta$ , temos

$$\begin{aligned}
G(x) &= 1 - \frac{z^\beta}{B(\alpha, \beta)} \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta+1}z + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)}z^n + \dots \right\} \\
&= 1 - z \\
&= 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}.
\end{aligned}$$

### 1.2.1 Casos especiais

a) **Caso 1:** Quando  $\alpha = \beta = 1$ , a DBP na expressão (1.3) reduz-se a fdp da distribuição Pareto com parâmetros  $k$  e  $\theta$ .

De fato, note que

$$g(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1}, \quad x \geq \theta, \alpha, \beta, \theta, k > 0.$$

Substituindo  $\alpha = \beta = 1$  temos,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{k}{\theta B(1, 1)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^0 \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} = \frac{k}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} = \frac{k}{\theta} \left(\frac{\theta}{y}\right)^{k+1} = \frac{k\theta^{k+1}}{\theta y^{k+1}} \\
&= \frac{k\theta^k}{\theta y^{k+1}} = \frac{k\theta^k}{y^{k+1}}, \quad k > 0, \theta > 0, y \geq \theta.
\end{aligned}$$

b) **Caso 2:** Quando  $\alpha = 1$ , a DBP com parâmetros  $\alpha, \beta, \theta$  e  $k$  se reduz a distribuição Pareto com parâmetros  $k\beta = c$  e  $\theta$ , com função densidade dada por

$$f(x) = \frac{c\theta^c}{x^{c+1}}, \quad c > 0, \theta > 0, x \geq \theta.$$

De fato, note que

$$g(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1}, \quad x \geq \theta, \alpha, \beta, \theta, k > 0.$$

Substituindo  $\alpha = 1$  e  $k\beta = c$  temos,

$$g(x) = \frac{k}{\theta B(1, \beta)} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k} \right\}^0 \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1} = \frac{k \theta^{k\beta+1}}{\theta x^{k\beta+1}} = \frac{k \theta \theta^{k\beta}}{\theta x^{k\beta+1}} \beta = \frac{c \theta^c}{x^{c+1}}, \quad c > 0, \theta > 0, x \geq \theta.$$

c) **Caso 3:**

*Teorema 1* Se  $X \sim BP(\alpha, \beta, \theta, k)$ , então a variável aleatória  $Y = (X/\theta)^{-k}$  tem distribuição arco-seno com  $\alpha = 1/2 = \beta$ .

**Demonstração:** Usando o método da transformação, é possível mostrar que a variável aleatória  $Y$  tem função densidade arco-seno dada por

$$f(y) = \left( \frac{1}{\pi} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \right), \quad 0 < y < 1.$$

De fato, seja  $F_Y(y)$  a fda de  $Y$ , então

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\left(\frac{X}{\theta}\right)^{-k} \leq y\right) = P\left(\left(\frac{\theta}{X}\right)^k \leq y\right) = P\left(\frac{\theta^k}{X^k} \leq y\right) = \\ &P\left(\frac{\theta^k}{y} \leq X^k\right) = P\left(X^k \geq \frac{\theta^k}{y}\right) = P\left(X^k \geq \left(\frac{\theta}{y^{1/k}}\right)^k\right) = P\left(X \geq \frac{\theta}{y^{1/k}}\right) = P\left(X \geq \frac{\theta}{\sqrt[k]{y}}\right) = \\ &F_X\left(\frac{\theta}{\sqrt[k]{y}}\right). \end{aligned}$$

Derivando em relação a  $y$ , obtemos a densidade de  $Y$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F'_Y(y) &= -F'_X(\theta Y^{-1/k}) \theta \left(-\frac{1}{k}\right) y^{-1/k-1} \\ &= f_X(\theta y^{-1/k}) \frac{\theta}{k} y^{-1/k-1} \\ &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left[ 1 - \left( \frac{\theta y^{1/k}}{\theta} \right)^{-k} \right]^{\alpha-1} \left( \frac{\theta y^{1/k}}{\theta} \right)^{-k\beta-1} \frac{\theta}{k} y^{-1/k-1} \\ &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \frac{\theta}{k} \left[ 1 - \left( y^{1/k} \right)^{-k} \right]^{\alpha-1} (y)^{\beta + \frac{1}{k}} y^{-1/k-1} \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}, \quad y > 0. \end{aligned}$$



Se  $\alpha = 1/2 = \beta$ , então podemos escrever a expressão acima como sendo

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{B(1/2, 1/2)} (1-y)^{-1/2} y^{-1/2} \\ &= \frac{1}{B(1/2, 1/2)} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1-y}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

■

d) **Caso 4:**

*Teorema 2* Se  $X \sim BP(\alpha, \beta, \theta, k)$ , então a variável aleatória  $Y = \beta \log(X/\theta)$  tem distribuição log beta, com parâmetros  $\alpha$ ,  $k$  e  $k/\beta$ . Isto é,  $Y \sim \text{logbeta}(\alpha, k, k/\beta)$ .

**Demonstração:** Usando o método da transformação, vamos mostrar que a variável aleatória  $Y$  tem função densidade dada por

$$f(y) = \left( \frac{k}{\beta B(\alpha, \beta)} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{ky}{\beta}\right) \right)^{\alpha-1} \exp(-yk), \quad 0 < y < \infty. \quad (1.6)$$

De fato,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\beta \ln\left(\frac{X}{\theta}\right) \leq y\right) = P\left(\ln\frac{X}{\theta} \leq \frac{y}{\beta}\right) = P\left(\frac{X}{\theta} \leq \exp\left(\frac{y}{\beta}\right)\right) = \\ &= P\left(X \leq \theta \exp\left(\frac{y}{\beta}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\theta \exp\left(\frac{y}{\beta}\right)\right) \theta \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{y}{\beta}\right) \\ &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{\theta \exp(y/\beta)}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{\theta \exp(y/\beta)}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \frac{\theta}{\beta} \exp(y/\beta) \\ &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} 1 - (\exp(y/\beta))^{-k\alpha-1} (\exp(y/\beta))^{-k\beta-1} \frac{\theta}{\beta} \exp(y/\beta) \\ &= \frac{k}{\beta B(\alpha, \beta)} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-ky}{\beta}\right) \right]^{\alpha-1} \left\{ \exp\left(\frac{-ky\beta}{\beta}\right) \right\} \\ &= \left( \frac{k}{\beta B(\alpha, \beta)} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{ky}{\beta}\right) \right)^{\alpha-1} \exp(-ky), \quad y > 0. \end{aligned}$$

■

De acordo com Dufresne (2005), se  $Y \sim \text{logbeta}(a, b, c)$ , então

$$f(y) = k(a, b, c) \exp -by(1 - \exp -cy)^{a-1}, \quad y > 0$$

em que

$$k(a, b, c) = \frac{c\Gamma(a + \frac{b}{c})}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{b}{c})}$$

**Demonstração:** Considere  $\alpha = a$ ,  $k = b$  e  $k/\beta = c \Rightarrow \beta = b/c$  substituindo na expressão (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{b}{(b/c)B(a, b/c)} (1 - \exp(-cy))^{a-1} \exp(-by) \\ &= \frac{c}{B(a, b/c)} (1 - \exp(-cy))^{a-1} \exp(-by). \end{aligned}$$

Fazendo,

$$k(a, b, c) = \frac{c\Gamma(a + \frac{b}{c})}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{b}{c})},$$

obtemos,

$$f(y) = k(a, b, c) \exp -by(1 - \exp -cy)^{a-1}.$$

■

e) **Caso 5:**

*Corolrio 1* Se  $X \sim BP(\alpha = 1, \beta, \theta, k)$ , então a variável aleatória  $Y = \beta \log(X/\theta)$  segue uma distribuição exponencial com média  $1/k$ .

**Demonstração:** Se  $X \sim BP(\alpha = 1, \beta, \theta, k)$ , então  $Y = \beta \log(X/\theta)$ , temos a função densidade dada por:

$$f(y) = \frac{k}{\beta B(\alpha, \beta)} \left(1 - \exp\left(-\frac{ky}{\beta}\right)\right)^{\alpha-1} \exp(-yk), \quad 0 < y < \infty.$$

Substituindo  $\alpha = 1$  em  $f(y)$  temos,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{k}{\beta B(1, \beta)} \left(1 - \exp\left(-\frac{ky}{\beta}\right)\right)^0 \exp(-yk) = \\ &= \frac{k}{\beta} \frac{1}{\beta} \left(1 - \exp\left(-\frac{ky}{\beta}\right)\right)^0 \exp(-yk) = k \exp(-yk), \quad y > 0. \end{aligned}$$

■

f) **Caso 6:**

*Corolrio 2* Se  $X \sim BP(\alpha, \beta, \theta, k)$ , então a fdp para a variável aleatória  $Y = \beta \log(X/\theta)$  é uma integral que representa a função beta com  $k = \beta$ , ou um caso especial para a distribuição beta-Weibull,  $BW(\alpha, \beta, c, \gamma)$ .

**Demonstração:** Seja  $k = \beta$ , pelo Teorema 2, a fdp da variável aleatória  $Y$  pode ser escrita como

$$f(y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \exp -y\beta(1 - \exp -y)^{\alpha-1}, \quad 0 < y < \infty.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\beta}{\beta B(\alpha, \beta)} \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta y}{\beta}\right)\right)^{\alpha-1} \exp(-y\beta) \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} (1 - \exp(-y))^{\alpha-1} \exp(-y\beta) \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \exp -y\beta(1 - \exp -y)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Este é um caso especial da distribuição beta-Weibull,  $BW(\alpha, \beta, c, \gamma)$ , no qual o mesmo foi discutido em Famoye (2005), com  $c = 1 = \gamma$ . A densidade pode ser representada também pela integral da função beta, de acordo com Zwillinger e Kokoska (2000),

$$\int_0^\infty \frac{1}{B(p, q)} \exp -tp(1 - \exp -t)^{q-1} dt = 1.$$

■

## 1.2.2 Outros tipos de distribuições beta-Pareto

Johnson (1994) discutiu vários tipos de distribuições Pareto. A densidade  $f(y) = k\theta^k/y^{k+1}$ ,  $k > 0, \theta > 0, y \geq \theta$ , é chamada de Pareto do tipo *I*. As funções de distribuição acumulada das variáveis Paretos tipos *II*, *III* e *IV* são, respectivamente, dadas por:

$$F_2(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{-a}, \quad x > 0, \quad C, \quad a > 0,$$

$$F_3(x) = 1 - \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}, \quad x > 0, \quad C, \quad a, \quad b > 0,$$

e

$$F_4(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{-\xi}, \quad x > \mu, \quad \xi, \quad \lambda, \quad \sigma > 0.$$

Substituindo a função de distribuição  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$  e  $F_4(x)$  na expressão

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [F(x)]^{\alpha-1} [1 - F(x)]^{\beta-1} F'(x),$$

obtemos a função densidade destes tipos de distribuições beta-Pareto, respectivamente.

De fato,

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{-a}\right\}^{\alpha-1} \left\{1 - 1 + \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{-a}\right\}^{\beta-1} a \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{a-1} \frac{1}{C} \\ &= \frac{a}{CB(\alpha, \beta)} \left\{1 - \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{-a}\right\}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{x}{C}\right)^{-a\beta-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right\}^{\alpha-1} \left(1 - 1 + \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right)^{\beta-1} (1 - Ce^{-bx}(x+C)^{-a}), \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right\}^{\alpha-1} \left(\frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right)^{\beta-1} \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a} \left(b + \frac{a}{x+C}\right) \\ &= \frac{b + a/x + C}{B(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{Ce^{-bx}}{(x+C)^a}\right)^{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{-\xi}\right\}^{\alpha-1} \left\{1 - \left[1 - \left(1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\right]\right\}^{-\xi} \\ &\times \xi \left\{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-\xi-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\sigma} \\ &= \frac{\xi}{\sigma \lambda B(\alpha, \beta)} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{-\xi}\right\}^{\alpha-1} \left\{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-\xi\beta-1}. \end{aligned}$$

## 1.3 Algumas propriedades para DBP

### 1.3.1 O comportamento do limite

*Lema 1* O limite da densidade da beta-Pareto quando  $x \rightarrow \infty$  é 0 e o limite quando  $x \rightarrow \theta$  é dado por

$$\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{k\beta}{\theta}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

**Demonstração:** De fato, para  $x \geq \theta, \alpha, \beta, \theta, k > 0$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1} \right\} \\ &= \left\{ \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left( \frac{\theta}{x} \right)^k \right\}^{\alpha-1} \left( \frac{\theta}{x} \right)^{k\beta+1} \right\}. \end{aligned}$$

Note que,  $\theta/x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , pois  $x \geq \theta$ .

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \lim_{x \rightarrow \theta} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1}.$$

Vamos analisar os seguintes casos:

- $0 < \alpha < 1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0 \Rightarrow \alpha - 1 < 0$ , *assim*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \theta} g(x) &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \lim_{x \rightarrow \theta} \left\{ \frac{1}{[1 - (\frac{x}{\theta})^{-k}]^{1-\alpha}} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{-k\beta-1} \right\} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

- $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) &= \frac{k}{\theta B(1, \beta)} \lim_{x \rightarrow \theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \\
&= \frac{k}{\theta B(1, \beta)} \\
&= \frac{k}{\theta^{\frac{1}{\beta}}} \\
&= \frac{k\beta}{\theta}.
\end{aligned}$$

- $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \lim_{x \rightarrow \theta} \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \right\} \\
&= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ \left[ 1 - (1)^{-k} \right]^{\alpha-1} (1)^{-k\beta-1} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \theta} g(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{k\beta}{\theta}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

■

### 1.3.2 Transformação

*Teorema 3* Se  $Y$  é uma variável aleatória da distribuição Beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , então a variável aleatória

$$X = \theta(1 - Y)^{-\frac{1}{k}},$$

segue a DBP com parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  e  $k$ .

**Demonstração:** Utilizando o método da transformação, mostraremos que a variável aleatória  $X$  tem fdp dada pela expressão (1.3).

De fato,

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\theta(1 - Y)^{-\frac{1}{k}} \leq x) = P\left(\left((1 - Y)^{-\frac{1}{k}}\right)^{-k} \geq \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right) = \\
&= P\left(1 - Y \geq \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right) = P\left(-Y \geq \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - 1\right) = P\left(Y \leq 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P\left(Y \leq 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right) &= F_Y\left(1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right) \Big| -k\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} \frac{1}{\theta} \Big| \\
&= \frac{\Gamma(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta+k} \frac{k}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} = \\
&= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1}, \quad x \geq \theta, \quad \alpha, \beta, \theta, k > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a variável aleatória  $X = \theta(1 - Y)^{-\frac{1}{k}}$  segue uma DBP com parâmetros  $\alpha, \beta, \theta$  e  $k$ .

■

### 1.3.3 Unimodalidade

*Teorema 4* A DBP é unimodal em  $x_0$ . Quando  $0 < \alpha \leq 1$ , o ponto  $x_0 = \theta$  e quando  $\alpha \geq 1$  o ponto  $x_0$  é dado por

$$x_0 = \theta \left( \frac{k\beta + 1 + k(\alpha - 1)}{k\beta + 1} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

**Demonstração:** Derivando a expressão (1.3) obtemos,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ \alpha - 1 \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-2} k \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} - \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-1} (k\beta + 1) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-2} \frac{1}{\theta} \right\} \\
&= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{ \frac{k}{\theta} (\alpha - 1) \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-2} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-k\beta-2} - \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-1} (k\beta + 1) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-2} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{1}{\theta}\right) \right\} \\
&= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-2} \left\{ k(\alpha - 1) \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-2} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-1} (k\beta + 1) \right\} \\
&= \frac{k}{\theta 2B(\alpha, \beta)} \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right]^{\alpha-2} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-2} \left\{ k(\alpha - 1) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1) \left[ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right] \right\} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

■

Igualando a expressão (1.7) a zero, obtemos  $x_0 = \theta$  como ponto crítico para a função  $g$ . A segunda derivada da função  $g$  igual a zero nos dá  $x_0 = 0$ , o qual não pode ser um ponto modal, uma vez que  $X \geq \theta > 0$ . Resolvendo a terceira derivada obtemos

$$\begin{aligned}
k(\alpha - 1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1)\left[1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right] &= 0, \Rightarrow \\
k(\alpha - 1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1) + (k\beta + 1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} &= 0, \Rightarrow \\
\left(k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1) &= 0, \Rightarrow \\
\left(k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1) &= 0, \Rightarrow \\
k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} &= k\beta + 1, \Rightarrow \\
\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} &= \frac{k\beta + 1}{k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)}, \Rightarrow \\
\left(\frac{\theta}{x}\right)^k &= \frac{k\beta + 1}{k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)}, \Rightarrow \\
\frac{\theta^k}{x^k} &= \frac{k\beta + 1}{k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)}, \Rightarrow \\
x^k &= \frac{\theta^k(k(\alpha - 1) + (k\beta + 1))}{k\beta + 1}, \Rightarrow \\
x &= \left(\frac{k(\alpha - 1) + (k\beta + 1)}{k\beta + 1}\right)^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

Como  $x \geq \theta$ , é necessário que

$$k(\alpha - 1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} - (k\beta + 1)\left[1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right] \geq 1$$

e que por vez acarreta  $\alpha \geq 1$ . Se  $\alpha = 1$ , então  $x_0 = \theta$ , o qual coincide com o ponto crítico na primeira derivada na expressão (1.7). Se  $0 < \alpha < 1$ , a DPB é uma função decrescente em  $x$  e seu ponto máximo é  $x_0 = \theta$ . Isto conclui a prova.

### 1.3.4 Função taxa de falha

**Definição 1.3.1** *A função taxa de falha de uma variável aleatória  $X$  com densidade  $g(x)$  e função distribuição acumulada  $G(x)$  é dada por*

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)},$$



em que  $g(x)$  e  $G(x)$  são dadas pelas expressões (1.3) e (1.4), respectivamente. Utilizando estas expressões a função de falha para a DPB pode ser expressa por

$$h(x) = \frac{k/x \left(1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\beta} + \left(\frac{1-\alpha}{\beta+1}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} + \dots + \left(\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-nk} + \dots\right)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1}}{1 - \left(1 - \frac{z^\beta}{B(\alpha, \beta)} \left\{\frac{1}{\beta} + \frac{1-\alpha}{\beta+1} z + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)} z^n + \dots\right\}\right)} \\ &= \frac{\frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-(k\beta+1)}}{\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta}}{B(\alpha, \beta)} \left\{\frac{1}{\beta} + \left(\frac{1-\alpha}{\beta+1}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-nk} + \dots\right\}} \\ &= \frac{\frac{k}{\theta} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-1}}{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta} \left\{\frac{1}{\beta} + \left(\frac{1-\alpha}{\beta+1}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-nk} + \dots\right\}} \\ &= \frac{\frac{k}{x} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1}}{\left\{\frac{1}{\beta} + \left(\frac{1-\alpha}{\beta+1}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} + \dots + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}{n!(\beta+n)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-nk} + \dots\right\}}. \end{aligned}$$

Note que se  $\alpha = 1 = \beta$  em  $h(x)$ , temos a função de falha para a distribuição Pareto.

De fato, fazendo a substituição obtemos

$$h(x) = \frac{\frac{k}{x} \left(1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right)^{1-1}}{1} = \frac{k}{x}.$$

A representação gráfica da função densidade (1.3), para  $\beta = k = 2$ ,  $\theta = 3$  e para alguns valores de  $\alpha$  é dada na Figura (1.1).

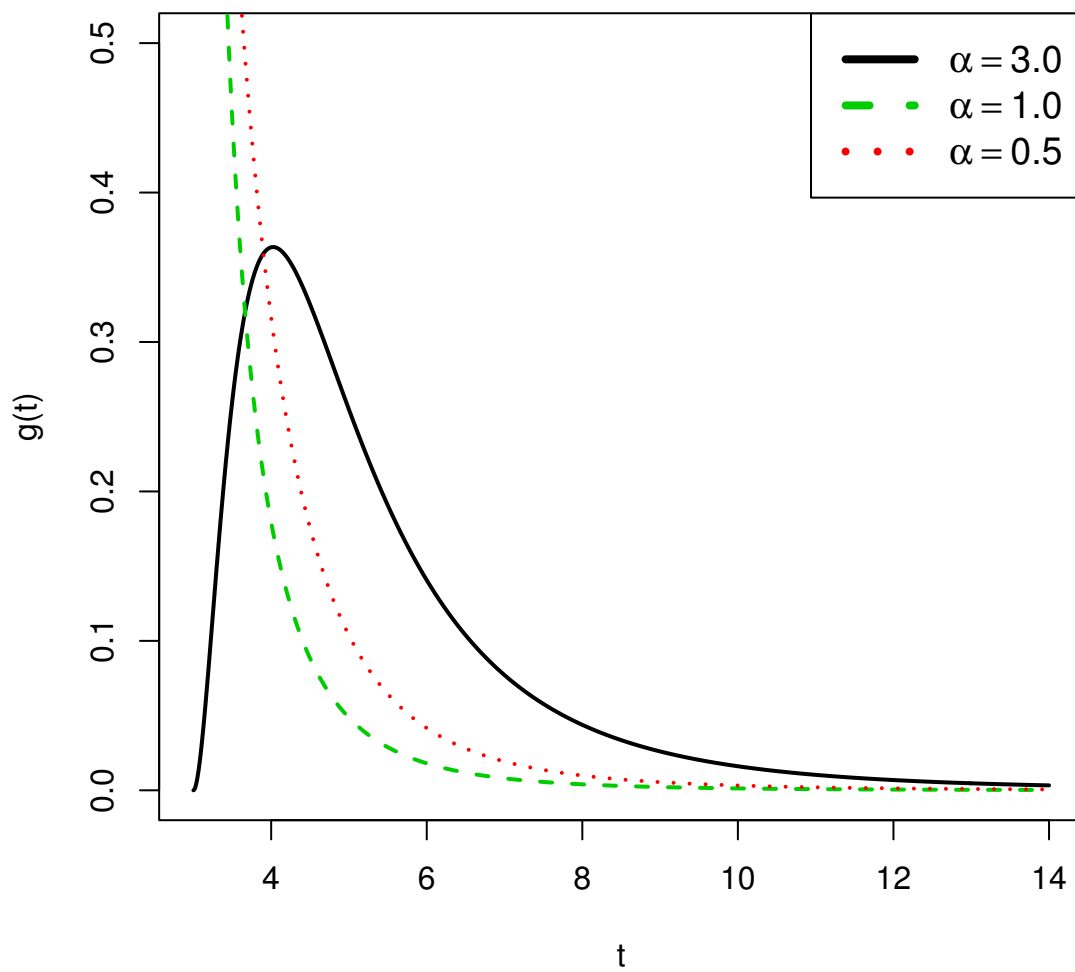


Figura 1.1: Função Densidade da distribuição  $BP(\alpha, \beta, \theta, k)$  para alguns valores de  $\alpha$  e para  $\beta = k = 2$  e  $\theta = 3$ .

Fazendo uma análise do gráfico, na Figura (1.1), observamos que para  $\alpha = 3, 0$  e  $\beta = k = 2$  e  $\theta = 3$  fixos, o gráfico é mais assimétrico a esquerda em relação aos demais.

*Lema 2* O limite da função de falha para a distribuição beta-Pareto quando  $x \rightarrow \infty$  é zero e o limite quando  $x \rightarrow \theta$  é dado por

$$\lim_{x \rightarrow \theta} h(x) = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{k\beta}{\theta}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

A representação gráfica da função taxa de falha da distribuição  $BP(\alpha, \beta, \theta, k)$  para alguns valores de  $\alpha$  e para  $\beta = k = 2$  e  $\theta = 3$ . é dada na Figura (1.2).

### Função de Falha

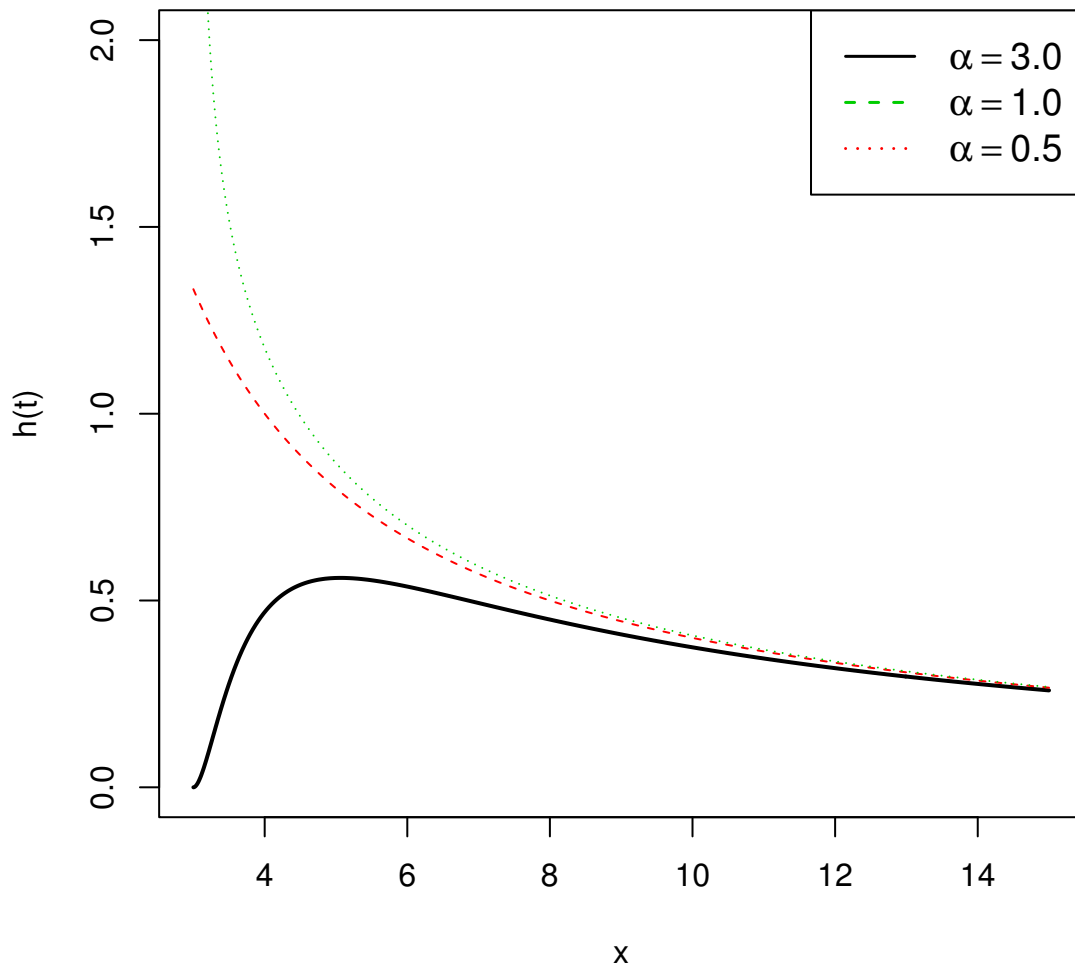


Figura 1.2: Função taxa de falha da distribuição  $BP(\alpha, \beta, \theta, k)$  para alguns valores de  $\alpha$  e para  $\beta = k = 2$  e  $\theta = 3$ .

## 1.4 Momentos para a DBP

Vamos determinar, primeiro, o valor esperado para a quantidade  $(X/\theta)^r$ . Em seguida, a partir de manipulações apropriadas, obtemos o valor esperado de  $X^r$ . Por definição,

$$E\left(\frac{X}{\theta}\right)^r = \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \int_{\theta}^{\infty} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta+r-1} dx.$$

A integral definida pela função beta nos permite escrever o  $r$ -ésimo momento como

$$E(X^r) = \theta^r \frac{B\left(\alpha, \beta - \frac{r}{k}\right)}{B(\alpha, \beta)}. \quad (1.8)$$

Fazendo  $r = 1$  na expressão (1.5), obtemos a média para a DBP e será expressa por

$$\mu = E(X) = \theta \left\{ \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)} \right\} = \theta \left\{ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta - 1/k)}{\Gamma(\alpha + \beta - 1/k)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right\} = \theta \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\beta - 1/k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta - 1/k)}. \quad (1.9)$$

É interessante notar que quando  $\alpha = 1 = \beta$ , a expressão (1.9) reduz a

$$E(X) = \frac{\theta k}{k - 1},$$

em que esta expressão é a média da distribuição Pareto.

De fato, fazendo a substituição obtemos

$$E(X) = \frac{\theta \Gamma(2)\Gamma(1 - 1/k)}{\Gamma(1)\Gamma(2 - 1/k)} = \theta \frac{\Gamma(1)\Gamma(1 - 1/k)}{\Gamma(1)^{\frac{k-1}{k}}\Gamma(1 - 1/k)} = \frac{\theta k}{k - 1}.$$

As expressões dos momentos, da variância ( $\sigma^2$ ), da assimetria ( $\alpha_3$ ) e da curtose ( $\alpha_4$ ) para a DBP podem ser escritas, respectivamente como

$$\sigma^2 = \theta^2 \left[ \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} - \left( \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)} \right)^2 \right] = \frac{\theta^2 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - 2/k)} \frac{\Gamma(\beta - 2/k)}{\Gamma(\beta)} - \mu^2. \quad (1.10)$$

De fato, sabemos que:

$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ , daí segue que

$$E(X^2) = \theta^2 \left( \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} \right)$$

e

$$[E(X)]^2 = \theta^2 \left( \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} \right)^2.$$

Logo,

$$\sigma^2 = \theta^2 \left( \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta - 2/k)}{\Gamma(\alpha + \beta - 2/k)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \mu^2 \right) = \theta^2 \left( \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - 2/k)} \frac{\Gamma(\beta - 2/k)}{\Gamma(\beta)} - \mu^2 \right).$$

A assimetria é dada por

$$\alpha_3 = \frac{B^2(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 3/k) - 3B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 1/k)B(\alpha, \beta - 2/k) + 2B^3(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.11)$$

De fato, sabemos que

$$\alpha_3 = \frac{k_3}{k_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3}{(\mu'_2 - \mu_1'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

além disso,

$$k_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$\sigma^2 = \theta^2 \left( \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} \right) - \theta^2 \left( \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)} \right)^2$$

$$\begin{aligned} k_2^{\frac{3}{2}} &= \left( \theta^2 \left( \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} - \frac{B^2(\alpha, \beta - 1/k)}{B^2(\alpha, \beta)} \right) \right)^{\frac{3}{2}} = \left( \theta^2 \frac{B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k)}{B^2(\alpha, \beta)} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\theta^3}{B^3(\alpha, \beta)} (B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k))^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \theta^3 \frac{B(\alpha, \beta - 3/k)}{B(\alpha, \beta)}.$$

$$\begin{aligned}\mu_2\mu_1 = E(X^2)E(X) &= \theta^2 \frac{B(\alpha, \beta - 2/k) B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta)} \\ &= \theta^2 \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)(B(\alpha, \beta - 1/k))}{B^2(\alpha, \beta)}.\end{aligned}$$

$$\mu_1^3 = (E(X))^3 = \left(\theta \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)}\right)^3 = \theta^3 \frac{B^3(\alpha, \beta - 1/k)}{B^3(\alpha, \beta)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{\theta^3 \frac{B(\alpha, \beta - 3/k)}{B(\alpha, \beta)} - 3\theta^3 \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)B(\alpha, \beta - 1/k)}{B^2(\alpha, \beta)} + 2\theta^3 \frac{B^3(\alpha, \beta - 1/k)}{B^3(\alpha, \beta)}}{\frac{\theta^3}{B^3(\alpha, \beta)} \left\{ B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 2/k) \right\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\theta^3 \left\{ B^2(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 3/k) - 3B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k)B(\alpha, \beta - 1/k) + 2B^3(\alpha, \beta - 1/k) \right\}}{B^3(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{\frac{\theta^3}{B^3(\alpha, \beta)} \left\{ B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 2/k) \right\}^{\frac{3}{2}}}{B^2(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 3/k) - 3B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 1/k)B(\alpha, \beta - 2/k) + 2B^3(\alpha, \beta - 1/k)} \\ &= \frac{\left\{ B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 2/k) \right\}^{\frac{3}{2}}}{B^2(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 3/k) - 3B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 1/k)B(\alpha, \beta - 2/k) + 2B^3(\alpha, \beta - 1/k)}.\end{aligned}$$

Finalmente, a curtose é dada por

$$\alpha_4 = \frac{T(B)}{\left\{ B(\alpha, \beta)B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k) \right\}^2}, \quad (1.12)$$

em que,

$$\begin{aligned}T(B) &= B^3(\alpha, \beta)B\left(\alpha, \beta - \frac{4}{k}\right) - 4B^2(\alpha, \beta)B\left(\alpha, \beta - \frac{3}{k}\right)B\left(\alpha, \beta - \frac{1}{k}\right) \\ &+ 6B(\alpha, \beta)B\left(\alpha, \beta - \frac{2}{k}\right)B^2\left(\alpha, \beta - \frac{1}{k}\right) - 3B^4\left(\alpha, \beta - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

De fato, sabemos que

$$\alpha_4 = \frac{k_4}{(k_2)^2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(k_2)^2 &= \left\{ \theta^2 \frac{B(\alpha, \beta - 2/k)}{B(\alpha, \beta)} - \theta^2 \frac{B^2(\alpha, \beta - 1/k)}{B^2(\alpha, \beta)} \right\}^2 \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{B^2(\alpha, \beta)} B(\alpha, \beta - 2/k) B(\alpha, \beta) - B^2(\alpha, \beta - 1/k) \right\}^2.
\end{aligned}$$

Agora,

$$T(B) = k_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4.$$

$$\mu_4 = E(X^4) = \theta^4 \frac{B(\alpha, \beta - 4/k)}{B(\alpha, \beta)},$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \theta^3 \frac{B(\alpha, \beta - 3/k)}{B(\alpha, \beta)}$$

e

$$\mu_1 = E(X) = \theta \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T(B) &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4 \\
&= \theta^4 \frac{B(\alpha, \beta - 4/k)}{B(\alpha, \beta)} - 4\theta^4 \frac{B(\alpha, \beta - 4/k)}{B(\alpha, \beta)} \theta \frac{B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta)} - 3\theta^4 \frac{B^2(\alpha, \beta - 2/k)}{B^2(\alpha, \beta)} \\
&+ 12\theta^4 \frac{B(\alpha, \beta - 2/k) B^2(\alpha, \beta - 1/k)}{B^3(\alpha, \beta)} - 6\theta^4 \frac{B^4(\alpha, \beta - 1/k)}{B^4(\alpha, \beta)} \\
&= \frac{B^3(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta - 4/k) - 4B^2(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta - 3/k) B(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k)^2} \\
&+ \frac{6B(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta - 2/k) B^2(\alpha, \beta - 1/k) - 3B^4(\alpha, \beta - 1/k)}{B(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta - 2/k) - B^2(\alpha, \beta - 1/k)^2}.
\end{aligned}$$

## 1.5 O Desvio médio

Seja  $X$  a variável aleatória seguindo a distribuição beta-Pareto com média  $\mu = E(X)$  e mediana  $M$ . O desvio médio para a média e o desvio médio para a mediana são definidos, respectivamente por



$$D(\mu) = E|X - \mu| = \int_{\theta}^{\infty} |X - \mu| g(x) dx$$

e

$$D(M) = E|X - M| = \int_{\theta}^{\infty} |X - M| g(x) dx.$$

O desvio médio para a média pode ser simplificado em

$$\begin{aligned} D(\mu) &= \int_{\theta}^{\infty} |X - \mu| g(x) dx = \int_{\theta}^{\mu} (\mu - x)g(x) d(x) + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu)g(x) d(x) \\ &= 2 \int_{\theta}^{\mu} (\mu - x)g(x) d(x) = 2 \left[ \int_{\theta}^{\mu} \mu g(x) d(x) - \int_{\theta}^{\mu} xg(x) d(x) \right] \\ &= 2\mu \int_{\theta}^{\mu} g(x) d(x) - 2 \int_{\theta}^{\mu} xg(x) d(x) \\ &= 2\mu G(\mu) - 2 \int_{\theta}^{\mu} xg(x) d(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$D(\mu) = 2\mu G(\mu) - 2 \int_{\theta}^{\mu} xg(x) d(x). \quad (1.13)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} D(M) &= \int_{\theta}^{\infty} |X - M| g(x) dx = \int_{\theta}^M (M - x)g(x) d(x) + \int_M^{\infty} (x - M)g(x) d(x) \\ &= 2 \int_{\theta}^M (M - x)g(x) d(x) + \int_M^{\infty} (M - x)g(x) d(x) \\ &= 2 \int_{\theta}^M Mg(x) d(x) - 2 \int_{\theta}^M xg(x) d(x) + E(x - M) \\ &= 2MG(M) - 2 \int_{\theta}^M xg(x) d(x) + E(x - M) = 2MG(M) - 2 \int_{\theta}^M xg(x) d(x) + x - M \\ &= \mu + 2MG(M) - M - 2 \int_{\theta}^M xg(x) d(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$D(M) = \mu + 2MG(M) - M - 2 \int_{\theta}^M xg(x) d(x). \quad (1.14)$$

Usando a expansão binomial generalizada

$$(1+s)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} s^i, \text{ em que}$$

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-i+1)}{i!},$$

podemos avaliar a integral nas expressões (1.12) e (1.13). Assim temos,

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^c xg(x)dx &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \int_{\theta}^c x \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \left\{1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k}\right\}^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{k}{\theta B(\alpha, \beta)} \int_{\theta}^c x \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{i} (-1)^i \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-ki} dx \\ &= \frac{k\theta}{B(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{i} (-1)^i \int_{\theta}^c x \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-ki} dx. \end{aligned}$$

Calculando a integral, temos

$$\int_{\theta}^c \frac{\theta}{x} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-ki} dx = \int_{\theta}^c \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k(\beta+i)} dx = \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{1-k(\beta+i)} \Big|_{\theta}^c = \frac{\left(\frac{c}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{1-k(\beta+i)} - \frac{1}{1-k(\beta+i)},$$

multiplicando o resultado da integral por  $(-1)$  temos

$$\int_{\theta}^c x \frac{\theta}{x} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k\beta-ki} dx = \frac{1 - \left(\frac{c}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{k(\beta+i) - 1}.$$

O que acarreta,

$$\int_{\theta}^c g(x)dx = \frac{k\theta}{B(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} \frac{1 - \left(\frac{c}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{k(\beta+i) - 1}, \quad (1.15)$$

em que  $c = \mu$  ou  $M$ . Substituindo a expressão (1.15), nas expressões (1.13) e (1.14), o desvio médio para a média e o desvio médio para a mediana são respectivamente,

dados por

$$D(\mu) = 2\mu G(\mu) \frac{2k\theta}{B(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{k(\beta+i)-1}, \quad (1.16)$$

e

$$D(M) = \mu + 2MG(M) - M - \frac{2k\theta}{B(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} \frac{1 - \left(\frac{M}{\theta}\right)^{1-k(\beta+i)}}{k(\beta+i)-1}. \quad (1.17)$$

## 1.6 As entropias de Rényi e Shannon

A entropia de Rényi para uma variável aleatória  $X \sim$  beta-Pareto com densidade  $g(x)$ , é definida por

$$I_R(\xi) = \frac{1}{1-\xi} \log \left\{ \int g^\xi(x) dx \right\}, \quad (1.18)$$

em que  $\xi > 0$  e  $\xi \neq 1$ . Utilizando a densidade da beta-Pareto, obtemos

$$I = \int_{\theta}^{\infty} g^\xi(x) dx = \frac{k^\xi}{[\theta B(\alpha, \beta)]^\xi} \int_{\theta}^{\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-\xi(k\beta+1)} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \right\}^{\xi(\alpha-1)} dx. \quad (1.19)$$

Fazendo a substituição  $y = 1 - (x/\theta)^{-k}$ , na expressão (1.19) obtemos

$$I = \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\xi-1} \frac{B(\xi(\alpha-1) + 1, (\beta + 1/k)\xi - 1/k)}{B^\xi(\alpha, \beta)}.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} y &= 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \Rightarrow \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} = 1 - y \Rightarrow -k \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k-1} dx = -dy \Rightarrow \\ \frac{k}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-k} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{-1} dx &= dy \Rightarrow \frac{k}{\theta} (1-y)(1-y)^{\frac{1}{k}} dx = dy \Rightarrow dx = \frac{\theta}{k} (1-y)^{-1} (1-y)^{-\frac{1}{k}} dy \end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k^\xi}{\theta^\xi B(\alpha, \beta)^\xi} \int_0^1 y^{\xi(\alpha-1)} (1-y)^{-\xi(\beta+1/k)} \frac{\theta}{k} (1-y)^{-1} (1-y)^{-\frac{1}{k}} dy \\
&= \frac{k^\xi \theta}{k \theta^\xi B(\alpha, \beta)^\xi} \int_0^1 y^{\xi(\alpha-1)} (1-y)^{-\xi(\beta+1/k)-1/k} (1-y)^{-1} dy \\
&= \frac{k^{\xi-1}}{\theta^{\xi-1} B(\alpha, \beta)^\xi} \int_0^1 y^{\xi(\alpha-1)} (1-y)^{\xi(\beta+1/k)-1/k} (1-y)^{-1} dy \\
&= \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\xi-1} \frac{1}{B(\alpha, \beta)^\xi} \int_0^1 y^{\xi(\alpha-1)} (1-y)^{\xi(\beta+1/k)-1/k} (1-y)^{-1} dy \\
&= \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\xi-1} \frac{1}{B(\alpha, \beta)^\xi} \int_0^1 y^{[\xi(\alpha-1)+1]-1} (1-y)^{[\xi(\beta+1/k)-1/k]-1} dy \\
&= \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\xi-1} \frac{1}{B(\alpha, \beta)^\xi} B(\xi(\alpha-1)+1, \xi(\beta+1/k)-1/k) \\
&= \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\xi-1} \frac{B(\xi(\alpha-1)+1, \xi(\beta+1/k)-1/k)}{B(\alpha, \beta)^\xi}.
\end{aligned}$$

Portanto, a entropia de Rényi, agora, pode ser calculada como

$$I_R(\xi) = -\log\left(\frac{k}{\theta}\right) + \frac{1}{1-\xi} \log\left\{\frac{B(\xi(\alpha-1)+1, (\beta+1/k)\xi-1/k)}{B^\xi(\alpha, \beta)}\right\}. \quad (1.20)$$

Um caso especial da expressão (1.19) é definido por Shannon (1948) como  $E\{-\log(g(Y))\}$ , o qual, é obtido tomando o limite da entropia de Rényi quando  $\xi \rightarrow 1$ ,

$$E\{-\log(g(Y))\} = \lim_{\xi \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-\xi} \log \left[ \int g^\xi(x) dx \right] \right\}.$$

Tomando o limite da expressão (1.20) quando  $\xi \rightarrow 1$ , utilizando a regra de L'Hospital e simplificando o resultado, obtemos

$$E\{-\log(g(Y))\} = -\log\left(\frac{k}{\theta}\right) - (\alpha-1)\Psi(\alpha) - \left(\beta + \frac{1}{k}\right)\Psi(\beta) + \left(\alpha-1 + \beta + \frac{1}{k}\right)\Psi(\alpha, \beta) + \log B(\alpha, \beta),$$

em que  $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  é a função digama.

## 1.7 Os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros

**Definição 1.7.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in$*

$\Theta$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 1.7.2** O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; \mathbf{x})$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$

Assim a função log-verossimilhança da distribuição  $BP(\alpha, \beta, \theta, k)$  pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \log L(x; \alpha, \beta, \theta, k) &= n \log k - n \log \theta + n(\log \Gamma(\alpha + \beta) - \log \Gamma(\alpha) - \log \Gamma(\beta)) \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{j=1}^n \log \left[ 1 - \left( \frac{x_j}{\theta} \right)^{-k} \right] - (k\beta + 1) \sum_{j=1}^n \log \left( \frac{x_j}{\theta} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Derivando a expressão (1.21) em relação a  $k$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, e igualando o resultado a zero, obtemos

$$\frac{\partial \log L(x)}{\partial k} = \frac{n}{k} - \sum_{j=1}^n \left\{ \beta + (\alpha - 1) \left[ 1 - \left( \frac{x_j}{\theta} \right)^{-k} \right]^{-1} \right\} \log \left( \frac{x_j}{\theta} \right) = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \log L(x)}{\partial \alpha} = n\Psi(\alpha + \beta) - \Psi(\alpha) + \sum_{j=1}^n \log \left[ 1 - \left( \frac{x_j}{\theta} \right)^{-k} \right] = 0 \quad (1.23)$$

e

$$\frac{\partial \log L(x)}{\partial \beta} = n\Psi(\alpha + \beta) - \Psi(\beta) - k \sum_{j=1}^n \log \left( \frac{x_j}{\theta} \right) = 0. \quad (1.24)$$

Como  $x \geq \theta$ , o estimador de máxima verossimilhança para  $\theta$  é a estatística de primeira ordem  $x_{(1)}$ . Os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{k}$  para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $k$ , respectivamente, são obtidos pela solução iterativa das expressões (1.22) – (1.24). As estimativas iniciais para  $\theta$ ,  $\beta$  e  $k$  são obtidas ajustando a densidade Pareto aos dados. A máxima verossimilhança para  $\theta$  é  $\bar{\theta} = x_{(1)}$ , a estatística de primeira ordem e a máxima verossimilhança para  $k$  é  $\bar{k} = n[\sum \ln(x_i/\bar{\theta})]^{-1}$ . Usando  $\bar{\theta}$

e  $\bar{k}$ , transformamos os dados para dados da densidade beta e, em seguida, encontramos as estimativas de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$  ou estimativas de momento para  $\alpha$  e  $\beta$  da densidade beta. As estimativas iniciais para a DBP são estimadores de momentos de máxima verossimilhança para  $\alpha$  e  $\beta$ , e a estimativa  $\bar{k}$ . Usando as expressões (1.22) – (1.24), a segunda derivada parcial pode ser expressa por

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial k \partial \beta} = - \sum_{j=1}^n \log \left( \frac{x_j}{\theta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial k \partial \alpha} = \sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{x_j}{\theta} \right) - 1 \right]^{-1} \log \left( \frac{x_j}{\theta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial k^2} = -\frac{n^2}{k} - (\alpha - 1) \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\log(x_j/\theta)}{1 - (x_j/\theta)^k} \right\}^2 \left( \frac{x_j}{\theta} \right)^k,$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial \alpha \partial \beta} = n \Psi''(\theta + \beta),$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial \alpha^2} = n \Psi'(\theta + \beta) - \Psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x)}{\partial \beta^2} = n \Psi'(\theta + \beta) - \Psi'(\beta).$$

Estas segundas derivadas parciais podem ser usadas para calcular a matriz de informação de Fisher.

## 1.8 Aplicação da DBP

Nesta seção, a DBP é ajustada para dados de dois rios. Estes dados são da superação dos picos de cheia, discutidos em Choulakian (2001), e das inundações

ilustradas por Mudholkar (1996) na aplicação da exponencial na distribuição Weibull. Estas regularizações de dados são ajustadas pelo uso da distribuição Pareto, pela distribuição Weibull com três parâmetros, pela distribuição Pareto generalizada e pela distribuição beta-Pareto.

### 1.8.1 Os dados do Rio Wheaton

Os dados são da superação dos picos de cheia em ( $m^3/s$ ) do rio Wheaton perto de Carcross no território Yukon, Canadá. Os dados consistem de 72 excedências para os anos 1958 – 1984, arredondados com uma casa decimal. Estes dados foram analisados por Choulakian e Stephens (2001), encontram-se ilustrados na Tabela 1.1. A distribuição é fortemente assimétrica a direita. Choulakian e Stephens (2001) proporam a distribuição Pareto generalizada (DPG) definida por  $f(x) = (1/a)(1 - kx/a)^{(1-k)/k}$ , em que  $0 \leq x < \infty$ , para  $k \leq 0$  e  $0 \leq x \leq a/k$  para  $k > 0$ . Esta distribuição é muitas vezes chamada de "picos acima dos limiares", desde então o modelo é utilizado para modelar o excedente, sobre o nível do limiar em controle de inundações. Há detalhes sobre os dados e a DPG, podem ser encontrados em Choulakian (2001). Os dados são ajustados para (a) A distribuição Pareto, (b) distribuição Weibull com três parâmetros, (c) a DPG e (d) a DBP. A estatística de Kolmogorov-Smirnov (K-S) dá o melhor ajuste é utilizada para a comparação dos ajustes. Os parâmetros são estimados pela técnica da máxima verossimilhança. Os estimadores de máxima verossimilhança e os p-valores com base nas estatísticas (K-S) de melhor ajuste são apresentados na Tabela 1.2, em que podemos observar que ambas DPG e DBP ajustam-se, adequadamente, aos dados, enquanto a Weibull e a distribuição Pareto não fornecem o ajuste adequado para os dados.

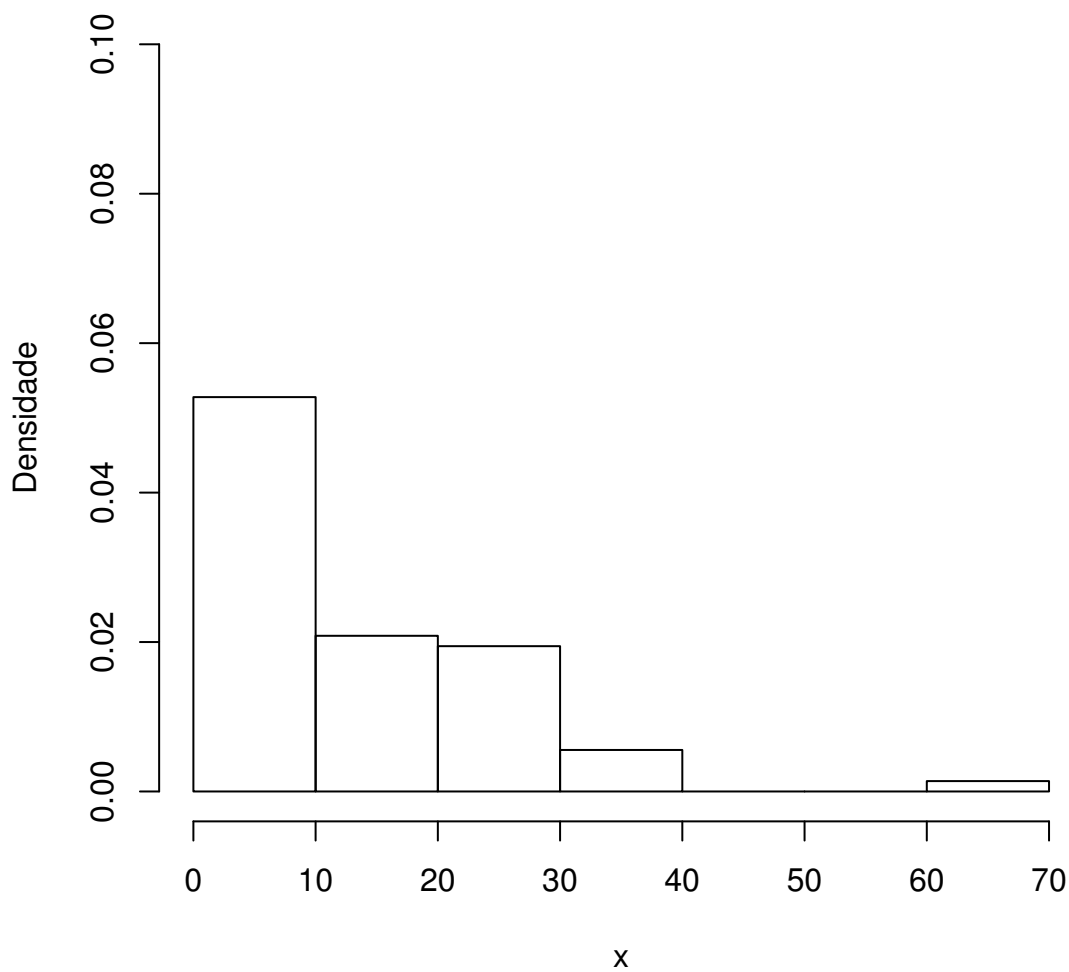


Figura 1.3: Histograma para o conjunto de dados sobre a superação da inundação do rio Wheaton.

Tabela 1.1. Os dados sobre a superação da inundação do rio Wheaton

1,7	2,2	14,4	1,1	0,4	20,6	5,3	0,7	1,9	13,0	12,0	9,3
1,4	18,7	8,5	25,5	11,6	14,1	22,1	1,1	2,5	14,4	1,7	37,6
0,6	2,2	39,0	0,3	15,0	11,0	7,3	22,9	1,7	0,1	1,1	0,6
9,0	1,7	7,0	20,1	0,4	2,8	14,1	9,9	10,4	10,7	30,0	3,6
5,6	30,8	13,3	4,2	25,5	3,4	11,9	21,5	27,6	36,4	2,7	64,0
1,5	2,5	27,4	1,0	27,1	20,2	16,8	5,3	9,7	27,5	2,5	27,0



Tabela 1.2. Estimativas dos parâmetros e as estatísticas K-S para os dados do Rio Wheaton

Distribuições	Pareto	Weibull com Três Parâmetros	Pareto Generalizada	Beta-Pareto
E.M.V	$\hat{k} = 0,2438,$ $\hat{\theta} = 0,1$	$\hat{\gamma} = 0,8471, \hat{\beta} = 11,20,$ $\hat{\alpha} = 0,099$	$\hat{k} = -0,00093$ $\hat{\alpha} = 12,193,$	$\hat{\alpha} = 7,6954, \hat{\beta} = 85,75,$ $\hat{k} = 0,0208, \hat{\theta} = 0,1$
Estatís. K-S	2,7029	1,6734	1,205	1,2534
P-valor	< 0,000	0,0074	0,1094	0,0864

Fazendo uma análise do gráfico, na Figura (1.4), observamos que pelo fato de  $\alpha$  e  $\beta$  serem dois parâmetros, cujo papel é de introduzir assimetria e variação do peso da cauda, respectivamente a distribuição Beta Pareto é mais assimétrica a esquerda, com caudas mais leves e proporciona um melhor ajuste do que os outros dois submodelos para o conjunto de dados.

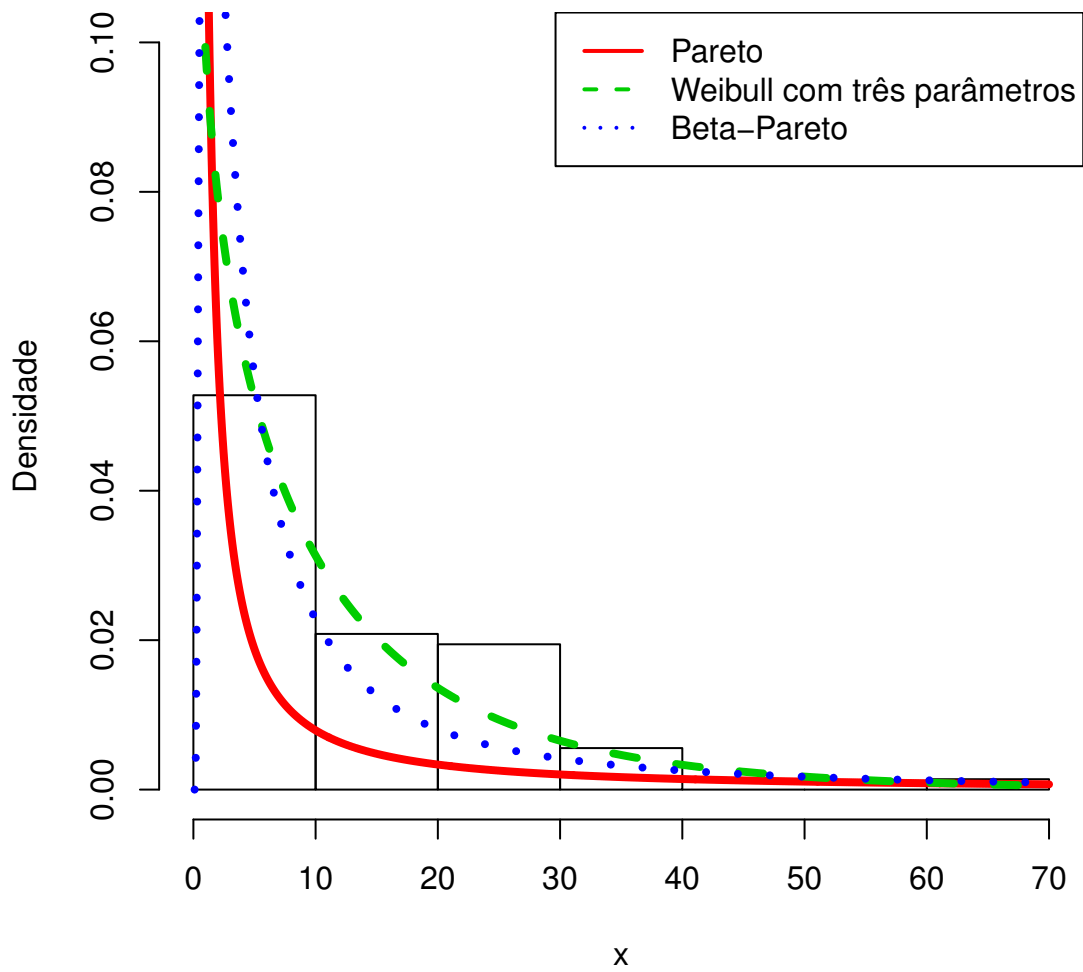


Figura 1.4: Histograma dos dados e as fdps das distribuições Pareto, Weibull com três parâmetros e Beta-Pareto.

## Capítulo 2

# A Distribuição Beta Exponencial generalizada

### 2.1 Introdução

Gupta e Kundu (1999) definiram a função de distribuição acumulada (fda) para a distribuição exponencial generalizada denotada por  $EG(\lambda, \alpha)$  como

$$G_{\lambda, \alpha}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, x > 0, \lambda > 0, \alpha > 0. \quad (2.1)$$

Os dois parâmetros da distribuição  $EG(\lambda, \alpha)$  representam a escala ( $\lambda > 0$ ) e forma ( $\alpha > 0$ ). A distribuição (2.1) também é chamada de distribuição exponencial exponenciada. Claramente, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição EG, quando  $\alpha = 1$ . A distribuição Weibull exponencial (WE), instituída por Mudholkar e Srivastava (1993) ampliou a distribuição EG que também foi estudada por Mudholkar et.(1995), Mudholkar e Hutson (1996) e Nassar e Eissa (2003). Nadarajah e Kotz (2006) introduziram mais quatro distribuições exponenciais do tipo: gama exponencial, Weibull exponencial, exponencial Gumbel e a distribuição Fréchet exponencial, generalizando as distribuições gama, Weibull, Gumbel e Fréchet da mesma maneira que a distribuição EG estende a distribuição exponencial. Eles também ofereceram algumas propriedades matemáticas para cada distribuição exponencial.

A função densidade da EG varia significativamente, dependendo do parâmetro de forma  $\alpha$ . Além disso, a função de risco é uma função não decrescente se  $\alpha > 1$ , e é uma função não crescente se  $\alpha < 1$ . Para  $\alpha = 1$ , é uma constante. A distribuição EG tem muitas propriedades que são bastante similares as propriedades da distribuição

gama. A distribuição gama, Weibull e EG ampliaram a distribuição exponencial, mas de diferentes maneiras. Assim, podem ser usadas como uma alternativa às distribuições Weibull e gama. Em algumas situações, poderia funcionar melhor em termos de montagem do que as outras duas distribuições. Além disso, é bem claro que a distribuição gama tem certas vantagens em comparação com a Weibull em termos da convergência das estimativas de máxima verossimilhança. Espera-se que a distribuição EG também deva apresentar essas propriedades.

**Definição 2.1.1** *Definimos uma classe de distribuições generalizadas por*

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega, \quad (2.2)$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois parâmetros adicionais, cujo papel é introduzir assimetria e variação do peso da cauda e  $B(a, b) = \int_0^1 \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$  é a função beta.

Note que podemos escrever a expressão (2.2) como

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b), \quad (2.3)$$

em que  $I_y(a, b) = B(a, b)^{-1} \int_0^y \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$  denota a relação da função beta incompleta, ou seja, a função de distribuição acumulada (fda) da distribuição beta com parâmetros  $a$  e  $b$ . Em geral, podemos expressar a equação (2.3) em termos da função hipergeométrica definida por

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i,$$

em que  $(\alpha)_i = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + i - 1)$ . Assim,

$$F(x) = \frac{G(x)}{aB(a, b)} F_1(a, 1 - b, a + 1; G(x)).$$

A função densidade de probabilidade (fdp) correspondente a expressão (2.2) pode ser expressa por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} G(x)^{a-1} \{1 - G(x)\}^{b-1} g(x). \quad (2.4)$$

Agora, a distribuição beta exponencial generalizada (BEG) é obtida tomando  $G(x)$  na expressão (2.2) como a fda (2.1) da distribuição exponencial generalizada. Essa

distribuição foi obtida por Barreto, Santos e Cordeiro (2010). A fda da distribuição Beta exponencial generalizada é então,

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^\alpha} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega, x > 0, \quad (2.5)$$

para  $a > 0, b > 0, \lambda > 0$  e  $\alpha > 0$ . A fdp e a função de falha para a nova distribuição são, respectivamente,

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda}{B(a, b)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha\}^{b-1}, x > 0, \quad (2.6)$$

e

$$h(x) = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha\}^{b-1}}{B(a, b) I_{1-(1-e^{-\lambda x})^\alpha}(a, b)}, x > 0. \quad (2.7)$$

A representação gráfica da função densidade (2.6), para alguns valores especiais de  $a, b, \lambda$  e  $\alpha$  são dadas na Figura (2.1).

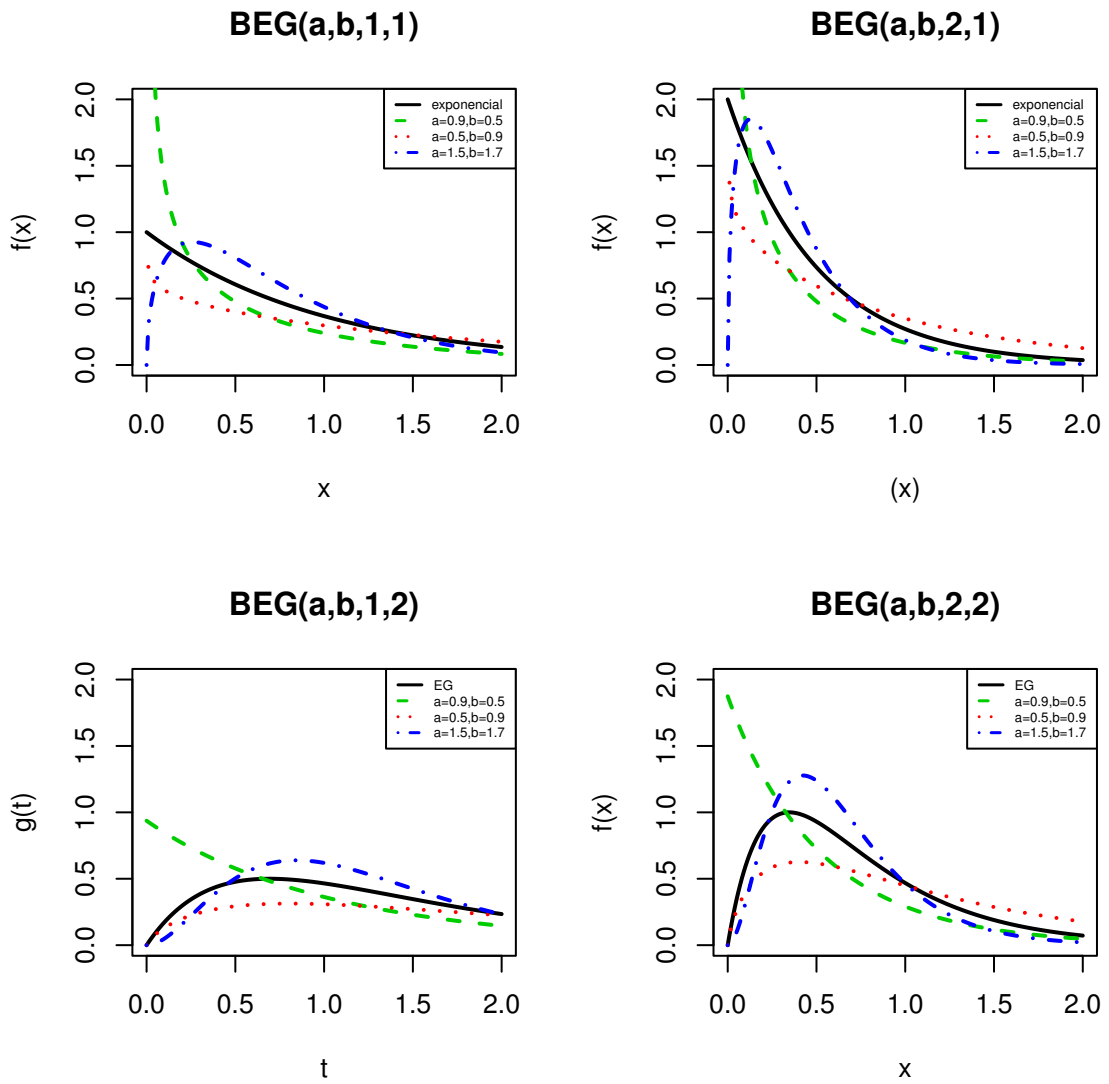


Figura 2.1: Função Densidade de Probabilidade da distribuição BEG para alguns valores especiais de  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda$ , e  $\sigma$

## 2.2 Expansão para as funções de distribuição e densidade

Fornecemos simples expansões para a fda e a fdp da distribuição BEG dependendo se o parâmetro  $b$  é real não inteiro ou inteiro. Primeiro, se  $|z| < 1$  e  $b > 0$  é real não inteiro, temos a representação em série

$$(1 - z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j. \quad (2.8)$$

Substituindo a expansão em série (2.8) na expressão (2.5), obtemos a fda para a distribuição BEG com  $b$  real não inteiro.

De fato,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^\alpha} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^\alpha} \omega^{a+j-1} d\omega. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\int_0^{(1-e^{-\lambda x})^\alpha} \omega^{a+j-1} d\omega = \frac{\omega^{a+j}}{a+j} \Big|_0^{(1-e^{-\lambda x})^\alpha} = \frac{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)}}{a+j}$$

e

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Substituindo em  $F(x)$  temos,

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}. \quad (2.9)$$

Esta expressão revela a propriedade que a fda para a distribuição BEG pode ser expressa como uma soma ponderada infinita da fda da distribuição exponencial generalizada

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\lambda, \alpha(a+j)}(x), \quad (2.10)$$

em que  $G_{\lambda, \alpha(a+j)}(x)$  é a fda da distribuição exponencial generalizada com parâmetros de escala constante  $\lambda$  e forma  $\alpha(a+j)$  e  $w_j$  são simples pesos dados por

$$w_j = \frac{\Gamma(a+b)(-1)^j}{\Gamma(a)\Gamma(b-j)j!(a+j)}.$$

Para  $b$  inteiro, as quantias nas expressões (2.9) e (2.10) são finitas e simplesmente param em  $j = b - 1$ .

A fda para as distribuições beta exponencial (BE) e (EG) seguem da expressão (2.9) com  $\alpha = 1$  e  $a = 1$ , respectivamente. De fato,

- BE

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{a+j}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}.$$

- EG

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{a+\lambda j}}{\Gamma(b-j)j!(1+j)} \\ &= \Gamma(1+b) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{a+\lambda j}}{\Gamma(b-j)j!(1+j)}. \end{aligned}$$

Observe que, substituindo  $a = b = 1$  na fda (2.1) obtemos a distribuição EG.

De fato,

$$F(x) = \Gamma(2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{a(1+j)}}{\Gamma(1-j)j!(1+j)}.$$



Se  $\alpha = 1$  na expressão (2.9), obtemos

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j=0} (1 - e^{-\lambda x})^{(1+0)}}{\Gamma(1-0)0!(1+0)} = (1 - e^{-\lambda x}).$$

Pode ser visto no site de funções da Wolfram (<http://functions.wolfram.com>) que para  $b$  inteiro,

$$I_y(a, b) = \frac{y^a}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)}{j!} (1-y)^j,$$

e para  $a$  inteiro,

$$I_y(a, b) = 1 - \frac{(1-y)^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} y^j.$$

Assim, para  $b$  inteiro temos uma forma alternativa para a soma finita na expressão (2.9)

$$F(x) = \frac{(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)}{j!} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^j,$$

e para  $a$  inteiro,

$$F(x) = 1 - \frac{\{1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha j}.$$

## 2.3 Expansões para as estatísticas de ordem

Apresentamos, nesta seção, a densidade da  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ ,  $f_{i:n}(x)$  para uma amostra aleatória de tamanho  $n$  para a distribuição BEG. Sabemos que,

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} \{1 - F(x)\}^{n-i},$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Usando as expressões (2.3) e (2.6) podemos expressar  $f_{i:n}(x)$  em termos da função hipergeométrica como

$$f_{i:n}(x) = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} G_{\lambda, \alpha \alpha - 1}(x) G_{\lambda, \alpha \alpha (i-1)}(x) \{1 - G_{\lambda, \alpha}(x)\}^{b(n-i+1)-1}}{B(i, n-i+1) B(a, b)^n a^{i-1} b^{n-i}} \\ \times F_1(a, 1-b, a+1; G_{\lambda, \alpha}(x))^{i-1} F_1(b, 1-a, b+1; 1 - G_{\lambda, \alpha}(x))^{n-i}.$$

De fato, Substituindo as expressões (2.3) e (2.6) em  $f_{i:n}(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
f_{i:n}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha\lambda}{B(a, b)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha\}^{b-1} \\
&\times \left\{ \frac{G(x)}{aB(a, b)} F_1(a, 1-b, a+1; G(x)) \right\}^{i-1} \left\{ 1 - \frac{G(x)}{bB(a, b)} F_1(b, 1-a, b+1; G(x)) \right\}^{n-i} \\
&= \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x} G_{\lambda, a\alpha-1}(x) G_{\lambda, a\alpha(i-1)}(x) \{1 - G_{\lambda, \alpha}(x)\}^{b(n-i+1)-1}}{B(i, n-i+1) B(a, b)^1 a^{i-1} B(a, b)^{i-1} b^{n-i} B(a, b)^{n-i}} \\
&\times F_1(b, 1-a, b+1; G_{\lambda, \alpha}(x))^{i-1} F_1(b, 1-a, b+1; 1 - G_{\lambda, \alpha}(x))^{n-1} \\
&= \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x} G_{\lambda, a\alpha-1}(x) G_{\lambda, a\alpha(i-1)}(x) \{1 - G_{\lambda, \alpha}(x)\}^{b(n-i+1)-1}}{B(i, n-i+1) B(a, b)^n a^{i-1} b^{n-i}} \\
&\times F_1(b, 1-a, b+1; G_{\lambda, \alpha}(x))_2^{i-1} F_1(b, 1-a, b+1; 1 - G_{\lambda, \alpha}(x))^{n-1}.
\end{aligned}$$

## 2.4 Função geratriz de momentos

**Definição 2.4.1** *Definimos a função geratriz de momentos (fgm) para a distribuição BEG por*

$$M(t) = \frac{\alpha\lambda}{B(a, b)} \int_0^\infty e^{tx} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} \{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha\}^{b-1} dx. \quad (2.11)$$

Utilizando a expansão (2.8) com  $b$  real não inteiro, a expressão (2.11) reduz-se a:

$$M(t) = \frac{\alpha\lambda\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha j} dx.$$

De fato, da expansão (2.8), obtemos

$$[1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha j}.$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned}
M(t) &= \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} \int_0^\infty e^{tx} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha j} dx \\
&= \frac{\alpha\lambda\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)-1} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = e^{-\lambda x}$  obtemos,

$$u = e^{-\lambda x} \Rightarrow x = -\frac{\log u}{\lambda}$$

e

$$dx = -\frac{du}{\lambda e^{-\lambda x}}.$$

Substituindo em  $M(t)$  temos,

$$\begin{aligned}
M(t) &= \frac{\alpha\lambda\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 e^{tx} e^{-\lambda x} (1-u)^{\alpha(a+j)-1} \frac{du}{\lambda e^{-\lambda x}} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 e^{t(-\log u \frac{1}{\lambda})} (1-u)^{\alpha(a+j)-1} du \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 e^{-\log u \frac{t}{\lambda}} (1-u)^{\alpha(a+j)-1} du \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 e^{\log u^{-\frac{t}{\lambda}}} (1-u)^{\alpha(a+j)-1} du \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 u^{-\frac{t}{\lambda}} (1-u)^{\alpha(a+j)-1} du.
\end{aligned}$$

A expressão acima mostra que a fgm para a distribuição BEG existe se,  $t < \lambda$ .

Assumindo que  $t < \lambda$ , temos

$$M(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, \alpha(a+j)\right). \quad (2.12)$$

Para  $b > 0$  inteiro, a expressão se mantém com  $j$  variando de 0 até  $b - 1$ . Note que, a expressão (2.12) poderia seguir diretamente a partir da combinação linear  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j g_{\lambda, \alpha(a+j)}(x)$  e da fgm da distribuição EG. Além disso, se tomarmos  $a = b = 1$  na expressão (2.12), a fgm se reduz a

$$M(t) = \frac{\alpha \Gamma(1)}{B(1, 1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(1-j)j!} B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, \lambda(1+j)\right) = \lambda B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, \alpha\right).$$

A partir da expressão (2.12) com  $\alpha = 1$ , obtemos a fgm da distribuição BE

$$M(t) = \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, a+j\right) = \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)}, \quad (2.13)$$

em que,

$$\begin{aligned} B\left(b - \frac{t}{\lambda}, a\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 \omega^{a+j-1} (1-\omega)^{1-t/\lambda} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} B\left(a+j, 1 - \frac{t}{\lambda}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, a+j\right). \end{aligned}$$

## 2.5 Momentos

O  $r$ -ésimo momento para a distribuição BEG pode ser obtido por

$$E(X^r) = \left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0}.$$

Portanto, se  $b$  é real e não inteiro, temos a partir da expressão (2.12) a seguinte expressão

$$\mu^r(r) = E(X^r) = \frac{\alpha \Gamma(b)}{\lambda^r B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r}}{\Gamma(b-j)j!} \left. \frac{d^r B(p, \alpha(a+j))}{dp^r} \right|_{p=1}. \quad (2.14)$$

A expressão (2.14) generaliza os momentos das distribuições EG e BE. Os primeiros momentos para a distribuição BEG para  $b$  real e não inteiro são

$$\begin{aligned}
\mu'(1) &= E(X) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^1 B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^1 B(p, \alpha(a+j))}{dp^1} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^1 \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^1 B(p, \alpha(a+j))}{dp^1} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^1 \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!} c_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'(2) &= E(X) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+2}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^2 B(p, \alpha(a+j))}{dp^2} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+2}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^2 B(p, \alpha(a+j))}{dp^2} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!} d_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'(3) &= E(X) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+3}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^3 B(p, \alpha(a+j))}{dp^3} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+3}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^3 B(p, \alpha(a+j))}{dp^3} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3 \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!} e_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'(4) &= E(X) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+4}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^4 B(p, \alpha(a+j))}{dp^4} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+4}}{\Gamma(b-j)j!} \frac{d^4 B(p, \alpha(a+j))}{dp^4} \Big|_{p=1} \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4 \Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!} f_j,
\end{aligned}$$

em que as quantidades  $c_j, d_j, e_j$  e  $f_j$  são obtidas assim,

$$c_j = \psi(\alpha(a+j) + 1) - \psi(1),$$

$$d_j = c_j^2 + \psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1),$$

$$e_j = -c_j[c_j^2 + 3\{\psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1)\}] + \psi''(1) - \psi''(\alpha(a+j)+1),$$

$$f_j = \{c_j^2 + \psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1)\}[c_j^2 + 3\{\psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1)\}] + 2c_j^2\{\psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1)\} - 4c_j\{\psi''(1) - \psi''(\alpha(a+j)+1)\}.$$

em que  $\Psi = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  é a função digama e  $\psi'$ ,  $\psi''$  suas respectivas derivadas.

**Definição 2.5.1** *A entropia de Shannon de uma variável aleatória  $X$  é uma medida de incerteza e é definida por  $E\{-\log f(X)\}$ , em que  $f(x)$  é a fdp de  $X$ .*

Para uma variável aleatória  $X$  com uma distribuição BEG obtemos,

$$E\{-\log f(X)\} = -\log(\alpha\lambda) + \log B(a, b) + \lambda\mu(1) + \left(\frac{1}{\alpha} - a\right)\Psi(a) - \Psi(a+b) - (b-1)\Psi(b) - \Psi(a+b).$$

## 2.6 Estimação e Inferência

**Definição 2.6.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por*

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 2.6.2** *O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; \mathbf{x})$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por*

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$

Suponha que  $Y$  segue a distribuição BEG e seja  $\theta = (a, b, \lambda, \alpha)^T$  o vetor de parâmetros. A função de log-verossimilhança para uma única observação  $y$  de  $Y$  é dada por

$$\ell = \ell(a, b, \lambda, \alpha) = \log \alpha + \log \lambda - \log B(a, b) - \lambda y + (\alpha a - 1) \log(1 - e^{-\lambda y}) + (b-1) \log 1 - (1 - e^{-\lambda y})^\alpha, y > 0.$$

As componentes para o vetor escore  $U = (\partial\ell/\partial a, \partial\ell/\partial b, \partial\ell/\partial\lambda, \partial\ell/\partial\alpha)^T$  são

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = -\Psi(a) + \Psi(a+b) + \alpha \log(1 - e^{-\lambda y}),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = -\Psi(b) + \Psi(a+b) + \alpha \log\{1 - (1 - e^{-\lambda y})^\alpha\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} - \lambda + (\alpha a - 1) \frac{1}{1 - e^{-\lambda y}} y e^{-\lambda y} + (b - 1) \frac{1}{1 - (1 - e^{-\lambda y})^\alpha} - \alpha (1 - e^{-\lambda y})^{\alpha-1} y e^{-\lambda y} \\ &= \frac{1}{\lambda} - \lambda + \frac{(\alpha a - 1) y e^{-\lambda y}}{1 - e^{-\lambda y}} - \frac{\alpha (b - 1) e^{-\lambda y} (1 - e^{-\lambda y})^{\alpha-1} y}{1 - (1 - e^{-\lambda y})^\alpha} (1 - e^{-\lambda y})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda y}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} + a \log(1 - e^{-\lambda y}) - \frac{(b - 1) (1 - e^{-\lambda y})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda y})}{1 - (1 - e^{-\lambda y})^\alpha}.$$

Como o valor esperado para o vetor escore, é igual a zero então

$$E\{\log(1 - e^{-\lambda Y})\} = \frac{\Psi(a) - \Psi(a+b)}{\alpha},$$

$$E[\log\{1 - (1 - e^{-\lambda Y})^\alpha\}] = \Psi(b) - \Psi(a+b),$$

$$E\left\{(1 - e^{-\lambda Y})^\alpha \log(1 - e^{-\lambda Y})\right\} = \frac{a\{\Psi(a) - \Psi(a+b)\} + 1}{\alpha(b-1)}.$$

Para uma amostra aleatória  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de tamanho  $n$  de  $Y$ , a função log-verossimilhança total é  $\ell_n = \ell_n(a, b, \lambda, \alpha) = \sum_{i=1}^n \ell^{(i)}$ , em que  $\ell^{(i)}$  é a log-verossimilhança para a  $i$ -ésima observação, com  $i = 1, \dots, n$ . A função escore total é dada por  $U_n = \sum_{i=1}^n U^{(i)}$ , em que  $U^{(i)}$  tem a forma dada anteriormente para  $i = 1, \dots, n$ . O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  para o parâmetro  $\theta$  é obtido igualando a função  $U_n$  a zero. Para a estimativa intervalar e os testes de hipóteses sobre o parâmetro  $\theta$ , obtemos a matriz de informação de Fisher

$$K = K(\theta) = \begin{pmatrix} k_{a,a} & k_{a,b} & k_{a,\lambda} & k_{a,\alpha} \\ k_{a,b} & k_{b,b} & k_{b,\lambda} & k_{b,\alpha} \\ k_{a,\lambda} & k_{b,\lambda} & k_{\lambda,\lambda} & k_{\lambda,\alpha} \\ k_{a,\alpha} & k_{b,\alpha} & k_{\lambda,\alpha} & k_{\alpha,\alpha} \end{pmatrix},$$

em que os correspondentes elementos são dados por

$$k_{a,a} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2}\right) = -\Psi'(a) + \Psi'(a+b),$$

$$k_{a,b} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial b}\right) = -\Psi'(a+b),$$

$$k_{a,\lambda} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \lambda}\right) = \frac{\alpha}{\lambda} T_{0,1,1,1,0},$$

$$k_{a,\alpha} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial \alpha}\right) = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(a)}{\alpha},$$

$$k_{b,b} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial b^2}\right) = \Psi'(b) - \Psi'(a+b),$$

$$k_{b,\lambda} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial b \partial \lambda}\right) = -\frac{\alpha}{\lambda} T_{1,1,1,1,0},$$

$$\begin{aligned} k_{\lambda,\lambda} &= E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [1 + (\alpha a - 1)(T_{0,2,2,2,0} + T_{0,1,1,2,0}) + \alpha(b-1)\{\alpha T_{2,2,2,2,0} + (\alpha-1)T_{1,2,2,2,0} - T_{1,1,1,2,0}\}], \end{aligned}$$

$$k_{b,\alpha} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial b \partial \alpha}\right) = \frac{a\{\Psi(a) - \Psi(a+b)\} + 1}{\alpha(b-1)},$$

$$k_{\lambda,\alpha} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \{aT_{0,1,1,1,0} - (b-1)(T_{1,1,1,1,0} + T_{2,1,1,1,1} + T_{1,1,1,1,1})\},$$

$$k_{\alpha,\alpha} = E\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2} \{1 + (b-1)(T_{2,0,0,0,2} + T_{1,0,0,0,2})\},$$

em que  $T_{i,j,k,l,m}$  é definido como

$$T_{i,j,k,l,m} = E[(1-V)^{-i}(1-V^{1/\alpha})^j V^{i-k/\alpha} \{\log(1-V^{1/\alpha})\}^l (\log V)^m],$$

em que  $V \sim \text{Beta}(a, b)$  com  $i, j, k, l, m \in \{0, 1, 2\}$ . A matriz de informação total de Fisher é então  $K_n = K_n(\theta) = nK(\theta)$ .

A distribuição assintótica de  $Y$  é definida como

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N_4(0, K(\theta)^{-1}).$$



A distribuição normal assintótica multivariada  $N_4(0, Kn(\hat{\theta})^{-1})$  de  $\hat{\theta}$  pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados, regiões de confiança para os parâmetros e para funções de sobrevivência. A normalidade assintótica também é útil para testar a qualidade de ajuste da distribuição BEG e para comparar esta distribuição com alguns dos seus submodelos especiais usando uma das três conhecidas estatísticas de teste, ou seja, a razão de verossimilhanças ( $RV$ ), teste de Wald ( $W$ ) e teste escore de Rao ( $S_R$ ).

Um intervalo de confiança assintótico com nível de significância  $\gamma$  para cada parâmetro  $\theta_i$  é dado por

$$IC(\theta_i, 100(1 - \gamma)) = (\hat{\theta}_i - z_{\gamma/2}\sqrt{K^{\theta_i, \theta_i}}, \hat{\theta}_i + z_{\gamma/2}\sqrt{K^{\theta_i, \theta_i}}),$$

em que  $K^{\theta_i, \theta_i}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $Kn(\hat{\theta})^{-1}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $z_{\gamma/2}$  é o quantil  $1 - \gamma/2$  da distribuição normal padrão.

## 2.7 Aplicação

Nesta seção, ajustamos um modelo BEG a um conjunto de dados reais. Os dados assimétricos obtidos por Smith e Naylor (1987) representam as resistências de fibras de vidro com 1,5 cm, medidas no laboratório nacional de física, Inglaterra. As unidades de medida não são dadas no livro. O conjunto de dados é:

Tabela 2.1. Os dados sobre as resistências de fibras de vidro com 1,5 cm.

0,55	0,93	1,25	1,36	1,49	1,52	1,58	1,61	1,64	1,68	1,73	1,81
2	0,74	1,04	1,27	1,39	1,49	1,53	1,59	1,61	1,68	1,76	1,82
2,01	0,77	1,11	1,28	1,42	1,5	1,54	1,6	1,62	1,66	1,69	1,76
1,84	2,24	0,81	1,13	1,29	1,48	1,5	1,55	1,61	1,62	1,66	1,7
1,77	1,84	0,84	1,24	1,3	1,48	1,51	1,61	1,67	1,7	1,78	1,89

Os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros e a função de log-verossimilhança maximizada para a distribuição BEG são:

$$\hat{a} = 0,4125, \hat{b} = 93,4655, \hat{\lambda} = 0,92271, \hat{\alpha} = 22,6124, \hat{\ell}_{BEG} = -15,5995,$$

Considerando a distribuição BE temos

$$\hat{a} = 17,7786, \hat{b} = 22,7222, \hat{\lambda} = 0,3898, \hat{\ell}_{BE} = -24,1270,$$

e para a distribuição EG são

$$\hat{\lambda} = 2,6105, \hat{\alpha} = 31,3032, \hat{\ell}_{GE} = -31,3834,$$

Em relação a estatística RV para testar a hipótese  $H_0 : BE \times H_A : BEG$  e  $H_0 : EG \times H_A : BEG$  são 17,0550 ( $p = 3,63 \times 10^{-5}$ ) e 31,5678 ( $p = 1,39 \times 10^{-7}$ ), respectivamente. Portanto, rejeitamos a hipótese nula em ambos os casos a favor da distribuição BEG ao nível de significância de 5 %.

Fazendo uma análise do gráfico, na Figura (2.2), observamos que pelo fato de  $a$  e  $b$  serem dois parâmetros, cujo papel é de introduzir assimetria e variação do peso da cauda, respectivamente a distribuição Beta Exponencial Generalizada é mais assimétrica a esquerda, com caudas mais pesadas e proporciona um melhor ajuste do que os outros dois submodelos para o conjunto de dados.

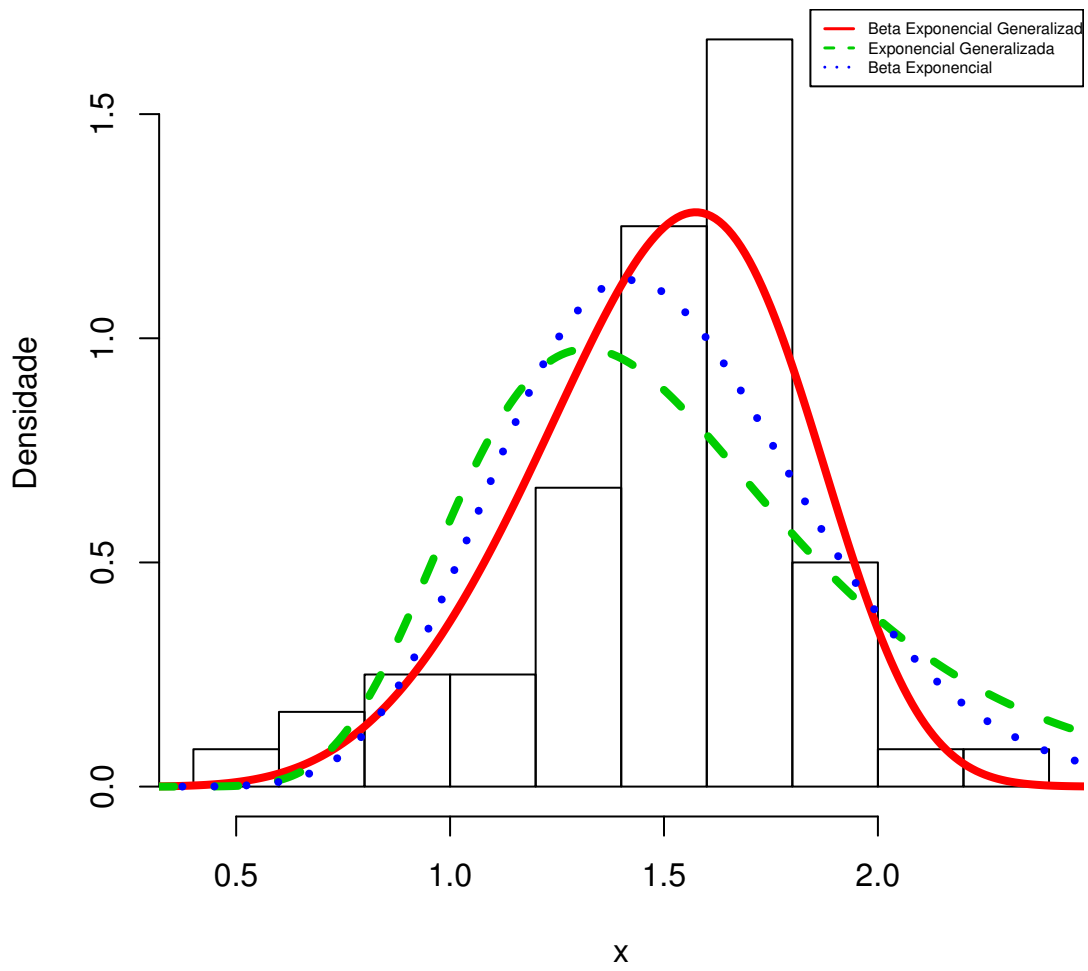


Figura 2.2: Histograma dos dados e as fdps das distribuições BEG, Beta Exponencial e Exponencial Generalizada.

## Capítulo 3

# A Distribuição Beta-Weibull modificada

### 3.1 Introdução

A distribuição Weibull, tendo exponencial e Rayleigh como casos especiais, é uma distribuição muito popular para dados em modelagem de vida e modelagem em fenômeno com taxas de falhas monótonas. Ao modelar taxas de risco monótonas, a distribuição Weibull pode ser escolhida, inicialmente, devido à sua densidade. Um exemplo de taxa de falha em forma de banheira é a experiência de mortalidade humana, com uma taxa alta de mortalidade infantil. As taxas de falha unimodais podem ser observadas ao longo de uma doença cuja mortalidade atinge um pico após algum período de tempo finito e, em seguida, diminui gradualmente. De acordo com Nelson (1990, p. 27), as distribuições que permitem um ajuste são suficientemente complexas. Por outro lado, distribuições mais flexíveis requerem, geralmente, cinco ou mais parâmetros. No entanto, mais recentemente, a gama generalizada (GG) e a F generalizadas (FG), foram utilizadas em aplicações de análise de sobrevivência, ver Cox et al. (2007) e Cox (2008), respectivamente. No entanto, nos últimos anos, novas classes de distribuições foram propostas com base em modificações da distribuição Weibull para lidar com a taxa de falha em forma de banheira. Uma boa revisão de alguns destes modelos é apresentada por Pham e Lai (2007). Entre estas, a distribuição Weibull exponencializada (WE), instituída por Mudholkar et al.(1995, 1996), a distribuição Weibull apresentada por Xie e Lai (1995), a distribuição Weibull estendida (Xie et al. 2002), a distribuição Weibull modificada (MW) proposta por Lai

et al. (2003), a distribuição beta exponencial (BE) apresentada por Nadarajah e Kotz (2006), a distribuição Weibull estendida flexível definida por Bebbington et al. (2007), a distribuição beta Weibull (BW) estudada por Lee et al. (2007) e a distribuição Weibull Modificada Generalizada (WMG) proposta por Carrasco et al.(2008). Neste capítulo, apresentamos uma distribuição com cinco novos parâmetros, chamada distribuição beta Weibull modificada (BWM), que contém vários submodelos, tais como a WE, exponencial exponencializada (EE) Gupta e Kundu (1999, 2001), Weibull modificada (WM), Rayleigh generalizada (RG) Kundu e Rakab (2005) e a distribuição GMW, entre outras. Esta distribuição foi proposta por Silva, Ortega e Cordeiro (2010). A distribuição (BWM) devido à sua flexibilidade em acomodar todas as formas de função de risco parece ser uma distribuição importante e que pode ser usada numa variedade de problemas de modelagem de dados de sobrevivência. A distribuição BWM não é apenas conveniente para modelar taxas de falhas em forma de banheira, mas também é adequada para testar qualidade do ajustamento de alguns submodelos especiais, tais como a WE, WM e WMG.

## 3.2 A definição do modelo

A ideia da distribuição Beta-Weibull Modificada decorre da seguinte classe geral: Se  $G$  denota a função de distribuição acumulada (fda) para uma variável aleatória, então uma classe generalizada de distribuições pode ser definida como

$$F(x) = I_G(x)(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega, \quad (3.1)$$

para  $a > 0$  e  $b > 0$ , em que  $I_y(a, b) = B_y(a, b)/B(a, b)$  é a relação da função beta incompleta e  $B_y(a, b) = \int_0^y \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$  é a função beta incompleta.

Lai (2003) introduziu a distribuição Weibull Modificada denotada por  $WM(\alpha, \gamma, \lambda)$  com três parâmetros  $\alpha > 0, \gamma > 0$  e  $\lambda \geq 0$  com fda e fdp dadas por

$$G_{\alpha, \gamma, \lambda}(x) = 1 - \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\} \quad (3.2)$$

e

$$g_{\alpha,\gamma,\lambda}(x) = \alpha x^{\gamma-1}(\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}, x > 0, \quad (3.3)$$

respectivamente. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  controlam a escala e a forma da distribuição, respectivamente. O parâmetro  $\lambda$  é uma espécie de fator de aceleração do tempo e funciona como um fator de fragilidade na sobrevivência do indivíduo quando o tempo aumenta. A distribuição Weibull é um caso especial da expressão (3.3) quando  $\lambda = 0$ . Se, além de  $\lambda = 0$ ,  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 2$ , obtemos a distribuição exponencial e Rayleigh, respectivamente. A densidade correspondente a (3.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} G(x)^{a-1} [1 - G(x)]^{b-1} g(x), \quad (3.4)$$

em que  $g(x) = dG(x)/dx$  é a densidade da distribuição de base.

Agora, introduzimos a distribuição Beta Weibull Modificada tomando  $G(x)$  na expressão (3.1) como a fda (3.2) da distribuição Weibull Modificada (WM). Assim, a fda da distribuição Beta Weibull Modificada BWM é então

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega. \quad (3.5)$$

A função densidade para a distribuição BWM pode ser escrita a partir das expressões (3.2) e (3.4).

De fato, temos,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{B(a,b)} [1 - e^{\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}}]^{a-1} [1 - 1 + e^{\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}}]^{b-1} \alpha x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) e^{(\lambda x)} \\ &= \frac{\alpha x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) \exp(\lambda x)}{B(a,b)} [1 - \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}]^{a-1} \exp\{-b\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\} \\ &= \frac{\alpha x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) \exp(\lambda x)}{B(a,b)} [1 - \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}]^{a-1} \exp\{-b\alpha x^\gamma \\ &\times \exp(\lambda x)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A função taxa de falha da distribuição BWM depende da função beta incompleta e é dada por

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{\alpha x^{\gamma-1}(\gamma + \lambda x) \exp(\lambda x)}{B(a, b)[1 - I_1 - \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}](a, b)} [1 - \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}]^{a-1} \\
 &\times \exp\{-b\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}, x > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

A Figura (3.1) ilustra algumas das possíveis formas da fdp (3.6), para alguns valores de parâmetros selecionados, incluindo algumas distribuições bem conhecidas.

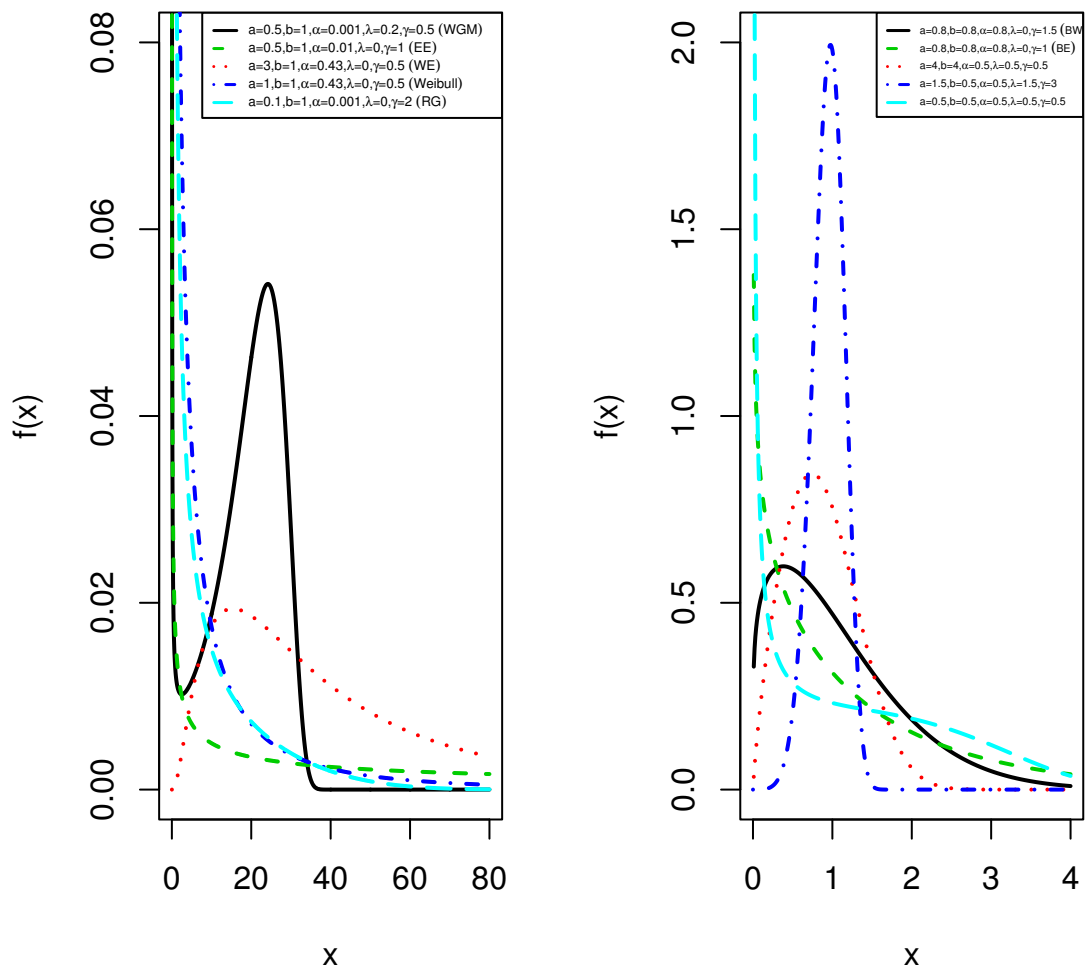


Figura 3.1: Função Densidade de Probabilidade da distribuição BW para alguns valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ , e  $\gamma$



### 3.3 Expansões para a distribuição e funções densidade

Fornecemos simples expansões para a fda da distribuição BWM dependendo se o parâmetro  $b$  é real não-inteiro ou inteiro. A densidade em (3.6) é simples de calcular usando qualquer software estatístico. Apresentamos, agora, uma expansão para  $F(x)$  em termos de uma soma infinita de fda's da WM. Para  $a > 0$  real não-inteiro, usando a representação em série, obtemos

$$\int_0^x \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1}d\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(a)}{\Gamma(a-j)j!} \int_0^x (1-\omega)^{b+j-1}d\omega.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_0^x (1-\omega)^{b+j-1}d\omega &= \frac{(1-\omega)^{b+j-1+1}}{(b+j)} \\ &= \frac{1-(1-x)^{b+j}}{b+j}. \end{aligned}$$

Segue,

$$\int_0^x \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1}d\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(a)}{\Gamma(a-j)(b+j)j!} [1-(1-x)^{b+j}],$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama.

Logo,

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(a)}{\Gamma(a-j)(b+j)j!} [1 - G_{\alpha, \gamma, \lambda}(x)]^{b+j},$$

ou seja,

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\alpha}(b+j), \gamma, \lambda(x), \quad (3.8)$$

em que

$$\omega_j = \omega_j(a, b) = \frac{(-1)^j \Gamma(a)}{B(a, b) \Gamma(a - j) (b + j) j!}$$

são constantes tais que  $\sum_{j=0}^{\infty} \omega_j = 1$  e  $G_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x)$  é a fda da distribuição Weibull Modificada com parâmetros  $\alpha(b + j)$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$ . Pelo fato de  $\sum_{j=0}^{\infty} \omega_j = 1$ , a função de sobrevivência da BWM segue da expressão

$$S(x) = 1 - F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j S_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x), \quad (3.9)$$

onde  $S_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x) = \exp -\alpha(b+j)x^{\gamma} \exp(\lambda x)$ , é a função de sobrevivência da distribuição WM com parâmetros  $\alpha(b + j)$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$ . A densidade para a distribuição BWM segue como

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j g_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x). \quad (3.10)$$

### 3.4 Confiabilidade

Obtemos, aqui, a fórmula para a confiabilidade  $R = P(X_2 < X_1)$  quando  $X_1$  e  $X_2$  são variáveis aleatórias independente tendo a distribuição BWM. A fórmula de  $R$  pode ser expressa como

$$R = \int_0^{\infty} f(x) F(x) dx. \quad (3.11)$$

Substituindo as expressões (3.6) e (3.8) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} R &= \int_{j=0}^{\infty} G(x)^{a-1} \{1 - G(x)\}^{b-1} g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x) \\ &= \int_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) e^{(\lambda x)} [1 - e^{-\alpha x^{\gamma} e^{(\lambda x)}}]^{a-1}}{B(a, b)} e^{-b \alpha x^{\gamma} e^{(\lambda x)}} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x) dx \\ &= \frac{\alpha}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(a, b) \int_{j=0}^{\infty} x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) e^{\lambda x} (1 - u). \end{aligned}$$

Sendo que  $u = \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}$ . Assim,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \exp\{-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\}(-\gamma \alpha x^{\gamma-1} \exp(\lambda x) - \alpha x^\gamma \exp(\lambda x)\lambda) \\ &= u(-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x))(\gamma x^{-1} + \lambda).\end{aligned}$$

Portanto,

$$du = u \log u[(\gamma + \lambda x)/x]dx.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}R &= \frac{\alpha}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(a, b) \int_{j=0}^{\infty} x^{\gamma-1}(\gamma + \lambda x)e^{\lambda x}(1-u)^{a-1}u^b(1-u^{b+j})dx \\ &= \frac{\alpha}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(a, b) \int_{j=0}^1 (1-u^{b+j})(1-u)^{a-1}u^{b-1}dx.\end{aligned}$$

Utilizando o software computacional Maple para calcular a última integral, obtemos

$$R = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(a, b) \left[ B(a, b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(2b+j)}{\Gamma(2b+j+a)} \right].$$

### 3.5 Expressões gerais para os momentos

Algumas das características mais importantes de uma distribuição podem ser estudadas através dos momentos (por exemplo, dispersão, assimetria e curtose). O  $r$ -ésimo momento da distribuição BWM pode ser obtido derivando uma soma infinita, a esta derivada representaremos por  $\mu'_r$ . A partir da expressão (3.10) podemos obter uma expressão elementar

$$\mu'_r = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \tau_r(j), \quad (3.12)$$

em que  $\tau_r(j) = \int_{j=0}^{\infty} x^r g_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda(x)} dx$ , denota o  $r$ -ésimo momento para a distribuição WM com parâmetros  $\alpha(b+j)$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$ .

Carrasco et al.(2008) obtiveram uma representação infinita para o  $r$ -ésimo momento da distribuição WM com os parâmetros acima, que pode ser escrita como

$$\tau_r(J) = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_r} \Gamma(s_r/\gamma + 1)}{[\alpha(b+j)]^{s_r/\gamma}}, \quad (3.13)$$

em que

$$A_{i_1, \dots, i_r} = a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \quad e \quad s_r = i_1, \dots, i_r,$$

e

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{i-1}.$$

### 3.6 Momentos das Estatísticas de Ordem

A densidade da  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ ,  $f_{i:n}(x)$  para uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da distribuição BWM, é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} \{1-F(x)\}^{n-i}. \quad (3.14)$$

A fda para a  $i$ -ésima estatística de ordem é dada por  $F_{i:n}(x) = I_{F(x)}(i, n-i+1)$ .

Alternativamente, pode-se escrever  $F_{i:n}(x)$  como somas binomiais

$$F_{i:n}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F(x)^k \{1-F(x)\}^{n-k} = F(x)^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i+k-1}{k} \{1-F(x)\}^k.$$

Podemos obter uma expressão em forma fechada para os momentos das estatísticas de ordem para a distribuição BWM, a partir de um resultado geral aplicado ao caso de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) por Barakat e Abdelkader (2004). Para uma distribuição com fdp  $f(x)$  e fda  $F(x)$  podemos escrever,

$$E(X_{i:n}^r) = r \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{j}{n} I_j(r), \quad (3.15)$$

em que

$$I_j(r) = \int_{j=0}^{\infty} x^{r-1} \{1-F(x)\}^j dx.$$

A função de sobrevivência para a distribuição BWM expansão (3.9) pode ser resumida em

$$S(x) = 1 - F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^{b+s},$$

em que  $u = \exp(-\alpha x^\gamma e^{\lambda x})$ . Assim,

$$I_j(r) = \int_{j=0}^{\infty} x^{r-1} \left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^{b+s} \right)^j dx$$

e

$$\left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^s \right)^j = \sum_{s=0}^{infy} c_{j,s} u^s, \quad (3.16)$$

em que os coeficientes  $c_{j,s}$  são obtidos a partir da expressão de recorrência

$$c_{j,s} = (sa_0)^{-1} \sum_{m=1}^s (jm - s + m) \omega_m c_{j,s-m}, \quad (3.17)$$

em que

A partir da última integral e da expressão (3.16) concluímos,

$$\begin{aligned} I_j(r) &= \int_0^{\infty} x^{r-1} \left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_{b+s} \right)^j dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{r-1} \left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^{bj} u^{sj} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{r-1} u^{bj} \left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^s \right)^j dx \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} c_{j,s} \int_0^{\infty} x^{r-1} u^{bj} u^s dx \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} x^{r-1} u^{bj+s}. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_j(r) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{j,s} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-\alpha(bj+s)x^\gamma} e^{\lambda x} dx. \quad (3.18)$$

Obtemos  $I_j(r)$ , utilizando o mesmo desenvolvimento algébrico por Carrasco et al. (2008). Podemos inverter a transformação  $y = x^\gamma e^{\lambda x}$  para obter  $x$  em função

polinomial de  $y$  quando ambos  $\lambda$  e  $\gamma$  são positivos. Então,

$$x = \frac{\gamma}{\lambda} F\left(\frac{\lambda y^{1/\gamma}}{\gamma}\right), \quad (3.19)$$

em que

$$F(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m^{m-2} \omega^m}{(m-1)!}.$$

Portanto, podemos expressar  $x$  em termos de  $y$  na expressão (3.19), como

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m y^{m/\gamma},$$

em que

$$a_m = \frac{(-1)^{m+1} m^{m-2}}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{m-1}. \quad (3.20)$$

De fato, note que

$$F\left(\frac{\lambda y^{1/\gamma}}{\gamma}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m^{m-2}}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda y^{1/\gamma}}{\gamma}\right)^m,$$

e

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m^{m-2}}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m y^{m/\gamma}.$$

A integral (3.18) pode ser escrita em termos de  $y$  como,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m y^{m/\gamma} \right\}^{r-1} e^{\alpha(bj+s)x^\gamma} e^{\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m y^{m/\gamma} \right\}^{r-1} e^{\alpha(bj+s)y} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p p}{\gamma} y^{p/\gamma-1} \right\} dy. \end{aligned}$$

Mas

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m y^{m/\gamma} \right\}^{r-1} = \sum_{m_1, \dots, m_{r-1}=1}^{\infty} a_{m_1} \dots a_{m_{r-1}} y^{m_1 + \dots + m_{r-1}/\gamma}.$$

Então,  $J$  pode ser escrito como

$$J = \gamma^{-1} \sum_{m_1, \dots, m_{r-1}=1}^{\infty} m_r A_{m_1, \dots, m_r} \int_0^{\infty} y^{s_r/\gamma-1} e^{-(j+1)\alpha y} dy,$$

em que os termos

$$A_{m_1, \dots, m_r} = a_{m_1} \dots a_{m_r}$$

obtemos a partir das constantes em (3.20) e

$$s_r = m_1 + \dots + m_r.$$

Substituindo  $v = (j+1)\alpha\gamma$  na última integral, obtemos

$$J = \gamma^{-1} \sum_{m_1, \dots, m_{r-1}=1}^{\infty} \frac{m_r A_{m_1, \dots, m_r}}{[(j+1)\alpha]^{s_r/\gamma}} \int_0^{\infty} v^{s_r/\gamma-1} e^{-v} dv,$$

que em termos da função gama reduz-se a

$$J = \gamma^{-1} \sum_{m_1, \dots, m_{r-1}=1}^{\infty} \frac{m_r A_{m_1, \dots, m_r}}{[(j+1)\alpha]^{s_r/\gamma}} \Gamma(s_r/\gamma).$$

Combinando as expressões (3.15) e (3.18), o  $r$ -ésimo momento da estatística de ordem pode ser expresso como,

$$E(X_{i:m}^r) = \frac{r}{\gamma} \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \sum_{s=0}^{\infty} c_{j,s} \sum_{m_1, \dots, m_{r-1}=1}^{\infty} \frac{m_r A_{m_1, \dots, m_r}}{[(j+1)\alpha]^{s_r/\gamma}} \Gamma(s_r/\gamma). \quad (3.21)$$

Uma forma alternativa de computar estes momentos segue expressando a densidade da estatística de ordem da distribuição BWM como uma mistura de densidades WM. Temos de (3.14)

$$F_{i;n}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F(x)^k \{1 - F(x)\}^{n-k} = F(x)^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i+k-1}{k} \{1 - F(x)\}^k,$$

no que acarreta

$$f_{i:m}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \{1 - F(x)\}^{n-i+k}.$$

A soma acima se torna

$$\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \left( \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s u^{b+s} \right)^{n-i+k} = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \sum_{s=0}^{\infty} c_{n-i+k} u^{b(n-i+k)+s}.$$

Substituindo (3.10), obtemos

$$f_{i:m}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{j,s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \omega_j (-1)^k c_{n-i+k,s} u^{b(n-i+k)+s} g_{\alpha(b+j), \gamma, \lambda}(x)$$

então,

$$\begin{aligned} f_{i:m}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{j,s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \omega_j (-1)^k c_{n-i+k,s} \alpha(b+j) x^{\gamma-1} (\gamma + \lambda x) \\ &\times \exp\{\lambda x - \alpha[b(n-i+k+1) + s + j] x^\gamma e^{\lambda x}\}. \end{aligned}$$

Finalmente, a densidade acima pode ser expressa na forma

$$f_{i:m}(x) = \sum_{j,s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} p_{n,i,k,j,s} g_{\alpha[b(n-i+k+1)+s+j], \gamma, \lambda}(x), \quad (3.22)$$

em que os coeficientes da combinação linear infinita são dadas por

$$p_{n,i,k,j,s} = p_{n,i,k,j,s}(a, b) = \frac{\omega_j (-1)^k (b+j) c_{n-i+k,s}}{b(n-i+k+1) + s + j}.$$

Portanto, algumas propriedades matemáticas das estatística de ordem da distribuição BWM seguem imediatamente das propriedades da distribuição WM.

### 3.7 Estimadores de Máxima Verossimilhança

**Definição 3.7.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por*

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 3.7.2** *O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; \mathbf{x})$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por*

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$



Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  para a distribuição BMW. A função de log-verossimilhança para o vetor de parâmetros  $\theta = (a, b, \alpha, \gamma, \lambda)^T$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= -n \log[B(a, b)] + \sum_{i=1}^n \{[\log(\gamma + \lambda x_i)] + \log(\nu_i) - \log(x_i)\} + (a-1) \sum_{i=1}^n \log\{1 - \exp(-\nu_i)\} \\ &\quad - b \sum_{i=1}^n \nu_i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que  $\nu_i = \alpha x_i^\gamma \exp(\lambda x_i)$  é uma observação transformada. A log-verossimilhança pode ser maximizada diretamente usando o programa OX ou resolvendo as equações não-lineares obtidas diferenciando a expressão (3.23). As componentes do vetor score  $U_\theta$  são dadas por

$$\begin{aligned} U_a(\theta) &= -n[\psi(a) + \psi(a+b)] + \sum_{i=1}^n \log[1 - \exp(-\nu_i)], \\ U_b(\theta) &= -n[\psi(b) + \psi(a+b)] - \sum_{i=1}^n \nu_i, \\ U_\alpha(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma \exp(\lambda x_i)}{\nu_i} + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\nu_i) x_i^\gamma \exp \lambda x_i}{[1 - \exp(-\nu_i)]} - b \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \exp(\lambda x_i), \\ U_\gamma(\theta) &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\gamma \gamma + \lambda x_i} \log(x_i) \right] + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\nu_i) \nu_i \log(x_i)}{[1 - \exp(-\nu_i)]} - b \sum_{i=1}^n \nu_i \log(x_i), \\ U_\lambda(\theta) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\gamma + \lambda x_i} + x_i \right) + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\nu_i) \nu_i x_i}{[1 - \exp(-\nu_i)]} - b \sum_{i=1}^n \nu_i x_i, \end{aligned}$$

em que  $\psi(\cdot)$  é a função digama.

Para a estimação intervalar e testar hipóteses nos parâmetros do modelo, exigimos a matriz de informação. A matriz de informação  $5 \times 5$  é dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_{a,a} & J_{a,b} & J_{a,\alpha} & J_{a,\gamma} & J_{a,\lambda} \\ J_{a,b} & J_{b,b} & J_{b,\alpha} & J_{b,\gamma} & J_{b,\lambda} \\ J_{a,\alpha} & J_{b,\alpha} & J_{\alpha,\alpha} & J_{\alpha,\gamma} & J_{\alpha,\lambda} \\ J_{a,\gamma} & J_{b,\gamma} & J_{\alpha,\gamma} & J_{\gamma,\gamma} & J_{\gamma,\lambda} \\ J_{a,\lambda} & J_{b,\lambda} & J_{\alpha,\lambda} & J_{\gamma,\lambda} & J_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}.$$

cujo os elemntos  $(a, b, \alpha, \gamma, \lambda)$  são obtidos a seguir

$$J_{a,a} = -n \left\{ -\Psi^2(a) - \Gamma(a+b) \left[ \Psi'(a+b) + \Psi^2(a+b) \right]^2 + \Psi^2(a+b) \right\},$$

$$J_{b,b} = -n \left\{ -\Psi^2(b) - \Gamma(a+b) \left[ \Psi'(a+b) + \Psi^2(a+b) \right]^2 + \Psi^2(a+b) \right\},$$

$$J_{\alpha,\alpha} = -\sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^{2\gamma} \exp(2\lambda x_i)}{v_i^2} \right] - (a-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\exp(-v_i) x_i^{2\gamma} \exp(2\lambda x_i)}{[1 - \exp(-v_i)]^2} \right\},$$

$$J_{\gamma,\gamma} = -\sum_{i=1}^n (\gamma + \lambda x_i)^{-2} + (a-1) \sum_{i=1}^n y_i [\log(x_i)]^2 - b \sum_{i=1}^n v_i [\log(x_i)]^2,$$

$$J_{\lambda,\lambda} = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\gamma + \lambda x_i} \right)^2 + (a-1) \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - b \sum_{i=1}^n v_i x_i^2,$$

$$J_{\alpha,\gamma} = (a-1) \sum_{i=1}^n y_i v_i^{-1} x_i^\gamma \exp(\lambda x_i) \log(x_i) - b \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \exp(\lambda x_i) \log x_i,$$

$$J_{\alpha,\lambda} = (a-1) \sum_{i=1}^n y_i v_i^{-1} x_i^{\gamma+1} \exp(\lambda x_i) - b \sum_{i=1}^n x_i^{\gamma+1} \exp(\lambda x_i),$$

$$J_{\gamma,\lambda} = (a-1) \sum_{i=1}^n y_i x_i \log(x_i) - b \sum_{i=1}^n v_i x_i \log x_i,$$

$$J_{a,\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-v_i) v_i x_i}{[1 - \exp(-v_i)]},$$

$$J_{a,\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-v_i) x_i^\gamma \exp(\lambda x_i)}{[1 - \exp(-v_i)]},$$

$$J_{a,\gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-v_i) v_i \log(x_i)}{[1 - \exp(-v_i)]},$$

$$J_{a,b} = -n \Psi'(a+b),$$

$$J_{b,\alpha} = -\sum_{i=1}^n x_i^\gamma \exp(\lambda x_i),$$

$$J_{b,\gamma} = -\sum_{i=1}^n v_i \log x_i,$$

$$J_{b,\lambda} = -\sum_{i=1}^n v_i x_i,$$

onde  $y_i = \frac{\exp(-v)v}{1-\exp(-v_i)} \left[ 1 - \frac{v_i}{1-\exp(v_i)} \right]$ .

A distribuição assintótica de  $\hat{\theta}$  é definida como

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N_5(0, I(\theta)^{-1}).$$

em que  $I(\theta)$  é a matriz de informação esperada. Este comportamento assintótico é válido se  $I(\theta)$  é substituído por  $J(\theta)$ , isto é, a matriz de informação observada é avaliada em  $\hat{\theta}$ . A distribuição normal assintótica multivariada  $N_5(0, J(\hat{\theta})^{-1})$  pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados, regiões de confiança para os parâmetros e para funções de sobrevivência. A normalidade assintótica também é útil para testar qualidade de ajuste da distribuição BWM e para comparar esta distribuição com alguns dos seus submodelos especiais, usando uma das três estatísticas de teste conhecidas, ou seja, a razão de verossimilhanças ( $RV$ ), teste de Wald ( $W$ ) e teste escore de Rao ( $S_R$ ).

### 3.8 Aplicação

Considerando o conjunto de dados descrito por Aarset (1987) e também relatado por Mudholkar e Srivastava (1993); Mudholkar et al. (1996) e Wang (2000), representando 50 observações de tempo de vidas de componentes, que possuem como propriedade a taxa de falha em forma de banheira. Nosso objetivo, neste seção é fazer o ajuste da distribuição BWM e cinco distribuições como submodelos, que permitem a sua avaliação em relação ao modelo da BWM. Além disso, calculamos os valores máximos da log-verossimilhança para obtermos as estatísticas  $RV$  para testar alguns submodelos. Uma análise sob o modelo da BWM permite verificar a adequação dos modelos WMG, WM e EM que indica em que medida as inferências dependem do modelo. Por exemplo, a estatística  $RV$  foi obtida para testar as hipóteses  $H_0 := b = 1$  versus  $H_1 : H_0$  falsa. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros, os valores do critério de informação Akaike (AIC) e os valores para o critério de informação bayesiana (BIC) para os seis modelos são mostrados na Tabela 2.1. Como podemos ver a partir destes resultados numéricos do AIC e BIC do modelo BWM são os menores entre os seis modelos ajustados e, portanto, esse modelo pode ser escolhido como o melhor.

Tabela 3.1. Estimativas dos parâmetros para alguns modelos ajustados aos dados de Aarset (1987) (os erros padrão são dados entre parênteses) e os valores das estatísticas do AIC e BIC

Modelos	$a$	$b$	$\alpha$	$\lambda$	$\gamma$	$AIC$	$BIC$
BWM	0,1975 (0,0462)	0,1647 (0,0830)	0,0002 (6,6931e-005)	0,0541 (0,0157)	1,3771 (0,3387)	451,6	461,2
BW	0,18356 (0,0509)	0,0748 (0,0353)	0,0007 (0,0004)	0 0	2,3615 (0,1715)	463,9	471,6
WMG	0,2975 (0,0613)	1	0,0002 (0,0001)	0,0529 (0,0138)	0,9942 (0,2396)	455,8	463,4
WM	1	1	0,0624 (0,0267)	0,0233 (0,0048)	0,3548 (0,1127)	460,3	466,0
WE	0,4668 (0,0889)	1	0,0011 (0,0010)	0	1,5936 (0,1858)	480,5	486,2
RG	0,3643 (0,0624)	1	0,0002 (4,8738e-005)	0	2	475,9	479,7

# Capítulo 4

## Alguns resultados para a distribuição Beta Fréchet

### 4.1 Introdução

A distribuição Fréchet tem sido utilizada com grande freqüência em estudos de fenômenos ambientais principalmente para solucionar problemas relacionados às áreas de Engenharia, entre os quais, velocidades máximas de ventos, temperaturas máximas e mínimas e em estudos de precipitação pluvial máxima. Kotz e Nadarajah (2000) contribuíram com algumas aplicações em seu livro. Neste capítulo, iremos discutir a distribuição Beta Fréchet (*BF*) introduzida por Barreto, Cordeiro e Simas (2011). Eugene et al.(2002) definiram a distribuição Beta Generalizada a partir de uma função de distribuição acumulada (*fda*) dada por

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega, \quad (4.1)$$

onde  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois parâmetros adicionais, cujo papel é introduzir assimetria e variação do peso da cauda e  $B(a, b) = \int_0^1 \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$  é a função beta.

Note que podemos escrever a expressão (4.1) por

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b), \quad (4.2)$$

em que  $I_y(a, b) = B(a, b)^{-1} \int_0^y \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega$  denota a relação da função beta incompleta, ou seja, a função de distribuição acumulada (*fda*) para uma variável aleatória com distribuição beta de parâmetros  $a$  e  $b$ . Em geral, podemos expressar a equação (4.2) em termos da função hipergeometrica definida por

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i,$$

em que  $(\alpha)_i = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + i - 1)$ . Daí obtemos,

$$F(x) = \frac{G(x)^a}{aB(a, b)} F_1(a, 1 - b, a + 1; G(x)).$$

A função densidade de probabilidade (fdp) correspondente a expressão (4.1) pode ser expressa por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} G(x)^{a-1} \{1 - G(x)\}^{b-1} g(x), \quad (4.3)$$

em que  $g(x) = dG(x)/dx$ .

A fda e a fdp para a distribuição Fréchet são, respectivamente dadas por

$$G_{\sigma, \lambda}(x) = e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}, x > 0, \quad (4.4)$$

e

$$g_{\sigma, \lambda}(x) = \lambda \sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}, x > 0, \quad (4.5)$$

em que  $\sigma > 0$  é o parâmetro de escala e  $\lambda > 0$  é o parâmetro de forma. O  $r$ -ésimo momento para a distribuição Fréchet com  $r < \lambda$  é dado por  $\mu'_r = \sigma^r \Gamma(1 - r/\lambda)$ , e os quatros primeiros cumulantes são

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma g_1, k_2 = \sigma^2 (g_2 - g_1^2), \\ k_3 &= \frac{g_3 - 3g_1 g_2 + 2g_1^3}{(g_2 - g_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ k_4 &= \frac{g_4 - 4g_1 g_3 + 6g_1^2 g_2 - 3g_1^4}{(g_2 - g_1^2)^2}, \end{aligned}$$

em que  $g_k = \Gamma(1 - k/\lambda)$  para  $k = 1, \dots, 4$ .

Nadarajah e Gupta (2004) introduziram a fda da distribuição BF com  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $\lambda > 0$ , substituindo  $G(x)$  na expressão (4.1). Assim,

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega = I_{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}}(a, b), x > 0. \quad (4.6)$$

A fdp e a função taxa de falha para a nova distribuição são, respectivamente dadas por:

$$f(x) = \frac{\lambda\sigma^\lambda}{B(a,b)} x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} \{1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^{b-1}, x > 0, \quad (4.7)$$

e

$$\tau(x) = \frac{\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} \{1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^{b-1}}{B(a,b) \{1 - I_{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}}(a,b)\}}, x > 0. \quad (4.8)$$

De fato, note que a função densidade da distribuição Beta Fréchet (BF) pode ser escrita a partir das expressões (4.3) e (4.4). Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{B(a,b)} [e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}]^{a-1} [1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}]^{b-1} e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda} (\sigma/x)^\lambda (\lambda/x) \\ &= \frac{\lambda\sigma^\lambda}{B(a,b)} x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} [1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}]^{b-1}. \end{aligned}$$

Agora, note que a função taxa de falha será obtida substituindo as expressões (4.1) e (4.3) na definição (1.3.1). Então,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(\sigma/x)^\lambda (\lambda/x)}{B(a,b)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} [1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}]^{b-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{Gx} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega} \\ &= \frac{\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} [1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}]^{b-1}}{B(a,b) \{1 - I_{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}}(a,b)\}}. \end{aligned}$$

A Figura (4.1) ilustra algumas das possíveis formas da fdp (4.7), para alguns valores de parâmetros selecionados, incluindo o caso da Distribuição Fréchet.

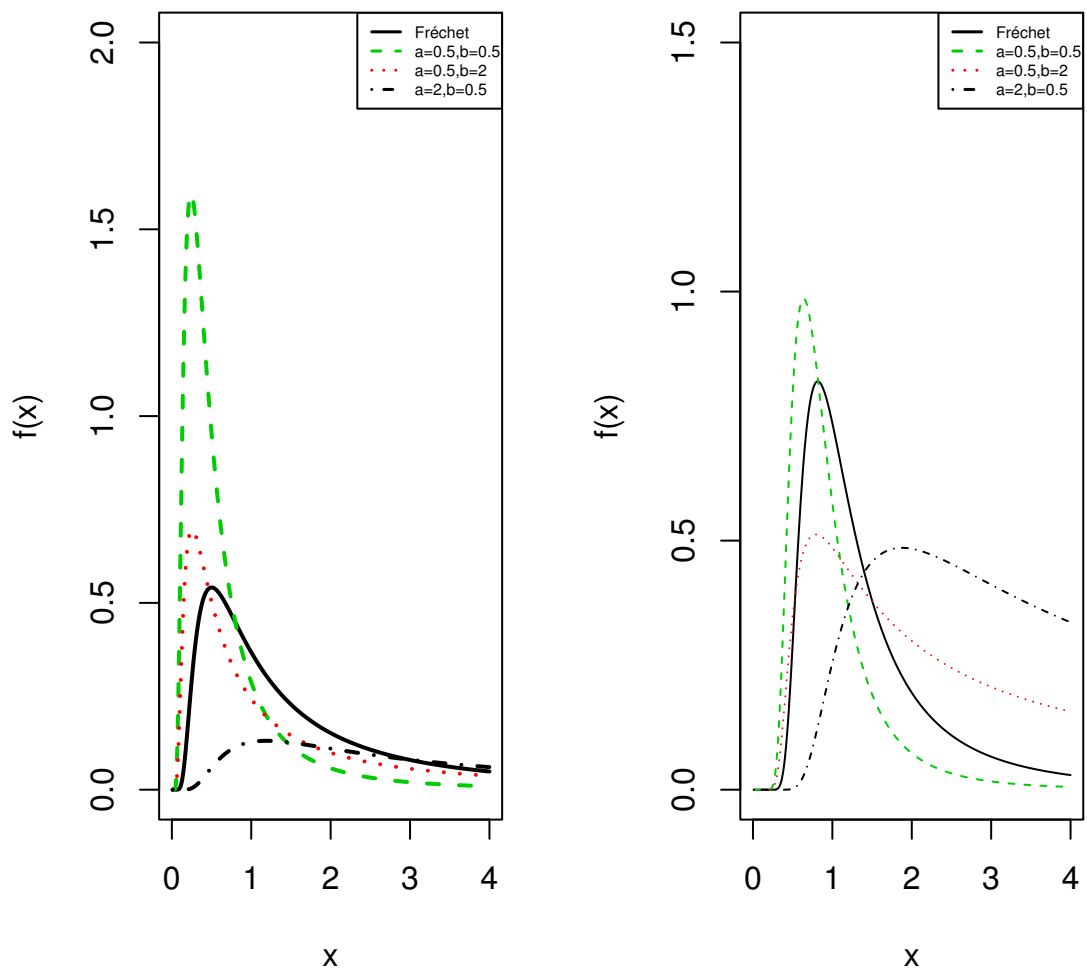


Figura 4.1: 4 Função Densidade de Probabilidade da distribuição BF para alguns valores de  $a$  e  $b$ .



## 4.2 Expansões para a distribuição e a função de densidade

Apresentamos, nesta seção, expansões para a fda e para a fdp da distribuição BF dependendo se o parâmetro  $b$  é real não inteiro ou inteiro. Considere a expansão em série

$$(1 - z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j, \quad (4.9)$$

em que  $|z| < 1$  e  $b > 0$  real não inteiro.

Substituindo a expansão em série (4.9) na expressão (4.1), obtemos a fda para a distribuição BF com  $b$  real não inteiro.

De fato,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}} \omega^{a+j-1} d\omega. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\int_0^{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}} \omega^{a+j-1} d\omega = \frac{\omega^{a+j}}{a+j} \Big|_0^{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}} = \frac{e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda(a+j)}}{a+j}$$

e

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Substituindo em  $F(x)$  temos

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda(a+j)}}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}. \quad (4.10)$$

Para  $b$  inteiro, a soma em (4.10) é de  $j = 0$  até  $j = b - 1$ . Quando  $b = 1$ , segue que  $F(x) = e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}$ . Pode ser visto no site de Funções da Wolfram (<http://functions.Wolfram.com>) que, para  $b$  inteiro

$$I_y(a, b) = \frac{y^a}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)(1-y)^j}{j!},$$

e para  $a$  inteiro temos

$$I_y(a, b) = 1 - \frac{(1-y)^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} y^j.$$

Portanto, se  $b$  é inteiro, obtemos outra forma equivalente para (4.10)

$$F(x) = \frac{e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+j)(1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda})^j}{j!},$$

e para valores inteiros de  $a$ , temos

$$F(x) = 1 - \frac{(1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda})^b}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\Gamma(b+j)}{j!} e^{-j(\frac{\sigma}{x})^\lambda}.$$

Se  $a = 1$ , a expressão acima reduz-se a

$$F(x) = 1 - \{1 - e^{-(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^b.$$

Portanto, mostramos que a densidade BF pode ser expressa como uma combinação linear infinita de fdp's de variáveis aleatórias com distribuições Fréchet. Seja  $b$  um número inteiro, e novamente usando (4.9) podemos reescrever a expressão (4.7) como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k g_{a_k, \lambda}(x), \quad (4.11)$$

em que

$$w_k = \frac{\Gamma(a+b)(-1)^k}{\Gamma(a)\Gamma(b-k)k!(k+a)},$$

$k$  representa uma constante ponderada tais que  $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k = 1$  e  $g_{a_k, \lambda}(x)$  é a densidade de uma distribuição Fréchet com parâmetro de escala  $a_k = \sigma(k+a)^{1/\lambda}$  e parâmetro de forma  $\lambda$ .

### 4.3 Estatísticas de Ordem

Nesta seção, apresentamos a densidade da  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ ,  $f_{i:n}(x)$  de uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , para a distribuição BF. Sabemos que,

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} \{1 - F(x)\}^{n-i},$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Usando as expressões (4.6) e (4.7), podemos expressar  $f_{i:n}(x)$  em termos da função beta incompleta por

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{n! g_{\sigma, \lambda}(x)}{(i-1)!(n-i)! B(a, b)} G_{\sigma, \lambda}(x)^{a-1} \{1 - G_{\sigma, \lambda}(x)\}^{b-1} \\ &\times I_{G_{\lambda, \alpha}(x)}(a, b)^{i-1} I_{\{1 - G_{\lambda, \alpha}(x)\}}(b, a)^{n-i}. \end{aligned}$$

A fda para  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$ ,  $F_{i:n}(x)$  é dada por

$$F_{i:n}(x) = \sum_{r=i}^n \binom{n}{r} I_{G_{\lambda, \alpha}(x)}(a, b)^r I_{1 - G_{\lambda, \alpha}(x)}(b, a)^{n-r}.$$

### 4.4 Momentos

Nesta seção, obtemos o  $r$ -ésimo momento para a distribuição BF e para as estatísticas de ordem da BF. Pela expressão (4.11), se  $r < \lambda$  temos

$$\mu'(r) = \frac{\sigma^r \Gamma(1 - r/\lambda) \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{r/\lambda-1}}{\Gamma(b-j) j!}. \quad (4.12)$$

O  $r$ -ésimo momento para a  $X_{i:n}$  com  $b > 0$  real não inteiro é dado por

$$E(X_{i:n}^r) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{n-i}{k} \Gamma(b)^{i+k-i} B(a(i+k) + j, b) c_{i,j,k}}{B(a, b)^{i+k} B(i, n-i+1)} E(X_{i,j,k}^r), \quad (4.13)$$

em que  $X_{i,j,k} \sim BF(a(i+k) + j, b, \sigma, \lambda)$  e a constante  $c_{i,j,k} = \frac{a\Gamma(b)}{j} \sum_{l=1}^j \frac{(-1)^l \{l(i+k) - j\}}{\Gamma(b-l) l! (a+l)}$ .

#### 4.4.1 L - Momentos

Os  $L$ -momentos são análogos aos momentos ordinários, mas podem ser estimados por combinações lineares de estatísticas de ordem. Eles são funções lineares das estatísticas de ordem esperada definidas por (Hosking, 1990).

$$\lambda_{r+1} = (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} E(X_{r+1-k:r+1}), r = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

### 4.5 Estimação e Matriz de informação

**Definição 4.5.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por*

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 4.5.2** *O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; \mathbf{x})$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por*

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$

Suponhamos que  $Y$  segue a distribuição BF e seja  $\theta = (a, b, \sigma, \lambda)^T$  o vetor de parâmetros. O logaritmo da função de verossimilhança para uma única observação  $y$  de  $Y$  será dada por

$$\ell = \log \lambda + \lambda \log(\sigma/y) - \log\{B(a, b)\} - a(\sigma/y)^\lambda + (b-1) \log(1 - e^{-(\sigma/y)^\lambda}).$$

As componentes para o vetor score  $U = (\partial\ell/\partial a, \partial\ell/\partial b, \partial\ell/\partial\lambda, \partial\ell/\partial\sigma)^T$  são dadas por

$$\frac{\partial\ell}{\partial a} = -\Psi(a) + \Psi(a+b) - (\sigma/y)^\lambda,$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial b} = -\Psi(b) + \Psi(a+b) + \log\{1 - e^{-(\sigma/y)^\lambda}\},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = \frac{\lambda}{\sigma} - \frac{\lambda \sigma^{\lambda-1}}{y \lambda^\lambda} \left\{ a - \frac{b-1}{e^{(\sigma/y)^\lambda} - 1} \right\},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} + \log \left( \frac{\sigma}{y} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{y} \right)^\lambda \left\{ a - \frac{b-1}{e^{(\sigma/y)^\lambda} - 1} \right\} \right].$$

Como  $E(\partial \ell / \partial a) = 0$ , obtemos

$$E(X^{-\lambda}) = \frac{\Psi(a+b) - \Psi(a)}{\sigma^\lambda}.$$

Para a estimação intervalar e testes de hipóteses nos parâmetros do modelo, precisamos da matriz de informação de Fisher. A matriz de informação de Fisher é dada por

$$K = \begin{pmatrix} k_{a,a} & k_{a,b} & k_{a,\sigma} & k_{a,\lambda} \\ k_{a,b} & k_{b,b} & k_{b,\sigma} & k_{b,\lambda} \\ k_{a,\sigma} & k_{b,\sigma} & k_{\sigma,\sigma} & k_{\sigma,\lambda} \\ k_{a,\lambda} & k_{b,\lambda} & k_{\sigma,\lambda} & k_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são

$$k_{a,a} = \psi'(a) - \psi'(a+b), k_{b,b} = \psi'(b) - \psi'(a+b),$$

$$k_{\sigma,\sigma} = \frac{\lambda}{\sigma^2} [1 + a(\lambda-1)\psi(a+b) - \psi(a) + (b-1)(\lambda T_{1,1,2,0} - T_{1,1,1,0})],$$

$$k_{\lambda,\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \{1 + aT_{0,0,1,2} + (b-1)(T_{1,2,2,2} - T_{1,1,1,2})\},$$

$$k_{\sigma,\lambda} = -\frac{1}{\sigma} [1 - a\psi(a+b) - \psi(a) + T_{0,0,1,1} + (b-1)(T_{1,1,1,0} + T_{1,1,1,1} - \lambda T_{1,2,2,0})],$$

$$k_{a,b} = -\psi'(a+b), k_{a,\lambda} = \frac{1}{\lambda} T_{0,0,1,1},$$

$$k_{a,\sigma} = \frac{1}{\sigma} \{\psi(a+b) - \psi(a)\}, k_{b,\sigma} = -\frac{\lambda}{\sigma} T_{1,1,1,0}, k_{b,\lambda} = -\frac{1}{\lambda} T_{1,1,1,1}.$$

Aqui nós definimos uma variável aleatória  $V$  seguindo uma distribuição Beta  $(a, b)$  e o valor esperado

$$T_{i,j,k,l} = E[V^i (1-V)^{-j} (-\log V)^k \{\log(-\log V)\}^l],$$

em que a integral obtida da definição acima pode ser determinada numericamente usando softwares como, por exemplo, o MAPLE ou o MATEMÁTICA. Por exemplo, para  $a = 1,5$  e  $b = 2,5$  temos que os  $T$ 's da matriz de informação de Fisher

são:  $T_{1,1,2,0} = 0,51230070$ ,  $T_{1,1,1,0} = 0,55296103$ ,  $T_{0,0,1,2} = 0,62931802$ ,  $T_{1,2,2,2} = 0,43145336$ ,  $T_{1,1,1,2} = 0,32124774$ ,  $T_{0,0,1,1} = 0,48641180$ ,  $T_{1,1,1,1} = -0,16152763$ , e  $T_{1,2,2,0} = 0,86196008$ .

Para uma amostra aleatória  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  de tamanho  $n$  para  $Y$ , a log-verossimilhança total é dada por

$$\ell_n = \ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \ell^i,$$

em que  $\ell^i$  é a log-verossimilhança para a  $i$ -ésima observação. A função escore total é dada por  $U_n = U_n(\theta) = \sum_{i=1}^n U^i$ , com  $i = 1, \dots, n$  e a matriz de informação total é  $K_n(\theta) = nK(\theta)$ . O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  para  $\theta$  é determinado a partir da solução não-linear do sistema de equações  $U_n = 0$ . A distribuição normal assintótica multivariada  $N_4(0, Kn(\hat{\theta})^{-1})$  de  $\hat{\theta}$  pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados, regiões de confiança para os parâmetros e para funções de sobrevivência. De fato, um intervalo de confiança assintótico para cada parâmetro  $\theta_i$  é dado por

$$IC_i = (\hat{\theta}_i - z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{K}^{\theta_i, \theta_i}}, \hat{\theta}_i + z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{K}^{\theta_i, \theta_i}}),$$

em que  $\hat{K}^{\theta_i, \theta_i}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $Kn(\hat{\theta})^{-1}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $z_{\gamma/2}$  é o quantil  $1 - \gamma/2$  da distribuição normal padrão.

## 4.6 Aplicação

Um dos principais benefícios da distribuição Beta Generalizada é a sua capacidade de ajustar dados assimétricos que não podem ser ajustados por distribuições mais usuais. Nesta seção, nós ajustamos a distribuição BF para um conjunto de dados sobre a resistência da fibra de vidro com 1,5 centímetro, medidas no Laboratório Nacional de Física, Inglaterra. Este conjunto é composto por 63 observações: obtido por Smith e Naylor (1987),

Tabela 4.1. Os dados sobre as resistências de fibras de vidro com 1,5 cm.

---

0,55	0,93	1,25	1,36	1,49	1,52	1,58	1,61	1,64	1,68	1,73	1,81
2	0,74	1,04	1,27	1,39	1,49	1,53	1,59	1,61	1,68	1,76	1,82
2,01	0,77	1,11	1,28	1,42	1,5	1,54	1,6	1,62	1,66	1,69	1,76
1,84	2,24	0,81	1,13	1,29	1,48	1,5	1,55	1,61	1,62	1,66	1,7
1,77	1,84	0,84	1,24	1,3	1,48	1,51	1,61	1,67	1,7	1,78	1,89

---

Os estimadores de máxima verossimilhança e a função log-verossimilhança da distribuição Beta Fréchet são,

$$\hat{a} = 0,3962, \hat{b} = 225,7272, \hat{\lambda} = 6,8631, \hat{\sigma} = 1,3021, \hat{\ell}_{BF} = -90,5180,$$

enquanto para as distribuições Fréchet Exponencial e Fréchet são,

$$\hat{b} = 112,5986, \hat{\lambda} = 7,7859, \hat{\sigma} = 0,9814, \hat{\ell}_{FE} = -93,1962$$

e

$$\hat{\lambda} = 1,2643, \hat{\sigma} = 2,8875, \hat{\ell}_{Fr} = -117,7765.$$

Os valores das estatísticas RV para testar as hipóteses  $H_0 : Fr \times H_1 : BF$  e  $H_0 : FE \times H_1 : BF$  são: 54,5170 ( $p - valor = 1,45 \times 10^{-12}$ ) e 5,3564 ( $p - valor = 2,06 \times 10^{-2}$ ), respectivamente. Assim, nós rejeitamos a hipótese nula em favor da hipótese alternativa. Portanto, a distribuição BF é um modelo adequado para qualquer nível de significância usual.

# Capítulo 5

## Família de distribuições Kw generalizadas

### 5.1 Introdução

Vamos iniciar este capítulo com uma discussão sobre a distribuição beta generalizada (*BG*) e em seguida introduzimos uma nova família de distribuições generalizadas a distribuição de Kumaraswamy (*Kw-G*) obtida por Cordeiro e Castro (2010). No texto são discutidas algumas propriedades desta distribuição. Expressões para os momentos, função de falha, estatística de ordem são obtidas. Utilizamos o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros desta distribuição.

A distribuição beta generalizada tem sido amplamente estudada. Muitos autores desenvolveram várias classes dessa distribuição. Eugene et al. (2002) propuseram uma classe mais geral de distribuições de uma variável aleatória, definida a partir da logit da variável aleatória beta empregando dois parâmetros, cujo papel é o de introduzir a assimetria e variação do peso da cauda, respectivamente. Seguindo o trabalho de Eugene et al. (2002), que definiu a distribuição beta normal, Nadarajah e Kotz (2004) introduziram a distribuição beta Gumbel, Nadarajah e Gupta (2004) propuseram a distribuição beta Fréchet e Nadarajah e Kotz (2005) trabalharam com a distribuição beta exponencial. No entanto, todos estes trabalhos levaram algumas dificuldades matemáticas, porque a distribuição beta não é facilmente tratável e, em particular, a sua função de distribuição acumulada (fda) envolve a função beta incompleta. O artigo de Kumaraswamy (1980) apresenta uma nova distribuição de probabilidade para processos aleatórios limitados com aplicações hidrológicas. A



distribuição de Kumaraswamy recebeu um interesse considerável em hidrologia e áreas afins. Em experimentos de testes de confiabilidade e de tempo de vida, muitas vezes os dados são modelados pela distribuição gama. Nós começamos com a distribuição de Kumaraswamy (chamado agora em diante como a distribuição  $Kw$ ) no intervalo  $(0, 1)$ , tendo função de densidade de probabilidade (fdp) e a (fda) com dois parâmetros da forma  $a > 0$  e  $b > 0$  definidas, respectivamente, por

$$f(x) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1} \quad e \quad F(x) = 1 - (1-x^a)^b. \quad (5.1)$$

A função de densidade na expressão (5.1) tem as mesmas propriedades que a distribuição beta, porém com algumas vantagens. A distribuição  $Kw$  parece não ser muito familiar para os estatísticos e não foi investigada sistematicamente com detalhes, nem tem a sua intercambialidade em relação a distribuição beta como tem sido amplamente apreciada. No entanto, em um artigo muito recente, Jones (2008) explorou a fundo a gênese da distribuição  $Kw$  e, o mais importante, deixou claro algumas semelhanças e diferenças entre as distribuições beta e  $Kw$ . Por exemplo, as densidades  $Kw$  e beta são unimodais, crescentes, decrescentes ou constantes, dependendo da mesma maneira como a distribuição beta é definida sobre os valores de seus parâmetros. Ele destacou várias vantagens que a distribuição  $Kw$  tem sobre a distribuição beta: a constante de normalização, fórmulas explícitas para a distribuição e funções quantis que não envolve qualquer função especial; uma fórmula para geração de variáveis aleatórias; fórmulas explícitas para os  $L$ -momentos e mais fórmulas para momentos de estatísticas de ordem. Além disso, segundo Jones, a distribuição beta tem as seguintes vantagens sobre a distribuição  $Kw$ : fórmulas para momentos e para função geradora dos momentos; uma sub-família uniparamétrica de distribuições simétricas; estimativas simples para os momentos e várias maneiras de gerar a distribuição por meio de processos físicos.

A partir das obras de Eugene et al. (2002) e Jones (2008), Cordeiro e Castro (2010) construíram uma nova classe de distribuições  $Kw$  generalizadas ( $Kw$ -G). Considere a fda  $G(x)$  arbitrária, então a fda  $F(x)$  da distribuição  $Kw$ -G é definida

por

$$F(x) = 1 - \{1 - G(x)^a\}^b, \quad (5.2)$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois parâmetros adicionais, cujo papel é o de introduzir a assimetria e variar os pesos da cauda. Devido à função de distribuição tratada em (5.2), a distribuição *Kw*-G pode ser utilizada de forma bastante eficaz, mesmo que os dados sejam censurados. Correspondentemente, a função de densidade desta família de distribuições será dada por

$$f(x) = abg(x)G(x)^{a-1}\{1 - G(x)^a\}^{b-1}. \quad (5.3)$$

Enquanto que, a densidade da distribuição beta-G é dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)}g(x)G(x)^{a-1}\{1 - G(x)\}^{b-1}, \quad (5.4)$$

em que  $B(\cdot, \cdot)$  denota a função beta. A nova densidade em (5.3) tem uma vantagem sobre a classe de distribuição beta generalizada (Eugene et al. (2002)), uma vez que não envolve qualquer função especial. As distribuições *Kw* generalizadas especiais podem ser geradas como se segue: a distribuição *Kw*-normal (*KwN*) é obtida tomando  $G(x)$  na expressão (5.3) como sendo a função de distribuição da distribuição normal. Analogamente, a *Kw*-Weibull (*KwW*), *Kw*-gama (*KwGa*), *Kw*-Gumbel (*KwGu*) e o nosso novo caso *Kw*-Fréchet (*KwF*) são obtidas tomando  $G(x)$  como sendo a fda da Weibull, da Gamma, da Gumbel e da Fréchet, respectivamente. Assim, cada nova distribuição *Kw*-G pode ser obtida a partir de uma distribuição  $G$  especificada. A distribuição *Kw* é um caso especial da distribuição *Kw*-G com  $G$  sendo a distribuição uniforme em  $[0, 1]$ . Um dos principais benefícios da família *Kw* de distribuições generalizadas é a sua capacidade para ajustar dados assimétricos que não podem ser adequadamente ajustados por distribuições usuais.

## 5.2 Distribuições Especias *Kw* Generalizada

A família *Kw*-G com densidade (5.3) permite uma maior flexibilidade das suas caudas e pode ser aplicada em muitas áreas da engenharia e biologia. A densidade

(5.3) será mais tratável quando a fda  $G(x)$  e a fdp  $g(x)$  tiverem expressões analíticas simples. Agora, vamos discutir algumas distribuições Kw especiais generalizadas.

### 5.2.1 *Kw-normal*

A densidade *KwN* é obtida a partir expressão (5.3) tomando  $G(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  como sendo a fda e a fdp da distribuição Normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , de modo que

$$f(x) = \frac{ab}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{a-1} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{b-1},$$

em que  $x \in \Re$ ,  $\mu \in \Re$  são parâmetros de locação,  $\sigma > 0$  é um parâmetro de escala,  $a, b > 0$  são parâmetros de forma, e  $\phi(\cdot)$  e  $\Phi(\cdot)$  são a fdp e a fda da distribuição normal padrão, respectivamente.

### 5.2.2 *Kw-Weibull*

A fda da distribuição Weibull com parâmetros  $\beta > 0$  e  $c > 0$  é  $G(x) = 1 - \exp\{-(\beta x)^c\}$  para  $x > 0$ . Correspondentemente, a densidade da distribuição *Kw-Weibull*, digamos  $KwW(a, b, c, \beta)$ , reduz a

$$f(x) = abc\beta^c x^{c-1} e^{-(\beta x)^c} [1 - e^{-(\beta x)^c}]^{a-1} \{1 - [1 - e^{-(\beta x)^c}]^a\}^{b-1}, x, a, b, c, \beta > 0.$$

Se  $c = 1$ , obtém-se a distribuição *Kw-exponencial*. A distribuição  $KwW(1, b, 1, \beta)$  corresponde a distribuição exponencial com parâmetro  $\beta^* = b\beta$ .

### 5.2.3 *Kw-gama*

Seja  $Y$  uma variável aleatória gama com fda dada por  $G(y) = \Gamma_{\beta y}(\alpha)/\Gamma(\alpha)$  para  $y, \alpha, \beta > 0$ , em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama e  $\Gamma_z(\alpha) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  é a função gama incompleta. A densidade de uma variável aleatória  $X$  seguindo uma distribuição *KwGa*, digamos  $X \sim KwGa(a, b, \beta, \alpha)$ , pode ser expressa por

$$f(x) = \frac{abc\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)^{ab}} \Gamma_{\beta x}(\alpha)^{a-1} \{\Gamma(\alpha)^a - \Gamma_{\beta x}(\alpha)^a\}^{b-1}, x, \beta, \alpha, a, b > 0.$$

Para  $\alpha = 1$ , obtém-se a distribuição *Kw*-exponencial. Note que  $KwGa(1, b, \beta, 1)$  é a distribuição exponencial com parâmetro  $\beta^* = b\beta$ .

#### 5.2.4 *Kw*-Gumbel

As funções densidade de distribuição da distribuição Gumbel com o parâmetro de locação  $\mu > 0$  e parâmetro de escala  $\sigma > 0$  são dadas por

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ \frac{x - \mu}{\sigma} - \exp \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, x > 0,$$

e

$$G(x) = 1 - \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}.$$

A média e a variância são iguais a  $\mu - \gamma\sigma$  e  $\pi^2\sigma^2/6$ , respectivamente, em que  $\gamma$  é a constante de Euler ( $\gamma \approx 0.57722$ ). Inserindo estas expressões na Equação (5.3) obtemos a distribuição *KwGu*, denotamos *KwGu* ( $a, b, \mu, \sigma$ ).

#### 5.2.5 *Kw* Gaussiana inversa

Adotando a parametrização em Stasinopoulos e Rigby (2007), a fdp e a fda da distribuição Gaussiana inversa são dadas, respectivamente, por

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^3}} \exp \left\{ - \frac{1}{2\mu^2\sigma^2 x} (x - \mu)^2 \right\}, x, \mu, \sigma > 0$$

e

$$G(x) = \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}} \left( \frac{x}{\mu} - 1 \right) \right] + \exp \left( \frac{2}{\mu\sigma^2} \right) \Phi \left[ - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}} \left( \frac{x}{\mu} + 1 \right) \right].$$

Substituindo estas expressões na Equação (5.3) obtemos a distribuição *Kw*-inversa Gaussiana, digamos  $KwIG(a, b, \mu, \sigma^2)$ .

### 5.2.6 *Kw* Fréchet

A densidade e a fda da *Kw* Fréchet é obtida a partir das expressões (5.2) e (5.3) tomando  $G(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  como sendo a fda e a fdp da distribuição Fréchet, então

$$F(x) = 1 - \{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^b, x > 0, \quad (5.5)$$

e

$$f(x) = ab\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} \{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^{b-1}, x > 0, \quad (5.6)$$

em que  $\sigma > 0$  é o parâmetro de escala e  $\lambda > 0$  é o parâmetro de forma.

A função taxa de falha para a distribuição *Kw*-Fréchet é dada por,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{ab\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} \{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^{b-1}}{1 - [1 - \{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^b]} \\ &= \frac{ab\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda} \{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^{b-1}}{\{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}^b} \\ &= \frac{ab\lambda\sigma^\lambda x^{-(\lambda+1)} e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}}{\{1 - e^{-a(\frac{\sigma}{x})^\lambda}\}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A representação gráfica da função densidade das distribuições *Kw*-Normal ( $a, b, \mu = 0, \sigma^2 = 1$ ) e *Kw*-Fréchet ( $a, b, \lambda = 1, \sigma = 2$ ), para alguns valores de  $a$  e  $b$  são dadas na Figura (5.1).

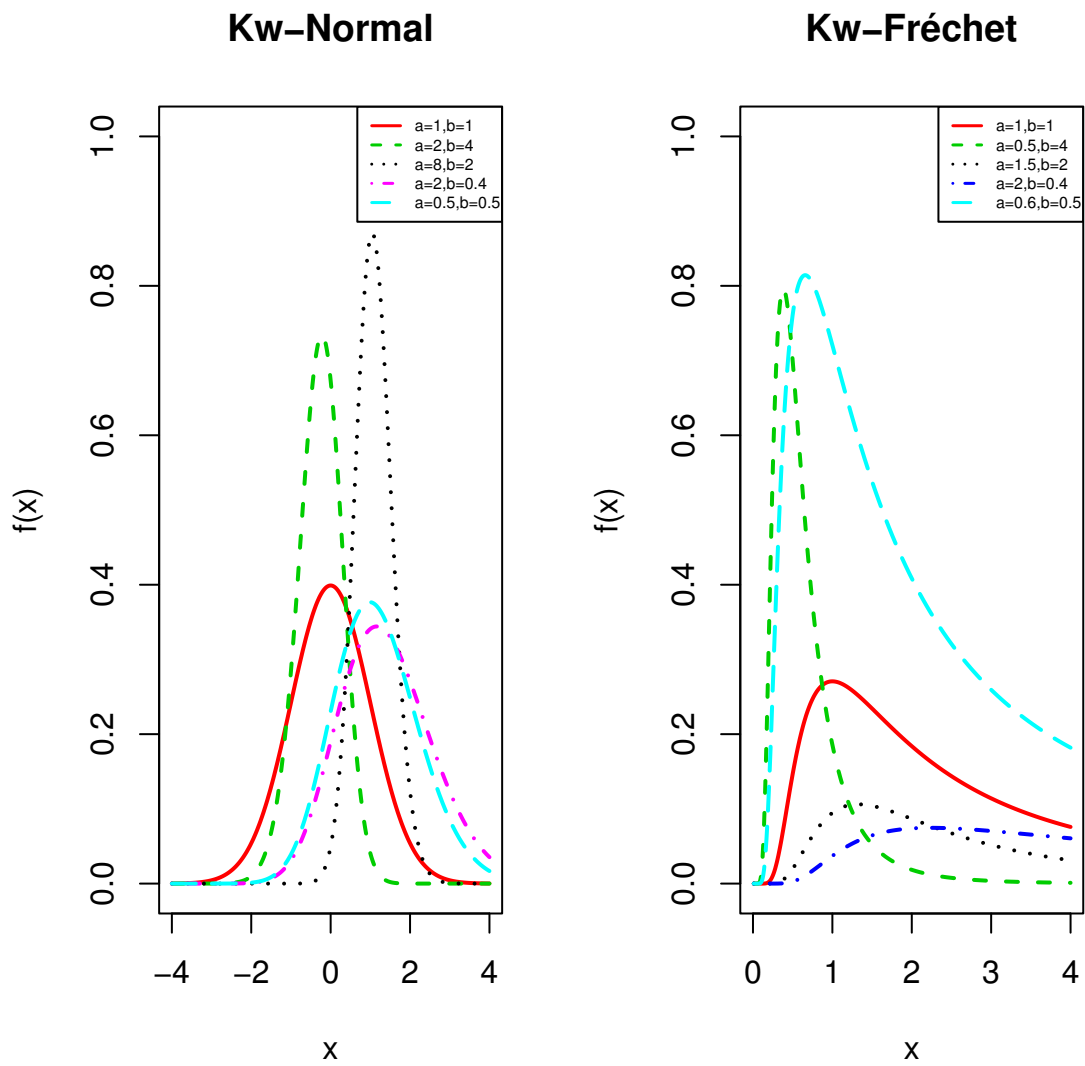


Figura 5.1: Função densidade de probabilidade das distribuições *Kw*-Normal e *Kw*-Fréchet para alguns valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

### 5.3 Uma expansão geral para a função de densidade

Para  $b > 0$  real não-inteiro, usamos a seguinte representação em série

$$\{1 - G(x)^a\}^{b-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{b-1}{i} G(x)^{ai},$$

em que o coeficiente binomial é definido para qualquer número real. A partir da expansão acima e a expressão (5.3), podemos escrever a densidade  $Kw$ -G, como segue

$$f(x) = g(x) \sum_{i=0}^{\infty} w_i (G(x))^{a(i+1)-1}, \quad (5.8)$$

em que os coeficientes são

$$w_i = w_i(a, b) = (-1)^i ab \binom{b-1}{i}$$

e  $\sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1$ .

Se  $b$  é um número inteiro, o índice  $i$  na soma anterior para em  $b - 1$ . Se  $a$  é um número inteiro, na expressão (5.8) temos que, a densidade da distribuição  $Kw$ -G é apenas igual à densidade da distribuição G, multiplicado por uma série de potência infinita ponderada de  $fda(s)$  da distribuição G. Caso contrário, se  $a$  for não inteiro, podemos expandir  $G(x)^{a(i+1)-1}$  como segue

$$G(x)^{a(i+1)-1} = [1 - \{1 - G(x)\}]^{a(i+1)-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a(i+1)-1}{j} \{1 - G(x)\}^j$$

e assim,

$$G(x)^{a(i+1)-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j (-1)^{j+r} \binom{a(i+1)-1}{j} \binom{j}{r} G(x)^r.$$

Portanto, a densidade de  $f(x)$  na expressão (5.3) pode ser reescrita sob a forma

$$f(x) = g(x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j w_{i,j,r} G(x)^r, \quad (5.9)$$

em que os coeficientes são

$$w_{i,j,r} = w_{i,j,r}(a, b) = (-1)^{i+j+r} ab \binom{a(i+1)-1}{j} \binom{b-1}{i} \binom{j}{r}, \quad (5.10)$$

$$\text{com } \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j w_{i,j,r} = 1.$$

## 5.4 Fórmula Geral para os momentos

O  $r$ -ésimo momento para a distribuição  $Kw-G$  pode ser expresso como uma soma infinita ponderada de ordem  $(s, r)$  obtida da expressão (5.8), se  $a$  é um número inteiro e da expressão (5.9) se  $a$  é um número não-inteiro. Assumindo  $Y$  e  $X$  com distribuições  $G$  e  $Kw-G$ , respectivamente, o  $r$ -ésimo momento de  $X$ , digamos  $\mu'_s$ , pode ser expresso em termos do elemento  $(s, r)$  da soma infinita ponderada  $\tau_{s,r} = E\{Y^s G(Y)^r\}$  de  $Y$  para  $r = 0, 1, \dots$ , tal como definido por Greenwood et al. (1979). Para  $a$  inteiro, obtemos

$$\mu'_s = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \tau_{s, a(r+1)-1}, \quad (5.11)$$

enquanto que para  $a$  real não inteiro, podemos escrever a partir da expressão (5.9)

$$\mu'_s = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j w_{i,j,r} \tau_{s,r}. \quad (5.12)$$

## 5.5 Estatísticas de ordem

A densidade  $f_{i:n}(x)$  para a  $i$ -ésima estatística de ordem, com  $i = 1, \dots, n$ , para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d)  $X_1, \dots, X_n$  de uma distribuição  $Kw-G$ , é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} F(x)^{i-1} \{1-F(x)\}^{n-i}.$$

Substituindo as expressões (5.2) e (5.3), obtemos



$$f_{i:n}(x) = \frac{ab}{B(i, n-i+1)} g(x) G(x)^{i-1} [1 - \{1 - G(x)^a\}^b] \{1 - G(x)^a\}^{b(n-i+1)-1},$$

em que  $B(.,.)$  é a função beta, e portanto

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1}. \quad (5.13)$$

Apresentamos, agora, uma expressão para a densidade das estatísticas de ordem da distribuição  $Kw - G$ . Este resultado permite obtermos os momentos comuns das estatísticas de ordem da distribuição  $Kw - G$ , como somas infinitas ponderadas da distribuição  $G$ . A partir da expressão (5.2), obtemos uma expansão para a  $F(x)^{i+j-1}$  que é dada por

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \{1 - G(x)^a\}^{kb}.$$

Usando a expansão em série para  $\{1 - G(x)^a\}^{kb}$  temos

$$\{1 - G(x)^a\}^{kb} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} G(x)^{ma},$$

e, em seguida, a partir da expressão,

$$G(x)^q = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty} (-1)^{r+j} \binom{q}{j} \binom{j}{r} G(x)^r,$$

obtemos

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} v_r(a, b, k) G(x)^r, \quad (5.14)$$

em que os coeficientes  $v_r(a, b, k)$  são dados por

$$v_r(a, b, k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} s_r(ma),$$

e as quantidades  $s_r(ma)$  são obtidas a partir da seguinte expressão

$$s_r(q) = \sum_{j=r}^{\infty} (-1)^{r+j} \binom{q}{j} \binom{j}{r}.$$

Através do intercâmbio das somas na expressão (5.14), temos que

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{r,i+j-1}(a,b) G(x)^k,$$

em que os coeficientes  $p_{r,u}(a,b)$  são calculados por

$$p_{r,u}(a,b) = \sum_{k=0}^u \binom{u}{k} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+1} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r}, \quad (5.15)$$

para  $r, u = 0, 1, \dots$

Se  $a$  é um número real não-inteiro, inserindo as expressões (5.9) e (5.14) na expressão (5.13) e fazendo a mudança de índices, podemos reescrever a densidade  $f_{i:n}(x)$  da seguinte maneira

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{u,v,t=0}^{\infty} \sum_{t=0}^v \omega_{u,v,t} p_{r,i+j-1}(a,b) G(x)^{r+t}. \quad (5.16)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1} \\ &= \frac{g(x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j w_{i,j,r} G(x)^r}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} v_r(a,b,k) G(x)^k \\ &= \frac{g(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{u,v,t=0}^{\infty} \sum_{t=0}^v \omega_{u,v,t} p_{r,i+j-1}(a,b) G(x)^{r+t}. \end{aligned}$$

Se  $a$  é um número real inteiro, substituindo as expressões (5.8) e (5.13) na expressão (5.14), podemos reescrever a densidade  $f_{i:n}(x)$  da seguinte maneira

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{r,u=0}^{\infty} \omega_u p_{r,i+j-1}(a, b) G(x)^{a(u+1)+r-1}. \quad (5.17)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1} \\ &= \frac{g(x) \sum_{i=0}^{\infty} w_i G(x)^{a(i+1)-1}}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} v_r(a, b, k) G(x)^r \\ &= \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{r,u=0}^{\infty} \omega_u p_{r,i+j-1}(a, b) G(x)^{a(u+1)+r-1}. \end{aligned}$$

## 5.6 Inferência

**Definição 5.6.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  com função de densidade (ou de probabilidade)  $f(x|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de  $\theta$  correspondente à amostra aleatória observada é dada por*

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

**Definição 5.6.2** *O estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  é o valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; \mathbf{x})$ . O logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\theta$  é denotado por*

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$

Seja  $\gamma$  um vetor de parâmetros  $p$ -dimensional da distribuição em estudo com expressões (5.2) e (5.3). Consideramos variáveis aleatórias independentes  $X_1, \dots, X_n$ ,

em que cada  $X_i$  segue uma distribuição  $Kw - G$  com vetor de parâmetros  $\theta = (a, b, \gamma)$ . A função de log-verossimilhança  $\ell = \ell(\theta)$  para os parâmetros do modelo são obtidos a partir da expressão (5.3). De fato, aplicando o logaritmo na expressão (5.3) temos,

$$\ell(\theta) = n\{\log(a) + \log(b)\} + \sum_{i=1}^n \log\{g(x_i; \gamma)\} + (a-1) \sum_{i=1}^n \log\{G(x_i; \gamma)\} + (b-1) \sum_{i=1}^n \log\{1 - G(x_i; \gamma)^a\}.$$

Os elementos do vetor escore são obtidos, derivando a função log-verossimilhança em relação a cada parâmetro, então

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \log\{G(x_i, \gamma)\} \left\{ 1 - \frac{(b-1)G(x_i; \gamma)^a}{1 - G(x_i; \gamma)^a} \right\},$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \log\{1 - G(x_i, \gamma)^a\}$$

e

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{g(x_i; \gamma)} \frac{\partial g(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} + \frac{1}{G(x_i, \gamma)} \frac{\partial G(x_i; \gamma)}{\partial \gamma_j} \left\{ 1 - \frac{a(b-1)}{G(x_i; \gamma)^{-a} - 1} \right\} \right],$$

para  $j = 1, \dots, p$ . A maximização da função log-verossimilhança acima pode ser realizada usando o programa R versão 2.15. A distribuição assintótica do estimador  $\hat{\theta}$  é normal multivariada com vetor de média  $\theta$  e matriz de covariância que pode ser estimada por  $\{-\partial^2 \ell(\theta) / \partial \theta \partial \theta^T\}^{-1}$  avaliada em  $\theta = \hat{\theta}$ .

Consideremos duas distribuições  $Kw - G$ , então:

A distribuição  $Kw-G_A$  com parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_r$  e com função logaritmica de máxima verossimilhança igual a  $-2\ell(\hat{\theta}_A)$  e  $Kw-G_B$  com parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_r, \theta_{r+1}, \dots, \theta_p$  e com função logaritmica de máxima verossimilhança igual a  $-2\ell(\hat{\theta}_B)$ . Para testar a distribuição  $Kw-G_A$  contra  $Kw-G_B$  utilizamos a estatística da razão de verossimilhança (RV), igual a  $-2[\ell(\hat{\theta}_A) - \ell(\hat{\theta}_B)]$  e tem distribuição assintótica  $\chi_{p-r}^2$ . Para testar a distribuição que melhor se ajusta aos dados utilizamos o método AIC dado por  $-2\ell(\hat{\theta}) + 2p^*$ , em que  $p^*$  é o número de parâmetros do modelo. A distribuição com menor valor de AIC é considerada como o melhor modelo para descrever um determinado conjunto de dados.

## 5.7 Aplicação

Nesta seção, nós ajustamos a distribuição  $Kw$ -F para um conjunto de dados sem censura definida por Nichols e Padgett (2006) composto de 100 observações sobre a resistência de fibras de carbono (em Gba):

Tabela 5.1. Os dados sobre a resistência de fibras de carbono (em Gba)

3,7	2,74	2,73	2,5	3,6	3,11	3,27	2,87	1,47	3,11	4,42	2,41	3,19
3,22	1,69	3,28	3,09	1,87	3,15	4,9	3,75	2,43	2,95	2,97	3,39	2,96
2,53	2,67	2,93	3,22	3,39	2,81	4,2	3,33	2,55	3,31	3,31	2,85	2,56
3,56	3,15	2,35	2,55	2,59	2,38	2,81	2,77	2,17	2,83	1,92	1,41	3,68
2,97	1,36	0,98	2,76	4,91	3,68	1,84	1,59	3,19	1,57	0,81	5,56	1,73
1,59	2	1,22	1,12	1,71	2,17	1,17	5,08	2,48	1,18	3,51	2,17	1,69
1,25	4,38	1,84	0,39	3,68	2,48	0,85	1,61	2,79	4,7	2,03	1,8	1,57
1,08	2,03	1,61	2,12	1,89	2,88	2,82	2,05	3,65				

Os estimadores de máxima verossimilhança e a função log-verossimilhança maximizada para a distribuição  $Kw$ -Fréchet são

$$\hat{a} = 2,05, \hat{b} = 9,43, \hat{\lambda} = 0,83, \hat{\sigma} = 3,512, \hat{\ell}_{Kw-F} = -129,0104,$$

Considerando as distribuições Beta Fréchet e Fréchet obtemos

$$\hat{a} = 0,4108, \hat{b} = 125,1891, \hat{\lambda} = 0,7496, \hat{\sigma} = 31,4556, \hat{\ell}_{BF} = -142,9640,$$

e

$$\hat{\lambda} = 1,7690, \hat{\sigma} = 1,8916, \hat{\ell}_{Fr} = -173,1440,$$

respectivamente.

Fazendo o cálculo do AIC para as distribuições, obtivemos para a distribuição Fréchet, AIC = 350,288, para a Beta Fréchet, AIC = 293,928 e para a  $Kw$  Fréchet AIC = 266,0208. Como podemos ver a partir do AIC o modelo  $Kw$  Fréchet tem o menor valor entre os três modelos ajustados e, portanto, o modelo  $Kw$ -Fréchet se ajusta melhor aos dados.

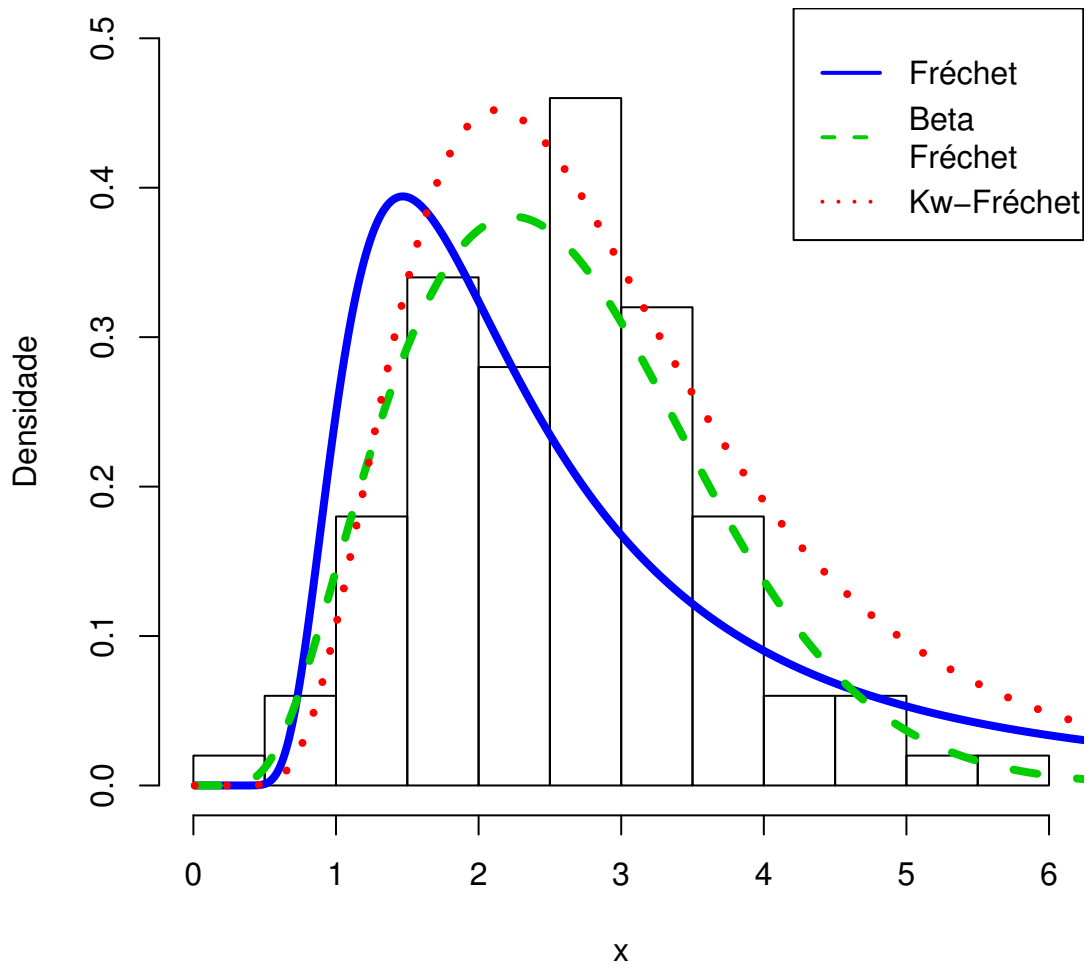


Figura 5.2: Histograma e as fdps das distribuições Fréchet, Beta Fréchet e Kw-Fréchet.

A Figura (5.2) ilustra as fdps das distribuições Fréchet, Beta Fréchet e  $Kw$  Fréchet, para o conjunto de dados sobre a resistência de fibras de carbono (em Gba). Fazendo uma análise do gráfico, na Figura (5.2), observamos que pelo fato de  $a$  e  $b$  serem dois parâmetros, cujo papel é de introduzir assimetria e variação do peso da cauda, respectivamente a distribuição  $Kw$ -Fréchet é mais assimétrica a esquerda, com caudas mais leves e proporciona um melhor ajuste do que os outros dois submodelos para o conjunto de dados.

# Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos algumas famílias de distribuições de probabilidade generalizadas.

No capítulo 1, apresentamos a distribuição Beta Pareto (DBP). Discutimos algumas propriedades desta distribuição, bem como expressões para a média, desvio médio, variância, curtose e entropia. O método da máxima verossimilhança foi utilizado para estimar os parâmetros da DBP. Em uma aplicação aos dados de inundação, a DPB proporciona um ajuste significativamente melhor do que a Pareto e a distribuição Weibull com três parâmetros. A DPG como discutido por Choulakian e Stephens (2001) foi desenvolvida especificamente para a modelagem das excedências sobre o nível limiar no controle de inundações. A DBP não foi desenvolvida especificamente para a modelagem dos dados sobre "pico ao longo do limiar". No entanto, a versatilidade da DBP (que tem dois parâmetros adicionais) permite que ela se encaixe de forma adequada a esses tipos de dados. O resultado, neste trabalho, indica que a DBP apresenta ser um bom modelo no manuseamento de dados com valores extremos. Assim, podemos observar que outros estudos são necessários para explorar as aplicações da DBP.

No capítulo 2, estudamos a distribuição Beta Exponencial Generalizada (BEG), motivada pela ampla utilização da distribuição Exponencial, e também pelo fato de que essa generalização proporciona maior flexibilidade para analisar situações mais complexas. De fato, a distribuição BEG representa uma generalização de algumas distribuições, tais como, a distribuição Beta Exponencial discutida por Nadarajah e Kotz (2005) e a distribuição Exponencial Generalizada introduzida por Gupta e Kundu (1999). Fornecemos um tratamento matemático dessa distribuição incluindo as densidades das estatísticas de ordem. A função densidade da distribuição Beta Exponencial Generalizada pode ser expressa como uma mistura de densidades da

distribuição EG. Para obtermos estas densidade, derivamos algumas expansões para a fda, fdp e fgm da distribuição BEG. Neste capítulo, também obtemos a fdp das estatísticas de ordem que pode ser expressa em termos de uma combinação linear da densidade da BEG. Apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança e obtemos a matriz de informação de Fisher. Uma aplicação da distribuição BEG é exposta para mostrar que esta distribuição pode ter o melhor ajuste em relação aos outros submodelos discutidos.

No capítulo 3, trabalhamos com a Beta Weibull Modificada (BWM). Essa distribuição permite testar a qualidade do ajuste das várias distribuições conhecidas, o que não é possível na maioria dos modelos generalizados utilizados. O novo modelo é muito mais flexível do que a Weibull Exponencial (WE), Weibull modificado (WM) e a Weibull Modificada Generalizada(WMG) submodelos propostos, recentemente. A nova distribuição é capaz de melhorar a modelagem de dados. Além disso, permite testar a qualidade do ajuste de várias distribuições conhecidas, como submodelos. Para este novo modelo, alguns métodos paramétricos, como a estimação da máxima verossimilhança e o teste da razão verossimilhança é mais eficaz quando aplicado na análise de dados de sobrevivência. Apresentamos um tratamento matemático da distribuição, incluindo a densidade das estatísticas de ordem e expansões infinitas para o  $r$ -ésimo momento.

No capítulo 4, apresentamos a distribuição Beta Fréchet (BF). Ela unifica algumas distribuições anteriormente, proporcionando uma visão geral destas distribuições para estudos teóricos. A distribuição BF é motivada pela ampla utilização da distribuição de Fréchet, e também pelo fato de que a generalização fornece mais flexibilidade para análise de dados assimétricos. A densidade da BF pode ser expressa como uma mistura de densidades Fréchet, que permite obter algumas expansões para a fda e para os  $L$ -momentos. A fdp e as estatísticas de ordem da BF também podem ser expressas em termos de uma combinação linear de densidades de Fréchet. Neste capítulo, obtivemos as estimativas máxima verossimilhança e a matriz de informação. Para conjuntos de dados que são fortemente dispersos e / ou fortemente assimétricos o benefício da distribuição BF comparado as distribuições FE e Fréchet é mais evidente.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos nossa contribuição teórica para esta dissertação, a distribuição  $Kw$ -Fréchet. Esta distribuição foi baseada nas distribuições



Fréchet e de Kumaraswamy. Apresentamos algumas propriedades matemáticas das distribuições  $Kw$ -G. Os momentos da distribuição  $Kw$ -G pode ser expressos explicitamente em termos de somas infinitas ponderadas da distribuição G. O mesmo acontece para os momentos das estatísticas de ordem das distribuições  $Kw$ -G. Discutimos a estimação dos parâmetros e a inferência dos parâmetros, em que observamos que a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição  $Kw$ -G é muito mais simples do que das distribuições beta generalizadas. Uma aplicação da nova família de distribuições para dados reais foi apresentada para mostrar a viabilidade da distribuição  $Kw$ -Fréchet.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alperovich, G. (1993). An explanatory model of city-size distribution: Evidence from cross-country data. *Urban Stud*, **30**, 1591-1601.
- [2] Aban, I.B., Meerschaert, M.M. e Panorska, A.K. (2006). Parameter estimation for the truncated Pareto distribution. *J.Am.Statist. Assoc.*, **101**, 270-277.
- [3] Akinsete, Alfred, Famoye, Felix e Lee, Carl (2008). The beta-Pareto distribution. *J. Statistics Theory Appl.*, **42**, 547-563.
- [4] Aarset, MV (1987). How to identify bathtub hazard rate. *IEEE Trans Reliab*,**36**,106-108.
- [5] Burroughs, S.M. e Tebbens, S.F. (2001). Upper-truncated power law distributions.*Fractals*, **9**, 209-222.
- [6] Barakat, HM, Abdelkader, YH (2004). Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables. *Stat Methods Appl*,**13**,15-26.
- [7] Barreto Souza, Wagner, Santos, Alessandro H.S. e Cordeiro, Gauss M.(2010). The beta generalized exponential distribution. *J. of Statist. Computation and Simulation*, **80**, 159-172.
- [8] Barreto Souza, Wagner, Simas, Alessandro B. e Cordeiro, Gauss M.(2011). Some Results for Beta Fréchet Distribution. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 798-811.
- [9] Bebbington, M, Lai, CD, Zitikis, R (2007). A flexible Weibull extension.*Reliab Eng Syst Saf*, **92**, 719-726.
- [10] Choulakian,V. and Stephens, M.A. (2001). Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution.*Technometrics*, **43**, 478-484.

- [11] Carrasco, JMF, Ortega, EMM, Cordeiro, GM (2008). A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling. *Comput Stat Data Anal*, **53**,450-462.
- [12] Cordeiro, Gauss M. e Castro, Mário.(2010). A new family of generalized distributions. *J. of Statist. Computation and Simulation*, **iFirst**, 1-16.
- [13] Cox, C, Chu, H, Schneider, MF, Muoz, A (2007). Tutorial in biostatistics: parametric survival analysis and taxonomy of hazard functions for the generalized gamma distribution. *Stat Med*, **26**,4352-4374.
- [14] Cox, C (2008). The generalized F distribution: an umbrella for parametric survival analysis. *Stat Med*, **27**,4301-4312.
- [15] Dufresne, D. (2005). Fitting combination of exponentials to probability distribution. *Center for Actuarial Studies*, 1-23.
- [16] Devore, J.L. (2004). *Probability and Statistic for Engineering and the Sciences*, Duxbury, Ontario.
- [17] Eugene, N., Lee, C., Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Commun.Stat.Theory Methods*, **31**, 497-512.
- [18] Fofack, H. e Nolan, J.P. (1999). Tail behavior, modes and other characteristics of stable distribution. *Extremes*, **2**, 39-58.
- [19] Famoye, F., Lee, C. e Olumolade, O. (2005). The beta-Weibull distribution. *J. Statist*, **4**, 121-136.
- [20] Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M. (2000). *Series, and Products*. Academic Press, San Diego.
- [21] Gupta, R.D. e Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and Weibull distributions. *Biom. J.* **43**, 117-130.
- [22] Gupta, R.D. e Kundu, D. (1999). Generalized exponential distribution. *Aust. NZ J.Stat*, **41**, 173-188.
- [23] Gupta, A.K. e Nadarajah, S. (2004). On the moments of the beta normal distribution. *Commun.Stat.Theory Methods*, **33**, 1-13.

- [24] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R (1979). Probability weighted moments definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resour. Res.*, **15**, 1049-1054.
- [25] Hosking, J.R.M. (1990). L-moments: analysis and estimation of distribution using linear combinations of order statistics. *J.R.Stat Soc. B*, **52**, 105-124.
- [26] Hogg, R.V., McKen, J.W. e Craig, A.T. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson Prentice-Hall, New Jersey.
- [27] Johnson, N.L., Kotz, S. e Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distribution*. 2.ed. Wiley.
- [28] Jones, SM.C. (2008). A beta-type distribution with some tractability advantages. *Stat. Methodol.*, **6**, 70-81.
- [29] Krishnaji, N. (1970). Characterization of the Pareto distribution through a model of underreported incomes. *Ecometrica*, (**38**), 251-255.
- [30] Kumaraswamy, P. (1980). Generalized probability density-function for double-bounded random-processes. *SJ. Hydrol.*, **462**, 79-88.
- [31] Kundu, D, Rakab, MZ (2005). Generalized Rayleid distribution: different methods of estimation. *Comput Stat Data Anal.*, **49**, 187-200.
- [32] Levy, M. e Levy, H. (2003). Investment talent and the Pareto wealth distribution: Theoretical and experimental analysis. *Rev. Econ. Statist*, **85**, 709-725.
- [33] Lai CD, Xie M, Murthy (2003). A modified Weibull distribution. *Trans Reliab*, **52**, 33-37.
- [34] Lee, C., Famoye, F. e Olumolade, O. (2007). Beta-Weibull distribution: some properties and applications to censored data. *J.Mod. Appl.Stat.Method*, **6**, 173-186.
- [35] Mudholkar, G.S. e Huston, A.D. (1996). The exponentiated Weibull family: Some properties and a flood data application. *Commum.Statist.Theory Methods*, **23**, 1149-1171.

- [36] Mudholkar, G.S e Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull family for analysing bathtub failure data. *IEEE Trans.Reliab*, **42**, 299-302.
- [37] Mudholkar, G.S, Srivastava, D.K. e Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family. *Technometrics*, **37** 436-445.
- [38] Mudholkar, G.S, Srivastava, D.K. e Hutson, A.D. (1996). The exponentiated Weibull family:some properties and a flood data application. *Commun. Stat.Theory Methods*, **25**, 3059-3083.
- [39] Nassar, M.M. e Eissa, F.H. (2003). On the exponentiated Weibull.*Commun. Stat.Theory Methods*, **32**, 1317-1336.
- [40] Nadarajah, S. e Kotz, S. (2006). The exponentiated type distribution. *Acta Appl.Math*, **92**, 97-111.
- [41] Nadarajah, S. e Kotz, S. (2000). Extreme Value Distributions: Theory and Applications.The exponentiated type distribution. *London: Imperial College Press*.
- [42] Nadarajah, S. e Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Math. Probl. Eng.*, **10**, 323-332.
- [43] Nadarajah, S. e Kotz, S. (2005). The beta exponential distribution. *Reliab.Eng.Syst.Saf*, **91**, 689-697.
- [44] Nadarajah, S. e Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability Eng.Syst.Safety*, **91**,689-697.
- [45] Nadarajah, S. e Gupta, A.K. (2004). The beta Fréchet distribution. *Far East J. Theor Stat*, **14**, 15-24.
- [46] Newman, M.E.J. (2005). Power laws,Pareto distribution and Zipf's law. *Contemp. Phys*, **46**, 323-351.
- [47] Nelson, W.(1990). Accelerated life testing: statistical models, data analysis and test plans. *Wiley, New York*, .
- [48] Nichols, M.D.,Padgett, W. J. (2006). A bootstrap control chart for Weibull percentiles. *Qual. Reliab. Eng. Int.*, **22**, 141-151.

- [49] Pham, H., Lai, CD (2007). On recent generalizations of the Weibull distribution. *IEEE Trans Reliab*, **56**, 454-458.
- [50] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Ann.Statist*, **3**, 119-131.
- [51] Reed, W.J. (2002). On the rank-size distribution for human settlements. *J. Regional Sci.*, **42**, 1-17.
- [52] R Development Core Team.(2009).R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- [53] Stasinopoulos, D.M. e Rigby, R.A. (2007). Generalized additive models for location scale and shape (GAMLSS) in R. *J.Stat.Softw.*, **23**, 1-46.
- [54] Stasinopoulos, D.M. e Rigby, R.A. (2005). Generalized additive models for location scale and shape (with discussion).*Appl. Stat.*,**54**,507-554.
- [55] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech J.*, **27**, 379-432.
- [56] Smith, R.L. (2004). Extreme value analysis of environmental time series:An application to trend detection in ground-level ozone. *Statist. Sci*, **4**, 367-393.
- [57] Singh, K.P., Lee, C.M. e George, E.O. (1988). On generalized log-logistic model for censored survival data. *Biomet. J*, **30**, 843-850.
- [58] Smith, R.L., Naylor, J. C. (1987). A comparison of maximum likelihood and Bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution. *Appl. Statist*, **36**, 358-369.
- [59] Silva, Giovana O., Ortega, Edwin M. M. e Cordeiro, Gauss M. (2010). The beta modified Weibull distribution.*Lifetime Data Anal*, **16**, 409-430.
- [60] Xie, M, Lai, CD, (1995).Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function.*Reliab Eng Syst Saf*, **52**, 87-93.
- [61] Xie, M, Tang, Y, Goh, TN (2002). A modified Weibull extension with bathtub failure rate function.*Reliab Eng Syst Saf*, **76**, 279-285.
- [62] Zwillinger, D. e Kokoska, S. (2000). *Standard Probability and Statistics Tables and Formulae*. Chapman e Hall/CRC, Florida.

- [63] Weissten, E.W. (2003). *Incomplete beta function*. Available at Math World-A Wolfram Web Resource.
- [64] Wang, FK (2000). A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution.. *Reliab Eng Syst Saf*,**70**,305-312.