Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Observações sobre Controle Hierárquico em Domínio não Cilíndrico

por

Luciano Cipriano da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Observações sobre Controle Hierárquico em Domínio não Cilíndrico

por

Luciano Cipriano da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros-UFRJ

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda-UEPB

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo-UEPB
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2013

Dedicatória

A minha mãe Lúcia e a minha noiva Joseane.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço ao professor doutor Aldo Trajano Lourêdo, por aceitar me orientar nesta dissertação.

Agradeço aos professores doutores Luiz Adauto da Justa Medeiros e Manuel Antolino Milla Miranda por aceitarem paricipar da banca avaliadora desta dissertação.

Agradeço aos meus colegas do mestrado, pelo companherismo nos estudos.

Agradeço aos professores do mestrado, pela dedicação que sempre tiveram com o meu apredizado.

Agradeço a CAPES pelo apoio finaceiro que foi fundamental para minha dedicação exclusiva ao mestrado.

Resumo

Neste trabalho estudamos o controle hierárquico, para um sistema parabólico, em um domínio não cilíndrico. O controle hierárquico é um problema que consiste em aproximar, em um tempo fixado, as soluções das equações de estado que temos, (essas soluções dependem de funções chamadas controles), de um estado considerado ideal, através de um sistema de líder, que é o controle independente, e seguidores, que são os controles que dependem da ação do líder. Começamos fazendo uma transformação do problema original para um equivalente em domínio cilíndrico, então estudamos o controle hierárquico deste sistema. Usaremos a estratégia de Stackelberg-Nash, processo no qual, para cada escolha do líder, procuramos por seguidores que satisfaçam um certo problema de minimização, as soluções deste problema formam o que chamamos de Equilíbrio de Nash, resolvido esse problema, trabalhamos para provar que o sistema é aproximadamente controlável usando o líder. Resolvemos ainda um sistema sistema de otimalidade para os seguidores.
Palavras chave: Controle hierárquico, estratégia de Stackelberg-Nash, controlabilidade aproximada, sistema de otimalidade.

Abstract

We present hierarchic control to a parabolic system in a noncylindrical domain. The hierarchic control is a problem that is how to bring in a fixed time, the solutions of the equations of state we have, (these solutions depend on a functions called controls), a state considered ideal, througha system of leading, independent control, and followers, the leader controls dependents. We start by making a transformation of the original problem to an equivalent cylindrical domain, then do the hierarchic control of this problem. We use the strategy Stackelberg-Nash, a process in which each leader's choice, look for followers to satisfy a minimization problem, the solution of this problem form what we call the Nash equilibrium, solved this problem, work to prove that the approximately system is controllable using the leader. We further resolve to a of optimality for followers.

Key words: Hierarchic control, Stackelberg-Nash strategy, approximate controllability, optimality system.

Conteúdo

Introdução

O conceito de controle aproximado foi usado pela primeira vez em 1990, pelo grande matemático francês Jacques Louis Lions, durante as jornadas Hispano-Francesas sobre controle de sistemas distribuidos. Ele apresentou essa forma de controle para a equação do calor, onde mostrou que ela era uma consequência do Teorema de Hahn-Banach, quando se trabalha com um funcional custo relacionado com o sistema. Mais tarde, em 1994, Lions publicou um artigo entituado Hierarchic Control, onde ele introduziu, pela primeira vez, a idéia de controle hierarquico que é um tipo de controle aproximado com um esquema de um controle "global", chamado líder, e controles "locais", denominados seguidores, que trabalham para aproximar, em um tempo T, a solução do sistema u de um estado ideal u^T. Lions faleceu em 2002, mas em 2005, J. I. Diaz publicou um trabalho que tinha feito em parceria com Lions, que tratava do controle hierárquico para um sistema distribuido, onde consideraram a existência de um líder v e N seguidores $w_1, \ldots, w_N$, e procederam do seguinte modo: os seguidores, supondo que o líder fez uma escolha v a sua política, buscam encontrar um equilíbrio de Nash para seus funcionais custo. Então, o líder faz a escolha final para o sistema. Este processo é conhecido como estratégia de Stackelberg-Nash. Este trabalho tem como objetivo principal estudar o controle hierárquico usando a estratégia de Stackelgerg-Nash para o mesmo tipo de problema que em [5], mas em domínio não cilíndrico.

Cosideramos um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e defomações por aplicações suaves $\tau_t : \Omega \to \Omega_t$, $0 \leq t \leq T$, com isto obtemos um domínio não cilíndrico $\widehat{Q}_T$, o qual é a deformação do cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$. O problema de controle (problema (2.3)) é formulado no domínio $\widehat{Q}_T$, onde denotamos por $\hat{v}$ e $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$, respectivamente, o líder e os seguidores. A solução $\hat{u}$ do sistema (2.3) depende de (x, t) e dos controles $\hat{v}$ e $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$. Esses controles trabalham com o objetivo de fazer a solução se aproximar de um estado ideal, $\hat{u}^T$, em um tempo T, por meio da estratégia de Stackelberg-Nash.

Para resolver esse problema transformamos, através da aplicação τ_t, o problema (2.3) em um problema equivalente, (2.7), em Q_T, que é difeomorfo a $\widehat{Q}_T$. As soluções deste problema são denotadas por u e dependem dos pontos de Q_T e dos controles transformados v, líder, e $w_1, \ldots, w_N$, seguidores. Então, investigaremos o controle hierárquico, como em [5], usando a estratégia de Stackelberg-Nash, para fazer a solução u se aproximar do estado ideal u^T, no tempo T. Nesse método, um ponto importante é resolver o sistema de otimalidade, neste trabalho faremos isto no capítulo 5.

Um princípio importante que é usado nesses problemas de controle é o da continuação única, que é o seguinte: se a solução da equação de estado é nula em um cilindro q contido no cilindro Q do $\mathbb{R}^n$, então ela é nula no cilindro Q. Esse princípio depende do problema considerado. Usaremos neste trabalho o princípio da continuação única provada em [22].

No controle hirárquico, devemos provar que o sistema é aproximadamente controlável, isto é fundamental para que a estratégia de Stackelberg-Nash funcione. Para isto, usamos o princípio da continuação única e o Teorema de Hahn-Banach, que é o processo criado por Lions.

Capítulo 1

Noções preliminares

Façamos uma breve introdução da teoria dos espaços de funções usados no decorres deste trabalho. Não provaremos os reultados, apenas citaremos a referência onde as provas estão feitas.

1.1 Espaços de Sobolev

Uma exposição completa do que iremos enunciar nesta seção pode ser encontrada em L.A. Medeiros e M.M. Miranda [15].

Definição 1.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f, e denotamos por $supp(f)$, como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que f possui suporte compacto.*

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.
Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ definimos $D^0 u$ como a identidade.
Denotamos por $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$, o espaço da funções reais f definidas em Ω com a

p-ésima potência integrável no sentido de Lebesgue. Esse é um espaço de Banach com a norma,

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denotamos o conjuntos das funções essencialmente limitadas em Ω. Este também é um espaço de Banach, com a norma

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|_{\mathbb{R}}.$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, denotamos o espaço das funções reais definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Definição 1.2. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:*
i) *$supp(\varphi), supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
ii) *Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se $D^\alpha(\varphi_n - \varphi) \to 0$ uniformemente em K*

Chamamos de *Espaço das Funções Testes sobre* Ω, representamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência desta definição.

Teorema 1.3. *O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.*

Prova. Ver [15]. ■

Definição 1.4. *Uma distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínuo no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,*
i) *$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;*
ii) *se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.*

Denotamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. Representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ conjunto de todas as distribuições sobre Ω. Dizemos que

$$T_n \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando,

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lema 1.1 (Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Prova. Para a prova ver [15]. ■

Observação 1.1. *Segue do Lema de Du Bois Raymond que se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente, se $u = v$. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo T_u com o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Exemplo 1 (Distribuição)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição.

A seguir definimos derivada no sentido das distribuições.

Definição 1.5. *Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Observação 1.2. *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, sabemos, da observação 1.1 e da definição de derivada distribucional, que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, em [14] podemos encontrar a prova desta afirmação. Isto é o que motivou a definição do espaço de funções chamado *Espaço de Sobolev.*

Dado um número inteiro $m > 0$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos que a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertence a $L^p(\Omega)$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}(\Omega), \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.3. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Para $p = 2$, representamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.*

Proposição 1.6. *O espaço $H^m(\Omega)$ munido do produto interno*

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

é um espaço de Hilbert.

Prova. Ver [15] . ■

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$. Denotaremos a norma em $H^m(\Omega)$ simplesmente por $||.||_m$ e por $||.||$ para $m = 1$.

No que segue listamos algumas propriedades importantes dos Espaços de Sobolev.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguna direção, digamos $pr_i(\Omega) \subset (a, b)$, onde $pr_i(\Omega)$ denota a projeção de Ω na direção i e (a, b) é um intervalo aberto e limitado de $\mathbb{R}$. Então,*

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [15]. Nesta mesma referência podemos encontrar a prova do seguinte corolário.

Corolário 1.8. *Em $H_0^m(\Omega)$, com Ω nas condições do Teorema 1.7, as normas $||u||$ e*

$$|\nabla u|_{(L^2(\Omega))^n} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

são equivalentes.

Consideremos espaços de Hilbert V e H, com normas $|.|_V$ e $|.|_H$, respectivamente, e suponhamos $V \subset H$. Seja $i : V \to H$ a injeção canônica de V em H, que a cada elemento de $v \in V$ fazemos corresponder $i(v) = v$ como um elemento de H. A *imersão* é *contínua* quando existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|v|_H \leq C|v|_V, \ \forall \in V.$$

Dizemos que a *imersão* é *compacta* quando a imagem de subespaços limitados de V por i são relativamente compactos em H.

Lema 1.2 (Imersões de Sobolev). *Seja Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, as imersões abaixo são contínuas.*
i) *Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in \left[p, \frac{np}{n-mp}\right)$;*
ii) *Se $m = \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in [p, \infty)$;*
iii) *Se $m > \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$,*
onde $C^j(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções contínuas limitadas.

Prova. Ver [15]. ∎

Teorema 1.9 (Rellich-Kondrachov). *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. Então temos que as imersões são compactas:*
i) Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right)$;
ii) Se $m = \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$.

Prova. Ver [15]. ∎

Proposição 1.10. *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. Então temos as seguintes imersões:*
i) *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $p \leq q \leq \frac{np}{n-p}$;*
ii) *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p} = p^*$*

Prova. Ver [15]. ∎

Observação 1.4. *O número p^* é conhecido como* expoente crítico de Sobolev.

Teorema 1.11 (Fórmula de Green). *Se $u \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Prova. Ver [1] ■

Proposição 1.12 (Regra do Produto). *Consideremos um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Prova. A prova pode ser encontrada em [1]. ■

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema A.8), temos a seguinte cadeia de imersões contínuas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

com cada espaço denso no seguinte.

1.2 Espaços $L^p(0,T;X)$

Seja X um espaço de Banach. O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$, quando $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_n \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle T, \theta_n \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T,X)$ se $\langle T_n, \theta \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$ munido da convergência acima é denominado *espaço das distribuições vetorias de $(0,T)$ com valores em X*

Observação 1.5. *Temos que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}'(0,T,X)$. Também mostra-se que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ é denso em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T)) = \mathcal{D}(Q)$.*

Definição 1.13. *Dizemos que $u : (0,T) \to X$ é fortemente mensurável quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n : (0,T) \to X$ tal que*

$$|\varphi_n(t) - u(t)|_X \to 0, \ \textit{quase sempre em } (0,T).$$

Denotaremos por $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$, ao espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue. Neste espaço definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T,X)$ representamos o espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, a norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0<t<T} ess \|u(t)\|_X. \tag{1.2}$$

Os espaços $L^p(0,T,X)$ e $L^\infty(0,T,X)$ são espaços de Banach com suas respectivas normas.

Proposição 1.14. *O espaço $L^p(0,T;X)$ é denso em $\mathcal{D}'(0,T;X)$.*

Prova. Ver [2]. ■

Observação 1.6. *No caso $p=2$ e X um espaço de Hilbert, segue que $L^2(0,T,X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, então podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' = L^q(0,T;X'),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. No caso em que $p=1$, identificamos

$$[L^1(0,T;X)]' = L^\infty(0,T;X')$$

Podemos encontrar a prova dessas identidades em [20].

Observação 1.7. *Uma identificação que usaremos bastante é a seguinte: consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $T>0$ e $Q = \Omega \times (0,T)$ um cilíndro em $\mathbb{R}^{n+1}$, então, para $1 \leq p < \infty$ temos*

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

No nosso caso, trabalhamos com $p=2$.

Definição 1.15. *Dada $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$, definimos a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por:*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Representamos por $C([0,T],X)$ o espaço de Banach das funções u, definidas em $[0,T]$ com valores em X, cuja norma é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup \|u(t)\|_X.$$

Denotaremos por $H_0^1(0,T,X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T,X) = \{u \in L^2(0,T,X); u' \in L^2(0,T,X), u(0) = u(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((u,v))_{H_0^1(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T,X)$ com o seu dual $(L^2(0,T,X))'$, via o Teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0,T,X) \hookrightarrow H_0^1(0,T,X) \hookrightarrow L^2(0,T,X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T,X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T,X),$$

onde

$$(H_0^1(0,T,X))' = H^{-1}(0,T,X).$$

Proposição 1.16. *Seja $u \in L^2(0,T,X)$. Então, existe uma única $f \in H^{-1}(0,T,X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall \xi \in X$$

Prova. Ver M.M. Miranda [16] ou [20]. ■

A proposição anterior nos permite identificar u' com f. Desse modo, diremos que se $u \in L^2(0,T,X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T,X)$.

Proposição 1.17. *Seja X um espaço de Hilbert, então a aplicação*

$$u \in L^2(0,T,X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T,X)$$

é linear e contínua.

Prova. Ver M.M. Miranda [16] ou [20]. ■

Proposição 1.18. *Suponhamos que $u, g \in L^1(0,T,X)$. Então, as condições abaixo são equivalentes:*

i) *Existe $\xi \in X$, independente de t, tal que $u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$ quase sempre em $(0,T)$, (u é quase sempre uma primitiva de g);*

ii) *Para cada $\varphi \in D(0,T)$ tem-se $\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$, ($g = \frac{du}{dt}$ derivada no sentido das distribuições);*

iii) *Para cada $y \in X'$, $\frac{d}{dt}\langle u(t), y\rangle = \langle g(t), y\rangle$ no sentido das distribuições.*

Prova. Ver [13] ou [21] . ■

Consideremos espaços de Hilbert X e Y, com $X \hookrightarrow Y$. Então definimos o espaço

$$W(0,T;X,Y) = \{u \in L^2(0,T;X); u' \in L^2(0,T;Y)\}.$$

Este espaço, munido da norma

$$||u||^2_{W(0,T;X,Y)} = ||u||^2_{L^2(0,T;X)} + ||u'||^2_{L^2(0,T;Y)},$$

é um espaço de Hilbert. Além disso, está imerso continuamente em $C^0([0,T];Y)$. Então faz sentido avaliar os elementos de $W(0,T;X,Y)$ em 0 e T. Isto é consequência do seguinte resultado.

Teorema 1.19. *Sejam X, Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $u \in L^p(0,T,X)$, $u' \in L^p(0,T,Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in C^0([0,T];Y)$.*

Prova. Ver [13] ■

Teorema 1.20. *Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sejam $u \in [L^q(0,T,X)]'$ e $v \in L^p(0,T,X)$, então*

$$\langle u, v\rangle_{[L^q(0,T,X)]' \times L^p(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X} dt.$$

Prova. Ver [13]. ■

Capítulo 2

Notações e formulação do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma aberto limitado e conexo com fronteira Γ de classe C^2. Consideremos o cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, cuja fronteira lateral é $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Consideremos uma família de aplicações $\{\tau_t\}_{0 \leq t \leq T}$, onde para cada t, τ_t transforma Ω em um aberto Ω_t do $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n; x = \tau_t(y), y \in \Omega\},$$

onde τ_0 é a identidade e então $\Omega_0 \equiv \Omega$. Os elementos de Ω são os vetores $y = (y_1, \ldots, y_n)$, com $y_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$, e os elementos de Ω_t são representamos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Definimos o domínio não cilíndrico $\widehat{Q}_T \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\widehat{Q}_T = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\}.$$

A fronteira de Ω_t é Γ_t, e a fronteira lateral de $\widehat{Q}_T$ é $\widehat{\Sigma}_T$ definida por

$$\widehat{\Sigma}_T = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}.$$

Necessitamos das seguintes hipóteses:

$$\tau_t \text{ é um difeomorfismo de classe } C^2 \text{ de } \Omega \text{ em } \Omega_t, \tag{2.1}$$

$$\tau \in C^1([0, T]; C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, T]; C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)). \tag{2.2}$$

Onde temos o difeomorfismo

$$\begin{array}{rcll} \tau_t \ : & Q_T & \longrightarrow & \widehat{Q}_T \\ & (y,t) & \longmapsto & (\tau_t(y),t) \ = (\tau(y,t),t) = (x,t) \end{array}$$

Sejam $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_1, \ldots \mathcal{O}_N$ subconjuntos abertos, não vazios e dois a dois disjuntos de Ω. Denotaremos por $\mathcal{O}_t$ e $\mathcal{O}_{it}$, respectivamente, as imagens de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_i$ por τ_t, para $i = 1, \ldots, N$. Sendo τ_t um difeomorfismo entre Ω e Ω_t, então os subconjuntos $\mathcal{O}_t$ e $\mathcal{O}_{it}$ são abertos, não vazios e dois a dois disjuntos em Ω_t, $i = 1, \ldots, N$. Com isto, definimos os seguintes domínios não cilíndricos contidos em $\widehat{Q}_T$:

$$\widehat{\mathcal{O}}_T = \bigcup_{0< \ t \ < \ T} \{\mathcal{O}_t \times \{t\}\}, \ \widehat{\mathcal{O}}_{iT} = \bigcup_{0< \ t \ < \ T} \{\mathcal{O}_{it} \times \{t\}\}, \ \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

Obseve que estes conjuntos são imagens, por τ_t, de cilindros em Q_T cujas bases são os abertos $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_N$.

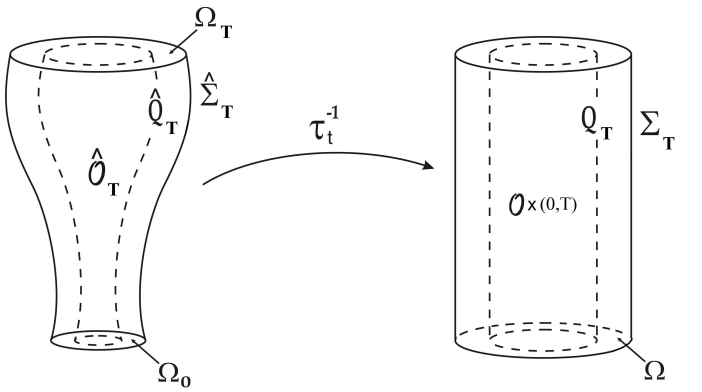

Figura 2.1: Mudança de domínios

Por $\hat{u} = \hat{u}(x,t)$ representamos uma função definida em $\widehat{Q}_T$. Denotaremos por $\widehat{\chi}$ e $\widehat{\chi}_i$, respectivamente, as funções características de $\widehat{\mathcal{O}}$ e $\widehat{\mathcal{O}}_i$, para $i = 1, \ldots, N$.

Consideramos ainda a função $\hat{a} = \hat{a}(x,t)$ e a função vetorial $\vec{\hat{b}} = \vec{\hat{b}}(x,t) = (\vec{\hat{b}}_i(x,t))_{1 \le i \le n}$ com as seguintes regularidades:

$$\hat{a} \in L^\infty(\widehat{Q}_T), \ \vec{\hat{b}} \in [L^\infty(\widehat{Q}_T)]^n.$$

Consideremos o seguinte problema de controle

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \Delta \hat{u} + \hat{a}\hat{u} + \vec{\hat{b}} \cdot \nabla \hat{u} = \hat{v}\hat{\chi} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i \hat{\chi}_i \text{ em } \widehat{Q}_T; \\ \hat{u} = 0 \text{ sobre } \widehat{\Sigma}_T; \\ \hat{u}(0) = \hat{u}_0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.3}$$

onde os controles $\hat{v} = \hat{v}(x,t)$ e $\hat{w}_i = \hat{w}_i(x,t)$, $i = 1, \ldots, N$ estão localizados, respectivamente, sobre $\widehat{\mathcal{O}}_T$ e $\widehat{\mathcal{O}}_{iT}$ e tem regularidades

$$\hat{v} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_T), \;\; \hat{w}_i \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT}).$$

Agora vamos transformar, por meio do difeomorfismo $\tau_t : Q_T \to \widehat{Q}_T$, o sistema (2.3) em um sistema em Q_T. Em Q_T as funções de estado $u = u(y,t)$, $y \in \Omega$, são dadas por

$$u(y,t) = \hat{u}(\tau_t(y), t) = \hat{u}(\tau(y,t), t), \;\; \forall y \in \Omega, \;\; \forall t \in [0,T].$$

De modo equivalente, em $\widehat{Q}_T$ temos

$$\hat{u}(x,t) = u(\tau_t^{-1}(x), t) = u(\tau^{-1}(x,t), t), \;\; \forall x \in \Omega_t, \;\; \forall t \in [0,T].$$

Vamos denotar $\tau_t^{-1}(x) = \tau^{-1}(x,t)$ por $\phi_t(x) = \phi(x,t)$. Com esta notação, para $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\phi(x,t),t) = \nabla u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ onde } \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \right), \tag{2.4}$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(x,t),t) = \nabla u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \text{ onde } \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \right). \tag{2.5}$$

Da igualdade em (2.5) obtemos,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x,t)\hat{b}_i(x,t) = \nabla u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x,t)\hat{b}_i(x,t) = \nabla u(\tau_t(y),t)\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\tau_t(y),t)\hat{b}_i(\tau_t(y),t)$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2}(x,t) = &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n \partial y_1}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{y_1}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_i^2} + \cdots + \\ &+ \cdots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_n}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{y_n}\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x_i^2}, \end{aligned}$$

então, adicionando em $i = 1$, para $i = 1, \ldots, n$, ficamos com

$$\Delta \hat{u} = \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{kj}(y,t)\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) + \nabla u \cdot \Delta_x \phi, \tag{2.6}$$

onde,

$$\Delta_x \phi = (\Delta_x \phi_1, \ldots, \Delta_x \phi_n), \text{ com } \Delta_x \phi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i^2}(\tau_t(y), t)$$

e

$$\alpha_{kj}(y,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\tau_t(y), t).$$

De (2.6), usando a regra do produto para derivada, temos

$$\Delta \hat{u} = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\alpha_{kj}(y,t)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) - \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_j} + \nabla u \cdot \Delta_x \phi.$$

Agora notando que

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_j} = \nabla u \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_k(y,t)}{\partial y_k},$$

onde,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_k(y,t)}{\partial y_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{k1}(y,t)}{\partial y_k}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kn}(y,t)}{\partial y_k}\right)$$

e definindo

$$a(y,t) = \hat{a}(\tau_t(y), t) \ e \ \vec{b}(y,t) = (b_1(y,t), \ldots, b_n(y,t)),$$

com

$$b_j(y,t) = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\tau_t(y), t)\hat{b}_i(\tau_t(y), t) + \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(\tau_t(y), t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial y_k}(y,t) - \Delta_x \phi_j(\tau_t(y), t),$$

temos o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + a(y,t)u + \vec{b}(y,t) \cdot \nabla u = v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i \chi_{\mathcal{O}_i \times (0,T)}, \text{ em } Q_T \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u(0) = u_0, \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.7}$$

onde,

$$A(t)u(y,t) = -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\alpha_{kj}(y,t)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right).$$

Na observação 2.1 mais adiante neste trabalho, mostraremos que os sistemas (2.3) e (2.7) são equivalentes.

O operador $A(t)$ está associado a seguite forma bilinear

$$\alpha(u,v) = \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \alpha_{kj} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_k} dy, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 2.1. *A forma bilinear $\alpha(u,v)$ é coerciva em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

Prova. Sabemos que ϕ_t é um difeomorfismo de classe C^2 entre Ω e Ω_t, então a matriz

$$M = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

é invertível e existe $\overline{C} > 0$ tal que

$$||M^{-1}\eta||_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{\overline{C}} ||\eta||_{\mathbb{R}^n}, \ \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Considerando $\eta = M\xi$ temos

$$||M\xi||_{\mathbb{R}^n} \geq \overline{C} ||\xi||_{\mathbb{R}^n}, \tag{2.8}$$

então, pelas definições de α_{kj} e M,

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \alpha_{kj}(y,t) \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_j} dy = \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dy = \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dy = \\
&= \int_{\Omega} (M\nabla u, M\nabla u) dy, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha(u,u) = \int_{\Omega} (M\nabla u, M\nabla u) dy = \int_{\Omega} ||M\nabla u||_{\mathbb{R}^n}^2 dy.$$

Sendo, por (2.8),

$$\int_{\Omega} ||M\nabla u||_{\mathbb{R}^n}^2 dy \geq \overline{C}^2 \int_{\Omega} ||\nabla u||_{\mathbb{R}^n}^2 dy, \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

obtemos,

$$\alpha(u,u) \geq \overline{C}^2 ||u||^2, \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

portanto α é coerciva em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. ∎

2.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção definiremos as soluções fortes e fracas para os sistemas (2.3) e (2.7). Também provaremos a existência e unicidade das soluções forte e fraca para o sistema (2.7) usando o método de Faedo-Galerkin. Depois mostraremos que (2.3) e (2.7) são, de fato, equivalentes e concluiremos a existência e unicidade de soluções forte e fraca para (2.3). Veremos ainda como as soluções dependem dos controles.

Definição 2.1 (Solução Forte para (2.3))**.** *Dizemos que função $\hat{u} : \widehat{Q}_T \to \mathbb{R}$ é solução forte do sistema (2.3) quando*

$$\hat{u} \in W(0,T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t), L^2(\Omega_t)),$$

e

$$\hat{u}' - \Delta\hat{u} + \hat{a}\hat{u} + \vec{\hat{b}} \cdot \nabla\hat{u} = \hat{v}\hat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i \hat{\chi}_i \ \textit{quase sempre em } \widehat{Q}_T,$$

com $\hat{u}(0) = \hat{u}_0$.

Definição 2.2 (Solução Forte para (2.7))**.** *Dizemos que função $u : Q_T \to \mathbb{R}$ é solução forte do sistema (2.7) quando*

$$u \in W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)),$$

e

$$u' + A(t)u + au + \vec{b} \cdot \nabla u = v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_i \chi_{\mathcal{O}_i \times(0,T)} \ \textit{quase sempre em } Q_T,$$

com $u(0) = u_0$.

Definição 2.3 (Solução Fraca para (2.3))**.** *Dizemos que a função $\hat{u} : \widehat{Q}_T \to \mathbb{R}$ é solução fraca do sistema (2.3) quando*

$$\hat{u} \in W(0,T; H_0^1(\Omega_t), H^{-1}(\Omega_t)),$$

satisfaz a seguinte identidade integral

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, \hat{\xi}\right) dt + \int_0^T (\nabla \hat{u}, \nabla \hat{\xi}) dt + \int_0^T (\hat{a}\hat{u}, \hat{\xi}) dt + \int_0^T (\vec{\hat{b}} \cdot \nabla \hat{u}, \hat{\xi}) dt = \\
&\int_0^T (\hat{v}\hat{\chi}, \hat{\xi}) dt + \sum_{i=1}^N \int_0^T (\hat{w}_i \hat{\chi}_i, \hat{\xi}) dt, \\
&\forall \hat{\xi} \in W(0,T; H_0^1(\Omega_t), L^2(\Omega_t)),\ \hat{\xi}(T) = \hat{\xi}(0) = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$\hat{u}(0) = \hat{u}_0.$$

Definição 2.4 (Solução Fraca para (2.7))**.** *Dizemos que função $u : Q_T \to \mathbb{R}$ é solução fraca do sistema (2.7) quando*

$$u \in W(0,T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)),$$

satisfaz a seguinte identidade integral

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \xi\right) dt + \int_0^T \alpha(u, \xi) dt + \int_0^T (au, \xi) dt + \int_0^T (\vec{b} \cdot \nabla u, \xi) dt = \\
&\int_0^T (v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)}, \xi) dt + \sum_{i=1}^N \int_0^T (w_i \chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}, \xi) dt, \\
&\forall \xi \in W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)),\ \xi(T) = \xi(0) = 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$u(0) = u_0.$$

2.1.1 Existência e unicidade de solução fraca.

Teorema 2.5. *Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, então o problema (2.7) tem uma única solução fraca u e*

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Prova. Seja

$$f = v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^N w_i \chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}.$$

Então, das hipóteses sobre v e os w_i, $i = 1, \ldots, N$, temos $f \in L^2((0,T), L^2(\Omega))$.

Para demonstrar a existência de solução para (2.7) usaremos o método de Faedo-Galerkin. Considere $(w_l)_{l\in\mathbb{N}}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$ ortonormal em $L^2(\Omega)$. Obtemos essa base resolvendo o problema espectral

$$\alpha(w,v) = \lambda(w,v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Cada w_l é uma autofunção deste problema correspondente a um autovalor λ_l. Seja $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores w_l. Considere o seguinte problema aproximado: encontrar

$$u_m = \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t) w_l(y) \tag{2.11}$$

solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left| \begin{array}{l} (u_m'(t), v) + \alpha(u_m(t), v) + (a(t)u_m(t), v) + (\vec{b}\cdot\nabla u_m(t), v) = (f_m, v), \ \forall v \in V_m, \\ u_m = 0, \ \textit{sobre}\ \Sigma, \\ u_m(y,0) = u_{0m} \to u_0, \ \textit{quando}\ m \to \infty\ \textit{em}\ L^2(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.12}$$

onde $f_m = \displaystyle\sum_{l=1}^{m}(f, w_l)w_l$. A convergência acima ocorre devido a densidade dos V_m em $L^2(\Omega)$. Considerando $v = w_i$ em (2.12), $i = 1, \dots, m$, e usando (2.11), temos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l=1}^{m} g_{lm}'(t)(w_l, w_i) + \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)\alpha(w_l, w_i) + \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(a(t)w_l, w_i) + \\ \displaystyle + \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(\vec{b}\cdot\nabla w_l, w_i) = (f, w_i), \\ g_{lm}(0) = g_{l0m}. \end{array} \right.$$

Logo, para $i = 1, \dots, m$,

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle g_{im}'(t) + \lambda_i g_{im}(t) + g_{lm}(t)a(t) + \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(\vec{b}\cdot\nabla w_l, w_i) = (f, w_i), \\ g_{lm}(0) = g_{l0m}. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Observamos que o sistema (2.13) é um sistema linear do tipo

$$\left| \begin{array}{l} G_m'(t) = F(t, G_m(t)), \\ G_m(0) = G_m^0, \end{array} \right. \tag{2.14}$$

onde

$$G_m = (g_{1m}, \ldots, g_{mm}),$$

$$F(t, G_m(t)) = \left(\begin{array}{c} (f, w_1) - \lambda_1 g_{1m}(t) - a(t) g_{1m}(t) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(\vec{b} \cdot \nabla w_l, w_1) \\ \vdots \\ (f, w_m) - \lambda_m g_{mm}(t) - a(t) g_{mm}(t) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(\vec{b} \cdot \nabla w_l, w_m) \end{array} \right)$$

e

$$G_m^0 = \left(\begin{array}{c} g_{10m} \\ \vdots \\ g_{m0m} \end{array} \right).$$

Sendo (2.14) um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, ele possui uma única solução G_m definida em $[0, T]$, portanto existe uma única solução

$$u_m(y, t) = \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t) w_l(y)$$

para o problema aproximado definida em $[0, T]$.

Agora vamos obter estimativas que nos permitam fazer a passagem ao limite da sequência (u_m), formada pelas soluções aproximadas.

Estimativas

Considerando $v = u_m(t)$ em (2.12) temos

$$\begin{aligned} &(u_m(t), u_m'(t)) + \alpha(u_m(t), u_m(t)) + (a(t) u_m(t), u_m(t)) + \\ &+ (\vec{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), u_m(t)) = (f_m(t), u_m(t)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como $(u_m(t), u_m'(t)) = \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} |u_m(t)|^2$, da equação (2.15) obtemos,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \alpha(u_m(t), u_m(t)) = (f_m(t), u_m(t)) - (a(t) u_m(t), u_m(t)) - \\ &- (\vec{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), u_m(t)), \end{aligned}$$

integrando de 0 a t ficamos com

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \int_0^t \alpha(u_m(s), u_m(s)) ds = \int_0^t (f_m(s), u_m(s)) ds - \int_0^t (a(s) u_m(s), u_m(s)) ds - \\ &- \int_0^t (\vec{b} \cdot \nabla u_m(s)) ds + |u_m(0)|^2. \end{aligned}$$

Lembremos que a forma bilinear α é coerciva em $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, então,

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\overline{C}^2\int_0^t ||u_m(s)||^2ds \leq \frac{1}{2}|u_m|^2+\int_0^t \alpha(u_m(s),u_m(s))ds,$$

onde $\overline{C}>0$ é a constante de coercividade de α. Além disso,

$$\left|\int_0^t (f_m(s),u_m(s))ds-\int_0^t (a(s)u_m(s),u_m(s))ds-\int_0^t (\vec{b}\cdot\nabla u_m(s))ds+\frac{|u_m(0)|^2}{2}\right| \leq$$
$$\int_0^t |(f_m(s),u_m(s))|ds+\int_0^t |(a(s)u_m(s),u_m(s))|ds+\int_0^t |(\vec{b}\cdot\nabla u_m(s))|ds+\frac{|u_m(0)|^2}{2},$$

logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\overline{C}^2\int_0^t ||u_m(s)||^2ds \leq \int_0^t |(f_m(s),u_m(s))|ds+\\ \int_0^t |(a(s)u_m(s),u_m(s))|ds+\int_0^t |(\vec{b}\cdot\nabla u_m(s))|ds+\frac{|u_m(0)|^2}{2}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Observação 2.1. *Notemos que, para todo t vale,*

$$|f_m(t)|\leq|f(t)|,\ \forall m\in\mathbb{N},$$

pois,

$$|f_m(t)|^2=\langle f_m(t),f_m(t)\rangle=\left\langle \sum_{l=1}^m (f(t),w_l)w_l,\sum_{l=1}^m (f(t),w_l)w_l\right\rangle,$$

daí,

$$|f_m(t)|^2=\sum_{l=1}^m |(f(t),w_l)|_{\mathbb{R}}^2 \leq \sum_{l=1}^\infty |(f(t),w_l)|_{\mathbb{R}}^2,$$

então, pela desigualdade de Bessel, obtemos

$$|f_m(t)|^2\leq \sum_{l=1}^\infty |(f(t),w_l)|_{\mathbb{R}}^2 \leq |f(t)|^2.$$

Portanto,

$$|f_m(t)|\leq|f(t)|,\ \forall m\in\mathbb{N}.$$

Da observação (2.1), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|(f_m(t),u_m(t))|\leq|f_m(t)||u_m(t)|\leq|f(t)||u_m(t)|\leq\frac{|f(t)|^2}{2}+\frac{|u_m(t)|^2}{2},\ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Agora, sendo a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ contínua e $a\in L^\infty(\Omega)$, denotemos a constante de imersão por C_0, temos

$$|(a(t)u_m(t),u_m(t))|\leq||a|||u(t)|^2\leq(C_0||a||||u_m(t)||)|u_m(t)|$$

daí, sendo

$$(C_0||a||||u_m(t)||)|u_m(t)| \leq \frac{C_0^2\varepsilon||a||^2||u_m(t)||^2}{2} + \frac{|u_m(t)|^2}{2\varepsilon},$$

onde $\varepsilon > 0$, ficamos com

$$|(a(t)u_m(t), u_m(t))| \leq \frac{C_0^2\varepsilon||a||^2||u_m(t)||^2}{2} + \frac{|u_m(t)|^2}{2\varepsilon}. \tag{2.18}$$

Como $\vec{b} \in [L^\infty(\Omega)]^n$, temos

$$|(\vec{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), u_m(t))| \leq |\vec{b}(t) \cdot \nabla u_m(t)||u_m(t)| \leq ||\vec{b}||||u_m(t)|||u_m(t)|,$$

como,

$$||\vec{b}||||u_m(t)|||u_m(t)| \leq \frac{\varepsilon||\vec{b}||^2||u_m(t)||^2}{2} + \frac{|u_m(t)|^2}{2\varepsilon},$$

$\varepsilon > 0$ é o mesmo considerado (2.18), obtemos

$$|(\vec{b}(t) \cdot \nabla u_m(t), u_m(t))| \leq \frac{\varepsilon||\vec{b}||^2||u_m(t)||^2}{2} + \frac{|u_m(t)|^2}{2\varepsilon}. \tag{2.19}$$

Logo, de (2.16)-(2.19) ficamos com,

$$|u_m(t)|^2 + C_1\int_0^t ||u_m(s)||^2 ds \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds + C_2\int_0^t |u_m(s)|^2 ds + |u_m(0)|^2 \tag{2.20}$$

com $C_2 = 1 + \dfrac{2}{\varepsilon} > 0$ e para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$C_1 = 2\overline{C}^2 - C_0^2||a||^2\varepsilon - ||\vec{b}||^2\varepsilon > 0$$

Seja $C_3 = min\{1, C_1\} > 0$, então

$$C_3\Big[|u_m(t)|^2 + \int_0^t ||u_m(s)||^2 ds\Big] \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds + C_2\int_0^t |u_m(s)|^2 ds + |u_m(0)|^2.$$

Como $(u_m(0))$ é uma sequência convergente em $L^2(\Omega)$, existe uma constante $C_4 > 0$, tal que

$$|u_m(0)|^2 < C_4, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

assim,

$$|u_m(t)|^2 + \int_0^t ||u_m(s)||^2 ds \leq C_5 + C_5\int_0^t |f(s)|^2 ds + C_5\int_0^t |u_m(s)|^2 ds, \tag{2.21}$$

onde $C_5 = max\{\frac{1}{C_3}, \frac{C_2}{C_3}, \frac{C_4}{C_3}\} > 0$. De (2.21) temos

$$|u_m(t)|^2 \leq C_5 + C_5 \int_0^t |f(s)|^2 ds + C_5 \int_0^t |u_m(s)|^2 ds$$

o que implica,

$$|u_m(t)|^2 \leq C_5 + C_5 \int_0^T |f(s)|^2 ds + C_5 \int_0^T |u_m(s)|^2 ds \tag{2.22}$$

logo, como $f \in L^2(Q_T)$, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$|u_m(t)|^2 \leq C_5 \left(1 + \int_0^T |f(t)|^2 dt \right) e^{C_5 T} = C_T, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.23}$$

Desta desigualdade e de (2.21) ficamos também com

$$\int_0^T ||u_m(t)||^2 dt \leq C_T. \tag{2.24}$$

Obeservemos que a constante $C_T > 0$ não depende de m. Portanto de (2.23) e (2.24) temos

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.25}$$

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{2.26}$$

Passagem ao limite

As limitações (2.25) e (2.26), como feito em Brezis [1] nos permitem obter uma subsequência de (u_m), ainda denotada por (u_m), tal que, respectivamente

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \tag{2.27}$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)). \tag{2.28}$$

Dado $\xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, como $a \in L^\infty(Q_T)$, então $a\xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, logo por (2.26)

$$\int_0^T (a(t)u_m(t), \xi(t))dt = \int_0^T (u_m(t), a(t)\xi(t))dt \longrightarrow$$
$$\int_0^T (u(t), a(t)\xi(t))dt = \int_0^T (u(t)a(t), \xi(t))dt$$

portanto,

$$\int_0^T (a(t)u_m(t), \xi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u(t)a(t), \xi(t))dt, \forall \xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.29}$$

Resulta da convergência (2.28) que

$$\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u \text{ em } [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^n,$$

e $\vec{b} \in [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^n$, então, analogamente ao caso da função a, obtemos

$$\vec{b}\cdot\nabla u_m \rightharpoonup \vec{b}\cdot\nabla u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (\vec{b}(t)\cdot\nabla u_m(t),\xi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (\vec{b}(t)\cdot\nabla u(t),\xi(t))dt, \forall\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.30)$$

Agora, da convergência (2.28), dado $\xi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, sendo α uma forma bilinear contínua e coerciva sobre $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ temos

$$\int_0^T \alpha(u_m(t),\xi(t))dt \longrightarrow \int_0^T \alpha(u(t),\xi(t))dt \quad (2.31)$$

Considere $\xi = w\eta$, onde $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, então $\xi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e da convergência (2.28) temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_m'(t),w)\eta(t)dt = -\int_0^T (u_m(t),w)\eta'(t)dt \longrightarrow \\ &-\int_0^T (u(t),w)\eta'(t)dt = \int_0^T (u'(t),w)\eta(t)dt, \\ &\forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall\eta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, de (2.29)-(2.32), obtemos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u(t),w)\eta'(t)dt + \int_0^T \alpha(u(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u(t)a(t),w)\eta(t)dt \\ &+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u(t),w)\eta(t)dt = \int_0^T (f,w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall\eta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \quad (2.33)$$

então, por densidade, temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u(t),\xi'(t))dt + \int_0^T \alpha(u(t),\xi(t))dt + \int_0^T (u(t)a(t),\xi(t))dt \\ &+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u(t),\xi(t))dt = \int_0^T (f,\xi(t))dt, \\ &\forall\xi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)),\ \mathit{com}\ \xi(0)=\xi(T)=0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Notemos que

$$\alpha(u(t),\xi) = \langle A(t)u(t),\xi\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

então, de (2.34) temos

$$\langle u'(t),\xi\rangle = \langle -A(t)u(t) - a(t)u(t) - \vec{b}(t)\cdot\nabla u(t) + f,\xi\rangle,\ \forall\xi\in H_0^1(\Omega). \tag{2.35}$$

Logo,

$$u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.36}$$

Portanto, como $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, sendo as imersões, além de contínuas, densas, resulta como feito em Lions-Magenes [12]:

$$u\in C^0([0,T];[H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)]_{\frac{1}{2}}) = C^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.37}$$

Convergência dos dados iniciais

Consideremos $\xi = w(y)\eta(t)$, com $w\in H_0^1(\Omega)$ e η uma função continuamente diferenciável tal que $\eta(T)=0$ e $\eta(0)=1$. Substituindo v por ξ em (2.12) e integrando temos

$$\int_0^T (u_m'(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(u_m(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u_m(t)a(t),w)\eta(t)dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u(t),w)\eta(t)dt = \int_0^T (f_m(t),w)\eta(t)dt,$$

então, integrando por partes ficamos com

$$-\int_0^T (u_m(t),w)\eta'(t)dt + \int_0^T \alpha(u_m(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u_m(t)a(t),w)\eta(t)dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u_m(t),w)\eta(t)dt = \int_0^T (f_m(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u_m(0),w)dt,$$

logo, passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (u(t),w)\eta'(t)dt + \int_0^T \alpha(u(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u(t)a(t),w)\eta(t)dt\\&+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u(t),w)\eta(t)dt = \int_0^T (f(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (u_0,w)dt,\end{aligned} \tag{2.38}$$

Por outro lado, observamos que (2.33) ainda vale considerando ξ dessa forma, assim

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (u(t),w)\eta'(t)dt+\int_0^T \alpha(u(t),w)\eta(t)dt+\int_0^T (u(t)a(t),w)\eta(t)dt\\&+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u(t),w)\eta(t)dt=\int_0^T (f(t),w)\eta(t)dt+\int_0^T (u(0),w)dt,\end{aligned}\tag{2.39}$$

Comparando (2.38) e (2.39), temos

$$(u(0),w)=(u_0,w)\Rightarrow (u(0)-u_0,w)=0,$$

como $w\in H_0^1(\Omega)$ é arbitrário, por Du Bois Reymond, obtemos

$$u(0)=u_0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Unicidade

Sejam u e w duas soluções do problema (2.7), então como a equação é linear temos que $z=u-w$ satisfaz

$$\left|\begin{aligned}&-\int_0^T (z'(t),\xi(t))dt+\int_0^T \alpha(z(t),\xi(t))dt+\int_0^T (z(t)a(t),\xi(t))dt\\&+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla z(t),\xi(t))dt=0,\\&\forall\xi\in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)),\ com\ \xi(0)=\xi(T)=0,\\&z(0)=0\end{aligned}\right.\tag{2.40}$$

Notemos que $z\in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ e $z(0)=z(T)=0$, então substituindo em (2.40), ξ por z e usando que $\langle z'(t),z(t)\rangle=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|z(t)|^2$ temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|z(t)|^2+\int_0^T \alpha(z(t),z(t))dt+\int_0^T (z(t)a(t),z(t))dt\\&+\int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla z(t),z(t))dt=0.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Logo, procedendo de modo análogo a o que fizemos na parte das estimativas, ficamos com

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2+\overline{C}^2\int_0^T ||z(t)||^2dt\le ||a||\int_0^T |z(t)|^2dt+\int_0^T ||\vec{b}||||z(t)|||z(t)|dt,\tag{2.42}$$

sendo,

$$||\vec{b}||||z(t)|||z(t)|=\left(\frac{||\vec{b}|||z(t)|}{\overline{C}}\right)\overline{C}||z(t)||\le\frac{||\vec{b}||^2|z(t)|^2}{2\overline{C}^2}+\frac{\overline{C}^2}{2}||z(t)||^2.$$

Substituindo em (2.42) obtemos

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 + \frac{\overline{C}^2}{2}\int_0^T ||z(t)||^2 dt \leq \left(||a|| + \frac{||\vec{b}||^2}{2\overline{C}^2}\right)\int_0^T |z(t)|^2 dt,$$

então,

$$|z(t)|^2 + \overline{C}^2\int_0^T ||z(t)||^2 dt \leq \left(2||a|| + \frac{||\vec{b}||^2}{\overline{C}^2}\right)\int_0^T |z(t)|^2 dt$$

daí,

$$|z(t)|^2 \leq \left(2||a|| + \frac{||\vec{b}||^2}{\overline{C}^2}\right)\int_0^T |z(t)|^2 dt. \tag{2.43}$$

De (2.43) e da desigualdade de Gronwall, obtemos

$$|z(t)|^2 \leq 0, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.44}$$

Portanto, $z(t) = 0$ para todo t em $[0, T]$. Com isto concluímos a demonstração. ■

2.1.2 Existência e unicidade de solução forte.

No que segue provaremos a existência e unicidade de solução forte para o problema (2.7).

Teorema 2.6. *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, então o problema (2.7) tem uma única solução forte u. Além disso,*

$$u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)).$$

Prova. Na equação (2.12), fazendo $v = u_m'(t)$, lembrando que a solução u_m é definida em $[0, T]$, temos

$$|u_m'(t)|^2 + \alpha(u_m(t), u_m'(t)) + (a(t)u_m(t), u_m'(t)) + (\vec{b}(t)\nabla u_m(t), u_m'(t)) = (f_m(t), u_m'(t))$$

o que implica,

$$\begin{aligned} &|u_m'(t)|^2 + \alpha(u_m(t), u_m'(t)) = (f_m(t), u_m'(t)) - (a(t)u_m(t), u_m'(t)) \\ &-(\vec{b}(t)\nabla u_m(t), u_m'(t)). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Da expressão de α, aplicando a regra do produto temos

$$\alpha(u_m(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t)) - \frac{1}{2}\alpha'(u_m(t), u_m(t)), \tag{2.46}$$

onde usamos a notação

$$\alpha'(u_m(t), u_m(t)) = \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt}\alpha_{kj}(y,t) \right) \frac{\partial u_m(t)}{\partial y_j} \frac{\partial u_m(t)}{\partial y_k} dy.$$

Então, substituindo a expressão de (2.46) em (2.45) ficamos com

$$\begin{aligned} &|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t)) = (f_m(t), u_m'(t)) + \frac{1}{2}\alpha'(u_m(t), u_m(t)) \\ &-(a(t)u_m(t), u_m'(t)) - (\vec{b}\nabla u_m(t), u_m'(t)). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Agora temos usando Cauchy-Schwarz, a observação 2.1 e a desigualdade elementar,

$$|(f_m(t), u_m'(t))| \leq |f_m(t)||u_m'(t)| \leq |f||u_m'(t)| \leq \frac{|f|^2}{2} + \frac{|u_m'(t)|^2}{2}, \tag{2.48}$$

e para $\varepsilon > 0$, sendo $a \in L^\infty(Q_T)$, $\vec{b} \in [L^\infty(Q_T)]^n$, temos

$$\begin{aligned} &|(a(t)u_m(t), u_m'(t))| \leq ||a|||u_m(t)||u_m'(t)| = \overline{C}_0||a||||u_m(t)|||u_m'(t)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon\overline{C}_0^2||a||^2|u_m'(t)|^2}{2} + \frac{||u_m(t)||^2}{2\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} &|(\vec{b}(t)\cdot\nabla u_m(t), u_m'(t))| \leq |\vec{b}(t)\cdot\nabla u_m(t)||u_m'(t)| \leq ||\vec{b}||||u_m(t)|||u_m(t)| \leq \\ &\leq \frac{||u_m(t)||^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon||\vec{b}||^2|u_m'(t)|^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

além disso, da expressão de α' obtemos,

$$|\alpha'(u_m(t), u_m(t))| \leq C_1||u_m(t)||^2, \tag{2.51}$$

onde, $C_1 = \left(\max\limits_{1\leq j,k\leq n} ||\alpha_{jk}'|| \right)$. Logo, usando em (2.47) as estimativas (2.48)-(2.51), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} &|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t)) \leq \frac{|f|^2}{2} + \frac{\varepsilon\overline{C}_0^2||a||^2 + \varepsilon||\vec{b}||^2 + 1}{2}|u_m'(t)|^2 + \\ &+ \left(C_1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) ||u_m(t)||^2 \end{aligned}$$

implicado,

$$C_2|u_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t)) \leq |f|^2 + C_3||u_m(t)||^2, \tag{2.52}$$

onde

$$C_2 = 1 - \varepsilon(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2) > 0 \ e \ C_3 = 2\left(C_1 + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Notemos ainda que $C_2 < 1$, assim de (2.52), obtemos

$$C_2\left(|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t))\right) \leq |f|^2 + C_3||u_m(t)||^2$$

daí,

$$|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\alpha(u_m(t), u_m(t)) \leq C_4|f|^2 + C_4||u_m(t)||^2, \tag{2.53}$$

onde $C_4 = \left\{\frac{1}{C_2}, \frac{C_3}{C_2}\right\} > 0$. Agora integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$, usando (2.24) e que $f \in L^2(Q_T)$ temos

$$\int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + \alpha(u_m(t), u_m(t)) \leq C_5 + \alpha(u_m(0), u_m(0)),\ \forall t \in [0,T], \tag{2.54}$$

com $C_5 = \max\{|f|^2, C_T\} > 0$, portanto, sendo α contínuo e coercivo, segue que

$$\int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + \overline{C}^2||u_m(t)||^2 \leq C_5 + C_6||u_m(0)||^2,\ \forall t \in [0,T], \tag{2.55}$$

$C_6 > 0$ é a constante da continuidade de α.

Agora, notemos que no problema aproximado podemos considerar

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ em\ H_0^1(\Omega),$$

então, existe C_7 tal que

$$C_6||u_m(0)||^2 \leq C_7,\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.56}$$

De (2.55) e (2.56), existe $C_8 > 0$ tal que

$$\int_0^T |u'_m(t)|^2 ds + ||u_m(t)||^2 \leq C_8,\ \text{independente de m.} \tag{2.57}$$

Observemos que a constante C_8 ainda depende de T, pois C_5 depende. De (2.57) temos

$$(u'_m) \text{ limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)); \tag{2.58}$$

$$(u_m) \text{ limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.59}$$

Das limitações (2.58) e (2.59), como feito em Brezis [1], podemos extrair de (u_m) uma subsequência, ainda denotada por (u_m) tal que,

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \tag{2.60}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.61}$$

assim,

$$u \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)). \tag{2.62}$$

Considere $\xi = w\eta$, com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, então das convergências em (2.60) e (2.61), temos

$$\int_0^T (u_m'(t),w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t),w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T), \tag{2.63}$$

$$\int_0^T \alpha(u_m(t),w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \alpha(u(t),w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.64}$$

De (2.64), lembrando que

$$(A(t)v,w) = \alpha(v,w),\ \forall v,w \in H_0^1(\Omega),$$

obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (A(t)u_m(t),w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (A(t)u(t),w)\eta(t)dt,\\ &\forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{2.65}$$

Como $a \in L^\infty(\Omega)$ temos de (2.60)

$$\int_0^T (u_m(t),a(t)w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),a(t)w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T)$$

o que implica,

$$\int_0^T (a(t)u_m(t),w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (a(t)u(t),w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.66}$$

Sendo $\vec{b} \in [L^\infty(\Omega)]^n$ e de (2.59), obtemos

$$\nabla u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u,\ em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então,

$$\int_0^T (\nabla u_m(t),\vec{b}(t)w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u(t),\vec{b}(t)w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T),$$

o que implica

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla u_m(t),w)\eta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla u(t),w)\eta(t)dt,\\ &\forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{2.67}$$

Agora das convergências (2.65)-(2.67) e (2.63), passando ao limite no problema aproximado ficamos com

$$\int_0^T (u'(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (A(t)u(t),w)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)u(t),w)\eta(t)dt +$$
$$\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla u(t),w)\eta(t)dt = \int_0^T (f(t),w)\eta(t)dt,\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T), \quad (2.68)$$

logo,

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u'(t),\phi(t))dt + \int_0^T (A(t)u(t),\phi(t))dt + \int_0^T (a(t)u(t),\phi(t))dt + \\ &\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla u(t),\phi(t))dt = \int_0^T (f(t),\phi(t))dt,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T),\end{aligned} \quad (2.69)$$

Desse modo,

$$\int_{Q_T} (u' + A(t)u + au + \vec{b}\nabla u - f)\phi dydt = 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T), \quad (2.70)$$

portanto, do Lema de Du Bois Raymond, segue que

$$u' + A(t)u + au + \vec{b}\nabla u = f,\ \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.71)$$

Como $f - u' - au - \vec{b}\nabla u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, de (2.70) temos

$$A(t)u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

então,

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \quad (2.72)$$

De (2.72) obtemos

$$D(A(t)) = \{u; u \in H_0^1(\Omega), A(t)u \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),$$

logo, como feito em Lions-Magenes [12], temos

$$D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \sum_{j=1}^{\infty} \lambda |(u,w_j)|^2 < \infty \right\} = H_0^1(\Omega).$$

ficamos com, ver [12],

$$[D(A(t)),L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = H_0^1(\Omega)$$

isto é,

$$[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}=H_0^1(\Omega)$$

portanto, ver [12],

$$u\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{2.73}$$

A prova de que $u(0)=u_0$ e a unicidade de solução forte são feitas de modo análogo ao que fizemos na prova do Teorema 2.5. ■

2.1.3 Equivalência dos problemas

Por construção do sistema (2.7), $u(y,t)$ é solução forte de (2.7) se, e somente se, $\hat{u}(x,t)=\hat{u}(\tau_t(y),t)$ é solução forte de (2.3). Além disso, da regularidade de τ_t e ϕ_t obtemos

$$\hat{u}\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t))\cap H^2(\Omega_t)\cap C^0([0,T];H_0^1(\Omega_t)),\ \hat{u}'\in L^2(0,T;L^2(\Omega_t)). \tag{2.74}$$

Seja $\left(\frac{\partial(\tau_t)_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n$ a matriz jacobiana da mudança de variável τ_t, $0\leq t\leq T$, denotemos o determinante dessa matriz por $D_t(y)=D(y,t)$, $y\in\Omega$, $0\leq t\leq T$, ou simplesmente por D_t quando não houver perigo de confusão. A matriz jacobiana de ϕ_t, $0\leq t\leq T$, é $\left(\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n$ e seu determinante é $\overline{D}(x,t)=D^{-1}(y,t)$, $x\in\Omega_t$, $0\leq t\leq T$.

De (2.1) e (2.2) temos

$$\xi\in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))\Leftrightarrow D^{-1}\hat{\xi}\in W(0,T;H_0^1(\Omega_t),L^2(\Omega_t)). \tag{2.75}$$

Então, usando o teorema da mudança de variáveis, de (2.75) temos

$$\int_\Omega\left(\nabla u(y,t)\cdot\frac{\partial\phi(\tau_t(y),t)}{\partial t}+\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right)\xi(y,t)dy=\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\hat{u}(x,t)}{\partial t}\right)\hat{\xi}(x,t)dx. \tag{2.76}$$

e mais,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left[A(t)u(y,t)-\sum_{k,j=1}^n\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial y_k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial y_j}+\nabla u\cdot\Delta_x\phi(\tau_t(y),t)\right]\xi(y,t)dy=\\&\int_{\Omega_t}\Delta\hat{u}(x,t)\hat{\xi}(x,t)dx.\end{aligned} \tag{2.77}$$

Temos também

$$\int_{\Omega}(a(y,t)u(y,t))\xi(y,t)dy = \int_{\Omega_t}(\hat{a}(x,t)\hat{u}(x,t))\hat{\xi}(x,t)dx \tag{2.78}$$

e

$$\int_{\Omega} f(y,t)\xi(y,t)dy = \int_{\Omega_t} \hat{f}(x,t)\hat{\xi}(x,t)dx, \tag{2.79}$$

onde usamos a notação

$$\hat{f} = \hat{v}\hat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i\hat{\chi}_i. \tag{2.80}$$

Agora lembrando da definição de $\vec{b}$, das igualdades (2.76)-(2.79) e integrando de 0 a T temos que ocorre

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \xi\right) dt + \int_0^T \alpha(u,\xi)dt + \int_0^T (au,\xi)dt + \int_0^T (\vec{b}\cdot\nabla u,\xi)dt = \\ &\int_0^T (v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)},\xi)dt + \sum_{i=1}^{N}\int_0^T (w_i\chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)},\xi)dt, \\ &\forall \xi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)),\ \xi(T)=\xi(0)=0,\end{aligned} \tag{2.81}$$

se, e somente se, verificamos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, \hat{\xi}\right) dt + \int_0^T (\nabla\hat{u},\nabla\hat{\xi})dt + \int_0^T (\hat{a}\hat{u},\hat{\xi})dt + \int_0^T (\vec{\hat{b}}\cdot\nabla\hat{u},\hat{\xi})dt = \\ &\int_0^T (\hat{v}\hat{\chi},\hat{\xi})dt + \sum_{i=1}^{N}\int_0^T (\hat{w}_i\hat{\chi}_i,\hat{\xi})dt, \\ &\forall \hat{\xi} \in W(0,T;H_0^1(\Omega_t),L^2(\Omega_t)),\ \hat{\xi}(T)=\hat{\xi}(0)=0,\end{aligned} \tag{2.82}$$

E mais,

$$\begin{aligned}&u \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)) \Leftrightarrow \\ &\hat{u} \in W(0,T;H_0^1(\Omega_t),H^{-1}(\Omega_t)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega_t)).\end{aligned}$$

Com isto verificamos que, de fato, os problemas (2.3) e (2.7) são equivalentes.

2.1.4 Dependência dos controles

Observação 2.2. *Da regularidade de τ_t, existem constantes positivas K_0 e K_1 tais que*

$$0 < K_0 \le |D(y,t)| \le K_1,\ \forall (y,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T],$$

em particular,

$$0 < K_0 \leq |D(y,t)| \leq K_1, \ \forall (y,t) \in Q_T. \tag{2.83}$$

As soluções fortes de (2.3) e (2.7) dependem linearmente dos controles $\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ e $v, w_1, \ldots, w_N$, respectivamente.

De fato, provaremos esta afirmação para as soluções de (2.7), para as soluções de (2.3) a prova é análoga.

Dadas

$$f_1 = v_1 \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_i^1 \chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}, \ e \ f_2 = v_2 \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)},$$

sejam u, u_1 e u_2, respectivamente, as únicas soluções dos sistemas

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + a(y,t)u + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u = f_1 + f_2, \ \text{em } Q_T, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u(0) = u_0^1 + u_0^2 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.84}$$

onde $u_1(0) = u_0^1$ e $u_2(0) = u_0^2$,

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + A(t)u_1 + a(y,t)u_1 + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u_1 = f_1, \ \text{em } Q_T, \\ u_1 = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u_1(0) = u_0^1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + A(t)u_2 + a(y,t)u_2 + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u_2 = f_2, \ \text{em } Q_T \\ u_2 = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u_2(0) = u_0^2 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Como as equações são lineares temos que $\tilde{u} = u_1 + u_2$ também é solução do sistema (2.84), então pela unicidade de solução forte temos $u = \tilde{u}$. Além disso, se u é solução de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + a(y,t)u + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u = f \text{ em } Q_T \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u(0) = u_0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.85}$$

com

$$f = v\chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_i \chi_{\mathcal{O}_i\times(0,T)},$$

então, da linearidade da equação e da unicidade de solução para o sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + a(y,t)u + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u = \lambda f \text{ em } Q_T \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u(0) = \lambda u_0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right.$$

temos que λu é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda u}{\partial t} + A(t)\lambda u + a(y,t)\lambda u + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla \lambda u = \lambda f, \text{ em } Q_T \\ \lambda u = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ \lambda u(0) = u_0, \text{ em } \Omega. \end{array}\right.$$

Com isto concluímos que as soluções fortes do sistema (2.7) dependem linearmente dos controles $v, w_1, \ldots, w_N$.

Observação 2.3. *Podemos supor, sem perda de generalidade que $\hat{u}(0) = 0$, ($u(0) = 0$), pois se tivermos $\hat{u}(0) = \hat{u}_0 \neq 0$ podemos transformar o problema em um equivalente com $\hat{u}_0 = 0$.*

De fato, considere $\hat{u}(0) = \hat{u}_0 \neq 0$ e seja $\hat{z} = \hat{z}(x,t)$, $(x,t) \in \widehat{Q}_T$, solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial t} - \Delta\hat{z} + \hat{a}\hat{z} + \vec{\hat{b}}\cdot\nabla\hat{z} = 0, \ \textit{em } \widehat{Q}_T \\ \hat{z} = 0 \ \textit{sobre } \widehat{\Sigma}_T \\ \hat{z}(0) = \hat{u}_0, \ \textit{em } \Omega, \end{array}\right.$$

então, da linearidade do problema e da unicidade de solução podemos fazer $\hat{u} = \hat{z} + \hat{\zeta}$, onde $\hat{\zeta}$ é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} - \Delta\hat{\zeta} + \hat{a}\hat{\zeta} + \vec{\hat{b}}\cdot\nabla\hat{\zeta} = \hat{v}\hat{\chi} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i\hat{\chi}_i \ \textit{em } \widehat{Q}_T, \\ \hat{\zeta} = 0 \ \textit{sobre } \widehat{\Sigma}_T \\ \hat{\zeta}(0) = 0, \ \textit{em } \Omega. \end{array}\right.$$

Já provamos que as soluções fortes das equações (2.3) e (2.7) dependem linearmente dos controles $\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ e $v, w_1, \ldots, w_N$, respectivamente. Provemos agora que as soluções fortes $\hat{u}$ de (2.3) e u de (2.7), $0 \leq t \leq T$, dependem continuamente dos controles $\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ e $v, w_1, \ldots, w_N$, respectivamente.

De fato, sejam (f_m), com $f_m = v_m \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_{im} \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)}$, uma sequência de controles para (2.7) e (u_m) a sequência de soluções, onde u_m é solução de (2.7) correspondente a f_m. Suponha que

$$f_m = v_m \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_{im} \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} \to f = v \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)} + \sum_{i=1}^{N} w_i \chi_{\mathcal{O}\times(0,T)}, \tag{2.86}$$

em $L^2(Q_T)$, quando $m \to \infty$ então, seja u a solução do sistema (2.7) com controle f. Considere $z_m = u_m - u$ e $g_m = f_m - f$, e pela observação 2.3 podemos supor $u_{0m} = u_0 = 0$, então $z_{0m} = u_{0m} - u_0 = 0$. Logo, procedendo de modo análogo ao que foi feito para obter a desigualdade (2.21) obtemos

$$|z_m(t)|^2 + \int_0^T ||z_m(t)||^2 dt \leq C \int_0^T |g_m(t)|^2 dt + C \int_0^T |z_m(t)|^2 dt, \tag{2.87}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Então,

$$|z_m(t)|^2 \leq C \int_0^T |g_m(t)|^2 dt + C \int_0^T |z_m(t)|^2 dt$$

e da desigualdade de Gronwall obtemos

$$|z_m(t)|^2 \leq C_T \left(\int_0^T |g_m(t)|^2 dt \right).$$

Logo, desta desigualdade e de (2.86) obtemos

$$|z_m(t)|^2, \int_0^T |z_m(t)|^2 dt \to 0, \ m \to \infty. \tag{2.88}$$

De (2.87) e (2.88) obtemos

$$\int_0^T ||z_m(t)||^2 dt \to 0, \ m \to \infty. \tag{2.89}$$

Portanto,

$$u_m \to u, \text{ em } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \text{ quando } m \to \infty.$$

De modo análogo, usando a mudança de variáveis τ_t, obtemos que se $(\hat{f}_m)$, com $\hat{f}_m = \hat{v}_m h \hat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_{im} \hat{\chi}_i$, uma sequência de controles para (2.3) e $(\hat{u}_m)$ a sequência de soluções, onde $\hat{u}_m$ é solução de (2.3) correspondente a $\hat{f}_m$ com $\hat{u}_m(0) = \hat{u}_{0m} = 0$. Então supondo

$$\hat{f}_m = \hat{v}_m h\hat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_{im}\hat{\chi}_i \to \hat{f} = \hat{v}\hat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i\hat{\chi}_i, \text{ em } L^2(\widehat{Q}_T)$$

temos

$$\hat{u}_m \to \hat{u}, \text{ em } L^2(0,T,H_0^1(\Omega_t)), \ m \to \infty.$$

Do que foi feito nesta seção temos que, para qualquer escolha dos controles $\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$, podemos escrever a correspondente solução $\hat{u}$, (com $\hat{u}_0 = 0$), em um tempo t como

$$\hat{u}(t) = \widehat{S}_0(t)\hat{v} + \sum_{i=1}^{N} \widehat{S}_i(t)\hat{w}_i, \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.90}$$

onde $\widehat{S}_0$ e $\widehat{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$, são operadores lineares e contínuos dos controles. Para $t = T$, escrevemos

$$\hat{u}(T) = \widehat{L}_0\hat{v} + \sum_{i=1}^{N} \widehat{L}_i\hat{w}_i, \tag{2.91}$$

onde $\widehat{L}_0$ e $\widehat{L}_i$, $i = 1, \ldots, N$, são operadores lineares e contínuos dos controles.

De modo análogo, escrevemos

$$u(t) = S_0(t)v + \sum_{i=1}^{N} S_i(t)w_i, \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.92}$$

com S_0 e S_i, $i = 1, \ldots, N$, operadores lineares e contínuos dos controles. Para $t = T$, escrevemos

$$u(T) = L_0 v + \sum_{i=1}^{N} L_i w_i, \tag{2.93}$$

com L_0 e L_i, $i = 1, \ldots, N$, são operadores lineares e contínuos dos controles $v, w_1, \ldots, w_N$, onde u é a solução forte para (2.7) correspondendo a esses controles com condição inicial $u(0) = u_0 = 0$.

2.2 Formulação do problema e metodologia

Como o próprio nome da seção já sugere, agora vamos explicar qual é o tipo de problema de controle que vamos resolver e qual o método usado.

Como a solução $\hat{u}$ do sistema (2.3) depende de $\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$, algumas vezes usaremos a notação $\hat{u} = \hat{u}(x, t, \hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N)$. Controle Hierárquico foi o nome dado por J.-L. Lions a um tipo de controle que se baseia num esquema de *líder* e *seguidores*. Mais explicitamente, o controle $\hat{v}$ faz sua escolha independentemente dos outros controles, por isto, chamamos $\hat{v}$ de líder, já os controles $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ fazem sua escolha dependo da escolha de $\hat{v}$ e são chamados seguidores. Muitas vezes para enfatizar a dependência dos seguidores escrevemos $\hat{w}_1(\hat{v}), \ldots, \hat{w}_N(\hat{v})$.

Para localizar a ação dos seguidores, introduzimos as funções $\hat{\rho}_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ dadas por

$$\hat{\rho}_i(x) \geq 0, \;\; \hat{\rho}_i(x) = 1 \text{ em } \widehat{G}_i \subset \Omega, \tag{2.94}$$

onde $\widehat{G}_i$ é uma região próxima de onde $\hat{w}_i$ atua.

Os controles devem trabalhar no sentido de fazer com que $\hat{u}(x, T)$, onde $\hat{u}$ é a solução da equação (2.3), se aproxime de um estado ideal $\hat{u}^T(x)$.

Para $i = 1, \ldots, N$ definimos os seguintes funcionais custos

$$\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_{it}} |\hat{w}_i(x,t)|^2_{\mathbb{R}} dxdt + \frac{\alpha_i}{2}|\hat{\rho}_i[\hat{u}(x, T, \hat{v}, \hat{w}) - \hat{u}^T(x)]|^2_{L^2(\Omega_T)}, \tag{2.95}$$

onde, denotamos $\hat{w} = \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ e, para $i = 1, \ldots, N$, $\alpha_i > 0$ são constantes.

Observação 2.4. *Da existência, unicidade e regularidade da solução $\hat{u}$ de (2.3), os funcionais $\widehat{j}_i$, $i = 1, \ldots, N$, estão bem definidos.*

Após o líder ter feito uma escolha $\hat{v}$ em sua estratégia, lembrando que as escolhas do líder são independentes, os seguidores buscam encontrar um **Equilíbrio de Nash** para os funcionais custo $\widehat{j}_1, \ldots, \widehat{j}_N$, isto é, buscam controles $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_N$ dependendo de $\hat{v}$ que minimizem simultaneamente seus custos. Ou seja, trabalham para obter controles $\hat{w}_1(v), \ldots, \hat{w}_N(v)$, satisfazendo

$$\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{i-1}, \hat{w}_i, \hat{w}_{i+1}, \ldots, \hat{w}_N) \leq \widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{i-1}, \bar{w}_i, \hat{w}_{i+1}, \ldots, \hat{w}_N), \tag{2.96}$$

para todo $\bar{w}_i \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT})$. Em outras palavras, supondo que o líder tenha feito uma escolha $\hat{v}$, os seguidores fazem escolhas $\hat{w}_1(v), \ldots, \hat{w}_N(v)$ tais que

$$\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{i-1}, \hat{w}_i, \hat{w}_{i+1}, \ldots, \hat{w}_N) = \inf_{\bar{w} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT})} \widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{i-1}, \bar{w}_i, \hat{w}_{i+1}, \ldots, \hat{w}_N).$$

Uma vez obtido o Equilíbrio de Nash $\hat{w}(v) = (\hat{w}_1(v), \ldots, \hat{w}_N(v))$, para cada controle $\hat{v}$, o líder trabalha para que $u(x, T, \hat{v}, \hat{w}(v))$ se aproxime do estado ideal $u^T(x)$. O que é possível, como veremos adiante, desde que o sistema seja aproximadamente controlável. Este processo é chamado de **Estratégia de Stackelberg-Nash**. Segue então, dois pontos que devemos mostrar:

(i) Existência de um único equilíbrio de Nash para os funcionais custo $\widehat{j}_1, \ldots, \widehat{j}_N$;

(ii) Supondo que existe um equilíbrio de Nash, quando $\hat{v}$ varia em $L^2(\widehat{\mathcal{O}})$ o conjunto das funções $\hat{u}(x, T, \hat{v}, \hat{w}(v))$, onde $\hat{u}(x, t, \hat{v}, \hat{w})$ é solução forte do sistema (2.3), é denso em $L^2(\Omega_T)$.

Observe que o ponto (ii) nos permite aproximar u^T. Essas questões já foram resolvidas por Diaz e Lions em [5] no caso do domínio cilíndrico. Mostraremos, nos próximos capítulos, através da mudança de variáveis τ_t os pontos (i) e (ii) no caso não cilíndrico.

Capítulo 3

Controlabilidade Aproximada

Transformamos o sistema (2.3) no sistema equivalente (2.7), neste capítulo provaremos que o sistema (2.3) é aproximadamente controlável, provando que o sistema (2.7) é aproximadamente controlável. Neste sentido precisamos antes definir e provar algumas propriedades dos funcionais custo em Q_T.

3.1 Funcionais Custo no domínio cilíndrico

Nesta seção iremos definir os funcionais custos no domínio cilíndrico Q_T. Observaremos que as propriedades que provaremos para os funcionais custo em Q_T também valem para $\widehat{j}_1, \ldots, \widehat{j}_N$.

Usando o Teorema da Mudança de Variáveis, para $i = 1, \ldots, N$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_{it}} |\hat{w}_i(x,t)|^2_{\mathbb{R}} dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\tau_t(\mathcal{O}_i)} |\hat{w}_i(\tau_t(y),t)|^2_{\mathbb{R}} dxdt = \\ = \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||w_i(y,t)|^2_{\mathbb{R}} dydt$$

e, analogamente,

$$\frac{\alpha_i}{2}|\hat{\rho}_i(x)[\hat{u}(x,T,\hat{v},\hat{w}) - \hat{u}^T(x)]|_{L^2(\Omega_T)} = \frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega_T} |\hat{\rho}_i(x)[\hat{u}(x,T,\hat{v},\hat{w}) - \hat{u}^T(x)]|^2_{\mathbb{R}} dx = \\ = \frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega} |D_t(y)||\rho_i(y)[u(y,T,v,w) - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dy,$$

onde $\rho_i(y) = \hat{\rho}_i(\tau_t(y)) = \hat{\rho}_i(x)$.

Observação 3.1. *Para $i = 1, \ldots, N$, temos $\rho_i(y) \geq 0$ e $\rho_i(y) = 1$ em $G_i \equiv \widehat{G}_i$.*

Então, definimos os funcionais custo em Q_T como

$$\begin{aligned} j_i(v, w_i, \ldots, w_N) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||w_i(y,t)|^2_{\mathbb{R}} dydt \\ + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega |D_t(y)||\rho_i(y)[u(y,T,v,w) - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dy, \end{aligned} \tag{3.1}$$

O equilíbrio de Nash para os funcionais j_i, $i = 1, \ldots, N$, é $w = (w_1, \ldots, w_N)$ que depende de v e

$$j_i(v, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_N) \leq j_i(v, w_1, \ldots, w_{i-1}, \bar{w}_i, w_{i+1}, \ldots, w_N) \tag{3.2}$$

para todo $\bar{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$. Provemos que os funcionais custo $\widehat{j}_i$ e j_i, $i = 1, \ldots, N$, são contínuos. A prova será feita para j_i, para $\widehat{j}_i$ a prova é análoga.

Seja (w_{im}) uma sequência em $L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$ tal que

$$w_{im} \to w_i \text{ em } L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)),\ m \to \infty.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |w_{im}(y,t)|^2_{\mathbb{R}} dydt \to \frac{1}{2}\int_0^T |w_i(y,t)|^2_{\mathbb{R}} dydt, \tag{3.3}$$

e como

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[u(y,T,v,w_1,\ldots,w_{i-1},w_{im},w_{i+1},\ldots,w_N) - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt = \\ &= \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_{im} + \cdots + L_N w_N - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt, \end{aligned}$$

sendo L_i um operador linear e contínuo, temos

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_{im} + \cdots + L_N w_N - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt \to \\ &\quad \frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_i + \cdots + L_N w_N - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[u(y,T,v,w_1,\ldots,w_{i-1},w_{im},w_{i+1},\ldots,w_N) - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt \to \\ &\frac{\alpha_i}{2}\int_{\mathcal{O}_i} |D_t(y)||\rho_i(y)[u(y,T,v,w_1,\ldots,w_{i-1},w_i,w_{i+1},\ldots,w_N) - u^T(y)]|^2_{\mathbb{R}} dydt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

portanto, de (3.3) e (3.4), obtemos

$$j_i(v, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{im}, w_{i+1}, \ldots, w_N) \to j_i(v, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_N), \ m \to \infty.$$

Isto prova que j_i é contínuo.

Como os funcionais j_i e $\widehat{j_i}$ são contínuos, eles são semicontínuos inferiormente. Além disso, observamos que eles são estritamente convexos.

De fato, sabemos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(r) = r^2$, é estritamente convexa, então para todo λ, com $0 < \lambda < 1$ temos

$$f(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) < \lambda f(r_1) + (1-\lambda) f(r_2), \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|\lambda \bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i|^2 < \lambda |\bar{w}_i|^2 + (1-\lambda)|\tilde{w}_i|^2, \ \forall \bar{w}_i, \tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)), \tag{3.5}$$

assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t||\lambda \bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i|^2 dydt < \\ &\frac{\lambda}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t||\bar{w}_i|^2 dydt + \frac{(1-\lambda)}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t||\tilde{w}_i|^2 dydt \end{aligned} \tag{3.6}$$

quaisquer que sejam $\bar{w}_i, \tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$. Agora, usando (2.93) e notando que os L_i, $i = 1, \ldots, N$, são lineares, temos

$$\begin{aligned} &[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i(\lambda \bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i) + \cdots + L_N w_N - u^T]^2 = [\lambda L_0 v + \\ &(1-\lambda)L_0 v + \lambda L_1 w_1 + (1-\lambda)L_1 w_1 + \cdots + \lambda L_i \bar{w}_i + (1-\lambda)L_i \tilde{w}_i + \cdots + \lambda L_N w_N + \\ &(1-\lambda)L_N w_N - \lambda u^T - (1-\lambda)u^T]^2 = \{\lambda[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \bar{w}_i + \cdots + L_N w_N - \\ &u^T] + (1-\lambda)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \tilde{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T]\}^2, \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} &\{\lambda[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \bar{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T] + (1-\lambda)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + \\ &L_i \tilde{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T]\}^2 < \lambda[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \bar{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T]^2 + \\ &(1-\lambda)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \tilde{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T]^2, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} &\{L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i(\lambda \bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i) + \cdots + L_j w_j - u^T\}^2 < \lambda[L_0 v + \\ &L_1 w_1 + \cdots + L_i \bar{w}_i + \cdots + L_N w_N - u^T]^2 + (1-\lambda)[L_0 v + L_1 w_1 + \cdots + L_i \tilde{w}_i + \\ &L_N w_N - u^T]^2 \end{aligned}$$

daí,

$$\frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega |D_t|\{\rho_i[L_0v + L_1w_1 + \cdots + L_i(\lambda\bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i) + \cdots + L_Nw_N - u^T]\}^2 dy <$$
$$\frac{\lambda\alpha_i}{2}\int_\Omega |D_t|\{\rho_i[L_0v + L_1w_1 + \cdots + L_i(\bar{w}_i) + \cdots + L_Nw_N - u^T]\}^2 dy +$$
$$\frac{(1-\lambda)\alpha_i}{2}\int_\Omega |D_t|\{\rho_i[L_0v + L_1w_1 + \cdots + L_i(\tilde{w}_i) + \cdots + L_Nw_N - u^T]\}^2 dy,$$

isto para quaisquer $\bar{w}_i, \tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$, $i = 1, \ldots, N$. Desta desigualdade e de (3.6), temos

$$j_i(v, w_1, \ldots, \lambda\bar{w}_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i, \ldots, w_N) < \lambda j_i(v, w_1, \ldots, \bar{w}_i, \ldots, w_N) + (1-\lambda) j_i(v, w_1, \ldots, \tilde{w}_i, \ldots, w_N),$$

para todo λ, $0 < \lambda < 1$ e quaisquer $\bar{w}_i, \tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$. Portanto, j_i é estritamente convexo, $i = 1, \ldots, N$. Do mesmo modo mostramos que $\widehat{j}_i$ é estritamente convexo, $i = 1, \ldots, N$.

Observação 3.2 (Derivada no sentido de Gateaux)**.** *A derivada de j_i no sentido de Gateaux na direção do vetor $\tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$ é definida por*

$$j_i(v, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_N) \cdot \tilde{w}_i = \frac{d}{d\lambda} j_i(v, w_1, \ldots, w_i + \lambda\tilde{w}_i, \ldots, w_N)\big|_{\lambda=0},$$

analogamnete, a derivada de Gateaux de $\widehat{j}_i$ na direção do vetor $\bar{w}_i \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT})$ é definida por

$$\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, \hat{w}_N) \cdot \bar{w}_i = \frac{d}{d\lambda} \widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_i + \lambda\bar{w}_i, \ldots, \hat{w}_N)\big|_{\lambda=0}.$$

Desta observação e da definição de $\widehat{j}_i$, $i = 1, \ldots, N$, temos

$$\frac{d}{d\lambda}\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_i + \lambda\bar{w}_i, \ldots, \hat{w}_N)\big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\widehat{\mathcal{O}}_{iT}} (\hat{w}_i + \lambda\bar{w}_i)^2 dxdt + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega_T}\{\hat{\rho}_i[\widehat{L}_0\hat{v} + \widehat{L}_j\hat{w}_j + \cdots + \widehat{L}_i(\hat{w}_i + \lambda\bar{w}_i) + \cdots + \widehat{L}_N\hat{w}_N]\}^2\right\}\right|_{\lambda=0},$$

então,

$$\widehat{j}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, \hat{w}_N) \cdot \bar{w}_i = \int_0^T\int_{\mathcal{O}_{it}} \hat{w}_i\bar{w}_i dxdt + \alpha_i\int_{\Omega_T}\hat{\rho}_i^2[\hat{u}(T) - \hat{u}^T]\widehat{L}_i\bar{w}_i dx.$$

Lembremos que $\widehat{L}_i\bar{w}_i = \bar{u}_i(x,T,\bar{w}_i)$, onde $\bar{u}_i(x,t,\bar{w}_i)$ é a única solução forte do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i + \hat{a}\bar{u}_i + \vec{\hat{b}} \cdot \nabla \bar{u}_i = \bar{w}_i \hat{\chi}_{\widehat{\mathcal{O}}_{iT}} \text{ em } \widehat{Q}_T, \\ \bar{u}_i = 0 \text{ sobre } \widehat{\Sigma}_T, \\ \bar{u}_i(0) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Portanto, como $\widehat{j}_i$ é semicontínuo inferiormente e estritamente convexo, para $i = 1,\ldots,N$, temos que $\hat{w}(\hat{v}) = \{\hat{w}_1(\hat{v}),\ldots,\hat{w}_N(\hat{v})\}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais custo $\widehat{j}_1,\ldots,\widehat{j}_N$ se, e somente se, satisfaz a equação de *Euler-Lagrange*

$$\widehat{j}_i(\hat{v},\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_i,\ldots,\hat{w}_N)\cdot \bar{w}_i = 0, \ \forall \bar{w}_i \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT}).$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_{it}} \hat{w}_i \bar{w}_i dxdt + \alpha_i \int_{\Omega_T} \hat{\rho}_i^2 [\hat{u}(T) - \hat{u}^T]\bar{u}_i(T)dx = 0, \tag{3.8}$$

para quaisquer $\bar{w}_i \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_{iT})$ e $\bar{u}_i(x,t,\bar{w}_i)$ solução de (3.7).

De modo análogo, considerando os funcionais j_i, temos que $w(v) = \{w_1(v),\ldots,w_N(v)\}$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, verifica a equação de *Euler-Lagrange*

$$j_i(v,w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_N)\cdot \bar{w}_i = 0, \ \forall \bar{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)),$$

isto é,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t| w_i \tilde{w}_i dydt + \alpha_i \int_{\Omega} |D_t| \rho_i^2 [u(T) - u^T]\tilde{u}_i(T)dy = 0, \tag{3.9}$$

para todo $\tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$, onde $\tilde{u}_i(T) = L_i\tilde{w}_i$ e $\tilde{u}_i(y,t,\tilde{w}_i)$ é a única solução forte do problema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + A(t)\tilde{u}_i + a\tilde{u}_i + \vec{b} \cdot \nabla \tilde{u}_i = \tilde{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i}, \text{ em } Q_T \\ \tilde{u}_i = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ \tilde{u}_i(0) = 0, \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.10}$$

3.2 Controlabilidade Aproximada

Considere o conjunto

$$R(T) = \left\{ \begin{array}{l} u(\cdot,T,v,w(v)); v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T)), \ u(y,t,v,w(v)) \ \textit{é solução forte de} \\ (2.7), \ \textit{com } u_0 = 0 \end{array} \right\}.$$

Nosso objetivo nesta seção é provar que $R(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$. Desse modo, temos que o problema (2.7) é aproximadamente controlável.

Teorema 3.1. *Suponha $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ e que existe um equilíbrio de Nash $w(v) = \{w_1(v), \ldots, w_N(v)\}$, dado pelas desigualdades (3.2). Então, o conjunto $R(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$.*

Prova. A prova será feita em duas etapas. Na primeira etapa vamos obter o sistema adjunto ao sistema (3.10) e o sistema de otimalidade. Na segunda etapa provaremos a controlabilidade aproximada usando argumentos de análise funcional e um resultado de continuação única.

1ª Etapa. Suponhamos que existe um equilíbrio de Nash $w(v) = \{w_1(v), \ldots, w_N(v)\}$ para os funcionais custo j_i, $i = 1, \ldots, N$. Então, $w(v)$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange (3.9), condicionada ao sistema (3.10). Com o intuito de obter o sistema de otimalidade, vamos obter o sistema adjunto a (3.10).Para isto, mutiplicamos em (3.10) por p_i, obtendo

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + A(t)\tilde{u}_i + a(y,t)\tilde{u}_i + \vec{b}(y,t)\nabla \tilde{u}_i \right) p_i dydt = \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dydt \tag{3.11}$$

integrando por partes ficamos com

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_i(T), p_i(T)) + \int_{Q_T} \left\{ -\frac{\partial p_i}{\partial t} + A(t)p_i + a(y,t)p_i - div[\vec{b}(y,t)p_i] \right\} \tilde{u}_i dydt = \\ \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dydt\end{aligned} \tag{3.12}$$

Com isto definimos o sistema adjunto

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial p_i}{\partial t} + A(t)p_i + a(y,t)p_i - div[\vec{b}(y,t)p_i = 0 \text{ em } Q_T, \\ p_i = 0, \text{ sobre } \Sigma_T \\ p_i(T) = \rho_i^2[u(T) - u^T]|D_t| \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.13}$$

onde a condição para $p_i(T)$ no sistema (3.13) foi motivada pela equação de Euler-Lagrange (3.9). De (3.12) e (3.13), obtemos

$$(\tilde{u}_i(T), \rho_i^2[u(T) - u^T]|D_t|) = \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dydt,$$

logo,

$$\int_\Omega \rho_i^2[u(T) - u^T]|D_t| \tilde{u}_i(T) dy = \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dydt. \tag{3.14}$$

Agora da equação de Euler-Lagrange, temos

$$-\frac{1}{\alpha_i}\int_0^T\int_\Omega |D_t| w_i \tilde{w}_i \chi_i dydt = \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_i dydt$$

o que implica,

$$-\int_{Q_T} |D_t| w_i \tilde{w}_i \chi_i dydt = \alpha_i \int_{Q_T} \tilde{w}_i p_i \chi_i dydt, \tag{3.15}$$

onde denotamos por χ_i a função característica de $\mathcal{O}_i \times (0,T)$. De (3.15) ficamos com

$$\int_{Q_T} [|D_t| w_i + \alpha p_i] \tilde{w}_i \chi_i dydt = 0, \ \forall \tilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$$

daí, pelo Lema de Du Bois Raymond, obtemos

$$|D_t| w_i + \alpha p_i = 0 \text{ quase sempre em } \mathcal{O}_i \times (0,T)$$

implicando que,

$$w_i = \frac{-\alpha_i p_i}{|D_t|} \text{ quase sempre em } \mathcal{O}_i \times (0,T). \tag{3.16}$$

Com isto, desde que $w(v) = \{w_1(v), \ldots, w_N(v)\}$ seja um equilíbrio de Nash para os funcionais custo $j_1, \ldots, j_N$, temos o seguinte sistema de otimalidade

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u + a(y,t)u + \vec{b}(y,t)\cdot\nabla u + \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i p_i}{|D_t|}\chi_i = v\chi, \text{ em } Q_T, \\ -\dfrac{\partial p_i}{\partial t} + A(t)p_i + a(y,t)p_i - div[\vec{b}(y,t)p_i] = 0 \text{ em } Q_T, \ i = 1, \ldots, N, \\ u = 0, \ p_i = 0, \text{ sobre } \Sigma_T, \\ u(0) = 0, \ p_i(T) = \rho_i^2[u(T) - u^T]|D_t| \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

onde χ denota a função caracrerística de $\mathcal{O} \times (0,T)$. Esse sistema tem um único par de soluções $\{u,p\}$, com $p = \{p_1, \ldots, p_N\}$, a prova desta afirmação será feita no capítulo 5. Por enquanto vamos supor a existência de um par de soluções $\{u,p\}$ para o sistema de otimalidade (3.17).

2ª Etapa.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, para simplificar os cálculos que $u^T = 0$. Isto é possível graças a lineridade e da unicidade de solução do sistema de otimalidade. De fato, seja $\{u,p\}$, $p = \{p_1, \ldots, p_N\}$, podemos escrever

$$(u, p_i) = (U, P_i) + (V, q_i)$$

onde (U,P), $P=\{P_1,\ldots,P_N\}$, é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial t}+A(t)U+a(y,t)U+\vec{b}(y,t)\cdot\nabla U+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i P_i}{|D_t|}\chi_i=0 \text{ em } Q_T,\\ -\dfrac{\partial P_i}{\partial t}+A(t)P_i+a(y,t)P_i-div[\vec{b}(y,t)P_i=0,\ em\ Q_T,\ i=1,\ldots,N,\\ U=0,\ P_i=0,\ \text{sobre } \Sigma_T\\ U(0)=0,\ P_i(T)=\rho_i^2[U(y,T,v,w(v))-u^T]|D_t| \text{ em } \Omega,\end{array}\right.$$

e (V,q), $q=\{q_1,\ldots,q_N\}$, é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial t}+A(t)V+a(y,t)V+\vec{b}(y,t)\cdot\nabla V+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i q_i}{|D_t|}\chi_i=v\chi \text{ em } Q_T,\\ -\dfrac{\partial q_i}{\partial t}+A(t)q_i+a(y,t)q_i-div[\vec{b}(y,t)q_i=0,\ em\ Q_T,\ i=1,\ldots,N,\\ V=0,\ q_i=0,\ \text{sobre } \Sigma_T,\\ V(0)=0,\ q_i(T)=\rho_i^2[V(y,T,v,w(v))]|D_t| \text{ em } \Omega.\end{array}\right.$$

Observamos que neste sistema o estado ideal é $V^T=0$. Portanto, se o conjunto das soluções V, avaliadas em $t=T$ é denso em $L^2(\Omega)$, então, para a solução U fixa, o conjunto das funções

$$u(T)=U(T)+V(T),$$

é denso em $L^2(\Omega)$. Isto mostra que podemos considerar $u^T=0$.

Vamos provar que conjunto $R(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$. Para isto seja $f\in L^2(\Omega)$ tal que

$$(u(\cdot,T,v,w(v)),f)=0,\ \forall v\in L^2(\mathcal{O}\times(0,T)),$$

devemos mostrar que $f=0$. Desse modo, segue de um corolário do Teorema de Hahn-Banach que $R(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$, (ver [1] p.8).

Multiplicando por φ e ψ_i em $(3.17)_1$ e $(3.17)_2$, respectivamente, e integrando em Q_T temos

$$\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial t}\varphi dydt+\int_{Q_T}[A(t)u+a(y,t)u+\vec{b}(y,t)\nabla u]\varphi dydt+\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i p_i\chi_i\varphi}{|D_t|}dydt=$$
$$\int_{Q_T}v\chi\varphi dydt$$

e

$$-\int_{Q_T}\frac{\partial p_i}{\partial t}\psi_i dydt+\int_{Q_T}[A(t)p_i+a(y,t)p_i-div(\vec{b}(y,t)p_i)]\psi_i dydt=0.$$

usando integração por partes as condições iniciais, temos

$$\int_\Omega u(T)\varphi(T)dydt+\int_{Q_T}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+A(t)\varphi+a(y,t)\varphi-div(\vec{b}(y,t)\varphi)\right]udydt+$$

$$\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i p_i\chi_i\varphi}{|D_t|}dydt=\int_{Q_T}v\chi\varphi dydt,$$

e

$$-\int_\Omega p_i(T)\psi_i(T)dydt+\int_{Q_T}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+A(t)\psi_i+a(y,t)\psi_i+\vec{b}(y,t)\nabla\psi_i\right]p_i dydt=0,$$

logo,

$$\begin{aligned}&(u(T),\varphi(T))+\int_{Q_T}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Lambda^*\varphi\right)udydt+\\&\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i p_i\chi_i\varphi}{|D_t|}dydt=\int_{Q_T}v\chi\varphi dydt,\end{aligned}\tag{3.18}$$

e

$$(-p_i(T),\psi_i(T))+\int_{Q_T}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\Lambda\psi_i\right)p_i dydt=0,\tag{3.19}$$

onde,

$$\Lambda^*\varphi=A(t)\varphi+a(y,t)\varphi-div(\vec{b}(y,t)\varphi)\text{ e }\Lambda\psi_i=A(t)\psi_i+a(y,t)\psi_i+\vec{b}(y,t)\nabla\psi_i.$$

Com isto, motivados por (3.17), podemos definir o sistema, lembrando que $u^T=0$.

$$\left|\begin{array}{l}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A(t)\varphi+a(y,t)\varphi-div(\vec{b}(y,t)\varphi)=0\text{ em }Q_T,\\ \dfrac{\partial\psi_i}{\partial t}+A(t)\psi_i+a(y,t)\psi_i+\vec{b}(y,t)\nabla\psi_i=-\dfrac{\alpha_i\chi_i\varphi}{|D_t|}\text{ em }Q_T,\ i=1,\dots,N,\\ \varphi=0,\ \psi_i=0\text{ sobre }\Sigma_T,\\ \psi_i(0)=0,\ \varphi(T)=f+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\rho_i^2\psi_i(T)|D_t|\text{ em }\Omega.\end{array}\right.\tag{3.20}$$

Pelo mesmo método usado para provar existência e solução para (3.17) podemos provar que o sistema (3.20) tem um único par de soluções $\{\varphi,\psi\}$, com $\psi=\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$. Substituindo $(3.20)_1$ em (3.18) e $(3.20)_2$ em (3.19) temos

$$(u(T),\varphi(T))+\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i p_i\chi_i\varphi}{|D_t|}dydt=\int_{Q_T}v\chi\varphi dydt,\tag{3.21}$$

e

$$(-p_i(T), \psi_i(T)) - \int_{Q_T} \frac{\alpha_i \chi_i \varphi p_i}{|D_t|} dydt = 0, \tag{3.22}$$

Somando em (3.22) de 1 a N, temos

$$\sum_{i=1}^{N} (-p_i(T), \psi_i(T)) - \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_T} \frac{\alpha_i \chi_i \varphi p_i}{|D_t|} dydt = 0, \tag{3.23}$$

então, de (3.21) e (3.23), obtemos

$$(u(T), \varphi(T)) + \sum_{i=1}^{N} (-p_i(T), \psi_i(T)) = \int_{Q_T} v\chi\varphi dydt. \tag{3.24}$$

Agora como estamos considerando $u^T = 0$, de $(3.17)_4$ e (3.24) ficamos com

$$(u(T), f + \sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 \psi_i(T)|D_t|) + \sum_{i=1}^{N} (-\rho_i^2 u(T)|D_t|, \psi_i(T)) = \int_{Q_T} v\chi\varphi dydt$$

o que implica,

$$(u(T), f) + \sum_{i=1}^{N} (u(T), \rho_i^2 \psi_i(T)|D_t|) - \sum_{i=1}^{N} (u(T), \rho_i^2 |D_t| \psi_i(T)) = \int_{Q_T} v\chi\varphi dydt$$

e daí,

$$(u(T), f) = \int_{Q_T} v\chi\varphi dydt, \tag{3.25}$$

mas, estamos supondo

$$(u(T), f) = (u(\cdot, T, v, w(v)), f) = 0, \ \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)),$$

logo,

$$\int_{Q_T} v\chi\varphi dydt = 0, \ \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$$

o que implica,

$$\int_{\mathcal{O} \times (0,T)} v\varphi dydt = 0, \ \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)).$$

Portanto,

$$\varphi = 0 \text{ quase sempre em } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Assim, notando que $\mathcal{O} \times (0,T) \subset Q_T$ é um cilíndro, pelo Princípio da Continuação Única, ver Teorema A.11, temos

$$\varphi = 0 \text{ quase sempre em } Q_T. \tag{3.26}$$

E por continuidade $\varphi(T) = 0$. Substituindo (3.26) em $(3.20)_2$ temos $\psi_i = 0$ quase sempre em Q_T, então, por continuidade, temos $\psi_i(T) = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Logo, sendo

$$\varphi(T) = f + \sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 \psi_i(T) |D_t|,$$

chegamos a $f = 0$, como queriamos mostrar. ■

Capítulo 4

Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Cosideremos os funcionais custo j_i, $i = 1, \ldots, N$, definidos no Capítulo 3. Sabemos que eles são estritamente convexos e semicontínuos inferiormente. Lembremos também dos operadores lineares e contínuos, L_i, dados por $L_i w_i = u_i(T)$, onde $u_i(y, t, w_i)$ é a única solução forte do sistema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + A(t)u_i + a(y,t)u_i + \vec{b}(y,t) \cdot \nabla u_i = w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \text{ em } Q_T, \\ u_i = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ u_i(0) = 0 \text{ em } \Omega, i = 1, \ldots, N. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Notamos que $u_i \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Consideremos os espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)) \ e \ \mathcal{H} = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i.$$

Logo,

$$||u_i||_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C_{iT} |w_i|_{\mathcal{H}_i}. \tag{4.2}$$

Sabemos que na definição de j_i, $i = 1, \ldots, N$, $u(y, t, v, w(v))$ denota a única solução forte do problema (2.7), com membro direito da equação sendo $v\chi_{\mathcal{O}} + \sum_{i=1}^{N} w_i \chi_{\mathcal{O}_i}$ e com

$u(0) = 0$. Desse modo, para $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ fixo, seja $z \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ a única solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} + A(t)z + a(y,t)z + \vec{b}(y,t) \cdot \nabla z = v\chi_{\mathcal{O}} \text{ em } Q_T, \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \\ z(y,0) = 0 \text{ em } \Omega, i = 1, \ldots, N. \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Como (2.7) é linear então $z + \sum_{i=1}^{N} u_i$ também é solução forte deste sistema. Segue da unicidade de solução para (2.7), (4.1) e (4.3) que

$$z(y,t,v) + \sum_{i=1}^{N} u_i(y,t,w_i) = u(y,t,v,w) = S_0(t)v + \sum_{i=1}^{N} S_i(t)w_i, \ 0 \leq t \leq T.$$

Em particular,

$$z^T(y) + \sum_{i=1}^{N} u_i(y,T,w_i) = z(y,T,v) + \sum_{i=1}^{N} u_i(y,T,w_i) = u(T) = L_0 v + \sum_{i=1}^{N} L_i w_i. \tag{4.4}$$

De (4.4), podemos reescrever os funcionais custo j_i, pondo

$$\begin{array}{l} j_i(v, w_1, \ldots, w_N) = \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} |D_t||w_i|^2 dydt + \dfrac{\alpha_i}{2}\int_\Omega |D_T| \left\{ \rho_i^2 \left[\sum_{j=1}^{N} L_j w_j(y,T) - \eta^T \right] \right\}^2 dy \end{array}$$

onde $\eta^T = u^T - z^T$.

Agora sendo j_i, para $i = 1, \ldots, N$, semicontínuos inferiormente e estritamente convexos, temos que $w = \{w_1, \ldots, w_N\}$ é o equilíbrio de Nash para os funcionais j_i se, e somente se, as suas derivadas de Gateaux se anulam, ou seja,

$$(|D_t|w_i, \tilde{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(|D_T|\rho_i \sum_{j=1}^{N} [L_j w_j - \eta^T], \rho_i L_i \tilde{w}_i \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall \tilde{w}_i \in \mathcal{H}_i. \tag{4.5}$$

Observamos que L_i^*, o adjunto de L_i, $i = 1, \ldots, N$, pertence a $\mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathcal{H}_i)$, temos

$$\alpha_i \left(|D_T|\rho_i \sum_{j=1}^{N} [L_j w_j - \eta^T], \rho_i L_i \tilde{w}_i \right)_{L^2(\Omega)} = \alpha_i \left(L_i^* |D_T| \rho_i^2 \sum_{j=1}^{N} [L_j w_j - \eta^T], \tilde{w}_i \right)_{\mathcal{H}_i},$$

para todo $\tilde{w}_i \in \mathcal{H}_i$. Substituindo em (4.5) ficamos com

$$(|D_t|w_i, \tilde{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(L_i^* \left(|D_T| \rho_i^2 \sum_{j=1}^{N} [L_j w_j - \eta^T] \right), \tilde{w}_i \right)_{\mathcal{H}_i} = 0, \ \forall \tilde{w}_i \in \mathcal{H}_i$$

implicando que,

$$\left(|D_t|w_i + \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\sum_{j=1}^{N}[L_jw_j - \eta^T]\right), \tilde{w}_i\right)_{\mathcal{H}_i} = 0,\ \forall \tilde{w}_i \in \mathcal{H}_i$$

o que acarreta,

$$|D_t|w_i + \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\sum_{j=1}^{N}[L_jw_j - \eta^T]\right) = 0 \text{ quase sempre em } \mathcal{O}_i \times (0,T)$$

logo,

$$|D_t|w_i + \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\sum_{j=1}^{N}L_jw_j\right) = \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\eta^T\right), \tag{4.6}$$

quase sempre em $\mathcal{O}_i \times (0,T)$, para $i = 1, \dots, N$.

Considere a aplicação

$$f = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{H},\ f_i = \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\eta^T\right),\ i = 1, \dots, N.$$

e o operador $\mathbb{L} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\mathbb{L}w = ((\mathbb{L}w)_1, \dots, (\mathbb{L}w)_N)$, onde

$$\mathbb{L}w_i = |D_t|w_i + \alpha_i L_i^*\left(|D_T|\rho_i^2\sum_{j=1}^{N}L_jw_j\right).$$

Notemos que $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Usando f e $\mathbb{L}$, podemos reescrever o sistema em (4.6) como

$$\mathbb{L}w = f \text{ em } \mathcal{H}. \tag{4.7}$$

Portanto, devemos provar que para cada $f \in \mathcal{H}$ a equação linear (4.7) tem uma única solução $w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathcal{H}$. Faremos isto como uma aplicação do Lema de Lax-Milgram, com certas hipóteses sobre os ρ_i.

Proposição 4.1. *Se $||\rho||_{L^\infty(\Omega)}$ é suficientemente pequena, para cada $i = 1, \dots, N$, então o sistema linear (4.7) tem uma única solução.*

Observação 4.1. *A existência e unicidade de solução para o sistema (4.7) garantida pela Proposição 4.1, significa que existe um único equilíbrio de Nash, $w = (w_1, \dots, w_N)$ para os funcionais custo j_i, $i = 1, \dots, N$.*

Prova da Proposição 4.1. A prova será feita em duas etapas. Na primeira provaremos o resultado para $N = 1$ e na segunda etapa para $N > 1$.

1ª Etapa.

Suponhamos $N = 1$. Desse modo, temos $w = w_1$, daí

$$(\mathbb{L}w, w) = (|D_t|w_1 + \alpha_1 L_1^*(|D_T|\rho_1^2 L_1 w_1), w_1)$$

o que implica,

$$(\mathbb{L}w, w) = ||D_t|^{\frac{1}{2}} w_1|^2_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1(|D_T|\rho_1^2 L_1 w_1), L_1 w_1),$$

acarretando

$$(\mathbb{L}w, w) = ||D_t|^{\frac{1}{2}} w_1|^2_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1||D_T|^{\frac{1}{2}}\rho_1^2 L_1 w_1|^2.$$

Da observação 2.2, temos

$$K_0|w_1|^2_{\mathcal{H}_1} \leq ||D_t|^{\frac{1}{2}} w_1|^2_{\mathcal{H}_1} \text{ e } K_0\alpha_1|\rho_1^2 L_1 w_1|^2 \leq \alpha_1||D_T|^{\frac{1}{2}}\rho_1^2 L_1 w_1|^2,$$

então,

$$(\mathbb{L}w, w) \geq K_0(|w_1|^2_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1|\rho_1^2 L_1 w_1|^2) \Rightarrow$$

logo

$$(\mathbb{L}w, w) \geq K_0|w_1|^2_{\mathcal{H}_1} = K_0|w|^2. \tag{4.8}$$

Mostrando que, neste caso, $\mathbb{L}$ é coercivo, portanto, pelo Lema de Lax-Milgram, a equação $\mathbb{L}w = f$ tem uma única solução $w \in \mathcal{H}$.

2ª Etapa.

Seja $N > 1$. Sendo $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(\Omega))$, temos

$$(\mathbb{L}w, w) = \sum_{i=1}^{N}(|D_t|w_i, w_i)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i L_i^*\left(\rho_i^2|D_T|\sum_{j=1}^{N} L_j w_j\right), w_i\right)_{\mathcal{H}_i},$$

então, pela observação 2.2, temos

$$(\mathbb{L}w, w) \geq K_0\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2_{\mathcal{H}_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N} L_j w_j, \rho_i L_i w_i\right)_{L^2(\Omega)}}_{(I)} \tag{4.9}$$

Análisemos o termo (I) da desigualdade em (4.9). Temos

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j,\rho_iL_iw_i\right)_{L^2(\Omega)}\right| \le \sum_{i=1}^{N}\left|\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j,\rho_iL_iw_i\right)_{L^2(\Omega)}\right|,$$

logo, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left|\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j,\rho_iL_iw_i\right)_{L^2(\Omega)}\right| &\le \sum_{i=1}^{N}\left|\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j\right||\rho_iL_iw_i| \\
\le \sum_{i=1}^{N}\alpha_i||\rho_i||^2_{L^\infty(\Omega)}K_1\left|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j\right||L_iw_i| &\le \max_{i=1,\dots,N}\alpha_i\max_{i=1,\dots,N}||\rho_i||^2_{L^\infty(\Omega)}K_1\left(\sum_{j=1}^{N}|L_jw_j|\right) \\
\le \max_{i=1,\dots,N}\alpha_i\max_{i=1,\dots,N}||\rho_i||^2_{L^\infty(\Omega)}K_1N\left(\sum_{i=1}^{N}|L_iw_i|^2\right).
\end{aligned}$$

Agora, como $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(\Omega))$, considerando $\bar{\rho} = \max\limits_{i=1,\dots,N}||\rho_i||^2_{L^\infty(\Omega)}$ e $\bar{\alpha} = \max\limits_{i=1,\dots,N}\alpha_i$, temos

$$\bar{\alpha}\bar{\rho}K_1N\left(\sum_{i=1}^{N}|L_iw_i|^2\right) \le \bar{\alpha}\bar{\rho}K_1N\left(\sum_{i=1}^{N}C_{iT}^2|w_i|^2_{\mathcal{H}_i}\right) \le \bar{\alpha}\bar{\rho}K_1C_T^2|w|^2_{\mathcal{H}},$$

com $C_T^2 = N\max\limits_{i=1,\dots,N}C_{iT}^2$. Portanto,

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j,\rho_iL_iw_i\right)_{L^2(\Omega)}\right| \le \bar{\alpha}\bar{\rho}K_1C_T^2|w|^2_{\mathcal{H}}.$$

Com isto, considerando $||\rho_i||_{L^\infty(\Omega)}$, $i = 1, \dots, N$, suficientemente pequeno de modo que

$$\bar{\alpha}\bar{\rho}K_1C_T^2 \le \frac{K_0}{2},$$

temos

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i\rho_i|D_T|\sum_{j=1}^{N}L_jw_j,\rho_iL_iw_i\right)_{L^2(\Omega)} \ge -\frac{K_0}{2}\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2_{\mathcal{H}_i} \tag{4.10}$$

Então, substituindo (4.10) em (4.9), obtemos

$$(\mathbb{L}w, w)_{\mathcal{H}} \ge \frac{K_0}{2}|w|^2_{\mathcal{H}}. \tag{4.11}$$

Logo, o operador $\mathbb{L}$ é coercivo. Portanto, do Lema de Lax-Milgram, segue que existe uma única solução $w \in \mathcal{H}$ para o problema (4.7). ∎

Capítulo 5

Análise do Sistema de Otimalidade

No capítulo 3 concluímos que o sistema (2.7) é aproximadamente controlável supondo a existência do Equilíbrio de Nash e da solução para o sistema de otimalidade (3.17) para os seguidores. A existência e unicidade do Equilíbrio de Nash foram provadas no capítulo 4, agora vamos estudar a existência de solução para o sistema (3.20), o qual é equivalente ao sistema de otimalidade (3.17).

Faremos a análise do seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + A(t)\theta + a(y,t)\theta - div(\vec{b}(y,t)\theta) = 0 \text{ em } Q_T, \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + A(t)\psi_i + a(y,t)\psi_i + \vec{b}(y,t)\nabla\psi_i = -\dfrac{\alpha_i \chi_i \theta}{|D_t|} \text{ em } Q_T, \\ \theta = 0,\ \psi_i = 0, \text{ sobre } \Sigma_T, \\ \psi_i(y,0) = 0,\ \theta(y,0) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 \psi_i(T)|D_t| \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Observação 5.1. *No problema (5.1) usamos a mudança de variáveis $\tilde{t} = T - t$, então temos $\theta(y,\tilde{t}) = \varphi(y, T-t)$, de onde obtemos*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Vamos provar o seguinte Teorema.

Teorema 5.1. *(i) Se $\{a, \vec{b}\} \in [L^\infty(Q_T)]^{n+1}$ e $f \in L^2(\Omega)$, então existem $N+1$ funções $\{\theta, \psi_i\}$ soluções fracas de (5.1), com regularidade*

$$\theta, \psi_i \in [L^2(0,T;H_0^1)]^{N+1} \cap [C^0(0,T;L^2(\Omega))]^{N+1}. \tag{5.2}$$

(ii) Se $\{a, \vec{b}\} \in L^\infty(Q_T) \times [W^{1,\infty}(Q_T)]^n$, $f \in H_0^1(\Omega)$ *e* $\rho_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, *então existem* $N+1$ *funções* $\{\theta, \psi_i\}$, *soluções fortes de (5.1) com regularidade*

$$\theta, \psi_i \in [L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))]^{N+1} \cap [C^0(0,T; H_0^1(\Omega))]^{N+1}. \tag{5.3}$$

Além disso,

$$\theta', \psi_i' \in [L^2(0,T; L^2(\Omega))]^{N+1}. \tag{5.4}$$

Prova. Para provar os itens (i) e (ii) usaremos o método de **Faedo-Galerkin**. Sendo contínua, simétrica e coerciva em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, existem sequências $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ e $(w_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\alpha(w_l, v) = \lambda_l(w_l, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

com

$$0 < \lambda_l, \ \forall l \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_l \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Além disso, (w_l) forma uma base ortonormal para $L^2(\Omega)$. Seja $V_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base (w_l). Provaremos que em V_m existem funções

$$\theta_m(y,t) = \sum_{l=1}^m g_{lm}(t) w_l(y), \ e \ \psi_{im}(y,t) = \sum_{l=1}^m h_{lm}^i(t) w_l(y),$$

soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left| \begin{array}{l} (\theta_m'(t), w_j) + \alpha(\theta_m(t), w_j) + (a(t)\theta_m(t), w_j) - (div[\vec{b}(t)\theta_m(t)], w_j) = 0, \\ (\psi_{im}'(t), w_j) + \alpha(\psi_{im}(t), w_j) + (a(t)\psi_{im}(t), w_j) + (\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t), w_j) = \\ -\alpha_i \left(\dfrac{\chi_i \theta_m(t)}{|D_t|}, w_j \right), \\ \psi_{im}(y,0) = 0, \\ \theta_m(y,0) - \displaystyle\sum_{i=1}^N \rho_i^2 \psi_{im}(T)|D_t| = f_m, \ \forall w_j \in V_m, \end{array} \right. \tag{5.5}$$

onde $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$ e $f_m = \displaystyle\sum_{l=1}^m (f, w_l) w_l$.

Das expressões de θ_m e ψ_m, usando que (w_l) é ortonormal em $L^2(\Omega)$ temos de (5.5) que

$$\left|\begin{array}{l} g'_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(a(t)w_l, w_j) + \sum_{l=1}^{m} g_{lm}(t)(\vec{b}(t)w_l, \nabla w_j) = 0, \\ h'^{i}_{jm}(t) + \lambda_j h^i_{jm}(t) + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} h^i_{lm}(t)(a(t)w_l, w_j) + \sum_{l=1}^{m} h^i_{lm}(t)(\vec{b}(t)\nabla w_l, w_j) = \\ -\alpha_i \dfrac{g_{jm}(t)\chi_i}{|D_t|}, \\ h^i_{lm}(0) = 0, \\ g_{jm}(0) - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (\rho_i^2 \psi_{im}(T)|D_t|, w_j) = (f, w_j), \;\; j = 1, \ldots, m, \end{array}\right. \tag{5.6}$$

Agora usando as notações

$$\begin{aligned} &G_m(t) = (g_{1m}(t), \ldots, g_{mm}(t)), \;\; G_m(0) = G_m^0, \\ &B_{lj}(t) = \lambda_{lj} + (a(t)w_l, w_j) + (\vec{b}(t)w_l, \nabla w_j), \\ &H^i_m(t) = (h_{1m}(t), \ldots, h_{mm}(t)), \\ &K_{lj}(t) = \lambda_{lj} + (a(t)w_l, w_j) + (\vec{b}(t)\nabla w_l, w_j), \\ &B_m(t) = (B_{lj}(t))_{1\le l,j\le m}, \;\; K_m(t) = (K_{lj}(t))_{1\le l,j\le m}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Observamos que os termos λ_{lj}, que aparecem em $B_{lj}(t)$ e $K_{lj}(t)$, são tais que

$$\begin{cases} \lambda_{lj} = 0, \;\; se\ l \neq j, \\ \lambda_{lj} = \lambda_l, (autovalor\ correspondente\ a\ w_l)\ se\ l = j. \end{cases}$$

Desse modo as matrizes $B_m(t)$ e $K_m(t)$ são simétricas. Com as notações (5.7) podemos reescrever o sistema (5.6) na forma

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dG_m(t)}{dt} + B_m(t)G_m(t) = 0, \\ \dfrac{dH^i_m(t)}{dt} + K_m(t)H^i_m(t) = \dfrac{\alpha_i\chi_i}{|D_t|}G_m(t), \\ G_m(0) = G_m^0, \\ H^i_m(0) = 0, i = 1, \ldots, N. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Agora fazendo, para $i = 1, \ldots, N$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} G_m(t) \\ H^i_m(t) \end{pmatrix}, F(X(t), t) = \begin{pmatrix} -B_m(t) & 0 \\ -\frac{\alpha_i\chi_i}{|D_t|} I_m & -K_m(t) \end{pmatrix},$$

onde, por I_m denotamos a matriz identidade $m \times m$, vemos que (5.8) é um sistema linear da forma

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t), t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Temos que, ver Conddington-Levinson [4], existe uma única solução de $X(t)$ definida em $[0, T]$ para (5.9). Logo, existem únicas $N + 1$ soluções $\{\theta_m, \psi_{im}\}$ para o problema aproximado (5.5) definidas em $[0, T]$. A próxima etapa consiste em obter estimativas que nos permitirão fazer a passagem ao limite das soluções aproximadas $\{\theta_m, \psi_{im}\}$.

Prova do item i.

Estimativas I.

Procedendo de modo análogo a prova do Teorema 2.5, obtemos

$$|\theta_m(t)|^2 + \int_0^t ||\theta_m(s)||^2 ds \leq C_1 \int_0^T |\theta_m(t)|^2 dt + C_1 |\theta_m(0)|^2, \tag{5.10}$$

então, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$|\theta_m(t)|^2 \leq \tilde{C}_T |\theta_m(0)|^2, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, T], \tag{5.11}$$

onde $\tilde{C}_T > 0$ é uma constante que não depende de m. Logo, de (5.10) e (5.11) temos

$$|\theta_m(t)|^2 + \int_0^t ||\theta_m(t)||^2 dt \leq C_T |\theta_m(0)|^2, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, T]. \tag{5.12}$$

A constante $C_T > 0$ não depende de m. Além disso, também analogamente ao que foi feito na prova do Teorema 2.5, temos

$$|\psi_{im}(t)|^2 + \int_0^t ||\psi_{im}(t)||^2 dt \leq \frac{\varepsilon C_T^1 \alpha_i C_0}{K_0} \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, T], \tag{5.13}$$

com $C_T^1 > 0$ independente de m e $\varepsilon > 0$ é uma constante arbitrária. De (5.13), fazendo $t = T$, ficamos com

$$|\psi_{im}(T)|^2 \leq \frac{\varepsilon C_T^1 \alpha_i C_0}{K_0} \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt. \tag{5.14}$$

Agora de $(5.5)_4$, usando a desigualdade elementar, temos

$$|\theta_m(0)|^2 = \left| \sum_{i=1}^N \psi_{im}(T) \rho_i^2 |D_t| + f_m \right|^2 \leq 2 \left| \sum_{i=1}^N \psi_{im}(T) \rho_i^2 |D_t| \right|^2 + 2|f_m|^2$$

então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e da observação 2.2, obtemos

$$|\theta_m(0)|^2 \leq 2K_1^2 \left(\sum_{i=1}^{N} |\psi_{im}(T)|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{N} ||\rho_j||^4 \right) + 2|f|^2, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Logo, fazendo $t = T$ em (5.12) e de (5.15), obtemos

$$|\theta_m(T)|^2 + \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq 2C_T K_1^2 \left(\sum_{i=1}^{N} |\psi_{im}(T)|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{N} ||\rho_j||^4 \right) + 2C_T |f|^2. \tag{5.16}$$

De (5.14) e (5.16) resulta

$$|\theta_m(T)|^2 + \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq M_T \varepsilon \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt + 2C_T |f|^2,$$

onde

$$M_T = \frac{2K_1^2 C_0 C_T^1 C_T}{K_0} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} ||\rho_j||^4 \right) > 0.$$

Consideremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então $1 - \varepsilon M_T > 0$, e ficamos com

$$|\theta_m(T)|^2 + (1 - \varepsilon M_T) \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq 2C_T |f|^2$$

o que implica,

$$(1 - \varepsilon M_T) \left(|\theta_m(T)|^2 + \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \right) \leq 2C_T |f|^2$$

então,

$$|\theta_m(T)|^2 + \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq K_T |f|^2, \tag{5.17}$$

com $K_T = \dfrac{2C_T}{1 - \varepsilon} > 0$. Observemos que K_T não depende de m. Notemos que $|f|$ é um número que não depende de m, de (5.17), assim existe um número positivo $\tilde{C}$ tal que

$$\int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq \tilde{C}, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.18}$$

Logo, de (5.12)-(5.15) e (5.18), existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|\theta_m(t)|^2 + \int_0^T ||\theta_m(t)||^2 dt \leq C, \ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{5.19}$$

$$|\psi_{im}(t)|^2 + \int_0^t ||\psi_{im}(t)||^2 dt \leq C, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Portanto,

$$(\theta_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.21}$$

$$(\psi_{im}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), i = 1,\ldots,N. \tag{5.22}$$

No que segue, quando falarmos de ψ_i, a menos que explicitemos de outro modo, estaremos supondo i variando de 1 a N.

Passagem ao limite.

De (5.21) e (5.22), ver Brezis [1], podemos extrair subsequências de (θ_m) e (ψ_{im}), ainda denotadas recpectivamente por (θ_m) e (ψ_{im}), de modo que existem θ e ψ_i em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, tais que

$$\left| \begin{array}{l} \theta_m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ \theta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\ \psi_{im} \rightharpoonup \psi_i \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ \psi_{im} \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_i \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{5.23}$$

Das convergências em (5.23), analogamente ao que foi feito na passagem ao limite na prova do Teorema 2.5, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (\theta_m(t),\xi(t))dt \to \int_0^T (\theta(t),\xi(t))dt, \\ \displaystyle\int_0^T (\psi_{im}(t),\xi(t))dt \to \int_0^T (\psi_i(t),\xi(t))dt, \\ \displaystyle\int_0^T (a(t)\theta_m(t),\xi(t))dt \to \int_0^T (\theta(t),\xi(t))dt, \\ \displaystyle\int_0^T (a(t)\psi_{im}(t),\xi(t))dt \to \int_0^T (\psi_i(t),\xi(t))dt, \\ \forall \xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \right. \tag{5.24}$$

e

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T (\vec{b}(t)\theta_m(t), \nabla\xi(t))dt \to \int_0^T (\vec{b}(t)\theta(t), \nabla\xi(t))dt, \\
\displaystyle\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t), \xi(t))dt \to \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), \xi(t))dt, \\
\displaystyle\int_0^T \alpha(\theta_m(t), \xi(t))dt \to \int_0^T \alpha(\theta(t), \xi(t))dt, \\
\displaystyle\int_0^T \alpha(\psi_{im}(t), \xi(t))dt \to \int_0^T \alpha(\psi_i(t), \xi(t))dt, \\
\forall\xi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).
\end{array}\right. \tag{5.25}
$$

E ainda, para todo $\xi = w\eta$, com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T (\theta'_m(t), \xi(t))dt \to \int_0^T (\theta'(t), \xi(t))dt, \\
\displaystyle\int_0^T (\psi'_{im}(t), \xi(t))dt \to \int_0^T (\psi'_i(t), \xi(t))dt.
\end{array}\right. \tag{5.26}
$$

Usando as convergências em (5.24)-(5.26), sendo a união dos V_m densa em $H_0^1(\Omega)$, podemos passar ao limite em (5.5), e então obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T (\theta'(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\theta(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\theta(t), w)\eta(t)dt - \\
\displaystyle\int_0^T (div[\vec{b}(t)\theta(t)], w)\eta(t)dt = 0 \\
\displaystyle\int_0^T (\psi'_i(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), w)\eta(t)dt + \\
\displaystyle\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), w)\eta(t)dt = -\alpha \int_0^T \left(\frac{\theta(t)\chi_i}{|D_t|}, w\right)\eta(t)dt,
\end{array}\right. \tag{5.27}
$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e toda $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$. Em particular, para $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$ e usando a densidade do produto $w\eta$ em $\mathcal{D}(Q_T)$, obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T (\theta'(t), \phi(t))dt + \int_0^T \alpha(\theta(t), \phi(t))dt + \int_0^T (a(t)\theta(t), \phi(t))dt - \\
\displaystyle\int_0^T (div[\vec{b}(t)\theta(t)], \phi(t))dt = 0 \\
\displaystyle\int_0^T (\psi'_i(t), \phi(t))dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), \phi(t))dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), \phi(t))dt + \\
\displaystyle\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), \phi(t))dt = -\alpha \int_0^T \left(\frac{\theta(t)\chi_i}{|D_t|}, \phi(t)\right)dt,
\end{array}\right.
$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$. Assim

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (\theta'(t) + A(t)\theta(t) + a(t)\theta(t) - div[\vec{b}(t)\theta(t)], \phi(t))dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^T \left(\psi_i'(t)A(t)\psi_i(t) + a(t)\psi_i(t) + \vec{b}(t)\nabla\psi_i(t) + \frac{\alpha_i\theta(t)\chi_i}{|D_t|}, \phi(t) \right) dt = 0, \end{array} \right.$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$. Logo,

$$\begin{array}{l} \theta'(t) + A(t)\theta(t) + a(t)\theta(t) - div[\vec{b}(t)\theta(t)] = 0 \\ \psi_i'(t) + A(t)\psi_i(t) + a(t)\psi_i(t) + \vec{b}(t)\nabla\psi_i(t) + \dfrac{\alpha_i\theta(t)\chi_i}{|D_t|} = 0, \end{array}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(Q_T)$.

Portanto, como $A(t)\theta(t)+a(t)\theta(t)-div[\vec{b}(t)\theta(t)]$ e $A(t)\psi_i(t)+a(t)\psi_i(t)+\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t)+\dfrac{\alpha_i\theta(t)\chi_i}{|D_t|}$ pertencem a $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, temos

$$\{\theta', \psi_i'\} \in [L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))]^{N+1}. \tag{5.28}$$

Como também temos

$$\{\theta, \psi_i\} \in [L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))]^{N+1}$$

segue, ver Lions-Magenes [12], por um resultado de interpolação entre $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$, que

$$\{\theta, \psi_i\} \in [C^0([0,T];L^2(\Omega))]^{N+1}. \tag{5.29}$$

Portanto, podemos calcular $\theta(0)$, $\psi_i(0)$ e $\psi_i(T)$.

Convergência dos dados iniciais

Multiplicando $(5.5)_2$ por uma função η continuamente diferenciável, com $\eta(T) = 0$ e $\eta(0) = 1$, e integrando por partes, temos

$$\begin{array}{c} \displaystyle -\int_0^T (\psi_{im}'(t), w_j)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_{im}(t), w_j)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_{im}(t), w_j)\eta(t)dt + \\ \displaystyle + \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t), w_j)\eta(t)dt = -\int_0^T \alpha_i \left(\theta_m(t)\chi_i, w_j\right)\eta(t)dt,\ \forall w_j \in V_m, \end{array}$$

então, como a união dos V_m é densa em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{array}{c} \displaystyle -\int_0^T (\psi_{im}'(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_{im}(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_{im}(t), v)\eta(t)dt + \\ \displaystyle + \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t), v)\eta(t)dt = -\int_0^T \alpha_i \left(\theta_m(t)\chi_i, v\right)\eta(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array}$$

Logo, fazendo $m \to \infty$, ficamos com

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (\psi_i'(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), v)\eta(t)dt + \\
&+\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), v)\eta(t)dt = -\int_0^T \alpha_i\left(\theta(t)\chi_i, v\right)\eta(t)dt, \\
&\forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Por outro lado, considerando em $(5.27)_2$, η dessa forma, integrando por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (\psi_i'(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), v)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), v)\eta(t)dt \\
&+\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), v)\eta(t)dt = -\int_0^T \alpha_i\left(\theta(t)\chi_i, v\right)\eta(t)dt + (\psi_i(0), v), \\
&\forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

Comparando, (5.30) e (5.31), obtemos

$$(\psi_i(0), v) = 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

portanto, pela densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, $\psi_i(0) = 0$. Mostrando que

$$\psi_{im}(0) \rightharpoonup \psi_i(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Analogamente, obtemos

$$\psi_{im}(T) \rightharpoonup \psi_i(T) \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \theta_m(0) \rightharpoonup \theta(0) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{5.32}$$

De $(5.5)_4$, sendo $(w_l)_{l\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal em $L^2(\Omega)$, temos

$$(\theta_m(0), w_j) - \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 |D_T|\psi_{im}(T), w_j\right) = (f_m, w_j), \forall w_j \in V_m.$$

Então, como a união dos V_m é densa em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$(\theta_m(0), \xi) - \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 |D_T|\psi_{im}(T), \xi\right) = (f_m, \xi), \forall \xi \in L^2(\Omega).$$

Logo, fazendo $m \to \infty$, de (5.32) e usando que (f_m) converge para f em $L^2(\Omega)$ ficamos com

$$(\theta(0), \xi) - \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 |D_T|\psi_i(T), \xi\right) = (f, \xi), \forall \xi \in V_m.$$

Portanto, como a união dos V_m é densa em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\theta(0) - \sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 |D_T| \psi_i(T) = f.$$

Unicidade.

Notemos que o sistema (5.1) é linear. Com isto, suponhamos que existam $\{\theta, \psi_i\}$ e $\{\bar{\theta}, \bar{\psi}_i\}$ soluções de (5.1), então $\{\tilde{\theta}, \tilde{\psi}_i\}$, $\tilde{\theta} = \theta - \bar{\theta}$ e $\tilde{\psi}_i = \psi_i - \bar{\psi}_i$, são soluções do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + A(t)\tilde{\theta} + a(y,t)\tilde{\theta} - div(\vec{b}(y,t)\tilde{\theta}) = 0 \text{ em } Q_T, \\ \dfrac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial t} + A(t)\tilde{\psi}_i + a(y,t)\tilde{\psi}_i + \vec{b}(y,t)\nabla\tilde{\psi}_i = -\dfrac{\alpha_i \chi_i \tilde{\theta}}{|D_t|} \text{ em } Q_T, \\ \tilde{\theta} = 0, \;\; \tilde{\psi}_i = 0 \text{ sobre } \Sigma_T \\ \tilde{\psi}_i(y,0) = 0, \;\; \tilde{\theta}(y,0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 \tilde{\psi}_i(T)|D_t| \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.33}$$

Multiplicando em $(5.33)_1$ e $(5.33)_2$ por $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\psi}_i$, respectivamente, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} (\tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t)) + \alpha(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) + (a(t)\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) - (div[\vec{b}(t)\tilde{\theta}(t)], \tilde{\theta}(t)) = 0 \\ (\tilde{\psi}'_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) + \alpha(\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) + (a(t)\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) + \\ +(\vec{b}(t)\nabla\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) = -\left(\dfrac{\alpha_i \tilde{\theta}(t)\chi_i}{|D_t|}\right). \end{array}\right. \tag{5.34}$$

Como,

$$(\tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t)) + \alpha(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\theta}(t)|^2 + \alpha(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t))$$

então,

$$(\tilde{\theta}'(t), \tilde{\theta}(t)) + \alpha(\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t)) \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\theta}(t)|^2 + \overline{C}^2||\tilde{\theta}(t)||^2, \tag{5.35}$$

e sendo,

$$(\tilde{\psi}'_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) + \alpha(\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \alpha(\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t))$$

temos

$$(\tilde{\psi}'_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) + \alpha(\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) \geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \overline{C}^2||\tilde{\psi}_i(t)||^2. \tag{5.36}$$

Agora procedendo como na prova do Teorema 2.5, obtemos

$$|(a(t)\tilde{\theta}(t), \tilde{\theta}(t))| \leq \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon C_0^2 ||a||^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2}{2},$$
$$|(a(t)\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t))| \leq \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon C_0^2 ||a||^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2}{2},$$
$$|(div[\vec{b}(t)\tilde{\theta}(t)], \tilde{\theta}(t))| \leq \frac{||\vec{b}||^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2 \varepsilon}{2} + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{2\varepsilon},$$
$$|(\vec{b}(t)\nabla\tilde{\psi}_i(t), \tilde{\psi}_i(t))| \leq \frac{||\vec{b}||^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2 \varepsilon}{2} + \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2\varepsilon}.$$

Além disso,

$$\left| -\alpha_i \left(\frac{\tilde{\theta}(t)\chi_i}{|D_t|}, \tilde{\psi}_i(t) \right) \right| \leq \frac{\alpha_i^2 C_0^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2}{2K_0^2} + \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2}.$$

Logo, dessas desigualdades e de (5.34)-(5.36), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\theta}(t)|^2 + \overline{C}^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2 \leq \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon C_0^2 ||a||^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2}{2} + \frac{||\vec{b}||^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2 \varepsilon}{2} + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{2\varepsilon}$$

o que implica,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\theta}(t)|^2 + \overline{C}^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2 \leq \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\varepsilon} + \left[\frac{\varepsilon (C_0^2 ||a||^2 + ||\vec{b}||^2)}{2} \right] ||\tilde{\theta}(t)||^2. \tag{5.37}$$

Além disso, sendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \overline{C}^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2 \leq \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon C_0^2 ||a||^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2}{2} + \frac{||\vec{b}||^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2 \varepsilon}{2} +$$
$$+ \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2\varepsilon} + \frac{\alpha_i^2 C_0^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2}{2K_0^2} + \frac{|\tilde{\psi}_i(t)|^2}{2}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \overline{C}^2 ||\tilde{\psi}_i(t)||^2 \leq \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \left[\frac{\varepsilon (C_0^2 ||a||^2 + ||\vec{b}||^2)}{2} \right] ||\tilde{\psi}_i(t)||^2 + \\ + \frac{\alpha_i^2 C_0^2 ||\tilde{\theta}(t)||^2}{2K_0^2} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Assim, integrando de 0 a t em (5.37) e (5.38) e lembrando que $\psi_0 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\tilde{\theta}(t)|^2 + \overline{C}^2 \int_0^t ||\tilde{\theta}(s)||^2 ds \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\theta}(s)|^2 ds + \\ + \left[\frac{\varepsilon (C_0^2 ||a||^2 + ||\vec{b}||^2)}{2} \right] \int_0^t ||\tilde{\theta}(s)||^2 ds \frac{1}{2}|\theta(0)|^2, \end{aligned} \tag{5.39}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + \overline{C}^2 \int_0^t ||\tilde{\psi}_i(s)||^2 ds \leq \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\psi}_i(s)|^2 ds + \frac{\alpha_i^2 C_0^2}{2K_0^2} \int_0^t ||\tilde{\theta}(s)||^2 ds + \\ &+ \left[\frac{\varepsilon(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2)}{2} \right] \int_0^t ||\tilde{\psi}_i(s)||^2 ds. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Como $\displaystyle\int_0^t |\tilde{\theta}(s)|^2 ds$, para todo $t \in [0, T]$ e $|\theta(0)|^2$ são números positivos, então podemos supor ε suficientemente pequeno de modo que,

$$\underbrace{|\theta(0)|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\theta}(s)|^2 ds}_{(I)} \ e \ \underbrace{2\overline{C}^2 - \varepsilon(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2) > 0}_{(II)}$$

Logo, usando (II) e as desigualdades (5.39) e (5.40), obtemos

$$|\tilde{\theta}(t)|^2 + C_1 \int_0^t ||\tilde{\theta}(s)||^2 ds \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\theta}(s)|^2 ds + |\theta(0)|^2, \tag{5.41}$$

$$|\tilde{\psi}_i(t)|^2 + C_1 \int_0^t ||\tilde{\psi}_i(s)||^2 ds \leq \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\psi}_i(s)|^2 ds + \frac{\alpha_i^2 C_0^2}{K_0^2} \int_0^t ||\tilde{\theta}(s)||^2 ds, \tag{5.42}$$

onde, $C_1 = 2\overline{C}^2 - \varepsilon(C_0^2||a||^2 + ||b||^2) > 0$. De (5.41) e (I) obtemos

$$|\tilde{\theta}(t)|^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\theta}(s)|^2 ds, \ \forall t \in [0, T], \tag{5.43}$$

assim, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$|\tilde{\theta}(t)|^2 \leq 0, \ \forall t \in [0, T]. \tag{5.44}$$

Portanto $\tilde{\theta} = 0$. Com isto, de (5.42) segue que

$$|\tilde{\psi}_i(t)|^2 \leq \frac{\varepsilon + 2}{2\varepsilon} \int_0^t |\tilde{\psi}_i(s)|^2 ds, \forall t \in [0, T].$$

então, pela degualdade de Gronwall,

$$|\tilde{\psi}_i(t)|^2 \leq 0, \ \forall t \in [0, T].$$

Logo, $\tilde{\psi}_i = 0$. Isto conclui a prova da unicidade. Portanto provamos o item (i).

Prova do item (ii)**.**

Estimativas II.

Multiplicando em $(5.5)_1$ e $(5.5)_2$ por $g'_{jm}(t)$ e $h^{i\prime}_{jm}$, repectivamente, e somando de $j=1$ a $j=m$, obtemos

$$\begin{aligned}&(\theta'_m(t),\theta'_m(t))+\alpha(\theta_m(t),\theta'_m(t))+(a(t)\theta_m(t),\theta'_m(t))-\\&(\vec{b}(t)\nabla\theta_m(t)+div[\vec{b}(t)]\theta_m(t),\theta'_m(t))=0,\end{aligned}\tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}&(\psi'_{im}(t),\psi'_{im}(t))+\alpha(\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))+(a(t)\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))+\\&(\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))=-\left(\frac{\alpha_i\theta_m(t)\chi_i}{|D_t|},\psi_{im}(t)\right).\end{aligned}\tag{5.46}$$

Agora procedendo como na prova do Teorema 2.6, obtemos

$$\begin{aligned}&|\theta'_m(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(\theta_m(t),\theta_m(t))=-(a(t)\theta_m(t),\theta'_m(t))+(\vec{b}(t)\nabla\theta_m(t),\theta'_m(t))\\&+(div[\vec{b}(t)]\theta_m(t),\theta'_m(t))+\frac{1}{2}\alpha'(\theta_m(t),\theta_m(t)),\end{aligned}\tag{5.47}$$

e

$$\begin{aligned}&|\psi'_{im}(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(\psi_{im}(t),\psi_{im}(t))=-(a(t)\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))-(\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))\\&+\frac{1}{2}\alpha'(\psi_{im}(t),\psi_{im}(t))-\left(\frac{\alpha_i\theta_m(t)\chi_i}{|D_t|},\psi_{im}(t)\right).\end{aligned}\tag{5.48}$$

Recordamos que

$$\alpha'(u(t),v(t))=\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{d}{dt}\alpha_{kj}(y,t)\right)\frac{\partial u(t)}{\partial y_j}\frac{\partial v(t)}{\partial y_k}dy,\ \forall u,v\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).$$

Notemos que valem as desigualdades

$$\begin{aligned}&|(a(t)\theta_m(t),\theta'_m(t))|\le C_0||a||||\theta_m(t)|||\theta'_m(t)|,\\&|(\vec{b}(t)\nabla\theta_m(t),\theta'_m(t))|\le||\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta_m(t)|,\\&|((div[\vec{b}(t)]\theta_m(t),\theta'_m(t)))|\le||div\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta'_m(t)|,\\&\left|\frac{1}{2}\alpha'(\theta_m(t),\theta_m(t))\right|\le\frac{M}{2}||\theta_m(t)||^2,\\&|(a(t)\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))|\le C_0||a||||\psi_{im}(t)|||\psi'_{im}(t)|,\\&|(\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t),\psi'_{im}(t))|\le||\vec{b}||||\psi_{im}(t)|||\psi'_{im}(t)|,\\&\left|\frac{1}{2}\alpha'(\psi_{im}(t),\psi_{im}(t))\right|\le\frac{M}{2}||\psi_{im}(t)||^2,\\&\left|\left(\frac{\alpha_i\theta_m(t)\chi_i}{|D_t|}(t),\psi'_{im}(t)\right)\right|\le\frac{\alpha_iC_0}{K_0}||\theta_m(t)|||\psi'_{im}(t)|.\end{aligned}$$

onde $M=\left(\max\limits_{1\le j,k\le n}||\alpha'_{jk}||\right)$. Além disso, usando a desigualdade elementar e o fato da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ ser contínua, obtemos

$$C_0||a||||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + ||\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + ||div\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + \frac{M}{2}||\theta_m(t)||^2 \leq$$
$$\leq (C_0||a|| + ||\vec{b}||^2 + C_0||div\vec{b}||^2)||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + \frac{M}{2}||\theta_m(t)||^2 \leq$$
$$\leq \underbrace{\frac{3}{2}(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2 + C_0^2||div\vec{b}||^2 + \frac{M}{3})}_{C_1/2}||\theta_m(t)||^2 + \frac{|\theta_m'(t)|^2}{2},$$

o que implica,

$$C_0||a||||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + ||\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta_m(t)| + ||div\vec{b}||||\theta_m(t)|||\theta_m'(t)| + \\ + \frac{M}{2}||\theta_m(t)||^2 \leq \frac{C_1}{2}||\theta_m(t)||^2 + \frac{|\theta_m'(t)|^2}{2}. \tag{5.49}$$

De modo análogo, temos

$$C_0||a||||\psi_{im}(t)|||\psi_{im}'(t)| + ||\vec{b}||||\psi_{im}(t)|||\theta_m(t)| + \frac{M}{2}||\psi_{im}(t)||^2 +$$
$$+\frac{\alpha_i C_0}{K_0}||\theta_m(t)|||\psi_{im}'(t)| \leq \frac{3}{2}\left[(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2)||\psi_{im}(t)||^2 + \frac{\alpha_i^2 C_0^2}{K_0^2}||\theta_m(t)||^2\right] +$$
$$+\frac{M}{2}||\psi_{im}(t)||^2 + \frac{|\psi_{im}'(t)|^2}{2}$$

implicando,

$$C_0||a||||\psi_{im}(t)|||\psi_{im}'(t)| + ||\vec{b}||||\psi_{im}(t)|||\theta_m(t)| + \frac{M}{2}||\psi_{im}(t)||^2 + \\ +\frac{\alpha_i C_0}{K_0}||\theta_m(t)|||\psi_{im}'(t)| \leq \frac{C_2}{2}||\psi_{im}(t)||^2 + \frac{3\alpha_i^2 C_0^2}{2K_0^2}||\theta_m(t)||^2 + \frac{|\psi_{im}'(t)|^2}{2}, \tag{5.50}$$

com, $C_2 = \dfrac{3}{2}\left(C_0^2||a||^2 + ||\vec{b}||^2 + \dfrac{M}{3}\right)$. Logo, de (5.45)-(5.48), obtemos

$$|\theta_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(\theta_m(t), \theta_m(t)) \leq \frac{C_1}{2}||\theta_m(t)||^2 + \frac{|\theta_m'(t)|^2}{2},$$
$$|\psi_{im}'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(\psi_{im}(t), \psi_{im}(t)) \leq \frac{C_2}{2}||\psi_{im}(t)||^2 + \frac{3\alpha_i^2 C_0^2}{2K_0^2}||\theta_m(t)||^2 + \frac{|\psi_{im}'(t)|^2}{2},$$

e daí,

$$|\theta_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\alpha(\theta_m(t), \theta_m(t)) \leq C_1||\theta_m(t)||^2, \tag{5.51}$$

$$|\psi_{im}'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\alpha(\psi_{im}(t), \psi_{im}(t)) \leq C_2||\psi_{im}(t)||^2 + \frac{3\alpha_i^2 C_0^2}{K_0^2}||\theta_m(t)||^2. \tag{5.52}$$

Integrando de 0 a t em (5.50), lembrando que $\psi_{im}(0) = 0$ e usando a coercividade da forma bilinear α, obtemos

$$\int_0^t |\psi_{im}'(s)|^2 ds + \overline{C}^2||\psi_{im}(t)||^2 \leq C_2\int_0^t ||\psi_{im}(s)||^2 ds + \frac{3\alpha_i^2 C_0^2}{K_0^2}\int_0^t ||\theta_m(s)||^2 ds,$$

então,

$$\int_0^t |\psi'_{im}(s)|^2 ds + ||\psi_{im}(t)||^2 \leq C_3 \int_0^t ||\psi_{im}(s)||^2 ds + C_3 \int_0^t ||\theta_m(s)||^2 ds, \qquad (5.53)$$

onde

$$C_3 = \left\{ \frac{max\left\{C_2, \frac{3\alpha_i^2 C_0^2}{K_0^2}\right\}}{\min\{1, \overline{C}^2\}} \right\} > 0.$$

De (5.19) e (5.20), existe uma constante $C_4 > 0$ que não depende de m, tal que

$$C_3 \int_0^t ||\psi_{im}(s)||^2 ds + C_3 \int_0^t ||\theta_m(s)||^2 ds \leq C_4,$$

para todo t em $[0, T]$. Logo, de (5.51) temos

$$\int_0^t |\psi'_{im}(s)|^2 ds + ||\psi_{im}(t)||^2 \leq C_4, \ \forall t \in [0, T]. \qquad (5.54)$$

Agora, integrando de 0 a t em (5.49), usando a continuidade e a coercividade de α, temos

$$\int_0^t |\theta'_m(s)|^2 ds + \overline{C}^2 ||\theta_m(t)||^2 \leq C_1 \int_0^t ||\theta_m(s)||^2 ds + C||\theta_m(0)||^2$$

o que implica,

$$\int_0^t |\theta'_m(s)|^2 ds + \overline{C}^2 ||\theta_m(t)||^2 \leq \tilde{C}_4 + C||\theta_m(0)||^2, \qquad (5.55)$$

onde C denota a constante da continuidade de α e $\tilde{C}_4 = \dfrac{C_1 C_4}{C_3}$.

Analisemos o termo $||\theta_m(0)||^2$. De $(5.5)_4$, temos

$$||\theta_m(0)||^2 = \left|\left| \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \psi_{im}(T)|D_T| + f_m \right|\right|^2 \leq 2 \left|\left| \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \psi_{im}(T)|D_T| \right|\right|^2 + 2||f_m||^2$$

Da definição de f_m, segue que $||f_m||^2 \leq ||f||^2$, para todo m. Com isto e usando a desgualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$||\theta_m(0)||^2 \leq 2K_1^2 \left(\sum_{i=1}^N ||\rho_i||^4_{W^{1,\infty}(\Omega)} \right) \left(\sum_{i=1}^N ||\psi_{im}(T)||^2 \right)^2 + 2||f||^2.$$

Como $\rho_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in H_0^1(\Omega)$ e de (5.52) $(\psi_{im}(T))$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe uma constante $C_5 > 0$, tal que

$$||\theta_m(0)||^2 \leq C_5, \ \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (5.56)$$

Logo, de (5.53) e (5.54), temos

$$\int_0^t |\theta'_m(s)|^2 ds + \overline{C}^2 ||\theta_m(t)||^2 \leq C_6, \ \forall t \in [0,T], \tag{5.57}$$

onde

$$C_6 = \frac{\tilde{C}_4 + C_5 C}{min\{1, \overline{C}^2\}} > 0.$$

Portanto, de (5.52) e (5.55), obtemos

$$(\theta'_m) \text{ e } (\psi'_{im}) \text{ são limitadas em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$(\theta_m) \text{ e } (\psi_{im}) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Com isto, como feito em Brezis [1], obtemos subsequências de (θ_m) e (ψ_{im}), que ainda denotaremos da mesma forma, e funções θ e ψ_i, tais que

$$\theta'_m \rightharpoonup \theta' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{5.58}$$

$$\psi'_{im} \rightharpoonup \psi'_i \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{5.59}$$

$$\theta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{5.60}$$

$$\psi_{im} \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_i \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{5.61}$$

Desse modo,

$$\psi_i, \theta \in W(0,T;H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)).$$

Consideremos $\xi = w(y)\eta(t)$, com $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$, então de (5.56) e (5.57) temos

$$\int_0^T (\theta'_m(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (\theta'(t), w)\eta(t)dt, \ \forall w \in H_0^1(\Omega), \ \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T), \tag{5.62}$$

$$\int_0^T (\psi'_{im}(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (\psi'_i(t), w)\eta(t)dt, \ \forall w \in H_0^1(\Omega), \ \forall \eta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{5.63}$$

De (5.58) e (5.59) temos

$$\int_0^T \Big\langle \theta_m(t), v(t) \Big\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} dt \to \int_0^T (\theta(t), v(t))dt, \ \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

$$\int_0^T \Big\langle \psi_{im}(t), v(t) \Big\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} dt \to \int_0^T (\psi'_i(t), v(t))dt, \ \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Em particular,

$$\int_0^T (\theta_m(t), A(t)w)\eta(t)dt \to \int_0^T \alpha(\theta(t), w)\eta(t)dt, \ \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{5.64}$$

$$\int_0^T (\psi_{im}(t), A(t)w)\eta(t)dt \to \int_0^T \alpha(\psi_i(t), w)\eta(t)dt, \ \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{5.65}$$

para todo $v = w\eta$, com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$. Agora analogamente ao que foi feito na prova do Teorema 2.5, da regularidade de a e $\vec{b}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (a(t)\theta_m(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (a(t)\theta(t), w)\eta(t)dt,\\
&\int_0^T (a(t)\psi_{im}(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (a(t)\psi_i(t), w)\eta(t)dt,\\
&\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\theta_m(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\theta(t), w)\eta(t)dt,\\
&\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_{im}(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), w)\eta(t)dt,\\
&\int_0^T (div(\vec{b}(t))\theta_m(t), w)\eta(t)dt \to \int_0^T (div(\vec{b}(t))\theta(t), w)\eta(t)dt,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

quaisquer que sejam $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$. Logo, de (5.60)-(5.64), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\theta'(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\theta(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\theta(t), w)\eta(t)dt +\\
&\int_0^T (div(\vec{b}(t)\theta(t)), w)\eta(t)dt = 0,
\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\psi_i'(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), w)\eta(t)dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), w)\eta(t)dt +\\
&\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), w)\eta(t)dt = -\alpha_i \int_0^T \left(\frac{\theta(t)\chi_i}{|D_t|}, w\right)\eta(t)dt
\end{aligned} \tag{5.68}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e todo $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim, usando a densidade do produto $w\eta$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$ em $\mathcal{D}(Q_T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\theta'(t), \phi(t))dt + \int_0^T \alpha(\theta(t), \phi(t))dt + \int_0^T (a(t)\theta(t), \phi(t))dt -\\
&\int_0^T (div(\vec{b}(t)\theta(t)), \phi(t))dt = 0,
\end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\psi_i'(t), \phi(t))dt + \int_0^T \alpha(\psi_i(t), \phi(t))dt + \int_0^T (a(t)\psi_i(t), \phi(t))dt +\\
&\int_0^T (\vec{b}(t)\nabla\psi_i(t), \phi(t))dt = -\alpha_i \int_0^T \left(\frac{\theta(t)\chi_i}{|D_t|}, \phi(t)\right)dt,
\end{aligned} \tag{5.70}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$. Desse modo, temos

$$\int_{Q_T} (\theta' + A\theta + a\theta - div(\vec{b}\theta))\phi dydt = 0, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T), \tag{5.71}$$

$$\int_{Q_T} \left(\psi_i' + A\psi_i + a\psi_i + \vec{b}\nabla\psi_i + \alpha_i \frac{\theta\chi_i}{|D_t|} \right) \phi dydt = 0, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T). \tag{5.72}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\theta' + A(t)\theta + a\theta - div(\vec{b}\theta) = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T), \\ &\psi_i' + A(t)\psi_i + a\psi_i + \vec{b}\nabla\psi_i + \alpha_i \frac{\theta\chi_i}{|D_t|}, \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \end{aligned}$$

Com isto, sendo $-\theta' - a\theta + div(\vec{b}\theta)$ e $-\psi_i' - a\psi_i - \vec{b}\nabla\psi_i - \alpha_i \frac{\theta\chi_i}{|D_t|}$ pertencem a $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos

$$A(t)\theta, A(t)\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$\theta, \psi_i \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{5.73}$$

Desse modo, como na prova do Teorema 2.6, temos $D(A(t)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = H_0^1(\Omega)$, então, como feito em Lions-Magenes [12],

$$[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = [D(A(t)), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = H_0^1(\Omega).$$

Portanto, sendo $\theta, \psi_i \in W(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, obtemos

$$\theta, \psi_i \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{5.74}$$

A prova das convergências dos dados iniciais e da unicidade são feitas de modo análogo a prova do item (i). Com isto concluímos a prova de (ii). O que finaliza a prova do Teorema. ∎

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice listamos alguns resultados e algumas definições que usamos no trabalho.

Teorema A.1 (Hahn-Banach). *Seja X um espaço vetorial real. Consideremos uma função $p : X \to \mathbb{R}$ satsfazendo*

$$\begin{cases} p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall x \in X, \ \forall \lambda > 0, \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X. \end{cases}$$

Sejam $G \subset X$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear, tais que

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G.$$

Então, existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que é uma extensão de g, isto é, $g(x) = f(x)$, para todo $x \in G$, e tal que

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

O corolário a seguir é uma das ferramentas fundamentais neste trabalho, uma vez que através dele e do Teorema de Imanuvilov-Yamamoto que provamos que o sistema com o qual estamos trabalhando é aproximadamente controlável.

Corolário A.2. *Seja $Y \subset X$ um subespaço vetorial tal que $\overline{Y} \neq X$. Então, existe $f \in X'$, f não nulo, tal que*

$$\langle f, x \rangle = 0, \ \forall x \in Y.$$

As provas do Teorema de Hahn-Banach e deste corolário podemos encontrar em Brezis [1].

Definição A.3. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma função $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente quando, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$[\varphi \leq \lambda] = \{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado.

Definição A.4. *Seja X um espaço vetorial. Dizemos que uma função $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é convexa quando ela tem a seguinte propriedade*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \ \forall x, y \in X, \ \forall t \in (0, T).$$

Quando verificamos a desigualdade estrita, dizemos que φ é estritamene convexa.

Definição A.5. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer intervalos abertos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$,*

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Lema A.1 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $z(t)$ uma função real, absolutamente contínua em $[0, a)$ tal que, para todo $t \in [0, a)$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s)ds, \tag{A.1}$$

onde C é uma constante não negativa. Então,

$$z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[.$$

Consequêntemente, $z(t)$ é limitada.

Prova. Podemos obter a demonstração deste lema em [14]. ■

Teorema A.6. *Suponhamos que X seja um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca.*

Prova. Ver [1]. ■

Teorema A.7. *Consideremos X um espaço de Banach separável e (f_n) uma sequência limitada em X'. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge na topologia $fraca^*$.*

Prova. Ver [1]. ■

Lema A.2 (Desigualdade de Young). *Sejam* $p, q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \forall a \geq 0 \ e \ \forall b \geq 0.$$

Prova. Ver [1]. ■

Observação A.1. *Para* $p = 2$, *em geral, chamamos a desigualdade de Young de* desigualdade elementar.

Lema A.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $1 \leq p \leq +\infty$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova. Ver [1]. ■

Observação A.2. *Para* $p = 2$ *temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

Teorema A.8 (Representação de Riesz). *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. *Então, existe um único* $u \in L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega ufdx, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, verificamos

$$\|u\|_{L^p} = \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Prova. Ver [1]. ■

Definição A.9. *Uma forma bilinear* $a : X \times X \to \mathbb{R}$ *é dita:*
(i) *contínua quando existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|a(u, v)|_\mathbb{R} \leq |u|_X|v|_X, \ \forall u, v \in X;$$

(ii) *coerciva quando existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$a(u, u) \geq K|u|_X^2, \ \forall u \in X.$$

No capítulo 4, usamos o teorema a seguir para provar a existência e unicidade do equilíbrio de Nash.

Teorema A.10 (Lax-Milgram)**.** *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, dado qualquer $f \in X'$ (espaço dual de X) existe único $u \in X$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in X.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in X \text{ e } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle = \min_{v\in X}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle\right\}.$$

Prova. Ver [1]. ∎

Teorema A.11 (Imanuvilov-Yamamoto)**.** *Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x,t)u) + c(x,t)u = g \text{ em } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{A.2}$$

Onde $Q = \Omega \times (0,T)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave e $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Suponhamos ainda,

$$\begin{cases} a_{ij} \in W^{1,\infty}(Q),\ 1 \le i,j \le n, \\ b_i \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)),\ p > 2n,\ 1 \le i \le n, \\ c \in W^{-s,p_1}(Q),\ 0 \le s < \dfrac{1}{2} \text{ e } p_1 > \max\left\{\dfrac{2n}{3-2s}, 1\right\}, \\ a_{ij}(x,t,u,u) \ge C|u|^2,\ \forall (x,t) \in Q,\ \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \text{para algum } C > 0, \\ a_{ij} = a_{ji},\ 1 \le i,j \le n, \\ a \text{ Lipschitz contínua em } \overline{Q}. \end{cases} \tag{A.3}$$

Nestas condições, seja u uma solução de (A.2) com $g \equiv 0$, então se u é igual a 0 em $\mathcal{O} \times [0,T]$ para algum aberto $\mathcal{O} \subset \Omega$, temos $u \equiv 0$ em Q.

Prova. Ver [22]. ∎

Teorema A.12 (Mudança de Variáveis)**.** *Sejam $f : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $X \subset U$ um compacto j-mensurável e $g : f(X) \to \mathbb{R}$ uma aplicação integrável. Então, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{f(X)} g(y)dy = \int_X g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx.$$

Prova. Podemos obter a prova deste resultado em [8]. ∎

Bibliografia

[1] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*,1.ed, Springer, New York, 2011.

[2] BREZIS, H., CAZENAVE, T., *Nonlinear Evolution Equations,* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

[3] CLARK, H.R., LÍMACO, J., MEDEIROS, L.A., *Remarks on hierarchic control*, J. Math. Anal. Appl., Elsevier, 368-383, 2009.

[4] CODDINGTON, E., LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, 1955.

[5] DIAZ, J. I., LIONS, J.L., *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies*, Springer, 17-27, 2005.

[6] FERREL, J.L., MEDEIROS,L.A. *Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains*, Notas de curso para o 47º Seminário Brasileiro de Análise ITA-São José dos Campos, Rio de Janeiro, 1998.

[7] FERREL, J.L., MIRANDA, M.M.,*The Navier-Stokes equation in noncylindrical domain*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (printed in U.S.A.), 247-265, 1997.

[8] LIMA, E.L.,*Curso de análise vol.2*, 10.ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[9] LIMACO, J.L., MEDEIROS, L.A., MENEZES, S.B., *Finite Approximate Controllability for Semilinear Heat Equation in Noncylindrical Domains*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 475-487, 2004.

[10] LIONS, J.L., *Quelques Methods de Resolutions des Problèmes aux Limites Non-Linaires*, Dunod, Paris,1969.

[11] LIONS, J.L., *Some remarks on the Stackelberg's optimization*, Math. Models and Methods in Appl. Sciences, vol. 4, Nº 4, World Scientific Publishing Company, 477-487, 1994.

[12] LIONS, J.L., MAGENES. E., *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol.1, Dunod, Paris,1968.

[13] MEDEIROS, L. A; *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais,* Parte I, Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[14] MEDEIROS,L.A., MIRANDA,M.M., *Introdção aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, 1.ed., Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro 2011.

[15] MEDEIROS,L.A., MIRANDA,M.M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos)*, Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[16] M. MILLA MIRANDA, *Traço para o dual dos espaços de Sobolev,* Bol. Soc. Paran. Matemática (2^a série) 11(2) (1990), p.131-157.

[17] MIRANDA,M.M., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 28, Editora do IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).

[18] DINCULEANU, N.,*Vector Measures*, Pegamon Press, Berlin , 1967.

[19] OLIVEIRA, A.M., *Controlabilidade Aproximada e Controle Hierárquico para a Equação do Movimento Moderado de Fluídos de Oldroyd*, Tese de doutorado em matemática, IM. UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

[20] PAZ, F.L.A., *Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear*, Dissertação de mestrado em matemática, UFCG, Campina Grande, 2012.

[21] TEMAM,R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[22] IMANUVILOV, O. Y., YAMAMOTO,M., *Carleman Inequalities for Parabolic Equations in Sobolev Spaces of Negative Order and Exact Controllability for Semilinear Parabolic Equations*, Publ. RIMS, Univ. Kioto, 227-274, 2003.