**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

# Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

**por**

**Luis Gonzaga Vieira Filho** †

**sob a orientação do**

**Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Este trabalho contou com apoio da UFRN.

# Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

**por**

**Luis Gonzaga Vieira Filho**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

**Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa**

**Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima**

**Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez**
**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

**Dezembro/2012**

# Resumo

Neste trabalho, usando uma adequada aplicação do chamado princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, obtemos um teorema tipo Bernstein para hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas no espaço produto $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Além disso, tratamos o caso em que tais hipersuperfícies são gráficos verticais.

Palavras chave: espaço produto Riemanniano, hipersuperfícies completas, curvatura média, gráfico vertical.

# Abstract

In this work, as suitable application of the so-called Omori-Yau generalized maximum principle, we obtain a Bernstein type theorem concerning to complete hypersurfaces with constant mean curvature immersed in the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Furthermore, we treat the case that such hypersurfaces are vertical graphs.

Keywords: Riemannian product space, complete hypersurface, mean curvature, vertical graph.

# Agradecimentos

Inicialmente, agradeço à minha esposa, Lourivalda, pelo apoio e por ter suportado minhas ausências e aos meus filhos Leonardo, Leandro e Lorena pelo incentivo.

Agradeço ao professor Marco Antonio Lázaro Velásquez pela orientação, amizade, incentivo e paciência.

Agradeço aos professores Henrique Fernandes de Lima e Antonio Fernando Pereira de Sousa por terem aceito o convite para participar da banca examinadora de minha dissertação.

Agradeço aos professores André Gustavo e José de Arimatéia pelo apoio quando cheguei a Campina Grande.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, em especial aos professores Angelo Roncalli e Antônio Brandão.

Agradeço aos colegas e amigos Fábio Reis e Luciano Cipriano por terem me suportado sob o mesmo teto.

Aos colegas Romildo, Patrício, Alex, Nancy, Débora, Elizabete, Arthur, Brito, Claudemir, Jogli, Emanuela(Manu), Antônio Marcos(Pajé), Michel, Marcos e Fabrício pela companhia e cumplicidade no dia a dia.

À secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, Andrezza Freitas. A David, Sóstenes, Suênia, Renato, Severina(Dona Du) e aos demais funcionários da UAME.

Aos colegas do Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, do Centro de Ensino Superior do Seridó da UFRN por terem permitido meu afastamento, em especial aos colegas Adriano Thiago e Luciano Barros pelo incentivo.

*À vida!*

# Sumário

# Introdução

Neste trabalho estudamos hipersuperfícies com curvatura média constante imersas no produto Riemanniano $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, onde $\mathbb{H}^n$ é o espaço hiperbólico $n$-dimensional, o qual é o modelo para as variedades de curvatura seccional constante negativa.

O estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante imersas em uma variedade Riemanniana, foi inicialmente feito para as hipersuperfícies mínimas, que são hipersuperfícies com curvatura média identicamente nula e foram alvo de diversos trabalhos de pesquisa, iniciados em 1915, quando N.S. Bernstein provou que os únicos gráficos inteiros e mínimos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Posteriormente, J. Simons [13] generalizou o resultado de Bernstein para gráficos inteiros e mínimos imersos em $\mathbb{R}^{n+1}$, quando $n \leq 7$ e, em seguida, E. Bombieri, E. De Giorgi e E. Giusti [4] mostraram que o resultado não é válido para $n > 7$. Mas os trabalhos não pararam por aí, por exemplo, em [12], H. Rosenberg provou uma extensão do teorema de Bernstein. De fato, Rosenberg provou que se $M^2$ é uma superfície com curvatura Gaussiana não negativa, um gráfico mínimo inteiro em $\mathbb{R} \times M^2$ é totalmente geodésico. Neste caso, ou o gráfico é um slice ou $M^2$ é isométrica a $\mathbb{R}^2$ e o gráfico é um plano. Em [1], L. J. Alías, M. Dajczer e J. Ripoll generalizaram o resultado de Rosenberg para gráficos inteiros, com curvatura média constante, imersos em ambientes Riemannianos que têm curvatura de Ricci não negativa e um campo de Killing globalmente definido.

Em [2], P. Bérard e R. Sa Earp descreveram as hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, usaram-nas como barreiras para provar a existência e caracterização de alguns gráficos verticais com curvatura média constante, e daí provaram resultados de simetria e unicidade de hipersuperfícies compactas, com curvatura média constante, cujo bordo é formado por uma ou duas subvariedades paralelas contidas em slices.

Mais recentemente, J.M. Espinar e H. Rosenberg, em [6], estudaram superfícies com curvatura média constante num produto $\mathbb{R} \times M^2$, onde $M^2$ é uma variedade Riemanniana completa. Assumindo que a função ângulo não muda de sinal, eles classificaram tais superfícies de acordo com o ínfimo da curvatura Gaussiana de suas projeções horizontais.

Nesta dissertação mostramos um teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ obtido recentemente por H.F. de Lima e U.L. Parente, em [7]. Mais precisamente, com ajuda do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, nosso objetivo é mostrar o seguinte (veja Teorema 3.2):

**Teorema.** *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental $A$ limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que a função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ de $\Sigma^n$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$, e que a função altura $h$ satisfaça*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

*para alguma constante $0 < \alpha < 1$. Então $\Sigma^n$ é um slice.*

Em particular, do último resultado obtemos a seguinte caracterização de slices (veja Corolário 3.3).

**Corolário.** *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental $A$ limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

*(a) A função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ de $\Sigma^n$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$.*

*(b) $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.*

*Se a função altura $h$ de $\Sigma^n$ é tal que*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2,$$

*para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então $\Sigma^n$ é um slice.*

Além disso, tratando o caso em que a hipersuperfície é um gráfico vertical, como consequência do Teorema acima, mostramos os seguintes resultados (veja Corolários 3.4 e 3.5, respectivamente).

**Corolário.** *Seja* $\Sigma^n(u)$ *um gráfico vertical completo em* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, *com segunda forma fundamental* $A$ *limitada e curvatura média* $H$ *constante. Suponhamos que a função ângulo* $\eta$ *de* $\Sigma^n(u)$ *verifique* $\eta \geq \delta > 0$, *para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários* $N$ *e para alguma constante* $\delta$. *Se a função* $u$ *satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2,$$

*então* $u \equiv t_o$ *para algum* $t_o \in \mathbb{R}$.

**Corolário.** *Seja* $\Sigma^n(u)$ *um gráfico vertical completo em* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, *com segunda forma fundamental limitada e curvatura média* $H$ *constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

(*a*) *A função ângulo* $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ *de* $\Sigma^n(u)$ *verifique* $\eta \geq \delta > 0$, *para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários* $N$ *e para alguma constante* $\delta$.

(*b*) $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.

*Se* $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, *então* $u \equiv t_0$ *para algum* $t_0 \in \mathbb{R}$.

Este trabalho apresenta-se com a seguinte organização. No Capítulo 1, estabelecemos as notações e fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2, fazemos um breve estudo de hipersuperfícies em uma variedade produto da forma $\mathbb{R} \times M^n$, onde $M^n$ é uma variedade Riemanniana conexa $n$-dimensional. O Capítulo 3, é dedicado ao estudo do resultado principal desta dissertação, o Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ descrito acima. Por fim, na Seção 3.3, estudamos o caso em que as hipersuperfícies são gráficos verticais em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$.

# Capítulo 1

# Elementos para Variedades Riemannianas

Para um estudo das variedades Riemannianas, apresentamos brevemente alguns conceitos úteis e necessários para o entendimento dos resultados principais descritos neste trabalho.

## 1.1 Campos de Vetores

**Definição 1.1.** *Um **campo de vetores** em uma variedade diferenciável $M^n$ é um ope- rador linear $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satisfazendo, para todas $f, g \in C^\infty(M)$, a regra de Leibniz*

$$X(fg) = fX(g) + gX(f),$$

*onde $C^\infty(M)$ denota o anel das funções de classe $C^\infty$ definidas em $M^n$.*

Denotaremos o conjunto dos campos de vetores em $M$ por $\mathfrak{X}(M)$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, é imediato que que $fX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dado por $(fX)(g) = fX(g)$, é um campo de vetores em $M$, de modo que $\mathfrak{X}(M)$ é um $C^\infty(M)$-módulo.

Fixemos $p \in M$. O **germe de funções** suaves $C^\infty(p)$ é o conjunto-quociente de $C^\infty(M)$ pela relação de equivalência que identifica $f, g \in C^\infty(M)$, caso $f = g$ em uma vizinhança aberta de $p$. Obviamente, $C^\infty(p)$ é um espaço vetorial. Um **vetor** $v$ em $p$ é um operador linear $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, tal que $v(fg) = fv(g) + gv(f)$, para todas

$f, g \in C^\infty(p)$. O conjunto dos vetores $v$ em $p$ é um espaço vetorial, o **espaço tangente** a $M$ em $p$, denotado por $T_pM$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$ são tais que $f = g$ em uma vizinhança aberta $U \subset M$ de $p$, pode-se mostrar que $X(f) = X(g)$. Assim, fica bem definido o vetor $X_p \in T_p(M)$ pela regra $X_p(f) = X(f)(p)$. Reciprocamente, dados $p \in M$ e $v \in T_p(M)$, é possível mostrar que existe um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

Dados uma curva diferenciável $c : I \to M$ e um e $t_0 \in I$, definimos o **vetor tangente** $c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ por

$$c'(t_0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\big|_{t=t_0}.$$

Tal vetor $c'(t_0)$ é o **vetor velocidade** de $c$ em $t_0$. Um **campo ao longo de** $c$ é a escolha, para cada $t \in I$, de um vetor $Y_t \in T_{c(t)}(M)$, tal que se $f \in C^\infty(M)$, então $t \mapsto Y_t(f)$ é diferenciável em $I$. É imediato que $t \mapsto c'(t)$ é um campo ao longo de $c$, o **campo velocidade** de $c$.

Se $\varphi : U \to \Omega$ é uma carta coordenada em $M$, definimos os **campos coordenados** $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathfrak{X}(U)$ por

$$\partial_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1}),$$

onde o segundo membro denota a derivação parcial ordinária em $\mathbb{R}^n$. Sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos a igualdade acima simplesmente pondo $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i.e., a composição de f com a inversa da carta coordenada, no segundo membro, ficará subentendida). Para $p \in U$, pode ser mostrado que $\{(\partial_1)_p, \ldots, (\partial_n)_p\}$ é uma base de $T_p(M)$, de modo que $\dim T_p(M) = n$.

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o **colchete** de $X$ e $Y$ como a aplicação $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dada para $f \in C^\infty(M)$ por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

É imediato verificar que $[X, Y]$ é um campo de vetores em $M$. É também claro que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ sempre que $\partial_i, \partial_j$ forem campos coordenados em $U \subset M$.

## 1.2 Tensores

**Definição 1.2.** *Dados inteiros $r, s \geq 0$, não ambos nulos e um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K$, chamamos de tensor do tipo (r,s) sobre $V$ a uma função $K$-multilinear*

$A : (V^*)^r \times V^s \to K$ .

De modo análogo, definimos o **campo de tensores** em uma variedade diferenciável $M^n$ como sendo uma aplicação $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$ multilinear no anel das funções $C^\infty(M)$, onde $\mathfrak{X}^*(M)$ denota o dual de $\mathfrak{X}(M)$. Denotamos também por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo $(r, s)$ sobre $M$. Por convenção $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

**Exemplo 1.** *Sejam $X$ um campo e $\theta$ uma 1-forma sobre $M$, então $A : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ definida por $A(\theta, X) = \theta(X)$ é um tensor do tipo (1,1).*

Podemos somar de maneira natural dois tensores desde que ambos sejam do mesmo tipo, enquanto definimos a multiplicação para quaisquer dois tensores da seguinte forma: dado dois tensores $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$, definimos

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to C^\infty(M)$$

pondo

$$A \otimes B(\theta^1, ..., \theta^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'}) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s).B(\theta^{r+1}, ..., \theta^{r+r'}, X_{s+1}, ..., X_{s+s'}).$$

### 1.2.1 Identificações

Temos $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ e identificamos $\mathfrak{T}_0^1(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$, pois a cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ associamos $\overline{V} = A : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ da forma $\overline{V}(\theta) = \theta(V)$. Esta identificação é injetiva e, portanto, bijetiva, uma vez que $M$ tem dimensão finita.

Os tensores do tipo $(0, s)$ são chamados de **covariantes** enquanto os do tipo $(r, 0)$ são chamados **contravariantes**. Notemos que, se $A$ for covariante e $B$ for contravariante, então $A \otimes B = B \otimes A$. No entanto, a comutatividade nem sempre ocorre. De fato, se $\partial_1$ e $\partial_2$ representam dois campos coordenados de uma variedade $M^n$ e $dx^1$, $dx^2$ são seus duais, então

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^2(\partial_1, \partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1, \\ dx^2 \otimes dx^1(\partial_1, \partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0, \end{aligned}$$

logo $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$.

Similarmente aos campos de vetores, os campos de tensores podem ser vistos pontualmente conforme nos sugere a seguinte

**Proposição 1.3.** *Sejam $p \in M^n$, $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, $\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r$ e $\theta^1, ..., \theta^r$ 1-formas tais que $\bar{\theta}^i_p = \theta^i_p$ $(1 \leq i \leq r)$ e $\bar{X}_1, ..., \bar{X}_s$ e $X_1, ..., X_s$ campos tais que $\bar{X}^i_p = X^i_p$ $(1 \leq i \leq s)$ então*

$$A(\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, ..., \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p).$$

A prova desse resultado é equivalente à do seguinte

**Lema 1.1.** *Se alguma das* 1*-formas $\theta^1, ..., \theta^r$ ou algum dos campos de vetores $X_1, ..., X_s$ se anular em $p \in M$, então*

$$A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0.$$

*Demonstração.* Suponhamos $X_s|_p = 0$ e seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas numa vizinhança $U$ de $p$. Então

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i \quad em\ U,$$

onde $X^i = X_s(x^i) \in C^\infty(U)$. Agora, consideremos $f$ uma função salto com suporte em $U$. Então $fX^i \in C^\infty(M)$ e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Com isto, temos

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \textstyle\sum_{i=1}^n fX^i f\partial_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n fX^i A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., f\partial_i). \end{aligned}$$

Como $X_s|_p = 0$, temos $X^i(p) = 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, logo $f^2(p)A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ e, como $f(p) = 1$, obtemos $A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = 0$ □

Para provarmos a Proposição 1.3 basta observarmos a soma telescópica e denotando $\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s$ simplesmente por $X_1, ..., X_k$ onde $k = r + s$ temos

$$\begin{aligned} A(X_1, ..., X_k) - A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_k) &= A(X_1 - \bar{X}_1, X_2, ..., X_k) \\ &\quad + A(\bar{X}_1, X_2 - \bar{X}_2, X_3, ..., X_k) \\ &\quad + ... + A(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_{k-1}, X_k - \bar{X}_k), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. Desta forma, está bem definido o operador multilinear

$$A_p : (T_pM^*)^r \times T_pM^s \to \mathbb{R}.$$

**Definição 1.4.** *Seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Sendo $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, as componentes de $A$ com relação a $\xi$ são as funções*

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}) \quad em \quad U,$$

*onde* $1 \leq i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s \leq n$.

Notemos que, para o caso de (0,1) tensores, a identificação nos fornece

$$\theta = \sum \theta_i dx^i.$$

E quando se tratar de um campo de vetores $X$ temos $X(dx^i) = dx^i(X) = X(x^i) = X^i$.

Consideremos agora o seguinte exemplo: seja $A \in \mathfrak{T}^1_2(U)$, então

$$A = \sum A^k_{ij} \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j. \tag{1.1}$$

Para mostrarmos a igualdade basta aplicarmos ambos os lados da equação em elementos da base associada ao sistema de coordenadas $\xi$ comprovando a igualdade anterior, e com o mesmo método podemos mostrar o seguinte

**Lema 1.2.** *Sejam $\xi = (x^1, ..., x^n)$um sistema de coordenadas e $A \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ então*

$$A = \sum A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}$$

*onde* $1 \leq i_a, j_b \leq n$.

### 1.2.2 Contração

Uma contração é uma aplicação que transforma um $(r, s)$ tensor num $(r-1, s-1)$ tensor satisfazendo algumas propriedades apresentadas a seguir:

**Lema 1.3.** *Existe uma única aplicação $C^\infty(M)$-linear $C : \mathfrak{T}^1_1(M) \to C^\infty(M)$ tal que $C(\theta \otimes X) = \theta(X)$ para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

*Demonstração.* Numa vizinhança coordenada $U$ o tensor pode ser escrito

$$A = \sum A^i_j \partial_i \otimes dx^j.$$

Como $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$ temos que $C(A) = \sum A^i_i$, o que prova a unicidade. Para a existência, definamos $C$ pela expressão $C(\partial_i \otimes dx^j) = dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$, restando-nos apenas mostrar a independência do sistema de coordenadas. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_m A\left(dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) &= \sum_m A\left(\sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^m} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \delta_{ij} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}$$

□

Podemos, assim, ver que esta contração está intimamente ligada à ideia de traço. No caso geral das contrações, fixamos $r-1$ $1-$formas e $s-1$ campos de vetores, e consideremos o tensor

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^{i+1}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_{j+1}, ..., X_{s-1}).$$

**Definição 1.5.** *A contração*

$$C^i_j(A)(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}) = C({}^i_jA(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}))$$

*onde* ${}^i_jA(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1})$ *é o (1,1) tensor*

$$\begin{aligned}
(\theta, X) \to \; & {}^i_jA(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1})(\theta, X) \\
&= A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^i, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_j, ..., X_{s-1}).
\end{aligned}$$

*é chamada* ***contração de*** $A$ ***sobre*** $i, j$.

De modo análogo ao caso feito anteriormente temos a seguinte expressão para a contração em coordenadas locais

**Lema 1.4.** *Sejam* $(\underline{i}, \underline{j}) \in I_r \times I_s$ *para* $I_m = \{1, ..., m\}$ *e* $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ *com as seguintes componentes*

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s}$$

*então* $C^{\underline{i}}_{\underline{j}}(A)$ *tem as seguintes componentes*

$$\sum_{m=1}^{n} A^{i_1,...,i_{\underline{i}-1},m,i_{\underline{i}+1},...,i_r}_{j_1,...,j_{\underline{j}-1},m,j_{\underline{j}+1}...,j_s}$$

### 1.2.3 Tensores Covariantes

Consideremos uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ entre variedades diferenciáveis $M^n$ e $\overline{M}^m$. O **pull-back** pela $\psi$, denotado por $\psi^*$ é uma aplicação capaz de transportar tensores covariantes em $\overline{M}^m$ para $M^n$ como vemos na seguinte

**Definição 1.6.** *Sejam $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis $M^n$ e $\overline{M}^m$, e $A \in \mathfrak{T}^0_s(\overline{M})$. Consideremos $\psi^* A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ definida por*

$$\psi^* A(v_1, ..., v_s) = A(d\psi v_1, ..., d\psi v_s).$$

*Então $\psi^* A$ é o **pull-back** de $A$ por $\psi$. Para s=0 denotamos simplesmente $\psi^* A = A \circ \psi$.*

A seguir, enunciamos algumas propriedades do pull-back, cujas demostrações seguem diretamente da última definição.

**Lema 1.5.** *Sejam $\psi : M^n \to \overline{M}^m$, $\varphi : \overline{M}^m \to \widetilde{M}^{\tilde{m}}$ aplicações diferenciáveis e $A, B$ tensores covariantes em $\overline{M}^m$ então:*

*(i)* $\psi^*$ *é $\mathbb{R}$-linear;*

*(ii)* $\psi^*(A \otimes B) = \psi^*(A) \otimes \psi^*(B)$;

*(iii)* $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Geralmente não podemos definir um operador que transporte tensores de quaisquer tipo de $\overline{M}^m$ para $M^n$ ou vice-versa. Porém se a variedade for Riemanniana, como veremos mais adiante, todos os tensores podem ser considerados covariantes.

### 1.2.4 Derivada Tensorial

Analogamente às metodologias empregadas para as funções reais, calculemos também as derivadas dos tensores, generalizando o Cálculo Diferencial para funções e campos vetoriais.

**Definição 1.7.** *Uma **derivação tensorial** $\mathfrak{D}$ em uma variedade $M^n$ é um conjunto de aplicações $\mathbb{R}$-lineares*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^r_s : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M) \ \ (r \geq 0, s \geq 0)$$

*tal que para quaisquer tensores $A$ e $B$:*

(*i*) *$\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}(A) \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}(B)$;*

(*ii*) *$\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}(A))$ para qualquer contração $C$.*

Para o caso $r = s = 0$, $\mathfrak{D}$ é uma derivação atuando em $C^\infty(M)$ e, neste caso, existe um único campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Vf = \mathfrak{D}f$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

De modo geral, $C^\infty(M)$-linearidade não é uma característica das derivações tensoriais, assim elas não podem ser determinadas pontualmente como os tensores. No entanto, é possível caracterizá-las localmente conforme a seguinte proposição.

**Proposição 1.8.** *Sejam $\mathfrak{D}$ uma derivação tensorial em $M$ e $U$ uma vizinhança de um ponto $p \in M$. Então existe uma única $\mathfrak{D}_U$ em $U$ tal que*

$$\mathfrak{D}_U(A|_U) = \mathfrak{D}(A)|_U, \quad \textit{para todo tensor } A \quad \textit{em} \quad M.$$

*Neste caso $\mathfrak{D}_U$ é dita a restrição de $\mathfrak{D}$ a $U$.*

*Demonstração.* Primeiramente notemos que se $f \equiv c$ localmente, então $\mathfrak{D}(f) = 0$. De fato, suponhamos inicialmente que $f$ é a função nula, logo temos $\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}(0.0) = \mathfrak{D}(0).0 + 0.\mathfrak{D}(0) = 0$. Se $c = 1$ obtemos de modo análogo $\mathfrak{D}(1) = 2\mathfrak{D}(1)$ daí $\mathfrak{D}(1) = 0$. Seja agora $c$ arbitrário, assim temos $\mathfrak{D}(c) = \mathfrak{D}(c.1) = c\mathfrak{D}(1) = 0$ daí $\mathfrak{D}(c) = 0$.

Suponhamos agora que $f$ é localmente constante em $p$. Notemos que podemos supor que esta constante é nula pois se $f(V_p) = \{c\}$ temos que $\tilde{f} = f - c$ é localmente nula e $\mathfrak{D}(\tilde{f})_q = \mathfrak{D}(f)_q \ \forall \ q \in M^n$. Consideremos $g$ uma função salto em $p$ tal que seu suporte seja um subconjunto de $V_p$ e assim $fg \equiv 0$, logo $0 = \mathfrak{D}(fg)_p = \mathfrak{D}(f)_p g(p) + f(p)\mathfrak{D}(g)_p = \mathfrak{D}(f)_p$.

Sejam $B \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ e $f$ uma função salto com suporte em $U$ e $f = 1$ numa vizinhança de $p$ fixado em $U$, então $fB \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Logo

$$(\mathfrak{D}_U B)_p = \mathfrak{D}(fB)_p.$$

Mostremos que a definição não depende da escolha da função $f$. Sejam $f, g$ funções salto em $p$. Então $\mathfrak{D}(gfB)_p = g(p)\mathfrak{D}(fB)_p + \mathfrak{D}(g)_p f(p)B|_p = \mathfrak{D}(fB)_p$ mostrando assim a independência da função salto $f$ devido a comutatividade do produto de funções. Com um simples cálculo podemos comprovar os seguintes fatos

(*i*) $\mathfrak{D}_U B$ é um tensor em $U$;

(*ii*) $\mathfrak{D}_U$ é uma derivação tensorial em $U$;

(*iii*) $\mathfrak{D}_U(B|_U) = \mathfrak{D}(B)_U$ para todo tensor $B$ em $M$;

(*iv*) $\mathfrak{D}_U$ é único.

□

Vejamos uma forma prática de calcular derivações de tensores.

**Proposição 1.9** (Regra do Produto)**.** *Sejam $\mathfrak{D}$ uma derivação tensorial em $M^n$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, então*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s)\\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,...,\mathfrak{D}\theta^i,...,\theta^r,X_1,...,X_s)\\ &+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,\mathfrak{D}X_j...,X_s).\end{aligned}$$

*Demonstração.* Por simplicidade, consideremos $r = s = 1$. Notemos que $A(\theta, X) = \bar{C}(A \otimes \theta \otimes X)$, onde $\bar{C} = C^1_2 C^2_1$ é uma composta de duas contrações. Daí

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(A(\theta,X)) &= \mathfrak{D}C(A\otimes\theta\otimes X)\\ &= C(\mathfrak{D}(A)\otimes\theta\otimes X) + C(A\otimes\mathfrak{D}\theta\otimes X) + C(A\otimes\theta\otimes\mathfrak{D}X)\\ &= \mathfrak{D}(A)(\theta,X) + A(\mathfrak{D}\theta,X) + A(\theta,\mathfrak{D}X),\end{aligned}$$

o que prova o resultado neste caso específico sem perda de generalidade. □

**Corolário 1.10.** *Se $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ coincidem em funções e em campos de vetores, então $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.*

*Demonstração.* Basta observarmos que $\mathfrak{D}(\theta(X)) = (\mathfrak{D}\theta)(X) + \theta\mathfrak{D}(X)$ □

**Teorema 1.11.** *Dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $\mathbb{R}$-linear $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X), \quad \forall (X,f) \in \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$$

*Então existe uma única derivação tensorial $\mathfrak{D}$ em $M$ tal que $\mathfrak{D}^0_0 = V$ e $\mathfrak{D}^1_0 = \delta$.*

*Demonstração.* Seja $\theta \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ e definindo

$$\mathfrak{D}(\theta)(X) = V(\theta X) - \theta(\delta(X))$$

Através de um cálculo direto vemos que $\mathfrak{D}(\theta)$ é uma $1-$forma e $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0^1$ satisfaz as propriedades requeridas para uma derivação. Para um tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, definamos

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}A)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= \mathfrak{D}[A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)] \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, ..., \mathfrak{D}\theta^i, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \mathfrak{D}X_j..., X_s).\end{aligned}$$

Após alguns cálculos, verificamos que $\mathfrak{D}(A) \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e, daí, $\mathfrak{D}$ é uma derivação. □

## 1.3 Métricas Riemannianas

As métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis, que passamos a definir nesta seção, são peças chaves para obter os resultados principais deste trabalho.

**Definição 1.12.** *Uma* ***métrica Riemanniana*** $g$ *(ou* ***tensor métrico Riemanniano****) em uma variedade diferenciável $M^n$ é um $(0,2)$ tensor $g$ definido em $M^n$ que é simétrico ( isto é, $g(X,Y) = g(Y,X)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ) e definido positivo ( isto é, $g(X,X) > 0$ se $X \neq 0$ ). Uma variedade diferenciável $M^n$ munida de uma métrica Riemanniana $g$ é chamada uma* ***variedade Riemanniana****.*

Uma métrica Riemanniana $g$ determina um produto interno em cada espaço tangente $T_pM$, $p \in M^n$, que é típicamente denotado por $\langle X, Y\rangle := g(X,Y)$, para todos $X, Y \in T_pM$.

Numa vizinhança coordenada $(x^1, ..., x^n)$ de $M^n$ a métrica Riemanniana admite a seguinte expressão:

$$\langle\, ,\, \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde as funções

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

são chamadas as **componentes** de $g$. Assim, se $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j$ são campos diferenciáveis em $M^n$ então

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \left( \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \right)(X, Y) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j. \end{aligned}$$

Uma vez que $\langle \, , \rangle$ é definida positiva, a existência da inversa da matriz $(g_{ij})_{n \times n}$ é garantida. Suas componentes são funções diferenciáveis que denotaremos por $g^{ij}$.

**Exemplo 2.** *Um exemplo óbvio de uma variedade Riemanniana é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com métrica Riemanniana*

$$\langle \, , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

*onde as funções componentes são dadas por*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ \textit{se } i = j \, , \\ 0 & , \ \textit{se } i \neq j \, . \end{cases}$$

*Neste caso, se $X = (X^1, \ldots, X^n)$ e $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ são campos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ então*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i$$

*coincide com o produto interno ussual em $\mathbb{R}^n$ de $X$ e $Y$.*

## 1.4 A Conexão de Levi-Civita

Sejam $V, W$ campos de vetores numa variedade Riemanniana $M^n$, em cada ponto $p \in M^n$ queremos calcular a taxa de variação de $W$ na direção de $V_p$. Isso pode ser feito naturalmente em $\mathbb{R}^n$ com a derivação de um campo com relação ao outro. No contexto de variedades, devemos introduzir o conceito de conexão

**Definição 1.13.** *Uma **conexão** $\nabla$ em uma variedade $M$ é uma função*

$$\begin{aligned} \nabla : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (V, W) &\mapsto \nabla(V, W) = \nabla_V W \end{aligned}$$

*tal que*

$(D_1)$ $\nabla_V W$ *é* $C^\infty(M)$*-linear em* $V$*;*

$(D_2)$ $\nabla_V W$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* $W$*;*

$(D_3)$ $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W$, *para toda* $f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_V W$ *é chamada a* ***derivada covariante*** *de* $W$ *em relação à* $V$ *para a conexão* $\nabla$.

O axioma $(D_1)$ nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em $V$, então podemos calcular seu valor pontualmente, isto é, se $v \in T_pM$ temos $\nabla_v W \in T_pM$.

A conexão estará diretamente ligada à métrica desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade relacionada ao colchete de Lie, conforme nos mostra o teorema da existência e unicidade da conexão de Levi-Civita. Mas primeiro vejamos um resultado algébrico.

**Proposição 1.14.** *Seja* $M^n$ *uma variedade Riemanniana. Se* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *seja* $V^*$ *a* 1*-forma satisfazendo*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle, \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

*Então a função* $V \to V^*$ *é um isomorfismo* $C^\infty(M)$*-linear de* $\mathfrak{X}(M)$ *para* $\mathfrak{X}^*(M)$.

*Demonstração.* Ora, esta aplicação é $C^\infty(M)$-linear, pois é dada por 1-forma que é $C^\infty(M)$-linear.

*(a)* Para a injetividade, suponhamos que $V^* = W^*$, assim, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\langle V, Z\rangle = \langle W, Z\rangle$ o que implica $\langle V - W, Z\rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, e daí $V = W$.

*(b)* Agora, vamos provar que dada uma 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ existe um único campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta(X) = \langle V, X\rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. A unicidade segue do item anterior. Para a outra parte é suficiente encontrar um $V$ em uma vizinhança coordenada $U$ arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Então $\theta = \sum \theta_i dx^i$ em $U$. Tomemos $V = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então, desde que as matrizes $(g_{ij})$ e $(g^{ij})$ são uma inversa da outra, temos

$$\langle V, \partial_k\rangle = \langle \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j}\theta_i g^{ij}g_{jk} = \sum_i \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).$$

Segue pela $C^\infty(M)$-linearidade que $\langle V, X\rangle = \theta(X)$ para todo $X$ em $U$. $\square$

Com a adição de duas novas propriedades temos a unicidade da conexão, conforme o seguinte teorema.

**Teorema 1.15** (Levi-Civita)**.** *Em uma variedade Riemanniana $M^n$, existe uma única conexão $\nabla$ tal que*

$(D_4)$ $[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V$,

$(D_5)$ $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$,

*para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. $\nabla$ é chamada de* ***conexão de Levi-Civita*** *e é caracterizada pela* ***equação de Koszul***

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle \\ &\quad - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle . \end{aligned}$$

Para provarmos este resultado, basta calcularmos o lado direito desta equação. Já a existência é obtida definindo $\nabla_V W$ pela expressão do segundo membro da equação anterior. Um cálculo direto, porém extenso, nos mostra que $\nabla$ satisfaz as propriedades requeridas.

## 1.5 Curvatura

A seguir passamos a estudar a noção de Curvatura em uma variedade Riemanniana $M^n$, que intuitivamente mede quanto $M^n$ deixa de ser euclidiana.

**Lema 1.6.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\nabla$. A aplicação $R : \mathfrak{X}^3(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denotada e definida por* [1]

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z,$$

*é um $(1,3)$ tensor em $M$. Este tensor é chamado* ***tensor curvatura*** *de $M^n$.*

A demostração do Lema 1.6 segue diretamente ao identificar $R$ com a aplicação $C^\infty(M)$-multilinear

$$\begin{aligned} \overline{R}: \ \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^3 &\to \quad C^\infty(M) \\ (\theta, X, Y, Z) &\mapsto \overline{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R(X,Y)Z). \end{aligned}$$

[1] Esta definição está de acordo com [5] e [9].

Devido ao caráter pontual, para $x, y \in T_pM$ podemos considerar o operador linear

$$R(x, y) : T_pM \to T_pM$$

que será chamado de **operador de curvatura**. Vejamos algumas propriedades deste operador.

**Proposição 1.16.** *Se $x, y, z, v, w \in T_pM$ então*

*(i)* $R(x, y) = -R(y, x)$;

*(ii)* $\langle R(x, y)v, w\rangle = -\langle R(x, y)w, v\rangle$;

*(iii)* $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$;

*(iv)* $\langle R(x, y)v, w\rangle = \langle R(v, w)x, y\rangle$.

A título de exemplo, faremos a demonstração de $(iii)$. Consideremos $X, Y, Z$ extensões dos vetores $x, y, z$ de forma que os colchetes entre eles sejam nulos. Sejam $F : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ uma função $\mathbb{R}$-linear e

$$\mathfrak{S}F(X, Y, Z) := F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$$

a soma das permutações cíclicas de $X, Y, Z$. Uma permutação cíclica de $X, Y, Z$ deixa $\mathfrak{S}F(X, Y, Z)$ sem alteração. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}R(X, Y)Z &= \mathfrak{S}(\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z)\\
&= \mathfrak{S}\nabla_Y\nabla_X Z - \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Y Z \;=\; \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Z Y - \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Y Z\\
&= \mathfrak{S}\nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \;=\; \mathfrak{S}\nabla_X[Z, Y] = 0.
\end{aligned}$$

Usando estas notações temos a segunda identidade de Bianchi como nos diz a seguinte proposição.

**Proposição 1.17.** *Se $x, y, z \in T_pM$ então $\mathfrak{S}(\nabla_z R)(x, y) = 0$.*

Para a demonstração, que usa uma vizinhança normal, veja [9].

Agora vejamos uma expressão que nos diz que o tensor curvatura pode ser expresso em termos do tensor métrico $g$.

**Lema 1.7.** *Em uma vizinhança coordenada* $(x^1, ..., x^n)$ *temos*

$$R(\partial_k, \partial_i)\partial_j = \sum_i R^i_{jkl}\partial_i,$$

*onde as componentes de* $R$ *são*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

A demonstração segue direto do cálculo baseado na expressão de $\nabla_{\partial_l}(\nabla_{\partial_k}\partial_j)$ em termos dos **símbolos de Christoffel** $\Gamma^i_{jk}$, definidos por $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_l \Gamma^l_{ij}\partial_l$.

### 1.5.1 Curvatura de Ricci

Definimos o **tensor curvatura de Ricci** como sendo uma forma bilinear

$$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dada pela contração $C^1_2 R$ do tensor curvatura. Desta forma, podemos calcular o tensor de Ricci como sendo o traço

$$Ric(X, Z) = tr\,\{Y \to R_{XY}Z\} = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Z, E_i\rangle,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal ao redor de um ponto $p \in M^n$.

### 1.5.2 Curvatura Seccional

Em $T_pM$ consideremos a função $Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$, que representa o quadrado da área do paralelogramo bi-dimensional determinado por $v, w \in T_pM$.

**Proposição 1.18.** *Seja* $\Pi$ *um* 2*-plano em* $T_pM$ *e sejam* $v, w \in \Pi$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

*independe da escolha da base de* $\Pi$.

A demonstração da Proposição1.18 é obtida observando que $K(v, w)$ é invariante pelas transformações: $\{v, w\} \to \{w, v\}$, $\{v, w\} \to \{\lambda v, w\}$ e $\{v, w\} \to \{v + \lambda w, w\}$.

**Definição 1.19.** *Dado um ponto $p \in M^n$ e um 2-plano $\Pi \subset T_pM$, o número real $K(v,w) = K(\Pi)$ é chamado* ***curvatura seccional*** *de $\Pi$ em $p$, onde $\{v,w\}$ é uma base qualquer de $\Pi$. Dizemos que uma variedade Riemannniana $M^n$ é* ***flat*** *quando $K \equiv 0$*

O próximo resultado é válido para qualquer função satisfazendo a linearidade e as simetrias do tensor $R$. No entanto, o enunciaremos apenas para este caso particular.

**Proposição 1.20.** *Se $K = 0$ em $p \in M^n$ então $R = 0$ em $p$.*

*Demonstração.* Temos que $\langle R(v,w)v, w\rangle = 0$ para quaisquer $v, w \in T_pM$ que geram 2-planos. Agora, usando polarizações algébricas obtemos que $\langle R(x,y)v,w\rangle = 0$ para todos $x, y, v, w \in T_pM$, o que mostra o resultado. □

A importância da curvatura seccional provém do fato que o conhecimento de $K(\Pi)$, para todo $\Pi$, determina completamemte a curvatura $R$. Para mostrar isso precisamos da seguinte terminologia.

Dizemos que uma aplicação multilinear $F : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ é uma **função tipo curvatura** se $F$ verifica as simetrias da Proposição 1.16. Assim, da Proposição 1.20 obtemos que se $F(v,w,v,w) = 0$ para todos $v, w \in T_pM$ que geram 2-planos então $F = 0$.

Agora podemos mostrar que $K$ determina $R$ no seguinte sentido.

**Corolário 1.21.** *Seja $F$ uma função tipo curvatura em $T_pM$ tal que*

$$K(v,w) = \frac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

*para todos $v, w$ que geram um 2-plano em $T_pM$. Então $\langle R(x,y)v,w\rangle = F(x,y,v,w)$ para todos $x, y, v, w \in T_pM$.*

*Demonstração.* Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{F}: & (T_pM)^4 & \to & \mathbb{R} & \\ & (v,w,x,y) & \mapsto & \widehat{F}(v,w,x,y) & := F(v,w,x,y) - \langle R(x,y)v,w\rangle. \end{array}$$

Temos que $\widehat{F}$ é também uma função tipo curvatura. Por hipótese, se $v$ e $w$ geram um 2-plano em $T_pM$ então $\widehat{F}(v,w,v,w) = 0$. Logo, da Proposição 1.20 obtemos que $\widehat{F} = 0$, e o resultado segue. □

Toda esta discussão nos diz qual a expressão para $R$ no caso de variedades de curvatura seccional constante.

**Corolário 1.22.** *Se $M^n$ tem curvatura seccional constante $C$ então*

$$R(x,y)z = C\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\},$$

*para todos $x, y, z \in T_pM$.*

*Demonstração.* Basta definirmos $F(x,y,z,w) = C\{\langle x,z\rangle \langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle \langle x,w\rangle\}$ e utilizarmos o Corolário 1.21. □

## 1.6 Imersões Isométricas

**Definição 1.23.** *Sejam $M^n$ e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é chamada uma **imersão** se a diferencial $d\psi_p : T_pM \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se, além disto, $\psi$ é um homeomorfismo sobre $\psi(M^n) \subset \overline{M}^m$, onde $\psi(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}^m$, dizemos que $\psi$ é um **mergulho**. Se $M^n \subset \overline{M}^m$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^m$ é um mergulho, então dizemos que $M^n$ é uma **subvariedade** de $\overline{M}^m$.*

**Definição 1.24.** *Sejam $M^n$ e $\overline{M}^m$ variedades Riemannianas, com métricas $\langle\,,\,\rangle$ e $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$, respectivamente. Um difeomorfismo $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é chamado uma **isometria** se*

$$\langle u,v\rangle_p = \langle\!\langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle\!\rangle_{\psi(p)}$$

*para todo $p \in M^n$ e todo $u, v \in T_pM$.*

A seguir, ilustraremos uma maneira de construir uma métrica Riemannina numa variedade diferenciável.

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Se $\overline{M}^{n+k}$ possui uma métrica Riemannina $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$ então $\psi$ induz uma métrica Riemannina $\langle\,,\,\rangle$ em $M^n$, pondo

$$\langle u,v\rangle_p = \langle\!\langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle\!\rangle_{\psi(p)}$$

para todo $p \in M^n$ e todo $u, v \in T_pM$. Como $d\psi_p$ é injetiva, $\langle\,,\,\rangle_p$ é positivo definido. A métrica de $M^n$ é chamada **métrica induzida** por $\psi$, e $\psi$ é uma **imersão isométrica**.

Neste caso, é costume denotar, e assim o faremos, as métricas $\langle\, , \rangle$ e $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ por um mesmo símbolo.

Se $M^n$ é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+k}$ e a aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica, então dizemos que $M^n$ é uma **subvariedade Riemanniana** de $\overline{M}^{n+k}$.

**Observação 1.1.** *Para o que segue, lembremos que o* ***fibrado tangente*** *(para mais detalhes veja [9] ou [5])de uma variedade diferenciável $M^n$ é a variedade $2n$-dimensional*

$$TM = \bigcup \{\, T_pM \; ; \; p \in M^n \,\} .$$

**Definição 1.25.** *Sejam $M^n$ e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Um campo vetorial $X$ ao longo de uma aplicação $\psi : M^n \to \overline{M}^m$ é uma aplicação $X : M^n \to T\overline{M}$ tal que $\pi \circ X = \psi$, onde $\pi : T\overline{M} \to \overline{M}^m$ é a aplicação projeção.*

Se $M^n$ é uma subvariedade de $\overline{M}^{n+k}$, um campo $X$ ao longo da aplicação inclusão $\iota : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é chamado um $\overline{M}$**-campo vetorial** sobre $M^n$. Assim, $X$ aplica a cada $p \in M^n$ um vetor tangente $X_p \in T_p\overline{M}$. Neste caso, dizemos que $X$ é **suave** se $f \in C^\infty(\overline{M})$ implica $X(f) \in C^\infty(M)$. O conjunto

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \{\, X \, ; \; X \text{ é } \overline{M}\text{-campo vetorial sobre } M^n \,\}$$

é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Observemos que se $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ então $X|_{M^n} \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Agora, seja $M^n$ uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$. Logo, cada espaço tangente $T_pM$ é um subespaço de $T_p\overline{M}$ e o produto interno de $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp, \tag{1.2}$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_pM$ em $T_p\overline{M}$. Neste caso, vetores de $(T_pM)^\perp$ são ditos **normais** a $M^n$.

De (1.2) obtemos, para todo $v \in T_p\overline{M}$, que

$$v = v^\top + v^\perp,$$

onde $v^\top \in T_pM$ e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$. Segue que as aplicações projeções $\pi^\top : T_p\overline{M} \to T_pM$ e $\pi^\perp : T_p\overline{M} \to (T_pM)^\perp$ são $\mathbb{R}$-lineares.

Um campo vetorial $N \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ é chamado **normal** a $M^n$ quando $N_p \in (T_pM)^\perp$, para cada $p \in M^n$. Temos que o conjunto

$$X(M)^\perp = \{ N \in \overline{\mathfrak{X}}(M) \ ; \ N \text{ é normal a } M^n \}$$

é um sub-módulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Para cada $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, aplicando $\pi^\top$ e $\pi^\perp$ a cada $X_p$, com $p \in M^n$, obtemos campos vetoriais $X^\top \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Segue que as aplicações projeções $\pi^\top : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $\pi^\perp : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ são $C^\infty(M)$-lineares. Além disso, como para todo $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ temos a decomposição $X = X^\top + X^\perp$ (de forma única) então

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

## 1.7 A Conexão Induzida

Seja $M^n$ é uma subvariedade Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$. Denotemos por

$$\begin{array}{rccl} \overline{\nabla}: & \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) & \to & \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ & (Z,W) & \mapsto & \overline{\nabla}_Z W \end{array}$$

a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+k}$.

Sejam $V, X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M^n$, sejam $\overline{V}$ e $\overline{X}$ extensões locais suaves de $V$ e $X$, respectivamente, sobre uma vizinhança $U$ de $p$ em $\overline{M}^{n+k}$. A **conexão induzida** em $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$ é definida pondo

$$\begin{array}{rccl} \overline{\nabla}: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ & (V,X) & \mapsto & \overline{\nabla}_V X \ = \ \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}\Big|_{U \cap M}. \end{array}$$

Temos que $\overline{\nabla}_V X$ é um $\overline{M}$-campo vetorial suave bem definido sobre $M^n$ (cf. [9], Lema 4.1). Logo, considerando extensões apropriadas de campos de vetores definidos em $M^n$ obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 1.26.** *Seja $\overline{\nabla}$ a conexão induzida de $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$. Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ então*

(1) *$\overline{\nabla}_V X$ é $C^\infty(M)$-linear em $V$;*

(2) *$\overline{\nabla}_V X$ é $\mathbb{R}$-linear em $X$;*

(3) $\overline{\nabla}_V(fX) = V(f)X + f\overline{\nabla}_V X$, *para cada* $f \in C^\infty(M)$*;*

(4) $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$*;*

(5) $V\langle X, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_V X, \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_V Y\rangle$.

Para campos de vetores $V$ e $W$ em $M^n$, o proximo resultado nos garante que $(\overline{\nabla}_V W)^\top$ coincide com a conexão de Levi-Civita de $M^n$.

**Proposição 1.27.** *Seja* $M^n$ *uma subvariedade Riemanniana de* $\overline{M}^{n+k}$*. Se* $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ *então*

$$\nabla_V W = (\overline{\nabla}_V W)^\top,$$

*onde* $\nabla$ *é a conexão de Levi-Civita de* $M^n$*.*

*Demonstração.* Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos extensões locais $\overline{X}, \overline{V}, \overline{W}$ de $X, V, W$, em $\overline{M}^{n+k}$, respectivamente. Consideremos também

$$\begin{aligned} F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}) \ &:= \ \overline{V}\langle \overline{W}, \overline{X}\rangle + \overline{W}\langle \overline{X}, \overline{V}\rangle - \overline{X}\langle \overline{V}, \overline{W}\rangle \\ &\quad -\langle \overline{V}, [\overline{W}, \overline{X}]\rangle + \langle \overline{W}, [\overline{X}, \overline{V}]\rangle + \langle \overline{X}, [\overline{V}, \overline{W}]\rangle. \end{aligned}$$

Então da fórmula de Koszul obtemos que

$$F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}) = 2\langle \nabla_{\overline{V}}\overline{W}, \overline{X}\rangle$$

Por outro lado, do Corolário 1.26 obtemos que

$$F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})\Big|_{M^n} = F(V, W, X).$$

Assim, $\langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle = \langle \nabla_V W, X\rangle$. Portanto, sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário obtemos que $\nabla_V W = (\overline{\nabla}_V W)^\top$. □

A seguir, para fazer um estudo mais detalhado de $M^n$, analisamos $(\overline{\nabla}_V W)^\perp$.

**Proposição 1.28.** *Seja* $M^n$ *uma subvariedade Riemanniana de* $\overline{M}^{n+k}$*. A função*

$$\begin{aligned} II: \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ &\to \ \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (V, W) \ &\mapsto \ II(V, W) \ = \ (\overline{\nabla}_V W)^\perp \end{aligned}$$

*é* $C^\infty(M)$*-bilinear e simétrica.* $II$ *é chamada* ***segunda forma fundamental*** *de* $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$*.*

*Demonstração.* Como $\overline{\nabla}_V W$ é $C^\infty(M)$-linear em $V$ e $\mathbb{R}$-linear em $W$ então o mesmo acontece com $II$. Agora, para $f \in C^\infty(M)$,

$$\overline{\nabla}_V(fW) = V(f)W + f\overline{\nabla}_V W.$$

Como $W \in \mathfrak{X}(M)$ e a aplicação projeção $\pi^\perp$ é $C^\infty(M)$-linear então

$$II(V, fW) = (\overline{\nabla}_V(fW))^\perp = (V(f)W + f\overline{\nabla}_V W)^\perp = f(\overline{\nabla}_V W)^\perp = fII(V, W).$$

Assim, $II$ é $C^\infty(M)$-bilinear. Além disso,

$$II(V, W) - II(W, V) = (\overline{\nabla}_V W)^\perp - (\overline{\nabla}_W V)^\perp = (\overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V)^\perp = [V, W]^\perp = 0,$$

pois $[V, W] \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Juntando os resultados das Proposisões 1.27 e 1.28 obtemos

$$\overline{\nabla}_V W = \nabla_V W + II(V, W), \tag{1.3}$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, chamada **fórmula de Gauss**.

Em cada $p \in M^n$, $II$ determina uma função $\mathbb{R}$-bilinear

$$\begin{array}{rccccc} II_p: & T_pM \times T_pM & \to & (T_pM)^\perp & & \\ & (v, w) & \mapsto & II_p(v, w) & = & II(V_p, W_p) \end{array}$$

onde $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $V_p = v$, $W_p = w$. Para cada $N \in (T_pM)^\perp$ fica associada uma aplicação $\mathbb{R}$-linear auto-adjunta $A_p^N : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle A_p^N(x), y\rangle = \langle II_p(x, y), N\rangle\,, \;\; x, y \in T_pM. \tag{1.4}$$

O campo de operadores lineares auto-adjuntos $A^N : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definido pontualmente pela expressão (1.4), é chamado **operador de forma** (ou **endorfismo de Weingarten**) da subvariedade Riemanniana $M^n$ na direção $N$.

O seguinte resultado nos dá uma expressão de $A^N$ em termos da conexão de Levi-Civita do espaço ambiente $\overline{M}^{n+k}$.

**Proposição 1.29.** *Sejam $p \in M^n$, $x \in T_pM$ e $N \in (T_pM)^\perp$. Então*

$$A_p^N(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top.$$

*Esta expressão é chamada **fórmula de Weingarten** de $M^n$. Assim, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

$$A^N(X) = -\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top$$

*Demonstração.* Sejam $y \in T_pM$ e $X,\ Y$ extensões locais de $x,\ y$, respectivamente, e tangentes a $M^n$. Então $\langle N, Y\rangle = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\langle A_p^N(x), y\rangle &= \langle II_p(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p)\\ &= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. Logo, $A_p^N(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top}$. □

**Definição 1.30.** *Dizemos que uma subvariedade Riemanniana $M^n$ de $\overline{M}^{n+k}$ é **totalmente geodésica** quando $II \equiv 0$.*

## 1.8 Variedades Produto

A partir de variedades Riemannianas podemos obter outras variedades Riemannianas. As variedades produtos, que passamos estudar nesta seção, são um exemplo dessa situação.

Sejam $M_1^n$ e $M_2^m$ variedades diferenciáveis e consideremos

$$M_1^n \times M_2^m = \{\, (p,q)\ ;\ p \in M_1^n \text{ e } q \in M_2^n \,\}.$$

Temos que se $(x^1, \ldots, x^n)$ e $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ são vizinhanças coordenadas arbitrárias para $M_1^n$ e $M_2^m$, respectivamente, então $(x^1, \ldots, x^{n+m})$ é uma vizinhança coordenada para $M_1^n \times M_2^m$. Com esta estrutura diferenciável, $M_1^n \times M_2^m$ é chamada **variedade produto** de $M_1^n$ por $M_2^m$.

Em uma variedade produto $M_1^n \times M_2^m$ temos:

$(a)$ as projeções

$$\begin{aligned}\pi_1 :\ & M_1^n \times M_2^m \ \to\ M_1^n\\ & (p,q) \ \mapsto\ \pi_1(p,q) = p\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 :\ & M_1^n \times M_2^m \ \to\ M_2^m\\ & (p,q) \ \mapsto\ \pi_2(p,q) = q\,,\end{aligned}$$

são aplicações diferenciáveis de classe $C^\infty$;

$(b)$ se $M$ é uma variedade diferenciável então uma aplicação $\phi : M \to M_1^n \times M_2^m$ é diferenciávesl se, e somente se, $\pi_1 \circ \phi$ e $\pi_2 \circ \phi$ são diferenciáveis;

(c) para cada $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$, os conjuntos

$$M_1^n \times \{q\} = \{\,(p,q)\ ;\ p \in M_1^n\,\}\,, \qquad \{p\} \times M_2^n = \{\,(p,q)\ ;\ q \in M_2^m\,\},$$

são subvariedades de $M_1^n \times M_2^m$;

(d) para cada $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$, as aplicações

$$\pi_1\Big|_{M_1^n \times \{q\}} : M_1^n \times \{q\} \to M_1^n\,, \quad \pi_2\Big|_{\{p\}\times M_2^n} : \{p\} \times M_2^n \to M_2^m\,,$$

são difeomorfismos.

Logo, do item $(d)$ obtemos que os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}M_1 := T_{(p,q)}\left(M_1^n \times \{q\}\right)\,, \quad T_{(p,q)}M_2 := T_{(p,q)}\left(\{p\} \times M_2^m\right)$$

são subespaços de $T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right)$. Além disso,

$$T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right) = T_{(p,q)}M_1 \oplus T_{(p,q)}M_2\,, \tag{1.5}$$

ou seja, cada $w \in T_{(p,q)}\left(M_1 \times M_2\right)$ pode ser escrito de forma única como $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in T_{(p,q)}M_1$ e $w_2 \in T_{(p,q)}M_2$.

Agora, se $M_1^n$ e $M_2^m$ são variedades Riemannianas então usando (1.5) podemos munir de uma métrica Riemanniana o produto $M_1^n \times M_2^m$.

**Lema 1.8.** *Sejam $M_1^n$ e $M_2^m$ variedades Riemannianas com métricas Riemannianas $g_1$ e $g_2$, respectivamente. Então $g = g_1 \oplus g_2$, definida por*

$$g(X,Y) = g_1(X_1,Y_1) + g_2(X_2,Y_2) \tag{1.6}$$

*para todos $X = X_1 + X_2,\ Y = Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$, onde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, é uma métrica Riemanniana em $M_1^n \times M_2^m$, chamada* ***métrica produto****.*

*Demonstração.* Basta observarmos que sendo $g_1$ e $g_2$ $(0,2)$ tensores simétricos e definidos positivos então o mesmo acontece com $g$. $\square$

Também usamos

$$\langle X, Y\rangle_{(p,q)} = \langle X_1, Y_1\rangle_p + \langle X_2, Y_2\rangle_q$$

para denotar a expressão dada em (1.6).

### 1.8.1 Conexão de Levi-Civita em uma Variedade Produto

Para relacionarmos as conexões de Levi-Civita de $M_1^n$, $M_2^m$ e $M_1^n \times M_2^m$ é necessário estabelecermos as seguintes noções.

**Definição 1.31.**

(*i*) *Se* $f \in C^\infty(M_1)$ *então o* ***levantamento*** *de* $f$ *para* $M_1^n \times M_2^m$ *é* $\widetilde{f} = f \circ \pi_1 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$.

(*ii*) *Se* $v \in T_pM_1$ *e* $q \in M_2^m$ *então o* ***levantamento*** *de* $v$ *para* $(p,q) \in M_1^n \times M_2^m$ *é o único vetor* $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}M_1$ *tal que* $d\,(\pi_1)_{(p,q)}\,(\widetilde{v}) = v$.

(*iii*) *Se* $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ *então o* ***levantamento*** *de* $X$ *para* $M_1^n \times M_2^m$ *é o único campo* $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ *tal que* $d\,(\pi_1)_{(p,q)}\,(\widetilde{X}_{(p,q)}) = X_p$ *e* $d\,(\pi_2)_{(p,q)}\,(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$. *O conjunto*

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1) = \{\, \widetilde{X} \ ; \ \widetilde{X} \text{ é levantamento de } X \in \mathfrak{X}(M_1)\}$$

*é chamado conjunto de todos os* ***levantamentos horizontais****.*

*Funções, vetores tangentes e campos vetorias em* $M_2^m$ *são levantados para* $M_1^n \times M_2^m$ *de forma análoga via* $\pi_2$. *O conjunto*

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2) = \{\, \widetilde{V} \ ; \ \widetilde{V} \text{ é levantamento de } V \in \mathfrak{X}(M_2)\}$$

*é chamado conjunto de todos os* ***levantamentos verticais****.*

Com relação ao levantamento do colchete de campos horizontais e verticais temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado no Corolário 1.44 de [9].

**Proposição 1.32.**

(*i*) *Se* $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ *então* $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ (*resultado análogo para campos verticais*).

(*ii*) *Se* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ *e* $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2)$ *então* $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0$.

Agora, podemos relacionar a conexão de Levi-Civita do produto $M_1^n \times M_2^m$ com as conexões de Levi-Civita de $M_1^n$ e $M_2^m$.

**Proposição 1.33.** *Consideremos a variedade produto* $\overline{M}^{n+m} = M_1^n \times M_2^m$ *munida com a métrica produto. Sejam* $\nabla^1$, $\nabla^2$ *e* $\overline{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* $M_1^n$, $M_2^m$ *e* $\overline{M}^{n+m}$, *respectivamente. Se* $X, Y \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(M_1)$ *e* $V, W \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M_2)$ *então*

(i) $\overline{\nabla}_X Y$ *é o levantamento de* $\nabla^1_X Y$;

(ii) $\overline{\nabla}_V W$ *é o levantamento de* $\nabla^2_V W$;

(iii) $\overline{\nabla}_V X = 0 = \overline{\nabla}_X V$.

A demonstração deste resultado pode ser feita diretamente através da fórmula de Koszul (veja, por exemplo [9]).

## 1.9 Geodésicas

Dada uma curva $\alpha : I \to M^n$ em uma variedade Riemanniana $M^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, definimos um campo sobre $\alpha$ como sendo uma aplicação $Z : I \to TM$ tal que $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$, onde $TM$ denota o fibrado tangente de $M^n$. Denotamos $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

**Proposição 1.34.** *Sejam* $M^n$ *uma variedade Riemanniana, com conexão de Levi-Civita* $\nabla$. *Se* $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, *então existe uma única função* $Z \to Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ *satisfazendo:*

(i) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$, *para todos* $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $(hZ)' = \dfrac{dh}{dt}Z + hZ'$, *para qualquer* $h \in C^\infty(I)$;

(iii) $(V|_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V)$, *para todo* $t \in I$ *e todo* $V \in \mathfrak{X}(M)$;

(vi) $\dfrac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

*Demonstração.* Supondo a existência de tal função, consideremos um sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ ao redor de um ponto de $M^n$ e obtemos, após alguns cálculos, a expressão

$$Z' = \sum_i \frac{dZ^i}{dt}\partial_i + \sum_i Z^i \nabla_{\alpha'}(\partial_i). \tag{1.7}$$

A unicidade segue diretamente de (1.7). Para a existência, basta definirmos $Z'$ de acordo com a expressão (1.7). Através de cálculos diretos, mostramos que as quatro propriedades são satisfeitas localmente e, pela unicidade, obtemos a independência do sistema de coordenadas. □

**Definição 1.35.** *Uma curva $\alpha : I \to M^n$ é chamada **geodésica** se $(\alpha')' = 0$.*

Através da equação (1.7) obtemos que $\alpha : I \to M^n$ é uma geodésica se, e só se,

$$0 = \frac{d^2(x^k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.8}$$

onde $(x^1, ..., x^n)$ é um sistema de coordenadas ao redor de um ponto de $M^n$ e $\Gamma_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel associados.

Os teoremas de existência e unicidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem nos fornecem alguns resultados de existência e unicidade para geodésicas, como os seguintes.

**Proposição 1.36.** *Se $\alpha, \beta : I \to M^n$ são geodésicas tais que $\alpha'(a) = \beta'(a)$ em algum ponto $a \in I$ então $\alpha = \beta$.*

**Proposição 1.37.** *Dado $v \in T_pM$, existe uma única geodésica $\alpha_v : I \to M^n$ tal que*

*(i) $\alpha_v(p) = 0$ e $\alpha_v'(0) = v$;*

*(i) $\alpha_v$ é maximal, i.e., tem domínio maximal.*

### 1.9.1 A Aplicação Exponencial

**Definição 1.38.** *Seja $v \in V \subset T_pM$ tal que a geodésica $\alpha_v$ é definida ao menos em $[0, 1]$. A **aplicação exponencial** é a função $\exp_p : V \to M$ tal que $\exp_p(v) = \alpha_v(1)$.*

**Proposição 1.39.** *Para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $\widetilde{V}$ da origem em $T_pM$ na qual $\exp_p$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança $U$ de $p$ em $M^n$.*

A prova deste resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa e pode ser encontrada em [9].

Por conveniência, vamos usar a seguinte terminologia. Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança $V$ da origem em $T_pM$, $\exp_p V = U$ é chamada uma **vizinhança normal** de $p$. Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a **bola normal** (ou **geodésica**) de centro $p$ e raio $\varepsilon$.

O seguinte resultado garante a existência de referenciais específicos ao redor de um ponto de $M^n$, que muitas vezes facilita os cálculos.

**Lema 1.9** (Referencial Geodésico)**.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\nabla$. Então, para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de $p$ e $n$ campos de vetores $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de $U$, satisfazendo $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família $E_i$, $i = 1, \ldots, n$, de campos de vetores é chamada um* ***referencial*** *(local)* ***geodésico*** *em $p$.*

*Demonstração.* Sejam $U = B_\varepsilon(p)$ a bola normal de centro $p$ com raio $\varepsilon > 0$ e $\gamma_k : I \to M$ uma geodésica radial, ligando $p$ a $q$ em $B_\varepsilon(p)$. Consideremos $E_1(p), \ldots, E_n(p)$ um referencial ortonormal em $p$ e estendendo cada $E_i(q) = P(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$ paralelamente ao longo de $\gamma_k$ e usando o fato de $P$ ser uma isometria, obtemos $n$ campos de vetores $E_1(q), \ldots, E_n(q) \in \mathfrak{X}(U)$ ortonormais em cada ponto de $U$, uma vez que $q \in U$ é arbitrário. Agora, observando que $\nabla_{E_i} E_j(p)$, depende apenas do valor de $E_i$ e do valor de $E_j$ ao longo da geodésica $\gamma_j$ que no instante $t = 0$ passa por $p$, com velocidade $\gamma_j^{'}(0) = E_j$, temos que

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{\gamma_i^{'}(t)} E_j(\gamma_j(t))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(E_j(\gamma_j(t)))\big|_{t=0} = 0,$$

pois $E_j(\gamma_j(t))$ é um campo paralelo ao longo de $\gamma_j$, $j = 1, \ldots, n$. □

### 1.9.2 Variedades Completas

**Definição 1.40.** *Dizemos que uma variedade Riemanniana $M^n$ é (geodesicamente)* ***completa****, se para todo $p \in M^n$, a aplicação exponencial $exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de $p$ estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Com ajuda da **distância intrínseca** $d(p, q)$, definida como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando $p$ a $q$, é possível obter o seguinte resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontrada em [5] ou [9].

**Teorema 1.41** (Hopf e Rinow)**.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana e consideremos $p \in M^n$. São equivalentes:*

*(i) $exp_p$ está definida em todo $T_pM$;*

*(ii) os limitados e fechados de $M^n$ são compactos;*

*(iii)* $M^n$ *é completa como espaço métrico;*

*(iv)* $M^n$ *é geodesicamente completa.*

*Além disso, cada uma das afirmações acima implica que*

*(v) para todo* $q \in M^n$ *existe uma geodésica* $\gamma$ *ligando* $p$ *a* $q$ *tal que* $\ell(\gamma) = d(p,q)$*, onde* $\ell(\gamma)$ *denota o comprimento de* $\gamma$*.*

## 1.10 Gradiente, Divergente e o Laplaciano

Definimos, nesta seção, alguns operadores que serão utilizados neste trabalho, assim como algumas formas de calculá-los através do uso de um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma variedade Riemanniana $M^n$.

**Definição 1.42.** *Dada* $f \in C^\infty(M)$*, definimos o* ***gradiente*** *de* $f$ *como sendo o campo* $\nabla f$ *tal que* $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X\rangle$*, para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Com relação a um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$\nabla f = \sum_i E_i(f)E_i.$$

De fato, como $\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, E_i\rangle E_i$, então, usando a definição acima, obtemos

$$\nabla f = \sum_i E_i(f)E_i.$$

**Definição 1.43.** *Dado um campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, definimos o* ***divergente*** *de* $X$ *como sendo*

$$div(X) = tr\left(Y \to \nabla_Y X\right).$$

Em um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$div(X) = \sum_i E_i(x^i),$$

onde

$$X = \sum_i x^i E_i.$$

De fato,

$$div(X) = tr\left(Y \to \nabla_Y X\right) = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_{E_i}(\sum_j x^j E_j), E_i\rangle.$$

Como

$$\nabla_{E_i}(x^j E_j) = x^j \nabla_{E_i} E_j + E_i(x^j) E_j = E_i(x^j) E_j,$$

uma vez que o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico em $p$, então

$$divX = \sum_{i,j} \langle E_i(x^j) E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j} E_i(x^j) \langle E_j, E_i \rangle = \sum_i E_i(x^i).$$

**Definição 1.44.** *Para $f \in C^\infty(M)$ temos $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ e, a partir daí, definimos o* ***Laplaciano*** *de $f$, $\Delta f$, como sendo*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Em um referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, temos

$$\Delta f = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

De fato, como

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} \nabla f &= \nabla_{E_i} \left( \sum_j E_j(f) E_j \right) = \sum_j \nabla_{E_i} E_j(f) E_j \\
&= \sum_j \{ E_i(E_j(f)) E_j + E_j(f) \nabla_{E_i} E_j \} \\
&= \sum_j E_i(E_j(f)) E_j,
\end{aligned}$$

uma vez que $\nabla_{E_i} E_j = 0$, pois o referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico em $p$. Logo, como

$$\Delta f = div(\nabla f) = tr\left( Y \to \nabla_Y \nabla f \right),$$

temos que

$$\Delta f = \sum_i \langle \sum_j E_i(E_j(f)) E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j} E_i(E_j(f)) \langle E_j, E_i \rangle = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

# Capítulo 2

# Imersões na Variedade Produto $\mathbb{R} \times M^n$

## 2.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times M^n$

Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana conexa $n$-dimensional, com métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle_M$ e conexão de Levi-Civita ${}^M\nabla$.

No que segue, consideraremos a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ munida com a métrica produto, dada no Lema 1.8. Por simplicidade, escrevemos a métrica produto da forma

$$\langle\ ,\ \rangle = dt^2 + \langle\ ,\ \rangle_M,$$

isto é, se $\partial_t$ denota o vetor unitário que gera $\mathbb{R}$, então para vetores $x = \lambda\partial_t + x^*$ e $y = \mu\partial_t + y^*$ em $\overline{M}^{n+1}$, com $x^*, y^* \in T_pM$, temos

$$\langle x, y\rangle = \lambda\mu + \langle x^*, y^*\rangle_M.$$

Ao longo deste trabalho, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, as subvariedades $M^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ serão chamadas de *slices* de $\overline{M}^{n+1}$.

Como um caso particular da Proposição 1.33 temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.1.** *Sejam* ${}^M\nabla$ *e* $\overline{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* $M^n$ *e* $\overline{M}^{n+1}$*, respectivamente. Se* $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ *e* $V, W \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M)$ *então*

*(i)* $\overline{\nabla}_V W$ *é o levantamento de* ${}^M\nabla_V W$*;*

*(ii)* $\overline{\nabla}_V X = 0 = \overline{\nabla}_X V$.

Como uma consequência direta deste resultado obtemos a seguinte caracterização dos slices.

**Corolário 2.2.** *Os slices de $\overline{M}^{n+1}$ são totalmente geodésicas.*

*Demonstração.* Do item $(i)$ da Proposição 2.1 obtemos que a segunda forma fundamental de $M^n_{t_0}$ é dada por

$$II(V,W) = (\overline{\nabla}_V W)^\perp = ({}^M\nabla_V W)^\perp = 0,$$

para todos $V, W \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M)$. Assim, segundo a Definição 1.30, $M^n_{t_0}$ é totalmente geodésica. □

Para uso futuro, mostramos aqui o seguinte resultado.

**Lema 2.1.** *Com as notações estabelecidas acima, $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$.*

*Demonstração.* Como $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1$ então $0 = \partial_t\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t \rangle$. Assim $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t$ não tem componente na direção $\partial_t$. Logo, existe $V \in \mathfrak{L}_{\mathcal{V}}(M)$ tal que $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = V$. Agora, como $\langle \partial_t, V \rangle = 0$ então do item $(ii)$ da Proposição 2.1 obtemos

$$0 = \partial_t\langle \partial_t, V \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, V \rangle + \langle \partial_t, \underbrace{\overline{\nabla}_{\partial_t} V}_{0} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, V \rangle.$$

Assim $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t$ também não possui componentes nas direções de $M^n$. □

No que segue, iremos considerar uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ de uma variedade Riemanniana $n$-dimensional orientada, conexa, completa $\Sigma^n$ na variedade produto $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$. Abreviaremos tudo isso dizendo simplesmente que $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ é uma hipersuperfície completa.

Exemplos de hipersuperfícies no produto $\mathbb{R} \times M^n$ são dados pelo chamados gráficos verticais, que passamos a descrever.

**Exemplo 3.** *Sejam $\Omega$ um domínio conexo de uma variedade Riemanniana conexa $M^n$ e $u \in C^\infty(\Omega)$. O* ***gráfico vertical*** *de $u$ em $\mathbb{R} \times M^n$ é a hipersuperfície*

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subset \mathbb{R} \times M^n.$$

*Dizemos que um gráfico vertical é* ***inteiro*** *quando $\Omega = M^n$. A métrica induzida em $\Omega$ a partir da métrica produto do espaço ambiente via $\Sigma^n(u)$ é dada por*

$$\langle\, , \rangle = du^2 + \langle\, , \rangle_{M^n}.$$

Para uma hipersuperfície completa $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$, denotemos por $\nabla$ a conexão de Levi-Civita de $\Sigma^n$ e por $N$ seu campo de vetores normais unitários. Notemos que as fórmulas de Gauss e Weingarten são dadas, respectivamente, por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N \tag{2.1}$$

e

$$AX = -\overline{\nabla}_X N, \tag{2.2}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ indica o operador de forma de Weingarten de $\Sigma^n$ com relação a sua orientação $N$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle N, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X N)^\top + (\overline{\nabla}_X N)^\perp, Y\rangle + \langle N, (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X N)^\top, Y\rangle + \langle N, (\overline{\nabla}_X Y)^\perp\rangle. \end{aligned}$$

Agora, como $AX$ é a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X N$ (veja Proposição 1.29), ou seja, $AX = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$ e $II(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$, temos que

$$-\langle AX, Y\rangle + \langle II(X,Y), N\rangle = 0 \Rightarrow \langle AX, Y\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle.$$

Daí, $II(X,Y) = \langle AX, Y\rangle N$. Portanto, a fórmula de Gauss, $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y)$, torna-se $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N$.

Para a fórmula de Weingarten, temos que $0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle$, ou seja, $\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0$. Como $\overline{\nabla}_X N = \nabla_X N + (\nabla_X N)^\perp$, então $\langle (\nabla_X N)^\perp, N\rangle = 0$, para todo $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, o que implica $(\nabla_X N)^\perp = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, a fórmula de Weingarten (veja Proposição 1.29),

$$AX = -\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp = -\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp + 0\right) = -\left(\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\perp + \left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top\right) = -\overline{\nabla}_X N.$$

**Definição 2.3.** *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície completa. A **curvatura média** $H$ de $\Sigma^n$ é definida por*

$$H(p) = \frac{1}{n} tr(A)\,, \quad p \in \Sigma^n\,,$$

*onde $A$ é o operador de forma de $\Sigma^n$ com relação ao campo de vetores normais unitários $N$.*

## 2.2 A Equação de Gauss e o Tensor de Ricci de uma Hipersuperfície em $\mathbb{R} \times M^n$

Um fato bem conhecido é que o tensor curvatura $R$ da hipersuperfície $\Sigma^n$ pode ser descrito em termos do operador de forma $A$ e do tensor curvatura $\overline{R}$ de $\mathbb{R} \times M^n$ pela equação de Gauss, dada por

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \tag{2.3}$$

quaisquer que sejam os campos vetoriais tangentes $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

De fato, a equação (2.3) é válida pois

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\ &= (\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\ &= (\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} \\ &\quad -(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z)^{\top} - (\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z)^{\top} \\ &\quad -(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top}. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \langle AY, Z\rangle N))^{\top} \\ &\quad -(\overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle N))^{\top} - (\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z)^{\top})^{\top} + (\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z)^{\top})^{\top} \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z)^{\top} + \langle AY, Z\rangle N(\overline{\nabla}_X N)^{\top} \\ &\quad -(\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z)^{\top} - \langle AX, Z\rangle(\overline{\nabla}_Y N)^{\top} - (\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z)^{\top} + (\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z)^{\top} \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + \langle AY, Z\rangle(-AX) - \langle AX, Z\rangle(-AY) \\ &= (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \end{aligned}$$

como queríamos.

**Lema 2.2.** *Sejam $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $Ric_\Sigma : \mathfrak{X}(\Sigma)^2 \to C^\infty(\Sigma)$ a curvatura de Ricci de $\Sigma^n$, então*

$$Ric_\Sigma(X,X) = \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle,$$

*onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal local de $\mathfrak{X}(\Sigma)$.*

*Demonstração.* Usando a equação de Gauss, obtemos

$$R(X,E_i)X = (\overline{R}(X,E_i)X)^\top + \langle AX, X\rangle AE_i - \langle AE_i, X\rangle AX.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} Ric_\Sigma(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + \langle AX, X\rangle \sum_i \langle AE_i, E_i\rangle - \sum_i \langle \langle AE_i, X\rangle AX, E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \sum_i \langle AX, E_i\rangle\langle AX, E_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle. \end{aligned}$$

□

## 2.3 As funções altura e ângulo

Vamos analisar duas funções que estão naturalmente ligadas à hipersuperfície $\Sigma^n$ imersa no espaço produto $\mathbb{R} \times M^n$, a saber, a função altura $h = (\pi_\mathbb{R})\big|_\Sigma$ e a função ângulo $\eta = \langle N, \partial_t\rangle$.

### 2.3.1 A função altura

Temos que a **função altura** $h$ em $\Sigma^n$, $h : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, é dada por $h(t,q) = t$. Calculemos o gradiente de $h$, $\nabla h$, sobre $\Sigma^n$.

Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então podemos escrever $X = f\partial_t + X^*$, onde $X^*$ é tangente a $M^n$ e, assim,

$$\langle \nabla h, X\rangle = X(h) = f\partial_t(t) + X^*(t) = f.$$

Como

$$\langle X, \partial_t \rangle = \langle f\partial_t + X^*, \partial_t \rangle = f,$$

segue que $\langle \nabla h, X \rangle = \langle \partial_t, X \rangle$ e daí

$$\nabla h = \partial_t^\top = \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N = \partial_t - \eta N, \tag{2.4}$$

onde $(\ )^\top$ denota a componente tangencial de um campo vetorial em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de $\Sigma^n$.

Portanto, temos

$$|\nabla h|^2 = 1 - \eta^2, \tag{2.5}$$

onde $|\ |$ denota a norma de um campo vetorial sobre $\Sigma^n$.

### 2.3.2 A função ângulo

Analisemos a **função ângulo** $\eta = \langle N, \partial t \rangle$. Calculemos primeiro seu gradiente. Temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla \eta, X \rangle &= X\langle N, \partial_t \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= \langle -AX, \partial_t \rangle = \langle -AX, \partial_t^\top \rangle = \langle -AX, \nabla h \rangle \\ &= \langle -A(\nabla h), X \rangle. \end{aligned}$$

Como o campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é arbitrário, segue que $\nabla \eta = -A(\nabla h)$.

O cálculo do Laplaciano de $\eta$ é um pouco mais complexo e será dado no lema seguinte.

**Lema 2.3.** *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície com orientação $N$ e $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ sua função ângulo. Se $\Sigma^n$ tem curvatura média $H$ constante, então*

$$\triangle \eta = -\ (Ric_M(N^*, N^*) + |A|^2)\eta,$$

*onde $Ric_M$ denota a curvatura de Ricci da fibra $M^n$, $N^*$ é a projeção do campo vetorial normal unitário $N$ sobre a fibra $M^n$ e $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt do operador de forma $A$.*

*Demonstração.* Seja $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico local de autovetores de $A$ em $p \in \Sigma^n$ fixado, então, em $p$, temos

$$\begin{aligned}\triangle\eta &= \sum_{k=1}^n E_k E_k(\eta) = \sum_{k=1}^n E_k E_k\langle N, \partial_t\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n E_k(\langle \overline{\nabla}_{E_k} N, \partial_t\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{E_k}\partial_t\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^n E_k\langle \overline{\nabla}_{E_k} N, \partial_t\rangle = -\sum_{k=1}^n E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Denotemos por

$$\partial_t = \sum_l \alpha_l E_l + \langle N, \partial_t\rangle N \tag{2.7}$$

e

$$AE_k = \sum_l h_{kl} E_l. \tag{2.8}$$

Então

$$\begin{aligned} E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_k} AE_k, \partial_t\rangle + \langle AE_k, \overline{\nabla}_{E_k}\partial_t\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}(\sum_l h_{kl}E_l), \partial_t\rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl})\langle E_l, \partial_t\rangle + \sum_l h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \partial_t\rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl})\langle E_l, \sum_j \alpha_j E_j + \langle N, \partial_t\rangle N\rangle \\ &\quad + \sum_l h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \partial_t^\top + \langle N, \partial_t\rangle N\rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \sum_l h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, \langle N, \partial_t\rangle N\rangle \\ &= \sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N\rangle. \end{aligned}$$

Acima usamos que a parte tangente de $\overline{\nabla}_{E_k} E_l$ é nula em $p$, uma vez que o referencial foi tomado geodésico em $p$.

Como $N$ é ortogonal ao espaço tangente onde $E_l$ está inserido, vale $\langle E_l, N\rangle = 0$, daí

$$E_k\langle E_l, N\rangle = 0 \Rightarrow \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N\rangle = \langle E_l, -\overline{\nabla}_{E_k} N\rangle = \langle E_l, AE_k\rangle.$$

Sendo $A$ autoadjunta, temos $\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle$ e daí

$$h_{kl} = \langle AE_k, E_l\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_l, N\rangle.$$

Portanto,

$$E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle = \sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}^2.$$

Assim, pela equação (2.6), temos no ponto $p$,

$$\begin{aligned} \triangle\eta &= -\sum_k(\sum_l E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_l h_{kl}^2) \\ &= -(\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle \sum_{k,l} h_{kl}^2) \\ &= -(\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l + \langle N, \partial_t\rangle |A|^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Analisemos, agora, o valor de $\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l$. Como $h_{kl} = \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} E_k(h_{kl}) &= E_k\langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, \overline{\nabla}_{E_k} N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, AE_k\rangle. \end{aligned}$$

Sendo o referencial ortonormal $\{E_k\}_{k=1}^n$ geodésico em p, temos $(\overline{\nabla}_{E_l} E_k)^\top = 0$ em $p$ e daí $\langle \overline{\nabla}_{E_l} E_k, AE_k\rangle = 0$ e, assim, obtemos

$$E_k(h_{kl}) = \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle.$$

Agora, observemos que $\overline{\nabla}_{[E_l,E_k]} E_k = 0$, pois sendo $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico em $p$, temos que

$$\begin{aligned} [E_l, E_k] &= \overline{\nabla}_{E_l} E_k - \overline{\nabla}_{E_k} E_l \\ &= \nabla_{E_l} E_k + \langle AE_k, N\rangle N - \nabla_{E_k} E_l - \langle AE_k, E_l\rangle N \\ &= \langle AE_l, E_k\rangle N - \langle AE_k, E_l\rangle N = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_k(h_{kl}) &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l} E_k - \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\ &= \langle \overline{R}(E_l, E_k)E_k, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle \\ &= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle \overline{\nabla}_{E_k} E_k, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_k} E_k, \overline{\nabla}_{E_l} N\rangle \\ &= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle + \langle \nabla_{E_k} E_k + \langle AE_k, E_k\rangle N, AE_l\rangle \\ &= -\langle \overline{R}(E_l, E_k)N, E_k\rangle + E_l\langle AE_k, E_k\rangle. \end{aligned}$$

Somando, agora em $k$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_k E_k(h_{kl}) &= -\sum_k \langle \overline{R}(E_l,E_k)N,E_k\rangle + E_l(\sum_k \langle AE_k,E_k\rangle)\\ &= -\overline{Ric}(E_l,N) + E_l(nH)\\ &= -\overline{Ric}(E_l,N),\end{aligned}$$

uma vez que $H$ é constante.

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l &= -\sum_l \alpha_l \overline{Ric}(E_l,N) = -\overline{Ric}(\sum_l \alpha_l E_l, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t - \langle N,\partial_t\rangle N, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t,N) + \langle N,\partial_t\rangle \overline{Ric}(N,N).\end{aligned}$$

Notemos que

$$\overline{Ric}(\partial_t,N) = \overline{Ric}(N,\partial_t) = \sum_k \langle \overline{R}(N,E_k)\partial_t, E_k\rangle = 0.$$

De fato, temos que $[N,E_k] \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times M^n)$, daí $[N,E_k] = \alpha\partial_t + X$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t = \alpha\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_X\partial_t = 0$. Pela mesma razão, $\overline{\nabla}_N\partial_t = 0$. Logo,

$$\overline{R}(N,E_k)\partial_t = \overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t - \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{E_k}\partial_t + \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_N\partial_t = 0$$

e, consequentemente,

$$\overline{Ric}(\partial_t,N) = 0.$$

Assim,

$$\sum_{k,l} E_k(h_{kl})\alpha_l = \langle N,\partial_t\rangle\overline{Ric}(N,N). \tag{2.10}$$

Substituindo a equação (2.10) na equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}\triangle\eta &= -(\langle N,\partial_t\rangle\overline{Ric}(N,N) + \langle N,\partial_t\rangle|A|^2)\\ &= -(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2)\eta.\end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração, provaremos que

$$\overline{Ric}(N,N) = \overline{Ric}(N^*,N^*) = Ric_M(N^*,N^*).$$

Como $N^*$ é a projeção do campo vetorial normal unitário $N$ sobre a fibra $M^n$, então $N = \eta\partial_t + N^*$, então

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(N,N) &= \overline{Ric}(\eta\partial_t + N^*, \eta\partial_t + N^*) \\ &= \eta^2\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) + 2\eta\overline{Ric}(\partial_t, N^*) + \overline{Ric}(N^*, N^*). \end{aligned}$$

Sendo $E_i^*$ a projeção do campo vetorial $E_i$ sobre $M^n$, temos que $E_i = f_i\partial_t + E_i^*$, onde $f_i = \langle E_i, \partial_t\rangle$, daí

$$\begin{aligned} [\partial_t, E_i] &= \overline{\nabla}_{\partial_t}E_i - \overline{\nabla}_{E_i}\partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t}(f_i\partial_t + E_i^*) - \overline{\nabla}_{(f_i\partial_t + E_i^*)}\partial_t \\ &= \partial_t(f_i)\partial_t + f_i\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_{\partial_t}E_i^* - f_i\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - \overline{\nabla}_{E_i^*}\partial_t \\ &= \partial_t(f_i)\partial_t, \end{aligned}$$

e, assim, $\overline{\nabla}_{[\partial_t, E_i]}\partial_t = \partial_t(f_i)\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Temos também que $\overline{\nabla}_{E_i}\partial_t = 0$. Então

$$\overline{R}(\partial_t, E_i)\partial_t = 0,$$

e, consequentemente,

$$\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) = \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(\partial_t, E_i)\partial_t, E_i\rangle = 0.$$

Como $0 = \overline{Ric}(\partial_t, N) = \eta\overline{Ric}(\partial_t,\partial_t) + \overline{Ric}(\partial_t, N^*)$, segue que $\overline{Ric}(\partial_t, N^*) = 0$. Logo,

$$\overline{Ric}(N,N) = \overline{Ric}(N^*, N^*) = Ric_M(N^*, N^*).$$

□

## 2.4 O Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau

O próximo resultado é uma ferramenta analítica devido a H. Omori e S. T. Yau [8, 14], conhecido como o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau e será utilizado na demonstração do principal resultado desta dissertação.

**Lema 2.4.** *Sejam $\Sigma^n$ uma variedade Riemanianna n-dimensional completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ uma função suave limitada inferiormente. Então existe uma sequência $(p_k)$ em $\Sigma^n$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \inf_{\Sigma} f, \ \lim_{k\to\infty}|\nabla f(p_k)| = 0 \ e \ \lim_{k\to\infty}\triangle f(p_k) \geq 0.$$

A demonstração deste resultado foge aos propósitos deste trabalho, mas pode ser encontrada em [3] e [11].

# Capítulo 3

# Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

## 3.1 O Espaço Hiperbólico

Consideremos o semiespaço

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,; \;\; x_n > 0\},$$

e introduzamos em $\mathbb{H}^n$ a métrica Riemanniana $g = \langle\, ,\rangle_{\mathbb{H}^n}$ cujas componentes são dadas por

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}, \tag{3.1}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \;\; \text{se} \;\; i = j \,, \\ 0 & , \;\; \text{se} \;\; i \neq j \,. \end{cases}$$

denotam as componentes da métrica usual de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{H}^n$ é chamado o **espaço hiperbólico** de dimensão $n$.

Afirmamos que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ tem curvatura seccional constante igual a $-1$.

De fato, faremos uma boa parte do cálculo numa situação mais geral.

**Definição 3.1.** *Duas métricas* $\langle\ ,\ \rangle$ *e* $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ *em uma variedade diferenciável* $M$ *são ditas conformes se existe uma função diferenciável* $f : M \to \mathbb{R}$, *positiva, tal que para todo* $p \in M$ *e todo* $u, v \in T_pM$ *tem-se*

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle_p.$$

Notemos que a métrica (3.1) de $\mathbb{H}^n$ é conforme à métrica usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Consideremos em $\mathbb{H}^n$ a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

onde $F$ é uma função positiva diferenciável em $\mathbb{H}^n$ e observemos que esta métrica é conforme à métrica usual de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$ a matriz inversa de $g_{ij}$ e façamos $\log F = f$. Assim, indicando por $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$, temos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik}\frac{2}{F^3}F_j = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2}f_j.$$

Para o cálculo dos símbolos de Christoffel, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m}g_{ij}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}F^2 \\
&= -\delta_{jk}f_i - \delta_{ki}f_j + \delta_{ij}f_k,
\end{aligned}$$

e daí concluímos que se os três índices são distintos, $\Gamma_{ij}^k = 0$, e, que para dois índices iguais, temos

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j,\ \Gamma_{ii}^j = f_j,\ \Gamma_{ij}^j = -f_i,\ \Gamma_{ii}^i = -f_i.$$

Observemos que, para o cálculo dos coeficientes da curvatura, temos

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \sum_l R_{iji}^l g_{lj} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F^2} \\
&= \frac{1}{F^2}\left\{\sum_l \Gamma_{ij}^l\Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l\Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j\right\}.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$, teremos

$$\begin{aligned}
F^2 R_{ijij} &= -\sum_{l,l\neq i,l\neq j} f_l f_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\
&= -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}.
\end{aligned}$$

Além disto, se os quatro índices são distintos, $R_{ijkl} = 0$, e, que para três índices distintos, temos

$$R_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj},\ R_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki},\ R_{ijk}^k = 0. \tag{3.2}$$

Finalmente, como $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ são ortogonais, a curvatura seccional do plano gerado por $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij}F^4 \\ &= \left(-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}\right)F^2. \end{aligned}$$

Particularizando para o caso $F^2 = x_n^2$, obtemos $f = \log x_n$. Neste caso, se $i \neq j$ e $j \neq n$, teremos

$$K_{ij} = (-\frac{1}{x_n^2})x_n^2 = -1;$$

se $i = n$, $j \neq n$, teremos

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = -\frac{1}{x_n^2}x_n^2 = -1;$$

finalmente, se $i \neq j$, $j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Usando as expressões em (3.2) e a Proposição 1.18, concluimos que a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ é constante e igual a $-1$. Provando assim nossa afirmação.

É possivel mostrar que as geodésicas (retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e círculos de $\mathbb{H}^n$ contidos em planos perpendiculares ao hiperplano $x_n$=0 e cujos centros estão neste hiperplano) de $\mathbb{H}^n$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, o Teorema de Hopf e Rinow (Teorema 1.41) nos garante que $\mathbb{H}^n$ é completa.

## 3.2 Um Teorema tipo Bernstein em $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$

Vamos, agora, enunciar e provar o principal resultado deste trabalho.

**Teorema 3.2.** *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental $A$ limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que a função ângulo $\eta$ de $\Sigma^n$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$, e que a função altura $h$ satisfaça*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2, \tag{3.3}$$

*para alguma constante $0 < \alpha < 1$. Então $\Sigma^n$ é um slice.*

*Demonstração.* Pela condição dada da função ângulo, podemos escolher sobre $\Sigma^n$ um campo vetorial normal unitário $N$ tal que $\langle N, \partial_t \rangle \geq \delta > 0$. Daí segue que

$$\inf_{p \in \Sigma} \eta(p)$$

existe e é um número positivo.

Por outro lado, pelo Lema 2.3, obtemos que

$$\Delta \eta = -(Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) + |A|^2)\eta,$$

onde $N^*$ é a projeção do campo vetorial normal unitário $N$ sobre $\mathbb{H}^n$, isto é, $N^* = N - \eta \partial_t$.

Como a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ é igual a $-1$, temos que

$$R_{\mathbb{H}^n}(X, Y)Z = -(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$. Daí, tomando um referencial ortonormal local $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) &= \sum_i \langle R_{\mathbb{H}^n}(N^*, X_i)N^*, X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= \sum_i \langle -(\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} X_i - \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} N^*), X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= \sum_i \langle -(\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \langle X_i, X_i \rangle_{\mathbb{H}^n} + \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n}^2) \\
&= -\sum_i (\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n}^2) \\
&= -n\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} + \sum_i \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \langle X_i, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= -n\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} + \langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \\
&= -(n-1)\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n}.
\end{aligned}$$

Como $N^* = N - \eta \partial_t$, temos que $\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^n} = 1 - \eta^2$ e, usando a equação (2.5), obtemos

$$Ric_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) = -(n-1)|\nabla h|^2.$$

Portanto,

$$\triangle \eta = -(-(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2)\eta = ((n-1)|\nabla h|^2 - |A|^2)\eta.$$

Da hipótese (3.3), obtemos que $(n-1)|\nabla h|^2 \leq \alpha |A|^2$ e daí temos que

$$\triangle \eta \leq (\alpha |A|^2 - |A|^2)\eta = -(1-\alpha)|A|^2 \eta \leq 0, \tag{3.4}$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$.

Vamos, agora, mostrar que a curvatura de Ricci de $\Sigma^n$, $Ric_\Sigma$, é limitada inferiormente.

Observemos que se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local de $\Sigma^n$, então, pelo Lema 2.2, temos

$$Ric_\Sigma(X,X) = \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i \rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -nH\langle AX,X\rangle + \langle AX,AX\rangle &\leq |-nH\langle AX,X\rangle + \langle AX,AX\rangle| \\ &\leq n|H||\langle AX,X\rangle| + |\langle AX,AX\rangle| \\ &\leq (n|H||A| + |A|^2)|X|^2 \end{aligned}$$

e daí

$$nH\langle AX,X\rangle - \langle AX,AX\rangle \geq -(n|H||A| + |A|^2)|X|^2.$$

Assim,

$$Ric_\Sigma(X,X) \geq \sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle - (n|H||A| + |A|^2)|X|^2.$$

Temos que

$$\langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle = \langle \overline{R}(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle,$$

onde $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle \partial_t$ e $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$ são as projeções dos campos vetoriais tangentes $X$ e $E_i$ em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, respectivamente. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle &= \langle \overline{R}(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} \\ &= -(\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle E_i^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle E_i^*,X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle X^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n}) \\ &= -(\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{H}^n}\langle E_i^*,E_i^*\rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X^*,E_i^*\rangle^2_{\mathbb{H}^n}). \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos campos, temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= -(\langle X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\rangle\langle E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t\rangle \\
&\quad -\langle X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t\rangle^2) \\
&= -(((\langle X, X\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad +\langle X, \partial_t\rangle^2\langle\partial_t, \partial_t\rangle)(|E_i|^2 - \langle E_i, \partial_t\rangle^2) \\
&\quad -(\langle X, E_i\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle - \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle + \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle)^2) \\
&= -((|X|^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2)(1 - \langle E_i, \partial_t\rangle^2) - (\langle X, E_i\rangle - \langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle)^2 \\
&= -(|X|^2 - |X|^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \langle X, \partial_t\rangle^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad -(\langle X, E_i\rangle^2 - 2\langle X, E_i\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle + \langle E_i, \partial_t\rangle^2\langle X, \partial_t\rangle^2)).
\end{aligned}$$

Tomando a somatória em $i$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - n\langle X, \partial_t\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \partial_t\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2 - \sum_i\langle X, E_i\rangle^2 \\
&\quad + 2\langle X, \partial_t\rangle\sum_i\langle X, E_i\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle - \langle X, \partial_t\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t\rangle^2) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle^2 - n\langle X, \partial_t^\top\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \partial_t^\top\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle^2 - \langle X, \sum_i\langle X, E_i\rangle E_i\rangle \\
&\quad + 2\langle X, \partial_t^\top\rangle\langle\sum_i\langle X, E_i\rangle E_i, \partial_t^\top\rangle - \langle X, \partial_t^\top\rangle^2\sum_i\langle E_i, \partial_t^\top\rangle) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2 - n\langle X, \nabla h\rangle^2 \\
&\quad + \langle X, \nabla h\rangle\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2 - \langle X, X\rangle \\
&\quad + 2\langle X, \nabla h\rangle\langle X, \nabla h\rangle - \langle X, \nabla h\rangle\sum_i\langle E_i, \nabla h\rangle^2) \\
&= -(n|X|^2 - |X|^2\langle\sum_i\langle\nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle \\
&\quad - n\langle X, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle\langle\sum_i \nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle - |X|^2 \\
&\quad + 2\langle X, \nabla h\rangle^2 - \langle X, \nabla h\rangle\langle\sum_i\langle\nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\rangle)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -((n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - n\langle X,\nabla h\rangle^2 \\
&\quad + \langle X,\nabla h\rangle|\nabla h|^2 + 2\langle X,\nabla h\rangle^2 - \langle X,\nabla h\rangle|\nabla h|^2) \\
&= -((n-1)|X|^2 - |X|^2|\nabla h|^2 - (n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2) \\
&= -(n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2|X|^2 + (n-2)\langle X,\nabla h\rangle^2.
\end{aligned}
$$

Daí, obtemos

$$\sum_i \langle \overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle \geq -(n-1)|X|^2.$$

Portanto,

$$Ric_\Sigma(X,X) \geq -(n-1)|X|^2 - (n|H||A| + |A|^2)|X|^2,$$

ou seja,

$$Ric_\Sigma(X,X) \geq -((n-1) + n|H||A| + |A|^2)|X|^2, \tag{3.5}$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Consequentemente, como estamos supondo que $H$ é constante e $A$ é limitada, temos que $Ric_\Sigma$ é limitada inferiormente.

Agora, estamos em condições de aplicar o Lema 2.4 para a função ângulo $\eta$ e, assim, garantir a existência de uma sequência de pontos $(p_k)$ em $\Sigma^n$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \triangle\eta(p_k) \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \eta(p_k) = \inf_\Sigma \eta.$$

Consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty} \eta^2(p_k) = \inf_\Sigma \eta^2.$$

Portanto, de (3.4), obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \triangle\eta(p_k) \leq -(1-\alpha)\lim_{k\to\infty}|A|^2(p_k)\inf_\Sigma \eta \leq 0.$$

Desde que $\inf_\Sigma \eta$ é um número positivo, segue que

$$\lim_{k\to\infty}|A|^2(p_k) = 0.$$

Agora, usando mais uma vez a hipótese (3.3), obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty}|\nabla h|^2(p_k) \leq \frac{\alpha}{n-1}\lim_{k\to\infty}|A|^2(p_k) = 0$$

e daí

$$\lim_{k\to\infty}|\nabla h|^2(p_k) = 0,$$

o que implica pela relação (2.5) que

$$\inf_{\Sigma} \eta^2 = \lim_{k \to \infty} \eta^2(p_k) = 1.$$

Mas $\eta^2 \leq 1$, portanto, $\eta^2 \equiv 1$ ou $|\nabla h|^2 \equiv 0$. Logo existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h \equiv t_0$ e, consequentemente, $\Sigma^n$ é um slice.

$\square$

Observemos que

$$nH^2 \leq |A|^2. \tag{3.6}$$

De fato, consideremos os vetores

$$u = (\overbrace{k_1, ..., k_1}^{n-vezes}, \overbrace{k_2, ..., k_2}^{n-vezes}, ..., \overbrace{k_n, ..., k_n}^{n-vezes}),$$

$$v = (k_1, ..., k_n, \quad k_1, ..., k_n, \quad ..., \quad k_1, ..., k_n) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

onde os $k_i$ são os autovalores de $A$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= k_1 \textstyle\sum_i k_i + k_2 \sum_i k_i + ... + k_n \sum_i k_i \\ &= \textstyle\sum_j k_j \sum_i k_i = n^2 H^2. \end{aligned}$$

Notemos que

$$|u|^2 = nk_1^2 + nk_2^2 + ... + nk_n^2 = n|A|^2$$

e

$$|v|^2 = \underbrace{\sum_i k_i^2 + \sum_i k_i^2 + ... + \sum_i k_i^2}_{n-vezes} = n|A|^2.$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v| = |u|^2$$

e daí

$$n^2 H^2 \leq n|A|^2 \quad \text{ou} \quad nH^2 \leq |A|^2,$$

como queríamos.

Do Teorema 3.2, obtemos o

**Corolário 3.3.** *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa com segunda forma fundamental $A$ limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

*(a) A função ângulo $\eta$ de $\Sigma^n$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$.*

*(b) $H^2 \leq \frac{n-1}{n}$.*

*Se a função altura $h$ de $\Sigma^n$ é tal que*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2, \tag{3.7}$$

*para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então $\Sigma^n$ é um slice.*

*Demonstração.* Suponhamos que a condição $(a)$ é satisfeita. Da desigualdade (3.6) e da hipótese (3.7), concluímos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2 \leq \frac{\alpha}{n-1} |A|^2,$$

ou seja, a hipótese (3.3) é verificada e, portanto, o resultado segue do Teorema 3.2.

No caso da condição $(b)$ ser satisfeita, a hipótese (3.7) nos dá

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2 \leq \alpha < 1.$$

Assim, pela equação (2.5), temos que

$$\eta^2 = 1 - |\nabla h|^2 \geq 1 - \alpha > 0.$$

Portanto, a função ângulo $\eta$ satisfaz a condição $(a)$ e, assim, o resultado segue como no caso anterior.

$\square$

## 3.3 Gráficos Verticais Completos em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Nesta última seção, vamos estudar o caso em que a hipersuperfície imersa é um gráfico vertical.

Seja $\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ um gráfico vertical completo. Temos que a função $g : \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$, dada por $g(t, x) = t - u(x)$, é tal que $\Sigma^n(u) = g^{-1}(0)$. De fato,

$$\begin{aligned} g^{-1}(0) &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n; g(t, x) = 0\} \\ &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n; t = u(x)\} \\ &= \{(u(x), x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n\} \\ &= \{(u(x), x); x \in \mathbb{H}^n\} \\ &= \Sigma^n(u). \end{aligned}$$

Além disso, para todo campo vetorial $X$ tangente a $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, sendo $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$ a projeção de $X$ em $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, $\overline{\nabla} g$ o gradiente de $g$ e $Du$ o gradiente de $u$ em $\mathbb{H}^n$, então

$$\begin{aligned} \langle\overline{\nabla} g, X\rangle &= X(g) = \langle X, \partial_t\rangle\partial_t(g) + X^*(g) \\ &= \langle X, \partial_t\rangle - X^*(u) = \langle X, \partial_t\rangle - \langle Du, X^*\rangle \\ &= \langle \partial_t, X\rangle - \langle Du, X\rangle \\ &= \langle \partial_t - Du, X\rangle, \end{aligned}$$

pois $Du$ é tangente a $\mathbb{H}^n$. Portanto,

$$\overline{\nabla} g(u(x), x) = \partial_t|_{(u(x),x)} - Du(x),$$

para todo $x$ em $\mathbb{H}^n$. Assim, o campo vetorial unitário

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}(\partial_t|_{(u(x),x)} - Du(x)), \ x \in \mathbb{H}^n,$$

onde $|Du|$ é a norma com respeito à métrica hiperbólica $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}^n}$, define a orientação de $\Sigma^n(u)$ tal que $\eta = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} > 0$. Consequentemente, de acordo com a equação (2.5), temos

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= 1 - \langle N, \partial_t\rangle^2 \\ &= 1 - \langle \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}(\partial_t|_{(u(x),x)} - Du(x)), \partial_t\rangle^2 \\ &= 1 - \frac{1}{1 + |Du|^2}(\langle \partial_t|_{(u(x),x)}, \partial_t\rangle - \langle Du(x), \partial_t\rangle)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{1 + |Du|^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|^2}{1 + |Du|^2}. \tag{3.8}$$

Do Teorema 3.2 e da equação (3.8), temos

**Corolário 3.4.** *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental $A$ limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que a função ângulo $\eta$ de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$. Se a função $u$ satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2, \tag{3.9}$$

*então $u \equiv t_o$ para algum $t_o \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Da hipótese (3.9) e da equação (3.8), temos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1 + |Du|^2}\right)|A|^2.$$

Considerando $\alpha$ tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$ obtemos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

com $0 < \alpha < 1$, que é a hipótese (3.3) do Teorema 3.2. Portanto, aplicando o Teorema 3.2, $\Sigma^n(u)$ é um slice, logo a função altura $h$ é constante e, consequentemente, $|\nabla h|^2 \equiv 0$. Sendo $|\nabla h|^2 = \dfrac{|Du|^2}{1+|Du|^2}$, temos que $Du \equiv 0$, logo existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u \equiv t_0$. $\square$

Finalmente, o Corolário 3.3 juntamente com a equação (3.8) nos fornecem o

**Corolário 3.5.** *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média $H$ constante. Suponhamos que uma das seguintes condições é satisfeita:*

*(a) A função ângulo $\eta$ de $\Sigma^n(u)$ verifique $\eta \geq \delta > 0$, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais unitários $N$ e para alguma constante $\delta$.*

*(b)* $H^2 \leq \dfrac{n-1}{n}$.

*Se* $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$*, então* $u \equiv t_0$ *para algum* $t_0 \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* Suponhamos que a condição $(a)$ seja satisfeita. Da equação (3.8) e da hipótese $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, obtemos

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{1+|Du|^2}H^2.$$

Considerando $\alpha$ tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$ obtemos que

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1}H^2,$$

com $0 < \alpha < 1$, que é a hipótese (3.7) do Corolário 3.3. Portanto, aplicando o Corolário 3.3, $\Sigma^n(u)$ é um slice. Logo, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u \equiv t_0$.

Suponhamos, agora, que a condição $(b)$ é satisfeita, então a equação (3.8), juntamente com a hipótese $|Du|^2 \leq \dfrac{n}{n-1}H^2$, nos dão $|\nabla h|^2 \leq \dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{1}{1+|Du|^2}$, ou seja, $|\nabla h|^2 \leq \dfrac{1}{1+|Du|^2}$. Tomando $\alpha$ tal que $0 < \alpha < \dfrac{1}{1+|Du|^2}$, obtemos que $|\nabla h|^2 \leq \alpha < 1$. Assim, pela equação (2.5), temos que

$$\eta^2 = 1 - |\nabla h|^2 \geq 1 - \alpha > 0.$$

Logo, a função ângulo $\eta$ satisfaz a condição $(a)$. Portanto, o resultado segue como no caso anterior.

$\square$

# Referências Bibliográficas


[1] ALIAS, L.J.; DAJCZER, M; RIPOLL, J. *A Bernstein-type Theorem for Riemannian manifolds with a Killing field*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31**, 363-373, 2007.

[2] BÉRARD, P.; EARP, R. S. *Examples of H-hypersurfaces in* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ *and geometric applications*, Mat. Contemp. **34**, 19-51, 2008.

[3] BEZERRA, K.S. *Um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas em variedades de Lorentz*, Universidade Federal do Ceará (UFC), (Dissertação de Mestrado), 2009.

[4] BOMBIERI, E.; GIORGI, E. de; GIUSTI, E. *Minimal cones and Bernstein problem*, Invent. Math. **7**, 243-268, 1969.

[5] DoCARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática pura e aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 4ª Edição, 2008.

[6] ESPINAR, J.M.; ROSENBERG, H. *Complete constant mean curvature surfaces and Bernstein type theorems in* $M^2 \times \mathbb{R}$, J. Diff. Geom. **82**, 611-628, 2009.

[7] LIMA, H.F.; PARENTE, U.L. *A Bernstein type theorem in* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, Bull. Braz Math Soc, New Series **43(1)**, 17-26, 2012.

[8] OMORI, H. *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan.**19**, 205-214, 1967.

[9] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, Los Angeles, 1983.

[10] PARENTE, U.L. *Alguns Resultados Tipo-Bernstein em Variedades Semi-Riemannianas*, Universidade Federal do Ceará (UFC), (Tese de Doutorado), 2011.

[11] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A.G. *Maximum principles on Riemannian Manifolds and applications*, Memoirs of the American Math. Soc., vol. 174, number 822, 2005.

[12] ROSENBERG, H. *Minimal surfaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$, Illinois J. Math., **46**, 1177-1195, 2012.

[13] SIMONS, J. *Minimals varieties in Riemannian manifolds*,Ann. of Math., **88**, 62-105, 1968.

[14] YAU, S.T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28** 201-228, 1975.