Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson [†]

por

Romildo Nascimento de Lima

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson

por

Romildo Nascimento de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2013

Resumo

Neste trabalho estaremos interessados em estudar resultados de existência e não existência de solução, comportamento do funcional energia e condição de Palais-Smale para sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson; usaremos o método variacional. E, as soluções são pontos críticos do funcional energia associado ao problema. Para alcançar nossos objetivos, será fundamental o estudo das variedades de Ruiz e de Nehari, o Princípio Variacional de Ekeland, o teorema do Passo da Montanha, e o lema Concentração de Compacidade.

Palavras-chave: Schrödinger-Poisson, Variedade de Ruiz, Variedade de Nehari, Princípio Variacional de Ekeland, Passo da Montanha, Concentração de Compacidade.

Abstract

In this work we are interested in studying the results of existence and non-existence of solution, behavior of the energy functional and Palais-Smale condition for systems of equations of the type Schrödinger-Poisson; by using variational approach. In fact the solutions are critical points of the energy functional associated with the problem. To achieve our goals, it is essential to study the Manifolds of Ruiz and Nehari, the Ekeland Variational Principle, the Mountain Pass theorem, and the Concentration-Compactness argument.

Keywords: Schrödinger-Poisson, Ruiz's Manifold, Nehari's Manifold, Ekeland Variational Principle, Mountain Pass, Concentration-Compactness.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu Senhor e Deus **Jesus Cristo**, pois, a conclusão deste mestrado é mais uma prova de seu infinito amor e compaixão, que sempre demonstra para com minha vida.

Agradeço aos meus irmãos e amigos da Assembleia de Deus em Vila de Ponta Negra, pelo apoio, incentivo e orações ao meu favor. Assim, como da Assembleia de Deus em Campina Grande, por terem me recebido com tanto amor e carinho.

Agradeço aos meus amigos e professores que me acompanharam nos tempos de UFRN, entre os professores destaco Viviane Simioli e André Gustavo, por todo incentivo e confiança que tiveram em mim.

Agradeço aos professores (mestres exemplares) com quem tive aula e funcionarios (sempre presentes) do DME-UFCG. Em especial, entre os professores: Brandão, Ângelo, Marco Antônio, Claudianor, Daniel e Marco Aurélio. Entre os funcionarios: Andrezza, Suênia e Claudiana.

Agradeço aos meus colegas de estudo durante os dois anos de mestrado. Em especial, aqueles que me acompanham desde os tempos de UFRN, os quais sempre estiveram presentes quando precisei: Ailton, Joelson e Itailma (Tatá).

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais: Ronaldo e Celma. Por toda educação, amor, carinho e incentivo, demonstrados em toda minha vida.

Agradeço a minha namorada, amiga, companheira, conselheira, grande incentivadora e grande exemplo: Wenia Félix. Por toda paciência, carinho, atenção e amor sempre presentes em nosso relacionamento.

Agradeço ao meu excelente orientador, incentivador e grande exemplo de matemático a seguir: Marco Aurélio Soares Souto. Por toda confiança e paciência no decorrer da produção deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Muito obrigado a todos que participam direta ou indiretamente desta conquista!!!!

Dedicatória

Aos meus pais, Ronaldinho e Celminha, e as minhas irmãs Coração e Mozinho.

Sumário

Introdução

Em nosso trabalho, estaremos interessado em resultados relacionados a sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson, os quais são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + V(x)u + \lambda \phi u &=& f(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi &=& u^2, \quad \lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Uma das formas de solucionar tal problema é substituir a solução $\phi = \phi_u$ da equação

$$-\Delta \phi = u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3$$

e, encontrar $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que a equação de Schrödinger:

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda \phi_u u = f(x,u)$$

é satisfeita por u.

O termo ϕ_u é chamado **termo não local**, pois, não depende apenas da variável x. Tal termo pode ser escrito da forma:

$$\phi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{4\pi|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Tal forma será muito importante em alguns pontos de nosso trabalho. Este termo não local será fundamental na abordagem dos problemas que faremos, tanto é, que devotaremos boa parte do primeiro capítulo à demonstração de algumas de suas propriedades as quais serão de grande importância em nosso trabalho.

Abordaremos diversos problemas dessa natureza. Diante do que abordamos até o momento, surge a pergunta: qual a motivação para tal problema? Bem, uma versão da equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$, é dada por:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta_x \psi + \phi(x)\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0$$

onde $1 < p < 5$ e $\psi : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{C}$. Interessa-nos a existência de soluções da forma $\psi(x,t) = e^{-it}u(x)$.

Tal equação aparece frequentemente em diversas áreas da física matemática, como, por exemplo, na teoria dos semicondutores e modelagem da interação entre partículas; para maiores detalhes ver [5]. Temos que u deve satisfazer:

$$-\Delta u + u + \phi(x)u - |u|^{p-1}u = 0.$$

No caso deste trabalho, estaremos interessados em situações onde ϕ tem sua determinação influenciada pela função onda do problema, ou seja, pela equação de Poisson $-\Delta\phi = u^2$; caso que também aparece frequentemente nos problemas físicos. Desta forma, para termos solução de problemas físicos onde aparece a equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^3$ dada em (1), com influência da função onda; surge então, a necessidade de solução para o sistema de equações,

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u &= |u|^{p-1}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi &= u^2, \quad \lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

do tipo Schrödinger-Poisson. Claro, que no contexto físico, aparecem várias variantes para o problema, donde se faz necessário trabalhar com a forma geral desse tipo de sistema dado em (1). Onde se faz necessário, enfatizar que V é chamado potencial do problema. Outro fato bem interessante de se destacar é que, quando $f(x,u) = |u|^{p-1}u$, o sistema Schrödinger-Poisson é frequentemente chamado de Schrödinger-Poisson-Slater.

O primeiro problema que iremos trabalhar será um caso subcrítico para um sistema Schrödinger-Poisson-Slater, com potencial constante, dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \lambda\phi u &= |u|^{p-1}u, \\ -\Delta\phi &= u^2, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\lambda > 0$, $1 < p < 5$ e as soluções que queremos encontrar $(u,\phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Assim como em todos os problemas que abordaremos, faremos a minimização do funcional energia restrito a uma certa variedade, lembrando que cada problema tem seu próprio funcional energia. Para (0.1), o funcional é dado por:

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_u u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}dx.$$

A variedade padrão, que se trabalha nesse tipo de problema, é a variedade de Nehari, a qual é dada por:

$$\mathcal{N} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) - \{0\}; \quad I'(u)(u) = 0\},$$

porém no problema (0.1) usaremos a variedade de Ruiz, a qual é definida por:

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1_r(\mathbb{R}^3) - \{0\}; \quad J(u) = 0\},$$

onde $J : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3\lambda}{4}\phi_u u^2 - \frac{2p-1}{p+1}|u|^{p+1}dx.$$

Inicialmente, a função J parece ser sem sentido algum, porém, ela é $2I'(u).u$ menos a identidade de Pohozaev dada pela equação (3) abaixo para nosso caso, ou seja, se u for solução do problema, certamente estará na variedade de Ruiz. A identidade de Pohozaev para este caso, é estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Seja $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -a\Delta u + bu + c\phi u = du^p, & \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi = u^2, & \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes reais. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{a}{2}|\nabla u|^2 + \frac{3b}{2}u^2 + \frac{5c}{4}\phi u^2 - \frac{3d}{p+1}u^{p+1}dx = 0.$$

Em particular, a solução de (0.1), deve satisfazer

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{3}{2}u^2 + \frac{5\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{3}{p+1}u^{p+1}dx = 0. \tag{3}$$

O problema seguinte que iremos trabalhar também será, um caso subcrítico para um sistema Schrödinger-Poisson-Slater, dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u &= |u|^{p-1}u, \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi &= u^2, \quad \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{0.2}$$

onde $3 < p < 5$ e V satisfaz:

(V1) $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

(V2) $\infty > V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y) \geq V(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^3$, e a desigualdade é estrita em domínios de medida não-nula.

(V3) Existe $C > 0$; para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \geq C\|u\|^2,$$

onde $\|u\|$ denota a norma usual em $H^1(\mathbb{R}^3)$, a qual é dada por:

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx.$$

Neste problema, o funcional energia associado é $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Usaremos a variedade de Nehari,

$$\mathcal{N}_V = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) - \{0\}; \quad G(u) = 0\}$$

onde $G(u) = I'(u)(u)$. Observamos que, $\mathcal{N}_V$ indica com que potencial a variedade de Nehari é construida, quando não houver confusão usaremos $\mathcal{N}$ ao invés de $\mathcal{N}_V$.

O problema seguinte que abordaremos, é um caso crítico do sistema Schrödinger-Poisson-Slater, incluso mais no sentido de darmos um contra-exemplo, de um resultado válido no caso subcrítico que, não é válido num caso crítico.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + V(x)u + \phi u &=& u^5, \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi &=& u^2, \quad \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \tag{0.3}$$

onde as condições de V serão dadas no teorema que demonstraremos. Neste caso, não precisaremos utilizar uma variedade específica.

Um problema bem interessante, é quando pertubamos o sistema Schrödinger-Poisson-Slater, ao invés de $f(u,x) = u^5$, termos $f(u,x) = |u|^{p-1}u + u^5$, daí, temos o problema problema crítico:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + V(x)u + \phi u &=& |u|^{q-1}u + u^5, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi &=& u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \tag{0.4}$$

onde $3 < q < 5$ e as condições de V serão dadas nos enunciados dos resultados. O funcional energia associado é $I^* : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I^*(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{q+1} dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx.$$

A variedade de Nehari do problema é dada por:

$$\mathcal{N}^* = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) - \{0\}; \quad G^*(u) = 0\}$$

onde $G^*(u) = (I^*)'(u).u$.

No último capítulo de nosso trabalho, trataremos, talvez o problema mais complicado desse texto, o problema crítico:

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u &= K(x)|u|^4 u + \mu Q(x)|u|^{q-2}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi &= u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{0.5}$$

onde $2 < q < 6$ e $\mu > 0$ e, assumiremos

(H1) (i) $\quad K \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \lim_{|x|\to\infty} K(x) = K_\infty \in (0, \infty)$ e $K(x) \geq K_\infty$ para $x \in \mathbb{R}^3$,

(ii) $\quad Q \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \lim_{|x|\to\infty} Q(x) = Q_\infty \in (0, \infty)$ e $Q(x) \geq Q_\infty$ para $x \in \mathbb{R}^3$.

(H2) $|K(x) - K(x_0)| = o(|x - x_0|^\alpha)$, onde $1 \leq \alpha < 3$ e $K(x_0) = \max_{\mathbb{R}^3} K(x)$.

No caso do problema (0.5), o funcional energia que iremos trabalhar será dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K(x)|u^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|u^+|^q dx$$

e, a variedade de Nehari do problema, será dada de maneira análoga a definida nos outros problemas. Quando, ao invés, de estarmos trabalhando com K e Q, estivermos com K_∞ e Q_∞, o funcional energia associado I_∞ será dado por:

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K_\infty|u^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q_\infty|u^+|^q dx.$$

Enfim, durante nosso trabalho focaremos em resultados relacionados aos problemas acima. Algumas vezes resultados de existência, outras vezes de não existência e ainda outras de comportamento do funiconal energia e, se a condição de Palais-Smale (PS) é satisfeita.

Estruturalmente, nossa dissertação esta dividida da seguinte forma: no **Capítulo 1** apresentaremos resultados preliminares tais como propriedades do termo não local, da variedade de Ruiz assim como da variedade de Nehari. Tais propriedades são de fundamental importância em todo o texto; no caso das propriedades da variedade de Ruiz, elas serão particularmente usadas no **Capítulo 2**. No **Capítulo 2**, provaremos diversos resultados relacionados ao problema (0.1), tais como existência e não existência de soluções radiais positivas, além de resultados relacionados ao comportamento do funcional energia; a variedade de Ruiz é usada neste capítulo, devido ser alguns dos resultados alcançados com tal variedade não serem conhecidos quando trabalhados na variedade de Nehari. Tal capítulo esta baseado no artigo do D. Ruiz [24]. No **Capítulo 3**, provaremos um resultado de existência de solução para o problema (0.2) e, também mostraremos que tal resultado não é válido no caso crítico, ou seja, mostraremos um resultado de não existência para o problema (0.3). No **Capítulo 4**, fazemos uma pertubação no sistema Schrödinger-Poisson-Slater, e veremos que passaremos a ter resultados de existência para o problema (0.4). Os **Capítulos 3** e **4** estão baseados no trabalho de A. Azzolinni e A. Pomponio [3]. Por fim, e não menos importante, no **Capítulo 5** trataremos do problema (0.5), e como já dissemos, ele se trata de um problema mais delicado. Tal capítulo esta baseado no artigo L. Zhao e F. Zhao [30].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo nosso objetivo será demonstrar algumas das principais propriedades do termo não local, além de algumas das propriedades das variedades de Ruiz e Nehari. Tais propriedades serão de fundamental importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

1.1 Propriedades relacionadas ao termo não local

Para cada $u, v \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$, considere o funcional linear $h : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, definido assim,

$$h(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega uv dx.$$

Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos

$$h(\omega) \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\omega uv| dx \leq \|\omega\|_6 \|u\|_{12/5} \|v\|_{12/5} \quad \text{para todo } \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

visto que $\frac{1}{6} + \frac{1}{12/5} + \frac{1}{12/5} = 1$. Destacamos neste momento, que em todo texto:

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx)^{1/3}}.$$

Desta forma,

$$h(\omega) \leq S^{-1/2} \|\omega\|_D \|u\|_{12/5} \|v\|_{12/5}, \quad \text{para todo } \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

onde $\|.\|_D$ denota a norma no espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, h é funcional linear contínuo e tal que $\|h\| \leq S^{-1/2} \|u\|_{12/5} \|v\|_{12/5}$ e, pelo teorema da representação de Riesz, temos a existência de um único $\psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi.\nabla\omega dx = \int_{\mathbb{R}^3} \omega uv dx, \quad \text{para todo } \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \quad e \quad \|\psi\|_D = \|h\|. \qquad (1.1)$$

Diante disso, temos que $\psi = \psi_{u,v}$ é solução fraca do problema

$$-\Delta\psi = uv \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Daí, fica bem definina a aplicação

$$B : L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \times L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \quad \text{dada por} \quad B(u,v) = \psi_{u,v}.$$

Temos,

- B é simétrica: $B(u,v) = B(v,u)$, para todo $u,v \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$ (definição da $\psi_{u,v}$)

- B é contínua,

  $$\|B(u,v)\|_D = \|\psi\|_D = \|h\| \leq S^{-1/2}\|u\|_{12/5}\|v\|_{12/5}, \quad \text{para todo} \quad u,v \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3).$$

A partir de B, vamos definir a forma 4-linear:

$$a : L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \times L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \times L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \times L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

dada por $a(u,v,u_1,v_1) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} u_1 v_1 B(u,v) dx$. Agora, veja que, para h definida a partir de u_1 e v_1, temos

$$a(u,v,u_1,v_1) = h(B(u,v)) \leq S^{-1/2}\|B(u,v)\|_D\|u_1\|_{12/5}\|v_1\|_{12/5} \leq S^{-1}\|u\|_{12/5}\|v\|_{12/5}\|u_1\|_{12/5}\|v_1\|_{12/5}$$

para todo $u,v,u_1,v_1 \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pela definição de a e das propriedades de B, temos, para $u,v,u_1,v_1 \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$, que

- $a(u,v,u_1,v_1) = a(v,u,u_1,v_1) \quad e \quad a(u,v,u_1,v_1) = a(u,v,v_1,u_1);$

- Usando (1.1), temos que $a(u,v,u_1,v_1) = a(u_1,v_1,u,v)$:

  $$a(u,v,u_1,v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} uv\psi_{u_1,v_1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi_{u,v}.\nabla\psi_{u_1 v_1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} u_1 v_1 \psi_{u,v} = a(u_1,v_1,u,v).$$

Diante do que já foi exposto, podemos definir $\phi : L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, a partir de B por $\phi(u) = \phi_u = B(u,u)$, onde $\phi = \phi_u$ fica determinado como único $\phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi.\nabla\omega dx = \int_{\mathbb{R}^3} \omega u^2 dx, \quad \text{para todo} \quad \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

ou seja, $\phi = \phi_u$ é solução fraca do problema,

$$-\Delta\psi = u^2, \quad em \quad \mathbb{R}^3.$$

Usando o fato de B ser uma forma bilinear simétrica limitada, temos:

- $\phi \in C^\infty \quad e \quad \phi^{'}(u).(v) = 2B(u,v).$

- Se $u, v, \omega \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$ e mais uma vez usando (1.1), temos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} v\omega\phi_u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi_{v,\omega}.\nabla\phi_u dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2\psi_{v,\omega} dx.$$

Agora, considere a aplicação $J : L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, definida por:

$$J(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

Note que, $J(u) = \frac{1}{4}a(u,u,u,u)$, e portanto,

$$J^{'}(u).(v) = \frac{1}{4}[a(v,u,u,u)+a(u,v,u,u)+a(u,u,v,u)+a(u,u,u,v)] \Rightarrow J^{'}(u).(v) = a(u,u,u,v)$$

pela simetria da aplicação a. Desta forma,

$$J^{'}(u).(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_u uv dx \quad ou \quad J^{'}(u).(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{u,v} u^2.$$

Note que, convencionamos $\psi_{u,u} = \phi_u$. Existem outras propriedades que a aplicação ϕ satisfaz, as quais serão de fundamental importância para nós, a saber:

(i) Existe $K > 0,$ tal que $\|\phi_u\|_D \leq K\|u\|^2_{12/5}$ para todo $u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$.

(ii) $\phi_u \geq 0,$ para todo $u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$ (consequência do príncipio do máximo)

(iii) $\phi_{tu} = t^2\phi_u,$ para todo $t > 0, u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$.

(iv) Se $y \in \mathbb{R}^3$ e $\widetilde{u}(x) = u(x+y)$, então $\phi_{\widetilde{u}}(x) = \phi_u(x+y)$ e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\widetilde{u}} \widetilde{u}^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

Demonstração.

(i) Note,

$$\|\phi_u\|_D^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u . \nabla \phi_u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = h(\phi_u)$$

assim,

$$\|\phi_u\|_D^2 = h(\phi_u) \leq S^{-1/2} \|\phi_u\|_D \|u\|_{12/5}^2 = S^{-1/2} \|B(u,u)\|_D \|u\|_{12/5}^2 \leq S^{-1} \|u\|_{12/5}^2 \|u\|_{12/5}^2$$

ou seja,

$$\|\phi_u\|_D^2 \leq S^{-1} \|u\|_{12/5}^4.$$

(iii) Basta observar que,

$$\phi_{tu} = B(tu, tu) = t^2 B(u,u) = t^2 \phi_u, \forall t > 0, u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3).$$

(iv) De fato, usando o teorema da representação de Riesz discutido no texto, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_{\widetilde{u}}(x) . \nabla \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(x) \widetilde{u}^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(x) u^2(x+y) dx$$

por mudança de variáveis,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega(x) u^2(x+y) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(z-y) u^2(z) dz = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u(z) . \nabla \omega(z-y) dz$$

portanto, usando novamente mudança de variáveis na última integral, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_{\widetilde{u}}(x) . \nabla \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u(x+y) . \nabla \omega(x) dx.$$

Como a igualdade acima, é verdadeira para todo $\omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, temos que $\phi_u(x+y) = \phi_{\widetilde{u}}(x)$, pela unicidade da representação de Riesz. Ademais, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\widetilde{u}}(x) \widetilde{u}^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u(x+y) u^2(x+y) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u(x) u^2(x) dx$$

pela invariância da integral por translação. Donde, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\widetilde{u}} \widetilde{u}^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

$\blacksquare$

Podemos fazer uma restrição da aplicação ϕ à E, onde $E = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3); u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)\}$. Tal espaço, trata-se de um espaço normado, com norma dada por:

$$\|u\|_E = \|u\|_D + \|u\|_{12/5}.$$

É interessante notar que $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow E \hookrightarrow L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$. Para não carregar a notação consideremos $\phi : E \subset L^{12/5}(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Tal aplicação é contínua sendo de classe C^∞. Desta forma para $u_n \rightharpoonup u$ em E, temos que:

(v) $u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E \Longrightarrow \phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

(vi) Nas mesmas hipóteses:

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

(vii) O limite do tipo Brèzis-Lieb, é válido para o termo não local:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1).$$

$(viii)$ $a(u,u,u,u) \leq \liminf a(u_n,u_n,u_n,u_n)$.

Demonstração.

(v) De fato, primeiramente, note que como $E \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, sendo $u_n \rightharpoonup u$ em E, temos $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Agora, consideremos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (imersão compacta) para $|\Omega| < \infty$, temos que $u_n \to u$ em $L^2(K)$, tal que $K = supt\psi$. Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \int_K \psi u_n^2 dx = \int_K \psi u^2 dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \psi u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi u^2 dx$$

desta forma, pelo que já temos feito exaustivamente nesta seção e pelo limite acima, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_{u_n}.\nabla\psi dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi u_n^2 dx \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_{u_n}.\nabla\psi dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_u.\nabla\psi dx$$

$$\Longrightarrow \phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

A última implicação acontece em virtude de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ ser espaço de Hilbert e de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ser denso em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

(vi) De fato, notemos antes de tudo, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ e uma função $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ para $|x| \leq M_\varepsilon$ e $\eta = 0$ para $|x| \geq 2M_\varepsilon$ tal que a função $w = u\eta$ satisfaz $\|w - u\|_{12/5} < \varepsilon$ e $|w| \leq |u|$ em $\mathbb{R}^3$. Como (u_n) converge fracamente para u em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos $u_n \to u$ em $L^{12/5}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ e $\|u_n\|_{12/5}$, $\|u_n - u\|_{12/5}$ são limitados (suponhamos por $M > 0$), daí usando as propriedades da aplicação a, temos

$$\begin{aligned} a(u_n, u_n, u_n, u) - a(u_n, u_n, u, u) &= a(u_n, u_n, u_n - u, u) \\ &= a(u_n, u_n, u_n - u, u - w) + a(u_n, u_n, u_n - u, w) \end{aligned}$$

como,

$$|a(u_n, u_n, u_n - u, u - w)| \leq \|u_n\|_{12/5}^2 \|u_n - u\|_{12/5} \|w - u\|_{12/5} \leq M^3 \varepsilon$$

e,

$$\begin{aligned} |a(u_n, u_n, u_n - u, w)| &\leq \int_{|x| \leq 2M_\varepsilon} \phi_{u_n} |u_n - u| w dx \\ &\leq \|u_n\|_{12/5}^2 \|u_n - u\|_{L^{12/5}(B_{2M_\varepsilon})} \|w\|_{12/5} \\ &\leq CM^2 \|u_n - u\|_{L^{12/5}(B_{2M_\varepsilon})} \end{aligned}$$

logo chegamos que,

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^3} |a(u_n, u_n, u_n, u) - a(u_n, u_n, u, u)| \leq M^3 \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Ou seja, usando o item anterior temos,

$$\lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = \lim \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx$$

(vii) Basta observarmos que, análogo ao item anterior, temos

$$\lim a(u_n, u_n, u, u) = \lim a(u_n, u, u_n, u) = a(u, u, u, u)$$

e, como pelas propriedades de a,

$$\begin{aligned} a(u_n - u, u_n - u, u_n - u, u_n - u) &= a(u_n, u_n, u_n, u_n) + a(u, u, u, u) - 4a(u_n, u_n, u_n, u) \\ &- 4a(u, u, u, u_n) + 2a(u_n, u_n, u, u) + 4a(u_n, u, u_n, u) \end{aligned}$$

observando também que, $\lim a(u_n,u_n,u_n,u) = a(u,u,u,u)$, $\lim a(u,u,u,u_n) = a(u,u,u,u)$, $\lim a(u_n,u_n,u,u) = a(u,u,u,u)$ e $\lim a(u_n,u,u_n,u) = a(u,u,u,u)$; pelas utilizações do item anterior e resultados análogos. Teremos que,

$$a(u_n-u,u_n-u,u_n-u,u_n-u) = a(u_n,u_n,u_n,u_n) - a(u,u,u,u) + o_n(1)$$

donde segue o resultado.

$(viii)$ Dado $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, denotando $\Omega_v = suptv$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\phi_{u_n} - \phi_u).\nabla v dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |(u_n^2 - u^2)v| dx \\ &= \int_{\Omega_v} |(u_n^2-u^2)v|dx \\ &\leq \|v\|_\infty \int_{\Omega_v} |(u_n-u)(u_n+u)|dx \\ &\leq \|v\|_\infty \left(\int_{\Omega_v} (u_n-u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_v} (u_n+u)^2dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|u_n-u\|_{L^2(\Omega_v)}.(\|u_n\|_{L^2(\Omega_v)} + \|u\|_{L^2(\Omega_v)})\|v\|_\infty \end{aligned}$$

como $u_n \to u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ e, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos também que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\phi_{u_n} - \phi_u).\nabla v dx \to 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_{u_n}.\nabla v dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u.\nabla v dx$$

observando que, $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é Hilbert, temos

$$\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Desta forma,

$$a(u,u,u,u) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_{u_n}|^2 dx = \liminf_n a(u_n,u_n,u_n,u_n)$$

o que conclui nossa demonstração.

■

As propriedades aqui expostas foram as que julgamos básicas e essênciais. Caso necessitemos de alguma outra, certamente que será destacada no texto.

1.2 Propriedades relacionadas à variedade de Ruiz

É importante destacarmos e demonstrarmos algumas das principais propriedades da variedade de Ruiz, visto ser ela uma variedade bem jovem e ainda pouco estudada. Todas as propriedades focadas, serão expostas no intuito de usá-las no **Capítulo 2**, pois, é em tal capítulo que elas serão necessárias. Esta seção tem como base [24].

Lema 1.1. *1. Para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $u \neq 0$, existe um único $\bar{t} > 0$ tal que $u_{\bar{t}} \in \mathcal{M}$, (onde $u_t(x) = t^2 u(tx)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$). Ademais,*

$$I(u_{\bar{t}}) = \max_{t \geq 0} I(u_t);$$

2. Existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{p+1}, \|u\| \geq C$ para todo $u \in \mathcal{M}$, onde $p \in (2,5)$;

3. Todo ponto crítico de $I|_{\mathcal{M}}$ é um ponto crítico de I.

Demonstração.

(1) Temos que,

$$\gamma(t) = I(u_t) = \frac{1}{2}t^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}t \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \frac{1}{4}t^3 \int_{\mathbb{R}^3} \lambda \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1} t^{2p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

donde, γ tem um único ponto crítico o qual corresponde ao máximo. Consideremos tal ponto crítico, como sendo $\bar{t} > 0$, daí,

$$I(u_{\bar{t}}) = \gamma(\bar{t}) = \max_{t \geq 0} I(u_t)$$

como também, $J(u_{\bar{t}}) = \bar{t}\gamma'(\bar{t}) = \bar{t}.0 = 0$, temos que $u_{\bar{t}} \in \mathcal{M}$.

(2)

Note que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \leq C_0 \|u\|^{p+1} \quad (H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3))$$

para algum $C_0 > 0$. Portanto,

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3\lambda}{4}\phi_u u^2 - \frac{2p-1}{p+1}|u|^{p+1} dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_0 \frac{2p-1}{p+1}\|u\|^{p+1} > 0$$

a última desigualdade para $\|u\|$ suficientemente pequena e maior que zero. Donde concluímos que zero não está na fronteira de $\mathcal{M}$, pois, para pertencer a fronteira teriamos de ter $(u_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $u_n \to 0$, daí, $\|u_n\| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado, e n suficientemente grande, porém tal não pode ocorrer, visto que para u suficientemente próximo de zero, $J(u) > 0$. Donde, zero não estar na fronteira de $\mathcal{M}$, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|u\| \geq C$.

Com a existência do $C > 0$ acima garantida, temos, para $u \in \mathcal{M}$, que

$$C \leq \frac{\|u\|^2}{2} \leq \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \frac{2p-1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{p+1}{2p-1}C^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \Rightarrow \|u\|_{p+1} \geq C > 0$$

(3) Veja **5ºEtapa** da demonstração do **Teorema 2.1.** ■

Diante do lema acima, podemos definir:

$$c_1 := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t));$$

$$c_2 := \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t);$$

$$c_3 := \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u);$$

onde $\Gamma := \{g \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)); g(0) = 0, I(g(1)) \leq 0, g(1) \neq 0\}$.

Lema 1.2. *A igualdade é válida:*

$$c := c_1 = c_2 = c_3.$$

Demonstração.

Primeiramente, note que, dado $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, pelo **Lema 1.1** existe $\bar{t} > 0$ tal que $u_{\bar{t}} \in \mathcal{M}$, daí

$$I(u_{\bar{t}}) = \max_{t \geq 0} I(u_t) \Rightarrow \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) \leq I(u_{\bar{t}}) = \max_{t \geq 0} I(u_t) \Rightarrow \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) \leq \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t) \Rightarrow c_3 \leq c_2.$$

Agora, dado $u \in \mathcal{M}$, temos

$$I(u) = \max_{t \geq 0} I(u_t) \geq \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t) \Rightarrow \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) \geq \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t) \Rightarrow c_3 \geq c_2,$$

assim, fica provado que $c_2 = c_3$.

Podemos ver, também que,

$$u \neq 0 \Rightarrow \exists \bar{t}, t_1 > 0; \quad u_{\bar{t}} \in M \quad \text{e} \quad I(u_{t_1}) < 0.$$

Neste ponto, definamos $g : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^3)$ dada por $g(t) = u_{tt_1}$, temos que $g \in \Gamma$. Como também, $I(u_{\bar{t}}) = \max_{s \geq 0} I(u_s)$

$$I(g(t)) = I(u_{tt_1}) \leq I(u_{\bar{t}}), \forall t \in [0,1] \Longrightarrow \inf_{\delta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\delta(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \leq I(u_{\bar{t}})$$

$$\Longrightarrow \inf_{\delta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\delta(t)) \leq \max_{t \geq 0} I(u_t) \Longrightarrow \inf_{\delta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\delta(t)) \leq \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t)$$

donde, temos que $c_1 \leq c_2$. Para mostrar a desigualdade contrária, precisaremos de algumas ferramentas adicionais. Definamos,

$$A = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3); J(u) > 0\} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad B = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3); J(u) < 0\}$$

daí, observamos que $H^1(\mathbb{R}^3) = A \cup \mathcal{M} \cup B$, onde, claramente, a união é disjunta e A e B são abertos. Agora, tomemos $g \in \Gamma$, afirmamos que $g(1) \in B$. De fato, suponhamos $g(1) = u \in A \cup \mathcal{M}$. Daí, como

$$3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi_u u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{4}\lambda \phi_u u^2 dx \geq \frac{2p-1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

Diante da desta desigualdade, temos que

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \lambda \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \geq \left(\frac{2p-1}{3(p+1)} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx > 0$$

o que gera um absurdo. Visto que $I(g(1)) \leq 0$. Portanto, $g(1) \in B$.

Como $g(0) = 0$ e $0 \in A$(aberto), temos que existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $g(t_1) \in A - \{0\}$. Desta forma, temos

$$J(g(t_1)) > 0 \quad \text{e} \quad J(g(1)) < 0$$

donde, existe $t \in (t_1, 1)$ tal que $g(t) \in \mathcal{M}$. Assim,

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) = \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t) \Longrightarrow \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(u_t)$$

portanto,

$$c_1 \geq c_2.$$

O que conclui nossa demonstração. ■

1.3 Propriedades relacionadas à variedade de Nehari

Esta seção tem como base [3]. Primeiramente, estudaremos propriedades variedade de Nehari para o problema (0.2):

Lema 1.3. *1. Para todo $u \neq 0$, existe, um único, $\bar{t} > 0$ tal que $\bar{t}u \in \mathcal{N}$ e*

$$I(\bar{t}u) = \max_{t \geq 0} I(tu);$$

2. Existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{p+1} \geq C$, para todo $u \in \mathcal{N}$;

3. $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1;

4. Todo ponto crítico de $I|_{\mathcal{N}}$ é um ponto crítico de I.

Demonstração.

(1)

Note que, $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, dada por

$$\gamma(t) = I(tu) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(tu)|^2 + V(x)(tu)^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{tu}(tu)^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |tu|^{p+1} dx$$

$$\Longrightarrow \gamma(t) = \frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}t^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

usando as propriedades do termo não local.

Desta forma, γ tem um único ponto crítico, o qual corresponde ao máximo. Consideremos $\bar{t} > 0$ sendo o ponto de máximo. Logo,

$$\gamma(\bar{t}) = I(\bar{t}u) = \max_{t \geq 0} I(tu).$$

Afirmamos que, $\bar{t}u \in \mathcal{N}$. De fato, pois,

$$0 = \gamma'(\bar{t}) = \bar{t}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \bar{t}^3\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \bar{t}^p\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

$$\Rightarrow \bar{t}^2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \bar{t}^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \bar{t}^{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx = 0.$$

Daí,

$$I'(\bar{t}u)(\bar{t}u) = 0,$$

assim,

$$\bar{t}u \in \mathcal{N}.$$

(2)

Primeiramente, note que zero não pertence a fronteira de $\mathcal{N}$. Pois, pelas imersões de Sobolev existe $C_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \leq C_0 \|u\|^{p+1}$$

donde,

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + \phi_u u^2 - |u|^{p+1} dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - |u|^{p+1} dx$$

pela propriedade $(V3)$ (tal condição é dada para V no problema (A)), temos

$$G(u) \geq \overline{C}\|u\|^2 - C_0\|u\|^{p+1}$$

donde, vemos ser G positiva para $\|u\|$ pequena. Assim, zero não está na fronteira de $\mathcal{N}$.

Agora, para $u \in \mathcal{N}$, temos que $G(u) = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + \phi_u u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx$$

por $(V3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \geq \overline{C}\|u\|^2$$

e, como zero não pertence a fronteira existe $K > 0$ tal que $\|u\|_{p+1} \geq K$ para todo $u \in \mathcal{N}$.

(3)

É conhecido que, para $\mathcal{N}$ ser variedade de classe C^1, temos de ter: para todo $u \in \mathcal{N}$ deve existir $F \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ de codimensão 1, um aberto $U \subset F$ e $\Phi : U \to H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

(i) Φ é C^1;

(ii) Φ é injetiva;

(iii) $\Phi'(y) : F \to H^1(\mathbb{R}^3)$ é injetiva, para todo $y \in U$;

(iv) $\Phi(U) \subset \mathcal{N}$, $\Phi(U) = \mathcal{N} \cap A$, $A \subset F$ aberto em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

O que de fato acontece, vejamos: $u \in \mathcal{N}$, como sabemos:

$$H^1(\mathbb{R}^3) = KerG'(u) \bigoplus < v >, \quad G'(u)(v) \neq 0$$

observando que, $G'(w) \neq 0$ e $G'(w)(w) \neq 0$, para todo $w \in \mathcal{N}$, fato destacado na demonstração próximo item. Agora, consideremos $T : KerG'(u) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(y,t) = G(y + tu)$, logo

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t) = G'(y + tu)u$$

donde, temos

$$\begin{cases} T(0,1) &= G(u) = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t}(0,1) &= G'(u)(u) \neq 0 \end{cases}$$

daí, pelo Teorema da Função Implícita , existe $\psi : B_\varepsilon(0) \to (1-\delta, 1+\delta)$ de classe C^1 única, tal que

$$\begin{cases} \psi(0) &= 1, \\ G(y + \psi(y)u) &= 0, \quad |y| < \varepsilon \end{cases}$$

ou seja, $\Phi : B_\varepsilon(0) \subset KerG'(u) \to H^1(\mathbb{R}^3)$, dada por $\Phi(y) = y + \psi(y)u$, onde

(i) Φ é $C^1(B_\varepsilon)$;

(ii) Φ é injetiva;

(iii) $\Phi'(y) : KerG'(u) \to H^1(\mathbb{R}^3)$ é injetiva, para todo $y \in B_\varepsilon$;

(iv) $\Phi(B_\varepsilon) \subset \mathcal{N}$, $\Phi(B_\varepsilon) = \mathcal{N} \cap A$, $A \subset KerG'(u)$ aberto em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

(4)

Sendo u_0 ponto crítico de $I|_{\mathcal{N}}$, temos que $I'(u_0)(v) = 0$ para todo $v \in T_{u_0}\mathcal{N} = KerG'(u_0)$, donde $KerG'(u_0) \subset KerI'(u_0)$, assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(u_0) = \lambda G'(u_0).$$

Observemos também que, $G'(u_0)(u_0) \neq 0$, de fato, como $u_0 \in \mathcal{N}$, temos que $G(u_0) = 0$, daí

$$G'(u_0)(u_0) = 2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + u_0^2 dx + 4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_0} u_0^2 dx - (p+1)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx < 0$$

visto que,

$$0 = G(u_0) = I'(u_0)(u_0) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + u_0^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_0} u_0^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

$$\Rightarrow 0=(p+1)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_0|^2+u_0^2dx+(p+1)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_0}u_0^2dx-(p+1)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}dx>$$
$$>2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_0|^2+u_0^2dx+4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_0}u_0^2dx-(p+1)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}dx.$$

Deste modo,

$$0=I'(u_0)(u_0)=\lambda G'(u_0)(u_0)\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow I'(u_0)=0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Diante do lema acima, poderemos assumir a definição

$$c_V=\inf_{u\in\mathcal{N}}I(u).$$

Nossa meta será encontrar $\overline{u}\in\mathcal{N}$ tal que $I(\overline{u})=c_V$, daí, concluiremos que $(\overline{u},\phi_{\overline{u}})$ é GSS do problema em questão. Também pelo lema acima, fica bem definida $t:H^1(\mathbb{R}^3)-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ onde $t(u)$ é dada por $I(t(u)u)=\max_{t\geq 0}I(tu)$.

Com a introdução da constante c_V, à qual é de grande importância para os resultados que desejamos provar, é de fundamental importância enunciarmos o lema abaixo, tendo em vista a ligação com o teorema do passo da montanha. Não demonstraremos tal lema, pois, a demonstração é idêntica a prova do **Lema 1.2**.

Lema 1.4. *Vale a igualdade:*

$$c_V=\inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(g(t))=\inf_{u\neq 0}\max_{t\geq 0}I(tu)$$

onde $\Gamma=\{g\in C([0,1],H^1);g(0)=0,I(g(1))\leq 0\quad e\quad g(1)\neq 0\}$.

Os próximos resultados, serão completamente direcionados a prova de resultados relacionados ao problema (0.2):

Lema 1.5. *Seja* $(u_n)\subset H^1(\mathbb{R}^3)$*, tal que* $\|u_n\|\geq c>0$ *e*

$$\max_{t\geq 0}I(tu_n)\leq c_V+\delta_n$$

com $\delta_n\to 0^+$*. Então, existe* $(y_n)\subset\mathbb{R}^3$ *e* $R,\mu>0$ *tais que*

$$\liminf_n\int_{B_R(y_n)}|u_n|^2dx>\mu$$

Demonstração.

Para (u_n) como na hipótese, temos que existe, pelo **Lema 1.3**, $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$c_V \leq I(t_n u_n) = \max_{t \geq 0} I(t u_n) \leq c_V + \delta_n.$$

Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = t_n u_n$.

Agora, afirmamos que, (w_n) é limitada. De fato, como

$$I(w_n) = I(w_n) - \frac{1}{p+1} I'(w_n)(w_n) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + V(x) w_n^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_n} w_n^2$$

temos, pela propriedade $(V3)$

$$I(w_n) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \overline{C} \|w_n\|$$

assim, como $I(w_n)$ é limitada, pela hipótese, temos que (w_n) é limitada.

Afirmamos também que: existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$, $R, \delta > 0$ tal que

$$\liminf_n \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq \delta.$$

De fato, caso contrário,

$$\text{para todo} \quad R_1 > 0, \quad \liminf_n \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_{R_1}(y)} w_n^2 dx = 0$$

como (w_n) é limitada, temos, por M. Willem [28], que

$$w_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^3), \quad q \in (2, 6)$$

$$\Longrightarrow w_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^3), \quad p \in (3, 5)$$

o que gera um absurdo. Visto que $(w_n) \subset \mathcal{N}$ e, existe $\widetilde{c} > 0$ tal que $\|u\|_{p+1} \geq \widetilde{c} > 0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Diante disso, existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$, $R, \mu_1 > 0$ tal que

$$\liminf_n \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq \mu_1$$

como $w_n = t_n u_n$, logo $\|w_n\| = t_n \|u_n\|$, donde, usando o fato que zero não pertence a fronteira de $\mathcal{N}$, existe $C > 0$ tal que

$$0 < t_n C \leq t_n \|u_n\| = \|w_n\| \leq M$$

onde M vem da limitação de (w_n). Assim,

$$\frac{1}{t_n} \geq \frac{C}{M} \Rightarrow \frac{1}{t_n^2} \geq \frac{C^2}{M^2}$$

como também,

$$\int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx = \frac{1}{t_n^2}\int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx$$

temos,

$$\liminf_n \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx = \liminf_n \Big(\frac{1}{t_n^2}\int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx\Big)$$

e, notando que,

$$\frac{1}{t_n^2}\int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq \frac{C^2}{M^2}\int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx$$

temos, finalmente, que

$$\liminf_n \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq \frac{C^2}{M^2}\liminf_n \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq \mu_1 \frac{C^2}{M^2} := \mu > 0$$

■

Lema 1.6. *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|u_n\| = 1$ e*

$$I(t(u_n)u_n) = \max_{t\geq 0} I(tu_n) \to c_V.$$

Então, a sequência $(t(u_n))$(também denotada por (t_n))é limitada em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx \leq C\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx$$

onde $C = \max\{1, V_\infty\}$, daí, como $\|u_n\| = 1$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx \leq C.$$

Observe também que, como $t_n u_n \in \mathcal{N}_V$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(t_n u_n)|^2 + V(x)(t_n u_n)^2 + \phi_{t_n u_n}(t_n u_n)^2 - |t_n u_n|^{p+1} dx = 0$$

e,

$$t_n^2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx + t_n^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - t_n^{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx = 0$$

desta forma,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx &= t_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx - t_n^2\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \\ &= t_n^2\Big(t_n^{p-3}\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx\Big)\end{aligned}$$

assim,

$$C \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx = t_n^2 \Big(t_n^{p-3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \Big).$$

Agora, note que, pelo lema anterior: existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$0 < \mu \leq \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \leq \Big[\int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p+1} dx \Big]^{\frac{2}{p+1}} \Big[\int_{B_R(y_n)} dx \Big]^{\frac{p-1}{p+1}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \Big)^{\frac{2}{p+1}} |B_R(y_n)|^{\frac{p-1}{p+1}}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \geq \frac{\mu^{\frac{p+1}{2}}}{|B_R(y_n)|^{\frac{p-1}{2}}} = L > 0$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq \overline{L} \|u_n\|^4 \leq \overline{L} \Rightarrow - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq -\overline{L}$$

assim,

$$C \geq t_n^2 (t_n^{p-3} L - \overline{L}) = t_n^{p-1} L - t_n^2 \overline{L}$$

donde, concluimos ser (t_n) limitada. ∎

Lema 1.7. *Suponhamos que $V, V_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $V_n \to V$ em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, então $c_n := c_{V_n} \to c_V$.*

Demonstração.

Primeiramente, façamos algumas considerações:

$$I_n(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V_n(x) u^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx$$

e,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x) u^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Assim,

$$I_n(u) - I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (V_n(x) - V(x)) u^2 dx.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, fixemos $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$I(w) = \max_{t \geq 0} I(tw) \leq c_V + \varepsilon.$$

Consideremos também, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ tal que,

$$I_n(t_n w) = \max_{t \geq 0} I_n(tw)$$

Vemos claramente que:

- $c_n \leq I_n(t_n w)$, pois, $t_n w \in \mathcal{N}_{V_n}$

- (t_n) é limitada, pois, como $I_n'(t_n w)(t_n w) = 0$, temos

$$t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 + V_n(x) w^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_w w^2 dx = t_n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2 + V_n(x) w^2 dx + t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_w w^2 dx = t_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx$$

daí, usando o fato de (V_n) ser limitada, por ser convergente, e as propriedades do termo não-local, temos a existência de $C > 0$ tal que

$$t_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx \leq C\|w\|^2 + t_n^2 \|w\|^4$$

o que implica,

$$t_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx - C\|w\|^2 - t_n^2 \|w\|^4 \leq 0, \forall n$$

sendo assim, (t_n) é limitada.

Agora, note que

$$c_n \leq I_n(t_n w) = I(t_n w) + (I_n(t_n w) - I(t_n w)) \leq I(w) + \frac{1}{2}\|V_n - V\|_\infty t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} w^2 dx$$

daí,

$$c_n \leq c_V + \varepsilon + \frac{1}{2}\|V_n - V\|_\infty t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} w^2 dx$$

o que implica,

$$\limsup_n c_n \leq c_V + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \limsup_n c_n \leq c_V.$$

Para concluir, fixemos $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$c_n \leq I_n(u_n) \leq c_n + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad I_n(u_n) = \max_{t \geq 0} I_n(t u_n)$$

consideremos também, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n > 0$ tal que $w_n = s_n u_n \in \mathcal{N}$, ou seja,

$$I(w_n) = \max_{t \geq 0} I(t u_n).$$

Afirmamos que:

- $c_V \leq I(w_n)$ $(w_n \in \mathcal{N})$

- (u_n) é limitada. De fato, observando que $I_n(u_n)$ é limitada, por ser (c_n) limitada, temos que

$$
\begin{aligned}
I_n(u_n) &= I_n(u_n) - \frac{1}{p+1} I_n'(u_n)(u_n) \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V_n(x) u_n^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \\
&\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \overline{C} \|u_n\|^2
\end{aligned}
$$

assim, (u_n) é limitada.

- (s_n) é limitada. De fato, primeiramente, observe que existe $C > 0$ tal que,

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \geq C$$

caso contrário, $\|u_n\| \to 0$, assim, como

$$0 \leq c_n \leq I_n(u_n) \leq C\|u_n\|^2(1 + \|u_n\|^2) \to 0$$

donde, $c_n \to 0$, o que, de fato, não pode acontecer. Ou seja, existe $C > 0$ tal que,

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \geq C.$$

Agora, como $s_n u_n \in \mathcal{N}$, temos

$$s_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x) u_n^2 dx + s_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = s_n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \geq C s_n^{p+1}$$

donde, segue que (s_n) é limitada.

Diante das afirmações,

$$
\begin{aligned}
c_V \leq I(w_n) = I(s_n u_n) &= I_n(s_n u_n) + (I(s_n u_n) - I_n(s_n u_n)) \\
&\leq I_n(u_n) + \frac{1}{2} \|V_n - V\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} (s_n u_n)^2 dx \\
&\leq c_n + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \|V_n - V\|_\infty s_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx
\end{aligned}
$$

assim,

$$c_V \leq \liminf_n c_n$$

portanto,

$$\limsup_n c_n \leq c_V \leq \liminf_n c_n$$

ou seja,

$$c_V = \lim c_n.$$

O que conclui nossa demonstração. ■

Para concluir a discussão do capítulo, destacamos que: apesar de a todo tempo focarmos as propriedades da variedade de Nehari do problema (0.2), conseguimos resultados análogos para tal variedade relacionada a outros problemas que aqui estudaremos. Quando for necessário faremos tal comentário.

Capítulo 2

O problema Schrödinger-Poisson-Slater, para potencial constante e soluções radiais

Este capítulo terá como foco, apresentar resultados de existência e não-existência para e equação (0.1), a qual é dada por:

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \lambda \phi u &= |u|^{p-1}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi &= u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$, $1 < p < 5$ e as soluções que queremos encontrar $(u, \phi) \in H_r^1(\mathbb{R}^3) \times D_r^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Lembrando que, $H_r^1(\mathbb{R}^3) = H^1(\mathbb{R}^3) \cap \{u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; u(x) = u(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^3\}$.

Além disso, abordaremos o comportamento do funcional energia associado ao problema, o qual relembramos ser $I : H_r^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_u u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx.$$

Como dito na introdução, alguns desses resultados não são conhecidos quando trabalhados na variedade de Nehari, por isso, trabalharemos com a variedade de Ruiz. Em resumo, nosso objetivo será, demonstrar os resultados especificados na tabela abaixo:

	$0<\lambda<1/4$		$\lambda \geq 1/4$	
$1<p<2$	2 soluções	$\inf I > -\infty$	0 soluções	$\inf I = 0$
$p=2$	1 solução	$\inf I = -\infty$	0 soluções	$\inf I = 0$
$2<p<5$	1 solução	$\inf I = -\infty$	1 solução	$\inf I = -\infty$

Para facilitar a abordagem, dividiremos nosso estudo em dois casos, a saber, o caso $p>2$ e $1<p\leq 2$. Destacamos que este capítulo esta baseado do trabalho [24] de D. Ruiz.

2.1 O caso $p>2$

Começaremos provando um resultado, relacionado a limitação do funcional energia:

Proposição 2.1. *Seja $\lambda>0$ e $p\in(2,5)$. Então, I não é limitado inferiormente.*

Demonstração. Seja $u\in H^1_r(\mathbb{R}^3)$ função radial e positiva, consideremos também $v_t(x)=t^2u(tx)$. Estimemos $I(v_t)$. Note, primeiramente que, usando mudança de variáveis, temos que

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_t(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^3}t^6|\nabla u(tx)|^2dx=t^3\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u(x)|^2dx$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_t^2(x)dx=\int_{\mathbb{R}^3}t^4u^2(tx)dx=t\int_{\mathbb{R}^3}u^2(x)dx$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_t^{p+1}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^3}t^{2p+2}u^{p+1}(tx)dx=t^{2p-1}\int_{\mathbb{R}^3}u^{p+1}(x)dx$
- Como $\phi_{v_t}(x)=t^2\phi_u(tx)$, visto que: sendo $-\Delta\phi_u=u^2$ e $\psi(x)=t^2\phi_u(tx)$, temos

$$-\Delta\psi(x)=t^4(-\Delta\phi_u(tx))=t^4u^2(tx)=(t^2u(tx))^2=v_t^2(x)\Rightarrow\phi_{v_t}(x)=t^2\phi_u(tx)$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{v_t}(x)v_t^2(x)dx=t^6\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u(tx)u^2(tx)dx=t^3\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u(x)u^2(x)dx.$$

Sendo assim, fica claro que,

$$I(v_t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}t^3|\nabla u(x)|^2+\frac{1}{2}tu(x)^2+\frac{\lambda}{4}t^3\phi_u(x)u(x)^2-\frac{1}{p+1}t^{2p-1}|u(x)|^{p+1}dx$$

Desde que, $2p-1>3$, temos que $I(v_t)\to-\infty$ quando $t\to\infty$. ■

Em seguida, provaremos um dos resultados mais importantes do capítulo:

Teorema 2.1. *Suponhamos que $p\in(2,5)$ e $\lambda>0$. Então, existe um minimizante u de $I|_{\mathcal{M}}$. Além disso, u é positivo e $I^{'}(u)=0$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração do teorema em 5 etapas.

1ºEtapa. $\inf I|_{\mathcal{M}}>0$. Tomando $u\in\mathcal{M}$ arbitrário, definamos $k=I(u)$. E, definamos também,

$$a=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx,\quad b=\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx,\quad c=\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\phi u^2dx\quad \text{e}\quad d=\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}dx$$

Sabemos que,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{p+1}d=k\\ \frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c-\frac{2p-1}{p+1}d=0\end{cases}$$

onde a primeira equação segue do fato de $I(u)=k$ e a segunda de $J(u)=0$. Através de cálculos básicos chegamos que tal sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{p+1}d=k\\ \qquad -b-\frac{2p-4}{p+1}d=-3k\end{cases}$$

donde, temos que d pode ser escrito da forma

$$d=(3k-b)\frac{p+1}{2p-4}$$

como $d\geq 0$, daí, $3k\geq b$. Desta forma,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{p+1}[(3k-b)(p+1/2p-4)]=k$$

fazendo algumas manipulações algébricas, chegamos que

$$\frac{1}{4}c=\Big(1+\frac{3}{2p-4}\Big)k-\Big[\Big(\frac{1}{2p-4}+\frac{1}{2}\Big)b+\frac{1}{2}a\Big]$$

desde que $c>0$, temos novamente por manipulações

$$b+a\leq\Big(2+\frac{3}{p-2}\Big)k.$$

Daí, como zero não pertence a fronteira de $\mathcal{M}$, temos que existe $\varepsilon>0$ tal que $a+b\geq\varepsilon$ para todo $u\in\mathcal{M}$, donde $\inf I|_{\mathcal{M}}>0$.

2ºEtapa. Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $I(u_n) \to \inf I|_{\mathcal{M}}$. Afirmamos que (u_n) é limitada.

De fato, pela primeira etapa, já sabemos que

$$\|u_n\|^2 \leq \Big(2 + \frac{3}{p-2}\Big) I(u_n).$$

Daí, como $I(u_n)$ é limitada, por ser convergente, temos de imediato ser (u_n) limitada.

3ºEtapa. Como (u_n) é limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$, passando a subsequência, se necessário, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$. Afirmamos que $u \in \mathcal{M}$ e $u_n \to u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$. Desta forma, $I|_{\mathcal{M}}$ assume mínimo em u. Para justificar tal afirmação, definamos o conjunto de equações (2.2):

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx, \quad b_n = \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx, \quad c_n = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx, \quad d_n = \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx,$$
$$a = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx, \quad b = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx, \quad c = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx, \quad d = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx,$$
$$\overline{a} = \lim a_n, \quad \overline{b} = \lim b_n, \quad \overline{c} = \lim c_n \quad \text{e} \quad \overline{d} = \lim d_n$$

onde bem sabemos que os limites $\overline{a}$ e $\overline{b}$ existem a menos de subsequencia, por ser (u_n) limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$, já $\overline{c}$ e $\overline{d}$, serão justificados a seguir.

Observemos que, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ e $H_r^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ compactamente, temos que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx \to \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \Rightarrow \overline{d} = d$$

onde $\overline{d} = \lim d_n$, ou seja, fica justificada a existência de $\overline{d}$ e a quem ele é igual.

Diante das propriedades do termo não local, temos também que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \Rightarrow \overline{c} = c$$

onde $\overline{c} = \lim c_n$, ou seja, fica justificada a existência de $\overline{c}$ e a quem ele é igual.

Agora, sendo $H_r^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow D_r^{1,2}(\mathbb{R}^3), L_r^2(\mathbb{R}^3)$, temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e em $L_r^2(\mathbb{R}^3)$, donde $\overline{a} \geq a$ e $\overline{b} \geq b$.

Afirmando que as desigualdades acima são, de fato, igualdade temos $u_n \rightharpoonup u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ e $\|u_n\| \to \|u\|$, donde $u_n \to u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ e, então $u \in \mathcal{M}$. Em resumo, suporemos, por contradição, $a + b < \overline{a} + \overline{b}$ ($\overline{a} = a \quad \text{e} \quad \overline{b} = b \Leftrightarrow \overline{a} + \overline{b} = a + b$). Daí,

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{p+1}d < \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{4}\overline{c} - \frac{1}{p+1}\overline{d} = \inf I|_{\mathcal{M}}$$

donde $I(u) < \inf I|_{\mathcal{M}}$, isso, no entanto, não trás nenhuma contradição, visto que

$$\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c - \frac{2p-1}{p+1}d < \frac{3}{4}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{c} - \frac{2p-1}{p+1}\overline{d} = 0$$

logo, $J(u) < 0$, ou seja, u não pertence a $\mathcal{M}$. Daí, nosso objetivo, será encontrar $t_0 > 0$ tal que $v_0(x) = t_0^2 u(t_0 x) \in \mathcal{M}$, donde veremos que $I(v_0) < \inf I|_{\mathcal{M}}$. O que é um absurdo!

Como $I(u_n) \to \inf I|_{\mathcal{M}}$ e $J(u_n) = 0$, temos que o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{4}\overline{c} - \frac{1}{p+1}\overline{d} = \inf I|_{\mathcal{M}} \\ \frac{3}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{c} - \frac{2p-1}{p+1}\overline{d} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde a primeira equação é por $I(u_n) \to \inf I|_{\mathcal{M}}$ e a segunda por $J(u_n) = 0$.

Agora, definamos:

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{2}\overline{a}t^3 + \frac{1}{2}\overline{b}t + \frac{1}{4}\overline{c}t^3 - \frac{1}{p+1}\overline{d}t^{2p-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}at^3 + \frac{1}{2}bt + \frac{1}{4}ct^3 - \frac{1}{p+1}dt^{2p-1}$$

Daí, temos que f e $\overline{f}$ têm único ponto crítico, que corresponde ao máximo. Note que,

$$\overline{f}'(t) = \frac{3}{2}\overline{a}t^2 + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{c}t^2 - \frac{2p-1}{p+1}\overline{d}t^{2p-2}$$

quando $t = 1$, por (2.3), teremos

$$\overline{f}'(1) = \frac{3}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{c} - \frac{2p-1}{p+1}\overline{d} = 0$$

donde, podemos concluir que o máximo de $\overline{f}$ é $\inf I|_{\mathcal{M}}$.

Se supormos, $a + b < \overline{a} + \overline{b}$, temos que $f(t) < \overline{f}(t)$ para todo $t > 0$. Consideremos t_0 ponto máximo de f. Daí, $f'(t_0) = 0$ e, $f(t_0) < \max \overline{f} = \inf I|_{\mathcal{M}}$. Definamos, $v_0(x) = t_0^2 u(t_0 x)$, claramente, temos

$$I(v_0) = \frac{1}{2}at_0^3 + \frac{1}{2}bt_0 + \frac{t_0^3}{4}c - \frac{t_0^{2p-1}}{p+1}d = f(t_0) < \inf I|_{\mathcal{M}}$$

e,

$$J(v_0) = \frac{3}{4}at_0^3 + \frac{1}{2}bt_0 + \frac{3}{4}ct_0^3 - \frac{2p-1}{p+1}dt_0^{2p-1} = t_0 f'(t_0) = 0$$

diante disso,

$$v_0 \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad I(v_0) < \inf I|_{\mathcal{M}}$$

o que é absurdo. Portanto, u minimiza $I|_{\mathcal{M}}$. Como $J(|u|) = J(u)$ e, $I(u) = I(|u|)$, temos que $|u|$ também minimiza $I|_{\mathcal{M}}$. Donde podemos considerar, u não-negativa.

4°Etapa. $J'(u) \neq 0$, onde u é a minimização achada acima. Suponhamos $J'(u) = 0$. Usando a, b, c e d definidas na 3°Etapa, e $k = \inf I|_{\mathcal{M}} > 0$. Temos, no sentido fraco, que $J'(u) = 0$ pode ser escrito como

$$-3\Delta u + u + 3\lambda\phi_u u - (2p-1)u^p = 0 \tag{2.4}$$

desta forma, temos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{p+1}d = k \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c - \frac{2p-1}{p+1}d = 0 \\ 3a + b + 3c - (2p-1)d = 0 \\ \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{15}{4}c - (2p-1)\frac{3}{p+1}d = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

onde a primeira equação é do fato de u minimizar $I|_{\mathcal{M}}$, a segunda por $u \in \mathcal{M}$, a terceira de (2.4) e a quarta da identidade de Pohozaev, descrita na introdução. Daí, para $1 \neq p \neq 2$, temos

$$d = -3k\frac{p+1}{4(2-3p+p^2)}$$

desde que, $p > 2$ e $k > 0$, $d < 0$. O que é absurdo. Provando assim a 4°Etapa.

5°Etapa. $I'(u) = 0$.

Pelo método do multiplicador de Lagrange, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $I'(u) = \mu J'(u)$. Afirmamos que $\mu = 0$. A equação $I'(u) = \mu J'(u)$, pode ser escrita no sentido fraco como,

$$-\Delta u + u + \lambda\phi_u u - u^p = \mu[-3\Delta u + u + 3\lambda\phi_u u - (2p-1)u^p] \qquad (2.6).$$

Equivalentemente,

$$-(3\mu-1)\Delta u + (\mu-1)u + (3\mu-1)\lambda\phi_u u - [(2p-1)\mu-1]u^p = 0 \tag{2.7}$$

daí, usando a, b, c e d, como definidos anteriormente, temos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{p+1}d = k \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c - \frac{2p-1}{p+1}d = 0 \\ (3\mu-1)a + (\mu-1)b + (3\mu-1)c - [(2p-1)\mu-1]d = 0 \\ (3\mu-1)\frac{1}{2}a + (\mu-1)\frac{3}{2}b + (3\mu-1)\frac{5}{4}c - [(2p-1)\mu-1]\frac{3}{p+1}d = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

A primeira por u minimizar $I|_{\mathcal{M}}$, a segunda por $u \in \mathcal{M}$, a terceira vem de (2.7) e a quarta é da identidade de Pohozaev. Diante do sistema acima, temos, para a, b, c e d incógnitas, a matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{p+1} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{2p-1}{p+1} \\ 3\mu - 1 & \mu - 1 & 3\mu - 1 & -[(2p-1)\mu - 1] \\ (3\mu - 1)\frac{1}{2} & (\mu - 1)\frac{3}{2} & (3\mu - 1)\frac{5}{4} & -\frac{3[(2p-1)\mu-1]}{p+1} \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$detA = \frac{\mu(1-3\mu)(p-1)(p-2)}{p+1} = 0 \Longleftrightarrow p = 1, p = 2, \mu = 0 \quad ou \quad \mu = 1/3$$

Como $p > 2$, $detA = 0 \Longleftrightarrow \mu = 0 \quad ou \quad \mu = 1/3$. Caso $\mu \neq 0$ e $\mu \neq 1/3$. Então, $detA \neq 0$, portanto, o sistema acima tem uma única solução a qual depende dos parâmetros μ, p e k. Usando a Regra de Crammer, temos que d é dado por:

$$d = -\frac{3k(1+p)}{4(p-1)(p-2)}$$

donde $d < 0$. Absurdo! Caso $\mu = 1/3$, a quarta equação do sistema será

$$-b - \frac{2p-4}{p+1}d = 0$$

absurdo! Visto que $b, d > 0$. Portanto, $\mu = 0$ e, consequêntemente, $I'(u) = 0$. O que conclui nossa demonstração. ■

2.2 O caso $1 < p \leq 2$

Para iniciarmos esta seção daremos o seguinte resultado de não existência:

Teorema 2.2. *Suponha $\lambda \geq 1/4$. Então, $u = 0$ é a única solução do problema em questão.*

Demonstração.

Suponhamos que, $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ seja uma solução do problema em questão. Daí, multiplicando a primeira equação por u e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 + \lambda\phi u^2 - |u|^{p+1} dx = 0. \tag{2.10}$$

Pela definição de ϕ, temos também

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(-\Delta\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 dx \tag{2.11}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta\phi)|u| dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi.\nabla|u| dx$$

como, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young,

$$\nabla\phi.\nabla|u| \leq |\nabla u||\nabla\phi| = (\sqrt{2}|\nabla u|)(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla\phi|) \leq |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}|\nabla\phi|^2$$

temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}|\nabla\phi|^2 dx. \tag{2.12}$$

Portanto, analisando (2.10), com (2.11) e (2.12). Tendo também em mente que $\lambda \geq 1/4$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 + \lambda|\nabla\phi|^2 - |u|^{p+1} dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} u^2 + |u|^3 - |u|^{p+1} dx.$$

Note que, como $1 < p \leq 2$, a função $f(x) = x^2 + |x|^3 - |x|^{p+1}$ é não-negativa e, se anula somente em $x = 0$. Donde,

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^3} u^2 + |u|^3 - |u|^{p+1} dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} u^2 + |u|^3 - |u|^{p+1} dx = 0$$

$$\Rightarrow u^2 + |u|^3 - |u|^{p+1} = 0 \quad q.s. \Rightarrow u = 0 \quad q.s.$$

ou seja, $u = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. ■

É interessante observar que o resultado acima é o único, neste capítulo, que não envolve exclusivamente funções radiais.

A partir de agora, começaremos a distinguir os casos $p = 2$ e $1 < p < 2$; desta forma conseguiremos cumprir nossa tabela.

Teorema 2.3. *Suponhamos $1 < p < 2$. Então, para qualquer $\lambda \in (0, 1/4)$, temos:*

- $\inf I > -\infty$.
- *I satisfaz a condição (PS).*

Demonstração.

Primeiramente, façamos algumas estimativas. Pelo mesmo argumento do teorema anterior, temos, para $C_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$, que

$$C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx = C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta\phi)|u| dx = C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi . \nabla|u| dx$$

como, pela desigualdade de Young,

$$C_\lambda (\nabla\phi . \nabla|u|) \leq \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|\nabla u|\Big)(C_\lambda \sqrt{2}|\nabla\phi|) \leq \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{8}|\nabla\phi|^2$$

temos que,

$$C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{8}|\nabla\phi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx \tag{2.13}$$

Usando (2.13), na definição de I, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} + \Big(\frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2\Big) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 + C_\lambda |u|^3 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(u) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 + C_\lambda |u|^3 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx$$

Agora, definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C_\lambda |x|^3 - \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}.$$

Daí, sendo $p \in (1,2)$, f é positiva para $x \to 0^+$ e para $x \to \infty$. Definamos $m = \min f$. Suponhamos $m < 0$. Então, o conjunto $\{x > 0; f(x) < 0\}$ é da forma (α, β), com $\alpha > 0$. Note que, α, β e m são constantes que dependem exclusivamente de p e de λ. Assim, para $u \in H^1_r(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} + \Big(\frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2\Big) \end{aligned}$$

usando (2.13), temos

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} + \Big(\frac{1}{4}u^2 + C_\lambda |u|^3\Big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}u^2 + C_\lambda |u|^3 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} f(u) dx
\end{aligned}$$

donde temos,

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx + \int_A f(u) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx + m|A|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$I(u) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u^2 dx + m|A| \tag{2.14}$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R}^3; u(x) \in (\alpha, \beta)\}$.

Agora, diante destas estimativas, podemos começar a demonstração. Provemos a primeira tese. Suponhamos, por contradição, a existência de $(u_n) \subset H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $I(u_n) \to -\infty$. É imediato, que (u_n) não é limitada na norma. Para cada u_n, podemos definir $A_n = \{x \in \mathbb{R}^3; u_n(x) \in (\alpha, \beta)\}$. Definamos também, $\rho_n = \sup\{|x|; x \in A_n\}$, note que $\rho_n > 0$ quando $A_n \neq \emptyset$. Estamos considerando que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que, $I(u_n) < 0$ para n suficientemente grande, temos, por (2.14), que

$$0 > I(u_n) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4}|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{4}u_n^2 + \frac{\lambda}{8}\phi u_n^2 dx + m|A_n| \geq \frac{1}{4}\|u_n\|^2 + m|A_n|$$

$$\Rightarrow -m|A_n| \geq \frac{1}{4}\|u_n\|^2$$

$$\Rightarrow |m||A_n| \geq \frac{1}{4}\|u_n\|^2 \tag{2.15}$$

Desta forma, $|A_n| \to \infty$. Agora, lembrando que,

$$|u(x)| \leq C_0 |x|^{-1} \|u\|, \quad \text{para todo} \quad u \in H_r^1(\mathbb{R}^3) \tag{2.16}$$

onde C_0 é constante positiva. Para demonstração deste fato, vela **Teorema B.21**. Agora, tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|x_n\| = \rho_n$. Claramente $u_n(x_n) =$

$\alpha > 0$, visto que as funções de $H^1_r(\mathbb{R}^3)$ são contínuas e para $x \in \mathbb{R}^3$ com normas grandes tais funções se aproximam de zero. Usando (2.15) e (2.16), temos

$$0 < \alpha = u_n(x_n) \leq C_0\rho_n^{-1}\|u_n\| = 2C_0\rho_n^{-1}\frac{\|u_n\|}{2} \leq 2C_0\rho_n^{-1}(|m||A_n|)^{1/2}$$

$$\frac{\alpha}{2C_0}\rho_n|m|^{-1/2} \leq |A_n|^{1/2} \Rightarrow C_1\rho_n \leq |A_n|^{1/2} \tag{2.17}$$

onde $C_1 = \alpha|m|^{-1/2}/2C_0$.

Por outro lado, pelo mesmo argumento usado para (2.15), temos

$$\frac{\lambda}{8}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq |m||A_n|$$

porém, usando a expressão de ϕ dada na introdução, temos

$$\begin{aligned}
\frac{8}{\lambda}|m||A_n| &\geq \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}u_n^2(x)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi}\frac{u_n^2(y)}{|x-y|}dydx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(x)u_n^2(y)}{|x-y|}dxdy \\
&\geq \frac{1}{4\pi}\int_{A_n}\int_{A_n}\frac{u_n^2(x)u_n^2(y)}{|x-y|}dxdy \\
&\geq \frac{1}{4\pi}\int_{A_n}\int_{A_n}\frac{\alpha^4}{2\rho_n}dxdy
\end{aligned}$$

a última desigualdade em virtude de $u_n(x), u_n(y) \in (\alpha, \beta)$. Daí, temos

$$\frac{8}{\lambda}|m||A_n| \geq \frac{\alpha^4}{8\pi\rho_n}|A_n|^2$$

$$\Rightarrow C_2\rho_n \geq |A_n| \tag{2.18}$$

onde $C_2 = 64\pi|m|\lambda\alpha^4 > 0$. Donde podemos concluir que, $\rho_n \to \infty$ visto que $|A_n| \to \infty$. De (2.17) e (2.18), temos que

$$C_1\rho_n \leq |A_n|^{1/2} \leq C_2^{1/2}\rho_n^{1/2} \Rightarrow C_1\rho_n^{1/2} \leq C_2^{1/2}$$

logo ρ_n é limitada, implicando que $|A_n|$ é limitada. Desta forma, concluimos que $\inf I > -\infty$. O caso $m = 0$, fica claro pelas estimativas que fizemos. Agora, provemos que a condição de (PS) é satisfeita. Seja $(u_n) \subset H^1_r(\mathbb{R}^3)$ tal que $I'(u_n) \to 0$. Provemos que (u_n) converge fortemente. Veja que para n suficientemente grande temos:

$$I'(u_n)(u_n) \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\| \Rightarrow I'(u_n)(u_n) \leq \|u_n\| \tag{2.19}$$

Temos também, usando os mesmos argumentos do início da demonstração, que

$$\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^3dx = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi_{u_n}.\nabla|u_n|dx \Rightarrow \sqrt{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^3dx = \sqrt{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi_{u_n}.\nabla|u_n|dx$$

e, por Cauchy-Schwarz, chegamos que

$$\sqrt{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^3dx \leq \int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\lambda}|\nabla\phi_{u_n}||\nabla u_n|dx.$$

Daí, usando a desigualdade de Young e (2.11), temos

$$\sqrt{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^3dx \leq \int_{\mathbb{R}^3}\lambda\frac{|\nabla\phi_{u_n}|^2}{2}+\frac{|\nabla u_n|^2}{2}dx = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla u_n|^2}{2}+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla u_n|^2}{2}+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2dx \geq \sqrt{\lambda}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^3dx \tag{2.20}$$

Desta forma, por (2.19) e (2.20),

$$\begin{aligned}
\|u_n\| &\geq I'(u_n)(u_n) = \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+u_n^2+\lambda\phi_{u_n}u_n^2-|u_n|^{p+1}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{1}{2}u_n^2+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+\Big(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{1}{2}u_n^2+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2-|u_n|^{p+1}dx\Big)\\
&\geq \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{1}{2}u_n^2+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+\Big(\sqrt{\lambda}|u_n|^3+\frac{1}{2}u_n^2-|u_n|^{p+1}\Big)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{1}{2}u_n^2+\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+g(u_n)dx
\end{aligned}$$

onde $g(u)=\frac{1}{2}u^2+\sqrt{\lambda}|u|^3-|u|^{p+1}$. Caso (u_n) não seja limitada, temos

$$\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+g(u_n)dx$$

assim,

$$\|u_n\|\Big(1-\frac{1}{6}\|u_n\|\Big) \geq \frac{1}{3}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+g(u_n)dx$$

e,

$$\frac{1}{3}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2+g(u_n)dx \leq 0, \quad n \quad \text{grande}.$$

Diante disso, definamos $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{\lambda}|x|^3-|x|^{p+1}$. Temos que g têm as mesmas características da f da primeira parte; daí, consideremos também $m=\min g$. Então, o conjunto $\{x>0; g(x)<0\}$ é da forma (α,β) onde $\alpha>0$. Daí,

$$0 \geq \frac{1}{3}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\lambda}{2}\phi_{u_n}u_n^2dx+\int_{A_n}g(u_n)dx$$

onde $A_n = \{x \in \mathbb{R}^3; u_n(x) \in (\alpha, \beta)\}$. Donde temos,

$$0 \geq \frac{1}{3}\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\lambda}{2}\phi_{u_n} u_n^2 dx + m|A_n|$$

daí, observamos que caso $m = 0$, fica provado que (u_n) é limitada, donde consideraremos $m \neq 0$, assim temos

$$(-m)|A_n| \geq \frac{1}{3}\|u_n\|^2 \Rightarrow |A_n| \to \infty$$

e, a demonstração segue da mesma forma que na primeira parte, o que nos garante que (u_n) é limitada. Donde, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$, passando a subsequência se necessário.

Agora, deveremos observar que,

- Temos: $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ e $f \in (H_r^1(\mathbb{R}^3))'$ onde f é dada por

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^3} v u_0 dx$$

  daí, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_n u_0 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} u_0^2 dx$$

- Temos que: $f : H_r^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v . \nabla u_0 dx$$

  pertence à $(H_r^1(\mathbb{R}^3))'$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n . \nabla u_0 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 dx$$

- Note que $u_n \to u_0$ em $L^{2p}(\mathbb{R}^3)$ visto que $H_r^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ compactamente para $s \in (2, 6)$ e $p \in (1, 2)$. Sendo assim, a menos de subsequência, $u_n \to u_0$ qtp e existe $h \in L^{2p}(\mathbb{R}^3)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ qtp. Daí,

$$||u_n|^{p-1}u_n - |u_0|^{p-1}u_0| \to 0 \quad \text{q.s.}$$

$$|u_n|^{p-1}u_n, |u_0|^{p-1}u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$||u_n|^{p-1}u_n - |u_0|^{p-1}u_0| \leq |u_n|^p + |u_0|^p \leq |h|^p + |u_0|^p \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \text{qtp.}$$

  Donde, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que $\||u_n|^{p-1}u_n - |u_0|^p\|_2 \longrightarrow 0$, e consequentemente,

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p-1}u_n u_0 - |u_0|^{p+1}dx\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} ||u_n|^{p-1}u_n - |u_0|^p||u_0|dx \\ &\leq \||u_n|^{p-1}u_n - |u_0|^p\|_2\|u_0\|_2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p-1}u_n u_0 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^{p+1}dx.$$

Diante das observações anteriores, temos pelo fato de $I'(u_n)(u_0) \to 0$, visto que $I'(u_n) \to 0$, que

$$0 \longleftarrow I'(u_n)(u_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n.\nabla u_0 + u_n u_0 + \lambda\phi_{u_n} u_n u_0 - |u_n|^{p-1}u_n u_0 dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + u_0^2 + \lambda\phi_0 u_0^2 - |u_0|^{p+1}dx$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + u_0^2 + \lambda\phi_0 u_0^2 - |u_0|^{p+1}dx = 0$$

logo,

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^{p+1} - \lambda\phi_0 u_0^2 dx.$$

Por outro lado, como $I'(u_n)(u_n) \to 0$, pois, (u_n) é limitada e $I'(u_n) \to 0$, temos

$$I'(u_n)(u_n) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \lambda\phi_{u_n} u_n^2 - |u_n|^{p+1}dx \to 0.$$

portanto,

$$\lim\Big(\|u_n\|^2 + \lambda\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1}dx\Big) = 0.$$

Daí, observando as propriedades do termo não local e que $H_r^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ compactamente para $s \in (2,6)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \lambda\phi_{u_n} u_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \lambda\phi_0 u_0 dx$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1}dx \to \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^{p+1}dx$$

desta forma,

$$\lim \|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^{p+1}dx - \int_{\mathbb{R}^3} \lambda\phi_0 u_0^2 dx.$$

Assim, temos $\|u_n\| \to \|u\|$, donde $u_n \to u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$, visto que já tinhamos a convergência fraca. O que conclui nossa demonstração. ■

Como consequência do teorema anterior, temos:

Corolário 2.4. *Suponhamos $p \in (1,2)$ e $\lambda \in (0,1/4)$. Então, existem, pelo menos, duas soluções positivas para o problema* (0.1).

Demonstração.

Sendo $\lambda > 0$, temos que $\inf I < 0$. Note também, que do teorema anterior, I é limitada inferiormente e satisfaz (PS). Considere $c = \inf I$, temos que existe $(u_n) \subset H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $I(u_n) \to c$. Donde, pelo princípio variacional de Ekeland, existe $(v_n) \subset H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\|v_n - u_n\| < \frac{1}{n} \quad , \quad I'(v_n) \to 0 \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c$$

desta forma, como (PS) é satisfeita, temos que existe $v \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $v_n \to v$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$(a menos de subsequência). Donde, $I(v) = c$ e $I'(v) = 0$. Daí, v é solução não trivial do problema. Por outro lado, como:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx + \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}C\|u\|^{p+1}$$

daí, como $p \in (1,2)$, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que,

$$I|_{\partial B_\rho} > \alpha \quad \text{e} \quad v \in H_r^1(\mathbb{R}^3) - \overline{B}_\rho.$$

Assim, via Passo da Montanha, existe um valor crítico $d \geq \alpha$ para I, consequentemente, uma outra solução para o problema em questão. ∎

Para o caso $p = 2$, não temos uma informação completa do problema. Por exemplo, não sabemos se a condição de Palais-Smale é satisfeita. Porém, sabemos algo sobre a limitação do funcional energia I. Temos o lema,

Lema 2.5. *Para $\lambda \in (0,1/4)$ e $p = 2$, I é não limitado.*

Demonstração.

Sejam $u \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ fixo, $M > 0$ também fixo e $t > 0$ parâmetro. Definamos, $v_t(x) = Mt^2u(tx)$. Daí como, por mudança de variáveis, temos

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_t(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^2t^6|\nabla u(tx)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^2t^3|\nabla u|^2 dx$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} v_t^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^2t^4u^2(tx) dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^2tu^2 dx$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |v_t|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^{p+1}t^{2p+2}|u(tx)|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^{p+1}t^{2p-1}|u|^{p+1} dx.$

Agora, obsevando que, $\phi_{v_t}(x) = M^2t^2\phi_u(tx)$ temos que

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_t}(x)v_t^2(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} M^4t^3\phi_u u^2 dx$, pois, via mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_t}(x)v_t^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} M^2t^2\phi_u(tx)M^2t^4u^2(tx)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} M^4t^6\phi_u(tx)u^2(tx)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} M^4t^3\phi_u u^2 dx.
\end{aligned}$$

Donde, observamos que para $p = 2$,

$$I(v_t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}M^2t^3|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}M^2tu^2 + \frac{\lambda}{4}t^3M^4\phi_u u^2 - \frac{1}{3}M^3t^3|u|^3dx.$$

Consideremos que M seja tal que,

$$\frac{1}{2}M^2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2dx \leq \frac{1}{12}M^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx$$

e, $\lambda \in (0, 1/4)$, tal que

$$\frac{\lambda}{4}M^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2dx < \frac{1}{12}M^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
I(v_t) &\leq \frac{1}{12}M^3t^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx + \frac{1}{2}M^2t\int_{\mathbb{R}^3} u^2dx + \frac{1}{12}M^3t^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx - \frac{1}{3}M^3t^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx \\
&= -\frac{1}{6}M^3t^3\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3dx + \frac{1}{2}M^2t\int_{\mathbb{R}^3} u^2dx \longrightarrow -\infty \quad \text{quando } t \to \infty
\end{aligned}$$

Assim,

$$I(v_t) \longrightarrow -\infty.$$

$\blacksquare$

Para concluirmos a tabela, demonstremos o último resultado do capítulo:

Proposição 2.2. *Suponhamos que* $p \in (1, 2]$ *e* $\lambda \geq 1/4$. *Então,* $\inf I = 0$.

Demonstração.

Caso $p \in (1,2)$, suponha por contradição, $\inf I < 0$. Usando os mesmos argumentos do **Corolário 2.4**, temos a existência de 2 soluções não triviais. O que contradiz o **Teorema 2.2**. Daí, $\inf I = 0$.

Para o caso $p = 2$. Suponhamos $\inf I < 0$, logo existe $u \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{1}{3}|u|^3 dx < 0.$$

Como também,

- $|u|^{q+1} \to |u|^3 \quad$ qtp quando $q \to 2$.
- $|u|^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^3), q \in (1,3)$.
- $|u|^{q+1} \leq |u|^2 + |u|^4 \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Temos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{q \to 2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx$$

logo,

$$\lim_{q \to 2} -\frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{q+1} dx = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx$$

e,

$$\lim_{q \to 2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} dx < 0$$

logo, existe $q < 2$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\lambda}{4}\phi u^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} dx < 0$$

donde chegamos à um absurdo. Visto que, $\inf I = 0$ para $q \in (1,2)$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

O problema Schrödinger-Poisson-Slater para potencial não constante

Este capítulo é destinado ao estudo da equação Schrödinger-Poisson-Slater para potencial não constante. Sendo mais exato, daremos um resultado de GSS(Ground State Solution) para o caso subcrítico da equação Schrödinger-Poisson-Slater, com potencial assintóticamente constante no infinito. Temos como base o artigo de A. Azzollini e A. Pomponio [3]. O problema em foco é (0.2), o qual é dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u &= |u|^{p-1}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta\phi &= u^2, \quad \lim_{|x|\to\infty}\phi(x) = 0 \end{cases}$$

onde $3 < p < 5$ e V satisfaz:

(V1) $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

(V2) $\infty > V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y) \geq V(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, e a desigualdade é estrita em domínios de medida não-nula.

(V3) Existe $C > 0$, tal que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \geq C\|u\|^2.$$

Lembremos que o funcional energia deste problema é $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Como os lemas essenciais para este capítulo já foram demonstrados no **Capítulo 1**, podemos ir direto para os teoremas. Então,

Teorema 3.1. *Se V satisfaz $(V1)-(V3)$ então, o problema em questão tem GSS para qualquer $p \in (3,5)$.*

Antes demonstrar o teorema, precisamos de algumas observações. Para tal, consideremos $(u_n) \subset \mathcal{N}$, tal que

$$I(u_n) \to c_V.$$

Agora, definamos o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx,$$

onde podemos ver que, $I(u) = J(u)$, para todo $u \in \mathcal{N}$, visto que $I(u) = J(u) + \frac{1}{p+1} G(u)$, lembrando que $G(u) = I'(u)(u)$. Temos também que, existe $K > 0$ tal que

$$\infty > K \geq I(u_n) = J(u_n) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) C\|u_n\|^2 > 0$$

pelo fato de $(I(u_n))$ ser limitada e pela propriedade $(V3)$. Donde, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Daí, existe $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3)$$

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado e } 1 \leq s < 6$$

Para continuarmos, definamos a medida

$$\nu_n(\Omega) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\Omega} \phi_{u_n} u_n^2 dx.$$

Temos o lema, que será importante num ponto específico adiante:

Lema 3.2. *Se V satisfaz $(V1)-(V3)$, então $c_V < c_\infty =: c_{V_\infty}$.*

Demonstração.

Como sabemos, pelo capítulo anterior, existe $(w, \phi_w) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ GSS para o problema,

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\infty u + \phi u &= |u|^{p-1}u, \\ -\Delta \phi &= u^2, \end{cases}$$

Consideremos $t_w > 0$ tal que $t_w w \in \mathcal{N}_V$. Daí,

$$c_\infty = I_\infty(w) \geq I_\infty(t_w w) = I(t_w w) + \int_{\mathbb{R}^3} (V_\infty - V(x))|t_w w|^2 dx > c_V$$

como queriamos demonstrar. ■

Provemos o seguinte teorema, que será fundamental na demonstração do teorema acima citado.

Teorema 3.3. *Para qualquer $\delta > 0$, existe $\widetilde{R} > 0$ tal que para todo $n \geq \widetilde{R}$, $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\int_{|x|>\widetilde{R}} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx < \delta.$$

Demonstração.

Suponhamos, por contradição, a existência de $\delta_0 > 0$ e, uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{|x|>n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx \geq \delta_0.$$

Definamos,

$$\rho_n(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 dx$$

e, para $r > 0$, seja $A_r = \{x \in \mathbb{R}^3; r \leq |x| \leq r+1\}$.

Afirmação 1: Para todo $\mu, R > 0$, existe $r > R$ tal que,

$$\rho_k(A_r) < \mu, \quad \text{para todo } k \text{ suficientemente grande.} \tag{3.1}$$

Caso tal fato não ocorresse, existiria $\widehat{\mu} > 0$, $\widehat{R} \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \widehat{R}$, existe $p(m)$ onde para todo $k \geq p(m)$

$$\rho_k(A_m) \geq \widehat{\mu}. \tag{3.2}$$

Observe que, podemos tomar a sequência $(p(m))_m$ não-decrescente. Além disso, como existe $\overline{C} > 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq \overline{C}\|u\|^4, \quad \text{para todo} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^3)$$

temos a existência de $\overline{C} > 0$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq \widehat{R}$, existirá $u_{n(m)=:n}$ tal que

$$\begin{aligned}
\overline{C}\|u_n\|^2(1+\|u_n\|^2) &\geq \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq \rho_n(B_m - B_{\widehat{R}}) \\
&= \rho_n(A_{m-1} \cup A_{m-2} \cup ... \cup A_{\widehat{R}}) \\
&= \sum_{j=1}^{m-\widehat{R}} \rho_n(A_{m-j}) \geq (m-\widehat{R})\widehat{\mu}
\end{aligned}$$

onde (3.2) é usada na última desigualdade. Daí, chegamos numa contradição, pois, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim, à **Afirmação 1** fica demonstrada.

Pelo **Lema 3.2**, temos a existência de $\mu > 0$ pequeno, tal que

$$c(V_\infty - \mu) < c(V_\infty) \tag{3.3}$$

por $(V2)$, temos também que, existe $R_\mu \in \mathbb{N}$ tal que

$$V(x) \geq V_\infty - \mu > 0, \quad \text{q.s.} \quad |x| \geq R_\mu \tag{3.4}$$

para $r > R_\mu$, passando a subsequência, temos

$$\rho_k(A_r) < \mu, \quad k \geq 1. \tag{3.5}$$

Agora, observemos que

$$\mu > \rho_k(A_r) \geq \min(1, 1/V_\infty) \int_{A_r} |\nabla u_k|^2 + V_\infty u_k^2 dx + \int_{A_r} \phi_{u_k} u_k^2 dx \geq 0$$

donde,

$$\int_{A_r} |\nabla u_k|^2 + V_\infty u_k^2 dx = O(\mu) \tag{3.6}$$

assim como,

$$\int_{A_r} \phi_{u_k} u_k^2 dx = O(\mu) \tag{3.7}$$

desta forma, observando que

$$\int_{A_r} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx = \int_{A_r} |\nabla u_k|^2 + V_\infty u_k^2 dx + \int_{A_r} (V(x) - V_\infty) u_k^2 dx.$$

também que, por $(V2)$ e (3.4)

$$\Big| \int_{A_r} (V(x) - V_\infty) u_k^2 dx \Big| \leq \int_{A_r} (V_\infty - V(x)) u_k^2 dx \leq \mu \int_{A_r} u_k^2 dx \leq \mu^2$$

$$\Rightarrow \int_{A_r} (V(x) - V_\infty) u_k^2 dx = O(\mu) \tag{3.8}$$

temos, por (3.6) e (3.8), que

$$\int_{A_r} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx = O(\mu). \tag{3.9}$$

Para dar continuidade a demonstração, consideremos $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\chi = 1$ em B_r, $\chi = 0$ em B_{r+1}^c, $0 \leq \chi \leq 1$ e $|\nabla \chi| \leq 2$. Definamos $v_k = \chi u_k$ e $w_k = (1-\chi) u_k$. Donde, vemos que

(I) $\displaystyle\int_{A_r} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 dx = O(\mu)$

(II) $\displaystyle\int_{A_r} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx = O(\mu)$

(III) $\displaystyle\int_{A_r} |v_k|^{p+1} dx = O(\mu)$

(IV) $\displaystyle\int_{A_r} |w_k|^{p+1} dx = O(\mu)$.

De fato, como $V|_{A_r} > 0$ para r grande, por $(V2)$, temos

$$0 \leq \int_{A_r} V(x) v_k^2 dx, \int_{A_r} V(x) w_k^2 dx \leq \int_{A_r} V(x) u_k^2 dx = O(\mu)$$

e,

$$0 \leq \int_{A_r} |\nabla v_k|^2 dx, \int_{A_r} |\nabla w_k|^2 dx \leq \int_{A_r} |\nabla u_k|^2 dx + O(\mu)$$

temos que (I) e (II) ficam provadas. Observemos também que, por (3.6) e pelas imersões de Sobolev,

$$\int_{A_r} |u_k|^{p+1} dx = O(\mu).$$

desta forma, como

$$0 \leq \int_{A_r} |v_k|^{p+1} dx, \int_{A_r} |w_k|^{p+1} dx \leq \int_{A_r} |u_k|^{p+1} dx = O(\mu)$$

(III) e (IV) ficam provadas. Sendo assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx + O(\mu) \tag{3.10}$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_k|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |v_k|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}^3} |w_k|^{p+1} dx + O(\mu) \tag{3.11}$$

Recordemos que, estamos supondo

$$\int_{|x|>k} |\nabla u_k|^2 + u_k^2 dx \geq \delta_0$$

donde,

$$\int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + u_k^2 dx \geq \delta_0$$

e, assim

$$\int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + t u_k^2 dx \geq \delta_t = t\delta_0 > 0, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Daí, podemos ver que, por (II),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx &= \int_{B_r^c} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx \\
&= \int_{A_r} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx + \int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx \\
&= O(\mu) + \int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx
\end{aligned}$$

como, por (3.4),

$$\int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 dx \geq \int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + (V_\infty - \mu) u_k^2 dx = \int_{|x|>r+1} |\nabla u_k|^2 + t u_k^2 dx \geq \delta_t$$

onde $t = V_\infty - \mu$, usando o que recordamos anteriormente. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx \geq O(\mu) + \delta_t. \tag{3.13}$$

Além disso, podemos observar que:

$$u_k = v_k + w_k \quad \text{e} \quad v_k w_k = \chi(1-\chi) u_k^2 \geq 0$$

donde, usando o princípio do máximo,

$$-\Delta\psi = v_k w_k \geq 0 (\Rightarrow \psi \geq 0), \quad -\Delta\phi_{v_k} = v_k^2 \quad \text{e} \quad -\Delta\phi_{w_k} = w_k^2$$

$$\Rightarrow (v_k + w_k)^2 = v_k^2 + 2 v_k w_k + w_k^2 = -\Delta(\phi_{v_k} + \phi_{w_k} + 2\psi) = -\Delta(\phi_{v_k + w_k})$$

$$\Rightarrow \phi_{v_k + w_k} = \phi_{v_k} + \phi_{w_k} + 2\psi \geq \phi_{v_k} + \phi_{w_k}$$

$$\Rightarrow \phi_{u_k} u_k^2 \geq (\phi_{v_k} + \phi_{w_k})(v_k + w_k)^2 = (\phi_{v_k} + \phi_{w_k})(v_k^2 + 2 v_k w_k + w_k^2) \geq \phi_{v_k} v_k^2 + \phi_{w_k} w_k^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_k} u_k^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_k} v_k^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_k} w_k^2 dx. \tag{3.14}$$

Daí, por (3.10) e (3.14), temos

$$J(u_k) \geq J(v_k) + J(w_k) + O(\mu) \tag{3.15}$$

e, consequentemente, como

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x)w_k^2 dx \geq O(\mu) + \delta_t$$

temos,

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x)w_k^2 dx = O(\mu) + \delta'$$

onde $\delta' = \delta_t$. Assim,

$$J(w_k) \geq O(\mu) + \delta'$$

e, consequentemente,

$$J(u_k) \geq J(v_k) + J(w_k) + O(\mu) \geq J(v_k) + C\delta' + O(\mu)$$

para algum $C > 0$, daí,

$$J(u_k) - C\delta' \geq J(v_k) + O(\mu). \tag{3.16}$$

E, também como

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x)v_k^2 dx \geq \int_{A_r} |\nabla v_k|^2 + V(x)v_k^2 dx = O(\mu)$$

temos que,

$$J(v_k) \geq O(\mu)$$

assim, por (3.15),

$$J(u_k) \geq J(w_k) + O(\mu). \tag{3.17}$$

Lembremos que, $G : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, é definida por

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 + \phi_u u^2 - |u|^{p+1} dx$$

e, que para $u \in \mathcal{N}$, temos $G(u) = 0$. Desta forma, usando (3.10), (3.11) e (3.14), temos que

$$0 = G(u_k) \geq G(v_k) + G(w_k) + O(\mu).$$

Neste momento, faremos distinção de 3 casos.

1ºCaso. Existe uma subsequência, tal que $G(v_k) \leq 0$. Pelo **Lema 1.3**, temos para todo $k \in \mathbb{N}$, $t_k > 0$ tal que $t_k v_k \in \mathcal{N}$, e

$$\int_{\mathbb{R}^3} t_k^2 |\nabla v_k|^2 + t_k^2 V(x) v_k^2 + t_k^4 \phi_{v_k} v_k^2 - t_k^{p+1} |v_k|^{p+1} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 + t_k^2 \phi_{v_k} v_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} t_k^{p-1} |v_k|^{p+1} dx \tag{3.18}$$

como $G(v_k) \leq 0$, temos $t_k^{p-1} G(v_k) \leq 0$, donde

$$t_k^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 + \phi_{v_k} v_k^2 - |v_k|^{p+1} dx \leq 0$$

$$\Rightarrow t_k^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 dx + t_k^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_k} v_k^2 dx \leq t_k^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |v_k|^{p+1} dx. \tag{3.19}$$

Logo, fazendo (3.19) − (3.18), temos

$$(t_k^{p-1} - 1) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 dx + (t_k^{p-1} - t_k^2) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_k} v_k^2 dx \leq 0$$

e, como $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_k|^2 + V(x) v_k^2 dx, \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_k} v_k^2 dx \geq 0$, temos que $t_k \leq 1$. Portanto, para todo $k \geq 1$, usando (3.16) e que $J(u_k) = c_V + o_k(1)$, temos

$$c_V \leq I(t_k v_k) = J(t_k v_k) \leq J(v_k) \leq J(u_k) - C\delta' + O(\mu) = c_V - C\delta' + o_k(1) + O(\mu)$$

chegando assim, a uma contradição.

2ºCaso. Existe uma subsequência tal que $G(w_k) \leq 0$. Seja $(\eta_k) \subset \mathbb{R}$, tal que $\eta_k w_k \in \mathcal{N}$. Pelo mesmo argumento do **Caso 1**, temos $\eta_k \leq 1$. Definamos $\overline{w}_k = \eta_k w_k$. Seja também $(t_k) \subset \mathbb{R}$, tal que $t_k \overline{w}_k \in \mathcal{N}_{V_\infty - \mu}$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + (V_\infty - \mu) \overline{w}_k^2 + \phi_{\overline{w}_k} \overline{w}_k^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + V(x) \overline{w}_k^2 + \phi_{\overline{w}_k} \overline{w}_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + (V_\infty - \mu) \overline{w}_k^2 + \phi_{\overline{w}_k} \overline{w}_k^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1} dx$$

como também, $t_k \overline{w}_k \in \mathcal{N}_{V_\infty - \mu}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + (V_\infty - \mu) \overline{w}_k^2 + t_k^2 \phi_{\overline{w}_k} \overline{w}_k^2 dx = t_k^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1} dx$$

donde, multiplicando a última desigualdade por t_k^{p-1} e subtraindo a identidade acima, temos

$$(t_k^{p-1} - 1) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + (V_\infty - \mu) \overline{w}_k^2 dx + (t_k^{p-1} - t_k^2) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{w}_k} \overline{w}_k^2 dx \leq 0$$

assim,

$$t_k \leq 1.$$

Daí, concluimos que,

$$\begin{aligned}
c(V_\infty - \mu) &\leq I(t_k\overline{w}_k)\\
&= \frac{t_k^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + (V_\infty - \mu)\overline{w}_k^2 dx + \frac{t_k^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{w}_k}\overline{w}_k^2 dx - \frac{t_k^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1}dx\\
&\leq \frac{t_k^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + V(x)\overline{w}_k^2 dx + \frac{t_k^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{w}_k}\overline{w}_k^2 dx - \frac{t_k^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1}dx
\end{aligned}$$

agora, multiplicando a expressão

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + V(x)\overline{w}_k^2 + \phi_{\overline{w}_k}\overline{w}_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\overline{w}_k|^{p+1}dx$$

por $\Big(-\frac{t_k^{p+1}}{p+1}\Big)$, e substituindo na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
c(V_\infty - \mu) &\leq \Big(\frac{t_k^2}{2} - \frac{t_k^{p+1}}{p+1}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{w}_k|^2 + V(x)\overline{w}_k^2 dx + \Big(\frac{t_k^4}{4} - \frac{t_k^{p+1}}{p+1}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{w}_k}\overline{w}_k^2 dx\\
&\leq J(\overline{w}_k) = J(\eta_k w_k) \leq J(w_k) \leq J(u_k) + O(\mu) = c_V + o_k(1) + O(\mu)
\end{aligned}$$

mas, $\mu \to 0$ e $k \to \infty$, donde, pelo **Lema 1.7**, temos

$$c_\infty = c(V_\infty) \leq c_V. \quad \text{Absurdo. Pois, pelo } \textbf{Lema 3.2}, \ c_V < c_\infty.$$

3ºCaso. Existem subsequências tais que $G(v_k) > 0$ e $G(w_k) > 0$.

Temos que, $G(w_k) = O(\mu)$ e $G(v_k) = O(\mu)$. Seja $(\eta_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $\eta_k w_k \in \mathcal{N}$. Supondo $\lim \eta_k = \eta_0 > 1$, logo

$$\begin{aligned}
O(\mu) &= G(w_k) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x)w_k^2 + \phi_{w_k}w_k^2 - |w_k|^{p+1}dx\\
&= \Big(1 - \frac{1}{\eta_k^{p-1}}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x)w_k^2 dx + \Big(1 - \frac{1}{\eta_k^{p-3}}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_k}w_k^2 dx
\end{aligned}$$

visto que,

$$G(\eta_k w_k) = 0 \Rightarrow \eta_k^2\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x)w_k^2 dx + \eta_k^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_k}w_k^2 dx - \eta_k^{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |w_k|^{p+1}dx = 0$$

e, como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w_k|^{p+1} dx = \frac{1}{\eta_k^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx \frac{1}{\eta_k^{p-3}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_k} w_k^2 dx.$$

Tendo justificado tal fato, podemos continuar. Segue da identidade,

$$\begin{aligned} O(\mu) &= \Big(1 - \frac{1}{\eta_k^{p-1}}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx + \Big(1 - \frac{1}{\eta_k^{p-3}}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_k} w_k^2 dx \\ &\geq \Big(1 - \frac{1}{\eta_k^{p-1}}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_k|^2 + V(x) w_k^2 dx = O(\mu)$$

o que, de fato, é uma contradição com (3.13). Para o caso de $\eta_k \leq 1 + O(\mu)$, basta usar os mesmos argumentos do **2ºcaso**.

■

Demonstração. (**do Teorema 3.1**)

Pelo teorema provado acima, temos: para todo $\delta > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{H^1(B_r^c)} < \delta$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Daí, como

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3)$$

e,

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado para } 1 \leq s < 6.$$

Temos que, para $s \in [2, 6)$: para todo $\delta > 0$, existe $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|u_n - \overline{u}\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} &= \|u_n - \overline{u}\|_{L^s(B_r)} + \|u_n - \overline{u}\|_{L^s(B_r^c)} \\ &< \delta + \|u_n\|_{L^s(B_r^c)} + \|\overline{u}\|_{L^s(B_r^c)} \\ &\leq \delta + C(\|u_n\|_{H^1(B_r^c)} + \|\overline{u}\|_{H^1(B_r^c)}). \end{aligned}$$

Desde que, $\|u_n\|_{H^1(B_r^c)}, \|\overline{u}\|_{H^1(B_r^c)} < \delta$, pois, $\liminf \|u_n\|_{H^1(B_r^c)} \geq \|\overline{u}\|_{H^1(B_r^c)}$, tem-se,

$$\|u_n - \overline{u}\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \leq \delta + 2\delta C = (1 + 2C)\delta$$

implicando que,

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\mathbb{R}^3),\ 2 \leq s < 6. \tag{3.20}$$

Além disso, pelas propriedades do termo não local, sabemos que:

$$\phi_{u_n} \to \phi_{\overline{u}} \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{3.21}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{u}} \overline{u}^2 dx \tag{3.22}$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n \psi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{u}} \overline{u} \psi dx, \quad \text{para todo } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Como $I(u_n) \to c_V$, podemos supor [28] que (u_n) é uma sequência (PS) para $I|_{\mathcal{N}}$ e, consequentemente, (u_n) é (PS) para I. Assim, pelas estimativas acima e usando argumento análogo ao feito no **Teorema 2.4**, temos $I'(u) = 0$. Agora, observemos que, como $(u_n) \subset \mathcal{N}$ pelo **Lema 1.3**, temos $(\|u_n\|_{p+1})$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. Daí, como consequência de (3.20), $\overline{u} \neq 0$ e, então $\overline{u} \in \mathcal{N}$. Finalmente, pelas mesmas observações feitas tem-se

$$c_V \leq I(\overline{u}) \leq \liminf I(u_n) = c_V$$

portanto, $(\overline{u}, \phi_{\overline{u}})$ é GSS do problema (0.2). Como queriamos demonstrar.

■

Para finalizarmos o capítulo, mostraremos que o resultado provado acima, não é, de fato, válido para o caso crítico. Com efeito, mostraremos que o problema (0.3), dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u &= u^5, \\ -\Delta \phi &= u^2, \end{cases}$$

não tem, necessariamente, solução não trivial.

Teorema 3.4. *Suponhamos que V satisfaz:*

$(V4)$ $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$(V5)$ $0 < C_3 \leq V(x) \leq C_4, \quad x \in \mathbb{R}^3$

$(V6)$ $0 \leq 2V(x) + (\nabla V(x)|x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$

Seja $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução do problema (0.3). *Então, $u = \phi = 0$.*

Demonstração.

Primeiramente, note que, se $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução do problema (0.3), então (u, ϕ) satisfaz a identidade de Pohozaev, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + 3V(x)u^2 + (\nabla V(x)|x)u^2 + \frac{5}{2}\phi u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx.$$

Multiplicando a primeira equação do problema por u e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx$$

por outro lado, multiplicando a segunda equação do problema por ϕ e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi u^2 dx$$

juntando as três últimas identidades temos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} [2V(x) + (\nabla V(x)|x)]u^2 dx + \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 dx = 0$$

donde, segue, pelas hipóteses dadas à V, que

$$[2V(x) + (\nabla V(x)|x)]u^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla \phi|^2 = 0.$$

Portanto,

$$\phi = u = 0.$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

O problema Schrödinger-Poisson-Slater com perturbação

Este capítulo, assim como o anterior, tem como base [3], ele é destinado ao estudo da equação Schrödinger-Poisson-Slater com perturbação. Sendo mais exato, daremos resultados de GSS para um caso crítico da equação Schrödinger-Poisson. O problema em foco é (0.4), o qual é dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u &= |u|^{p-1}u + u^5, \\ -\Delta \phi &= u^2, \end{cases}$$

onde $3 < p < 5$ e V satisfaz as propriedades $(V1)-(V3)$ exibidas no início do **Capítulo 3**. Lembrando que o funcional energia para o problema é $I_* : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$I_*(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx.$$

Diferente dos problemas anteriores, faremos num mesmo capítulo os casos potencial constante e não constante. Primeiro, faremos o caso potencial constante e, depois o caso não constante. Vale destacar, que estaremos considerando,

$$c^* = \inf_{u \in \mathcal{N}^*} I_*(u).$$

Iniciemos o capítulo com o seguinte lema:

Lema 4.1. *A desigualdade:*

$$c^* < \frac{1}{3}S^{3/2}$$

é válida.

Demonstração.

Consideremos uma função de Talenti $u_\varepsilon \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, definida por

$$u_\varepsilon := C_\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/4}}{(\varepsilon + |x|^2)^{1/2}}$$

onde $C_\varepsilon > 0$ é a constante normalizada (ver [27]). Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que existe $R > 0$ com,

$$\varphi|_{B_R} = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{e} \quad supt\varphi \subset B_{2R}.$$

Definamos também, $w_\varepsilon := u_\varepsilon \varphi$ e $v_\varepsilon := \frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_6}$. Usando as estimativas dadas em [8], temos

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = S + O(\varepsilon^{1/2}) \tag{4.1}$$

e, para $s \in [2, 6)$,

$$\|v_\varepsilon\|_s^s = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{s}{4}}), & \text{se} \quad s \in [2,3) \\ O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}|ln\varepsilon|), & \text{se} \quad s = 3 \\ O(\varepsilon^{\frac{6-s}{4}}), & \text{se} \quad s \in (3,6). \end{cases} \tag{4.2}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que $t_\varepsilon v_\varepsilon \in \mathcal{N}^*$. Afirmamos que, (t_ε) é limitada inferiormente por uma constante positiva. De fato, caso contrário, existiria (ε_n) tal que $\lim t_{\varepsilon_n} = 0$ e, consequentemente,

$$0 < c^* \leq \lim I_*(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) = 0$$

visto que, usando o **Lema 1.3**, (4.1) e (4.2), temos

$$\begin{aligned} 0 \leq I_*(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) &= \frac{t_{\varepsilon_n}^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 + v_{\varepsilon_n}^2 dx + \frac{t_{\varepsilon_n}^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_{\varepsilon_n}} v_{\varepsilon_n}^2 dx - \frac{t_{\varepsilon_n}^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |v_{\varepsilon_n}|^{q+1} dx - \frac{t_{\varepsilon_n}^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_n}^6 dx \\ &\leq \frac{t_{\varepsilon_n}^2}{2}(\|\nabla v_{\varepsilon_n}\|_2^2 + \|v_{\varepsilon_n}\|_2^2) + \frac{t_{\varepsilon_n}^4}{4}C'\|v_{\varepsilon_n}\|^4 - \frac{t_{\varepsilon_n}^{q+1}}{q+1}\|v_{\varepsilon_n}\|_{q+1}^{q+1} - \frac{t_{\varepsilon_n}^6}{6}\|v_{\varepsilon_n}\|_6^6 \\ &\leq \frac{t_{\varepsilon_n}^2}{2}(S + O(\varepsilon_n^{1/2})) + \frac{t_{\varepsilon_n}^4}{4}C'(S + O(\varepsilon_n^{1/2}))^2 - \frac{t_{\varepsilon_n}^{q+1}}{q+1}O(\varepsilon_n^{\frac{5-q}{4}}) \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Assim,

$$\lim I_*(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Afirmação 1: Para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno,

$$t_\varepsilon \leq (\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2 dx)^{1/4}.$$

De fato, seja $\gamma_\varepsilon(t) := I_*(tv_\varepsilon)$ e $r_\varepsilon := (\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2 dx)^{1/4}$. Daí, por (4.1) e (4.2), (r_ε) é limitada inferiormente por uma constante positiva. Como também, $t_\varepsilon v_\varepsilon \in \mathcal{N}^*$, temos $\gamma_\varepsilon^{'}(t_\varepsilon) = 0$, pois, para $t > 0$

$$\gamma_\varepsilon^{'}(t) = \frac{t^2}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2 dx + \frac{t^4}{t} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_\varepsilon} v_\varepsilon^2 dx - \frac{t^{q+1}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |v_\varepsilon|^{q+1} dx - \frac{t^6}{t} \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon^6 dx$$

e, consequentemente,

$$\gamma_\varepsilon^{'}(t_\varepsilon) = \frac{1}{t_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(t_\varepsilon v_\varepsilon)|^2 + (t_\varepsilon v_\varepsilon)^2 + \phi_{t_\varepsilon v_\varepsilon}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^2 - |t_\varepsilon v_\varepsilon|^{q+1} - (t_\varepsilon v_\varepsilon)^6 dx = 0$$

assim,

$$\gamma_\varepsilon'(t_\varepsilon) = \frac{1}{t_\varepsilon} I_*'(t_\varepsilon v_\varepsilon)(t_\varepsilon v_\varepsilon)$$

logo,

$$\gamma_\varepsilon^{'}(t_\varepsilon) = 0.$$

Por outro lado, pelas propriedades do termo não local,

$$\gamma_\varepsilon^{'}(t) = tr_\varepsilon^4 - t^5 + t^3 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_\varepsilon} v_\varepsilon^2 dx - t^q \|v_\varepsilon\|_{q+1}^{q+1} \leq tr_\varepsilon^4 - t^5 + C' t^3 \|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 - t^q \|v_\varepsilon\|_{q+1}^{q+1}$$

como, $\|v_\varepsilon\|_{12/5}^{12/5} = O(\varepsilon^{3/5})$, temos

$$\|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 = (\|v_\varepsilon\|_{12/5}^{12/5})^{5/3} = (O(\varepsilon^{3/5}))^{5/3} = O(\varepsilon)$$

e,

$$\gamma_\varepsilon^{'}(t) \leq tr_\varepsilon^4 - t^5 + t^3(C'O(\varepsilon) - t^{q-3} O(\varepsilon^{\frac{5-q}{4}})).$$

onde $O(\varepsilon)$ e $O(\varepsilon^{\frac{5-q}{4}})$ podem ser tratados como funções não-negativas.

Daí, temos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\gamma_\varepsilon^{'}(t) < 0$ em $t \in (r_\varepsilon, \infty)$, assim à **Afirmação 1** segue.

Agora, note que, a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2 r_\varepsilon^4 - \frac{1}{6} t^6$$

é crescente em $(0, r_\varepsilon)$. Desta forma, pela **Afirmação 1** provada acima, temos

$$\begin{aligned} I_*(t_\varepsilon v_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2 dx + \frac{t_\varepsilon^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_\varepsilon} v_\varepsilon^2 dx - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |v_\varepsilon|^{q+1} dx - \frac{t_\varepsilon^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon^6 dx \\ &\leq \frac{1}{3}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2 dx\Big)^{3/2} + C'\frac{t_\varepsilon^4}{4}\|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\|v_\varepsilon\|_{q+1}^{q+1} \\ &= \frac{1}{3}(S + O(\varepsilon^{1/2}))^{3/2} + C'\frac{t_\varepsilon^4}{4}\|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 - \frac{t_\varepsilon^{q+1}}{q+1}\|v_\varepsilon\|_{q+1}^{q+1}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(a+b)^\delta \leq a^\delta + \delta(a+b)^{\delta-1}b$, que é válida para $\delta \geq 1$ e $a, b \geq 0$, temos, por (4.2) e pela desigualdade citada, que

$$I_*(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{3}S^{3/2} + O(\varepsilon^{1/2}) + C_1 O(\varepsilon) - C_2 O(\varepsilon^{\frac{5-q}{4}}) \tag{4.3}$$

onde $C_1, C_2 \in [\alpha, \beta]$ com $\alpha > 0$. Tal fato, é garantido por t_ε e r_ε serem limitados superiormente, visto que ser $t_\varepsilon \leq r_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$; também t_ε é limitada inferiormente por constante positiva. Em verdade, como $q > 3$, a conclusão segue de (4.3), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. ■

Teorema 4.2. *Seja V uma constante positiva. Então, o problema em questão tem uma GSS.*

Demonstração.

Primeiramente, definamos o funcional $J^* : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J^*(u) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + \Big(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{6}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx,$$

o funcional J^* têm as mesmas características e mesmo propósito do J do teorema anterior.

Agora, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}^*$ tal que

$$\lim I^*(u_n) = c^*.$$

Como vemos $I^*(u_n) = J^*(u_n)$, donde $\lim J^*(u_n) = c^*$. Observando que, $J^*(u_n) \geq C\|u_n\|^2$, chegamos que (u_n) é limitada.

Daí, existe $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3)$$

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado e } 1 \leq s < 6.$$

Agora, usaremos o argumento concentração de compacidade de Lions (ver [22]), sobre a sequência de medidas dadas por

$$\mu_n^*(\Omega) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\Big)\int_\Omega \phi_{u_n} u_n^2 dx + \Big(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{6}\Big)\int_\Omega u_n^6 dx.$$

onde podemos observar que, $\mu_n^*(\mathbb{R}^3) = J^*(u_n)$ e, assim, $\lim \mu_n^*(\mathbb{R}^3) = c^*$.

O anulamento não ocorre

Suponhamos por contradição, que o anulamento ocorre. Logo, para todo $r > 0$,

$$\lim_n \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \mu_n^*(B_r(\xi)) = 0.$$

Em particular, existe $\overline{r} > 0$ tal que

$$\lim_n \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_{B_{\overline{r}}(\xi)} u_n^2 dx = 0$$

por P. L. Lions [22], $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^3)$, $s \in (2,6)$. Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{q+1} dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq C\|u_n\|_{12/5}^4 \to 0.$$

Assim, como $(I^*)'(u_n).(u_n) = 0$, visto que $(u_n) \subset \mathcal{N}^*$, temos

$$\lim \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx \right) = 0.$$

Daí, sendo $(\|u_n\|)$ é limitada superiormente, pois, $J^*(u_n) \geq C\|u_n\|^2$ e $\lim J^*(u_n) = c^*$; e limitada inferiormente por constante positiva, visto que zero não pertence a fronteira de $\mathcal{N}^*$, temos assim, a existência de $l > 0$ tal que

$$l = \lim \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx = \lim \int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx$$

$$c^* = \lim I^*(u_n) = \frac{1}{2}l - \frac{1}{6}l = \frac{1}{3}l$$

e,

$$S \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx)^{1/3}} \to \frac{l}{l^{1/3}} = l^{2/3}.$$

Donde, $c^* = \frac{1}{3}l \geq \frac{1}{3}S^{3/2}$. O que contradiz o lema anterior.

A dicotomia não ocorre

Suponhamos, por contradição, que a dicotomia ocorre. Logo, existe $\widetilde{c} \in (0, c^*)$, duas sequências (ξ_n) e (r_n), com $r_n \to \infty$ e duas medidas μ_n^1 e μ_n^2 tais que

$$0 \leq \mu_n^1 + \mu_n^2 \leq \mu_n^*, \quad \mu_n^1(\mathbb{R}^3) \to \widetilde{c}, \quad \mu_n^2(\mathbb{R}^3) \to c^* - \widetilde{c}, \quad supt(\mu_n^1) \subset B_{r_n}(\xi_n) \quad \text{e} \quad supt(\mu_n^2) \subset B_{2r_n}^c(\xi_n).$$

Agora, consideremos $(\rho_n) \subset C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\rho_n = 1 \quad \text{em } B_{r_n}(\xi_n), \quad \rho_n = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3 - B_{2r_n}(\xi_n), \quad 0 \leq \rho_n \leq 1 \quad \text{e} \quad |\nabla \rho_n| \leq \frac{2}{r_n}.$$

Definamos também,

$$v_n := \rho_n u_n \quad \text{e} \quad w_n := (1 - \rho_n) u_n.$$

Denotando por, $\Omega_n = B_{2r_n}(\xi_n) - B_{r_n}(\xi_n)$, temos

$$\mu_n^*(\Omega_n) \to 0$$

visto que,

$$\begin{aligned} \mu_n^*(\Omega_n) + \mu_n^1(\mathbb{R}^3) + \mu_n^2(\mathbb{R}^3) &= \mu_n^1(B_{r_n}(\xi_n)) + \mu_n^*(\Omega_n) + \mu_n^2(B_{2r_n}^c(\xi_n)) \\ &\leq \mu_n^*(\Omega_n) + \mu_n^*(B_{r_n}(\xi_n)) + \mu_n^*(B_{2r_n}^c(\xi_n)) \\ &= \mu_n^*(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

assim,

$$0 \leq \mu_n^*(\Omega_n) \leq \mu_n^*(\mathbb{R}^3) - (\mu_n^1(\mathbb{R}^3) + \mu_n^2(\mathbb{R}^3)) \to 0$$

deste modo,

$$\lim \mu_n^*(\Omega_n) = 0.$$

Desta forma, como

$$\mu_n^*(\Omega_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx \geq 0,$$

$$\mu_n^*(\Omega_n) \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq 0,$$

e,

$$\mu_n^*(\Omega_n) \geq \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{6}\right) \int_{\Omega_n} u_n^6 dx \geq 0$$

temos que,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx \to 0 \qquad (4.4),$$

$$\int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to 0 \qquad (4.5),$$

e,

$$\int_{\Omega_n} u_n^6 dx \to 0 \qquad (4.6).$$

Observe também que,

$$\int_{\Omega_n} v_n^2 dx, \int_{\Omega_n} w_n^2 dx \leq \int_{\Omega_n} u_n^2 dx$$

e,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 dx, \int_{\Omega_n} |\nabla w_n|^2 dx \leq \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx + o_n(1)$$

sendo assim,

$$0 \leq \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx \leq \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1),$$

$$0 \leq \int_{\Omega_n} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx \leq \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1),$$

donde,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx, \int_{\Omega_n} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx \to 0. \qquad (4.7)$$

Portanto, temos (4.8) dada por,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx &= \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx \\ &= \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1) \end{aligned}$$

e (4.9), dada por

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx &= \int_{B^c_{2r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx \\ &= \int_{B^c_{2r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Daí, por (4.8) e (4.9),

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx = \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{B^c_{2r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx$$

implicando,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx + o_n(1) \tag{4.10}$$

Desde que, como $H^1(\Omega_n) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega_n)$,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx = o_n(1) \Rightarrow \int_{\Omega_n} |u_n|^{q+1} dx = o_n(1)$$

e, daí, observando

$$0 \leq \int_{\Omega_n} |v_n|^{q+1} dx, \int_{\Omega_n} |w_n|^{q+1} dx \leq \int_{\Omega_n} |u_n|^{q+1} dx = o_n(1)$$

temos,

$$\int_{\Omega_n} |v_n|^{q+1} dx, \int_{\Omega_n} |w_n|^{q+1} dx = o_n(1)$$

desta forma, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx = \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |u_n|^{q+1} dx + o_n(1)$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^{q+1} dx = \int_{B^c_{2r_n}(\xi_n)} |u_n|^{q+1} dx + o_n(1)$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx + \int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^{q+1} dx + o_n(1). \tag{4.11}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx = \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx + \int_{\mathbb{R}^3} w_n^6 dx + o_n(1). \tag{4.12}$$

Além disso, temos, pelo mesmo argumento de (3.14), que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_n} w_n^2 dx + o_n(1). \tag{4.13}$$

Assim, por (4.10)-(4.13) temos

$$J^*(u_n) \geq J^*(v_n) + J^*(w_n) + o_n(1)$$

$$\Rightarrow c^* = \lim J^*(u_n) \geq \liminf_n J^*(v_n) + \liminf_n J^*(w_n) \geq 0$$

assim,

$$0 \leq \liminf_n J^*(v_n) \leq c^*$$

$$0 \leq \liminf_n J^*(w_n) \leq c^*.$$

Afirmação 1: Tais $\liminf$ são positivos, ou seja, temos

$$0 < \liminf_n J^*(v_n) < c^* \tag{4.14}$$

e,

$$0 < \liminf_n J^*(w_n) < c^*. \tag{4.15}$$

De fato, como $\mu_n^1 \leq \mu_n^*$, $\mu_n^1(\mathbb{R}^3) \to \widetilde{c}$ e $supt(\mu_n^1) \subset B_{r_n}(\xi_n)$, temos que

$$\liminf_n \mu_n^*(B_{r_n}(\xi_n)) \geq \widetilde{c}. \tag{4.16}$$

Assim, pela definição da μ_n^*, temos que

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\Big)\int_{B_{r_n}(\xi_n)}|\nabla u_n|^2+u_n^2dx+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{q+1}\Big)\int_{B_{r_n}(\xi_n)}\phi_{u_n}u_n^2dx+\Big(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{6}\Big)\int_{B_{r_n}(\xi_n)}u_n^6dx \geq \widetilde{c}+o_n(1$$

Daí, podemos afirmar que,

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\Big)\int_{B_{r_n}(\xi_n)}|\nabla u_n|^2 + u_n^2dx \geq C + o_n(1) \tag{4.17}$$

para algum $C > 0$. Caso contrário,

$$\liminf_n \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\Big)\int_{B_{r_n}(\xi_n)}|\nabla u_n|^2 + u_n^2dx = 0$$

donde,

$$\liminf_n \|u_n\|_{H^1(B_{r_n}(\xi_n))} = 0. \tag{4.18}$$

Por outro lado, através da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{B_{r_n}(\xi_n)}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq \left(\int_{B_{r_n}(\xi_n)}\phi_{u_n}^6dx\right)^{1/6}\left(\int_{B_{r_n}(\xi_n)}|u_n|^{12/5}dx\right)^{5/6}$$

como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{12/5}(\Omega)$, logo existe $M > 0$ tal que,

$$\int_{B_{r_n}(\xi_n)}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq M\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_{u_n}|^6dx\right)^{1/6}\|u_n\|^2_{H^1(B_{r_n}(\xi_n))}$$

como também: $\|u\|_6 \leq M\|\nabla u\|_2$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{B_{r_n}(\xi_n)}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq M\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_{u_n}|^2dx\right)^{1/2}\|u_n\|^2_{H^1(B_{r_n}(\xi_n))}$$

e, usando as propriedades do termo não local, chegamos que

$$\int_{B_{r_n}(\xi_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq M\|u_n\|^2 \|u_n\|^2_{H^1(B_{r_n}(\xi_n))}. \tag{4.19}$$

Como (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos, por (4.18), que

$$\liminf_n \int_{B_{r_n}(\xi_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx = 0. \tag{4.20}$$

Também temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{L^6(B_{r_n}(\xi_n))} \leq M\|u_n\|_{H^1(B_{r_n}(\xi_n))}$$

assim,

$$\liminf_n \|u_n\|_{L^6(B_{r_n}(\xi_n))} = 0. \tag{4.21}$$

Daí, pela observação de (4.18), (4.20) e (4.21), chegamos a uma contradição com (4.16). Portanto, a equação (4.17) é válida. Donde observamos que,

$$J^*(v_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{B_{r_n}(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx$$

$$\Rightarrow \liminf_n J^*(v_n) \geq C > 0 \Rightarrow \liminf_n J^*(v_n) > 0 \quad \text{e} \quad \liminf_n J^*(w_n) < c^*.$$

Analogamente,

$$\liminf_n J^*(w_n) > 0 \quad \text{e} \quad \liminf_n J^*(v_n) < c^*.$$

Portanto,

$$0 < \liminf_n J^*(v_n) < c^*$$

e

$$0 < \liminf_n J^*(w_n) < c^*,$$

e , à **Afirmação 1**, fica provada.

Sabemos que, o funcional $G^* : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$G^*(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + u^2 + \phi_u u^2 - |u|^{q+1} - u^6 dx$$

e, sendo $u \in \mathcal{N}^*$, temos $G^*(u) = 0$. Daí, por (4.10)-(4.13), temos

$$0 = G^*(u_n) \geq G^*(v_n) + G^*(w_n) + o_n(1) \tag{4.22}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que $t_n v_n \in \mathcal{N}^*$, temos $G^*(t_n v_n) = 0$, ou seja,

$$t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx - t_n^6 \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx = 0 \quad (4.23)$$

assim,

$$t_n^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx = t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx + t_n^6 \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx$$

Neste momento, faremos distinção entre 3 casos:

1ºCaso: Supondo que existe subsequência tal que $G^*(v_n) \leq 0$.

$$G^*(v_n) \leq 0 \Rightarrow t_n^{q+1} G^*(v_n) \leq 0$$

implicando,

$$t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx - t_n^{q+1} \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx \leq 0$$

subtraindo a equação acima pela equação (4.23), logo

$$(t^{q+1} - t_n^2) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + (t^{q+1} - t_n^4) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + (t^6 - t_n^{q+1}) \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx \leq 0.$$

assim,

$$t_n \leq 1, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, por (4.14), temos

$$c^* \leq I_*(t_n v_n) = J^*(t_n v_n) \leq J^*(v_n)$$

donde,

$$c^* \leq \liminf_n J^*(v_n) < c^*$$

chegando assim numa contradição.

2ºCaso: Supondo que existe subsequência tal que $G^*(w_n) \leq 0$.

Chegamos a um absurdo da mesma forma que no caso anterior.

3ºCaso: Supondo que existe subsequências tais que $G^*(w_n), G^*(v_n) > 0$.

Teremos que, $G^*(v_n) = o_n(1)$ e $G^*(w_n) = o_n(1)$, por (4.22). Se $t_n \leq 1 + o_n(1)$, chegamos a uma contradição da mesma forma que no **1ºCaso**. Caso $\lim t_n = t_0 > 1$, temos, usando (4.23), que

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= G^*(v_n) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 + \phi_{v_n} v_n^2 - |v_n|^{q+1} - v_n^6 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - \frac{1}{t_n^{q-1}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx - \frac{1}{t_n^{q-3}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + \Big(\frac{t_n^6}{t_n^{q+1}} - 1\Big) \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx \\
&= \left(1 - \frac{1}{t_n^{q-1}}\right) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + \left(1 - \frac{1}{t_n^{q-3}}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + \Big(\frac{t_n^6}{t_n^{q+1}} - 1\Big) \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx
\end{aligned}
$$

desta forma,

$$
0 = \liminf_n \left[\left(1 - \frac{1}{t_n^{q-1}}\right) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + \left(1 - \frac{1}{t_n^{q-3}}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + \Big(\frac{t_n^6}{t_n^{q+1}} - 1\Big) \int_{\mathbb{R}^3} v_n^6 dx\right]
$$

logo,

$$
0 \geq M \liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 + \phi_{v_n} v_n^2 + v_n^6 dx \qquad \text{com } M > 0
$$

sendo assim,

$$
0 \geq \liminf_n J^*(v_n)
$$

o que é um absurdo. Visto que,

$$
0 < \liminf_n J^*(v_n) < c^*.
$$

Portanto, a dicotomia não ocorre.

Desta forma, a compacidade acontece, sendo assim, existe $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^3$ tal que: para todo $\delta > 0$, existe $r = r(\delta) > 0$ tal que para n suficientemente grande,

$$
c^* - \frac{\delta}{3} \leq \mu_n^*(B_r^c(\xi_n)) + \mu_n^*(B_r(\xi_n)) \leq c^* + \frac{\delta}{3} \quad \text{(definição de } \mu_n^*)
$$

e,

$$
\mu_n^*(B_r(\xi_n)) \geq c^* - \frac{\delta}{3} \quad \text{(pela compacidade ser válida)}
$$

deste modo,

$$
\mu_n^*(B_r^c(\xi_n)) + \mu_n^*(B_r(\xi_n)) \geq c^* - \frac{\delta}{3} + \mu_n^*(B_r^c(\xi_n))
$$

implicando,

$$
\mu_n^*(B_r^c(\xi_n)) + c^* - \frac{\delta}{3} \leq c^* + \frac{\delta}{3} \Rightarrow \mu_n^*(B_r^c(\xi_n)) < \delta
$$

assim,

$$
\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{B_r^c(\xi_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx < \delta. \tag{4.24}
$$

Agora, definamos $v_n := u_n(. - \xi_n)$. Claramente, $(v_n) \subset \mathcal{N}^*$. Desta forma, por (4.24), temos que para todo $\delta > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{H^1(B_r^c)} < \delta, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{R}^3. \tag{4.25}$$

E, como (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos que (v_n) também será. Consequentemente, existe $\overline{v} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $v_n \rightharpoonup \overline{v}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, a menos de subsequência. Donde,

$$v_n \to \overline{v} \quad \text{em } L^s(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado para } 1 \leq s < 6. \tag{4.26}$$

Desta forma, para $s \in [2, 6)$, temos, por (4.26), que: para todo $\delta > 0$, existe $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$

$$\|v_n - \overline{v}\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \leq \|v_n - \overline{v}\|_{L^s(B_r)} + \|v_n - \overline{v}\|_{L^s(B_r^c)} < \delta + \|v_n\|_{L^s(B_r^c)} + \|\overline{v}\|_{L^s(B_r^c)}$$

usando as imersão $H^1(B_r^c) \hookrightarrow L^s(B_r^c)$, teremos a existência de $K > 0$ tal que,

$$\|v_n - \overline{v}\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \leq \delta + K(\|v_n\|_{H^1(B_r^c)} + \|\overline{v}\|_{H^1(B_r^c)})$$

como $v_n \rightharpoonup \overline{v}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos $v_n \rightharpoonup \overline{v}$ em $H^1(B_r^c)$ e, daí, por (4.25)

$$\|\overline{v}\|_{H^1(B_r^c)} \leq \liminf_n \|v_n\|_{H^1(B_r^c)} \Rightarrow \|\overline{v}\|_{H^1(B_r^c)} \leq \liminf_n \delta = \delta$$

$$\Rightarrow \|v_n - \overline{v}\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \leq \delta + 2\delta K = (1 + 2K)\delta$$

$$\Rightarrow v_n \to \overline{v} \quad \text{em } L^s(\mathbb{R}^3),\ s \in [2, 6). \tag{4.27}$$

Lembrando que, ϕ é uma aplicação contínua de $L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e as propriedades do termo não local, temos

$$\phi_{v_n} \to \phi_{\overline{v}} \quad \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \text{ pois, } v_n \to \overline{v} \text{ em } L^{12/5}(\mathbb{R}^3).$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}} \overline{v}^2 dx.$$

Além disso, para $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n \psi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}} \overline{v} \psi dx$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_n^5 \psi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \overline{v}^5 \psi dx.$$

Agora, note que, pelo início da demonstração podemos supor via [28], que (v_n) é (PS) em $I_*|_{\mathcal{N}^*}$, consequentemente, (PS) em I_*. Desta forma, $\overline{v} \in \mathcal{N}^*$. Assim,

$$\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{v}|^2 + \overline{v}^2 dx + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}}\overline{v}^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{v}|^{q+1} dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{v}^6 dx = 0$$

donde,

$$\begin{aligned} I_*(\overline{v}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{v}|^2 + \overline{v}^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}}\overline{v}^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{v}|^{q+1} dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{v}^6 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{v}|^2 + \overline{v}^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}}\overline{v}^2 dx + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{v}|^{q+1} dx \\ &\Rightarrow\ I_*(\overline{v}) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \overline{v}|^2 + \overline{v}^2 dx + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\overline{v}}\overline{v}^2 dx + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\overline{v}|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$I_*(v_n) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{q+1} dx$$

e, daí

$$c^* \leq I_*(\overline{v}) \leq \liminf_n I_*(v_n) = c^*$$

$$\Rightarrow (\overline{v}, \phi_{\overline{v}}) \quad \text{é } GSS \text{ do problema em questão.}$$

■

Provado o teorema acima, para potencial constante, provaremos agora um outro teorema de existência de solução, sendo agora para potencial não constante. Antes dele, provemos o lema auxiliar:

Lema 4.3.

$$c_V^* < \frac{1}{3}S^{3/2}.$$

Demonstração.

Primeiramente, note que, pelo teorema anterior, existe GSS para o problema em questão quando $V = V_\infty$, e, assim como no **Lema 3.2**, podemos ver que $c_V^* < c_\infty^*$. Donde o resultado segue pelo **Lema 4.1**. ■

Teorema 4.4. *Se V satisfaz $(V1 - V3)$. Então, o problema em questão*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u &= |u|^{q-1}u + u^5, \\ -\Delta \phi &= u^2, \end{cases}$$

tem um GSS.

Demonstração.

Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}^*$ tal que

$$\lim I_*(u_n) = c_n^*.$$

Da mesma forma, que nos outros teoremas, (u_n) é limitada e,

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3)$$

e,

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\Omega),\, \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ limitado e } 1 \leq s < 6..$$

Do teorema que auxiliou na demonstração do teorema anterior, temos

$$\|u_n\|_{H^1(B_r^c)} < \delta, \quad n \geq 1$$

consequentemente,

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^s(\mathbb{R}^3), 1 \leq s < 6.$$

E, o resultado segue de modo análogo ao caso potencial constante. ■

Capítulo 5

Soluções positivas para um sistema equações do tipo Schrödinger-Poisson com expoente crítico

Este capítulo, tem como base o trabalho de L. Zhao e F. Zhao [30]. Temos como foco, investigar a existência de soluções não triviais positivas para um sistema de equações do tipo Schrödinger-Poisson, envolvendo um caso crítico. Sendo mais exato, investigaremos tais resultados para o problema (0.5), o qual é dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u &= K(x)|u|^4 u + \mu Q(x)|u|^{q-2}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi &= u^2, \quad \lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0 \end{cases}$$

onde $2 < q < 6$ e $\mu > 0$. Suporemos, que:

(H1) (i) $K \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \lim_{|x|\to\infty} K(x) = K_\infty \in (0, \infty)$ e $K(x) \geq K_\infty$ para $x \in \mathbb{R}^3$,

(ii) $Q \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \lim_{|x|\to\infty} Q(x) = Q_\infty \in (0, \infty)$ e $Q(x) \geq Q_\infty$ para $x \in \mathbb{R}^3$.

(H2) $|K(x) - K(x_0)| = o(|x - x_0|^\alpha)$, onde $1 \leq \alpha < 3$ e $K(x_0) = \max_{\mathbb{R}^3} K(x)$.

O funcional energia associado ao problema é dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K(x)|u^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|u^+|^q dx$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. I é de classe C^1 e seus pontos críticos são soluções do problema em questão.

Para o caso de fazermos $K = K_\infty$ e $Q = Q_\infty$, o funcional energia do problema será dado por:

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K_\infty |u^+|^6 + \frac{\mu}{q} Q_\infty |u^+|^q dx$$

e, as variedades de Nehari, associadas aos funcionais serão denotadas por:

$$\mathcal{N} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) - \{0\}; I'(u)(u) = 0\}$$

e,

$$\mathcal{N}_\infty = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) - \{0\}; I'_\infty(u)(u) = 0\}.$$

Além disso, destacamos que, estaremos considerando:

$$c = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) \quad \text{e} \quad c_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

Lembramos que, a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, está sendo denotada por:

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) - \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx\right)^{1/3}}.$$

Enfim, este capítulo tem como objetivo principal, apresentar uma demonstração dos seguintes teoremas:

Teorema 5.1. *Suponha (H1) e (H2). Então, para $4 < q < 6$, o problema em questão, tem pelo menos uma solução positiva $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ para todo $\mu > 0$; quando $q = 4$, o problema ainda tem uma solução positiva desde que μ seja suficientemente grande.*

Teorema 5.2. *Suponha que (H1) e (H2) sejam verificadas. Assumindo que $3 \leq q < 4$, e além disso K e Q funções radiais que satisfazem:*

(H3) *$K, Q \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $(\nabla K(x), x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $(\nabla Q(x), x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $(\nabla K(x), x) \leq 0$, $(\nabla Q(x), x) \leq 0$ para $x \in \mathbb{R}^3$.*

Então, o problema em questão tem ao menos uma solução radial positiva $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *para* $\mu > 0$ *suficientemente grande.*

Teorema 5.3. *Suponha (H1) e (H2) válidas e* $q \in (2, 3)$*, e além disso* K *e* Q *funções radiais. Então, o problema em questão, tem pelo menos uma solução radial positiva* $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *para* $\mu > 0$ *suficientemente grande.*

Para chegarmos ao nosso objetivo, seguiremos ao seguinte roteiro: dividiremos este capítulo em três seções. A primeira é destinada a lemas básicos que serão de fundamental importância para a prova dos teoremas em questão. A segunda é destinada à demonstração do **Teorema 5.1**, e a terceira as demonstrações dos **Teorema 5.2** e **Teorema 5.3**.

5.1 Lemas essenciais do capítulo

Antes de iniciarmos a seção, é importante destacarmos que, estaremos denotando:

$$m = \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(tu) \quad \text{e} \quad m_\infty = \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I_\infty(tu).$$

Lembramos que, por argumentos já utilizados, temos $c = m$ e $c_\infty = m_\infty$.

O primeiro lema da seção é padrão para as variedades de Nehari, por completude ele foi adicionado ao presente capítulo.

Lema 5.4. *Suponha (H1) e* $4 \leq q < 6$*, então* $m, m_\infty > 0$*.*

Demonstração. Primeiramente, note que, por $(H1)$, existem $\overline{K}, \overline{Q} > 0$ tais que

$$K(x) \leq \overline{K} \text{ e } Q(x) \leq \overline{Q} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3.$$

Daí, existem $C, \overline{C} > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6} K(x)|u^+|^6 + \frac{\mu}{q} Q(x)|u^+|^q dx \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx + \overline{C} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q dx \leq C\|u\|^6 + \overline{C}\|u\|^q$$

donde,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6} K(x)|u^+|^6 + \frac{\mu}{q} Q(x)|u^+|^q dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^6 - \overline{C}\|u\|^q > 0 \end{aligned}$$

para $\|u\|$ suficientemente pequena. Desta forma, concluimos que zero é mínimo local estrito. Daí, existe $\rho, \alpha > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha \text{ para } \|u\| = \rho$$

ou seja, vemos de maneira clara, que

$$m = \inf_{u \neq 0} \max_{t \geq 0} I(tu) \geq \alpha > 0.$$

Analogamente, $m_\infty > 0$.

■

Lema 5.5. *Suponha (H1) e $4 \leq q < 6$. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência limitada tal que $I'(u_n).u_n \to 0$ e $\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^p dx \to a > 0$. Então, existe $(t_n) \subset \mathbb{R}$ onde $t_n > 0$, tal que $I'(t_n u_n)(t_n u_n) = 0$ e $t_n \to 1$.*

Demonstração.

Pelas propriedades da variedade de Nehari, existe $(t_n) \subset \mathbb{R}$ com $t_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$I'(t_n u_n)(t_n u_n) = 0,$$

daí,

$$\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^p dx + o_n(1)$$

e,

$$t_n^2 \|u_n\|^2 + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = t_n^6 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + t_n^q \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u_n^+|^p dx$$

assim,

$$\left(1 - \frac{1}{t_n^2}\right)\|u_n\|^2 = (1 - t_n^2) \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + (1 - t_n^{q-4}) \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u_n^+|^p dx + o_n(1).$$

Daí, analisando a última identidade, levando em consideração que: (H1) é verificada, $4 \leq q < 6$, $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma sequência limitada tal que $I'(u_n).u_n \to 0$ e $\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^p dx \to a > 0$. Temos que (t_n) é limitada, donde, $t_n \to t_0 > 0$, a menos de subsequência. Caso $t_0 < 1$, para n suficientemente grande $t_n < 1$, chegamos assim a um absurdo ao analisarmos a identidade acima. Da mesma forma caso $t_0 > 1$, pois, para n grande $t_n > 1$ e chegamos a um absurdo. Portanto, $t_0 = 1$. ■

Por fim, o último, e nem um pouco menos importante, lema da seção:

Lema 5.6. *Suponha (H1) e* $4 \leq q < 6$. *Então,* I *satisfaz* $(PS)_d$ *para*

$$d \in (0, \min\{m_\infty, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}\}).$$

Demonstração.

Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ sequência (PS) de I no nível $d \in (0, \min\{m_\infty, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}\})$, ou seja,

$$I(u_n) \to d \text{ e } I'(u_n) \to 0. \tag{5.1}$$

Daí, para n suficientemente grande:

$$I(u_n) \leq d+1 \text{ e } |I'(u_n)(u_n)| \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\|$$

assim,

$$\begin{aligned} d+1+\|u_n\| &\geq I(u_n) - \frac{1}{4}I'(u_n)(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{6}K(x)|u_n^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|u_n^+|^q dx \\ &- \frac{1}{4}\|u_n\|^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u_n^+|^6dx + \frac{1}{4}\mu\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)|u_n^+|^q dx \\ &= \frac{1}{4}\|u_n\|^2 + \Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\Big)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u_n^+|^6dx + \Big(\frac{\mu}{4}-\frac{\mu}{q}\Big)\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)|u_n^+|^q dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

donde (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Agora, definamos

$$\rho_n = |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \phi_{u_n}u_n^2.$$

Podemos ver que $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^3)$, visto que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e, pela utilização das propriedades do termo não local, $\phi_{u_n}u_n^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Note que, (ρ_n) é limitada em $L^1(\mathbb{R}^3)$, pois, novamente pelas propriedades do termo não local e, por (u_n) ser limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\|\rho_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+u_n^2+\phi_{u_n}u_n^2dx = \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq \|u_n\|^2+C\|u_n\|^4 < C.$$

Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, $\|\rho_n\|_1 \to l$.

Temos que $l > 0$, pois, caso $l = 0$,

$$I(u_n) \leq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \leq \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \to 0$$

implicando,

$$0 < d = \lim I(u_n) \leq 0$$

o que gera uma contradição. Logo, $l > 0$.

Agora, pelo **Lema Concentração de Compacidade de Lions** (ver [22]), aplicado a sequência (ρ_n), temos a compacidade de (ρ_n). Para tal, mostraremos que o anulamento e a dicotomia não ocorrem.

O anulamento não ocorre

Caso ocorresse,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} \rho_n dx = 0, \text{ para todo } R > 0$$

e, daí

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0, \text{ para todo } R > 0$$

e, consequentemente, por [29],

$$u_n \to 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^3),\ s \in (2,6)$$

desta forma,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq C\|u_n\|_{12/5}^4 \to 0 \tag{5.2}$$

e,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u_n|^q dx \leq \overline{Q} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^q dx \to 0. \tag{5.3}$$

Portanto, por (5.2) e (5.3), temos

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1) \tag{5.4}$$

e,

$$I'(u_n)(u_n) = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1). \tag{5.5}$$

Agora, observando (5.1), temos

$$|I'(u_n)(u_n)| \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\| \leq C\|I'(u_n)\| \to 0$$

$$\Rightarrow I'(u_n)(u_n) \to 0. \tag{5.6}$$

Note que, por (5.1) e (5.4), existe $\overline{d} > 0$ tal que $\|u_n\|^2 \geq \overline{d}$. Sendo (u_n) limitada, podemos supor $\|u_n\|^2$ convergente para $b > 0$, assim, por (5.5) e (5.6), temos

$$\|u_n\|^2 \to b > 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx \to b > 0. \tag{5.7}$$

Agora, relembrando que

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) - \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx\right)^{1/3}}$$

temos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx \leq (S^{-1} \|\nabla u\|_2^2)^3, \text{ para todo } u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) |u_n^+|^6 dx \leq \|K\|_\infty (S^{-1} \|\nabla u_n\|_2^2)^3 \leq \|K\|_\infty (S^{-1} \|u_n\|^2)^3.$$

Desta forma,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) |u_n^+|^6 dx \leq \lim_{n \to \infty} [\|K\|_\infty (S^{-1} \|u_n\|^2)^3]$$

assim, por (5.7), temos

$$b \leq \|K\|_\infty (S^{-1} b)^3 \Rightarrow \|K\|_\infty^{-1} S^3 \leq b^2 \Rightarrow b \geq \|K\|_\infty^{-1/2} S^{3/2}. \tag{5.8}$$

Sendo assim, por (5.4), (5.7) e (5.8), temos

$$d = \lim I(u_n) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big) b \geq \frac{1}{3} S^{3/2} \|K\|_\infty^{-1/2}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, o anulamento não ocorre.

A dicotomia não ocorre

Suponhamos que, existem $\alpha \in (0, l)$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$ tais que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que para todo $r, r' > R_\varepsilon$, temos

$$\liminf_n \int_{B_r(y_n)} \rho_n dx \geq \alpha - \varepsilon \quad \text{e} \quad \liminf_n \int_{B^c_{r'}(y_n)} \rho_n dx \geq (l - \alpha) - \varepsilon \tag{5.9}$$

ou seja, supondo que a dicotomia ocorre. Tome $\varepsilon_n \to 0$, $r_n \to \infty$ e $r'_n = 4r_n$. Seja também, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ verificando: $\xi = 0$ em $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$, $\xi = 1$ em $[2, 3]$, $0 \leq \xi \leq 1$ e $|\xi'(x)| \leq 2$.

Consideremos também, $\xi_n(x) := \xi(|x - y_n|/r_n)$, logo $I'(u_n)(\xi_n u_n) = o_n(1)$. De fato, como

$$|I'(u_n)(\xi_n u_n)| \leq \|I'(u_n)\| \|\xi_n u_n\|$$

e, por (5.1), $I'(u_n) \to 0$, basta mostrarmos que $(\xi_n u_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Antes, note que,

$$\xi_n = 1 \text{ em } B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)$$

e,

$$\xi_n = 0 \text{ em } B_{r_n}(y_n) \cup B^c_{4r_n}(y_n).$$

Desta forma,

$$\|\xi_n u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 + (\xi_n u_n)^2 dx = \int_{\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 + (\xi_n u_n)^2 dx$$

onde $\Omega_n = \Big(B_{2r_n}(y_n) - B_{r_n}(y_n)\Big) \cup \Big(B_{4r_n}(y_n) - B_{3r_n}(y_n)\Big)$ e $\Gamma_n = B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)$. Donde,

$$\|\xi_n u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 + (\xi_n u_n)^2 dx.$$

Agora, basta mostrarmos que a última integral é limitada. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 + (\xi_n u_n)^2 dx &= \int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx + \int_{\Omega_n} (\xi_n u_n)^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx + \int_{\Omega_n} u_n^2 dx
\end{aligned}$$

como $\int_{\Omega_n} u_n^2 dx$ é limitada, devemos mostrar que $\int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx$ é limitada para cocluirmos o que queremos.

Observe que:

$$\int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx = \int_{\Omega_n} u_n^2 |\nabla \xi_n|^2 + \xi_n^2 |\nabla u_n|^2 + 2u_n \xi_n (\nabla \xi_n . \nabla u_n) dx.$$

Como $|\nabla \xi_n| = |\xi'(z(x))|.1/r_n$, onde $z(x) = |x - y_n|/r_n$, temos

$$\int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx \leq \frac{4}{r_n^2} \int_{\Omega_n} u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2}{r_n} \int_{\Omega_n} 2u_n |\nabla u_n| dx.$$

Da desigualdade acima, claramente, observamos ser $\int_{\Omega_n} |\nabla(\xi_n u_n)|^2 dx$ limitada, visto que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, $\|\xi_n u_n\|$ é limitada e, daí

$$|I'(u_n)(\xi_n u_n)| \to 0$$

ou seja,

$$I'(u_n)(\xi_n u_n) = o_n(1). \tag{5.10}$$

Diante disso,

$$\int_{\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\Gamma_n} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^q dx + o_n(1) = o_n(1). \tag{5.11}$$

De fato, primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(u_n)(\xi_n u_n)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n.\nabla(\xi_n u_n) + \xi_n u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}\xi_n u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6\xi_n + \mu Q(x)|u_n^+|^q\xi_n dx\\
&= \left[\int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla(\xi_n u_n) + \xi_n u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} \phi_{u_n}\xi_n u_n^2 dx - \int_{\Omega_n} K(x)|u_n^+|^6\xi_n + \mu Q(x)|u_n^+|^q\xi_n dx\right]\\
&+ \left[\int_{\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + \int_{\Gamma_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\Gamma_n} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^q dx\right].
\end{aligned}$$

Para continuarmos,

Afirmação 1: As integrais sobre Ω_n convergem para zero.

Por (5.9), temos

$$\begin{aligned}
l + o_n(1) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_n dx\\
&= \int_{B_{3r_n}(y_n)} \rho_n dx + \int_{B_{4r_n}(y_n)-B_{3r_n}(y_n)} \rho_n dx + \int_{B^c_{4r_n}(y_n)} \rho_n dx\\
&\geq (\alpha - \varepsilon_n) + \int_{B_{4r_n}(y_n)-B_{3r_n}(y_n)} \rho_n dx + (l-\alpha) - \varepsilon_n
\end{aligned}$$

donde,

$$o_n(1) \geq \int_{B_{4r_n}(y_n)-B_{3r_n}(y_n)} \rho_n dx \geq 0$$

implicando,

$$\int_{B_{4r_n}(y_n)-B_{3r_n}(y_n)} \rho_n dx = o_n(1).$$

Analogamente,

$$\int_{B_{2r_n}(y_n)-B_{r_n}(y_n)} \rho_n dx = o_n(1)$$

e, assim

$$\int_{\Omega_n} \rho_n dx = o_n(1). \tag{5.12}$$

Donde, pela definição de ρ_n, podemos ver, de (5.12), que

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx, \int_{\Omega_n} u_n^2 dx, \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1).$$

Assim, usando as imersões de Sobolev

$$0 \leq \int_{\Omega_n} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^q dx \leq \overline{K}\int_{\Omega_n} |u_n|^6 dx + \overline{Q}\int_{\Omega_n} |u_n|^q dx \leq o_n(1)$$

logo,

$$\int_{\Omega_n} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^q dx = o_n(1). \tag{5.13}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla(\xi_n u_n) + \xi_n u_n^2 dx &\leq \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 \xi_n + u_n \nabla u_n.\nabla \xi_n + u_n^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2}{r_n}\int_{\Omega_n} |u_n||\nabla u_n| dx + \int_{\Omega_n} u_n^2 dx\end{aligned}$$

e, observando que $|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2 \geq 2|u_n||\nabla u_n|$, temos

$$\int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla(\xi_n u_n) + \xi_n u_n^2 dx = o_n(1). \tag{5.14}$$

Temos também, com o auxílio das propriedades do termo não local, que

$$0 \leq \int_{\Omega_n} \phi_{u_n}\xi_n u_n^2 dx \leq \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1)$$

daí,

$$\int_{\Omega_n} \phi_{u_n}\xi_n u_n^2 dx = o_n(1). \tag{5.15}$$

Portanto, por (5.13)-(5.15), a **Afirmação 1** feita esta provada. Com a afirmação acima, já temos:

$$\int_{\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\Gamma_n} K(x)|u_n^+|^6 + \mu Q(x)|u_n^+|^q dx + o_n(1).$$

Daí, usando a mesma argumentação com ρ_n da **Afirmação 1**, chegamos em (5.11).

Agora, definamos uma outra função, a $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que: $\eta(s) = 1$ para $s \leq 2$, $\eta(s) = 0$ para $s \geq 3$, $0 \leq \eta \leq 1$ em $\mathbb{R}$ e $|\eta'(s)| \leq 2$ em $\mathbb{R}$.

Definamos também,

$$w_n(x) = \eta\Big(\frac{|x-y_n|}{r_n}\Big)u_n \quad \text{e} \quad v_n(x) = \Big(1 - \eta\Big(\frac{|x-y_n|}{r_n}\Big)\Big)u_n.$$

Para não ficarmos carregando a notação, consideraremos:

$$\eta_n(x) := \eta\Big(\frac{|x-y_n|}{r_n}\Big)$$

e, observemos que: $\eta_n = 1$ em $B_{2r_n}(y_n)$, $\eta_n = 0$ em $B^c_{3r_n}(y_n)$, $0 \leq \eta_n \leq 1$ e $|\nabla\eta_n| \leq 2/r_n$.

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx \geq \alpha - \varepsilon_n \tag{5.16}$$

e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 + \phi_{v_n} v_n^2 dx \geq (l - \alpha) - \varepsilon_n. \tag{5.17}$$

De fato: para provarmos (5.16), vejamos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx &= \int_{B_{2r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \phi_{u_n} u_n^2 dx \\
&+ \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} |\nabla \eta_n u_n|^2 + (\eta_n u_n)^2 + \phi_{\eta_n u_n} (\eta_n u_n)^2 dx
\end{aligned}$$

e, usando novamente o argumento com ρ_n, chegamos que

$$\int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} \rho_n dx = o_n(1)$$

donde,

$$\int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1),$$

$$\int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} u_n^2 dx = o_n(1)$$

e,

$$\int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 dx = o_n(1).$$

Usando argumentos que exaustivamente temos usado, observamos que:

$$0 \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} \phi_{\eta_n u_n} (\eta_n u_n)^2 dx \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1),$$

$$0 \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} (\eta_n u_n)^2 dx \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} u_n^2 = o_n(1)$$

e,

$$0 \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} |\nabla \eta_n u_n|^2 dx \leq \int_{B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 dx = o_n(1).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx = \int_{B_{2r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \phi_{u_n} u_n^2 dx + o_n(1).$$

Daí, como estamos supondo válida a dicotomia, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx \geq \alpha - \varepsilon_n.$$

Donde fica provada (5.16). Analogamente, mostra-se (5.17). Agora, usando as desigualdades construidas para se demonstrar (5.16) e (5.17), observando também (5.11), temos

$$\int_{B_{3r_n}(y_n)-B_{2r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx = o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 dx \leq \int_{B_{2r_n}} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 + v_n^2 dx \leq \int_{B^c_{3r_n}(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx + o_n(1)$$

$$\int_{B_{3r_n}(y_n)-B_{2r_n}(y_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_n} w_n^2 dx \leq \int_{B_{2r_n}(y_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx + o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx \leq \int_{B^c_{3r_n}(y_n)} \phi_{u_n} u_n^2 dx + o_n(1)$$

$$\int_{B_{3r_n}(y_n)-B_{2r_n}(y_n)} K(x)|u_n^+|^6 dx = o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|w_n^+|^6 dx = \int_{B_{2r_n}(y_n)} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v_n^+|^6 dx = \int_{B^c_{3r_n}(y_n)} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1)$$

$$\int_{B_{3r_n}(y_n)-B_{2r_n}(y_n)} Q(x)|u_n^+|^q dx = o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)|w_n^+|^q dx = \int_{B_{2r_n}(y_n)} Q(x)|u_n^+|^q dx + o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)|v_n^+|^q dx = \int_{B^c_{3r_n}(y_n)} Q(x)|u_n^+|^q dx + o_n(1)$$

Unindo as estimativas acima, chegamos à:

$$I(u_n) \geq I(w_n) + I(v_n) + o_n(1). \tag{5.18}$$

Agora, note que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 dx \leq C\|u_n\|^6 \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

visto que (u_n) é limitada. Daí, como podemos tomar

$$r_n \geq |y_n| + n \quad \text{e} \quad \varepsilon_n = \sup_{|x|\geq n} |K(x) - K_\infty|$$

temos,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|v_n^+|^6 dx &\leq \int_{B^c_{2r_n}(y_n)} (K(x) - K_\infty)|v_n|^6 dx \\
&\leq \int_{|x|\geq n} (K(x) - K_\infty)|v_n|^6 dx \\
&\leq \sup_{|x|\geq n} |K(x) - K_\infty| \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 dx \\
&\leq \varepsilon_n C \to 0
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|v_n^+|^6 dx \to 0. \tag{5.19}
$$

Analogamente,

$$
\int_{\mathbb{R}^3} (Q(x) - Q_\infty)|v_n^+|^q dx \to 0. \tag{5.20}
$$

Desta forma, podemos observar, através de (5.19) e (5.20), que

$$
\begin{aligned}
I(v_n) &= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K(x)|v_n^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|v_n^+|^q dx = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx \\
&- \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |v_n^+|^6 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|v_n^+|^6 dx - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty |v_n^+|^q dx \\
&- \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3} (Q(x) - Q_\infty)|v_n^+|^q dx + o_n(1) = I_\infty(v_n) + o_n(1)
\end{aligned}
$$

assim,

$$
I(v_n) = I_\infty(v_n) + o_n(1). \tag{5.21}
$$

Além disso, também por (5.19) e (5.20), temos

$$
\begin{aligned}
I'_\infty(v_n)(v_n) &= \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |v_n^+|^6 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q_\infty |v_n^+|^q dx \\
&= \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v_n^+|^6 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|v_n^+|^q dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|v_n^+|^6 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mu(Q(x) - Q_\infty)|v_n^+|^q dx + o_n(1)
\end{aligned}
$$

logo,

$$
I'_\infty(v_n)(v_n) = I'(v_n)(v_n) + o_n(1). \tag{5.22}
$$

Agora, note que, para $\Omega_n = B_{3r_n}(y_n) - B_{2r_n}(y_n)$, temos

$$\begin{aligned} I'(u_n)(v_n) - I'(v_n)(v_n) &= \int_{\Omega_n} (\nabla u_n - \nabla v_n).\nabla v_n + (u_n - v_n)v_n dx + \int_{\Omega_n} (\phi_{u_n} u_n - \phi_{v_n} v_n)v_n dx \\ &- \int_{\Omega_n} K(x)v_n(|u_n^+|^4 u_n^+ - |v_n^+|^4 v_n^+)dx \\ &- \int_{\Omega_n} \mu Q(x)v_n(|u_n^+|^{q-2}u_n^+ - |v_n^+|^{q-2}v_n^+)dx. \end{aligned}$$

Agora, façamos algumas estimativas, com o auxílio de ρ_n. Vejamos:

$$\int_{\Omega_n} (\nabla u_n - \nabla v_n).\nabla v_n dx = \int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla v_n - |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla v_n dx - \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 dx$$

observando que,

$$\begin{aligned} 0 \le \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 dx &= \int_{\Omega_n} (1-\eta_n)^2|\nabla u_n|^2 + u_n^2|\nabla \eta_n|^2 + 2(1-\eta_n)u_n(\nabla\eta_n.\nabla u_n)dx \\ &\le \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{4}{r_n^2}\int_{\Omega_n} u_n^2 dx + \frac{2}{r_n}\int_{\Omega_n} 2|u_n||\nabla u_n|dx = o_n(1) \end{aligned}$$

e,

$$0 \le \left| \int_{\Omega_n} \nabla u_n.\nabla v_n dx \right| \le \int_{\Omega_n} 2|\nabla u_n||\nabla v_n|dx \le \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega_n} |\nabla v_n|^2 dx = o_n(1)$$

temos,

$$\int_{\Omega_n} (\nabla u_n - \nabla v_n).\nabla v_n dx = o_n(1). \tag{5.23}$$

Também temos,

$$\int_{\Omega_n} (u_n - v_n)v_n dx = \int_{\Omega_n} u_n v_n dx - \int_{\Omega_n} v_n^2 dx,$$

notando que,

$$\int_{\Omega_n} v_n^2 dx \le \int_{\Omega_n} u_n^2 dx = o_n(1)$$

e,

$$0 \le \left| \int_{\Omega_n} u_n v_n dx \right| \le \int_{\Omega_n} 2|u_n||v_n|dx \le \int_{\Omega_n} u_n^2 dx + \int_{\Omega_n} v_n^2 dx = o_n(1)$$

logo,

$$\int_{\Omega_n} (u_n - v_n)v_n dx = o_n(1). \tag{5.24}$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_n} (\phi_{u_n} u_n - \phi_{v_n} v_n)v_n dx = \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n v_n dx - \int_{\Omega_n} \phi_{v_n} v_n^2 dx$$

e,

$$0 \leq \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n v_n dx \leq \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1)$$

$$0 \leq \int_{\Omega_n} \phi_{v_n} v_n^2 dx \leq \int_{\Omega_n} \phi_{u_n} u_n^2 dx = o_n(1)$$

desta forma,

$$\int_{\Omega_n} (\phi_{u_n} u_n - \phi_{v_n} v_n) v_n dx = o_n(1). \tag{5.25}$$

Por fim, observemos que

$$\int_{\Omega_n} K(x) v_n (|u_n^+|^4 u_n^+ - |v_n^+|^4 v_n^+) dx = \int_{\Omega_n} K(x) |u_n^+|^4 u_n^+ v_n dx - \int_{\Omega_n} K(x) |v_n^+|^6 dx$$

e,

$$0 \leq \left| \int_{\Omega_n} K(x) |u_n^+|^4 u_n^+ v_n dx \right| \leq \int_{\Omega_n} K(x) |u_n^+|^6 dx = o_n(1)$$

$$0 \leq \int_{\Omega_n} K(x) |v_n^+|^6 dx \leq \int_{\Omega_n} K(x) |u_n^+|^6 dx = o_n(1)$$

donde,

$$\int_{\Omega_n} K(x) v_n (|u_n^+|^4 u_n^+ - |v_n^+|^4 v_n^+) dx = o_n(1). \tag{5.26}$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega_n} \mu Q(x) v_n (|u_n^+|^{q-2} u_n^+ - |v_n^+|^{q-2} v_n^+) dx = o_n(1). \tag{5.27}$$

Portanto, usando as estimativas dadas por (5.23) – (5.27), conclui-se

$$I'(u_n)(v_n) - I'(v_n)(v_n) = o_n(1),$$

donde segue-se de (5.22),

$$I'_\infty(v_n)(v_n) = I'(u_n)(v_n) + o_n(1). \tag{5.28}$$

Daí, segue pelo fato de $I'(u_n)(v_n) = o_n(1)$ (pois $I'(u_n) \to 0$ e (v_n) é limitada), que

$$I'_\infty(v_n)(v_n) = o_n(1). \tag{5.29}$$

Analogamente, podemos fazer estimativas semelhantes as de (5.23) – (5.27), com as quais temos

$$I'(w_n)(w_n) = I'(u_n)(w_n) + o_n(1).$$

E, por justificativa análoga a (5.29), conclui-se que

$$I'(w_n)(w_n) = o_n(1). \tag{5.30}$$

Desde que,

$$I'(w_n)(w_n) = o_n(1)$$

temos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|w_n^+|^6 + \mu Q(x)|w_n^+|^q dx.$$

Daí, por (5.16)

$$\alpha - \varepsilon_n \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_n|^2 + w_n^2 + \phi_{w_n} w_n^2 dx = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|w_n^+|^6 + \mu Q(x)|w_n^+|^q dx.$$

Note que, em virtude de (w_n) ser limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, existe $C > 0$ tal que

$$\alpha - \varepsilon_n + o_n(1) \leq \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|w_n^+|^6 + \mu Q(x)|w_n^+|^q dx \leq C,$$

sendo assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|w_n^+|^6 + \mu Q(x)|w_n^+|^q dx \to a > 0. \tag{5.31}$$

Usando argumentos análogos, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |v_n^+|^6 + \mu Q_\infty |v_n^+|^q dx \to b > 0. \tag{5.32}$$

Como podemos ver, estamos com as hipóteses do **Lema 5.5** sendo satisfeitas. Assim, existe $(t_n), (s_n) \subset \mathbb{R}$ com $t_n, s_n \to 1$, tais que $t_n v_n \in \mathcal{N}_\infty$ e $s_n w_n \in \mathcal{N}$. Donde, usando (5.21) e a continuidade de I e I_∞, temos

$$I(v_n) = I_\infty(v_n) + o_n(1) = I_\infty(t_n v_n) + o_n(1) \geq m_\infty + o_n(1) \tag{5.33}$$

e,

$$I(w_n) = I(s_n w_n) + o_n(1) \geq m + o_n(1). \tag{5.34}$$

Agora, recordando (5.1) e (5.18), temos

$$d \leftarrow I(u_n) \geq I(w_n) + I(v_n) + o_n(1)$$

$$\Rightarrow d \geq m_\infty + m \geq m_\infty$$

contradizendo a nossa hipótese, na qual temos $d \in (0, \min\{m_\infty, \frac{1}{3} S^{3/2} \|K\|_\infty^{-1/2}\})$.

Visto que o **Anulamento** e a **Dicotomia** não são válidas, concluimos que a **Compacidade** acontece.

Sendo a **compacidade** válida, existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$ tal que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B^c_R(y_n)} \rho_n(x)dx < \varepsilon.$$

Donde, pelas imersões de Sobolev e teorema de mudança de variável

$$\begin{aligned}
\int_{B^c_R(y_n)} K(x)|u_n|^6 + \mu Q(x)|u_n|^q dx &\leq \|K\|_\infty \int_{B^c_R(y_n)} |u_n|^6 dx + \mu\|Q\|_\infty \int_{B^c_R(y_n)} |u_n|^q dx \\
&= \|K\|_\infty \int_{B^c_R} |u_n(x+y_n)|^6 dx \\
&+ \mu\|Q\|_\infty \int_{B^c_R} |u_n(x+y_n)|^q dx \\
&\leq C\|K\|_\infty \Big(\int_{B^c_R} |\nabla u_n(x+y_n)|^2 + u_n^2(x+y_n)dx \Big)^3 \\
&+ C\|Q\|_\infty \Big(\int_{B^c_R} |\nabla u_n(x+y_n)|^2 + u_n^2(x+y_n)dx \Big)^{q/2} \\
&= C\|K\|_\infty \Big(\int_{B^c_R(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx \Big)^3 \\
&+ C\|Q\|_\infty \Big(\int_{B^c_R(y_n)} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 dx \Big)^{q/2} \leq C\varepsilon^{q/2}
\end{aligned}$$

sendo assim,

$$\int_{B^c_R(y_n)} K(x)|u_n|^6 + \mu Q(x)|u_n|^q dx \leq C\varepsilon^{q/2} \tag{5.35}$$

ou seja, $(K(x)|u_n|^6 + \mu Q(x)|u_n|^q)$ satisfaz as mesmas propriedades de (ρ_n). Então, (y_n) é limitada. Caso contrário, para n suficientemente grande, temos da equação (5.35),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|u_n|^6 dx &= \int_{B_R(y_n)} (K(x) - K_\infty)|u_n|^6 dx + \int_{B^c_R(y_n)} (K(x) - K_\infty)|u_n|^6 dx \\
&\leq \varepsilon C + C\varepsilon^{q/2}
\end{aligned}$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (K(x) - K_\infty)|u_n|^6 dx = o_n(1).$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (Q(x) - Q_\infty)|u_n|^q dx = o_n(1),$$

daí, fica claro que $I(u_n) = I_\infty(u_n) + o_n(1)$ e $I'_\infty(u_n)(u_n) = o_n(1)$. Desta forma, pelo **Lema 5.5** e pela continuidade de I_∞, existe $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to 1$ e $t_n u_n \in \mathcal{N}_\infty$. Portanto, $d = I(u_n) + o_n(1) = I_\infty(t_n u_n) + o_n(1) \geq m_\infty + o_n(1)$, o que é absurdo. Donde (y_n) é limitada.

Agora, sendo (u_n) limitada, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Desde que (y_n) é limitada, temos $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^3)$. De fato, veja que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n - u|^q dx = \int_{B^c_{\overline{R}}} |u_n - u|^q dx + \int_{B_{\overline{R}}} |u_n - u|^q dx$$

onde $\overline{R}$ é suficientemente grande de modo que $B_{\overline{R}} \supset B_R(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\begin{aligned} \int_{B^c_{\overline{R}}} |u_n - u|^q dx &\leq 2^q \int_{B^c_{\overline{R}}} |u_n|^q dx + 2^q \int_{B^c_{\overline{R}}} |u|^q dx \\ &\leq \frac{2^q}{Q_\infty} \int_{B^c_{\overline{R}}} Q(x)|u_n|^q dx + \frac{2^q}{Q_\infty} \int_{B^c_{\overline{R}}} Q(x)|u|^q dx \end{aligned}$$

e, observando que dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar $\overline{R}$ grande de modo que:

$$\frac{2^q}{Q_\infty} \int_{B^c_{\overline{R}}} Q(x)|u_n|^q dx < \varepsilon/3$$

$$\frac{2^q}{Q_\infty} \int_{B^c_{\overline{R}}} Q(x)|u|^q dx < \varepsilon/3$$

$$\int_{B_{\overline{R}}} |u_n - u|^q dx < \varepsilon/3$$

para n suficientemente grande. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n - u|^q dx < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. Fica provada a afirmação.

Diante da afirmação, denotemos $v_n = u_n - u$, então

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx \leq C\|v_n\|^4_{12/5} \leq C\|v_n\|_2^{4\theta} \|v_n\|_q^{4(1-\theta)} \to 0$$

onde $\theta \in (0,1)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx = o_n(1). \tag{5.36}$$

Desta forma, como

$$\|v_n\|^2 = \|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2(u_n, u) = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + o_n(1)$$

temos,

$$\|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u\|^2 + o_n(1), \tag{5.37}$$

visto que:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow (u_n, u) \to (u, u) = \|u\|^2.$$

Também temos, pelas propriedades do termo não local e por (5.36), que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} v_n^2 dx + o_n(1) = o_n(1)$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = o_n(1). \tag{5.38}$$

Por fim, observando que:

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\mathbb{R}^3) \ \Rightarrow u_n^+ \to u^+ \text{ em } L^q(\mathbb{R}^3), \tag{5.39}$$

teremos por (5.37) – (5.39) que,

$$\begin{aligned} I(u_n) - I(u) &= \frac{1}{2}(\|u_n\|^2 - \|u\|^2) + \frac{1}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx\Big) \\ &- \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)[|u_n^+|^q - |u^+|^q]dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)[|u_n^+|^6 - |u^+|^6]dx \\ &= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)[|u_n^+|^6 - |u^+|^6]dx + o_n(1) \end{aligned}$$

daí,

$$I(u_n) - I(u) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)[|u_n^+|^6 - |u^+|^6]dx + o_n(1). \tag{5.40}$$

Notando que, $f_n = K^{1/6}u_n$ e $f = K^{1/6}u$ satisfazem as hipóteses de Brèzis-Lieb em [7], quando $j(x) = |x^+|^6$, $\varphi_\varepsilon(x) = 5.2^5.\varepsilon^{1/5}|x|^6$ e $\phi_\varepsilon(y) = (2^5/\varepsilon^6 + 6.2^5)|y|^6$. Daí, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^6 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|(u_n - u)^+|^6 dx + o_n(1)$$

$$\Rightarrow I(u_n) - I(u) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v_n^+|^6 dx + o_n(1). \tag{5.41}$$

De maneira análoga,

$$I'(u_n)(u_n) - I'(u)(u) = \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v_n^+|^6 dx + o_n(1). \tag{5.42}$$

Neste ponto,

Afirmarção 2: $I'(u) = 0$ e $I(u) \geq 0$.

Para comprovar tal afirmação, precisaremos de algumas estimativas. Sabemos que,

$$I'(u_n)(v) \to 0$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n.\nabla v + u_n v dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^4 u_n^+ v dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u_n^+|^{q-2} u_n^+ v dx \to 0. \tag{5.43}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n.\nabla v + u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u.\nabla v + uv dx. \tag{5.44}$$

Também temos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^4 u_n^+ v dx \to \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^4 u^+ v dx. \tag{5.45}$$

Para justificar (5.45), definamos $f_n := K|u_n^+|^4 u_n^+$ e $f := K|u^+|^4 u^+$, daí, como $f_n, f \in L^5(\mathbb{R}^3)$ e $f_n \to f$ q.s. temos $f_n \rightharpoonup f$ em $L^5(\mathbb{R}^3)$, ver [17]. Donde, tomando $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^4 u_n^+ \eta dx \to \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^4 u^+ \eta dx$$

por densidade, teremos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^4 u_n^+ v dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^4 u^+ v dx \tag{5.46}$$

e, analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u_n^+|^{q-2} u_n^+ v dx = \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u^+|^{q-2} u^+ v dx. \tag{5.47}$$

Observando as propriedades do termo não local, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n v dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u v dx. \tag{5.48}$$

Desta forma, por (5.43) – (5.48), temos

$$I'(u_n)(v) \to I'(u)(v) \Rightarrow I'(u)(v) = 0 \text{ para todo } v \in H^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow I'(u) = 0.$$

Para concluir a prova da afirmação, observemos que,

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{q} I'(u)(u) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)\|u\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{q}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + \Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{6}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^6 dx \geq 0$$

daí, $\Rightarrow I(u) \geq 0$. O que conclui a prova da **Afirmação 2**.

Para concluir a prova do lema, observemos que, por (5.42) e a **Afirmação 2** acima, como (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, podemos supor $\|v_n\|^2 \to b_1$. Caso $b_1 \neq 0$, fazendo contas análogas as feitas no caso do **Anulamento**, temos $d \geq \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}$, o que contradiz a hipótese. Portanto $b_1 = 0$, e consequentemente, $v_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, ou seja, $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. O lema fica assim demosntrado. ■

5.2 O Teorema 5.1

Antes de demonstrarmos, de fato, o teorema, precisaremos de algumas observações adicionais que nos serão de fundamental importância. Primeiramente, recordemos que no **Lema 5.4**, provamos que zero é um mínimo local estrito de I. Temos também, $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Basta notar que, para $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ fixada, temos

$$I(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|^2 + \frac{1}{4}t^4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx - \frac{1}{6}t^6\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u^+|^6dx - \frac{1}{q}t^q\int_{\mathbb{R}^3}\mu Q(x)|u^+|^q dx.$$

Como I tem a geometria do Passo da Montanha poderemos considerar,

$$c_1 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}$. Daí, para chegarmos ao resultado de existência, basta mostrarmos, em virtude do **Lema 5.6**, que

$$c_1 < \min\{m_\infty, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}\}.$$

Para tal, introduziremos as funções $u_{\varepsilon,x_0} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ definidas por

$$u_{\varepsilon,x_0} = C\frac{\varepsilon^{1/4}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{1/2}},$$

onde C é uma constante normalizada e x_0 é escolhida de tal forma que $K(x_0) = \max_{\mathbb{R}^3} K(x)$. Relembremos que, u_{ε,x_0} é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_{\varepsilon,x_0}|^2dx = \int_{\mathbb{R}^3}|u_{\varepsilon,x_0}|^6dx = S^{3/2}.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_{B_R(x_0)}$ e $supt\varphi \subset B_{2R}(x_0)$. Definamos $v_\varepsilon := \varphi u_{\varepsilon,x_0}$. Então a seguinte estimativa assintótica é válida se ε é suficientemente pequeno (ver [8]):

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_2^2 = K_1 + O(\varepsilon^{1/2}) \tag{5.49}$$

$$\|v_\varepsilon\|_6^2 = K_2 + O(\varepsilon) \tag{5.50}$$

$$\|v_\varepsilon\|_s^s = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{s}{4}}), & \text{se} \quad s \in [2,3) \\ O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}|ln\varepsilon|), & \text{se} \quad s = 3 \\ O(\varepsilon^{\frac{6-s}{4}}), & \text{se} \quad s \in (3,6) \end{cases} \tag{5.51}$$

onde $K_1/K_2 = S$.

Lema 5.7. *Seja* $4 < q < 6$, *então para todo* $\mu > 0$

$$c_1 < \frac{1}{3} S^{3/2} \|K\|_\infty^{-1/2}.$$

Ademais, se $2 < q \leq 4$, *a desigualdade continua válida desde que* μ *seja suficientemente grande.*

Demonstração.

Primeiramente, note que $I(tv_\varepsilon) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e, bem sabemos que existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \sup_{t \geq 0} I(tv_\varepsilon) > 0 \quad \text{com } t_\varepsilon v_\varepsilon \in \mathcal{N}.$$

Lembremos também que, existe $\rho, C > 0$ tais que

$$I(u) \geq C, \quad \|u\| = \rho,$$

donde,

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \sup_{t \geq 0} I(tv_\varepsilon) \geq I\left(\frac{\rho}{\|v_\varepsilon\|} v_\varepsilon\right) \geq C > 0,$$

visto que,

$$\left\| \frac{\rho v_\varepsilon}{\|v_\varepsilon\|} \right\| = \rho.$$

Daí, pela continuidade, sabemos que existe $t_0 > 0$ tal que $t_\varepsilon \geq t_0 > 0$, para todo $\varepsilon > 0$; caso contrário, teriamos $(t_{\varepsilon_n}) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_{\varepsilon_n} \to 0$ e, consequentemente, $I(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) \to 0$, visto que, (v_{ε_n}) é limitada. Agora, note que pelas estimativas (5.49)-(5.51), temos

$$\begin{aligned} I(tv_\varepsilon) &= t^2 \|v_\varepsilon\|^2 + t^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_\varepsilon} v_\varepsilon^2 dx - t^6 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6} K(x) |v_\varepsilon^+|^6 dx - t^q \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{q} \mu Q(x) |v_\varepsilon^+|^q dx \\ &\leq t^2 (\|v_\varepsilon\|_2^2 + \|\nabla v_\varepsilon\|_2^2) + t^4 \|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 - t^6 \frac{K_\infty}{6} \|v_\varepsilon\|_6^6 - \frac{t^q}{q} \mu Q_\infty \|v_\varepsilon\|_q^q \\ &= t^2 (K_1 + O(\varepsilon^{1/2})) + t^4 O(\varepsilon) - t^6 \frac{K_\infty}{6} (K_2 + O(\varepsilon))^4 - \frac{t^q}{q} \mu Q_\infty O(\varepsilon^{\frac{6-q}{4}}) \end{aligned}$$

donde, caso $t_{\varepsilon_n} \to \infty$, $I(t_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}) \to -\infty$, o que é absurdo. Visto que, $I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq 0$, para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $\{t_\varepsilon\}$ é limitado superiormente. Denote,

$$g(t) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v_\varepsilon|^6 dx.$$

Afirmação 1:

$$\sup_{t\geq 0} g(t) \leq \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2}).$$

De fato, pela hipótese $(H2)$, temos que: para todo $\delta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$|K(x) - K(x_0)| \leq \delta|x - x_0|^\alpha, \quad \text{quando} \quad |x - x_0| < \rho$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x) - K(x_0)||v_\varepsilon|^6 dx \leq \int_{B_\rho(x_0)} \delta|x - x_0|^\alpha |v_\varepsilon|^6 dx + C\int_{B_\rho^c(x_0)} |v_\varepsilon|^6 dx.$$

Agora, chamemos

$$I_1 = \int_{B_\rho(x_0)} \delta|x - x_0|^\alpha |v_\varepsilon|^6 dx$$

e,

$$I_2 = C\int_{B_\rho^c(x_0)} |v_\varepsilon|^6 dx.$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\int_{B_\rho(x_0)} \delta|x - x_0|^\alpha \frac{\varepsilon^{3/2}}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^3} dx = C\delta\varepsilon^{3/2}\int_{B_\rho} \frac{|x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx \\ &= C\delta\varepsilon^{3/2}\int_{|x|\leq\varepsilon^{1/2}} \frac{|x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx + C\delta\varepsilon^{3/2}\int_{\varepsilon^{1/2}\leq|x|\leq\rho} \frac{|x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx. \end{aligned}$$

Agora denotando,

$$I_1^1 = \int_{|x|\leq\varepsilon^{1/2}} \frac{|x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx$$

e

$$I_1^2 = \int_{\varepsilon^{1/2}\leq|x|\leq\rho} \frac{|x|^\alpha}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx,$$

teremos

$$I_1^1 \leq \int_{|x|\leq\varepsilon^{1/2}} \frac{|x|^\alpha}{\varepsilon^3} dx = \frac{\omega_3}{\varepsilon^3}\int_0^{\varepsilon^{1/2}} r^{\alpha+2} dr = \frac{\omega_3}{\varepsilon^3}\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha+3}{2}}}{\alpha+3} = \frac{\omega_3}{\alpha+3}\varepsilon^{\frac{\alpha-3}{2}} \leq \frac{\omega_3}{\alpha+3}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$$

e

$$I_1^2 \leq \int_{\varepsilon^{1/2}}^\rho \omega_3 r^{\alpha-4} dr = \omega_3\Big[\frac{\rho^{\alpha-3}}{\alpha-3} - \frac{\varepsilon^{\frac{\alpha-3}{2}}}{\alpha-3}\Big] \leq \omega_3\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha-3}{2}}}{3-\alpha} \leq \omega_3\frac{\varepsilon^{\alpha/2}}{3-\alpha}$$

implicando,

$$I_1 \leq C\delta\varepsilon^{3/2}\left(\frac{\omega_3}{\alpha+3}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} + \omega_3\frac{\varepsilon^{\alpha/2}}{3-\alpha}\right)$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= C\int_{B^c_\rho(x_0)} |v_\varepsilon|^6 dx = C\int_{\rho\leq|x-x_0|\leq R} |v_\varepsilon|^6 dx \\ &\leq C\int_{\rho\leq|x|\leq R} \frac{\varepsilon^{3/2}}{|x|^6} dx = C\omega_3\varepsilon^{3/2}\int_\rho^R r^{-4} dr \\ &= C\omega_3\varepsilon^{3/2}\Big(-\frac{R^{-3}}{3} + \frac{\rho^{-3}}{3}\Big). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x) - K(x_0)||v_\varepsilon|^6 dx \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon, \delta, \rho \to 0.$$

Observando que, para $A, B > 0$ constantes

$$\sup_{t\geq 0}\Big(\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^6}{6}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\frac{A}{B^{1/3}}\Big)^{3/2}$$

temos,

$$\sup_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x_0)|v_\varepsilon|^6 dx\right) = \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2})$$

visto que, por alguns cálculos simples, temos

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x_0)|v_\varepsilon|^6 dx\right) &= \frac{1}{3}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx}{\left(K(x_0)\int_{\mathbb{R}^3}|v_\varepsilon|^6 dx\right)^{1/3}}\right]^{3/2} \\ &= \frac{1}{3}\|K\|_\infty^{-1/2}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_\varepsilon|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^3}|v_\varepsilon|^6 dx\right)^{1/3}}\right]^{3/2} \\ &= \frac{1}{3}\|K\|_\infty^{-1/2}\Big(\frac{K_1 + O(\varepsilon^{1/2})}{K_2 + O(\varepsilon)}\Big)^{3/2} \\ &= \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

donde segue a **Afirmação 1**.

Diante da **Afirmação 1** acima,

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &\leq \sup_{t\geq 0} g(t) + \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|_2^2 + \frac{t_\varepsilon^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{v_\varepsilon} v_\varepsilon^2 dx - \frac{t_\varepsilon^4 \mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)|v_\varepsilon|^q dx \\ &\leq \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2}) + K_3\|v_\varepsilon\|_2^2 + K_4\|v_\varepsilon\|_{12/5}^4 - \mu K_5 \int_{\mathbb{R}^3}|v_\varepsilon|^q dx, \end{aligned}$$

onde K_3, K_4 e K_5 são constantes positivas cuja existência é devido (t_ε) ser limitada superiormente e inferiormente como dito no início da demonstração. Desta forma, como $c \leq I(t_\varepsilon v_\varepsilon)$, para completarmos a demonstração, basta mostrarmos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon^2 - \mu v_\varepsilon^q dx - \|v_\varepsilon\|_{12/5}^4\Big) = -\infty$$

Com efeito o limite é verdadeiro, visto que, pelas estimativas conhecidas de v_ε, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3}(v_\varepsilon^2 - \mu v_\varepsilon^q)dx + \left(\int_{\mathbb{R}^3}|v_\varepsilon|^{12/5}dx\right)^{5/3} \leq \begin{cases} C_1\varepsilon^{1/2} - C_2\mu\varepsilon^{\frac{6-q}{4}} + C_3\varepsilon, & q\in(3,5) \\ C_1\varepsilon^{1/2} - C_2\mu\varepsilon^{q/4}|ln\varepsilon| + C_3\varepsilon & q=3 \\ C_1\varepsilon^{1/2} - C_2\mu\varepsilon^{q/4} + C_3\varepsilon & q\in(2,3) \end{cases}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas que não dependem de ε. Donde vemos que, se $2 < q \leq 4$, o limite, a ser provado, segue da estimativa acima para $\mu > 0$. Se $2 < q \leq 4$, basta escolhermos $\mu = \varepsilon^{-\sigma}$, $\sigma > 0$ que também verificamos o limite. ■

Lema 5.8. *Seja $4 < q < 6$. Então, m_∞ é atingido em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para todo $\mu > 0$. Se $q = 4$, m_∞ é atingido em $H^1(\mathbb{R}^3)$ desde que μ seja suficientemente grande.*

Demonstração.

Temos que, I_∞ tem a geometria do Passo da Montanha. Seja,

$$c_\infty = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)); \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0\}$. Desde que, $4 \leq q < 6$, temos

$$m_\infty = \inf_{u\neq 0}\max_{t\geq 0} I_\infty(tu) > 0$$

e, $m_\infty = c_\infty$.

Desta forma, pelo princípio variacional de Ekeland, existe $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$I_\infty(u_n) \to c_\infty \quad \text{e} \quad I'_\infty(u_n) \to 0 \tag{5.52}$$

Pela mesma justificativa do **Lema 5.6**, temos que (u_n) é limitada. Denotemos $w_n(x) := u_n(x+y_n)$ para $y_n \in \mathbb{R}^3$.Afirmamos que, existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $w_n \rightharpoonup w \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

De fato, suponhamos que para toda sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$ $w_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Notemos,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |u_n|^s dx = 0, \quad s \in [2,6) \tag{5.53}$$

caso contrário: existe $s \in [2,6)$, $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |u_n|^s dx > \delta > 0$$

assim, existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_1(y_n)} |u_n|^s dx \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{B_1} |w_n|^s dx \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

o que é uma contradição. Visto que, se $w_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, $w_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(B_1)$, logo $w_n \to 0$ em $L^s(B_1)$. Como queriamos demonstrar.

Daí, observando (5.52), teremos, por [22], que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^3)$ para $2 < s < 6$. Em particular, temos $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^3)$ e em $L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$. Desta forma, usando as propriedades do termo não local,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty |u_n|^q dx \to 0$$

$$\Rightarrow I_\infty(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{6}K_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n^+|^6 dx + o_n(1) \tag{5.54}$$

e,

$$I'_\infty(u_n)(u_n) = \|u_n\|^2 - K_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n^+|^6 dx + o_n(1). \tag{5.55}$$

Como (u_n) é limitada, temos $I'_\infty(u_n)(u_n) \to 0$ e, assim, por (5.54) e (5.55), poderemos supor

$$\|u_n\|^2 \to b > 0 \quad \text{e} \quad K_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n^+|^6 dx \to b > 0$$

pelo mesmo argumento usado para mostrar, que o **anulamento** não ocorre no **Lema 5.6**.

Donde, por desigualdade de Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |u_n^+|^6 dx \leq K_\infty (S^{-1}\|\nabla u_n^+\|_2^2)^3 \leq \|K\|_\infty (S^{-1}\|u_n\|^2)^3$$

implicando que,

$$b \geq S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}$$

desta forma,

$$c_\infty = \lim I_\infty(u_n) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big) b \geq \frac{1}{3} S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}$$

o que é um absurdo. Visto que estariamos contradizendo o **Lema 5.7**. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Desde que, $I_\infty(w_n) = I_\infty(u_n) \to c_\infty$, $I'_\infty(w_n)(v_y) = I'_\infty(u_n)(v)$, por mudança de variáveis, onde $v_y(x) = v(x+y)$, temos, por (5.52), que

$$|I'_\infty(w_n)(v_y)| = |I'_\infty(u_n)(v)| \leq \|I'_\infty(u_n)\|\|v\| \to 0.$$

Usando o mesmo argumento, do final da demonstração do **Lema 5.6**, teremos

$$I'_\infty(w_n) \to 0 \Rightarrow I'_\infty(w) = 0 \tag{5.56}$$

e daí,

$$c_\infty = \lim[I_\infty(w_n) - \frac{1}{4} I'_\infty(w_n)(w_n)] = \lim[\frac{1}{4}\|w_n\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |w_n^+|^6 dx + \Big(\frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{q}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty |w_n^+|^q dx].$$

Note que,

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \|w\|^2 \leq \liminf_n \|w_n\|^2 \tag{5.57}$$

e, pelas imersões de Sobolev e limitação de (w_n)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^6 dx \leq C\|w_n\|^6 \leq C.$$

Pelo lema de Fatou, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w^+|^6 dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |w_n^+|^6 dx \tag{5.58}$$

e, analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w^+|^q dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^3} |w_n^+|^q dx. \tag{5.59}$$

Desta forma, por $(5.57) - (5.59)$,

$$\lim\left[\frac{1}{4}\|w_n\|^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |w_n^+|^6 dx + \Big(\frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{q}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty |w_n^+|^q dx\right]$$

$$\geq \frac{1}{4}\|w\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \int_{\mathbb{R}^3} K_\infty |w^+|^6 dx + \left(\frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^3} Q_\infty |w^+|^q dx = I_\infty(w)$$

assim,

$$c_\infty \geq I_\infty(w).$$

Desde que, $w \neq 0$, $c_\infty = m_\infty$ e (5.56), temos $I_\infty(w) \geq c_\infty$. Segue que, $I_\infty(w) = c_\infty$. ■

Neste ponto, é válido destacar que, sem perda de generalidade, podemos supor que ao menos uma das desigualdades de $(H1)$ é estrita em algum conjunto de medida não nula, pois, caso contrário, o teorema que desejamos provar seguiria do **Lema 5.8** que acabamos de provar.

Lema 5.9. *Se $4 < q < 6$, então $c_1 < m_\infty$ para todo $\mu > 0$. Se $q = 4$, então $c_1 < m_\infty$ desde que μ seja suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $u_\infty \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $I_\infty(u_\infty) = m_\infty$ e $I_\infty(u_\infty) = \max_{t\geq 0} I(tu_\infty)$. Daí, existe $t^* > 0$ tal que

$$c_1 \leq \sup_{t\geq 0} I(tu_\infty) = I(t^*u_\infty) < I_\infty(t^*u_\infty) \leq I_\infty(u_\infty) = m_\infty$$

implicando,

$$c_1 < m_\infty.$$

■

Por fim, com as ferramentas contruídas até agora, podemos provar o **Teorema 5.1**, cuja demonstração segue abaixo:

Demonstração. Primeiramente, note que, pelos **Lema 5.7** e **Lema 5.8**, temos $0 < c_1 < m_\infty, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}$; desta forma, pelo **Lema 5.6**, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ponto crítico não trivial de I. Daí,

$$0 = I'(u)(u^-) = \|u^-\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u |u^-|^2 dx \geq \|u^-\|^2$$

$$\Rightarrow u^- = 0 \Rightarrow u \geq 0$$

Desta forma, pelo princípio do máximo, $u > 0$. Daí, (u, ϕ_u) é uma solução positiva. ■

5.3 Os Teoremas 5.2 e 5.3

Os **Teoremas 5.2** e **5.3**, faz parte da abordagem do problema em questão para o caso $2 < q < 4$. No entanto, este caso é bem mais delicado que o caso $4 \leq q < 6$, visto que encontramos duas dificuldades. A primeira, segue do fato da variedade de Nehari $\mathcal{N}_\infty$ ser estruturalmente complicada, por exemplo, não conseguimos comparar c_∞ e m_∞, fato este importante para suprir a falta de imersões compactas. Sendo assim, se faz necessário a restrição de I ao espaço $H^1_r(\mathbb{R}^3)$, pois, como bem sabemos ganhamos a imersão compacta $H^1_r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ para $s \in (2,6)$. É importante, destacarmos que, todo ponto crítico de $I|_{H^1_r(\mathbb{R}^3)}$ é ponto crítico de I, fato encontrado em [28]. A outra dificuldade, é que não conseguimos uma sequência (PS) limitada de forma usual para I quando $2 < q < 6$. Para superar tal dificuldade, teremos de usar o resultado de L. Jeanjean [16]. Tal resultado será mencionado como proposição, a qual segue abaixo:

Proposição 5.1. *Seja X um espaço de Banach com a norma $\|.\|_X$ e seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideremos a família $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de funcionais de classe C^1 definidos em X, da forma*

$$\Phi_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \textit{para todo } \lambda \in J,$$

onde $B(u) \geq 0$ para todo $u \in X$, e tal que $A(u) \to \infty$ ou $B(u) \to \infty$, quando $\|u\| \to \infty$. Assumindo que existe dois pontos v_1 e v_2 em X tal que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi_\lambda(\gamma(t)) > \max\{\Phi_\lambda(v_1), \Phi_\lambda(v_2)\}, \qquad \textit{para todo } \lambda \in J$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}.$$

Então, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$ limitada para Φ_λ, isto é, existe uma sequência $\{u_n(\lambda)\} \subset X$ tal que

- *$\{u_n(\lambda)\}$ é limitada em X,*
- *$\Phi_\lambda(u_n(\lambda)) \to c_\lambda$,*
- *$\Phi'_\lambda(u_n(\lambda)) \to 0$ em X', onde X' é o dual topológico de X.*

No que segue, faremos referência à família de funcionais, para $\lambda \in [1/2, 1]$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K(x)|u^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|u^+|^q dx.$$

No lema seguinte, mais uma vez, faremos menção de uma identidade tipo Pohozaev:

Lema 5.10. *Seja u um ponto crítico de I_λ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx+\frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2dx+\frac{5}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx-\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u^+|^6dx-\frac{3\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\mu Q(x)|u^+|^qdx-$$
$$-\frac{\lambda}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla K(x),x)|u^+|^6dx-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^3}(\mu\nabla Q(x),x)|u^+|^qdx=0$$

O próximo lema, é extremamente importante para nossos objetivos. Será fundamental nas demonstrações dos teoremas. Sendo mais exato, a parte (1) deste lema, será usada na demonstração do **Teorema 5.2**, enquanto que a parte (2), na demonstração do **Teorema 5.3**.

Lema 5.11. *Supondo (H1) e (H2) e, que K e Q são funções radiais. Se I tem uma sequência $(PS)_d$ limitada com $d \in (0, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2})$, então para $\mu > 0$ suficientemente grande temos:*

1. *I tem um ponto crítico não-trivial $u \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ com $I(u) = d$, para $3 \leq q < 4$, desde que $(H3)$ se verifique.*

2. *I tem um ponto crítico não-trivial $u \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$, para $2 < q < 3$.*

Demonstração.

Seja $(u_n) \subset H_r^1(\mathbb{R}^3)$ sequência $(PS)_d$ limitada em I. Como temos a imersão compacta $H_r^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ para $s \in (2,6)$, logo existe $u \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_r^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad u_n \to u \quad \text{em } L^s(\mathbb{R}^3)$$

Por justificativas análogas à já usadas nesse texto, temos $I'(u) = 0$.

(1) Para tal caso, afirmamos que, $I(u) \geq 0$.

De fato, denotemos

$$\overline{a} := \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx, \quad \overline{b} := \int_{\mathbb{R}^3}u^2dx, \quad \overline{c} := \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx$$

$$\overline{d} := \int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u^+|^6dx, \quad \overline{e} := \int_{\mathbb{R}^3}\mu Q(x)|u^+|^qdx$$

$$\overline{A} := \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla K(x),x)|u^+|^6dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^3}(\mu\nabla Q(x),x)|u^+|^qdx$$

chamaremos todas as equações acima de (5.60); de (H3), temos $\overline{A} \leq 0$. Então,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{3}{2}\overline{b} + \frac{5}{4}\overline{c} - \frac{1}{2}\overline{d} - \frac{3}{q}\overline{e} &= \overline{A} \\ \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{4}\overline{c} - \frac{1}{6}\overline{d} - \frac{1}{q}\overline{e} &= I(u) \\ \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} - \overline{d} - \overline{e} &= 0 \end{cases} \tag{5.61}$$

onde a primeira equação vem da identidade de Pohozaev dada no **Lema 5.10**, a segunda vem da definição de $I(u)$ e a terceira vem de $I'(u)(u) = 0$.

Daí, usando a relação acima e $3 \leq q < 4$, temos

$$\begin{aligned} 3I(u) &\geq 3I(u) + \overline{A} = \frac{3}{2}\overline{a} + \frac{3}{2}\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{c} - \frac{1}{2}\overline{d} - \frac{3}{q}\overline{e} + \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{3}{2}\overline{b} + \frac{5}{4}\overline{c} - \frac{1}{2}\overline{d} - \frac{3}{q}\overline{e} \\ &= 2\overline{a} + 3\overline{b} + 2\overline{c} - \overline{d} - \frac{6}{q}\overline{e} = \overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c} + \frac{q-6}{q}\overline{e} \\ &\geq \overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c} - \overline{d} + \frac{q-6}{q}\overline{e} = \overline{b} + \frac{2q-6}{q}\overline{e} \geq 0 \end{aligned}$$

desta forma,

$$3I(u) \geq 0 \Rightarrow I(u) \geq 0$$

donde $I(u) \geq 0$.

Agora, seja $v_n = u_n - u$. Como $v_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^3)$ para $s \in (2,6)$, temos as mesmas equações (5.41) e (5,42). Observando que, $(\|v_n\|)$ é limitada, podemos supor que seja convergente. Suponhamos $\|v_n\| \nrightarrow 0$, análogo ao que fizemos para provar que o **Anulamento** não era válido na demonstração do **Lema 5.6**, temos, usando o fato de que $I(u) \geq 0$, que

$$d = \lim[I(u_n) - I(u)] + I(u) \geq \lim[I(u_n) - I(u)] \geq \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2}$$

donde chegamos a um fato não veridico. Daí, $\|v_n\| \to 0$, donde $u_n \to u$ em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ e desta forma $I(u) = c \neq 0$ e $u \neq 0$. Portanto, (1) esta demonstrado.

(2) Para a prova deste caso, basta mostrarmos que $u \neq 0$. Suponhamos, por contradição, $u = 0$. Então, $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^3)$ e $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to 0$, daí,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1) \tag{5.62}$$

e,

$$I'(u_n)(u_n) = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx + o_n(1). \tag{5.63}$$

Caso $\|u_n\| \to 0$, temos, usando o fato que $I'(u_n)(u_n) \to 0$, (5.62) e (5.63), que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^6 dx = o_n(1)$$

donde,

$$I(u_n) \to 0 \Rightarrow d = 0,$$

ou seja, chegamos a um absurdo. Sendo $\|u_n\| \nrightarrow 0$, análogo ao que fizemos para provar que o **Anulamento** não era válido na demonstração do **Lema 5.6**, temos

$$d \geq \frac{1}{3} S^{3/2} \|K\|_\infty^{-1/3}$$

o que gera um absurdo. Portanto, $u \neq 0$. ■

Finalmente, com as ferramentas construidas até aqui, poderemos demonstrar os **Teoremas 5.2** e **5.3**. Cujas demonstrações seguem abaixo:

Demonstração. (**Teorema 5.2**)

Usando o **Lema 5.11** parte (1), é suficiente construir uma sequência $(PS)_d$ limitada com $d \in (0, \frac{1}{3} S^{3/2} \|K\|_\infty^{-1/2})$ para I. Consideremos a família de funcionais I_λ, $1/2 \leq \lambda \leq 1$. Considerando também a **Proposição 5.1** com $X = H_r^1(\mathbb{R}^3)$, $J = [1/2, 1]$ e $\Phi_\lambda = I_\lambda$, teremos

$$B(u) = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u^+|^6 dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^3} \mu Q(x)|u^+|^q dx \geq 0$$

e,

$$A(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \to \infty$$

quando $\|u\| \to \infty$. Como I_λ tem a geometria do Passo da Montanha, podemos definir:

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)), \quad \lambda \in [1/2, 1]$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)); \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = v_0\}$ e $I_{1/2}(v_0) < 0$.

Daí, pela **Proposição 5.1**, temos a existência de $J_1 \subset [1/2, 1]$ com $|J_1| = 0$ tal que para $\lambda \in [1/2, 1] - J_1$ existe sequência $(PS)_{c_\lambda}$ limitada, para I_λ.

Como, $c_\lambda \in (0, \frac{1}{3} S^{3/2} \|\lambda K\|_\infty^{-1/2})$, pelos **Lema 5.7** e **Lema 5.11** parte (1), a existência de $u_\lambda \in H_r^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$I_\lambda'(u_\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$$

para $\lambda \in [1/2, 1] - J_1$.

Donde podemos escolher $(\lambda_n) \subset [1/2, 1] - J_1$ tal que $\lambda_n \to 1$, e consequentemente, existe (u_{λ_n}), a qual denotaremos simplesmente por (u_n), pontos críticos de I_{λ_n} como acima. Afirmamos que, (u_n) é limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$.

O que, de fato, acontece. Definamos a_n, b_n, c_n, d_n, e_n e A_n como em (5.60), substituindo u por u_n. Observemos que, por (H3), $A_n \leq 0$. Daí, como em (5.61), temos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n + \frac{5}{4}c_n - \frac{\lambda_n}{2}d_n - \frac{3\lambda_n}{q}e_n &= \lambda_n A_n \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n - \frac{\lambda_n}{6}d_n - \frac{\lambda_n}{q}e_n &= c_{\lambda_n} \\ a_n + b_n + c_n - \lambda_n d_n - \lambda_n e_n &= 0 \end{cases} \tag{5.64}$$

donde,

$$a_n + b_n + \frac{\lambda_n}{3}d_n + \frac{q-4}{q}\lambda_n e_n = 4c_{\lambda_n} \tag{5.65}$$

$$b_n + \lambda_n d_n + \frac{2q-6}{q}\lambda_n e_n = 3c_{\lambda_n} + \lambda_n A_n \leq 3c_{1/2}. \tag{5.66}$$

A última desigualdade, segue do fato de que,

$$\lambda_n A_n \leq 0 \quad \text{e} \quad c_{\lambda_n} \leq c_{1/2}, \tag{5.67}$$

onde (5.67) se justifica da seguinte forma:

$$I_{\lambda_n}(\gamma(t)) \leq I_{1/2}(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{1/2}(\gamma(t))$$

o que implica,

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{1/2}(\gamma(t))$$

assim,

$$\inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(g(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{1/2}(\gamma(t))$$

daí,

$$c_{\lambda_n} \leq c_{1/2}.$$

Sendo $3 < q < 4$, (5.66) diz-se que (e_n) é limitada. Sendo $q = 3$, (b_n) e (d_n) são limitadas por (5.66), daí, (u_n^+) é limitada em $L^q(\mathbb{R}^3)$(desigualdade de interpolação), desta forma (e_n) é limitada. Diante disso, por (5.65), (u_n) é limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$. O que prova a afirmação.

Portanto, como podemos supor (λ_n) crescente e, claramente, (c_{λ_n}) é crescente e convergente para c_1, visto que $\lambda_n \to 1$(usando justificatica semelhante a dada para (5.67)), temos que (u_n) é sequência $(PS)_{c_1}$ limitada para $I_1 = I$, pois,

- $I_{\lambda_n}(u_n) \to c_1 \Rightarrow I(u_n) \to c_1$

  Basta observar que,

$$|I_{\lambda_n}(u_n) - I(u_n)| \leq (1-\lambda_n)\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{6}K(x)|u_n^+|^6 + \frac{\mu}{q}Q(x)|u_n^+|^q dx \to 0$$

  em virtude de, (u_n) ser limitada e $\lambda_n \to 1$. Ou seja,

$$I_{\lambda_n}(u_n) - I(u_n) \to 0 \Rightarrow I(u_n) \to c_1$$

- $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0 \Rightarrow I'(u_n) \to 0$

  Notando que, para $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, onde $suptv = \Omega_v$

$$\begin{aligned}
|I'(u_n)(v) - I'_{\lambda_n}(u_n)(v)| &= \left|(\lambda_n - 1)\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^4 u_n^+ v dx + (\lambda_n - 1)\mu \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)|u_n^+|^{q-2}u_n^+ v dx\right| \\
&\leq (1-\lambda_n)\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n^+|^5|v|dx + (1-\lambda_n)\mu\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)|u_n^+|^{q-1}|v|dx \\
&= (1-\lambda_n)\int_{\Omega_v} K(x)|u_n^+|^5|v|dx + (1-\lambda_n)\mu\int_{\Omega_v} Q(x)|u_n^+|^{q-1}|v|dx \\
&\leq (1-\lambda_n)C\|u_n\|^5 + (1-\lambda_n)C\|u_n\|^{q-1} \to 0
\end{aligned}$$

  pois, (u_n) é limitada e $\lambda_n \to 1$. Ou seja,

$$I'(u_n)(v) \to 0, \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

  daí, por argumento de densidade

$$I'(u_n) \to 0,$$

  o que prova a implicação.

Portanto pelo **Lema 5.7** e **Lema 5.11**, I tem um ponto crítico não-trivial u, donde (u, ϕ_u) é solução positiva do problema em questão. ■

Para concluirmos mais um capítulo, demonstremos o último teorema:

Demonstração. (Teorema 5.3)

Primeiramente, note que, pelo **Lema 5.11**, é suficiente construir uma sequência de $(PS)_d$ limitada para $d \in (0, \frac{1}{3}S^{3/2}\|K\|_\infty^{-1/2})$. Como I tem a geometria do Passo da Montanha, existe (u_n) sequência de $(PS)_d$ com d no intervalo citado, tal que:

$$I(u_n) \to d \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0. \tag{5.68}$$

Na segunda equação do problema, multiplicando ambos os membros por $|u_n|$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^3 dx = \int_{\mathbb{R}^3} -\Delta\phi_{u_n}|u_n|dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_{u_n}.\nabla|u_n|dx$$

pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_{u_n}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n^2 dx. \quad (5.69)$$

Com (5.68) e (5.69), podemos deduzir que

$$\begin{aligned} d + 1 + \|u_n\| &\geq I(u_n) - \frac{1}{6}I'(u_n)(u_n) \\ &\geq \frac{1}{3}\|u_n\|^2 + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n^2 dx - \Big(\frac{\mu}{q} - \frac{\mu}{6}\Big)\|Q\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^q dx \\ &\geq \frac{1}{6}\|u_n\|^2 + \frac{1}{24}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n^2 dx + g(u_n) \end{aligned}$$

onde $g(u) = \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^3 dx + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx - \Big(\frac{\mu}{q} - \frac{\mu}{6}\Big)\|Q\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^q dx$.

Afirmamos que, (u_n) é limitada em $H_r^1(\mathbb{R}^3)$. De fato, caso contrário, para n suficientemente grande,

$$\frac{1}{6}\|u_n\|^2 + \frac{1}{24}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n^2 dx + g(u_n) - \frac{1}{24}\|u_n\|^2 \leq d + 1 + \Big(1 - \frac{1}{24}\|u_n\|\Big)\|u_n\| < 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{8}\|u_n\|^2 + \frac{1}{24}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n^2 dx + g(u_n) \leq 0$$

e seguindo os mesmas argumentações do **Capítulo 2**, chegamos a uma contradição. Portanto, (u_n) é $(PS)_d$ limitada. ■

Apêndice A

O Princípio Variacional de Ekeland

Este apêndice, tem como objetivo apresentar o **Princípio Variacional de Ekeland**. Trata-se de um resultado utilizado em vários trechos importantes de nosso texto e de grande importância na **Teoria dos Pontos Críticos** em geral. Devido a tal importância, reservamos tal apêndice. Para construção do Apêndice tivemos como base [23].

Teorema A.1. *Seja $\mathcal{M}$ um espaço métrico completo e $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ funcional semi-contínuo inferiormente (sci), limitado inferiomente sobre $\mathcal{M}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $u \in \mathcal{M}$ tal que,*

$$\Phi(u) \leq \inf_{\mathcal{M}} \Phi + \varepsilon.$$

Então, existe $u_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tal que,

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) \quad e \quad d(u, u_\varepsilon) \leq 1 \tag{A.1}$$

e, para todo $w \in \mathcal{M} - \{u_\varepsilon\}$,

$$\Phi(w) > \Phi(u_\varepsilon) - \varepsilon d(u_\varepsilon, w). \tag{A.2}$$

Demonstração. Primeiramente, definamos a relação: para $w, v \in \mathcal{M}$, temos

$$w \leq v \Leftrightarrow \Phi(w) + \varepsilon d(w, v) \leq \Phi(v)$$

tal relação, define uma ordem em $\mathcal{M}$. De fato, para $u, v, w \in \mathcal{M}$, temos

- $u \leq u$, basta observar que,

$$\Phi(u) + \varepsilon d(u, u) = \Phi(u) + 0 \leq \Phi(u)$$

- Se $u \leq v$ e $v \leq w$, temos $u \leq w$. Note,

$$u \leq v \Rightarrow \Phi(u) + \varepsilon d(u,v) \leq \Phi(v) \quad \text{e} \quad v \leq w \Rightarrow \Phi(v) + \varepsilon d(w,v) \leq \Phi(w)$$

$$\Rightarrow \Phi(u)+\varepsilon d(w,u) \leq \Phi(u)+\varepsilon d(w,v)+\varepsilon d(v,u) \leq \Phi(v)+\varepsilon d(w,v) \leq \Phi(w) \Rightarrow u \leq w$$

- Se $u \leq v$ e $v \leq u$, então $v = u$. Observe,

$$u \leq v \Rightarrow \Phi(u) + \varepsilon d(v,u) \leq \Phi(v) \quad \text{e} \quad v \leq u \Rightarrow \Phi(v) + \varepsilon d(u,v) \leq \Phi(u)$$

$$\Rightarrow \Phi(u) + \varepsilon d(v,u) \leq \Phi(v) \leq \Phi(v) + \varepsilon d(v,u) \leq \Phi(u)$$

$$\Rightarrow \varepsilon d(v,u) \leq 0 \Rightarrow d(v,u) \leq 0 \Rightarrow d(v,u) = 0 \Rightarrow u = v$$

Assim, fica provado que tal relação é, de fato, uma relação de ordem em $\mathcal{M}$. Agora, construamos de forma indutiva, uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}$. Partindo de $u_0 = u$, e supondo u_n conhecida, definamos

$$S_n = \{w \in \mathcal{M}; w \leq u_n\}$$

e, escolhamos $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

É imediato, que $S_{n+1} \subset S_n$ e $u_{n+1} \leq u_n$. Desde que, Φ é (sci), temos que S_n é fechado. De fato, dada $(x_k) \subset S_n$ tal que $x_k \to x$ em $\mathcal{M}$, temos $x_k \leq u_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$, assim, pela definição da ordem em $\mathcal{M}$,

$$\Phi(x_k) + \varepsilon d(x_k, u_n) \leq \Phi(u_n) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

assim, passando o $\liminf_k$, teremos

$$\liminf_k [\Phi(x_k) + \varepsilon d(x_k, u_n)] \leq \Phi(u_n) \Rightarrow \liminf_k \Phi(x_k) + \varepsilon \liminf_k d(x_k, u_n) \leq \Phi(u_n)$$

por Φ ser (sci), chegamos

$$\Phi(x) + \varepsilon d(x, u_n) \leq \Phi(u_n),$$

ou seja, $x \in S_n$. Daí, S_n é fechado.

Agora, observemos que, para $w \in S_{n+1}$, temos $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e assim,

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n+1}$$

desta forma, para $w, v \in S_{n+1}$, temos

$$d(w,v) \leq d(w,u_n) + d(v,u_n) \leq \frac{1}{\varepsilon(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon(n+1)} = \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

Sendo assim,

$$diam S_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)},$$

isto é, $diam S_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Daí, como $\mathcal{M}$ é completo e com as informações adquiridas até aqui, temos $u_n \to u_\varepsilon$ e,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{u_\varepsilon\}$$

para algum $u_\varepsilon \in \mathcal{M}$. Em particular, temos $u_\varepsilon \in S_0$, ou seja, $u_\varepsilon \leq u_0 = u$, donde

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) - \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \leq \Phi(u)$$

e,

$$d(u_\varepsilon, u) \leq \varepsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(u_\varepsilon)) \leq \varepsilon^{-1}\Big(\inf_{\mathcal{M}} \Phi + \varepsilon - \inf_{\mathcal{M}} \Phi\Big) = 1$$

assim, fica provado $(A.1)$. Agora, para mostrarmos $(A.2)$, basta mostrarmos que

$$\Phi(w) \leq \Phi(u_\varepsilon) - \varepsilon d(u_\varepsilon, w) \Rightarrow w = u_\varepsilon.$$

Sendo $\Phi(w) \leq \Phi(u_\varepsilon) - \varepsilon d(u_\varepsilon, w)$, temos $w \leq u_\varepsilon$, daí, como $u_\varepsilon \in S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e usando a definição de S_n, chegamos que $w \in S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, como $\cap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{u_\varepsilon\}$, temos $w = u_\varepsilon$, e $(A.2)$ fica provada. Como queriamos demonstrar. ■

Observação A.1. *Usando λd, com $\lambda > 0$, no lugar de d no teorema anterior, as conclusões $(A.1)$ e $(A.2)$ são substituidas, respectivamente, por*

$$d(u, u_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$$

e,

$$\Phi(w) > \Phi(u_\varepsilon) - \varepsilon \lambda d(u_\varepsilon, w).$$

A escolha $\lambda = \varepsilon^{-1/2}$ é por demais interessante. Com esta escolha, provaremos o teorema seguinte.

Teorema A.2. *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ funcional limitado inferiormente e diferenciável. Então, para cada $\varepsilon > 0$ e $u \in X$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon, \tag{A.3}$$

existe $v \in X$, tal que

$$\varphi(v) \leq \varphi(u), \tag{A.4}$$

$$|u - v| \leq \varepsilon^{1/2}, \tag{A.5}$$

$$|\varphi'(v)| \leq \varepsilon^{1/2}. \tag{A.6}$$

Demonstração.

Consideremos $\mathcal{M} = X$ e $\Phi = \varphi$ e, para $\varepsilon > 0$ dado, considerando $\lambda = \varepsilon^{-1/2}$ como no teorema e observação acima. Temos, então para u que satisfaz $(A.3)$, a existência garantida de $v \in X$, tal que $(A.4)$ e $(A.5)$ são satisfeitas. Além disso,

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon^{1/2}|v - w| \tag{A.7}$$

para todo $w \neq v$ em X. Assim, tomando $w = v + th$ com $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$ em $(A.7)$, obtemos

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{1/2}t.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade acima por t e, fazendo $t \to 0$, chegamos

$$\varphi'(v)(h) \geq -\varepsilon^{1/2}.$$

Também para todo $h \in X$ com $|h| = 1$,

$$\varphi'(v)(h) \leq \varepsilon^{1/2},$$

assim,

$$|\varphi'(v)(h)| \leq \varepsilon^{1/2}$$

donde,

$$|\varphi'(v)| \leq \varepsilon^{1/2}.$$

E, o teorema esta provado. ∎

Como consequência imediata, do teorema acima, temos:

Corolário A.3. *Seja X um espaço de Banach, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ funcional limitado inferiormente e diferenciável. Então, para toda sequência minimizante (u_k) de φ, existe uma sequência minimizante (v_k) de φ, tal que*

$$\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k),$$

$$|u_k - v_k| \to 0, \quad \textit{quando } k \to \infty.$$

$$|\varphi'(v_k)| \to 0, \quad \textit{quando } k \to \infty.$$

Um outro corolário, bastante interessante e usado, quando abordamos a variedade de Nehari neste trabalho é o seguinte:

Corolário A.4. *Seja $\mathcal{N}$ a variedade de Nehari do funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ (qualquer um dos usados neste trabalho). Então, para toda sequência minimizante (u_n) de $I|_{\mathcal{N}}$, existe (v_n) em $\mathcal{N}$ tal que,*

$$I(v_n) \leq I(u_n), \tag{A.8}$$

$$|u_n - v_n| \to 0 \tag{A.9}$$

e

$$|I'(v_n)| \to 0. \tag{A.10}$$

Demonstração.

Primeiramente, observe que a variedade de Nehari é espaço métrico completo. Desta forma, pelo **Princípio Variacional de Ekeland**, temos a existência de (v_n) em $\mathcal{N}$ com: $I(v_n) \leq I(u_n)$, $|u_n - v_n| \to 0$ e, para todo $w \neq v_n$, temos

$$I(w) > I(v_n) - \varepsilon_n d(v_n, w),$$

onde, podemos considerar, $\varepsilon_n \to 0$.

Agora, observemos que, $H^1(\mathbb{R}^3) =< v_n > \bigoplus KerG'(v_n)$. Lembrando que, $G(u) = I'(u).u$. Dado $w \in KerG'(v_n)$, então $I'(v_n).w \leq \varepsilon_n \|w\|$. De fato, sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{N}$ contínua com $\alpha(0) = v_n$ e $\alpha'(0) = w$, assim

$$I(\alpha(0)) < I(\alpha(t)) + \varepsilon_n \|\alpha(t) - \alpha(0)\|$$

$$\Rightarrow I(\alpha(0)) - I(\alpha(t)) < \varepsilon_n \|\alpha(t) - \alpha(0)\|$$

$$\Rightarrow -\frac{I(\alpha(t)) - I(\alpha(0))}{t} < \varepsilon_n \| \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} \|,$$

assim,

$$-I'(\alpha(0))\alpha'(0) \leq \varepsilon_n \|\alpha'(0)\|,$$

donde,

$$-I'(v_n).w \leq \varepsilon_n \|w\| \Rightarrow |I'(v_n).w| \leq \varepsilon_n \|w\|.$$

Observemos também que, para $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ com $\|v\| = 1$, temos

$$v = t_n^v v_n + w_n^v \in < v_n > \bigoplus KerG'(v_n).$$

Note que, (v_n) é limitada, pois, (u_n) é limitada. Como vemos, $v - t_n^v u_n \in KerG'(v_n)$, assim, pelo mesmos argumentos usados em vários momentos do texto, (t_n^v) é uniformemente limitada para $\|v\| = 1$. Daí, (w_n^v) também é uniformemente limitada, pois,

$$\|w_n^v\| \leq |t_n^v| \|v_n\| + \|v\| = 1 + |t_n^v| \|u_n\|.$$

Sendo assim, para $\|v\| = 1$, teremos

$$|I'(v_n).v| = |t_n^v I'(v_n).v_n + I'(v_n).w_n^v| = |I'(v_n).w_n^v| \leq \varepsilon_n \|w_n^v\| \leq C\varepsilon_n,$$

ou seja,

$$|I'(v_n).v| \to 0 \Rightarrow |I'(v_n)| \to 0.$$

E, está demonstrado o corolário.

■

Apêndice B

Definições e Resultados Utilizados

Neste apêndice, apresentaremos as principais definições, notações e os principais resultados utilizados ao longo de todo texto.

Teorema B.1. *(**Teorema de Mudança de Variável**) Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^N$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $foh : X \to \mathbb{R}$ é integrável e:*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|deth'(x)|dx.$$

Demonstração. Ver [20]. ■

Teorema B.2. *(**Lema de Fatou**) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que,*

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$, q.s. sobre Ω;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \displaystyle\int_\Omega f_n dx < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$, tomando $f(x) = \liminf_n f_n(x)$. Teremos, $f \in L^1(\Omega)$ e,

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_n \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Demonstração. Ver [4]. ■

Teorema B.3. *(**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que,*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.s. sobre Ω;

(ii) existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{q.s. em } \Omega, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e,

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Demonstração. Ver [4]. ■

Teorema B.4. ***(Teorema de Fubini)*** *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ subconjuntos abertos e $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Suponha que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Da mesma forma, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Demonstração. Ver [4]. ■

Teorema B.5. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a, b \geq 0$ e p e q expoentes conjugados. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [4]. ■

Teorema B.6. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com p e q expoentes conjugados. Então, $f.g \in L^1(\Omega)$ e,*

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [6]. ■

Teorema B.7. ***(Desigualdade de Interpolação)*** *Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$, para todo $r \in [p,q]$ e,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.8. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ tal que (x_{n_j}) é fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [18]. ∎

Teorema B.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) tal que

- *$f_{n_j}(x) \to f(x)$, quase sempre em Ω;*
- *$|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$, quase sempre em Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$, para alguma $h \in L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.10. *Os espaços L^p são reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.11. *O espaço $D^{1,2}$ é Hilbert.*

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.12. ***(Imersões de Sobolev)*** *As seguintes imersões são contínuas:*

- *$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, $p \in [2, 6]$;*
- *$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.13. *A seguinte imersão é compacta:*

$$H^1_r(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3), \quad p \in (2, 6).$$

Demonstração. Ver [6]. ∎

Teorema B.14. *Seja $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ com $q \neq p^*$, se $p < N$. Supondo (u_n) limitada em $L^q(\mathbb{R}^N)$, (∇u_n) limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^q dx = 0, \quad \textit{para algum } R > 0.$$

Então, $u_n \to 0$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, para α entre q e p^*.

Demonstração. Ver [22]. ■

Teorema B.15. *Sendo (u_n) limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $R > 0$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx = 0.$$

Então, $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (2, 2^*)$.

Demonstração. Ver [29]. ■

Teorema B.16. *Seja $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $j(0) = 0$ e, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe duas funções não negativas φ_ε e ϕ_ε tal que:*

$$|j(x+y) - j(x)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(x) + \phi_\varepsilon(y) \quad \textit{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

E, $f_n = f + g_n$ sequência de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{R}$ tal que:

- *$g_n \to 0$ quase sempre.*
- *$j(f) \in L^1(\Omega)$.*
- *$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(g_n(x))d\mu(x) \leq C < \infty$, para algum $C > 0$, independente de ε e n.*
- *$\int_\Omega \phi_\varepsilon(f(x))d\mu(x) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Então,

$$\int_\Omega j(f+g_n)d\mu(x) - \int_\Omega j(g_n)d\mu(x) = \int_\Omega j(f)d\mu(x) + o_n(1).$$

Demonstração. Ver [7]. ■

Teorema B.17. *Seja $1 < p < \infty$, (f_n) sequência limitada em $L^p(\Omega)$, onde Ω é um conjunto mensurável. Se $f_n \to f$ quase sempre, então $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [17]. ■

Teorema B.18. ***(Princípio Concentração de Compacidade)*** *Seja* (ρ_n) *uma sequência em* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo*

$$\rho_n \geq 0 \quad em\ \mathbb{R}^N \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = \lambda + o_n(1),$$

para algum $\lambda > 0$ *fixado. Então, existe uma subsequência* (ρ_{n_k}) *de* (ρ_n) *verificando uma das três possibilidades a seguir:*

(i) ***(Anulamento)*** *para todo* $R > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} \rho_{n_k}(x)dx = 0;$$

(ii) ***(Dicotomia)*** *existe* $\alpha \in (0, \lambda)$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $k_0 \geq 1$ *e* $\rho_k^1, \rho_k^2 \in L_+^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo, para* $k \geq k_0$:

- $\|\rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\|_1 \leq \varepsilon$;
- $\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^1 dx - \alpha \right| \leq \varepsilon$;
- $\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^2 dx - (\lambda - \alpha) \right| \leq \varepsilon$;
- $dist(supt \quad \rho_k^1, supt \quad \rho_k^2) \to \infty, k \to \infty.$

(iii) ***(Compacidade)*** *existe* $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *satisfazendo*

$$\int_{B_R(y_k)} \rho_{n_k}(x)dx \geq \lambda - \varepsilon.$$

Demonstração. Ver [22]. ∎

Teorema B.19. ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Sejam* E *um espaço de Banach real e* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *satisfazendo a condição* (PS). *Supondo* $I(0) = 0$ *e que*

- *existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- *existe* $e \in E - \overline{B}_\rho$ *tal que* $I(e) \leq 0$.

Então, I *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$. *Além disso,* c *é caracterizado como:*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(g(t)),$$

onde,

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E); g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Demonstração. Ver [1]. ■

Teorema B.20. ***(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)*** *Sejam E um espaço de Banach, $J, F : E \to \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in E; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) \neq 0$, para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u)$$

então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$(multiplicador de Lagrange) verificando

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração. Ver [17]. ■

B.1 Resultados com Demonstração

O primeiro , que se segue, demonstrado, foi de grande importância no **Capítulo 2** e pode ser encontrado em [17].

Teorema B.21. *Seja $N \geq 2$. Se $u \in H^1_r(\mathbb{R}^N)$, então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos*

$$|u(x)| \leq A^{-\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{N-1}{2}} \|u\|$$

onde $A = \displaystyle\int_{|\omega|=1} d\sigma_\omega$.

Demonstração. Note primeiramente, que as funções radiais de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1_r(\mathbb{R}^N)$, daí, por argumento de densidade padrão, provaremos somente para as funções radiais de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ radial, temos que $\phi \in C_0^\infty([0, \infty))$, daí, para $r \geq 0$ (qualquer) e $R > 0$(suficientemente grande) tal que $\phi(R) = 0$, temos

$$[\phi(s)^2]_r^R = \int_r^R (\phi(s)^2)' ds = \int_r^\infty 2\phi(s)\phi'(s) ds \Rightarrow \phi^2(R) - \phi^2(r) = 2\int_r^\infty \phi(s)\phi'(s) ds$$

como $\phi^2(R) = 0$, temos então que,

$$\phi^2(r) = -2\int_r^\infty \phi(s)\phi'(s) ds \leq 2\int_r^\infty |\phi(s)||\phi'(s)| ds$$

$$\Rightarrow \phi^2(r) \leq 2\int_r^\infty s^{-(N-1)} |\phi(s)||\phi'(s)| s^{N-1} ds \Rightarrow \phi^2(r) \leq \int_r^\infty s^{-(N-1)} (|\phi'(s)|^2 + |\phi(s)|^2) s^{N-1} ds$$

visto que $|\phi^{'}(s)|^2 + |\phi(s)|^2 \geq 2|\phi^{'}(s)||\phi(s)|$. A partir da desigualdade acima, também podemos chegar que

$$\phi^2(r) \leq r^{-(N-1)} \int_r^\infty (|\phi^{'}(s)|^2 + |\phi(s)|^2) s^{N-1} ds$$

$$\Rightarrow \phi^2(r) \leq r^{-(N-1)} \int_0^\infty (|\phi^{'}(s)|^2 + |\phi(s)|^2) s^{N-1} ds \qquad (L)$$

Observevemos que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2(x) dx = \int_0^\infty (\int_{|\omega|=1} r^{N-1} \phi^2(r) d\sigma_\omega) dr = A \int_0^\infty r^{N-1} \phi^2(r) dr$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty r^{N-1} \phi^2(r) dr = A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \phi^2(x) dx$$

e, notando o fato de que, $\nabla \phi(x) = \phi^{'}(r) \frac{x}{|x|}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi(x)|^2 dx = \int_0^\infty (\int_{|\omega|=1} r^{N-1} \phi^{'}(r)^2 d\sigma_\omega) dr$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty r^{N-1} \phi^{'}(r)^2 dr = A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi(x)|^2 dx.$$

Daí, usando tais observações, temos que

$$\int_0^\infty r^{N-1} (\phi^2(r) + \phi^{'}(r)^2) dr = A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi(x)|^2 + \phi^2(x) dx = A^{-1} \|\phi\|$$

Portanto, usando (L), temos

$$\phi^2(r) \leq r^{-(N-1)} A^{-1} \|\phi\| \Rightarrow \phi(x) \leq A^{-1/2} |x|^{-(N-1)/2} \|\phi\|$$

O que conclui nossa demonstração. ■

O próximo, foi utilizado em diversos pontos do texto.

Teorema B.22. *Seja $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, e $p > 2$. Definamos $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma x^3 - \delta x^{2p-1}$, para $x \geq 0$. Então, f tem um único ponto crítico, o qual corresponde ao máximo.*

Demonstração. Como $p > 2$, fica claro que f tem máximo. Mostremos que f tem um único ponto crítico. Observemos que,

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta + 3\gamma x^2 - \delta(2p-1) x^{2p-2}$$

$$f''(x) = 6\alpha x + 6\gamma x - \delta(2p-1)(2p-2) x^{2p-3}$$

$$f'''(x) = 6\alpha + 6\gamma - \delta(2p-1)(2p-2)(2p-3)x^{2p-4}$$

Pela expressão da f''', temos ser ela positiva para valores de t pequenos, $f''' \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e, além disso, temos ser f''' estritamente decrescente. Então, existe $t_3 > 0$ tal que $f'''(t_3) = 0$ e, $f'''(t)(t_3 - t) > 0$, para $t \neq t_3$. Do estudo da f''', temos que f'' é crescente para $t < t_3$ e $f'' > 0$ em $(0, t_3)$. Além disso, para $t > t_3$, temos que f'' é decrescente com $f'' \to -\infty$, quando $t \to \infty$. Daí, existe $t_2 > t_3$ tal que $f''(t_2) = 0$ e $f''(t)(t_2 - t) > 0$, $t \neq t_2$. Da mesma forma, concluímos que existe $t_1 > t_2$ tal que $f'(t_1) = 0$ e $f'(t)(t_1 - t) > 0$ para $t \neq t_1$. Portanto, t_1 é o único ponto crítico de f. Concluindo assim o lema. ■

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications* J. Funct. Anal. **14**, 349-381 (1973).

[2] A. Ambrosetti, D. Ruiz, *Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson equation*, preprint

[3] A. Azzollini, A. Pomponio, *Ground state solution for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations* J. Math. Anal. and Appl. **345**, 90-108 (2008).

[4] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley e Sons, Inc., New York (1995).

[5] R. Benguria, H. Brezis, E.-H. Lieb, *The Thomas-Fermi-von Weizsacker theory of atoms and molecules*, Comm. Math. Phys. **79**, 167-180 (1981).

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[7] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol.88 **nº3**, 486-490 (1983).

[8] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev expoent*, Comm. Pure Appl. Math. **36**, 437-477 (1983).

[9] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A **134**, 1-14 (2004).

[10] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Non-Existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. **4**, 307-322 (2004).

[11] T. D'Aprile, T. Wei, *On bound states concentrating on spheres for the Maxwell-Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **37**, 321-342 (2005).

[12] T. D'Avenia, *Non-radially symetric solutions of nonlinear Schrödinger equation coupled with Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. **2**, 177-192 (2002).

[13] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47**, 324-353 (1974).

[14] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[15] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.*Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[16] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequence and application to a Landesman-Lazer type problem set on RN*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129**, 787-809 (1999).

[17] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[18] E. O. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[19] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[20] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[21] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, 4º Edição, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[22] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, I, II*, Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linaire **1**, 109-145,223-283 (1984).

[23] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[24] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term*, J. Funct. Anal. **237**, 655-674 (2006).

[25] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55**, 149-162 (1977).

[26] M. Struwe, *Variational Methods*, 2ª Edição, Springer, 1996.

[27] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110**, 353-372 (1976).

[28] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, 1996.

[29] V. C. Zelati, P. H. Rabinowitz, *Homoclinic Type Solutions for a Semilinear Elliptic PDE on RN*, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.**XLV**, 1217-1269 (1992).

[30] L. Zhao, F. Zhao, *Positive solutions for Schrödinger-Poisson equations with the critical expoent*, Nonlinear Analysis **70**, 2150-2164 (2009).