Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades Polinomiais Graduadas de Matrizes Triangulares

por

Alex Ramos Borges †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e do CNPq

Identidades Polinomiais Graduadas de Matrizes Triangulares

por

Alex Ramos Borges

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva (UFMG)

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior (UFCG)
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2012

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem ele eu não teria chegado ao final de mais esta etapa de minha vida. Ele sempre esteve ao meu lado e me ajudou a atravesar todas as dificuldades normais de um mestrado, bem como problemas de saúde que sobre mim recaíram. Muito obrigado Pai!

Em segundo lugar, agradeço a minha família, meu pai, José Geová Doarte Borges, pelas ajudas quando precisei; a minhas irmãs, Vanessa Ramos Borges e Amanda Jessica Ramos Borges, pelo apoio e companheirismo nos momentos bons e mais ainda nos ruins; ao meu sobrinho José Adrian Victor Borges pela companhia agradável e pelas risadas; mas sobre tudo quero agradecer a minha mãe, Silvânia Ramos de Lima, pois ela é um anjo que Deus me deu o prazer de ter como mãe, ela sempre esteve ao meu lado, sempre, nunca me abandonou, nunca virou as costas para mim, sempre batalhou para fazer de mim um homem descente e para que eu tivesse as oportunidades que ela não teve, Mãe eu te amo acima de tudo! É por sua causa e por você ter sacrificado tudo que sacrificou que pude chegar aqui hoje é graças a você que sou um homem, não perfeito, mas que sempre tentar ir pelos caminhos que te deixem orgulhosa. Este teu filho mesmo errando continua em frente e vai chegar a lugares que você nunca imaginou que um filho seu fosse chegar, por todas a difículdades que enfrentamos e continuamos a enfrentar. Muito obrigado por tudo e desculpas pela minha ausênsia em momentos que você precisou, mas espero que tenha valido a pena ver seu filho mestre.

Agora quero agradecer ao amor que Deus me mandou, quero agradecer a Silvania Dias Ferreira, minha namorada e a responsável por eu ter conseguido começar e terminar meu mestrado. Não sei o que a vida nos reserva, só sei que independetemente de qualquer coisa, serei muito grato por tudo que ela fez por mim, me apoando quando precisei, tomando conta de mim, me dando uns puxões de orelha quando eu merecia e mais ainda, suportanto toda esta minha ausência. Meu amor, quero que vc fique ao meu lado para sempre. Não sei o que Deus quer de mim, pois nós tivemos que superar muita coisa, mas agradeço todo dia por ele ter te colocado em minha vida, pois, você esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, muito obrigado por tudo, por tudo mesmo. Saiba que você tem grande parte neste meu sucesso, pois, sem você eu não conseguiria terminar esta etapa de minha vida. Por fim quero te pedir desculpas por todo o sofrimento que te provoquei neste período em que me dediquei ao mestrado. Não soube conciliar você com o mestrado e errei muito, fico triste só em pensar que te fiz chorar, mas hoje tenho o título de mestre e o mais importante, tenho você. Obrigado meu anjo!

Quero agradecer ao grande professor e amigo, Antônio Pereira Brandão Júnior, por tudo. Falar de Brandão para mim é como falar de um ídolo, pois só vim fazer mestrado em Campina Grande por causa deste professor. Estava tudo certo para que eu fosse para o mestrado de outra universidade, mas depois de fazer a displina de álgebra linear no verão de 2009 com ele, decidi que queria o mestrado nesta instituição e decidi que queria que ele me orientasse. Nunca conheci ninguém que tivesse um conhecimento em matemática tão vasto, ele tirou dúvidas minhas em várias áreas, não só em Álgebra, mas também em Geometria e Análise. Professor muito obrigado por tudo! Acima de tudo, obrigado pela paciência, pois se fosse outra pessoa já teria desistido de mim, por tudo que tive que enfrentar neste mestrado, e você como pessoa, como ser humano, entendeu e me apoiou nos momentos mais difíceis, nos momentos em que mais precisei. Sou grato por você ter me orientado, muito obrigado!

Agradeço aos meus amigos que enfrentaram esta dura batalha do mestrado ao meu lado, em especial quero agradecer a Israel, Ailton, Fabrício, Nancy, Brito, Arthur, Itailma pelas discursões e aprendizados, aprendi muito com eles. Ademais, quero agradecer ao Kelmem, Denilson, Annaxsuel, Angeli, Luciano e ao Brito pela convivência e as ajudas. Muito obrigado a todos, por tudo e desculpas aos que eu não sitei, porque são muito os amigos, graças a Deus.

Muito obrigado ao professor Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva, por ter sido meu professor no curso, mais ainda, por acreditar no meu potencial e ter a intenção de me orientar no doutorado. Infezlimente a vida tem outros planos para mim e por enquanto este sonho vai ter que ficar um pouco em segundo plano, mas mesmo assim muito obrigado, que Deus lhe abençoi e ilumine suas filhas.

Obrigado ao meu tio e motivador disto tudo, o professor Geovane Doarte Borges, pois sem ele nem teria feito graduação, quem dera mestrado. Obrigado por todo apoio e ajuda que você me deu. Agradeço também ao professor Luiz Lima, pois ele foi o primeiro a me apoiar na minha ideia de fazer mestrado. Além de agradecer aomeu irmão Ícaro Artur Gomes Vajão por tudo.

Obrigado, professora Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, por sair de sua cidade, Belo Horizonte, para vir até aqui participar desta banca. Obrigado por suas observações, sei que elas acrescentarão muito ao nosso trabalho.

Por fim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuiram para que esta meu sonho se tornasse realidade.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãs. Principalmente as duas Silvanias de minha vida, a Sil e a Vânia.

Resumo

Neste trabalho serão estudadas as graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo K, o qual será sempre infinito. Primeiramente, será estudado o caso $n = 2$, para o qual será mostrado que existe apenas uma graduação não trivial e serão descritos as identidades, as codimensões e os cocaracteres graduados. Para o caso n qualquer, serão estudadas as identidades e codimensões graduadas, considerando-se a $\mathbb{Z}_n$-graduação natural de $U_n(K)$. Finalmente, será apresentada uma classificação das graduações de $U_n(K)$ por um grupo qualquer.

Palavras-chave: Matrizes triangulares, graduação, identidades graduadas, codimensões, cocaracteres.

Abstract

In this work we study the gradings and the graded polynomial identities of the upper $n \times n$ triangular matrices algebra $U_n(K)$ over a field K, which is always infinity. The case $n = 2$ will be firstly studied, for which will be shown that there is only one nontrivial grading and we shall describe the graded identities, codimensions and cocharacters. For the general n case, we shall study graded identities and codimensions, considering the natural $\mathbb{Z}_n$-grading of $U_n(K)$. Finally, we will present a classification of the gradings of $U_n(K)$ by any group.

Keywords: Triangular matrices, gradings, graded identities, codimensions, cocharacters.

Conteúdo

Introdução

Na álgebra moderna existe um ramo que estuda a estrutura algébrica chamada de **anel**. Dentro deste estudo se destaca a teoria dos anéis não-comutativos, e como uma vertente deste estudo temos a PI-teoria ou teoria das identidades polinomiais. No início, as identidades polinomiais eram estudadas em relação a anéis, mas com o aprofudamento da teoria, este estudo se estendeu a uma estrutura um pouco mais sofisticada, chamada de **álgebra**.

Um álgebra A é um espaço vetorial munido de um produto bilinear. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade para a álgebra A se este polinômio se anula em qualquer substituição de suas variáveis por elementos de A, e uma álgebra que possui identidades polinomiais não nulas é chamada de PI-álgebra. Por exemplo, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra, assim como toda álgebra de dimensão finita.

O estudo de identidades polinomiais para álgebras ganhou força com o artigo de Amitsur e Levitzki [2], publicado em 1950. Neste artigo foram utilizados métodos combinatórios para provar que o polinômio standart de grau $2n$ é uma identidade para a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo K, $M_n(K)$. Uma das questões centrais no estudo das identidades polinômiais é a descrição de um conjunto gerador para o T-ideal (ideal das identidades polinomiais) de uma álgebra, e com visão neste estudo Specht, em 1950, conjecturou que toda álgebra associativa tem uma base finita para o seu T-ideal. Porém a demonstração deste fato só foi realizada em 1987, por Kemer ([17] e [18]), para um corpo de característica zero.

Uma álgebra A é dita graduada por um grupo G se $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, onde A_g é um subespaço de A, para qualquer $g \in G$, e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Podemos ver a álgebra associativa livre unitária $K\langle X \rangle$ (álgebra dos polinômios em variáveis associativas e não comutativas com coeficientes em K) como sendo uma álgebra G-graduada e seus polinômios $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$ como sendo polinômios graduados. Definimos uma identidade para uma álgebra G-graduada A, como sendo um polinômio G-graduado $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$ tal que $f(a_1^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)}) = 0$ para quaisquer $a_1^{(g_1)} \in A_{g_1}, \ldots, a_n^{(g_n)} \in A_{g_n}$. O estudo das identidades graduadas foi motivado pela sua importância na estrutura dos T-ideais (veja [18] e [19]) e ao longo das ultimas décadas importantes resultados foram obtidos. Por exemplo, foi provado em [5] e em [7] que sendo G um grupo finito e comutativo, então uma álgebra G-graduada A é uma PI-álgebra se, e somente se, A_e é uma PI-álgebra, onde e é o elemento neutro de G.

Outra parte da PI-teoria que tem sido largamente estudada são os conceitos de codimensão e cocaracter, que foram introduzidos por Regev [25]. Considerando P_n como sendo o espaço vetorial dos polinômios multilineares em n variáveis, observamos que podemos considerá-lo como sendo um S_n-módulo de maneira natural e sendo $Id(A)$ o T-ideal das identidades de uma álgebra associativa A, definimos a n-ésima codimensão desta álgebra como sendo a dimensão do S_n-módulo $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ e o n-ésimo cocaracter como sendo o caracter da representação correspondente. De forma análoga, definimos as codimensões e os cocaracteres graduados, bastando para isto considerar P_n^{gr}, o espaço vetorial dos polinômios multilineares graduados. Utilizando a teoria de Young das representações do produto simétrico, Regev e Latyshev ([25] e [23], respectivemente) mostraram que a sequência de codimensões de uma álgebra A é exponencialmente limitada. Disto Giambruno e Zaicev ([12] e [13]) definiram o expoente de uma PI-álgebra, que é $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$, e provaram que este expoente de fato existe e é um inteiro não negativo. De modo análogo, temos o conceitos de expoente graduado para uma álgebra graduada.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo baseado nos artigos [27], [20] e [28], sobre graduações e identidades polinomiais, codimensões e cocaracteres graduados da álgebra $U_n(K)$, das matrizes triangulares sobre um corpo K. Ele está dividido em 4 capítulos, sendo o primeiro voltado para os conceitos básicos que serão utilizados no seu desenvolvimento, como por exemplo, álgebras, homomorfismos, álgebras graduadas, representações de grupos e o radical de Jacobson. Vale a pena ressaltar que algumas das seções deste capítulo estão bem resumidas e focadas apenas para o que iremos utilizar no decorrer do trabalho. Muitos conceitos deste capítulo são utilizados de uma maneira implícita nos demais capítulos, tendo em vista que o leitor deste trabalho já deve dominar boa parte deles, logo não tendo muitas dificuldades para observá-los.

No segundo capítulo, iremos trabalhar com as matrizes triangulares superiores de ordem 2. Mais precisamente, iniciaremos mostrando que as únicas graduações para esta álgebra, a menos de isomorfismo, são a trival e a canônica. Em seguida, iremos encontrar uma base para o T-ideal das identidades graduadas $Id^{gr}(U_2(K))$ de $U_2(K)$. Com isto, iremos calcular os cocaracteres graduados desta álgebra, e encerraremos este capítulo calculando o expoente graduado.

No tercereiro capítulo, iremos generalizar parte do segundo, tendo em vista que iremos encontrar uma base para o T-ideal das identidades graduadas $Id^{gr}(U_n(K))$ da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n. Além disto, iremos mostrar que estes polinômios de fato formam uma base para este T-ideal através das matrizes genéricas. Por fim, iremos aplicar os resultados deste capítulo para calcular as codimensões graduadas de $U_n(K)$.

No último capítulo, iremos descrever todas as G-graduação das matrizes triangulares superiores de ondem n, mostrando que todas elas são isomorfas as G-graduações elementares.

Por fim, espero que este trabalho agrade ao leitor e o ajude a compreender os conceitos aqui trabalhados. Muito obrigado e boa leitura!

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo iremos tratar de conceitos básicos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Alguns dos resultados aqui apresentados são casos específicos de casos mais gerais. Entretanto, eles estarão focados em nosso trabalho e para a necessidades posteriores do leitor, e iremos indicar a bibliografia que contém os casos mais gerais de cada um deles. Por todo este capítulo, K indicará um corpo arbitrário e G um grupo.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1 *Seja A um K-espaço vetorial. Diremos que o par $(A, \star)$ é uma álgebra, onde $\star$ é uma operação em A que iremos chamar de multiplicação ou produto, se ele atende as seguintes propriedades:*

(i) $a \star (b + c) = a \star b + a \star c$

(ii) $(a + b) \star c = a \star c + b \star c$

(iii) $\lambda(a \star b) = (\lambda a) \star b = a \star (\lambda b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Observação 1.1.2 *(i) Iremos representar a álgebra $(A, \star)$ simplesmente por A, ficando subentendida a operação de multiplicação, $a \star b$ será representada simplesmente por ab.*

(ii) *Sejam A uma K-álgebra e $a, b \in A$. Definimos o comutador de a com b, representado por $[a, b]$, como sendo $[a, b] = ab - ba$.*

(iii) *Sejam V um K-espaço vetorial e $S \subset V$, então o subespaço de V gerado por S, será representado por $spanS$.*

(iv) *Neste trabalho iremos sempre considerar todas as álgebras sobre K e sendo sempre* **associativas** *e com* **unidade**. *Uma álgebra será dita associativa se seu produto for associativo, ou seja, $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$ e unitária (ou com unidade) se o seu produto tiver unidade, ou seja, se existir $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$, para todo $a \in A$.*

Definição 1.1.3 *Seja A uma álgebra. Então:*

(i) *Dizemos que um subespaço B de A é uma subágebra se B é fechado em relação a multiplicação, ou seja, $ab \in B$ para quaisquer $a, b \in B$.*

(ii) *Dizemos que um subespaço I de A é um ideal a esquerda (respectivamente, a direita) se ele absorve produto pela esquerda (respectivamente, pela direita), ou seja, se $ax \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$ (respectivamente, $xa \in I$). Quando um subespaço é um ideal a esquerda e a direita simultaneamente, dizemos que ele é um ideal bilateral, ou simplesmente, que é um ideal.*

(iii) *Dizemos que A é simples se $\{0\}$ e A são seus únicos ideais bilaterais.*

Definição 1.1.4 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A, e considere o espaço vetorial quociente $\frac{A}{I}$. Para cada $a \in A$, iremos denotar o elemento $a + I$ de $\frac{A}{I}$ simplesmente por $\overline{a}$. Neste espaço, podemos considerar o seguinte produto: $\cdot : \frac{A}{I} \times \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{I}$, definido por $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ Observe que este produto está bem definido e que ele atende as condições impostas pela definição de álgebras. Portanto, $\frac{A}{I}$ é uma álgebra, chamada de álgebra quociente de A por I.*

Proposição 1.1.5 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Então:*

(i) *Se A é associativa, então $\frac{A}{I}$ também é.*

(ii) *Se A é comutativa ($ab = ba$, para todos $a, b \in A$), então $\frac{A}{I}$ também é.*

(iii) Se A possui unidade 1, então $\overline{1}$ é a unidade de $\frac{A}{I}$

Demonstração: Fica como exercício ao leitor. $\square$

Exemplo 1.1.6 *(i) Todo corpo K ser visto com uma K-álgebra, munido da soma e do produto que o definem como corpo. Particularmente os corpos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$, e $\mathbb{C}$ podem ser vistos como álgebras sobre si mesma. Ademais, observe que estas álgebras são associativas, comutativas e com unidade.*

(ii) O K-espaço vetorial das matrizes de ordem n, $M_n(K)$, munido de seu produto usual é uma K-álgebra associativa e com unidade. A unidade de $M_n(K)$ é a matriz identidade, que denotaremos por Id_n. Para $1 \leq i, j \leq n$, considere a matriz E_{ij} como sendo a matriz que possue 1 na entrada da linha i e coluna j, e zero nas demais entradas; daí note que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, se & j = k \\ 0, se & j \neq k \end{cases}$$

Ademais, estas matrizes formam uma base para a K-álgebra $M_n(K)$.

(iii) O K-espaço vetorial das matrizes triangulares superiores de ordem n, $U_n(K)$, é uma subálgebra da álgebra $M_n(K)$.

(iv) Seja V um K-espaço vetorial e considere o K-espaço vetorial de todos os operadores lineares de V, $\mathcal{L}(V)$. Munido da composição de transformações, $\mathcal{L}(V)$ é uma K-álgebra.

(v) Considere o espaço dos polinômios na variável x, $K[x]$. Este espaço munido do produto usual de polinômios é uma K-álgebra. De uma maneira geral, se considerarmos $X = \{x_i/i \in I\}$ um conjunto de variáveis, então $K[X]$, munido de suas operações usuais, é uma K-álgebra.

Sendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ álgebras, define-se o produto direto de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ como sendo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)/a_i \in A_i\}$, com as operações de soma, produto por escalar e multiplicação entrada a entrada. Observe que este produto direto é uma álgebra.

Definição 1.1.7 *Considere A uma álgebra associativa e seja $a \in A$. Então:*

(i) *a é nilpotente se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n = 0$. *O menor* n *que satisfaz esta propriedade é chamado de índice de nilpotência de* a.

(ii) A *é nil se todo elemento de* A *é nilpotente.*

(iii) A *é nilpotente se existe* $n \in \mathbb{N}$, *tal que,* $a_1a_2...a_{n+1} = 0$, *para quaisquer* $a_1, a_2, ...,$ $a_{n+1} \in A$. *O menor* $n \in \mathbb{N}$ *que satisfaz esta condição é chamado de índice de nilpotência de* A.

Exemplo 1.1.8 *Considere a* K*-álgebra das matrizes triangulares estritamente superiores de ordem* n

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} ; a_{ij} \in K \right\}$$

cuja multiplicação é o produto usual de matrizes. Esta álgebra é uma álgebra nilpotente.

Proposição 1.1.9 *Sejam* A *um espaço vetorial e* β *um base de* A. *Então, dada uma aplicação* $\phi : \beta \times \beta \longrightarrow A$, *existe uma única aplicação bilinear* $\Phi : A \times A \longrightarrow A$ *estendendo* ϕ.

Demonstração: Exercício para o leitor! $\square$

1.2 Homomorfismos de álgebras

Definição 1.2.1 *Sejam* A *e* B *duas* K*-álgebras. Dizemos que uma transformação linear* $\phi : A \longrightarrow B$ *é um homomorfismo de álgebras quando* $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, *para quaisquer* $a, b \in A$ *e* $\phi(1_A) = 1_B$.

Diremos que um homomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ é um **isomorfismo** se ele for **bijetivo**. Chamaremos um homomorfismo $\phi : A \longrightarrow A$ de **endomorfismo** de A e se este endomorfismo for bijetivo, então será chamado de **automorfismo**. Denotaremos por $End(A)$ e $Aut(A)$ os conjuntos de todos os endomorfismos e automorfismos de A, respectivamente.

Sendo $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de K-álgebras, então o conjunto $Ker\phi = \{a \in A/\phi(a) = 0\}$ é chamado de núcleo de ϕ e o conjunto $Im\phi = \{\phi(a)/a \in A\}$

é chamdo de imagem de ϕ. Observe que $Ker\phi$ é um ideal de A e que $Im\phi$ é uma subálgebra de B.

Exemplo 1.2.2 *(i) Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Temos que a seguinte aplicação $\phi : A \longrightarrow \frac{A}{I}$, definida por $\phi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo de álgebras, chamado de projeção canônica.*

(ii) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita n. Sabemos que existe um isomorfismo entre o espaço dos operadores lineares $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ e o espaço das matrizes de ordem n, $M_n(K)$. Obeserve que este isomorfismo preserva a multiplicação. Logo, ele é um isomorfismo de álgebras.

(iii) Considere um homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$, onde A e B são K-álgebras. Temos que a seguinte aplicação é um isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\phi} : \dfrac{A}{Ker\phi} & \longrightarrow & Im\phi \\ \overline{a} & \mapsto & \overline{\phi}(\overline{a}) = \phi(a) \end{array}$$

Proposição 1.2.3 *Sejam A e B K-álgebras e S um subconjunto gerador de A (como espaço vetorial) e $\phi : A \longrightarrow B$ uma transformação linear . Então ϕ é um homomorfismo de álgebras se, e somente se, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ para quaisquer $a, b \in S$.*

Demonstração: Basta observa que os produtos em A e B são bilineares e usar a linearidade de ϕ. $\square$

Teorema 1.2.4 *Se A é uma álgebra associativa e com unidade, então são equivalentes:*

(i) A é isomorfa a um produto direto $A_1 \times ... \times A_k$ $(k \geq 2)$ de álgebras associativas e com unidade.

(ii) Existem ideais $I_1, ..., I_k$ de A $(k \geq 2)$ tais que $A = I_1 \oplus ... \oplus I_k$.

(iii) Existem elementos $u_1, \ldots, u_k \in Z(A)$ $(k \geq 2)$ tais que $u_i u_j = 0$, se $i \neq j$ e $u_1 + ... + u_k = 1$.

Demonstração: Fica como exercício ao leitor. $\square$

1.3 Álgebras Graduadas

Definição 1.3.1 *Sejam A uma álgebra e G um grupo arbitrário. Definimos uma G-graduação em A, como sendo uma família de subespaços $\{A_g/g \in G\}$ de A tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{gh}, \forall g, h \in G$$

Dizemos que uma álgebra é G-**graduada**, quando ela esta munida de uma G-graduação. Dizemos que um elemento $a \in A$ é homogêneo de grau g quando $a \in A_g$, para algum $g \in G$; o subespaço A_g é chamado de componente homogênea de grau g da graduação e um subespaço qualquer B de A é dito homogêneo quando $B = \bigoplus_{g \in G}(A_g \cap B)$.

Exemplo 1.3.2 *(i) Toda álgebra A possui uma G-graduação. Basta considerar $A_e = A$ e $A_g = \{e\}$, para todo $g \in G - \{0\}$, onde e é o elemento neutro de G. Esta graduação é chamada de graduação trivial.*

(ii) Considere a álgebra $M_n(K)$ das matrizes de ordem n. Para cada $\lambda \in \mathbb{Z}_n$, considere o subespaço $M_{\overline{\lambda}} = span\{E_{ij}/\overline{j-i} = \lambda\}$; e para cada $\mu \in \mathbb{Z}$, considere o seguinte subespaço

$$M_\mu = \begin{cases} 0, & se \quad |\mu| \geq n \\ span\{E_{ij}/j - i = \mu\}, & se \quad |\mu| < n \end{cases}$$

onde E_{ij} são as matrizes elementares definidas no exemplo 1.1.6.

Como as matrizes E_{ij} formam uma base de $M_n(K)$, então

$$M_n(K) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_n} M_\lambda \quad e \quad M_n(K) = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} M_\mu$$

Ademais, como

$$E_{ij}E_{lk} = \begin{cases} E_{ik}, & se \quad j = l \\ 0, & se \quad j \neq k \end{cases}$$

teremos que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente. Esta $\mathbb{Z}_n$-graduação é chamada de graduação canônica de $M_n(K)$.

(iii) *De modo análogo ao feito no exemplo anterior, também definimos uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação para a álgebra das matrizes triangulares superiores $U_n(K)$ de ordem n, onde as respectivas componentes homogêneas são:*

$$U_\lambda = span\{E_{ij}/\overline{j-i} = \lambda\} \quad e \quad U_\mu = \begin{cases} 0, & se \quad |\mu| \geq n \\ span\{E_{ij}/j-i=\mu\}, & se \quad |\mu| < n \end{cases}$$

Esta $\mathbb{Z}_n$-gradução é chamada de graduação canônica para a álgebra das matrizes triangulares superiores.

(iv) *Considere B uma subálgebra homogênea de uma álgebra G-graduada A. Como uma subálgebra é por si uma álgebra e como*

$$B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A_g), \quad e \quad (B \cap A_g)(B \cap A_h) \subseteq (B \cap A_{gh}), \ \forall h, g \in G$$

temos que B é uma álgebra G-graduada, com a graduação induzida pela G-graduação de A.

(v) *Considere uma álgebra G-graduada A e I um ideal de A. Observe que a álgebra $\frac{A}{I}$ será G-graduada, quando I for um subespaço homogêneo.*

Proposição 1.3.3 *Seja A uma K-álgebra G-graduada. Se A possuir unidade, digamos 1_A, então $1_A \in A_e$.*

Demonstração: De fato, considere $1_A = \sum_g a_g$, onde $a_g \in A_g$ e $\{g \in G/a_g \neq 0\}$ é finito. Logo, para um elemento homogêneo arbitrário b_h, teremos que,

$$b_h = \sum_{g \in G} b_h a_g.$$

Como $b_h a_e \in A_h$, $b_h a_g \in A_{hg}$, então pela graduação teremos que $b_h = b_h a_e$ e $b_h a_i = 0$. Logo $a_e = 1$ e $a_g = 0$, $\forall g \in G - e$. Portanto $1 \in A_e$. $\square$

Definição 1.3.4 *Sejam A e B duas álgebras G-graduada e $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo. Dizemos que ϕ é um homomorfismo graduado quando $\phi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$. Diremos que ϕ é um isomorfismo graduado quando ϕ é um homomorfismo graduado bijetivo.*

Observação 1.3.5 *Sejam A uma álgebra e $(A_g)_{g \in G}$ e $(A_{g'})_{g \in G}$ duas G-graduações em A. Dizemos que estas G-graduações são isomorfes se existe um automorfismo ϕ de A tal que $\phi(A_g) = A_{g'}$ para todo $g \in G$.*

1.4 Módulos sobre álgebras e representações de grupos

Definição 1.4.1 *Seja A uma álgebra associativa e com unidade. Definimos um A-módulo como sendo um K-espaço vetorial M, munido de um produto $A \times M \longrightarrow M$, definido por $(a, v) \longrightarrow av$, quel satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$

(ii) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$

(iii) $(\lambda a)v = a(\lambda v) = \lambda(av)$

(iv) $a_1(a_2v) = (a_1a_2)v$

(v) $1_Av = v$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $v, v_1, v_2 \in M$ e $\lambda \in K$.

Exemplo 1.4.2 *(i) Seja A uma álgebra. Então A é naturalmente um A-módulo sobre si mesmo. O módulo A será denotado por ${}_AA$*

(ii) Considere V como sendo um espaço vetorial e $\mathcal{L}(V)$ a álgebra dos operadores lineares de V. Então V, munido do produto $\mathcal{L}(V) \times V \longrightarrow V$, definido por $(T, v) \mapsto T.v = T(v)$, é um $\mathcal{L}(V)$-módulo.

Definição 1.4.3 *Sejam A um álgebra e M um A-módulo. Definimos:*

(i) Um submódulo N de M como sendo um subespaço vetorial de M tal que $a.n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.

(ii) Um submódulo minimal N de M como sendo um submódulo não nulo tal que não exista submódulo N_1 de M com $0 \neq N_1 \subsetneq N$.

(iii) Um submódulo maximal N de M, como sendo um submódulo próprio tal que não exista submódulo N_2 de M com $N \subsetneq N_2 \subsetneq M$.

(iv) M como sendo um A-módulo irredutível (ou simples) se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.

Exemplo 1.4.4 *(i) Os submódulos do* A*-módulo* ${}_AA$ *são exatamente os ideais a esquerda de* A*.*

(ii) Sendo V *um* K*-espaço vetorial, temos que* V *é irredutível como* $\mathcal{L}(V)$*-módulo. De fato, seja* W *um submódulo não-trivial de* V *tal que* $T(W) \subset W$*, para todo* $T \in \mathcal{L}(V)$*. Considere* $0 \neq w \in W$*. Logo, para qualquer* $v \in V$*, existe* $T \in \mathcal{L}(V)$*, tal que* $v = T(w) = T.w \in W$ *e assim* $W = V$*.*

Definição 1.4.5 *Sejam* A *um álgebra e* M_1 *e* M_2 *dois* A*-módulos. Dizemos que uma transformação linear* $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ *é um homomorfismo de* A*-módulos quando* $\phi(am) = a\phi(m)$*, para quaisquer* $a \in A$ *e* $m \in M_1$*. Se* ϕ *for bijetiva, diremos que este homomorfismo e um isomorfismo de* A*-módulos.*

Definição 1.4.6 *Sejam* G *um grupo e* V *um* K*-espaço vetorial. Definimos uma representação linear de* G *em* V *como um homomorfismo de grupos:*

$$\phi : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow \phi_g$$

onde $GL(V)$ *é o grupo dos operadores lineares de inversíveis de* V*. Definiremos o grau da representação de* ϕ *como sendo a dimensão de* V*.*

Observação 1.4.7 *Quando a dimensão de* V *é finita, sabemos que existe um isomorfismo entre* $GL(V)$ *e* $GL_n(K)$*, onde* $GL_n(V)$ *é o grupo da matrizes inversíveis de ordem* n *sobre* K*. Logo, podemos ver a representação definida acima da seguinte maneira:* $\phi : G \longrightarrow GL_n(K)$*.*

Exemplo 1.4.8 *(i) Sejam* G *um grupo e* V *um espaço vetorial. A seguinte aplicação é uma representação linear:*

$$\begin{array}{rcl} \phi : G & \longrightarrow & GL(V) \\ g & \mapsto & \phi_g = Id_V \end{array}$$

Esta representação é chamada de representação trivial. Se dimensão de V *for finita, então teremos que uma representação trivial que pode ser vista da seguinte* *forma:*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow GL_n(K) \\ g &\mapsto \phi_g = Id_n \end{aligned}$$

onde $dimV = n$.

Definição 1.4.9 *Sejam* G *um grupo,* V *um espaço vetorial e* $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ *uma representação linear. Dizemos que um subespaço* W *de* V *é* ϕ*-invariante quando* $\phi_g(W) \subseteq W$*, para todo* $g \in G$*. Se existir algum subespaço* W ϕ*-invariante de* V *tal que* $0 \neq W \neq V$*, então diremos que* ϕ *é uma representação redutível, caso contrário, diremos que* ϕ *é uma representação irredutível.*

Seja W um subespaço ϕ-invariante de V. Se $g \in G$, então podemos restringir ϕ_g a W:

$$\begin{aligned} \phi_g|_W : W &\longrightarrow W \\ w &\mapsto \phi_g(w) \end{aligned}$$

Como ϕ_g é bijetora, $\phi_g(W) \subseteq W$ e $\phi_g^{-1}(W) = \phi_{g^{-1}}(W) \subseteq W$, teremos que $\phi_g(W) = W$ e portanto $\phi_g \in GL(W)$. Logo, podemos definir uma sub-representação de ϕ, que é a restrição de ϕ a W, dada por:

$$\begin{aligned} \phi|_W : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \phi(g) = \phi_g|_W \end{aligned}$$

Definição 1.4.10 *Sejam* G *um grupo,* V *um espaço vetorial e* $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ *uma representação linear. Dizemos que* ϕ *é completamente redutível (ou semi-simples) se existem* $W_1, ..., W_k$ *subespaços de* V ϕ*-invariantes, tais que:*

(i) $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$*;*

(ii) A restrição de ϕ *a cada* W_i *é uma representação irredutível.*

Teorema 1.4.11 (Maschke) *Seja* G *um grupo finito cuja ordem não é divisível por* $charK$*. Se* $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ *é uma representação linear de grau finito e* W *é um subespaço* ϕ*-invariante de* V*, então existe* W_1 *subespaço* ϕ*-invariante de* V *tal que* $V = W \bigoplus W_1$ *. Logo* ϕ *é completamente redutível.*

Demonstração: Veja [21], capítulo 2, seção 6. □

Definição 1.4.12 *Sejam G um grupo, V e W K-espaços vetoriais e ϕ e ψ representações lineares de G em V e W, respectivamente. Dizemos que ϕ e ψ são representações equivalentes se existe uma transformação linear bijetora $T : V \longrightarrow W$ tal que $\psi_g T = T\phi_g$, para todo $g \in G$.*

Considere G um grupo e o conjunto KG de todas as somas formais $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in K$ e $\{g \in G/\alpha_g \neq 0\}$ é um conjunto finito. Sendo $\sum_g \alpha_g g, \sum_{g\in G} \beta_g g \in KG$, dizemos que $\sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g\in G} \beta_g g$ sempre que $\alpha_g = \beta_g$, para todo $g \in G$. Definamos as seguintes operações em KG:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g \quad e \quad \lambda \sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g\in G} (\lambda\alpha_g) g$$

para $\lambda \in K$. Munido destas destas operações KG é um K-espaço vetorial, chamado de K-espaço vetorial com base G. Observe que G é de fato uma base para este K-espaço.

Se $*$ for a operação de G, então pela Proposição 1.1.9, $*$ estende-se a uma única operação bilinear de KG. Munido desta operação, teremos que KG é uma álgebra associativa e com unidade, chamada de **álgebra de grupo**. Ademais, observe que KG será comutativa se, e somente se, G for abeliano.

Agora iremos descrever a relação entre os KG-módulos e as K-representações lineares de G. Sejam G um grupo e V um K-espaço vetorial. Suponhamos que $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ seja uma representação linear e consideremos o produto

$$KG \times V \longrightarrow V$$

definido por $(\sum_{g\in G} \lambda_g g).v = \sum_{g\in G} \lambda_g \phi_g(v)$. Temos que este produto faz de V um KG-módulo. Observe que sendo W um subespaço de V ϕ-invariante, teremos que W será um KG-submódulo de V.

Por outro lado, seja V um KG-módulo e considere a aplicação: $\psi : G \longrightarrow GL(V)$, definida por $\psi(g) = \psi_g$, onde $\psi_g(v) = gv$. Temos que ψ assim definida será uma representação linear de G. Ademais, observe que se W é um submódulo de KG-módulo, então W é um subespaço ϕ-invariante de V. Portanto, existe uma correpondência biunívoca entre as estruturas de KG-módulo em V e as representações lineares de G em V.

Proposição 1.4.13 *Sejam $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares de G. Então valem*

(i) ϕ e ψ são equivalentes se, e somente se, os respectivos KG-módulos V e W são isomorfos.

(ii) ϕ é irredutível se, e somente se, o respectivo KG-módulo V é irredutível.

Demonstração: Veja [26], Capítulo 8, seção 1. □

Considere a representação linear

$$\phi : G \longrightarrow GL(KG)$$

onde $\phi_g : KG \longrightarrow KG$ é definida por $\phi_g(x) = gx$. Esta representação é chamada de **representação regular a esquerda de** G. Observe que os subespaços ϕ-invariantes de KG são exatamente os ideais a esquerda de KG. Já os ideais minimais a esquerda de KG correspondem as ϕ-sub-representações irredutíveis de ϕ. Suponha G um grupo finito e que a $charK$ não divide a ordem de G. Então, pelo Teorema de Maschke, teremos que KG é a soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais a esquerda e, a menos de equivalência, o número de K-representações irredutíveis de G é finito e menor ou igual ao número de classe de conjugação de G (veja [16], seção 5.3).

Considere m como sendo o número de representações irredutíveis (a menos de equivalencia) de G. Seja $I_1, \ldots, I_m$ ideais minimais à esquerda de KG dois a dois não isomorfos como KG-módulo. Para cada $j = 1, \ldots, m$, e considere os ideais bilaterais $J_j = I_j KG$. Daí, nas condições do Teorema de Maschke, teremos o seguinte resultado

Proposição 1.4.14 *$KG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$ e m é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.*

Demonstração: Veja [26], seção 8.1, Teorema 8.1.3. □

O próximo teorema irá mostrar que se o corpo K é algebricamente fechado, então o número de K-representações do grupo G é igual ao número de classes de conjugação de G.

Teorema 1.4.15 *Se K é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G, então:*

(i) O número de K-representações lineares irredutíveis de G é finito e, a menos de equivalência, é igual ao número de classes de conjugação de G.

(ii) Se $d_1, d_2, ..., d_m$ são os graus das K-representações irredutíveis (não equivalentes) de G, então $|G| = d_1^2 + d_2^2 + ... + d_m^2$.

Demonstração: Veja [26], pag. 224. □

Definição 1.4.16 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ uma repreentação linear. Então, definimos o caracter da representação ϕ, como sendo a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{rcl} \chi_\phi : G & \longrightarrow & K \\ g & \mapsto & \chi_\phi(g) = tr\phi_g \end{array}$$

Diremos que o caracter χ_ϕ é um caracter irredutível quando a representação ϕ for irredutível. Observe que duas representações equivalentes têm o mesmo caracter e que, sendo e o elemento neutro do grupo G, então, $\chi(e) = trId = dimV$. Ademais, temos que elementos conjugados de G têm a mesma imagem por um caracter e daí dizemos que os caracteres são funções de classes de G em K.

Definimos o caracter de um KG-módulo como sendo o caracter da K-representação de G definida por este KG-módulo.

Exemplo 1.4.17 *(i) Considere G um grupo e $\phi_0 : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação trivial de grau finito. Então $\chi_{\phi_0}(g) = trId_V = dimV$, para todo $g \in G$.*

(ii) Considere uma representação linear, $\phi : G \longrightarrow K - 0$. Então $\chi_\phi(g) = \phi(g)$, para todo $g \in G$.

Teorema 1.4.18 *Todo caracter de um grupo G é uma soma de caracteres irredutíveis.*

Demonstração: Veja [26], pag. 227. □

Seja G um grupo finito e suponha que $charK$ não divide a ordem de G. Sendo f e h duas funções de G em K, definimos

$$\langle f, g\rangle_G = |G|^{-1}\sum_{g\in G} f(g^{-1})h(g).$$

Diremos que K é um corpo de decomposição de G se todo caracter irredutível de G sobre K for ainda irredutível quando visto como caracter de G sobre qualquer extensão L de K.

Teorema 1.4.19 *(***Relações de Ortogonalidade***) Sejam G um grupo finito e $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações irredutíveis de G, com os respectivos caracteres χ_1 e χ_2. Suponha que $charK = 0$. Então:*

(i) Se ϕ e ψ são não equivalentes, então $\langle \chi_1, \chi_2\rangle_G = 0$.

(ii) Se K um corpo de decomposição de G, então $\langle \chi_1, \chi_1\rangle_G = 1$.

(iii) $\langle \chi_1, \chi_1\rangle_G = q$, para algum inteiro positivo $q \in K$.

Demonstrão: Veja [26], pag. 229 e [16], pag. 273. □

Corolário 1.4.20 *Sejam K um corpo de característica zero, G um grupo finito e χ um K-caracter de G. Então:*

(i) $\langle \chi, \chi\rangle_G$ é um inteiro positivo.

(ii) Se $\langle \chi, \chi\rangle_G = 1$, então χ é um caracter irredutível.

Demonstração: Consequência imediata do resultado anterior, do Teorema 1.4.18 e da bilinearidade de $\langle , \rangle_G$. □

Teorema 1.4.21 *Se K é um corpo de característica zero, então duas K-representações lineares de um grupo G que têm o mesmo caracter são equivalentes.*

Demonstração: Veja [26], pag. 230. □

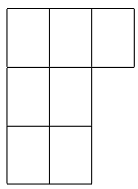
1.5 Representações do Grupo Simétrico

Nesta seção iremos dar uma introdução a teoria de Young sobre as representações do grupo simétrico. Para isto iremos supor que K seja um corpo de característica zero. Esta teoria será muito utilizada no próximo capítulo. Iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 1.5.1 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma partição de n como sendo uma k-umpla $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_k)$ de números naturais tais que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ e $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$. Definimos a altura de λ, denotada por $h(\lambda)$ como sendo o número k. Usaremos a notação $(n_1, ..., n_k) \vdash n$ e $p(n)$ denotará o número total de partições de n.*

Definição 1.5.2 *Sendo $\lambda = (n_1, ..., n_k) \vdash n$, definimos o diagrama de Young D_λ da partição λ como sendo o conjunto $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$.*

Usualmente, descrevemos um diagrama de de Young D_λ por n quadrados, dispostos em k filas horizontais, chamadas de **linhas**, onde a i-ésima linha tem n_i quadrados. Cada fila vertical será chamada de **coluna**. Por exemplo, considere $n = 7$ e a seguinte partição de 7, $\lambda = (3, 2, 2)$. Então, teremos o seguinte diagrama de Young:

$D_\lambda =$ 

Definição 1.5.3 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda = (n_1, ..., n_k) \vdash n$. Definimos uma tabela de Young do diagrama D_λ como sendo uma função bijetora $T : D_\lambda \longrightarrow I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Dizemos que uma tabela de Young T é standard se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $T(i, j) < T(i, j + 1)$, para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j < n_i$;

(ii) $T(i, j) < T(i + 1, j)$ para $1 \leq j \leq n_1$ e $1 \leq i < c_j$, onde c_j é o número de células da j-ésima coluna.

Observação 1.5.4 *Dizer que uma tabela de Young T é standard significa dizer que as entradas nas linhas crescem da esquerda para a direita e nas colunas de cima para baixo.*

Sendo $\sigma \in S_n$, definimos σT como sendo a composição $\sigma \circ T : D_\lambda \longrightarrow I_n$, que será também um tabela de Young do diagrama D_λ. Ademais, sendo T_1 e T_2 duas tabelas de Young de um mesmo diagrama, então existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma T_1 = T_2$.

Definição 1.5.5 *Seja T uma tabela de Young. Então, definimos:*

(i) O grupo das permutações das linha, que denotaremos por $R(T)$, como sendo:

$$R(T) = \{\sigma \in S_n / \sigma(L) = L \ \ \textit{para toda linha } L \textit{ de } T\}.$$

(ii) O grupo das permutações das colunas, que denotaremos por $C(T)$, como sendo

$$C(T) = \{\sigma \in S_n / \sigma(C) = C \ \ \textit{para todo coluna } C \textit{ de } T\}.$$

Considere uma tabela de Young T. Definimos os seguintes elementos da álgebra de grupo KS_n:

$$P_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma, \quad Q_T = \sum_{\mu \in C(T)} (-1)^\mu \mu \ \ e \ \ E_T = P_T Q_T = \sum_{\substack{\sigma \in R(T) \\ \mu \in C(T)}} (-1)^\mu \sigma\mu$$

Lema 1.5.6 *Sejam $\alpha \in S_n$, λ um partição de n e T um tabela de Young do diagrama D_λ, então existe a, tal que, $E_T \alpha E_T = aE_T$*

Demonstração: Veja [16], capítulo 5, seção 4. □

Como consequência do Lema 1.5.6, teremos que $E_T^2 = aE_T$, para algum $a \in K$. Logo, sendo $e_T = a^{-1}E_T$, teremos que $e_T^2 = a^{-2}E_T^2 = e_T$. Este idempotente assim definido, é chamado de idempotente minimal de T. Tomemos agora $M_T = KS_nE_T = \{\alpha E_T / \alpha \in KS_n\} = KS_ne_T$, que é um ideal a esquerda de KS_n.

Teorema 1.5.7 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ e T, T_1, T_2 tabelas de Young dos diagramas $D_, D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}$, respectivamente. Então:*

(i) M_T é um S_n-modulo irredutível.

(ii) M_{T_1} e M_{T_2} são S_n-módulos isomorfos se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Demonstração: Veja [16], capítulo 5, seção 4. □

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo teorema acima, podemos concluir que o número de KS_n-módulo irredutíveis é maior ou igual ao número de partições de n. Sabemos que o número de classes de conjugação do grupo simétrico S_n é igual a $p(n)$. Logo o número de S_n-representações irredutíveis será menor ou igual a $p(n)$. Daí e da Proposição 1.4.14, concluimos que o grupo KS_n possui, a menos de equivalência, exatamente $p(n)$ representações irredutíveis. Sabemos que existe uma correspondência biunívoca entre as partições de n e os KS_n-módulos irredutíveis (veja [14], seção 10.4). Daí, podemos representar um caracter irredutível χ de KS_n por χ_λ, onde $\lambda \vdash n$. Logo, sendo χ um caracter de KS_n, pelo teorema 1.4.18, teremos que

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde $m_\lambda \in \mathbb{Z}$ e $m_\lambda \geq 0$.

Para terminarmos esta seção, iremos descrever a famosa fórmula do gancho, que conta o número de tabelas standard. Inicialmente, seja D_λ um tabela de Young e (i_0, j_0) uma célula desta tabela, então definimos o gancho de (i_0, j_0) como sendo o conjunto

$$\{(i_0, j)/j_0 \leq j \leq n_{i_0}\} \cup \{(i, j_0)/i_0 \leq i \leq c_{j_0}\}$$

Obeserve que o gancho de (i_0, j_0) do diagrama D_λ é exatamente o conjunto das células da linha i_0 que estão a direita de (i_0, j_0) e da coluna j_0 que estão abaixo de (i_0, j_0). Considerando $h_{(i_0, j_0)}$ como sendo o número de células, ou tamanho, do gancho (i_0, j_0), temos o seguinte teorema

Teorema 1.5.8 (Fómula do Gancho) *Sendo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ uma partição de n e $ST(\lambda)$ o número de tabelas standard do diagrama D_λ, então temos*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{(i.j)}}$$

Demonstração: Veja [8], capítulo 4, seção 3.

Observação 1.5.9 *A importância da fórmula do Gancho para a teoria de representações do S_n reside no fato de que $ST(\lambda)$ coincide com o grau d_λ da representações irredutível de S_n associada a partição λ (veja [8], pag 121).*

1.6 Álgebra associativa livre e identidades polinomiais

Nesta seção iremos definir a álgebra associativa unitária livre, que será representada por $K\langle X\rangle$. Em seguida iremos definir as identidades polinômiais de uma álgebra e o que vem a ser uma PI-álgebra.

Inicialmente, seja A uma álgebra associativa unitária e $S \subset A$. Dizemos que S gera A como álgebra quando $A = span\{1_A, s_1 \dots s_k / k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$.

Definição 1.6.1 *Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que ela é livre se existe um conjunto $S \subset A$ tal que S gera A e para toda álgebra associativa B e toda aplicação $f : S \longrightarrow B$ existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ que estende esta aplicação. Neste caso diremos que S é um conjunto gerador livre de A, ou que A é gerada livremente por S.*

Considere um conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Uma **palavra** em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ de variáveis, onde $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x_{i_j} \in X$ (no caso em que $k = 0$, definimos com sendo a palavra vazia e representamos por 1). Considere $S(X)$ como sendo o conjunto de todas as palavras em X. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}\dots x_{i_{k_1}}$ e $x_{j_1}\dots x_{j_{k_2}}$ são iguais quando $k_1 = k_2$ e $i_1 = j_1, \dots, i_{k_1} = j_{k_2}$. Considere o conjunto $K\langle X\rangle$ que é formado por elementos formais do tipo $\sum_{m \in S(X)} \alpha_m m$, onde $\alpha_m \in K$. Observe que este conjunto, munido das seguintes operações,

$$\sum_{m \in S(X)} \alpha_m m + \sum_{m \in S(X)} \beta_m m = \sum_{m \in X} (\alpha_m + \beta_m) m$$

e

$$\lambda \sum_{m \in S(X)} \alpha_m m = \sum_{m \in S(X)} (\lambda \alpha_m) m$$

para qualquer $\lambda \in K$, é um K-espaço vetorial, com base $S(X)$. Os termos $\alpha_m m$ são chamados de monômios e as somas formais de monômios são chamadas de polinômios. Definimos como sendo o grau do monômio $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k_1}}$ o número natural k_1 e observe que o grau da palavra vazia 1 será 0. O grau de um polinômio $f \in K\langle X\rangle - \{0\}$, que será representado por ∂f, é definido como sendo o máximo dentre os graus dos monômios de f.

Considere agora em $S(X)$ a operação de concatenação:

$$(x_{i_1} \dots x_{i_{k_1}})(x_{j_1} \dots x_{j_{k_2}}) = x_{i_1} \dots x_{i_{k_1}} x_{j_1} \dots x_{j_{k_2}}$$

Observe que esta operação é associativa e que tem elemento neutro (a palavra vazia 1). Daí, $K\langle X\rangle$ munido da operação bilinear induzida por esta operação de concatenação (Proposição 1.1.9), é uma álgebra associativa e com unidade.

Agora considere uma aplicação $g : X \longrightarrow A$, dada por $g(x_i) = a_i$, onde A é uma álgebra associativa e com unidade. Então, definamos a seguinte aplicação linear $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$, que satisfaz $\phi(1) = 1_A$ e $\phi(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = a_{i_1} \dots a_{i_k}$. Temos então que ϕ é o único homomorfismo de álgebras tal que $\phi(x_i) = g(x_i)$. Portanto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X. Representaremos $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ como sendo a imagem de $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ pelo homomorfismo ϕ. Observe que $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k_1}})$ é o elemento de A obtido substituindo-se x_{i_j} por a_{i_j} no polinômio f.

Definição 1.6.2 *Sejam A uma álgebra associativa e unitária e $f(x_1, \dots x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio. Diremos que $f(x_1, \dots x_n)$ é um identidade polinomial para a álgebra A quando $f(a_1, \dots a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Se A possui alguma identidade polinômial não nula diremos que A é uma PI- álgebra.*

Observação 1.6.3 *Considere o conjunto Φ de todos os homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Então teremos que $f \in K\langle X\rangle$ é um identidade para para a álgebra A se, e somente se, $f \in \cap_{\phi\in\Phi} ker\phi$.*

Exemplo 1.6.4 *(i) Qualquer álgebra comutativa A é uma PI-álgebra, pois temos que $[x_1, x_2]$ é uma identidade para A.*

(ii) Toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato, supondo que n seja o índice de nilpotência de A, então teremos que o monômio $x_1x_2 \dots x_nx_{n+1}$ é uma identidade polinomial para A.

(iii) Considere a álgebra das matrizes de ordem n sobre K, $M_n(K)$ e o polinômio conhecido como o polinômio de standard, $s_n = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$. O teorema de Amitsur-Levitzki afirma que o polinômio $s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ é um identidade para a álgebra $M_n(K)$.

(iv) Considere a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n, $U_n(K)$. Então o polinômio $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é uma identidade para esta álgebra.

Seja A uma álgebra e considere $Id(A)$ o subconjunto de $K\langle X \rangle$ de todas as identidades de A. Observe que $Id(A)$ será um ideal de $K\langle X \rangle$.

Proposição 1.6.5 *Seja A uma álgebra associativa qualquer. Então, o ideal $Id(A)$ é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$.*

Demonstração: Veja [14], pag. 3. $\square$

Definição 1.6.6 *Um ideal I de $K\langle X \rangle$ é um T-ideal quando $\phi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo ϕ de $K\langle X \rangle$.*

Observação 1.6.7 *(i) Pelo argumentado na Proposição 1.6.5 teremos que $Id(A)$ é um T-ideal de $K\langle X \rangle$, para qualquer álgebra A. Logo, toda álgebra determina um T-ideal.*

(ii) A soma e a interseção de uma família arbitrária de T-ideais é ainda um T-ideal.

(iii) Se $f(x_1, \dots, x_n) \in I$, onde I é um T-ideal de $K\langle X \rangle$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$, então temos que $f(g_1, \dots, g_n) \in I$.

Definição 1.6.8 *Considere $S \subseteq K\langle X \rangle$. A classe de todas as álgebras A tais que, para qualquer $f \in S$, f é um identidade para A, é chamada de variedade determinada por S, que será denotada por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$. Sendo $S = \{f_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in K\langle X \rangle / i \in I\}$ e $\mathcal{D}$ a variedade determinada por S, consideremos o T-ideal $T(\mathcal{D})$ da variedades $\mathcal{D}$ que é a interseção de todos os T-ideais das identidades das álgebras de $\mathcal{D}$. Diremos que este T-ideal é gerado por $S = \{f_i \in K\langle X \rangle / i \in I\}$ e iremos representar por $T(\mathcal{D}) = \langle S \rangle_T = \langle f_i \in K\langle X \rangle / i \in I \rangle_T$. Observe que $\langle S \rangle_T$ é o menor T-ideal de $K\langle X \rangle$ que contém S.*

Observação 1.6.9 *De modo análogo ao feito na definição anterior, podemos definir a variedade determinada por um único polinômio f, como sendo a classe de todas as álgebras que têm f como uma identidade polinomial*

Definição 1.6.10 *Dois conjuntos de polinômios de $K\langle X\rangle$ são ditos equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal. Um polinômio g é consequência de um conjunto de polinômios $\{f_i/i \in I\}$ se $g \in \langle f_i/i \in I\rangle_T$.*

Agora iremos definir a álgebra livre G-graduada, onde G é um grupo finito arbitrário. Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre, livremente gerada pelo conjunto $X = \bigcup_{g\in G} X_g$, onde $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$ e $X_{g_1} \cap X_{g_2} \neq \emptyset$ para $g_1 \neq g_2$. As variáveis de X_g são ditas variáveis de grau g. Definimos o G-grau de um monômio $x_{i_1}^{(g_1)} x_{i_2}^{(g_2)} \ldots x_{i_t}^{(g_t)} \in K\langle X\rangle$ como sendo $g_1 g_2 \ldots g_t \in G$, e denotamos por $K\langle X\rangle^{(g)}$ o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios de G-grau g. Observe que

$$K\langle X\rangle^{(g)} K\langle X\rangle^{(h)} \subseteq K\langle X\rangle^{(gh)} \quad e \quad que \quad K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle^{(g)}$$

Portanto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada, que será denotada por $K\langle X\rangle^{gr}$.

Para a álgebra $K\langle X\rangle^{gr}$ também teremos a propriedade das álgebras livremente geradas, ou seja, para toda álgebra G-graduada $A \oplus_{g\in G} A_g$ e toda aplicação $f : X \longrightarrow A$ tal que $f(x_i^{(g)}) \in A_g$, existe um único homomorfismo G-graduado $\phi : K\langle X\rangle^{gr} \longrightarrow A$ que estende esta aplicação. Considerando um polinômio graduado $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_k^{(g_k)}) \in K\langle X\rangle^{gr}$, dizemos que $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_k^{(g_k)})$ é uma identidade G-graduada para a álgebra G-graduada A, se $f(a_1^{(g_1)}, \ldots, a_k^{(g_k)}) = 0$, para quaisquer $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, \ldots, a_k^{(g_k)} \in A^{(g_k)}$. Observe que o conjunto $Id^{gr} = \{f \in K\langle X\rangle^{gr}/f$ é uma identidade G-graduada de $A\}$ é um T-ideal graduado de $K\langle X\rangle^{gr}$, ou seja, um ideal de $K\langle X\rangle^{gr}$ invariante por todos os endomorfismos G-graduados de $K\langle X\rangle^{gr}$.

1.7 Polinômios multihomogêneos e polinômios multilineares

Nesta seção iremos definir os polinômios multihomogêneos e multilineares, além de apresentarmos um teorema, que dependendo da característica do corpo, irá mostrar que qualquer T-ideal é gerado por polinômios de um destes tipos.

Definição 1.7.1 *Seja $m(x_1, ..., x_k) \in K\langle X\rangle$ um monômio em $K\langle X\rangle$. Definimos o grau do monômio $m(x_1, ..., x_k)$ na variável x_i como sendo o número de vezes em que x_i*

aparece em $m(x_1, ..., x_k)$. Definimos o grau total de $m(x_1, ..., x_k)$ como sendo a soma dos graus de todas as variáveis deste monômio.

Definição 1.7.2 *Diremos que um polinômio $p(x_1, ..., x_k) \in K\langle X\rangle$ é homogêneo de grau n_i na variável x_i, para $i \in \{1, ..., k\}$, se cada monômio de $p(x_1, ..., x_k)$ tiver o grau n_i na variável x_i. Um polinômio $p(x_1, ..., x_k)$ é dito multihomogêneo de multigrau $(n_1, ..., n_k)$ se $p(x_1, ..., x_k)$ é homogêneo em todas as suas variáveis com grau n_i em x_i, para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Quando um polinômio for multihomogêneo de multigrau $(1, ..., 1)$, diremos que ele é um polinômio multilinear.*

Em um polinômio $f(x_1, \ldots, x_k)$, definimos a componente multihomogêneas de multigrau $(n_1, \ldots, n_k)$ como sendo a soma do todos os monômios em f que têm o multigrau $(n_1, \ldots, n_k)$.

Iremos denotar por P_n o espaço vetorial de todos os polinômios em $K\langle X\rangle$ que são multilineares na variáveis $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Observe que a dimensão de P_n é $n!$ e que P_n tem como base o seguinte conjunto de monômios: $\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} / \sigma \in S_n\}$.

Teorema 1.7.3 *Seja I um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e suponha que K seja um corpo infinito. Se $f(x_1, \ldots, x_k) \in I$, então todas as componentes multihomogêneas de f pertencem a I. Daí, concluimos que I é gerado por seus polinômios multihomogêneos.*

Demonstração: Veja [14], teorema 1.3.2 □

Teorema 1.7.4 *Toda PI-álgebra A satisfaz uma identidade multilinear.*

Demonstração: Veja [14], teorema 1.3.7. □

Teorema 1.7.5 *Seja K é um corpo de característica zero. Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Veja [14], corolário 1.3.9. □

Considere o espaço vetorial $P_n = span\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_\sigma(n) / \sigma \in S_n\}$ dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Considere a aplicação, $\phi : KS_n \longrightarrow P_n$, definida por $\phi\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$.

Observe que esta aplicação é um isomorfismo entre K-espaços vetoriais. Além disto podemos definir uma ação do grupo S_n no espaço vetorial P_n da seguinte maneira:

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Através disto, podemos definir o S_n-módulo P_n de maneira natural, considerando o produto bilinear $\cdot : KS_n \times P_n \longrightarrow P_n$ tal que $\sigma.f(x_1, \ldots\ x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e observar que $P_n \cap Id(A)$ é invariante por esta ação, uma vez que se $f \in P_n \cap T(A)$ e $\sigma \in S_n$, então $\sigma f \in P_n \cap T(A)$. Temos então que $P_n \cap T(A)$ é um KS_n-submódulo de P_n. Daí, podemos considerar

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

e de uma maneira natural ($\sigma.\overline{f} = \overline{\sigma f}$, para $\sigma \in S_n$ e $f \in P_n$) este quociente tem uma estrutura de KS_n-módulo. Daí, daremos a seguinte definição:

Definição 1.7.6 *Seja A uma PI-álgebra.*

(i) O número inteiro não negativo

$$c_n(A) = dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

é chamado de n-ésima codimensão da álgebra A, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para $n \in \mathbb{N}$, o S_n-caracter de $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ é chamado de n-ésimo cocaracter de A, denotado por $\chi_n(A)$

Se decompusermos o n-ésimo cocaracter em soma de caracteres irredutíveis, teremos que $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, onde$\chi_\lambda$ é o caracter irredutível de S_n associado a partição $\lambda \vdash n$ e m_λ é a multipicidade correspondente.

Seja G um grupo finito e considere o espaço dos polinômios multilineares G-graduados

$$P_n^{gr} = span\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)} \ldots x_{\sigma(n)}^{(g_n)} / \sigma \in S_n; g_1, \ldots g_n \in G\}.$$

Temos que $P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)$ é o conjunto de todas as identidades G-graduadas multilineares para a álgebra G-graduada A, nas variáveis com índices de 1 a n.

Observação 1.7.7 *Observe que a G-graduação não interefere no fato de um polinômio ser multilinear. Logo, teremos que o teorema 1.7.5 também será válido para o caso G-graduado.*

Definição 1.7.8 *Definimos a n-ésima codimensão G-graduada $c_n^{gr}(A)$ de A da seguinte maneira:*

$$c_n^{gr}(A) = dim \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}.$$

1.8 Radical de Jacobson e semi-simplicidade

Definição 1.8.1 *Definimos o radical de Jacobson de uma álgebra A como sendo a interseção de todos os ideais maximais a esquerda de A, que iremos denotar por $J(A)$.*

Observe que o radical de Jacobson $J(A)$ é um ideal à esquerda de A. Ademais, iremos mostrar que este é um ideal bilateral de A.

Lema 1.8.2 *Sejam A uma álgebra e $a \in A$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $a \in J(A)$;

(ii) $1 - xa$ *é inversível à esquerda para todo* $x \in A$;

(iii) $a \in Ann_A M = \{x \in A / xm = 0, \quad m \in M\}$ *para todo A-módulo irredutível de* M.

Demonstração: $i) \Longrightarrow ii)$ Suponha que $a \in J(A)$ e $x \in A$. Então, $xa \in M$, onde M é um ideal maximal à esquerda abitrário. Daí, $1 - xa \notin M$, donde concluímos que $1 - xa$ é inversível à esquerda.

$ii) \Longrightarrow iii)$ Suponhamos que (ii) seja válido e suponhamos, por contradição, que exista um A-módulo irredutível M tal que $aM \neq 0$. Considere então um elemento m de M tal que $am \neq 0$. Logo $A(am) = M$ e daí existe $x \in A$ tal que $x(am) = m$ e então $(1 - xa)m = 0$. Como $1 - xa$ é inversível à esquerda, teremos que $m = 0$, o que é uma contradição.

$iii) \Longrightarrow i)$ Seja M um ideal maximal a esqueda de A e considere o A-módulo $\frac{A}{M}$, cujo produto é definido por $a\overline{a} = \overline{ax}$. Note que $\frac{A}{M}$ é um A-módulo irredutível, e assim $a \in Ann_A(\frac{A}{M})$, donde $\overline{a} = a\overline{1} = \overline{0}$. Daí, $a \in M$, e portanto $a \in J(A)$.

Corolário 1.8.3 *$J(A)$ é um ideal bilateral de A.*

Demonstração: Temos que $J(A)$ é um ideal á esquerda e assim temos que provar que ele é também um ideal à direita. Suponha que $x \in A$ e $a \in J(A)$. Daí, considere um A-módulo irredutível M qualquer. Então, neste A-módulo teremos que $(ax)y = a(xy) = 0$, uma vez que $ax \in Ann_A M$, e do Lema 1.8.2 teremos que $ax \in J(A)$. Portanto, $J(A)$ é um ideal bilateral.

Exemplo 1.8.4 *Sendo $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre um corpo K, então*

$$J(U_n(K)) = \{A \in U_n(K)/A \text{ tem a diagonal nula}\}$$

De fato, considere $\mathcal{N} = \{A \in U_n(K)/A \text{ tem a diagonal nula}\}$ e $Y \in \mathcal{N}$. Observe que YX tem a diagonal nula e daí $det(Id - XY) = 1$, ou seja, $Id - XY$ é inversível para qualquer $X \in U_n(K)$, e pelo Lema 1.8.2 teremos que $Y \in J(U_n(K))$. Por outro lado, suponha que $J(U_n(K)) \nsubseteq \mathcal{N}$ e considere $Z \in J(U_n(K))$ tal que $Z \notin \mathcal{N}$. Sendo $Z = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_{nn} \end{bmatrix}$, onde $z_{ii} \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, considere a matriz $Y \in U_n(K)$ definida como sendo a matriz diagonal tal que as entradas não nulas serão os elementos z_{ii}^{-1}, sempre que $z_{ii} \neq 0$. Daí, observe que $Id - YZ$ não será inversível à esquerda, o que é um absurdo, já que contraria o Lema 1.8.2. *Portanto teremos que $J(U_n(K)) \subseteq \mathcal{N}$, e daí $J(U_n(K)) = \mathcal{N}$.*

Temos então que $J(U_n(K)) = \{X \in U_n(K)/X \text{ é nilpotente}\}$.

Proposição 1.8.5 *Se I é um ideal (unilateral ou bilateral) nil de uma K-álgebra A, então $I \subseteq J(A)$.*

Demonstração: Veja [21], pag. 53. $\square$

Agora iremos falar um pouco da teoria de álgebras semi-simples, porém de uma maneira bem sucinta, apenas descrevendo o que iremos precisar. Porém, se o leitor quiser ou precisar se aprofundar nesta teoria consulte [21], capítulo 1, seções 2 e 3. Lá está a teoria para aneis, mas como estamos tratando de álgebras associativas e com unidade, teremos que o mesmo ocorre para estas álgebras.

Definição 1.8.6 *Considere A uma álgebra e M um A-módulo. Então dizemos que M é semi-simples (ou completamente redutível) se M pode ser escrito como soma de submódulos minimais.*

Dizemos que uma álgebra A é semi-simples se todos os seus A-módulos são semi-simples. Segue que se A é semi-simples, então o A-módulo ${}_AA$ é semi-simples e assim A é a soma dos seus ideais minimais a esquerda.

Supondo agora A de dimensão finita, sabe-se que se A é semi-simples, então $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, onde cada I_j é um ideal bilateral minimal, chamado de somando simples de A. Cada um deles é simples como álgebra, donde A é isomorfa a um produto direto finito de álgebras simples (veja 1.2.4). É também um fato conhecido que A é semi-simples se, e somente se, $J(A) = \{0\}$.

Capítulo 2

As Identidades Graduadas para a Álgebra $U_2(K)$

Neste capítulo iremos descrever, a menos de isomorfismos, todas as graduações da álgebra $U_2(K)$ das matrizes triangulares superiores de ordem 2, sobre um corpo qualquer K. Depois, sob a hipótese de K ser um corpo de caracterítica zero, encontraremos uma base para o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$graduadas $Id^{gr}(U_2(K))$, e através disto calcularemos suas codimensões e seus cocaracteres graduados.

2.1 Graduações de $U_2(K)$

Nesta seção iremos descrever todas as possíveis graduações de $U_2(K)$ onde K é um corpo arbitrário. Seja G um grupo arbitrário e considere $(A_g)_{g\in G}$ uma G-graduação para $U_2(K)$. Dizemos que esta graduação é trivial quando $A_e = U_2(K)$ e $A_g = \{0\}$, para todo $g \in G - \{e\}$, e dizemos que esta graduação é canônica quando

$$A_e = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} /a, b \in K \right\}, \quad A_g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} /c \in K \right\}$$

para algum $g \in G - \{e\}$ e $A_h = \{0\}$, para todo $h \in G - \{e, g\}$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1 *Uma G-graduação de $U_2(K)$ é, a menos de isomorfismo, trivial ou canônica.*

Demonstração: Se a $dimA_e = 3$, então $A_e = U_2(K)$ e a graduação é trivial. Daí, assumiremos que $dimA_e \leq 2$.

Suponha inicialmente que $dimA_e = 2$. Note que $v_1 = Id_2 = E_{11} + E_{22}$ e $v_2 = aE_{11} + bE_{12}$ formam uma base para A_e sobre K, para adequados $a, b \in K$. Basta observar que sendo $v_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \in A_e$ tal que $\{Id_2, v_3\}$ é LI, então $\lambda_1 \neq \lambda_3$ ou $\lambda_2 \neq 0$ e assim $v_2 = v_3 - \lambda_3 v_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_e$ e $\{v_1, v_2\}$ é LI. Como $dimU_2(K) = 3$, então existe $g \in G - \{e\}$ tal que $dimA_g = 1$, e considere $A_g = KB$, $B = (\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{22})$. Suponhamos $a = 0$. Como $A_g A_e \subseteq A_g$ e $A_e A_g \subseteq A_g$, então $b\alpha_3 E_{12} A_g = (bE_{12})\alpha_3 \in A_g$ e $b\alpha_3 E_{12} \in A_e$, e daí $\lambda_2 \alpha_3 E_{12} = 0$, o que nos dá $\alpha_3 = 0$. Por outro lado, temos que $\alpha_1 b E_{12} = B(bE_{12}) \in A_g$ e $\alpha_1 b E_{12} \in A_e$. Logo $\alpha_1 b E_{12} = 0$ e daí $\alpha_1 = 0$, ou seja, $A_g = KE_{12} \subset A_e$, o que é uma contradição, pela definição de graduação. Portanto $a \neq 0$. Com isto, note que os elementos $E_{11} + \lambda E_{12}$ e $E_{22} - \lambda E_{12}$ formam uma base de A_e, para $\lambda = a_1^{-1} b$, pois $E_{11} + \lambda E_{12}$ e $E_{22} - \lambda E_{12}$ são L.I. e pertencem a A_e, pois, como $a \neq 0$ e $aE_{11} + bE_{12} \in A_e$, então $E_{11} + \lambda E_{12} \in A_e$ e $E_{22} - \lambda E_{12} = E_{11} + E_{22} - (E_{11} + \lambda E_{12})$. Suponha $\lambda \neq 0$. Então, pela definição de graduação, teremos que $B(E_{11} + \lambda E_{12}) = \alpha_1(E_{11} + \lambda E_{12}) \in A_g \bigcap A_e$, donde $\alpha_1 = 0$. Analogamente, multiplicando-se $\alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{22}$ à esquerda por $E_{22} - \lambda E_{12}$, obtemos $\alpha_3 = 0$. Daí, $A_g = KE_{12}$, $A_e = K(E_{11} + E_{22}) + K(E_{11} + \lambda E_{12})$ e a G-graduação em questão isomorfa à G-graduação canônica de $U_2(K)$, pois a aplicação $\phi : U_2(K) \longrightarrow U_2(K)$, definida por

$$\phi(xE_{11} + yE_{12} + zE_{22}) = xE_{11} + (\lambda x - \lambda z + y)E_{12} + zE_{22})$$

é um isomorfismo G-graduado que leva a G-graduação canônica de $U_2(K)$ na G-graduação em questão. Supondo $\lambda = 0$, temos $A_e = KE_{11} + KE_{22}$, e fazendo um processo análogo ao anterior, obtemos que $A_g = KE_{12}$. Logo a graduação referida seria canônica. Portanto, se $dimA_e = 2$, teremos uma graduação canônica, a menos de isomorfismo.

Suponhamos agora que $dimA_e = 1$. Logo, teremos que $A_e = K(E_{11} + E_{22})$. Por isto, teremos duas possibilidades para a graduação: ou $U_n(K) = A_e \bigoplus A_g \bigoplus A_h$, onde $dimA_g = dimA_h = 1$ ou $U_2(K) = A_e \bigoplus A_g$, onde $dimA_g = 2$. Seja $U_n(K) = A_e \bigoplus A_g \bigoplus A_h$ e suponha inicialmente que $gh \neq e$. Então, $A_gA_h = 0$, pois, caso contrário, $A_{gh} \neq \{0\}$, com $gh \neq g$, $gh \neq h$ e $gh \neq e$, ou seja, teríamos uma nova componente homogênea não nula, o que seria um absurdo, já que $dimU_n(K) = 3$. Logo $A_gA_h = 0$, e analogamente $A_hA_g = 0$. No caso em que $g^2 \neq e$ e $h^2 \neq e$, teremos que $A_g \bigoplus A_h$ é um ideal nilpotente de dimensão dois de $U_2(K)$, pois se $x \in U_2(K)$, então existem $a \in A_e, b \in A_g$ e $c \in A_h$ tais que $x = a + b + c$. Logo, $x(A_g \bigoplus A_h) \subseteq A_g \bigoplus A_h$, e analogamente teremos que $(A_g \bigoplus A_h)x \subseteq A_g \bigoplus A_h$. Daí, $A_g \bigoplus A_h$ é de fato um ideal de $U_2(K)$. Ademais, ele é um ideal nilpotente, o que contradiz o fato de que a dimensão do radical de Jacobson J de $U_2(K)$ é igual a 1 (veja o Exemplo 1.8.4), pois todo ideal nilpotente está contido no radical de Jacobson (pelo Teorema 1.8.5). Portanto, ou $g^2 \neq e$ e $h^2 = e$ ou $h^2 = g^2 = e$. No primeiro caso temos que $A_g^3 = 0$ e assim A_g é um subespaço nilpotente de dimensão igual a 1, donde $A_g = J$. Seja $A_h = K(aE_{11} + bE_{12} + cE_{22})$. De $A_gA_h = A_hA_g = \{0\}$, temos que $a = c = 0$, ou seja, $A_h = A_g$, uma contradição. No caso $g^2 = h^2 = e$ temos $A_g = Ku$ e $A_h = Kv$, com $u^2 = \alpha Id$ e $v^2 = \beta Id$, com $\alpha, \beta \in K$, pois $(A_g)^2, (A_h)^2 \subseteq A_e$. Se $\alpha = 0$, então $A_g = J$ e daí temos uma contradição. Analogamente, se $\beta \neq 0$ e então $u(uv)v = \alpha\beta Id \neq 0$ e assim $0 \neq uv \in A_gA_h = \{0\}$, o que é uma contradição.

Suponha agora que $gh = e$, ou seja, $g = h^{-1}$ Se $g^3 \neq e$, então $h^3 \neq e$. Temos então $g^2 \neq h$, $g^2 \neq e$ (pois $g \neq h = g^{-1}$) e $g^2 \neq g$. Logo, $(A_g)^2 \subseteq A_{g^2} = \{0\}$ e daí $A_g \subseteq J$. Analogamente, $(A_h)^2 \subseteq A_{h^2} = \{0\}$. Daí $A_g \oplus A_h \subseteq J$, um absurdo. No caso de $g^3 = e$, teremos que $g^2 = h$ e $h^2 = g$. Daí considere $a = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \in U_2(K)$ tal que $Ka = A_g$. Logo, $Ka^2 = A_h$. Note que $A_g \neq J$, pois se $A_g = J$ nos daria que $A_h^2 \subseteq J$ e daí $A_h \subseteq J$, um absurdo. Assim a tem ao menos uma entrada não nula na diagonal principal. Supondo agora que $\alpha = \theta$, teriamos que a^2 também teria os elementos da diagonal principal iguais, o que seria um absurdo, já que $span\{Id, a, a^2\} = U_2(K)$, pela graduação. Logo, $\alpha \neq \theta$. Daí a é diagonalizável e, a menos de automorfismo, podemos supor que $A_g = Ka$, onde a é diagonal. Então obteríamos que $dim(Ka + Ka^2 + KId) = 2$, o que é uma contradição.

Ficamos com $U_2(K) = A_e \bigoplus A_g$, onde $dim A_g = 2$. Se $g^2 \neq e$, segue que A_g seria um subespaço nilpotente. Logo, pelo Exemplo 1.8.5, teríamos que $A_g \subseteq J$, o que seria um absurdo. Sendo $g^2 = e$, temos $A_g A_g \subseteq A_e$. Se $a^2 = 0$ para todo $a \in A_g$, então $A_g \subseteq J$, um absurdo. Então existe $a \in A_g$ tal que $a^2 \in A_e - \{0\}$ e assim $a^2 = \lambda Id_2$ para algum $\lambda \in K - \{0\}$. Logo a é inversível, donde $dim(aA_g) = 2$, o que é um absurdo, pois $aA_g \subseteq A_e$. Portanto, temos o afirmado. $\square$

2.2 Cocaracteres e Codimensões graduados

Nesta seção iremos apresentar alguns conceitos que envolvem álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Alguns deles já foram descritos, em seu caso geral, no primeiro capítulo

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, livremente gerada pelo conjunto $X = Y \cup Z$, onde $Y = \{y_1, y_2, ...\}$, $Z = \{z_1, z_2, ...\}$ e $Y \cap Z = \emptyset$. Assumindo que Y e Z são os conjuntos de variáveis de grau zero e um, respectivamente, teremos que $K\langle X\rangle$ tem uma estrutura natural de superálgebra (ou álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada). Mais precisamente, se $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios que têm um número par de variáveis de grau um e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios que têm um número impar de variáveis de grau um, então $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \bigoplus K\langle X\rangle_1$ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação. Para qualquer superálgebra $A = A_0 \bigoplus A_1$ e qualquer aplicação $h : Y \cup Z \longrightarrow A$ que preserva $\mathbb{Z}_2$-graduação ($h(y_i) \in A_0$ e $h(z_i) \in A_1$), podemos estender esta aplicação a um único homomorfismo de superálgebras $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Nesta seção, iremos considerar $Id^{gr}(A)$ como sendo o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A, que sabemos ser um ideal T_2-ideal ou ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K\langle X\rangle$, ou seja, é invariante por todos os endomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados de $K\langle X\rangle$. Iremos supor que $char K = 0$, donde pelo Teorema 1.7.5, temos que $Id^{gr}(A)$ é gerado por seus polinômios multilineares.

Definimos uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para a superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ como sendo um polinômio $f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n) \in K\langle X\rangle = K\langle Y \cup Z\rangle$ tal que

$$f(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A_0$ e $b_1, ..., b_n \in A_1$.

Agora iremos definir as codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas e cocaracteres $\mathbb{Z}_2$-graduados.

Iniciaremos definindo o espaço dos polinômios multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduados de grau n, como sendo

$$P_n^{gr} = span_K\{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}/\sigma \in S_n, x_i = y_i \quad \text{ou} \quad x_i = z_i, i = 1, ..., n\}.$$

Agora, como feito na Definição 1.7.8, iremos definir as codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas. A n-ésima codimensão $\mathbb{Z}_2$-graduada de uma superálgebra A, que será representada por $c_n^{gr}(A)$, é definida como sendo

$$c_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}.$$

Antes de definirmos os cocaracteres $\mathbb{Z}_2$-graduados, falaremos sobre as representações lineares do produto direto. Sejam G_1 e G_2 grupos finitos, $G = G_1 \times G_2$ e K um corpo. Sendo $\phi : G_1 \longrightarrow GL(V_1)$ e $\psi : G_2 \longrightarrow GL(V_2)$ K-representações lineares, definamos, para $a \in G$ e $b \in G$

$$\phi_a \otimes \phi_b : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$$

como sendo o operador linear que satisfaz $(\phi_a \otimes \psi_b)(v_1 \otimes v_2) = \phi_a(v_1) \otimes \psi_b(v_2)$, para $v_1 \in V_1$ $v_2 \in V_2$. Claramente, $\phi_a \otimes \psi_b \in GL(V_1 \otimes V_2)$, e $\phi\#\psi : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$, definida por $(\phi\#\psi)(a, b) = \phi_a \otimes \psi_b$ é uma K-representação linear de G. Sendo χ_ϕ, χ_ϕ e $\chi_{\phi\#\psi}$ os caracteres de ϕ, ψ e $\phi\#\psi$, respectivemente, teremos que $\chi_{\phi\#\psi}(a, b) = \chi_\phi(a)\chi_\phi(b)$ para $(a, b) \in G$.

Fixado $r \in \{0, 1, .., n\}$, sejam $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r, x_{r+1} = z_{r+1}, \ldots, x_n = z_n$

$$P_{r,n-r}^{gr} = span_K\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}/\sigma \in S_n\}$$

o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis $y_1, ..., y_r, z_{r+1}, ..., z_n$.

Considere o grupo $S_r \times S_{n-r}$, onde S_r é o grupo permutacional sobre o conjunto $\{1, \ldots, r\}$ e S_{n-r} é o grupo permutacional sobre o conjunto $\{r + 1, \ldots, n\}$. Considere também a ação h de $S_r \times S_{n-r}$ sobre $P_{r,n-r}^{gr}$, definida de maneira natural, onde S_r age nas variáveis $y_1, ..., y_r$ e S_{n-r} age nas variáveis $z_{r+1}, ..., z_n$, ou seja,

$$h : (S_r \times S_{n-r}) \times P_{r,n-r} \longrightarrow P_{r,n-r}$$

$$(\eta, \gamma).f(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_n)) = f(y_{\eta(1)}, \ldots, y_{\eta(r)}, z_{\gamma(r+1)}, \ldots, z_{\gamma(n)}).$$

Esta ação faz de $P^{gr}_{r,n-r}$ um $(S_r \times S_{n-r})$-módulo. Note que $P^{gr}_{r,n-r} \cap Id^{gr}_n(A)$ é invariante por esta ação, e assim teremos que

$$P_{r,n-r}(A) = \frac{P^{gr}_{r,n-r}}{P^{gr}_{r,n-r} \cap Id^{gr}(A)}$$

é um $(S_r \times S_{n-r})$-módulo, sendo o seu caracter representado por $\chi_{r,n-r}(A)$. Dizemos que $\chi_{r,n-r}(A)$ é um cocaracter $\mathbb{Z}_2$-graduado (parcial) de A.

Considere $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash (n-r)$, T_λ e T_μ tabelas de Young destas partições. Temos que $M_\lambda = KS_r e_{T_\lambda}$ e $M_\mu = KS_{n-r} e_{T_\mu}$ são módulo irredutíveis sobre KS_r e KS_{n-r}, respectivamente. Considerando agora o $(S_r \times S_{n-r})$-módulo $W_{\lambda,\mu} = M_\lambda \otimes M_\mu$, cujo produto é dado por $(\sigma, \eta)(v_1 \otimes v_2) = \sigma v_1 \otimes \eta v_2$, temos que $W_{\lambda,\mu}$ é um $(S_r \times S_{n-r})$-módulo irredutível e $W_{\lambda,\mu} \equiv K(S_r \times S_{n-r})(e_{T_\lambda} e_{T_\mu})$.

Teorema 2.2.1 *Sejam* $char K = 0$, $\lambda \vdash r$ *e* $\mu \vdash (n-r)$. *Considere* χ_λ *como sendo o* S_r-*caracter irredutível associado a* λ, χ_μ *como sendo o* S_{n-r}-*caracter irredutível associado a* μ *e* ϕ_λ *e* ψ_μ *as respectivas representações irredutíveis. Então*

$$\{\phi_\lambda \# \psi_\mu \ / \lambda \vdash r \ e \ \mu \vdash (n-r)\}$$

é um conjunto completo de representações irredutíveis não equivalentes, de $S_r \times S_{n-r}$ *e*

$$\{\chi_\lambda \otimes \chi_\mu / \lambda \vdash r, \ \mu \vdash (n-r)\}$$

é o conjunto dos caracteres irredutíveis de $S_r \times S_{n-r}$.

Demonstração: Sendo m_1, m_2 e m os números de classes de cconjugação de S_r, S_{n-r} e $S_r \times S_{n-r}$, temos que $m = m_1 m_2$. Sendo $\lambda_1, \lambda_2 \vdash r$ e $\mu_1, \mu_2 \vdash n-r$, temos que

$$\langle \chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\mu_1}, \chi_{\lambda_2} \otimes \chi_{\mu_2} \rangle_{S_r \times S_{n-r}} = \langle \chi_{\lambda_1}, \chi_{\lambda_2} \rangle_{S_r} . \langle \chi_{\mu_1}, \chi_{\mu_2} \rangle_{S_{n-r}}$$

(veja a definição de $\langle , \rangle_G$ na página 22).

É um fato conhecido que todo corpo de caractarística 0 é um corpo de decomposição dos grupos simétricos. Logo pelo Teorema 1.4.19 temos que

$$\langle \chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\mu_1}, \chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\mu_1} \rangle_{S_r \times S_{n-r}} = 1$$

e assim pelo Corolário 1.4.20 $\phi_\lambda \# \psi_\mu$ é uma representação irredutível de $S_r \times S_{n-r}$.

Supondo agora $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ou $\mu_1 \neq \mu_2$, temos que $\langle \chi_{\lambda_1}, \chi_{\lambda_2} \rangle_{S_r} = 0$ ou $\langle \chi_{\mu_1}, \chi_{\mu_2} \rangle_{S_{n-r}} = 0$ (por 1.4.19), donde

$$\langle \chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\mu_1}, \chi_{\lambda_2} \otimes \chi_{\mu_2} \rangle_{S_r \times S_{n-r}} = 0.$$

Segue que $\phi_{\lambda_1} \# \psi_{\mu_1}$ e $\phi_{\lambda_2} \# \psi_{\mu_2}$ são não equivalentes pelo Corolário 1.4.20. Como o conjunto

$$\{\phi_\lambda \# \psi_\mu \ / \lambda \vdash r \ e \ \mu \vdash (n-r)\}$$

possui $m = m_1 m_2$ elementos e, a menos de equivalência, o número de K-representações irredutíveis de $S_r \times S_{n-r}$ é menor ou igual a m (Proposição 1.4.14), temos o resultado. $\square$

Daí teremos que

$$\chi_{r,n-r}(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{(\lambda,\mu)} (\chi_\lambda \otimes \chi_\mu)$$

onde $m_{(\lambda,\mu)} \geq 0$ é a multiplicidade de cada caracter irredutível. Definimos

$$c^{gr}_{r,n-r}(A) = dim P^{gr}_{r,n-r}(A)$$

Como o grau do caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ é igual a $d_\lambda d_\mu$ (lembrando que d_λ e d_μ são os graus de χ_λ e χ_μ, respectivamente), temos que

$$c^{gr}_{r,n-r}(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda\mu} d_\lambda d_\mu.$$

É um fato conhecido que

$$c^{gr}_n(A) = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} dim_K P^{gr}_{r,n-r}(A) = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} d_\lambda d_\mu.$$

Veja, [14], pag. 273.

2.3 Identidades graduadas de $U_2(K)$

Nesta seção iremos encontrar uma base para $Id^{gr}(U_2(K))$, o ideal das indentidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $U_2(K)$, e depois iremos calcular os seus cocaracteres graduados.

Para tal, considere $U_2(K)$ munida da mZ_2-graduação canônica e K um corpo de característica zero.

Os polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados z_1z_2 e $[y_1, y_2]$ são identidades graduadas de $U_2(K)$. De fato, sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \in A_0$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_1,$$

teremos

$$[A, B] = AB - BA = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

e

$$CD = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Iremos agora mostrar que estes polinômios geram $Id^{gr}(U_2(K))$, como um T_2-ideal. Primeiramente temos o seguinte lema:

Lema 2.3.1 *Se $m \in K\langle X\rangle$ é um monômio contendo pelo menos duas variáveis de grau 1, então $m \in I = \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{T_2}$.*

Demonstração: Seja $m = m_0z_1m_1z_2m_2$, onde m_0 e m_1 são monômios em variáveis de grau 0 e m_2 é um monômio em $K\langle X\rangle$. Observe que m_i podem ser vazio, para $i = 0, 1, 2$. Como $m_0z_1, m_1z_2 \in K\langle X\rangle_1$, temos que $m_0z_1m_1z_2$ é consequência de z_1z_2 e daí $m_0z_1m_1z_2 \in I$. Como I é ideal, temos que $m \in I$. $\square$

O próximo teorema exibirá um conjunto gerador de $Id^{gr}(U_n(K))$.

Teorema 2.3.2 : *Os polinômios z_1z_2 e $[y_1, y_2]$ geram $Id^{gr}(U_n(K))$ como T_2-ideal.*

Demonstração: Considere $I = \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{T_2}$ e seja f um polinômio multilinear de $Id^{gr}(U_2(K))$. No início desta seção, mostramos que os dois polinômios z_1z_2 e $[y_1, y_2]$ são identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $U_2(K)$ e então temos que $I \subseteq Id^{gr}(U_2(K))$. Logo, resta-nos mostrar que $Id^{gr}(U_2(K)) \subseteq I$. Como o corpo K é de característica

0, então, pelo Teroema 1.7.5, temos que o T_2-ideal $Id^{gr}(U_n(K))$ é gerado pelos seus polinômios multilineares. Logo, para que $I = Id^{gr}(U_n(K))$, temos que mostrar que $f \in I$, ou seja, temos que mostrar que f é um polinômio congruente a zero módulo I. Observe que

$$f = f_1(y_1, \dots, y_s) + f_2(z, y_1, \dots, y_{s-1}) + f_3$$

onde f_3 contém todos os monômios de f com pelo menos duas variáveis de grau 1 (se existirem). Por 2.3.1, temos que $f_3 \in I$. Logo $f_1(y_1, \dots, y_s) + f_2(z, y_1, \dots, y_{s-1}) \in Id^{gr}(U_2(K))$. Substituindo z por zero, concluímos que f_1, e consequentemente f_2 é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para $U_2(K)$. Agora, como $[y_1, y_2] \in I$, temos que $f_1(y_1, \dots, y_s) \equiv \alpha y_1 \dots y_s (mod I)$.

Fixados $u = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $v = \{j_1, \dots, j_{s-1-t}\}$, com $i_1 < \dots < i_t$, $j_1 < \dots < j_{s-1-t}$ e $\{i_1, \dots, i_t, j_1, \dots, j_{s-t}\} = \{1, \dots, s-1\}$, defina $m_{u,v} = y_{i_1} \dots y_{i_t} z y_{j_1} \dots y_{j_{s-t}}$. Agora, como $[y_1, y_2] \in I$, temos $f_2 \equiv \sum_{u,v} \alpha_{u,v} m_{u,v} (mod I)$ com $\alpha_{u,v} \in K$. Fixando novamente u_0, v_0 tais que $u_0 \cap v_0 = \emptyset$ e $u_0 \cup v_0 = \{1, \dots, s-1\}$, e substituindo z por E_{12}, as variáveis y_j, com $j \in u_0$ por E_{11} e as variáveis y_j, com $j \in v_0$, por E_{22}, concluímos que $\alpha_{u_0,v_0} = 0$. Daí, $f_2 \in I$

Portanto, $f \in I$ e podemos concluir que $Id^{gr}(A) = \langle z_1 z_2, [y_1, y_2] \rangle$ $\square$

O próximo resultado traz a descrição dos cocaracteres $\mathbb{Z}_2$-graduados de $U_2(K)$.

Teorema 2.3.3 *Considere $U_2(K)$ munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $\chi^{gr}_{r,n-r}(U_2(K)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu}(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu)$. Então:*

(i) Se $r \leq n-2$, então $m_{\lambda,\mu} = 0$

(ii) Se $r = n$, então $m_{(n),\emptyset} = 1$ e $m_{\lambda,\emptyset} = 0$ se $\lambda \neq (n)$

(iii) Se $r = n-1$ e $\lambda = (p+q, p) e \mu = 1$, então $m_{\lambda,\mu} = q+1$.

(iv) Se $r = n-1$ e $h(\lambda) > 2$, então $m_{\lambda,\mu} = 0$

Demonstração: (i) Supondo que $r \leq n-2$, então teremos que $n - r \geq 2$. Logo os monômios em $P^{gr}_{r,n-r}$ terão mais que uma variável de grau um e daí pelo Lema 2.3.1 teremos que $\frac{P^{gr}_{r,n-r}}{P^{gr}_{r,n-r} \cap Id^{gr}(U_2(K))}$ terá apenas o elemento nulo e portanto temos o afirmado.

(ii) Considere $r = n$. Observe que $S_n \times S_{n-r} = S_n$ e

$$P^{gr}_{n,0} = span\{y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n)} / \sigma \in S_n\}.$$

Como $[y_1, y_2] \equiv 0$ $(modId^{gr}(U_2(K))$, teremos que $\overline{y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n)}} = \overline{y_1 \dots y_n}$ em $P^{gr}_{n,0}(U_2(K))$ para todo $\sigma \in S_n$, e daí $dimP^{gr}_{n,0}(U_2(K)) = 1$. Assim $P^{gr}_{n,0}(U_2(K))$ é um S_n-módulo irredutível. Por outro lado $\sigma.\overline{y_1 \dots y_n} = \overline{y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n)}} = \overline{y_1 \dots y_n}$ e assim a S_n-representação correspondente ao S_n-módulo $P^{gr}_{n,0}(U_2(K))$ é a trivial, a qual corresponde à partição (n) de n. Assim, $m_{(n),\emptyset} = 1$ e $m_{\lambda,\emptyset} = 0$, se $\lambda \neq (n)$.

(iii) e (iv) Veja [27]. $\square$

Considere A um superálgebra satisfazendo uma identidade polinomial não-trivial. Sabemos que $c_n(A) \leq c^{gr}_n(A) \leq 2^n c_n(A)$ (veja [14], pag. 304). Observando o crescimento exponencial das codimensões graduadas, definimos $exp^{gr}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c^{gr}_n(A)}$.

No próximo resultado calcularemos $exp^{gr}(U_2(K))$ no caso em que $U_2(K)$ é considerado com a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica.

Proposição 2.3.4 $exp^{gr}(U_2(K)) = 2$

Demosntração: É um fato conhecido que $c_n(U_2(K)) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ (veja [14], pag. 88). Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$c^{gr}_n(U_2(K)) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda\vdash r \\ \mu\vdash n-r}} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} m_{\lambda,\mu} d_\lambda d_\mu.$$

Pelo Teorema 2.3.3, temos que $m_{\lambda,\mu} = 0$ se $r \leq n-2$. Logo,

$$c^{gr}_n(U_2(K)) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n-1 \\ \mu\vdash 1}} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} m_{\lambda,\mu} d_\lambda d_\mu + \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \mu\vdash 0}} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} m_{\lambda,\emptyset} d_\lambda d_\mu.$$

Como $m_{\lambda,\mu} = 0$ para $h(\lambda) > 2$ (pelo teorema 2.3.3),

$$c^{gr}_n(U_2(K)) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n-1 \\ h(\lambda)\leq 2}} n m_{\lambda,(1)} d_\lambda + \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ h(\lambda)\leq 2)}} m_{\lambda,\emptyset} d_\lambda.$$

Por 2.3.3, $m_{\lambda,\mu} \leq n$, e assim

$$c_n^{gr}(U_2(K)) \leq n \left(\sum_{\substack{\lambda \vdash n-1 \\ h(\lambda) \leq 2}} n d_\lambda + \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq 2)}} d_\lambda \right) \leq (n^2+n) \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq 2)}} d_\lambda \leq 2^n(n^2+n).$$

A penúltima desigualdade vem do seguinte fato: se $\lambda \vdash (n-1)$, onde $\lambda = (p,q)$ e $\lambda\prime(p+1,q) \vdash n$, então temos que $d_\lambda \leq d_{\lambda'}$ e daí,

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n-1 \\ h(\lambda) \leq 2}} d_\lambda \leq \sum_{\substack{\lambda' \vdash n \\ h(\lambda') \leq 2}} d_{\lambda\prime} \leq \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq 2}} d_\lambda.$$

Já a última desigualdade sai do Teorema do gancho (Seção 1.5), mais precisamente da seginte maneira: sendo $\lambda(p+q,p) \vdash n$,

$$n! = d_\lambda(p!q!(p+q+1)(p+q)(p+q-1)\dots(q+2))$$

$$\geq d_\lambda((p!q!)(p+q)(p+q-1)\dots(q+1)) = d_\lambda(p!(p+q)!),$$

donde

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{p!(p+q)!} = \binom{n}{p}.$$

Observe ainda que

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq 2}} d_\lambda \leq \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Logo, $2^{n-1}(n-2)+2 \leq c_n^{gr}(U_2(K)) \leq 2^n(n^2+n)$, e daí $\sqrt[n]{2^{n-1}(n-2)+2} \leq \sqrt[n]{c_n^{gr}(U_2(K))} \leq 2\sqrt[n]{n^2+n}$. Fazendo agora n tender ao infinito, temos o resultado. $\square$

Capítulo 3

Identidades Graduadas para a Álgebra $U_n(K)$

Neste capítulo iremos encontrar uma base para o ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $U_n(K)$. Com isto, poderemos calcular as codimensões graduadas desta álgebra. Para tanto iremos ultilizar para $U_n(K)$ sua $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica definida na Seção 1.3, do primeiro capítulo.

Inicialmente iremos usar um abuso de notação e denotar o grupo $\mathbb{Z}_n$ como sendo $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$, e para diferenciarmos as operações de soma de cada um destes conjuntos, iremos utilizar $+_n$ para denotar a soma em $\mathbb{Z}_n$ (soma módulo n) e $+$ para a soma em $\mathbb{Z}$ (soma usual).

Em todo capítulo, K será um corpo infinito e $K\langle X\rangle$ denotará a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_n$-graduada (ou simplismente n-graduada).

3.1 As Identidades graduadas de $U_n(K)$

Nesta seção iremos considerar a álgebra $U_n(K)$ com sua $\mathbb{Z}_n$-graduação canônica, definida no primeiro capítulo. Iniciaremos com o seguinte lema

Lema 3.1.1 *A álgebra $U_n(K)$ satisfaz as seguintes identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas:*

$$x_1^{(0)}x_2^{(0)} - x_2^{(0)}x_1^{(0)} \equiv 0$$

$$x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)} \equiv 0$$

onde $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_n$ *e* $i_1 + i_2 \geq 0$.

Demonstração: Sejam as seguintes matrizes do grau 0,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Então, como os elementos do corpo são comutativos, teremos que

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix} = BA$$

Logo, o primeiro polinômio descrito acima é uma identidade para $U_n(K)$. Resta-nos provar que o segundo polinômio também será identidade.

Sendo X uma matriz de grau i_1 e Y uma matriz de grau i_2, então

$$X = a_{1,1+i_1}E_{1,1+i_1} + a_{2,2+i_1}E_{2,2+i_1} + \cdots + a_{n-i_1,n}E_{n-i_1,n} \quad e$$

$$Y = b_{1,1+i_2}E_{1,1+i_2} + b_{2,2+i_2}E_{2,2+i_2} + \cdots + b_{n-i_2,n}E_{n-i_2,n}$$

onde os $a_{ij}\prime s$ e os $b_{kl}\prime s$ são elementos do corpo K e $i_1 + i_2 \geq n$. Sabemos que a única possibilidade para que $AB \neq 0$ é que exista k, onde $1 \leq k \leq n - i_1$, tal que $i_1 + k = l$, com $1 \leq l \leq n - i_2$. Logo, $1 \leq i_1 + k \leq n - i_2$ e então $1 \leq i_1 + i_2 + k \leq n$, o que é uma absurdo, já que $i_1 + i_2 \geq n$ e $k \geq 1$. Daí, AB tem que ser a matriz nula, como queríamos provar. Portanto os polinômios dados acimas são identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas para a álgebra $U_n(K)$. $\square$

Denotaremos por I o T-ideal n-graduado de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do Lema 3.1.1, e por $Id^{gr}(U_n(K))$ o ideal das identidades n-graduadas de $U_n(K)$. Observa-se, pelo Lema anterior, que $I \subseteq Id^{gr}(U_n(K))$. Nosso intuito é mostrar que $I = Id^{gr}(U_n(K))$. Antes de mostrarmos este fato, iremos enunciar e provar uma proposição que nos ajudará na sua demonstração.

Proposição 3.1.2 *Sejam $i_1, i_2, ..., i_k \in Z_n$ tais que $i_1 + i_2 + ... + i_k \geq n$. Então o monômio $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}$ é uma identidade n-graduada para $U_n(K)$.*

Demonstração: Demonstraremos por indução. Para $k = 2$, já foi demonstrado no Lema 3.1.1. Agora, suponhamos que a proposição seja válida para k e provaremos que ela será válida para $k + 1$. De fato, considere o monômio $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}x_{k+1}^{(i_{k+1})}$ e sejam $p(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_k^{(i_k)}) = x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}$ e $i = i_1 + i_2 + ... + i_k$. Se $i \geq n$, temos, por hipótese de indução, que $p(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_k^{(i_k)})$ é identidade n-graduada para $U_n(K)$, e daí o polinômio $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}x_{k+1}^{(i_{k+1})} = p(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_k^{(i_k)})x_{k+1}^{(i_{k+1})}$ também será identidade n-graduada para $U_n(K)$. Agora suponhamos que $i < n$. Neste caso, temos que $i_1 + \cdots + i_k = i_1 +_n \cdots +_n i_k$ é o $\mathbb{Z}_n$-grau de $p(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_k^{(i_k)})$. Como $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}x_{k+1}^{(i_{k+1})} = p(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_k^{(i_k)})x_{k+1}^{(i_{k+1})}$ e $i + i_{k+1} \geq n$, pelo Lema 3.1.1 temos que $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}x_{k+1}^{(i_{k+1})}$ é de fato uma identidade n-graduada para $U_n(K)$. Portanto, $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}...x_k^{(i_k)}$ é uma identidade n-graduada para $U_n(K)$, sempre que $i_1 + i_2 + ... + i_k \geq n$.$\square$

Considere o conjunto dos monômios de $K\langle X\rangle$ da forma

$$u = w_0 x_{k_1}^{(i_1)} w_2 ... w_{t-1} x_{k_t}^{(i_t)} w_t \tag{3.1}$$

onde $i_1 + ... + i_t < n$ e $w_0, w_1, ..., w_t$ são monômios (possivelmente vazios) nas variáveis homogêneas $x_i^{(0)}$ de $\mathbb{Z}_n$-grau zero, e em cada w_i estas variáveis estão escritas em ordem crescente de índices, da esquerda para a direita. O próximo teorema nos dará uma base para $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$ e como consequência mostraremos que $I = Id^{gr}(U_n(K))$. Porém, antes iremos provar os seguintes lemas:

Lema 3.1.3 *Os monômios (3.1) geram $K\langle X\rangle$ módulo I e consequentemente módulo $Id^{gr}(U_n(K))$.*

Demonstração: Seja $f \in K\langle X\rangle$ um poilinômio tal que $f \neq I$. Como $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \in I$, teremos que as variáveis de $\mathbb{Z}_n$-grau 0 comutam módulo I, e como $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)} \in I$, com $i_1 + i_2 \geq n$, então teremos que f tem o $\mathbb{Z}_n$-grau total menor que n. Perceba então que f é congurente módulo I a um dos monômios do tipo (3.1). Ademais, sabemos que $I \subseteq Id^{gr}(U_n(K))$, donde segue a ultima afirmação. $\square$

Lema 3.1.4 *Sejam V um K-espaço vetorial, I e J dois subespaços de V tais que $I \subseteq J$, e $\beta = \{v_j/v_j \in \Lambda\}$ um subconjunto de V tal que $\overline{\beta} = \{v_j + I/j \in \Lambda\}$ gera $\frac{V}{I}$ e $\overline{\overline{\beta}} = \{v_j + J/j \in \Lambda\}$ é L.I. em $\frac{V}{J}$. Então $I = J$.*

Demonstração: Seja $w \in J$. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que $w + I = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + I$, donde $w = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + v$, onde $v \in I$. Daí, como $I \subseteq J$ e consequentemente $v + J = 0 + J$, temos que

$$\overline{0} = w + J = \lambda_1(v_1 + J) + \cdots + \lambda_n(v_n + J)$$

e como β é L.I. módulo J, teremos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Portanto $w \in I$ e $I = J$. $\square$

Teorema 3.1.5 *Se K é um corpo infinito, então os monômios em (3.1) formam uma base de $K\langle X\rangle$ módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Ademais,*

$$Id_{gr}(U_n(K)) = I = \langle [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_0^{(i)}x_1^{(j)}/i + j \geq n\rangle_{T_n}.$$

Demonstração: Observe que $I \subseteq Id^{gr}(U_n(K))$ pelo Lema 3.1.1 e que os monômios em (3.1) são linearmente independentes módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. De fato, suponha que $f = \sum \alpha_i u_i \in Id^{gr}(U_n(K))$, onde $\alpha_i \in K$ e os monômios u_i são do tipo (3.1). Como K é um corpo infinito, então os T-ideais n-graduados são gerados pelos polinômios multihomogêneos. Daí, assumiremos que f é multihomogêneo, isto é, as mesmas variáveis aparecem o mesmo número de vezes em cada monômio u_i. Fixando-se um monômio com coeficiente não nulo, digamos u_1 e seja $u_1 = w_0 x_{i_1}^{(k_1)} w_2 ... w_{t-1} x_{i_t}^{(k_t)} w_t$. Iremos agora fazer as seguintes substituições em f: cada variável que aparece em w_0, por E_{11}; a variável $x_{i_1}^{(k_1)}$, por E_{1,k_1+1}; cada variável que aparece em w_1, por E_{k_1+1,k_1+1}; a variável $x_{i_2}^{(k_2)}$ por E_{k_1+1,k_1+k_2+1};...; a variável $x_{i_t}^{(k_t)}$, por $E_{k_1+...+k_{t-1}+1,k_1+...+k_t+1}$ e cada variável w_t por E_{jj}, onde $j = k_1 + ... + k_m + 1$. Logo temos que $0 = \alpha_1 E_{1j}$, o que é um absurdo.

Agora, observe que todo elemento de $K\langle X\rangle$, é escrito, módulo I, como combinação linear dos monômios do tipo (3.1), pelo Lema 3.1.3. Levando em conta o que acabamos de fazer, temos a priemira afirmção.

Pelo Lema 3.1.4, temos que $I = Id^{gr}(U_n(K))$, ou seja,

$$Id^{gr}(U_n(K)) = \langle [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], x_1^{(i)} x_2^{(j)} / i + j \geq n \rangle_{T_n}.$$

□

3.2 Matrizes genéricas e identidades graduadas

Nesta seção tralharemos para dar uma outra demonstração do Teorema 3.1.5. Para isto, iremos trabalhar com matrizes genéricas.

Considere as seguintes variáveis comutativas, $y_{ij}^{(k)}$, onde $1 \leq i \leq j \geq n$ e $k = 1, 2, \ldots,$. Considere também a álgebra polinomial $K[y_{ij}^{(k)}]$. Então, teremos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 *As álgebras $U_n(K) \otimes_K K[y_{ij}^{(k)}]$ e $U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$ são isomorfas.*

Demonstração: Considere a seguinte aplicação linear

$$\phi : U_n(K) \otimes_K K[y_{ij}^{(k)}] \longrightarrow U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$$

definida por $\phi(E_{ij} \otimes_K f) = E_{ij}(f)$, onde $E_{ij}(f)$ é a matriz que tem $f \in K[y_{ij}^{(k)}]$ (f é um monômio) na entrada da linha i e coluna j, além de zero nas demais entradas. Observe que ϕ está bem definida pela propriedade universal do produto tensorial, e da maneira como foi definida, como uma correspodência biunívoca entre duas bases, temos que ϕ é um isomorfismo de espaços vetorias. Ademais, é um homomorfismo de álgebras. Portanto, temos o afirmado. □

Seja

$$Y_k^{(i)} = y_{1,i+1}^{(k)} E_{1,i+1} + y_{2,i+2}^{(k)} E_{2,i+2} + \ldots + y_{n-i,n}^{(k)} E_{n-i,n} \in U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$$

com $0 \leq i \leq n-1$ e $k \in \mathbb{N}$. Seja G_n a subálgebra de $U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$ gerada por estas matrizes, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Considere o subespaço

$$U_n(K[y^{(k)_{ij}}])_i = \{f_1 E_{1,1+i} + f_2 E_{2,2+i} + \cdots + f_{n-i} E_{n-i,n} / f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in K[y_{ij}^{(k)}]\}$$

e $B_i = G_n \cap U(K[y^{(k)_{ij}}])_i$. Daí, teremos que $G_n = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_{n-1}$ e $B_{i_1}B_{i_2} \subseteq B_{i_1+_n i_2}$, para $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_n$.

De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Lema 3.1.1, mostra-se que G_n satisfaz as identidades n-graduadas $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ e $x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}$, com $i_1 + i_2 \geq n$. Logo $I \subseteq Id^{gr}(G_n)$.

Lema 3.2.2 *Seja $f(x_1^{(i_1)}, \ldots, x_n^{(i_n)}) \in K\langle X\rangle$. Então $f(Y_1^{(i_1)}, \ldots, Y_n^{(i_n)}) = 0$ se, e somente se, $f \in Id^{gr}(U_n(K))$.*

Demonstração: De fato, $f(Y_1^{(i_1)}, \ldots, Y_n^{(i_n)}) \in U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$ e f é identidade n-graduada de $U_n(K)$ se, e somente se, todas as entradas de $f(Y_1^{(i_1)}, \ldots, Y_n^{(i_n)})$ se anula para quaisquer substistuições das variáveis $y_{ij}^{(k)}$ por elementos de K. Como K é infinito, isto acontece se, e somente se, todas as entradas de $f(Y_1^{(i_1)}, \ldots, Y_n^{(i_n)})$ são polinômios identicamente nulo. $\square$

Lema 3.2.3 *A álgebra G_n é isomorfa, como uma álgebra n-graduada, à álgebra $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$.*

Demonstração: Considere a aplicação definida por $x_k^{(i)} \longrightarrow Y_k^{(i)}$. Daí, como $K\langle X\rangle$ é gerado livremente por $X = \{x_k^{(i)}/k \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n-1\}$, teremos que existe um homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow G_n$ tal que $\phi(x_k^{(i)}) = Y_k^{(i)}$. Ademais, teremos que ϕ é um epimorfismo, uma vez que todas as matrizes $Y_k^{(i)}$ estão na imagem de ϕ e G_n é gerada (como álgebra) por elas. Ademais, pelo teorema anterior, teremos que $ker\phi = Id^{gr}(U_n(K))$. Daí, existe um isomorfismo $\Phi : \frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))} \longrightarrow G_n$, definido por $\Phi(\overline{x_i^{(k)}}) = \phi(x_i^{(k)}) = Y_k^{(i)}$. Ademais, da meneira como ϕ foi definida ela leva variáveis n-graduadas em matrizes com o mesmo n-grau. Logo Φ preserva graduação. $\square$

Lema 3.2.4 *Sejam A_1 e A_2 dois elementos de $U_n(K[y_{ij}^{(k)}])$, tais que $A_1 \in B_i$ e $A_2 \in B_j$.*

$$\textit{Sendo } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & f_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & f_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{n-i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \textit{ e } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & g_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & g_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & g_{n-j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

onde $f_1, ..., f_{n-i}, g_1, ..., g_{n-j} \in K[y_{ij}^{(k)}]$ *e* $0 \leq i, j \leq n-1$, *se* $i+j \geq n$, *então* $A_1A_2 = 0$, *se* $i+j < n$, *então*

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & f_1g_{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & f_2g_{i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & f_{n-i-j}g_{n-j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração: Inicialmente, se $i+j \geq n$, então $i+1 \geq n-j$. Como $A_1 = f_1E_{1,i+1} + f_2E_{2,i+2} + ... + f_{n-i}E_{n-i,n}$ e $A_2 = g_1E_{1,j+1} + g_2E_{2,j+2} + ... + g_{n-j}E_{n-j,n}$, então, concluimos que $A.B = \sum_{l=1}^{n-i}\sum_{q=1}^{n-j} f_lg_qE_{l,i+l}E_{q,j+q} = 0$.

Suponha agora que $i+j < n$. Logo teremos que $i+1 \leq n-j$ e daí $A_1.A_2 = (f_1E_{1,i+1} + f_2E_{2,i+2} + ... + f_{n-i}E_{n-i,n})(g_1E_{1,j+1} + g_2E_{2,j+2} + ... + g_{n-j}E_{n-j,n}) = f_1g_{i+1}E_{1,j+i+1} + f_2g_{i+2}E_{2,i+j+2} + ... + f_{n-i-j}g_{n-j}E_{n-j}E_{n-i-j,n}$, como afirmado. □

Proposição 3.2.5 *Seja* $0 \neq m(x_1^{(i_1)}, ..., x_l^{(i_l)}) \in K\langle X\rangle$ *um monômio tal que seu grau total seja* q *e* $m \notin Id(U_n(K))$. *Então existem* $k_1, ..., k_q \in \mathbb{N}$ *e* $j_1, ..., j_q \in \{i_1, \dots, i_l\}$ *tais que*

$$m(Y_1^{(i_1)}, ..., Y_l^{(i_l)}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w_t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde $t = n - (i_1 + \dots + j_q)$ *e* $w_k = y_{k,j_1+k}^{(k1)} y_{j_1+k,j_1+j_2+k}^{(k_2)} ... y_{j_1+...+j_{q-1}+k,j_1+...+j_q+k}^{(k_q)}$ *são monômios em* $K[y_{ij}^{(k)}]$.

Demonstração: Provaremos por indução sobre q. Para $q = 1$ nada a se demonstrar, pois $m(Y_1^{(i_1)}) = Y_1^{(i_1)}$. Agora, suponha $q > 1$. Então existe um monômio $0 \neq n(x_1^{(i_1)}, ..., x_l^{(i_l)})$ tal que $m(x_1^{(i_1)}, ..., x_l^{(i_l)}) = n(x_1^{(i_1)}, ..., x_l^{i_l})x_q^{(j_q)}$, onde o grau total de $n(x_1, ..., x_l)$ é $q-1$. Logo, por hipétese de indução, temos que existem $k_1, ..., k_l \in \mathbb{N}$ e

$j_1, ..., j_{q-1} \in \{i_1, ..., i_l\}$ tais que

$$n(Y_1^{(i_1)}, ..., Y_l^{(i_l)}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1\prime & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w_2\prime & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w\prime_t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

onde $t\prime = n - (j_1 + \cdots + j_{q-1})$ e $w_k\prime = y_{1,j_1+k}^{(k_1)} y_{j_1+k,j_1+j_2+k}^{(k_2)} \cdots y_{j_1+\ldots+j_{q-1}+k,j_1+\ldots+j_{q-1}+k}^{(k_q)}$. Como $m \notin Id^{gr}(U_n(K))$, temos que $j_1 + \cdots + j_{q-1} + j_q < n$. Daí, pelo Lema 3.2.4

$$m(Y_1^{(i_1)}, ..., Y_l^{(i_l)}) = n(Y_1^{(i_1)}, ..., Y_l^{(i_l)})Y_q^{(j_q)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & w_t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde t e os $w_i\prime s$ são como no enunciado. □

Lema 3.2.6 *Sejam $m(x_1^{(i_1)}, ..., x_n^{(i_n)})$ e $n(x_1^{(i_1)}, ..., x_n^{(i_n)})$ dois monômios de $K\langle X\rangle$. Se as matrizes $m(Y_{i_1}^{(k_1)}, ..., Y_{i_n}^{(k_n)})$ e $n(Y_{i_1}^{(k_1)}, ..., Y_{i_n}^{(k_n)})$ têm na primeira linha a mesma entrada não nula, então $m(Y_{i_1}^{(k_1)}, ..., Y_{i_n}^{(k_n)}) = n(Y_{i_1}^{(k_1)}, ..., Y_{i_n}^{(k_n)})$.*

Demonstração: Este lema sai como consequência da Proposição 3.2.5, pois perceba que a entrada não nula na primeira linha da matriz $m(Y_{i_1}^{k_1}, ..., Y_{i_n}^{k_n})$ determina as outras, assim como a primeira entrada não nula na primeira linha de $n(Y_{k_1}^{(i_1)}, ..., Y_{k_n}^{(i_n)})$ determina as demais. □

Corolário 3.2.7 *Sejam $m_s = m_s(x_{k_1}^{(i_1)}, ..., x_{k_n}^{(i_n)})$, para $s \in \{1, 2\}$, dois monômios de $K\langle X\rangle$. Suponha que as matrizes $m_1(Y_{k_1}^{(i_1)}, ..., Y_{k_n}^{(i_n)})$ e $m_2(Y_{k_1}^{(i_1)}, ..., Y_{k_n}^{(i_n)})$ tenham na primeira linha a mesma entrada não nula, para quaisquer $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Então, teremos que $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.2.6 teremos que $m_1 - m_2 = 0$ na álgebra G_n e como, pelo Lema 3.2.3, G_n é isomorfa a $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$, teremos que $m_1 - m_2 \in Id_n^{gr}(U_n(K))$. □

Daremos uma prova alternativa do Teorema 3.1.5.

Demonstração: Considere I como sendo o T_n-ideal gerado pelos polinômios $\{[x_1^{(0)}, x_1^0], x_1^i x_2^j / i + j \geq n\}$. Já sabemos que $I \subseteq Id^{gr}(U_n(K))$. Logo, só necessitamos provar que $Id^{gr}(U_n(K)) \subseteq I$. Suponhamos por contradição, que existe pelo menos um polinômio multihomogêneo $f \in Id^{gr}(U_n(K))$ tal que $f \notin I$. Iremos trabalhar na álgebra $\frac{K\langle X\rangle}{I}$. Considere $f \in \frac{Id^{gr}(U_n(K))}{I}$ de menor grau possível expresso na forma $f = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + ... + \alpha_s m_s$, onde os $m_t\prime s$ são monômios distintos do tipo (3.1), $\alpha_t \in K - \{0\}$ e s é o mínimo possível.

Supondo $m_t = m_t(x_{k_1}^{(i_1)}, ..., x_{k_l}^{(i_l)})$, então, como $f \in Id^{gr}(U_n(K))$, teremos que

$$m_1(Y_{k_1}^{i_1}, ..., Y_{k_n}^{i_n}) = \sum_{z=2}^{r} \beta_z m_z(Y_{k_1}^{i_1}, ..., Y_{k_n}^{i_n})$$

onde $\beta_z = \frac{-\alpha_z}{\alpha_1}$, que é diferente de zero, pela minimalidade de s, para todo $z = 2, 3, ..., s$. Como $m_1(Y^{(i_1)_{k_1}}, \ldots, Y_{k_l}^{(i_l)}) \neq 0$, na primeira linha dessa matriz haverá uma entrada não nula que deverá aparecer na primeira linha da matriz $\sum_{z=2}^{r} \beta_z m_z(Y_{j_1}^{k_1}, ..., Y_{j_n}^{k_n})$. Logo, teremos a igualdade entre um monômio (entrada do primeiro membro) e um polinômio (entrada do segundo membro) da álgebra $K[y_{ij}^{(k)}]$. A matriz $m_1(Y^{(i_1)_{k_1}}, \ldots, Y_{k_l}^{(i_l)})$ terá o elemento não nulo na primeira linha igual ao elemento não nulo da primeira linha de uma das outras matrizes, digamos da matriz $m_2(Y^{(i_1)_{k_1}}, \ldots, Y_{k_l}^{(i_l)})$. Logo, $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$, de acordo com o Corolário 3.2.7. Mas, então $m_1 = m_2$, pois os monômios em (3.1) são LI módulo $Id^{gr}(U_n(K))$ e nós reduzimos f a $s-1$ monômios, o que contradiz a escolha do s. Portanto, $I = Id^{gr}(U_n(K))$.

Agora iremos provar que os monômios (3.1) são linearmente independentes módulo $Id^{gr}(U_n(K))$. Supondo o polinômio $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i m_i \in Id^{gr}(U_n(K))$, onde os $m_i\prime s$ são monômios distintos do tipo (3.1), com $0 \neq \alpha_i \in K$, como K é infinito, podemos assumir que os monômios $m_i\prime s$ são todos multihomogêneos e todos com o mesmo multigrau. Pode-se expressar m_1 da seguinte maneira: $m_1 = \sum_{i=2}^{t} \beta_i m_i$ módulo $Id^{gr}(U_n(K))$, onde $\beta_i = \frac{-\alpha_i}{\alpha_1}$. Agora, substituindo as variáveis pelas respectivas matrizes genéricas graduadas, a primeira linha de m_1 conterá alguma entrada não nula, pois, caso contrário, m_1 pertenceria a $Id^{gr}(U_n(K))$. A mesma entrada não-trivial deve aparecer em algum dos monômios da soma, suponhamos que seja em m_2. Daí, $m_1 - m_2 \in Id^{gr}(U_n(K))$ e nós reduzimos nossa combinação para $t-1$ termos. Finalmente, repetindo-se este processo nos outros monômios obtemos um monômio que será uma identidade para $U_n(K)$, o que é um absurdo, pois nenhum monômio do tipo (3.1) é identidade n-graduada de $U_n(K)$. $\square$

3.3 Aplicações

Iremos agora aplicar os resultados das seções anteriores para calcularmos as codimensões n-graduadas de $U_n(K)$.

Considere

$$g_1 x_{j_1}^{(z_1)} g_2 x_{j_2}^{(z_2)} ... g_r x_{j_r}^{(z_r)} g_{r+1} \tag{3.2}$$

monômio multilinear não nulo de grau total m em $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$, onde cada g_i é formado por variáveis de n-grau zero $x_j^{(0)}$ e $j_1, j_2, \dots, j_r, z_1, z_2, \dots, z_r$ estão fixos, onde $1 \le z_i \le n-1$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Suponha que este monômio tenha s variáveis de n-grau zero. Então, $r = m - s$. Observe que se permutarmos as r variáveis de n-graus diferentes de zero, obtemos $r! = (m-s)!$ monômios do tipo (3.2), fixados os $g_i\prime s$. Como $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \in Id^{gr}(U_n(K))$, temos que as variáveis de n-grau zero são comutativas em cada g_i. Logo, podemos supor que em cada g_i as variáveis de n-grau 0 aparecem em ordem crescente de índices. Observe que cada variável de n-grau 0 tem $r+1 = m-s-1$ possibilidades de localizaçõa. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, teremos um total de monômios do tipo (3.2) igual a $(m-s)!(m-s+1)^s$, fixadas as r variáveis de n-graus diferentes de zero. Observe que impomos uma condições que não foi mencionada: $z_1 + z_2 + \cdots + z_r < n$ (lembre que o monômio é não nulo em $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$). Como consequência do que acabamos de fazer, teremos a seguinte proposição:

Proposição 3.3.1 *Sejam m um inteiro positivo fixado e $x_{j_1}^{(0)}, x_{j_2}^{(0)}, ..., x_{j_s}^{(0)}$ fixadas. Suponha que $x_{j_1}^{(z_1)}, x_{j_2}^{(z_2)}, ..., x_{j_r}^{(z_r)}, r = m - s$, e $1 \le z_i \le n - 1$sejam fixadas, com $z_1 + z_2 + ... + z_r \le n - 1$. Então, o espaço gerado por todos os monômios multilineares nestas variáveis em $\frac{K\langle X\rangle}{Id^{gr}(U_n(K))}$ tem dimensão $(m-s)!(m-s+1)^s$.*

Agora, iremos calcular a codimensão $c_m = c_m^{gr}(U_n(K))$.

Teorema 3.3.2 *A codimensão c_m será*

$$c_m = \sum_{q=0}^{M} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}$$

onde $M = min\{m, n-1\}$.

Demonstração: Basta contar quantos monômios de tipo (3.1) existem de tamanho m (veja o Teorema 3.1.5). Seja $f = g_1y_1g_2y_2...g_qy_qg_{q+1} \in P_m^{gr}(U_n(K)) = \frac{P_m^{gr}}{P_m^{gr}\cap Id^{gr}(U_n(K))}$ um monômio multilinear não nulo nas variáveis $x_i^{(k)}$, onde $0 \leq k \leq n-1$ e $1 \leq i \leq m$. Para todo $l = 1, ..., q+1$, os $g_l\prime s$ são monômios, possivelmente vazios, somente nas variáveis $x_i^{(0)}$, e para $r = 1, ..., j$, tem-se $y_r = x_{b_r}^{(a_r)}$, onde $1 \leq a_r \leq n-1$ e $1 \leq b_r \leq m$. Como $f \in P_m^{gr}(U_n(K))$ não é trivial, então pelo provado no Teorema 3.1.5, teremos que ter $a_1 + a_2 + ... + a_q \leq n-1$. Observe então que $q \leq min\{m, n-1\}$.

Denote por $A_{n-1}(q)$ o número de q-uplas de inteiros positivos $a_1, ..., a_q$ tais que $a_1 + ... + a_q \leq n-1$, e por $B_{n-1}(q)$ o número de q-uplas tais que $a_1 + ... + a_q = n-1$. Então, obviamente temos que $A_{n-1}(q) = B_{n-1}(q) + B_{n-2}(q) + ... + B_q(q)$. Sabemos que $B_r(q) = \begin{pmatrix} r-1 \\ q-1 \end{pmatrix}$ é o número de partições de r em q partes não nulas (veja [3], pag. 54). Daí, usando as propriedades dos números binomiais, temos que

$$A_{n-1}(q) = \sum_{r=q}^{n-1} B_r(q) = \sum_{r=q}^{n-1} \begin{pmatrix} r-1 \\ q-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} q-1 \\ q-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ q-1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} n-2 \\ q-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} = \frac{(n-1)!}{q!(n-1-q)!}$$

Escolhido os graus, observe que temos $\frac{m!}{(m-q)!} = q! \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}$ possíveis escolhas para os índices b_r da variáveis $y_r = x_{b_r}^{(a_r)}$, onde $a_r \in \{1, \ldots, n-1\}$. Assim, o número de possibilidades para as variáveis $y_1, \ldots, y_q$ no monômio f acima é exatamente

$$q! \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix}$$

Fixados agora $q \in \{0, \ldots, M\}$ e uma escolha das variáveis $y_1, \ldots, y_q$ temos que existem $(q+1)^{m-q}$ possibilidades de posicionamento das variáveis de grau 0, pois cada uma das $m-q$ variáveis de grau 0 pode entrar em qualquer um dos $g\prime_i s$ (observe a demonstração da proposição anterior).

Temos então

$$q! \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} (q+1)^{m-q}$$

possibilidades para o monômio f, fixado $q \in \{0, \ldots, M\}$.

Neste cálculo convencionamos que o coeficiente binomial $\begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix}$ é igual a zero sempre que $q > n-1$. Finalmente temos que

$$c_m = \sum_{q=0}^{M} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}$$

onde $M = min\{m, n-1\}$ $\square$

Como consequência do Teorema 3.3.2 podemos avaliar assintoticamente a sequência das condimensões graduadas $c_m^{gr}(U_n(K))$.

Definição 3.3.3 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções reais, onde x é uma variável natural, ou seja, o domínio é o conjunto dos naturais. Então diremos que $f(x)$ e $g(x)$ são assintoticamente iguais, que será representado por $f(x) \simeq g(x)$, se* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Corolário 3.3.4 *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ teremos*

$$c_m^{gr}(U_n(K)) \simeq \frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m.$$

Demonstração: Sendo $M = min\{m, n-1\}$, para $m \geq n-1$, temos que $M = n-1$ e assim

$$c_m^{gr}(U_n(K)) = \sum_{q=0}^{n-1} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}$$

Mostremos que

$$c_m(U_n(K)) \simeq \begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix} (n-1)! n^{m-n+1} Defato, para$$

q=n-1, $temos \frac{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix}_{q!(q+1)^{m-q}}}{\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix}_{(n-1)!n^{m-m+1}}} = n^{m-q} n^{m-n+1} = 1. Para 0 \leq$ $q \leq n-2$, teremos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}}{\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix} (n-1)! n^{m-n+1}} = 0$$

pois,

$$\frac{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}}{\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix} (n-1)! n^{m-n+1}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-q)!}(q+1)^{m-q}}{n^{m-n+1}} \frac{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}}{\frac{m!}{(m-n+1)}}$$

e ambos os termos do segundo membro acima tendem a zero, quando m tende para o infinito. Assim

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_m^{gr}(U_n(K))}{\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix} (n-1)! n^{m-n+1}} = \sum_{q=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ q \end{pmatrix} q!(q+1)^{m-q}}{\begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix} (n-1)! n^{m-n+1}} = 1$$

Como $m(m-1)\dots(m-n+2) = m^{n-1} + f(m)$, onde $f(m)$ é um polinômio em m de grau $n-2$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{m^{n-1}} = 1$$

e assim

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!}(n-1)! n^{m-n+1} \simeq m^{n-1} n^{m-n+1} = \frac{1}{n^{n-1}} m^{n-1} n^m.$$

Portanto, temos o afirmado no teorema. $\square$

Capítulo 4

Graduações da Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores

Neste capítulo iremos descrever todas as G-graduações da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n, $U_n(K)$, para um grupo qualquer G. Consideraremos K como sendo um corpo qualquer por todo este capítulo. Como de costume, Id_n indicará a matriz identidade de ordem n.

Seja $G^n = G \times \cdots \times G$. Fixando-se uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, considere $A_g = span\{E_{ij}/g_j^{-1}g_j = g\}$, para cada $g \in G$. Então teremos que $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma G-graduação de $U_n(K)$, chamada de **G-graduação elementar definida pela n-upla** $(g_1, \ldots, g_n)$.

Provaremos que toda G-graduação de $U_n(K)$ é, a menos de isomorfismo, uma graduação elementar.

4.1 Graduações de $\mathrm{U}_n(K)$

Lema 4.1.1 *Seja V um K-espaço vetorial n-dimensional e considere $V_1, ..., V_n$ como sendo n-subespaços de V tais que $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$ e $dimV_k = k$, para $k = 1, ..., n$. Então temos que $U_n(K)$ é a álgebra de todos os operadores lineares de V que preservam $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$.*

Demonstração: Suponhamos que A seja a álgebra de todos os operadores lineares de V que preservam $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$ e que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seja uma base de V tal que $V_k = span\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Então temos que mostrar que $U_n(K) = A$. Observe que estamos identificando cada operador $T : V \longrightarrow V$ de A pela sua respectiva matriz $[T]_\beta$. De fato, sendo $X \in A$, então $X(V_1) \subseteq V_1, X(V_2) \subseteq V_2, ..., X(V_n) \subseteq V_n$ e daí

$$X(v_1) = \lambda_{11}v_1, X(v_2) = \lambda_{12}v_1 + \lambda_{22}, \ldots, X(v_n) = \lambda_{1n}v_1 + \lambda_{2n}v_2 + ... + \lambda_{nn}v_n.$$

Logo,

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \vdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

Com isto temos que $X \in U_n(K)$, ou seja, $A \subseteq U_n(K)$.

Suponha agora que $T \in U_n(K)$. Sendo

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

teremos que $T(v_1) = a_{11}v_1, T(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2, ..., T(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n$. Daí, $T(V_1) \subset V_1, ..., T(V_n) \subset V_n$, ou seja, $T \in A$

Portanto, $U_n(K)$ é a álgebra das transformações linerares que preservam $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$. $\square$

Já é um fato conhecido que qualquer matriz idempotente de $M_n(K)$ é conjugada a uma matriz diagonal. O próximo lema irá mostrar que isto também ocorre para as idempotentes em $U_n(K)$.

Lema 4.1.2 *Qualquer matriz idempotente em $U_n(K)$ é conjugada a uma matriz diagonal do tipo $E_{i_1i_1} + ... + E_{i_ki_k}$, para alguns $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$.*

Demonstração: Considere um K-espaço vetorial n-dimensional V. Sabemos que existem subespaços $V_1, \ldots, V_n$, tais que $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V$, onde $dimV_k =$

k, para $k = 1, ..., n$. Pelo Lema 4.1.1 sabemos que $U_n(K)$ é a álgebra de todos os operadores lineares de V que preservam $V_1, \ldots, V_n$, tais que $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V$.

Seja $e \in U_n(K)$ um idempotente. Para provarmos este lema, precisamos mostrar que existe uma base de V, digamos $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$, tal que, $V_k = span\{v_1, ..., v_k\}$ e $e(v_i) = \epsilon_i v_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, onde $\epsilon_i = 0$ ou $\epsilon_i = 1$, pois a matriz deste operador seria igual a $E_{11}\epsilon_1 + ... + E_{nn}\epsilon_n$, ou seja, na forma pedida.

Provaremos a existência desta base por indução. Para $n = 1$, é trivial, pois $V = K$ e $U_1(K) \simeq K$. Perceba que a restrição de e a V_{n-1} será uma matriz triangular superior de ordem $n-1$, e daí assumiremos que $e(v_i) = \epsilon_i v_i$, para $i = 1, ..., n-1$. Se $e(v_n) \notin V_{n-1}$, então, $e(e(v_n)) = e^2(v_n) = e(v_n)$, e assim teremos que $\{v_1, ..., v_{n-1}, e(v_n)\}$ é a base procurada. Porém, se $e(v_n) \in V_{n-1}$, então considere $v_{n'} = e(v_n) - v_n$. Note que $v_{n'} \in V_n - V_{n-1}$, pois $v_n \in V_{n-1}$, e que $e(v_{n'}) = e(e(v_n) - v_n) = e^2(v_n) - e(v_n) = 0$. Daí, $\{v_1, ..., v_{n-1}, v_{n'}\}$ é a base procurada de V. $\square$

Como corolário do Lema 4.1.2 obtemos o seguinte lema.

Lema 4.1.3 *Seja e um elemento idempotente de $A = U_n(K)$. Então a subálgebra eAe é isomorfa a $U_k(K)$, onde $k = tr(e)$*

Demonstração: Sejam $eae, ebe \in eAe$, onde $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Então teremos

$$eae + ebe = e(a+b)e \in eAe$$
$$\lambda eae = e(\lambda a)e \in eAe$$
$$eaeebe = eaebe \in eAe.$$

Observe que a igualdade na primeira equação ocorre ao colocarmos os elemento idempotentes em evidência e a igualdade de terceira equação ocorre pelo fato de e ser um elemento idempotente. Logo, eAe é uma subálgebra de A.

Como e é um elemento idempotente de $U_n(K)$, pelo Lema 4.1.2, temos que existem uma matriz inversível $X \in U_n(K)$ e $E_{i_1i_1}, ..., E_{i_ki_k} \in U_n(K)$ tais que

$$e = X^{-1}(E_{i_1i_1} + ... + E_{i_ki_k})X.$$

Daí, teremos que

$$eAe = X^{-1}(E_{i_1i_1} + ... + E_{i_ki_k})XAX^{-1}(E_{i_1i_1} + ... + E_{i_ki_k})X =$$

$$X^{-1}(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})A(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})X.$$

Observe que $(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})E_{ij}(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k}) = E_{ij}$, sempre que $i \in \{i_1,...,i_k\}$ e $j \in \{i_1,...,i_k\}$, e zero nos demais casos, ou seja, $(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})E_{ij}(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k}) = E_{i_lj_h}$ se $i = i_l$ e $j = i_h$, para alguns $l,h \in \{1,...,k\}$. Definamos então o seguinte isomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})A(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k}) & \longrightarrow & U_k(K) \\ E_{i_li_h} & \mapsto & E_{lh} \end{array}$$

Como e é conjugado de $E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k}$, temos que $tr(e) = tr(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k}) = k$, e como a aplicação por conjugação

$$\Psi : X^{-1}(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})A(E_{i_1i_1}+...+E_{i_ki_k})X \longrightarrow U_k(K),$$

definida por $\Psi(X^{-1}YX) = \Phi(Y)$, também é um isomorfismo, temos o desejado. $\square$

Sendo A uma lgebra, dizemos que $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset A$ um conjunto de *idempotentes ortogonais* se cada x_i idempotente e $x_ix_j = 0$ para $i \neq j$.

Lema 4.1.4 *Qualquer conjunto $\{a_1,...,a_n\}$ de n idempotentes ortogonais de $U_n(K)$ é conjugado a $\{E_{11},...,E_{nn}\}$, ou seja, existe $X \in U_n(K)$ invertível tal que $X^{-1}a_iX = E_{ii}$, para $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.1.1, podemos considerar $U_n(K)$ como sendo a álgebra dos operadores lineares de um K-espaço vetorial n-dimensional V que preservam $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$. Observe que para demonstrarmos este teorema só precisamos encontrar uma base de V, $\{v_1,...,v_n\}$, tal que $V_k = span_K\{v_1,...,v_k\}$ e $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$ (onde δ_{ij} é o delta de Kroneker) para todos $i,j \in \{1,...,n\}$, pois teramos que a matriz da transformação a_i nesta base seria a matriz E_{ii}.

Considere uma base arbitrária $\{u_1,...,u_n\}$ de V, onde $V_k = span\{u_1,...,u_k\}$ para todo $k = 1,...,n$. Então, para cada operador linear $a_1,\ldots,a_n$ de V, determinado por cada $a_1,...,a_n$, existe uma matriz triangular superior associada, que é a matriz desta transformação na base $\{u_1,...,u_n\}$, e seja $(a_k)_{ij}$ a (ij)-entrada da matriz associada a

a_k, para $k = 1, .., n$. Como a_k é idempotente, observe que a matriz associada a a_k também será idempotente. Logo teremos que $(a_k)_{ii} = 0$ ou $(a_k)_{ii} = 1$, para todo $k = 1, .., n$. Ademais, estas matrizes associadas também serão ortogonais entre si. Pela ortogonalidade do conjunto $\{a_1, ..., a_n\}$ teremos que cada $[a_k]$ terá um único elemento não nulo em sua diagonal e, como são idempotentes, este elemento ser 1. Reordenando se necessário, podemos assumir que $(a_1)_{11} = ... = (a_n)_{nn} = 1$ e $(a_i)_{jj} = 0$, sempre que $i \neq j$. Considerando $e = a_1 + ... + a_{n-1}$, temos que $e^2 = a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 = a_1 + ... + a_{n-1} = e$, ou seja, temos que e é idempotente e $tr(e) = tr(a_1) + ... + tr(a_n) = 1 + ... + 1 = n - 1$. Daí, pelo Lema 4.1.3, teremos que a subálgebra $eU_n(K)e$ de $\mathcal{L}(V_{n-1})$ é isomorfa a $U_{n-1}(K)$. Agora, aplicando indução sobre n, tomemos uma base $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ de V_{n-1} tal que $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$, para todos $i, j = 1, ..., n - 1$. Agora considere $v_n = a_n(u_n)$. Observe que $v_n \notin V_{n-1}$, $a_n(v_n) = a_n^2(u_n) = a_n(u_n) = v_n$ e $a_k(v_n) = a_k(a_n(u_k)) = 0$, para $k = 1, \ldots n - 1$. Logo, o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ é a base procurada. $\square$

Lema 4.1.5 *Seja $U_n = U_n(K) = \oplus_{g \in G} A_g$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo arbitrário K e graduada por um grupo G, com elemento neutro $1 \in G$. Então, A_1 contém n idempotentes ortogonais.*

Demonstração: Na Seção 1.3 mostramos que $Id \in A_1$, e então, como a subálgebra gerada por Id é isomorfa ao corpo K e como qualquer corpo é semi-simples, teremos que esta subálgebra também será semi-simples. Portanto A_1 contém uma subálgebra semi-simples não trival. Daí, considere B como sendo uma subálgebra não-trivial semi-simples maximal de A_1, C como sendo um de seus somandos simples e e como sendo a unidade de C. Pelo Lema 4.1.2, e é conjugada a uma matriz diagonal. Logo, teremos dois casos: ou e e $Id - e$ são dois idempotentes ortogonais não nulos ou $e = Id$ e $C = B = span\{Id\}$.

No primeiro caso, provaremos com indução sobre n. Observe que para $n = 1$ teremos que o lema é válido. Logo, suponha $n > 1$. Para este caso, pelo Lema 4.1.3, $P = eU_ne \simeq U_k$ e $Q = (Id - e)U_n(Id - e) \simeq U_{n-k}$, onde $k \neq 0, n$. Como $Id - e, e \in A_1$, é fácil notar que P e Q são homogêneas na G-graduação. De fato, temos que $\bigoplus_{g \in G}(P \cap A_g) \subseteq P$. Considerando agora $p \in P$, existem $a_1 \in A_e, a_{g_1} \in A_{g_1}, \ldots, a_{g_k} \in A_{g_k}$ tais que $p = a_1 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_k}$, e como $e \in A_1$, teremos que

$p = epe = ea_1e + ea_{g_1}e + \cdots + ea_{g_k}$ e e daí, pela graduação, teremos que $a_j = ea_je \in P$ para todo $j \in \{1, g_1, \ldots, g_k\}$. Assim $p \in \bigoplus_{g\in G}(P \cap A_g)$ e da $P = \bigoplus_{g\in G}(P \cap A_g)$. De modo análogo prova-se que $Q = \bigoplus_{g\in G}(Q \cap A_g)$ e portanto P e Q são G-graduadas. Logo, por hipótese de indução teremos que existem n idempotentes ortogonais em A_1, a saber, $a_1, ..., a_k \in P$ e $a_{k+1}, ..., a_n \in Q$, que prova o lema para o primeiro caso.

No segundo caso, observe que $dimB = 1$. Iremos mostrar que esta possibilidade gera sempre uma contradição. Para tal utilizaremos indução sobre a ordem de G. Se $|G| = 1$, então $A_1 = U_n$ e existe uma subálgebra maximal semi-simples com dimensão $n > 1$, sendo esta a subálgebra gerada pelo conjunto $\{E_{11}, ..., E_{nn}\}$. Temos então uma contradição.

Suponha agora que para qualquer grupo finito H tal que $|H| < |G|$, já tenha sido provado que a igualdade $dimB = 1$ é impossível.

Provaremos inicialmente que qualquer elemento homogêneo de U_n é nilpotente ou inversível. De fato, suponha que $a \in A_g$ não seja nilpotente. Para m suficientemente grande (basta considerar $m > dimU_n$), temos que $a, a^2, ..., a^m$ são linearmente dependentes, e observe que estes elementos são homogenêos. Como $a, a^2, ..., a^m$ são LD, existe $l \in \{1, ..., m\}$ tal que $a^l = \alpha_1 a + ... + \alpha_{l-1}a^{l-1} + \alpha_{l+1}a^{l+1} + ... + \alpha_m a^m$, com $\alpha_i \in K$, e como todos são componentes homegêneas, então existe $j \in \{1, .., l-1, l+1, ..., m\}$ tal que $a^l \in A_{g^l} \cap A_{g^j}$, donde $g^l = g^j$, ou seja, $g^{l-j} = 1$. Daí, concluímos que g tem ordem finita, digamos k, e que $a^k \in A_1$. Como provado na Seção 1.8, temos que $J(U_n)$ é formado por todos os seus elementos nilpotentes e como a não é nilpotente, então a^k também não pode ser nilpotente. Logo, $a^k \notin J(U_n)$ e daí $a^k \notin J(A_1)$, pois $J(A_1) \subset J(U_n)$. Como $dim\frac{A_1}{J(A_1)} = 1$ e $a^k \in A_1 - J(A_1)$, temos que existe $\lambda \in K$ tal que $\overline{a^k} = \lambda\overline{Id}$, donde $\overline{a^k - \lambda Id} = \overline{0}$, ou seja, $a^k - \lambda Id \in J(A_1)$ e daí $a^k - \lambda Id$ é nilpotente. Isto significa que a^k é inversível, e assim provamos o afirmado.

Agora iremos provar que o radical de Jacobson $J(U_n)$ não contém elementos homogêneos não nulos. De fato, suponha por contradição que $0 \neq a_g \in A_g$ seja nilpotente, ou seja, suponha que $a_g \in J(U_n)$. Considere $L = \{x \in U_n / xa_g = 0\}$ e observe que este é um subespaço homogêneo de U_n. De fato, sendo $x = \sum_{h\in G} x_h \in L$, temos $0 = xa_g = \sum_{h\in G} x_h a_g$ e pela graduação teremos que $x_h \in L$, para todo $h \in G$, ou seja, $L = \oplus_{h\in G}(L \cap A_g)$. Provamos acima que todos os elementos homogêneos são inversíveis ou nilpotentes, e como elementos inversíveis não são divisores de zero, então os elementos homogêneos de L são todos nilpotentes. Portanto toda matriz de L será a soma de matrizes nilpotentes, e com isto toda matriz de L terá a diagonal nula. Como a_g é nilpotente, então ela tem a diagonal nula, donde $E_{nn}a_g = 0$, ou seja, $E_{nn} \in L$, o que, por nossa argumentação, é uma contradição. Logo, provamos que $J(U_n)$ não contém elementos homogêneos não nulos. Mas, como $J(A_1) \subseteq J(U_n)$, então teremos que $J(A_1)$ também não contém elementos homogêneos não nulos, e como $J(A_1) \subset A_1$, teremos que $J(A_1) = \{0\}$. Logo, A_1 é semi-simples e portanto $A_1 = B = \{\lambda Id/\lambda \in K\}$. Como $dimU_n$ é finita, então o suporte de U_n, $suppU_n = \{g \in G/A_g \neq G\}$, é um subconjunto finito de G. Ademais, se $g, h \in supp(U_n)$, $x \in A_g - \{0\}$ e $y \in A_h - \{0\}$, ento x e y devem ser inversveis e da $gh \in supp(U_n)$. Segue ento que $supp(U_n)$ um subgrupo finito de G. Logo, podemos supor que $suppU_n = G$, pois, caso contrário, aplicaríamos a hipótese de indução.

Vejamos agora que $dimA_g = 1$, para qualquer $g \in G$. De fato, suponha que $x, y \in A_g$ sejam linearmente independentes. Como $A_g \cap J(U_n) = \{0\}$ e $x, y \in A_g - \{0\}$, temos que x e y são inversíveis. Logo, $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$ e $yx^{-1} \in A_1$, ou seja, existe $\lambda \in K$ tal que $yx^{-1} = \lambda Id$. Daí, teremos $(x - \lambda^{-1}y)x^{-1} = xx^{-1} - \lambda^{-1}yx^{-1} = Id - \lambda^{-1}\lambda = 0$, o que nos diz que x^{-1} é um divisor de zero, um absurdo.

para $g, h \in g$, teriamos que $[A_g, A_h] \subseteq A_{gh} + A_{hg}A_{gh}$ e segue-se que a subálgebra comutador $[U_n, U_n]$ é um ideal graduado não-trivial nilpotente de $U_n(K)$ (de fato, é conhecido que $[U_n, U_n]$ é um ideal não trivial nilpotente de $U_n(K)$, logo, restanos mostrar que é graduado, note que $[U_n, U_n] \subset J(U_n)$, uma vez que o comutador de duas matrizes triangulares superiores será uma matriz com a diagonal nula, ou seja, nilpotente; temos que $[a, b] = [\sum_{g\in G} a_g, \sum_{h\in G} a_h] = \sum_{g,h\in G} [a_g, a_h]$ e como cada $[a_g, a_h] \in A_{gh}$, teremos que $[a, b]$ é a soma de componentes homogêneas em $[U_n, U_n]$ e daí $[U_n, U_n]$ é homogêneo), o que não pode ocorrer já que $[U_n, U_n] \subset J(U_n)$.

Note que G não pode ser abeliano. De fato, pois sendo G abeliano, tomemos $x \in A_g$ e $y \in A_h$ elementos homogêneos arbitrários. Temos que $[x, y] \in J(U_n)$, pois tem a diagonal nula, e $[x, y] = xy - yx \in A_{gh} + A_{hg} \subseteq A_{gh}$. Logo, $[x, y] \in J(U_n) \cap A_{gh}$ e asssim $[x, y] = 0$. Segue então que $xy = yx$ e daí concluímos que U_n é comutativa, um absurdo.

Como G não é abeliano, considere o subgrupo comutador não-trivial $G\prime$ e a graduação pelo quociente $\frac{G}{G\prime}$, dada por $U_n = \oplus_{\bar{t}\in\frac{G}{G\prime}} C_{\bar{t}}$, onde $C_{\bar{t}} = \oplus_{h\in\bar{t}} A_h$. Como $\frac{G}{G\prime}$ tem ordem menor que a ordem de G, então, por hipótese de indução, $dimB \neq 1$. Logo, para esta graduação, só pode ocorrer o primeiro caso estudado nesta demonstração, e daí existem n idempotentes ortogonais $e_1, ..., e_n$ em $D = C_{\bar{1}} = \bigoplus_{h\in G\prime} A_h$.

Por outro lado, sabemos que $G\prime$ é gerado por todos os comutadores $a^{-1}b^{-1}ab$, com $a, b \in G$. Se $h = a^{-1}b^{-1}ab$, $0 \neq x \in A_a$ e $0 \neq y \in A_b$, então, como todos os elementos homogêneos não nulos são inversíveis, $z = x^{-1}y^{-1}xy$ é um elemento não nulo de A_h. Como $dimA_h = 1$, obtemos que $A_h = span\{z\}$. Particularmente, D como álgebra é gerada por todos os elementos $x^{-1}y^{-1}xy$, onde x e y são homogêneos. Observe que

$$x^{-1}y^{-1}xy = \begin{bmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = Id + a,$$

onde $a \in J(U_n)$. Ademais, qualquer elemento de D é da forma $\lambda Id + a$, com $a \in J(U_n)$ e $\lambda \in K$. Particularmente para os idempotentes $e_1, ..., e_n \in D$ existem elementos não nulos $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tais que $e_i = \lambda_i Id + a_i$ (observe que λ_i deve ser mesmo no nulo, pois $e_i \notin J(U_n)$, j que e_i no pode ser nilpotente). Mas, para $i \neq j$, teremos que $e_ie_j = \lambda_i\lambda_j Id + b \neq 0$, com $b \in J(U_n)$ o que contraria a ortogonalidade dos $e_i\prime s$. Portanto, $dimB \neq 1$. Logo, só pode ocorrer o primeiro caso. □

Em [29] foi provado que que uma G-graduação em $M_n(K)$ é elementar, se e somente se, todas as matrizes unitárias E_{ij} são homogêneas. Povaremos agora que isto também é válida para $U_n(K)$.

Sendo $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma lgbera G-graduada e $x \in A_g$, denoteremos o *G-grau de x* por $degx$, ou seja, $degx = g$.

Lema 4.1.6 *Seja $U_n(K) = \oplus_{g\in G} A_g$ G-graduada. Então esta graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes unitárias $E_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$, são homogêneos.*

Demonstração: Se a G-graduação é elementar, então, por definição, as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas.

Suponha agora que toda matriz elementar seja homogênea. Inicialmente, provaremos que existem $g_1, ..., g_n \in G$ tais que

$$degE_{i,i+1} = g_i^{-1} g_{i+1} \tag{4.0}$$

para todo $i = 1, ..., n-1$. Para tal, utilizaremos indução sobre i. Tomemos $g_1 = 1$ e $g_2 = degE_{12}$. Então $degE_{12} = g_1^{-1} g_2 = g_2$, ou seja, teremos (4.1) para $i = 1$. Agora, supondo que j se tenha definido $g_1, \ldots, g_k$ e que (4.1) seja válida para $i = 1, ..., k-1$, 4.1, provaremos que ela é válida para $i = k$. Se $h = degE_{k,k+1}$, então definimos $g_{k+1} = g_k h$ e assim teremos que $degE_{k,k+1} = g_k^{-1} g_{k+1}$. Logo, (4.1) é válida para $i = k$. Finalmente, o G-grau de E_{ij}, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, será

$$degE_{ij} = deg(E_{i,i+1}...E_{j-1,j}) = (degE_{i,i+1})(degE_{i+1,i+2})...(degE_{j-1,j}) =$$

$$g_i^{-1} g_{i+1} g_{i+1}^{-1} g_{i+2} ... g_{j-1}^{-1} g_j = g_i^{-1} g_j,$$

e a prova do lema est completa. □

Lema 4.1.7 *Seja $U_n = U_n(K) = \oplus_{g \in G} A_g$, graduação por um grupo G, com elemento neutro $1 \in G$. Então esta graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes unitárias E_{ii} pertencem a A_1.*

Demonstração: Se a G-graduação é elementar, então $E_{ii} \in A_1$, para todo $1 \leq i \leq n$, pela definição de graduação elementar. Por outro lado, suponha que todas as E_{ii} pertençam a A_1. Então, note que $A_{ij} = E_{ii} U_n E_{jj}$ é um subespaço homogeneo, para todo $1 \leq i < j \leq n$. De fato, sendo $E_{ii} a E_{jj}, E_{ii} b E_{jj} \in A_{ij}$ e $\lambda \in K$, então $E_{ii} a E_{jj} + E_{ii} b E_{jj} = E_{ii}(a+b) E_{jj} \in E_{ii} U_n E_{jj}$ e $\lambda E_{ii} a E_{jj} = E_{ii} \lambda a E_{jj} \in A_{ij}$, donde A_{ij} é um subespaço. Ademais, para qualquer $a \in A$, teremos que $a = \sum_{g \in G} a_g$, com $a_g \in A_g$. Logo, $E_{ii} a E_{jj} = E_{ii}(\sum_{g \in G} a_g) E_{jj} = \sum_{g \in G} E_{ii} a_g E_{jj}$, e como $E_{ii} a_g E_{jj} \in A_g \cap A_{ij}$, teremos que A_{ij} é de fato homogneo. Observe que $E_{ij} \in A_{ij}$ e que $dimA_{ij} = 1$, pois se $X \in U_n$, então $E_{ii} X E_{jj} = E_{ii}(\sum_{1 \leq l \leq k \leq n}^{n} \lambda_{lk} E_{lk}) E_{jj} = \lambda_{ij} E_{ij}$. Logo $A_{ij} = spanE_{ij}$ e daí, como A_{ij} é homogneo, teremos que E_{ij} um elemento homogêneo e, pelo Lema 4.1.6, teremos o afirmado. □

Teorema 4.1.8 *Sejam G um grupo arbitrário e K um corpo. Suponha que a lgebra $U_n(K) = \oplus_{g \in G} A_g$ das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sobre o corpo K*

é G-graduada. Então $U_n(K)$, como álgebra G-graduada, é isomorfa a $U_n(K)$ com uma G-graduação elementar.

Demonstração: Pelo Lema 4.1.5, $U_n(K)$ contém n idempotentes ortogonais em A_1. Então, pelo Lema 4.1.4 estes idempotentes são conjugadas a $E_{11}, ..., E_{nn}$. Daí, pelo isomorfismo definido pela conjugação, $U_n(K)$, como álgebra G-graduada, é isomorfa a $U_n(K)$, com uma G-graduação onde $E_{11}, ..., E_{nn}$ são elementos homogêneos pertencentes a A_1. Daí, pelo Lema 4.1.7, a graduação de $U_n(K)$ é isomorfa a uma G-graduação elementar. $\square$

Bibliografia

[1] Amitsur, S. A., *Identities and Linear Dependence*, Israel J. Math., 22, 127-137 (1975).

[2] Amitsur, S. A. e Levitzki, J., *Minimal Identities for Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 1, 449-463 (1950).

[3] Andrews, G., *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 2, Addison-Wesley (1976).

[4] Azevedo, S. S., *Graded Identities for the Matrix Algebra of Order n Over an Infinite Field*, Comminications in Algebra, Vol 30, 12, 5849-5860 (2002).

[5] Bahturin, A.; Giambruno, A. e Riley, D. *Group Graded Algebra Satisfying a Polynomial Identity*, Israel J. Math, 125-155 (1998).

[6] Berele, A., *Magnun PI*, Israel J. Math, 1-2 e 13-19 (1985).

[7] Bergen, J. e Cohen, M., *Actions of Commutive Hopf Algebras*, London Math. Soc., 159-164 (1986).

[8] Boerner, H., *Representations of Groups*, ed. 2, North-Holland, Amsterdan. (1970).

[9] Di Vincenzo, O. M., *Cocharacters of G-Graded Algebra*, Communications in Algebra, 3293-3310 (1996).

[10] Drensky, V. S., *Free Algebra and PI-Algebra: Graduate Course in Algebra*, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria, (1999).

[11] Giambruno, A.; Mishchenko, S. e Zaicev, M. V. *Group Actions and Asymptotic Behavior of Graded Polynomial Identities*, J. London Math. Soc., Vol 66, 295-312, (2002).

[12] Giambruno, A. e Zaicev, M. V., *On Codimension Growth of Finitely Geenerated Associative Algebras*, Adv. Math., 140, 145-155 (1998).

[13] Giambruno, A. e Zaicev, M. V., *Exponential Codimension Growth of P.I. Algebras: an Exact Estimate*, Adv. Math., 142, 221-243 (1999).

[14] Giambruno, A. e Zaicev, M. V., *Polynomial Identities and Asymptotic Methods, Mathematical Surveys and Monographs*,Vol 122, American Mathematical Society, Providence, USA, (2005).

[15] Herstein, I. N., *Noncommuutative Rings*,Vol 15, The Mathematical Association of America, USA, (1968).

[16] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, Segunda Edição, Dover, San Francisco, USA, (2009).

[17] Kemer, A., *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-Graded Algebra*, Math. USSR, Vol 25, 359-374 (1985).

[18] Kemer, A., *Finite Basis Property of Identities of Associative Algebra*, Algebra and Logic , Vol 26, 362-397 (1987).

[19] Kemer, A., *Ideals of Identities of Associative Algebra*, Translations Math. Monographs, 87, AMS, (1991).

[20] Koshlukov, P. e Valenti, A., *Graded Identities for the Algebra of $n \times n$ Upper Triangular Matrices Over an Infinite field*, J. Pure App. Algebra, Singapore, Vol 13, n. 5, 517-526 (2003).

[21] Lam, T. Y., *A First Course in Noncommutative Ring*, Vol 131, Segunda edição, Springer, New York, USA, (2001).

[22] Lambek, J., *Lectures on Rings and Modules*, Library of Congress, USA, (1966).

[23] Latyshev, V. N., *On Regev's Theorem on Identities in Tensor Product of PI-Algebra*, Ups.Mat. Nauk, 213-214 (1973).

[24] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, ed. 12, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. (2008).

[25] Regev, A., *Existence of Identities in $A \otimes B$*,Israel J. Math., 131-152 (1999).

[26] Robinson, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, Vol 80, segunda Edição, Springer, New Youk, USA, (1996).

[27] Valenti, A., On Graded Identities of Upper Triangular Matrices of Size Two, J. Pure App. Algebra, too apper, (2002).

[28] Valenti, A. e Zaicev, M.V., *Group Grading on Upper Triangular Matrices*, Arch. Math., 82, 33-40 (2007) .

[29] Zaicev, M. V., Sehgal, M. V. *Finite Grading on Simples Artinian Ring*, Vestnik Mosk, Univ. Ser. I Mat. Metkh. 3, 21-24. (2001).