Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções para uma Classe de Problemas Elípticos com Não Linearidade Descontínua

por

Arthur Gilzeph Farias Almeida †

sob orientação do

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Existência de Soluções para uma Classe de Problemas Elípticos com Não Linearidade Descontínua

por

Arthur Gilzeph Farias Almeida

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro/2013

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois sem a presença Dele em minha vida nada seria possível.

A minha amada esposa, Samara, por entender os motivos pelos quais, muitas vezes, estava cansado e ausente, e com sua determinação e seu jeito amoroso, me deu novas forças para que eu pudesse seguir em frente e poder realizar este sonho.

Aos meus irmãos Alfredo, Alisson e Iara que sempre me apoiaram e ajudaram nessa prazerosa, porém difícil, caminhada e em especial, aos meus amados pais, Mônica e Gilson que são meus maiores incentivadores em tudo na vida, por tudo que me ensinaram e por todo carinho e dedicação que me deram na vida inteira.

A minha afilhada, Mayra, pelo seu sorriso fortalecedor.

A minha sogra, Ireni, e minha cunhada, Cristina, por todo apoio.

A todos os amigos da pós-graduação Fabrício, Fábio, Débora, Michel, Claudemir, Elizabete, Jogli, Alex, Alânnio, Pajé, Anderson, Romildo, Luciano, Carlos e Manu pelas discussões, seja nas disciplinas ou não.

Ao meu padrinho Brito, que além de ter me ajudado muito no decorrer deste mestrado, também contribuiu na digitação deste trabalho.

Aos amigos Joselito, Elias, Geralda e ao casal Marcelino e Guia, incentivadores e amigos verdadeiros.

Ao professor Jefferson Abrantes, por aceitar a missão, de última hora, de orientar-me e por todos os ensinamentos.

Aos professores da pós-graduação, em especial, aos professores Angelo, Claudianor, Daniel, Marco Aurélio, Marco Antonio e Horácio, por toda ajuda e ensinamentos.

Aos membros da banca examinadora, professores Giovany e Claudianor, por aceitarem a tarefa de avaliar este trabalho.

A todos os funcionários do DME.

Por fim, ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

À minha esposa, Samara, e aos meus pais, Mônica e Gilson.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de, pelo menos, três soluções distintas para dois problemas de inclusão diferencial. Para isto, faremos uso da teoria da análise convexa para funcionais localmente Lipschitz, bem como métodos variacionais.

Palavras-chave: Derivada direcional generalizada, gradiente generalizado, funcionais localmente Lipschitz, métodos variacionais, inclusão diferenciais.

Abstract

In this work we study the existence of, at least, three distinct solutions to two problems of differential inclusion. For this, we use the theory of convex functional analysis Lipschitz locally, and variational methods.

Keywords: Generalized directional derivative, generalized gradient, locally Lipschitz functional, variational methods, differential inclusion.

Sumário

Notações

- $[u > a]$ representa o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) > a\}$.
- $\#J$ representa a cardinalidade do conjunto J.
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto A.
- $dist(x, A) = \inf\{\|x - y\|; y \in A \subset X\}$.
- $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.
- $\overline{2}^* = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$.
- $|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall u \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.
- $|u|_{q,\partial\Omega} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}$, $\forall u \in L^q(\partial\Omega)$ com $1 \leq q < \infty$.
- $\langle u, v\rangle_W = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - uv)\, dx,\ u, v \in W^{1,2}(\Omega)$.
- $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$.
- $\|u\|_{\mathbb{R}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
- Para um espaço vetorial de Banach $(X, \|.\|)$, $\|.\|_*$ representará a norma do seu espaço dual topológico.
- $q.t.p$ em quase todo ponto.
- $ess\inf\{f(s); |s-t| < \varepsilon\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; f(s) \geq \alpha \ \ q.t.p. \ \ em \ \ (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}$.
- $ess\sup\{f(s); |s-t| < \varepsilon\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; f(s) \leq \alpha \ \ q.t.p. \ \ em \ \ (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}$.
- $|u|_\infty = \inf\{\alpha; |u(x)| \leq \alpha \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \mathbb{R}^N\}$, $\forall u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Introdução

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar a existência e multiplicidade de soluções para as seguintes classes de inclusões diferenciais: a primeira com a condição de Neumann, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + u & \in & \lambda \partial F(u(x)), \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & \in & \mu \partial G(u(x)), \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

para $\lambda, \mu > 0$, Ω limitado com fronteira suave e $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais localmente Lipschitz satisfazendo certas condições; o segundo, um problema de inclusão diferencial no $\mathbb{R}^N$ da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u & \in & \lambda\alpha(x)\partial F(u(x)) + \mu\beta(x)\partial G(u(x)), \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & & \text{quando} \quad |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

onde $p > N \geq 2$, $\lambda, \mu > 0$, $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funcionais localmente Lipschitz e $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N), \beta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ funções radialmente simétricas com α e F satisfazendo algumas condições. Tais classes de problemas vêm sendo estudadas por diversos autores, ao longo de vários anos.

Em 2004, Gasiński-Papageorgiou [9], publicaram um livro, onde organizaram diversas referências envolvendo a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u & = & \alpha(x)f(u(x)), \quad em \ \ \Omega \\ u \in W^{1,p}(\Omega), & & \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto limitado com fronteira suave, $1 < p < +\infty$, $\alpha \in L^1(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Em 2001, Ricceri [23] trabalhou o problema (3) com a condição de Neumann, quando $p > N$, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda(x)|u|^{p-2}u &= \alpha(x)f(u(x)) + \beta(x)g(u(x)), \quad em\ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

onde $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo $ess\inf_{\Omega} \lambda > 0$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcionais contínuos. Além disso, $\alpha, \beta \in L^1(\Omega)$ verificando $\min\{\alpha(x), \beta(x)\} > 0$ q.t.p. em Ω.

Pouco depois, em 2002 Marano-Motreanu [20], estudaram um problema de desigualdade variacional-hemivariacional, dado por

Encontrar $u \in K$ que cumpre

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla(v-u) + \lambda(x)|u|^{p-2}u(v-u)\right] dx \\ &\quad \le \int_\Omega \left[\alpha(x)F^0(u; v-u) + \beta(x)G^0(v; v-u)\right] dx, \qquad \forall v \in K, \end{aligned} \tag{5}$$

nas mesmas condições do problema (4), com $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais localmente Lipschitz dados por

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \quad e \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções apenas localmente limitadas e $K \subset W^{1,p}(\Omega)$ convexo e fechado contendo as funções constantes. O problema (5), quando $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $K = W^{1,p}(\Omega)$, resume-se a encontrar soluções para o problema (4).

Posteriormente, em 2004, Kristály [15], utilizou princípios variacionais e estudou a seguinte classe de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \alpha(x)\partial F(u(x)), \quad \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{6}$$

onde $p > N \geq 2$, $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é radialmente simétrica e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um funcional localmente Lipschitz, verificando algumas condições.

Motivado por estes estudos, em 2010 os autores Kristály-Marzantowicz-Varga [16], mostraram a existência e multiplicidade de soluções para as classes de inclusões diferenciais (1) e (2) via métodos variacionais, ou seja, para encontrar soluções para os problemas (1) e (2), encontraram pontos críticos para funcionais $I : X \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, com X um espaço de Banach reflexivo, associados a tais problemas. Assim, para chegarmos em nosso objetivo, seguindo Kristály-Marzantowicz-Varga, faremos uso da Análise Convexa, seguindo basicamente os livros de Clarke [7] e Grossinho-

Tersian [10], para demonstrar teoremas abstratos de existência de pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz. Vejamos a seguir como este trabalho está organizado:

No **Capítulo 1**, seguiremos o trabalho de Clarke [7] e, por vezes, Santos [28], para apresentarmos a teoria de gradiente generalizado, onde provaremos uma versão ainda não vista da Regra da Cadeia.

No **Capítulo 2**, enfatizaremos o gradiente generalizado dos funcionais

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 \; : \; L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi_1(u) = \displaystyle\int_\Omega F(u(x))dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Phi_2 \; : \; L^q(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi_2(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(u(x))d\sigma, \end{array}$$

com $p \in [1, 2^*]$ e $q \in [1, \overline{2}^*]$ e $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando certas condições. Na seção seguinte, para o funcional $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u(x))dx,$$

onde $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função, com $N \geq 2$, verificando certas condições.

Por sua vez, no **Capítulo 3**, provaremos uma versão do Teorema da Deformação segundo Motreanu-Varga [21], a qual utilizaremos para demonstrar o Teorema do Link, também devido a Motreanu-Varga [21].

Seguindo o texto, no **Capítulo 4**, mostraremos uma versão, devido a Kristály-Marzantowicz-Varga [16], do Teorema de Multiplicidade de Ricceri [24], tal qual nos garantirá a existência de, pelo menos, três pontos críticos de certos funcionais localmente Lipschitz.

Depois, nos **Capítulo 5** e **Capítulo 6** faremos duas aplicações seguindo o artigo dos autores Kristály-Marzantowicz-Varga [16], onde utilizaremos a versão do Teorema de Multiplicidade, para mostrar que os problemas de inclusão diferencial (1) e (2), respectivamente, possuem pelo menos três soluções distintas.

No **Apêndice A**, enunciaremos alguns resultados e um breve resumo versando a Análise Funcional, Medida e Integração e Espaços de Sobolev.

O **Apêndice B**, será dedicado a Grupos, Ações de Grupos e uma seção abordando Simetria e Compacidade, onde definiremos o conjunto $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, formado pelas funções radialmente simétricas pertencentes a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e mostraremos que a imersão

$$W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$$

é compacta para $2 \leq N < p < \infty$.

O **Apêndice C** conterá informações sobre resultados gerais a respeito de Espaços Métricos, Integrais e Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach e outros resultados que serão importantes para o decorrer de nossa dissertação.

Por fim, e igualmente importante, temos o **Apêndice D**, onde faremos a demonstração de dois lemas do Capítulo 5 e 6, que são fundamentais para os nossos propósitos.

Capítulo 1

Gradiente Generalizado de Funcionais Localmente Lipschitz

Neste capítulo, abordaremos uma teoria que é apresentada por **Clarke [7]**, em alguns de seus trabalhos, que trata sobre Gradiente Generalizado e suas respectivas propriedades, e alguns resultados que serão importantes no decorrer deste trabalho. Nos limitaremos em apresentar a demonstração de alguns resultados, pois os demais, pode ser encontrado em detalhes no trabalho de **Santos [28]**.

No decorrer deste capítulo, X denotará um espaço de Banach separável e reflexivo, $\|.\|$ denotará uma norma em X e X^* o dual topológico de X.

1.1 Gradiente Generalizado

Definição 1.1 *Diremos que um funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é Localmente Lipschitz, e denotaremos por $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, se para cada $x \in X$, existir uma vizinhança aberta $V(x)$ de x e uma constante $K(x) > 0$, tais que*

$$|f(y) - f(z)| \leq K(x)\|y - z\|, \quad \forall y, z \in V(x).$$

Quando a constante $K(x)$ não depender do ponto x dado, diremos que f é Lipschitz.

Definição 1.2 *Definimos a Derivada Direcional Generalizada de um funcional*

$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, *em um ponto* $x \in X$ *e direção* $v \in X$, *por*

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{f(x + h + \lambda v) - f(x + h)}{\lambda}.$$

Teorema 1.1 *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional contínuo. Se a diferencial a Gâteaux* $f' : X \longrightarrow X^*$ *é fraca* contínua, então* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *e* $f^0(x; v) = \langle f'(x), v \rangle$, *isto é,*

$$f^0(x; v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Proposição 1.1 *Seja* $f, g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. *Temos as seguintes propriedades:*

(i) *A função* $f^0(x; .) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é subaditiva e homogênea positiva, isto é,*

$$f^0(x; v_1 + v_2) \leq f^0(x; v_1) + f^0(x; v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in X.$$

$$f^0(x; cv) = cf^0(x; v), \quad \forall v \in X \quad e \quad c > 0.$$

(ii) $f^0(x; .)$ *é um funcional convexo.*

(iii) $|f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|$, *onde* $K(x) > 0$ *é a mesma da condição localmente Lipschitz.*

(iv) $f^0(x; v)$ *é uma função semicontínua superiormente, isto é,*

$$\limsup_{(x_j, v_j) \to (x, v)} f^0(x_j; v_j) \leq f^0(x; v),$$

onde $(x_j, v_j) \in X \times X$.

(v) $|f^0(x; u) - f^0(x; v)| \leq K(x)\|u - v\|$, *para todo* $u, v \in X$, *ou seja,* $f^0(x; .)$ *é lipschitziana, com constante* $K(x)$.

(vi) $(f + g)^0(x; v) \leq f^0(x; v) + g^0(x; v)$ *e* $f^0(x; -v) = (-f)^0(x; v)$, $\forall x, v \in X$.

Agora definiremos o Gradiente Generalizado de um funcional localmente Lipschitz. Vejamos:

Definição 1.3 *Seja* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. *Definimos o Gradiente Generalizado de* f *no ponto* $x \in X$, *e denotamos por* $\partial f(x)$, *o subconjunto de* X^* *dado por:*

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v), \forall v \in X\}.$$

Exemplo 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Temos que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e o gradiente generalizado de f é*

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\}, & se \quad x < 0 \\ [-1, 1]\,, & se \quad x = 0 \\ \{1\}, & se \quad x > 0. \end{cases}$$

Lema 1.2 *O gradiente generalizado de um funcional $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre não vazio, isto é, $\partial f(x) \neq \varnothing$.*

Lema 1.3 *Dados $x, v \in X$, tem-se $f^0(x; v) = max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\}$.*

Definição 1.4 *Seja um subconjunto $C \subset X$ não vazio. Definimos como Função Suporte de C, a seguinte função*

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(C, .) & : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \xi & \longmapsto & \sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle; x \in C\}. \end{array}$$

Pela definição que acabamos de apresentar, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, .) : X^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi\rangle; \xi \in \Sigma\}.$$

É comum utilizar X em vez de X^{**}, pois estamos trabalhando com X reflexivo, logo pela aplicação canônica

$$\begin{array}{rcccccccl} J & : & X & \longrightarrow & X^{**} & & & & \\ & & v & \longmapsto & J(v) & : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & & \xi & \longmapsto & \langle J(v), \xi\rangle = \langle \xi, v\rangle \end{array}$$

que é sobrejetiva, isto é, $J(X) = X^{**}$.
Portanto, para cada $\varphi \in X^{**}$ existe um único $v \in X$ tal que $\langle \varphi, \xi\rangle = \langle \xi, v\rangle$. Por isso, podemos denotar

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(\Sigma, .) & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \sigma(\Sigma, v) = \sup\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \Sigma\}. \end{array}$$

Observação 1.1 *Note que $\partial f(x) \subset X^*$, assim*

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(\partial f(x), .) & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \sigma(\partial f(x), v) = \sup\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\}, \end{array}$$

assim pelo Lema 1.3, temos $\sigma(\partial f(x), v)) \equiv f^0(x; v)$.

O próximo resultado, mostra algumas propriedades das funções suportes, definidas acima.

Proposição 1.2 *Sejam* $C, D, C_1, C_2 \subset X$ *e* $\Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*$. *Temos:*

(i) Sejam $C, D \subset X$ *não vazios, fechados e convexos, e* $\Sigma, \Delta \subset X^*$ *não vazios, fechados* $fraco^*$ *e convexos. Então,*

$$C \subset D \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \sigma(D, \xi), \quad \forall \xi \in X^*$$

e

$$\Sigma \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma(\Sigma, v) \leq \sigma(\Delta, v), \quad \forall v \in X.$$

(ii) Seja Σ *fechado* $fraco^*$. *Então, o conjunto* Σ *é limitado e compacto na topologia* $fraca^*$ *se, e somente se, a função suporte* $\sigma(\Sigma, .)$ *for finita sobre* X.

(iii) Dados $\xi \in X^*$ *e* $w \in X$, *tem-se que:*

- $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$.
- $\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, \xi) = \sigma(\Sigma_1, \xi) + \sigma(\Sigma_2, \xi)$.
- $\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda\sigma(C, \xi), \quad \forall \lambda > 0$.
- $\sigma(\lambda \Sigma, \xi) = \lambda\sigma(\Sigma, \xi), \quad \forall \lambda > 0$.

Vejamos agora algumas propriedades com respeito ao Gradiente Generalizado.

P_1*)* Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$\|\xi_0\|_* = \min\{\|\xi\|_*; \xi \in \partial f(x)\}.$$

P_2*)* Para todo $x \in X$ o conjunto $\partial f(x) \subset X^*$ é convexo e compacto na topologia $fraca^*$. Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$ temos

$$\|\xi\|_* \leq K(x).$$

P_3) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

P_4) A função

$$\begin{array}{rcccl} \partial f & : & X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X^*) \\ & & x & \longmapsto & \partial f(x), \end{array}$$

onde $\mathcal{P}(X^*)$ é o conjunto das partes de X^*, é semicontínua superiormente, isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\xi \in \partial f(x)$, então existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_* < \varepsilon$$

equivalentemente, temos

$$|\langle \xi - \xi_0, v\rangle| < \varepsilon, \quad \forall v \in X, \quad com \quad \|v\| \leq 1.$$

ou ainda, escrevendo de outra forma:

Dado $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + \varepsilon B_1(0),$$

para todo $x \in x_0 + \delta B_1(0)$.

P_5) A função

$$\begin{array}{rcccl} \partial f & : & X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X^*) \\ & & x & \longmapsto & \partial f(x), \end{array}$$

é fechada $fraca^*$, no sentido que, se $(x_j, \xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que $\xi_j \in \partial f(x_j)$, $\lim x_j = x_0 \in X$ e $\lim \langle \xi_j - \xi_0, v\rangle = 0$, $\forall v \in X$, então $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

P_6) O funcional

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_f & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \lambda_f(x) = \min\{\|\xi\|_*; \xi \in \partial f(x)\} = \|\xi_0\|_*, \end{array}$$

é semicontínua inferiormente, ou seja,

$$\liminf_{x\to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

P_7) Se f é continuamente diferenciável a Frechét numa vizinhança aberta de $x \in X$, temos

$$\partial f(x) = \{Df(x)\}.$$

P_8) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Definição 1.5 *Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser ponto crítico do funcional $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ se $0 \in \partial f(x_0)$, isto é, $f^0(x_0, v) \geq 0$, $\forall v \in X$*

Definição 1.6 *O número $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de f se existir um ponto crítico $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = c$.*

Lema 1.4 *Se $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e x_0 é ponto mínimo local de f, tem-se que x_0 é ponto crítico de f.*

1.2 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que serão bastante utilizados no decorrer deste trabalho.

Lema 1.5 *Sejam $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e*

$$\begin{array}{rccl} g & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & g(t) = f(x_t) = f(x + t(y-x)). \end{array}$$

Então g é Lipschitz e

$$\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x\rangle,$$

onde $\langle \partial f(x_t), y - x\rangle = \{\langle \phi, y - v\rangle; \phi \in \partial f(x_t)\}$.

Teorema 1.6 (Teorema do Valor Médio de Lebourg) *Sejam $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e $x, y \in X$ tais que f é Lipschitz no segmento $[x, y]$. Então, existe um ponto*

$$x_t = x + t(y-x), \quad 0 < t < 1,$$

verificando

$$f(y) - f(x) \in \langle \partial f(x_t), y - x \rangle,$$

isto é, existe $\xi \in \partial f(x_t)$ *tal que*

$$f(y) - f(x) = \langle \xi, y - x \rangle.$$

Teorema 1.7 (Regra da Cadeia I) *Sejam* X, Y *espaços de Banach. Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é de classe* C^1, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um funcional localmente Lipschitz e* $F \equiv g \circ f$, *então*

$$\partial F(x) \subset \partial g(f(x)) \circ Df(x), \quad x \in X.$$

Corolário 1.1 *Seja* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach* Y. *Se* X *é um espaço de Banach imerso continuamente em* Y, *temos*

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: Segue, pelo fato de $X \underset{cont.}{\hookrightarrow} Y$, que existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_Y \leq K\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Desta forma, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} Id & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & Id(x) = x; \end{array}$$

é linear e contínua, logo Id é de classe C^∞ com $D(Id(x)) = Id$. Considere $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ Id)(x) = g(Id(x)) = g(x), \quad x \in X.$$

Note que $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ pois, g e Id são Lipschitz. Usando o Teorema da Regra da Cadeia I, temos

$$\partial F(x) \subset \partial g(Id(x)) \circ D(Id(x)), \quad x \in X,$$

ou ainda,

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad \forall x \in X.$$

■

Vejamos agora, outra versão da Regra da Cadeia, ressaltando que a sua demonstração não é encontrada na literatura.

Teorema 1.8 (Regra da Cadeia II) *Seja X um espaço de Banach. Assumindo que $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $F \equiv g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, temos $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e*

$$\partial F(x) \subset g'(f(x)).\partial f(x), \quad x \in X. \tag{1.1}$$

Demonstração: Observe, inicialmente, que a inclusão (1.1) é interpretada da seguinte forma: Para cada $\xi \in \partial F(x) \subset X^*$, existe $\hat{\xi} \in \partial f(x) \subset X^*$ tal que

$$\langle \xi, v \rangle = g'(f(x)).\langle \hat{\xi}, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Veja que

$$g'(f(x)).\partial f(x) = \{g'(f(x)).\xi \in X^*; \xi \in \partial f(x)\}, \quad x \in X.$$

Definimos para cada $x, v \in X$,

$$q_0(x, v) := \max\{g'(f(x)).\langle \xi, v \rangle; \xi \in \partial f(x)\}.$$

Note que q_0 define a função suporte do conjunto $g'(f(x)).\partial f(x)$.

Afirmação 1: O conjunto $g'(f(x)).\partial f(x) \subset X^*$ é convexo e fechado $fraco^*$.

A convexidade de $g'(f(x)).\partial f(x)$ segue da convexidade de $\partial f(x)$. Mostremos agora que $g'(f(x)).\partial f(x)$ é fechado $fraco^*$. Para isto, seja $(\hat{\xi}_n) \subset g'(f(x)).\partial f(x)$ tal que $\hat{\xi}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\varphi}$. Note que $\hat{\xi}_n = g'(f(x)).\xi_n$, onde $(\xi_n) \subset \partial f(x)$. Logo,

$$\|\xi_n\|_* \leq K(x),$$

onde $K(x) > 0$ é a constante Lipschitziana de f no ponto x (ver propriedade (P_2)). Desta forma, $(\xi_n) \subset \overline{B}_{K(x)}$ e como $\overline{B}_{K(x)}$ é compacta $fraca^*$ (Teorema de Banach-Boubarki-Alaoglu), existe uma subsequência $(\xi_{n_j}) \subset (\xi_n)$ tal que $\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$. Sendo $\partial f(x)$ fechado $fraco^*$, temos $\xi \in \partial f(x)$. Daí,

$$\hat{\xi}_{n_j} = g'(f(x))\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} g'(f(x))\xi \in g'(f(x))\partial f(x).$$

Pela unicidade do limite $fraco^*$, segue que

$$\hat{\varphi} = g'(f(x))\xi \in g'(f(x)).\partial f(x),$$

mostrando a Afirmação 1.

Lembre que $F^0(x;v)$ e $q_0(x,v)$ definem as funções suporte de $\partial f(x)$ e $g'(f(x)).\partial f(x)$, respectivamente. Desta forma, para chegarmos a (1.1), basta utilizarmos a Proposição 1.2 *(i)* e mostrarmos que

$$F^0(x;v) \leq q_0(x,v), \quad \forall x, v \in X \tag{1.2}$$

Se $v = 0$, temos $F^0(x;0) = 0 = q_0(x,0)$. Agora, fixado $v \neq 0$ e $\varepsilon > 0$, defina

$$q_\varepsilon(x,v) := \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(B_\varepsilon(x)) \;\; e \;\; y \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)\}.$$

Observando que $g \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ (pois $g \in C^1$), temos $F \equiv g \circ f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$.

Por propriedade de limite superior, existem $h_\varepsilon \in X$ e $\lambda_\varepsilon > 0$ com $h_\varepsilon \to 0$ e $\lambda_\varepsilon \to 0^+$ tais que $x + h_\varepsilon,\; x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v \in B_\varepsilon(x)$ verificando

$$F^0(x;v) - \varepsilon \leq \frac{F(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - F(x+h_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon},$$

com $f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v),\; f(x+h_\varepsilon) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, pois f é contínua. Sendo $g \in C^1$, existe pelo Teorema do Valor Médio na reta,

$$z_\varepsilon \in \big(\min\{f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v), f(x+h_\varepsilon)\}, \max\{f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v), f(x+h_\varepsilon)\}\big).$$

verificando

$$g\big(f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v)\big) - g\big(f(x+h_\varepsilon)\big) = g'(z_\varepsilon)\big(f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - f(x+h_\varepsilon)\big). \tag{1.3}$$

Por outro lado, utilizando o Teorema do Valor Médio de Lebourg (ver Teorema 1.6), tem-se

$$f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - f(x+h_\varepsilon) = \langle \xi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v\rangle, \tag{1.4}$$

onde $\xi_\varepsilon \in \partial f(w_\varepsilon)$ com $w_\varepsilon \in [x+h_\varepsilon, x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v] \subset B_\varepsilon(x)$.
Substituindo (1.4) em (1.3), temos

$$F(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - F(x+h_\varepsilon) = g'(z_\varepsilon)\langle \xi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v\rangle = \lambda_\varepsilon g'(z_\varepsilon)\langle \xi_\varepsilon, v\rangle$$

Daí,

$$F^0(x;v) - \varepsilon \leq \frac{F(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - F(x+h_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon} = g'(z_\varepsilon)\langle \xi_\varepsilon, v\rangle \leq q_\varepsilon(x,v), \tag{1.5}$$

visto que $z_\varepsilon \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ e $\xi_\varepsilon \in \partial f(w_\varepsilon)$.

Afirmação 2: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} q_\varepsilon(x, v) = q_0(x, v)$, $x, v \in X$.

Para mostrar esta afirmação, basta mostrar que dado $\sigma' > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$q_0(x, v) - \sigma' \leq q_\varepsilon(x, v) \leq q_0(x, v) + \sigma', \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Note que

$$q_0(x, v) - \sigma' \leq q_0(x, v) \leq q_\varepsilon(x, v). \tag{1.6}$$

Fixando $\delta > 0$, tome $\varepsilon_1 > 0$ verificando

$$f(B_\varepsilon(x)) \subset (f(x) - \delta, f(x) + \delta), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1). \tag{1.7}$$

Agora, fixe $\rho > 0$ de sorte que

$$g'\big((f(x) - \rho, f(x) + \rho)\big) \subset \big(g'(f(x)) - \delta, g'(f(x)) + \delta\big) \tag{1.8}$$

(pois g' é contínua). Além disso, desde que ∂f é semicontínua superiormente, podemos fixar $\varepsilon_2 > 0$ tal que para todo $y \in B_{\varepsilon_2}(x)$ e $\xi \in \partial f(y)$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_* < \delta,$$

ou seja,

$$\partial f(B_{\varepsilon_2}(x)) \subset B_\delta + \partial f(x) = B_\delta(\partial f(x)). \tag{1.9}$$

Para $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho\})$, temos de (1.8) e (1.9)

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x, v) &= \max\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(B_\varepsilon(x)) \ \ e \ \ y \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\} \\ &\leq \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in B_\delta + \partial f(x) \ \ e \ \ g'(y) \in (g'(f(x)) - \delta, g'(f(x)) + \delta)\} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x, v) &\leq \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in B_\delta + \partial f(x) \ \ e \ \ g'(y) \in (g'(f(x)) - \delta, g'(f(x)) + \delta)\} \\ \\ &\leq \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in B_\delta \ \ e \ \ g'(y) \in (-\delta, \delta)\} \\ &\qquad + \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in B_\delta \ \ e \ \ g'(y) \in \{g'(f(x))\}\} \\ &\qquad + \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x) \ \ e \ \ g'(y) \in (-\delta, \delta)\} \\ &\qquad + \sup\{g'(y).\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x) \ \ e \ \ g'(y) \in \{g'(f(x))\}\} \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
q_\varepsilon(x,v) &\leq \sup\{|g'(y)|.\|\xi\|_*.\|v\|; \xi \in B_\delta \;\; e \;\; g'(y) \in (-\delta,\delta)\} \\
&\quad + \sup\{|g'(y)|.\|\xi\|_*.\|v\|; \xi \in B_\delta \;\; e \;\; g'(y) \in \{g'(f(x))\}\} \\
&\quad + \sup\{|g'(y)|.\|\xi\|_*.\|v\|; \xi \in \partial f(x) \;\; e \;\; g'(y) \in (-\delta,\delta)\} \\
&\quad + q_0(x,v) \\
&\leq \delta^2\|v\| + |g'(y)|\delta\|v\| + \delta K(x)\|v\| + q_0(x,v).
\end{aligned}$$

Assim, passando ao limite quando $\delta \to 0^+$, obtemos

$$q_\varepsilon(x,v) \leq q_0(x,v) \leq q_0(x,v) + \sigma'. \tag{1.10}$$

Portanto, de (1.6) e (1.10), concluímos a Afirmação 2.

Finalmente, passando ao limite de $\varepsilon \to 0^+$ em (1.5), obtemos

$$F^0(x,v) \leq q_0(x,v).$$

E pela Afirmação 1, segue que

$$\partial F(x) \subset g'(f(x)).\partial f(x).$$

■

Capítulo 2

Inclusões Diferenciais em $L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Ao longo deste capítulo fixaremos condições suficientes para garantir inclusões diferenciais entre funcionais definidos sobre os espaços $L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Dados $\varepsilon > 0$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, definamos:

$$\begin{aligned} \underline{f_\varepsilon}(t) &= ess\inf\{f(s); |s-t| < \varepsilon\} \\ &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; f(s) \geq \alpha \;\; q.t.p. \;\; em \;\; (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{f_\varepsilon}(t) &= ess\sup\{f(s); |s-t| < \varepsilon\} \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; f(s) \leq \alpha \;\; q.t.p. \;\; em \;\; (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A partir destas funções, considere

$$\underline{f}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underline{f_\varepsilon}(t) \quad e \quad \overline{f}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{f_\varepsilon}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.1 *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz e suponha que F seja a primitiva da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Então,*

$$F^0(t; v) \leq \begin{cases} \overline{f}(t)v, & se \quad v > 0 \\ \underline{f}(t)v, & se \quad v < 0. \end{cases}$$

Lema 2.2 *Considere*

$$f(t+0) = \lim_{h \to 0^+} f(t+h),$$

$$f(t-0) = \lim_{h \to 0^+} f(t-h)$$

e

$$f(t \pm 0) = \lim_{h \to 0} f(t+h).$$

Se f é uma função descontínua do tipo salto, com seu conjunto de pontos de descontinuidade enumerável e não contendo ponto de acumulação, então,

$$\underline{f}(t) = \min\{f(t+0), f(t-0)\}$$

e

$$\overline{f}(t) = \max\{f(t+0), f(t-0)\}.$$

Lema 2.3 *Se f é uma função verificando as hipóteses do Lema 2.2, então*

$$\partial F(t) = [\underline{f}(t), \overline{f}(t)].$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, e $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz, satisfazendo a seguinte condição:

(F_0) $F(0) = 0$ e existem $C_1 > 0$ e $p \in [1, 2^*)$ tais que

$$|\xi| \leq C_1(1 + |t|^{p-1}), \quad \forall \xi \in \partial F(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja também $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz, verificando:

(G_0) $G(0) = 0$ e existem $C_2 > 0$ e $q \in [1.\overline{2}^*)$ tais que

$$|\xi| \leq C_2(1 + |t|^{q-1}), \forall \xi \in \partial G(t), t \in \mathbb{R}.$$

Vejamos um exemplo de uma função que satisfaz a condição (F_0).

Exemplo 2.1 *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{3t^2\pi}{4}, & se \quad 0 < t < 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2}, & se \quad t \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Geometricamente, temos

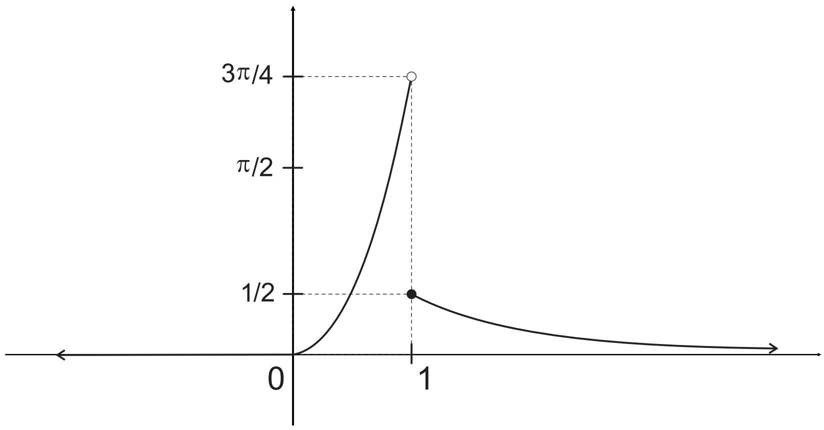

Figura 2.1: Funcional $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Note que $F(t) = \min\left\{\dfrac{\pi}{4}|t|^3, \arctan(t_+)\right\}$, onde $t_+ = \max\{t, 0\}$, ou seja,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{t^3\pi}{4}, & se \quad 0 < t \leq 1 \\ \arctan(t), & se \quad t > 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Geometricamente, temos:

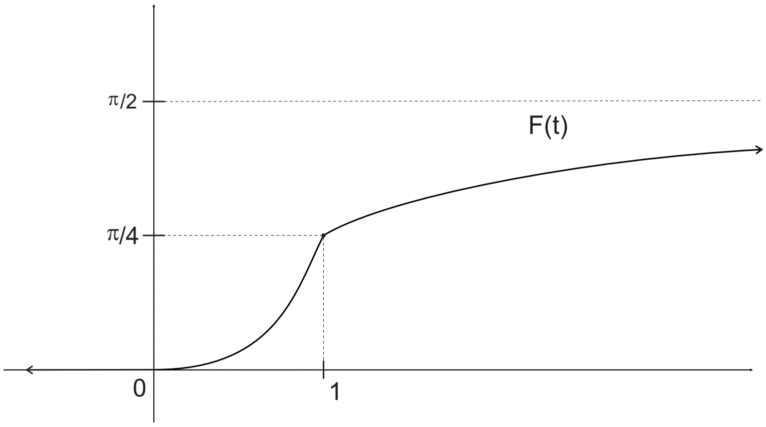

Figura 2.2: Funcional $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Calculemos agora o gradiente generalizado de F. Primeiramente, veja que

$$\partial F(t) = \{F'(t)\} = \{f(t)\}, \quad t \neq 1,$$

pois F é de classe C^1 para $t \neq 1$ (ver propriedade (P_7)). Para $t = 1$,

$$\partial F(1) = [\underline{f}(1), \overline{f}(1)],$$

(ver Lema 2.3), onde

$$\underline{f}(1) = \min\{f(1+0), f(1-0)\} \quad e \quad \overline{f}(1) = \max\{f(1+0), f(1-0)\}.$$

Observando que

$$f(1+0) = \lim_{h\to 0^+} f(1+h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2},$$

pois $1 + h > 1$, e

$$f(1-0) = \lim_{h\to 0^+} f(1-h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\pi(1-h)^2}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

pois $1 - h < 1$, segue que,

$$\underline{f}(1) = \frac{1}{2} \quad e \quad \overline{f}(1) = \frac{3\pi}{4},$$

consequentemente

$$\partial F(1) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Logo,

$$\partial F(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{3t^2\pi}{4}, & se \quad 0 < t < 1 \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right], & se \quad t = 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2}, & se \quad t > 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Vejamos agora que F verifica a condição (F_0).

Verificação de (F_0)**:** Dado $\xi \in \partial F(t)$, para $t = 1$, temos

$$|\xi| \leq \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}|t|^{p-1} \leq \frac{3\pi}{4}\left(1 + |t|^{p-1}\right).$$

Para $t \leq 0$, temos

$$|\xi| \leq 0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}|t|^{p-1} \leq \frac{3\pi}{4}\left(1 + |t|^{p-1}\right).$$

Para $0 < t < 1$, temos

$$|\xi| \leq \frac{3t^2\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}|t|^{p-1} \leq \frac{3\pi}{4}\left(1 + |t|^{p-1}\right).$$

Para $t > 1$, temos

$$|\xi| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}|t|^{p-1} \leq \frac{3\pi}{4}\left(1 + |t|^{p-1}\right).$$

Logo, fazendo $C_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, e $p \in [1, 2^*)$, teremos

$$|\xi| \leq C_1(1 + |t|^{p-1}).$$

temos para todo $\xi \in \partial F(t)$ e $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.4 *Sejam $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitz verificando (F_0) e (G_0),* *respectivamente. Então, podemos definir os funcionais*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 \ : \ L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi_1(u) = \displaystyle\int_\Omega F(u(x))dx, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Phi_2 \ : \ L^q(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi_2(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(u(x))d\sigma \end{array}$$

com $p \in [1, 2^*]$ e $q \in [1, \overline{2}^*]$. Além disso, $\Phi_1 \in Lip_{loc}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e $\Phi_2 \in Lip_{loc}(L^q(\partial\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: Inicialmente, verificaremos que Φ_1 está bem definida. Fixado $t \in \mathbb{R}$, com $t > 0$ existem, pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg, $s \in [0, t]$ e $\xi_s \in \partial F(s)$ tais que

$$|F(t)| = |F(t) - F(0)| = |\langle \xi_s, t\rangle| \leq |\xi_s||t|$$

e por (F_0) temos

$$|F(t)| \leq C_1|t| + C_1|t|^p.$$

Assim para cada $u \in L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &\leq \int_\Omega |F(u(x))|dx \\ &\leq \int_\Omega C_1|u(x)|dx + \int_\Omega C_1|u(x)|^p dx \\ &\leq C_1|u|_1 + C_1|u|_p^p < +\infty. \end{aligned}$$

Mostrando que Φ_1 está bem definido.

Mostraremos agora que $\Phi_1 \in Lip_{loc}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$. Fixado $w \in L^p(\Omega)$ e $R = R(w) > 0$, temos

$$|u|_p < R + |w|_p \quad e \quad |v|_p < R + |w|_p, \quad u, v \in B_R(w).$$

Para cada $x \in \Omega$, existem $s \in [u(x), v(x)]$ e $\xi_s \in \partial F(s)$ (ver Teorema de Lebourg) tais que

$$|F(u(x)) - F(v(x))| = |\langle \xi_s, u(x) - v(x)\rangle| \leq |\xi_s||u(x) - v(x)|. \tag{2.6}$$

Por (F_0), segue-se que

$$|F(u(x)) - F(v(x))| \leq |\theta(x)||u(x) - v(x)|, \tag{2.7}$$

onde $\theta(.) = C_1\big(1 + |u(.)|^{p-1} + |v(.)|^{p-1}\big) \in L^{p'}(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, ou seja, $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Assim, por (2.7), temos

$$\begin{aligned} |\Phi_1(u) - \Phi_1(v)| &\leq \int_\Omega |F(u(x)) - F(v(x))| dx \\ &\leq \int_\Omega |\theta(x)||u(x) - v(x)| dx. \end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$|\Phi_1(u) - \Phi_1(v)| \leq K|u - v|_p,$$

onde $K = |\theta|_{p'}$. Mostrando que $\Phi_1 \in Lip_{loc}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$.
Analogamente, mostra-se que Φ_2 está bem definida e que $\Phi_2 \in Lip_{loc}(L^q(\partial\Omega), \mathbb{R})$.

■

É importante, frisarmos que o teorema a seguir não é encontrado na literatura sob tais hipóteses. Por isto, adaptamos o teorema desenvolvido por **Grossinho-Tersian [10]**, para as hipóteses aqui fixadas.

Teorema 2.5 *Sejam Φ_1 e Φ_2 funcionais definidos no Lema 2.4. Então,*

$$\partial\Phi_1(u) \subset \partial F(u(x)) \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega. \tag{2.8}$$

e

$$\partial\Phi_2(u) \subset \partial G(u(x)) \quad q.t.p. \quad em \quad \partial\Omega. \tag{2.9}$$

Além disso,

$$\partial\Phi_1|_{W^{1,2}(\Omega)}(u) \subset \partial\Phi_1(u) \quad e \quad \partial\Phi_2|_{W^{1,2}(\Omega)}(u) \subset \partial\Phi_2(u), \tag{2.10}$$

para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração: Inicialmente, note que a inclusão em (2.8), significa que dado $\xi \in \partial\Phi_1(u) \subset (L^p(\Omega))^*$, existe $\xi_F \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^{p'}(\Omega)$, tal que

$$\langle \xi, v \rangle = \int_\Omega \xi_F v dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega), \tag{2.11}$$

com $\xi_F(x) \in \partial F(u(x))$ q.t.p. em Ω. De forma análoga, interpretamos a inclusão (2.9).

Sejam $(h_j) \subset L^p(\Omega)$ e $(\lambda_j) \subset \mathbb{R}^+$ duas sequências tais que

$$h_j \to 0 \ \ em \ \ L^p(\Omega) \ \ e \ \ \lambda_j \to 0.$$

Assim, passando a uma subsequência se necessário,

$$h_j(x) \to 0 \;\; q.t.p. \; em \;\; \Omega$$

e existe

$$g \in L^p(\Omega) \;\; tal\; que \;\; |h_j(x)| \leq g(x) \;\; q.t.p. \; em \;\; \Omega, \;\; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\Phi_1^0(u;v) &= \limsup_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_j}\left(\int_\Omega F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x))dx - \int_\Omega F(u(x)+h_j(x))dx\right)\\
&= \limsup_{j\to+\infty} \int_\Omega \frac{1}{\lambda_j}\Big(F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - F(u(x)+h_j(x))\Big)dx
\end{aligned}$$

Defina

$$\theta_j(x) = \max\{u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x), u(x)+h_j(x)\}$$

e

$$\eta_j(x) = \min\{u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x), u(x)+h_j(x)\}.$$

Pelo Teorema de Lebourg, existem $s_j \in [\eta_j(x), \theta_j(x)]$ e $\xi_{s_j} \in \partial F(s_j)$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}\Big(F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - F(u(x)+h_j(x))\Big) &= \langle \xi_{s_j}, v(x)\rangle\\
&\leq |\xi_{s_j}||v(x)|,
\end{aligned}$$

donde, por (F_0), segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}\Big(F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - F(u(x)+h_j(x))\Big) &\leq \big(C_1 + C_1|s_j|^{p-1}\big)|v(x)|\\
&\leq C_1|v(x)| + C_1\big(|\theta_j(x)|^{p-1} + |\eta_j(x)|^{p-1}\big)|v(x)|
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}\Big(F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - F(u(x)+h_j(x))\Big) \;\;&\leq\;\; C_1|v(x)| + C_2|u(x)|^{p-1}|v(x)|\\
&\quad +C_3|g|^{p-1}|v| + C_4|v(x)|^p,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

q.t.p. em Ω, $\forall j \in \mathbb{N}$ e com $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$.

Como $v, u, g \in L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, temos $|v|, |v|^p \in L^1(\Omega)$, e sabendo que $|g|^{p-1}, |u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder que

$|u|^{p-1}|v|, |g|^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Portanto,

$$C_1|v(x)| + C_2|u(x)|^{p-1}|v(x)| + C_3|g|^{p-1}|v| + C_4|v(x)|^p \in L^1(\Omega). \tag{2.13}$$

Assim, pelo Lema de Fatou (ver Corolário A.2) e (2.12), temos

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(u,v) &\leq \int_\Omega \limsup_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_j}\Big(F(u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - F(u(x)+h_j(x))\Big)dx \\ &\leq \int_\Omega F^0(u;v)dx. \end{aligned}$$

Dado $\xi \in \partial\Phi_1(u) \subset (L^p(\Omega))^*$, pelo Teorema de Riesz (ver Apêndice A), existe $\xi_F \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, tal que

$$\langle \xi, v\rangle = \int_\Omega \xi_F v dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega),$$

donde,

$$\int_\Omega \xi_F v dx \leq \int_\Omega F^0(u;v)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega). \tag{2.14}$$

Mostraremos agora que $\xi_F \in \partial F(u(x))$ a menos de um conjunto de medida nula. Para isto, suponha por contradição que $\xi_F \notin \partial F(u(x))$, logo existem $v_0 \in \mathbb{R}$ e um conjunto $A \subset \Omega$ mensurável, com $|A| > 0$, tais que

$$\xi_F(x)v_0 > F^0(u(x);v_0), \quad x \in A. \tag{2.15}$$

Considerando $\varphi = v_0\chi_A$, temos $\varphi \in L^p(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \xi_F\varphi dx = \int_A \xi_F v_0 dx > \int_A F^0(u;v_0)dx = \int_\Omega F^0(u;\varphi)dx, \tag{2.16}$$

contradizendo (2.14). Logo, $\xi_F(x) \in \partial F(u(x))$ a menos de um conjunto de medida nula. Por fim, utilizando o Corolário 1.1, tem-se

$$\partial\Phi_1|_{W^{1,2}(\Omega)}(u) \subset \partial\Phi_1(u), \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega),$$

desde que $W^{1,2}(\Omega) \underset{cont.}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$.

De maneira inteiramente análoga, mostra-se a inclusão (2.9) e (2.10).

■

Observação 2.1 *Podemos representar as inclusões (2.8) e (2.9), como*

$$\partial\Phi_1(u) \subset \int_\Omega \partial F(u(x))dx \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega. \tag{2.17}$$

e

$$\partial\Phi_2(u) \subset \int_{\partial\Omega} \partial G(u(x))d\sigma \quad q.t.p. \quad em \quad \partial\Omega. \tag{2.18}$$

2.2 Espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Fixe $N \geq 2$. Seja $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma família de funções $x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo:

(i) para cada $t \in \mathbb{R}$, a função

$$\begin{array}{rcccl} h_t & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & h_t(x) = f(x,t) \end{array}$$

é mensurável;

(ii) para cada $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existem $\varepsilon > 0$ e $K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq K(x)|t_1 - t_2|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $t_1, t_2 \in B_\varepsilon(u(x))$.

(iii) para cada $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a aplicação

$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u(x))dx$$

está bem definida.

Definamos o funcional $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, como sendo

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u(x))dx, \quad \forall u \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a inclusão abaixo, é verificada

$$\partial\Phi(u) \subset \int_\Omega \partial_u f(x,u(x))dx \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.19}$$

Observação 2.2 *A inclusão em (2.19), significa que dado $\xi \in \partial\Phi(u)$ existe uma aplicação $x \longmapsto \xi_x$ verificando*

- $\xi_x \in \partial_u f(x,u(x)) \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}^N$;
- $x \longmapsto \xi_x v(x)$ *pertence a* $L^1(\mathbb{R}^N)$*, para todo* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$*;*
- $\langle \xi, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_x v(x)dx$*, para todo* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

Antes de enunciarmos o principal teorema desta seção, vamos fazer algumas considerações sobre a subdiferencial de uma função convexa. Para mais detalhes, ver **Clarke [7]** e **Rockafellar [25]**. No que segue, seja X um espaço de Banach.

Definição 2.1 *Seja $\varphi : X \longrightarrow X$ uma função convexa. Definimos o Subdiferencial de φ em x_0, como sendo o conjunto*

$$\partial^s\varphi(x_0) = \{\xi \in X^*; \varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle \xi, x - x_0\rangle, \quad \forall x \in X\}.$$

Proposição 2.1 *Se $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional convexo, então $\varphi'(x, .)$ é a função suporte do subdiferencial de φ.*

Proposição 2.2 *Seja $\varphi : X \longrightarrow X$ uma função convexa e localmente Lipschitz. Então,*

$$\partial\varphi(x) = \partial^s\varphi(x), \quad \forall x \in X.$$

Teorema 2.6 [12] *Assuma as condições (i) e (iii), e suponha que $f(x, .)$ seja uma função convexa. Então,*

$$\partial^s\Phi(u) \subset \int_{\mathbb{R}^N} \partial^s f(x, u(x))dx, \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.20}$$

para todo $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observação 2.3 *A inclusão (2.20), tem a mesma interpretação da inclusão (2.19).*

Vamos agora, mostrar um teorema que será útil em nossos estudos, para isto faremos uso do Teorema 2.6.

Teorema 2.7 *Assuma (i), (ii) e (iii). Então, $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz e verifica (2.19).*

Demonstração: Dado $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, considere $\varepsilon > 0$ e $K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ verificando *(ii)*. Para cada $w, v \in B_\varepsilon(u) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} |\Phi(w) - \Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, w(x)) - f(x, v(x))|dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|w(x) - v(x)|dx \\ &\leq |K|_1|w - v|_\infty, \end{aligned}$$

mostrando que $\Phi \in Lip_{loc}(L^\infty(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Para mostrar a inclusão (2.19), sejam $\xi \in \partial\Phi(u)$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ qualquer.

Afirmação 1: A aplicação $x \longmapsto f^0((x, u(x)); v(x)))$ é mensurável para cada v.

Com efeito, desde que $f(x, .)$ é contínua e

$$f^0((x, u(x)); v(x)) = \limsup_{\substack{|h_j|_\infty \to 0 \\ \lambda_j \to 0}} \frac{1}{\lambda_j}\Big(f(x, u(x) + h_j(x) + \lambda_j v(x)) - f(x, u(x) + h_j(x))\Big), \tag{2.21}$$

a Afirmação 1, segue do Teorema A.10 (ver Apêndice A).

Seja $(h_j) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda_j \subset \mathbb{R}^+$ duas sequências tais que $|h_j|_\infty \to 0$ e $\lambda_j \to 0^+$. Considerando,

$$F_j(u, v) = \frac{1}{\lambda_j}\Big(f(x, u(x) + h_j(x) + \lambda_j v(x)) - f(x, u(x) + h_j(x))\Big),$$

temos

$$\Phi^0(u; v) = \limsup_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F_j(u, v)dx. \tag{2.22}$$

Observe que

$$\begin{aligned} F_j(u, v) &\le \frac{1}{\lambda_j}\Big|f(x, u(x) + h_j(x) + \lambda_j v(x)) - f(x, u(x) + h_j(x))\Big| \\ &\le \frac{1}{\lambda_j}K(x)|\lambda_j v(x)| = K(x)|v(x)|, \end{aligned}$$

onde $K(x)|v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pois, $K(.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, pelo Lema de Fatou (ver Corolário A.2, Apêndice A).

$$\begin{aligned} \Phi^0(u; v) &\le \int_{\mathbb{R}^N} \limsup_{j \to +\infty} F_j(u, v)dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} f^0((x, u(x)); v(x))dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^0((x, u(x)); v(x))dx \ge \Phi^0(u; v) \ge \langle \xi, v \rangle, \quad \xi \in \partial\Phi(u). \tag{2.23}$$

Recordemos que, pela Proposição 1.1 *(ii)*, $f^0((x,u(x));.)$ é um funcional convexo. Desta forma, o funcional $\Psi : L^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f^0((x,u(x));v(x))dx, \tag{2.24}$$

é convexo. Como $\Psi(0) = f^0((x,u(x));0) = 0$, podemos escrever (2.24), como

$$\Psi(v) - \Psi(0) \geq \langle \xi, v - 0 \rangle, \quad \forall v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ \xi \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^*,$$

mostrando que ξ pertence ao subdiferencial $\partial^s\Psi(0)$. Utilizando o Teorema 2.6, existe $\xi_x \in \partial^s f^0((x,u(x));0)$ em quase todo ponto do $\mathbb{R}^N$, tal que

$$\langle \xi, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \xi_x, v \rangle dx.$$

Afirmação 2: $\partial^s f^0((x,u(x));0) = \partial_u f(x,u(x))$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

De fato, por definição, temos

$$\begin{aligned} \partial^s f^0((x,u(x));0) &= \{\xi \in \mathbb{R}; f^0((x,u(x));t) - f^0((x,u(x));0) \geq \langle \xi, t - 0 \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R}; f^0((x,u(x));t) \geq \langle \xi, t \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \partial_u f(x,u(x)), \end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 2.

Da Afirmação 2, $\xi_x \in \partial_u f(x,u(x))$, e portanto

$$\partial\Phi(u) \subset \int_{\mathbb{R}^N} \partial_u f(x,u(x))dx, \quad \forall u \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

■

Agora consideremos $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, seja $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(x,t) = \alpha(x)F(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.8 *O funcional*

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ L^\infty(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad &\longmapsto \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)F(u(x))dx, \end{aligned}$$

é localmente Lipschitz e vale a seguinte inclusão

$$\partial\Phi(u) \subset \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\partial F(u(x))dx, \quad \forall u \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Tendo em vista o Teorema 2.7, mostraremos que a família de funcionais $f(x,.)$ verifica as hipóteses *(i), (ii), (iii)*. Observe que para cada $t \in \mathbb{R}$, a função

$$\begin{array}{rccl} h_t & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & h_t(x) = \alpha(x)F(t) \end{array}$$

é mensurável, visto que $\alpha(.)$ é mensurável e $F(.)$ é constante com relação a x. Logo, $f(x,.)$ verifica *(i)*.

Fixemos $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrário. Vamos mostrar que a hipótese *(ii)* é satisfeita, ou seja, vamos mostrar que existe $K_u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $t_i \in \mathbb{R}$ com $|t_i - u(x)| < 1$, $i = 1, 2$, temos

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq K_u(x)|t_1 - t_2|.$$

De fato, seja J um conjunto de índices e fixemos $\{I_j\}_{j\in J}$ como sendo intervalos abertos, com comprimento suficientemente pequeno, de sorte que $F|_{I_j}$ seja lipschitiziana, com constante $K_j > 0$ e

$$I := [-|u|_\infty - 1, |u|_\infty + 1] \subset \bigcup_{j\in J} I_j.$$

Como I é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existe um subconjunto $J' \subset J$ finito tal que

$$I \subset \bigcup_{j\in J'} I_j$$

e

$$I_i \cap I_{i+1} \neq \varnothing, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k-1\},$$

onde, sem perda de generalidade, estamos supondo $J' = \{1, 2, ..., k\}$. Fixemos $x \in \mathbb{R}^N$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $|t_i - u(x)| < 1$, onde $i = 1, 2$. Note que

$$u(x) - 1 < t_i < u(x) + 1, \quad i = 1, 2,$$

como $-|u|_\infty \leq u(x) \leq |u|_\infty$, temos

$$-|u|_\infty - 1 < t_i < |u|_\infty + 1, \quad i = 1, 2.$$

Logo, $t_1, t_2 \in I$. Porém, não estão necessariamente, no mesmo intervalo I_j. Neste caso, consideremos que $t_1 < t_2$ com $t_1 \in I_i$ e $t_2 \in I_j$ e sejam

$$s_i \in I_i \cap I_{i+1}, \quad s_{i+1} \in I_{i+1} \cap I_{i+2}, \dots, \quad s_{j-1} \in I_{j-1} \cap I_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f(x,t_1) - f(x,t_2)| &= |\alpha(x)F(t_1) - \alpha(x)F(t_2)| \\
&= \alpha(x)|F(t_1) - F(t_2)| \\
&= \alpha(x)|F(t_1) - F(s_i) + F(s_i) - F(s_{i+1}) + F(s_{i+1}) - \dots \\
&\quad +F(s_{j-1}) - F(t_2)| \\
&\leq \alpha(x)\Big(|F(t_1) - F(s_i)| + |F(s_i) - F(s_{i+1})| + \dots \\
&\quad +|F(s_{j-1}) - F(t_2)|\Big).
\end{aligned}$$

Como $F|_{I_j}$ é Lipschitz de constante $K_j > 0$, temos

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq \alpha(x)\Big(K_i|t_1 - s_i| + K_{i+1}|s_i - s_{i+1}| + \dots + K_j|s_{j-1} - t_2|\Big).$$

Desde que

$$|t_1 - t_2| \geq |t_1 - s_i|, \ |s_i - s_{i+1}|, \dots, \ |s_{j-1} - t_2|,$$

obtemos

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq \alpha \# J' K_0 C |t_1 - t_2|,$$

onde $K_0 := \max_{j \in J'} K_j$. Fazendo $K = \alpha \# J' K_0 C \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tem-se que

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq K(x)|t_1 - t_2|,$$

mostrando que $f(x,.)$ verifica *(ii)*. Por fim, como F é contínua e $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$ temos que Φ está bem definida. De fato, dado $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$-|u|_\infty \leq u(x) \leq |u|_\infty, \quad q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

deste modo, $u(x) \in I := [-|u|_\infty, |u|_\infty] \subset \mathbb{R}$, com I compacto. Logo,

$$\{F(u(x)); x \in \mathbb{R}^N\} \subset \mathbb{R}$$

é limitado, desde que F é contínua. Fixado $C_1 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} |F(u(x))|$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)F(u(x))dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\alpha(x)||F(u(x))|dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\alpha(x)|dx < +\infty, \end{aligned}$$

mostrando que o funcional Φ está bem definido.

■

Capítulo 3

Teorema do Link

No que segue, consideremos X um espaço de Banach reflexivo e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

3.1 Teorema da Deformação

Definição 3.1 *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), quando para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que*

- *$I(x_n)$ seja convergente e*
- *$\lambda_I(x_n) \longrightarrow 0$,*

existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$ em X.

Observação 3.1 *Na definição acima, quando $I(x_n) \longrightarrow c$, $c \in \mathbb{R}$, dizemos que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, e denotamos por $(PS)_c$.*

Definição 3.2 *Dados $B \subset X$ e $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale em torno de B no nível c, e denotamos por $(PS)_{B,c}$, quando para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que*

- *$I(x_n) \longrightarrow c$,*
- *$dist(x_n, B) \longrightarrow 0$ e*
- *$\lambda_I(x_n) \longrightarrow 0$,*

existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$ em X.

Observação 3.2 *Em particular, se $B = X$, temos que I satisfaz a condição $(PS)_c = (PS)_{X,c}$.*

Agora, dado um número real c, fixemos algumas notações:

- $I_c = \{x \in X; I(x) \leq c\}$;
- $I^c = \{x \in X; I(x) \geq c\}$;
- $K_c(I) = \{x \in X; 0 \in \partial I(x) \;\; e \;\; I(x) = c\}$.

Dado um subconjunto B de X e $\delta > 0$ um número real positivo, considere

$$N_\delta(B) = \{x \in X; dist(x, B) < \delta\} \quad e \quad \overline{N}_\delta(B) = \{x \in X; dist(x, B) \leq \delta\},$$

onde $N_\delta(B)$ e $\overline{N}_\delta(B)$, são δ-vizinhanças, aberta e fechada, respectivamente, de B.

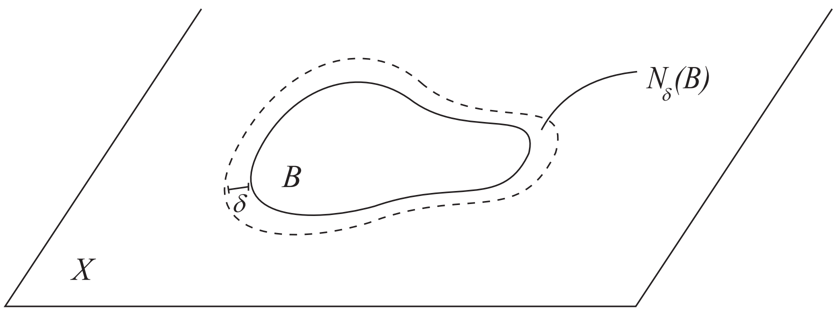

Figura 3.1: $\delta-$vizinhança de B.

A seguir, enunciaremos uma versão do Teorema da Deformação devido a **Chang [6]**, para tal, omitiremos a demonstração, pois pode ser encontrada, em detalhes, no trabalho de **Santos [28]**.

Lema 3.1 (Lema da Deformação) *Suponha que $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ verifica a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ e N é uma vizinhança aberta que contém K_c. Então, para todo $\varepsilon_0 > 0$ existem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e um homeomorfismo $\eta : X \longrightarrow X$ tal que:*

(i) $\eta(x) = x$, $\forall x \notin I_{c+\varepsilon_0} \setminus I_{c-\varepsilon_0}$;

(ii) $\eta(I_{c+\varepsilon} \setminus N) \subset I_{c-\varepsilon}$;

(iii) *Se* $K_c = \varnothing$, *então* $\eta(I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$.

Nosso objetivo agora é demonstrar uma outra versão do Teorema da Deformação. Para isto, utilizaremos o Lema 3.1 e os resultados a seguir. No que segue,

- $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} := \overline{N}_{3\delta_1}(B) \cap I^{c-3\varepsilon_1} \cap I_{c+3\varepsilon_1}$;
- $N_{2\delta_1,2\varepsilon_1} := N_{2\delta_1}(B) \cap I^{c-2\varepsilon_1} \cap I_{c+2\varepsilon_1}$;
- $\overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1} := \overline{N}_{\delta_1}(B) \cap I^{c-\varepsilon_1} \cap I_{c+\varepsilon_1}$.

Lema 3.2 *Suponha que I satisfaz a condição $(PS)_{B,c}$, com $B \subset X$ fechado e não vazio, tal que $B \cap K_c(I) = \varnothing$. Então, existem números $\delta_1,\ \sigma_1,\ \varepsilon_1 > 0$ tais que*

$$\lambda_I(x) \geq \sigma_1, \quad \forall x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}.$$

Geometricamente,

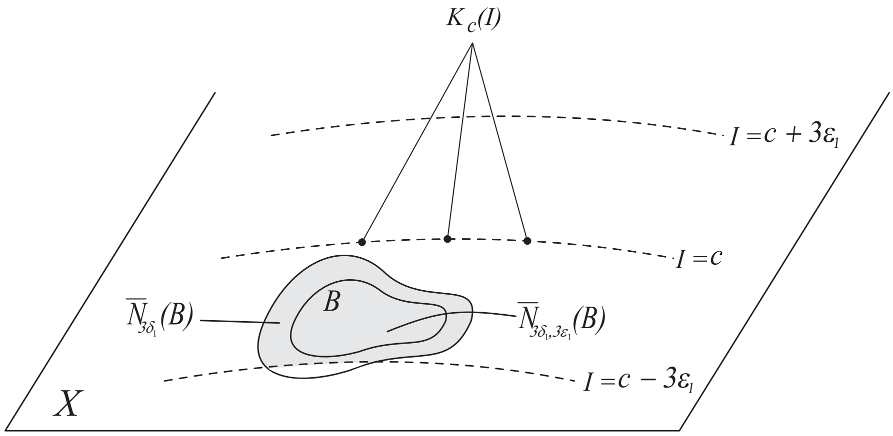

Figura 3.2: Ideia geométrica do Lema 3.2.

Demonstração: Suponha por contradição, que para todos $\delta_n,\ \sigma_n,\ \varepsilon_n > 0$ existe um $x_n \in \overline{N}_{3\delta_n,3\varepsilon_n} := \overline{N}_{3\delta_n}(B) \cap I^{c-3\varepsilon_n} \cap I_{c+3\varepsilon_n}$ com

$$0 < \lambda(x_n) < \sigma_n \tag{3.1}$$

Assuma que $\delta_n,\ \sigma_n,\ \varepsilon_n \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$. Ora, como $x_n \in \overline{N}_{3\delta_n,3\varepsilon_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c - 3\varepsilon_n \leq I(x_n) \leq c + 3\varepsilon_n \quad e \quad dist(x_n, B) \leq 3\delta_n.$$

Daí, passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos

$$I(x_n) \longrightarrow c \quad e \quad dist(x_n, B) \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Além disso, de (3.1), temos

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_I(x_n) = 0.$$

Deste fato, desde que I satisfaz a condição $(PS)_{B,c}$, existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que

$$x_{n_k} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad em \quad X. \tag{3.3}$$

Sendo λ_I uma função semicontínua inferiormente (ver Propriedade (P_6)), temos

$$0 = \liminf_{n_k \to +\infty} \lambda_I(x_{n_k}) \geq \lambda_I(x_0) \geq 0,$$

implicando que $\lambda_I(x_0) = 0$, logo $0 \in \partial I(x_0)$, consequentemente x_0 é um ponto crítico de I. Além disso,

$$I(x_0) = I(\lim_{n_k \to +\infty} x_{n_k}) = c,$$

mostrando que $x_0 \in K_c(I)$.

Recordando que a função $dist(.,B) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua sobre X, tem-se de (3.2) e (3.3)

$$0 = \lim_{n_k \to +\infty} dist(x_{n_k}, B) = dist(x_0, B).$$

Logo, $x_0 \in B$ (pois B é fechado). Sendo assim, $x_0 \in B \cap K_c(I)$ contradizendo o fato que $B \cap K_c(I) = \varnothing$, mostrando o lema.

■

Lema 3.3 *Assuma as hipóteses do Lema 3.2, com $B \subset I_c$. Então, existe um campo vetorial $v : \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \longrightarrow X$ localmente Lipschitz tal que $\|v\| \leq 1$ e*

$$\langle z, v(x)\rangle > \frac{1}{3}\sigma_1, \quad \forall z \in \partial I(x), \quad \forall x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}.$$

Demonstração: Segue do Lema 3.2, a existência de $\sigma_1,\ \delta_1,\ \varepsilon_1 > 0$ tais que

$$\lambda_I(x_0) > \sigma_1, \quad x_0 \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}. \tag{3.4}$$

Seja $w_0 \in \partial I(x_0)$, tal que

$$\|w_0\|_* = \lambda_I(x_0) = min\{\|w\|_*; w \in \partial I(x_0)\}.$$

Neste caso, $B_{\|w_0\|_*}(0) \cap \partial I(x_0) = \varnothing$ (pois, dado $\xi \in B_{\|w_0\|_*}(0)$, temos $\|\xi\|_* < \|w_0\|_*$, logo $\xi \notin \partial I(x_0)$).

Como o conjunto $\partial I(x_0)$ é também convexo em X^*, pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Teorema A.2, Apêndice A), existem $0 \neq \psi \in X^{**}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle \psi_0, \xi\rangle \geq \alpha \geq \langle \psi_0, w\rangle, \quad \forall \xi \in \partial I(x_0) \quad e \quad \forall w \in B_{\|w_0\|_*}(0).$$

Sendo X um espaço de Banach reflexivo, podemos considerar

$$\langle \psi_0, \cdot \rangle = \langle \cdot, u_0 \rangle,$$

com $0 \neq u_0 \in X$. Assim,

$$\langle \xi, u_0 \rangle \geq \alpha \geq \langle w, u_0 \rangle, \quad \forall \xi \in \partial I(x_0) \quad e \quad \forall w \in B_{\|w_0\|_*}(0).$$

Considerando $h_0 = \dfrac{u_0}{\|u_0\|}$, temos

$$\langle \xi, h_0 \rangle \geq \langle w, h_0 \rangle, \quad \forall \xi \in \partial I(x_0) \quad e \quad \forall w \in B_{\|w_0\|_*}(0). \tag{3.5}$$

Utilizando o Corolário A.1, tem-se que

$$\max\{\langle w, h_0 \rangle ; w \in \overline{B}_1(0) \subset X^*\} = \|h_0\|,$$

logo

$$\max\{\langle \frac{1}{2}\|w_0\|_* w, h_0 \rangle ; w \in \overline{B}_1(0)\} = \frac{1}{2}\|w_0\|_* \|h_0\|.$$

Fazendo $\overline{w} = \dfrac{1}{2}\|w_0\|_* w$, obtemos

$$\max\{\langle \overline{w}, h_0 \rangle ; \overline{w} \in \overline{B}_{\frac{1}{2}\|w_0\|_*}(0)\} = \frac{1}{2}\|w_0\|_* \|h_0\|,$$

consequentemente

$$\frac{1}{2}\|w_0\|_* \|h_0\| = \max\{\langle \overline{w}, h_0 \rangle ; \overline{w} \in \overline{B}_{\frac{1}{2}\|w_0\|_*}(0)\} \leq \sup\{\langle \overline{w}, h_0 \rangle ; \overline{w} \in B_{\|w_0\|_*}(0)\}. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6)

$$\langle \xi, h_0 \rangle \geq \frac{1}{2}\|w_0\|_* \|h_0\| = \frac{1}{2}\|w_0\|_*, \quad \forall \xi \in \partial I(x_0),$$

(lembre-se $\|h_0\| = 1$). Segue de (3.4) que

$$\langle \xi, h_0 \rangle > \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \forall \xi \in \partial I(x_0). \tag{3.7}$$

Por outro lado, desde que ∂I é semicontínua superiormente (ver propriedade (P_4)), para cada $x_0 \in \overline{N}_{3\delta_1, 3\varepsilon_1} \subset X$, existe $\eta_0 > 0$ tal que se $z \in \partial I(x)$ e $\|x - x_0\| < \eta_0$ existe $w \in \partial I(x_0)$ verificando

$$\|z - w\|_* < \frac{\sigma_1}{6}. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8)

$$\frac{\sigma_1}{2} - \langle z, h_0 \rangle < \langle w, h_0 \rangle - \langle z, h_0 \rangle < \frac{\sigma_1}{6},$$

donde segue-se que

$$\langle z, h_0 \rangle > \frac{\sigma_1}{3}, \quad \forall z \in \partial I(x) \quad e \quad \forall x \in B_{\eta_0}(x_0). \tag{3.9}$$

Dessa forma, podemos construir uma cobertura para o conjunto $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$, dada por

$$\bigcup_{x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}} B_{\eta_x}(x), \tag{3.10}$$

com η_x verificando (3.9). Como o conjunto $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$ é metrizável pela norma, segue que este é paracompacto (ver Apêndice C), logo toda cobertura aberta de tal conjunto, admite um refinamento enumerável e localmente finito, o qual denotaremos por $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{\eta_i}(x_i)$.

Fixado $i \in \mathbb{N}$, definamos

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \rho_i(x) = dist(x, B_{\eta_i}(x_i)^C). \end{aligned}$$

Note que dados $x, y \in X$ temos

$$|\rho_i(x) - \rho_i(y)| \leq \|x - y\|. \tag{3.11}$$

Além disso, seja $\beta_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(x)}{\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \rho_k(x)}, & x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $v : \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \longrightarrow X$ um campo vetorial definido por

$$v(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i(x)h_i, \quad x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$$

onde $h_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ verifica (3.9), para $x_0 = u_i$.

Afirmação 1. v é localmente Lipschitz.

De fato, lembrando que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_{\eta_i}(x_i)$ é um refinamento localmente finito de $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$, para cada $\tilde{x} \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$ intercepta uma quantidade finita de bolas da união $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_{\eta_i}(x_i)$. Assim, para cada $\tilde{x} \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$ existe $\tilde{J} = J_{\tilde{x}}$ tal que

$$B_j \cap B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}) \neq \varnothing \quad \text{se, e somente se,} \quad j \in \tilde{J}. \tag{3.12}$$

Consequentemente, para $x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \cap B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$ temos

$$v(x) = \sum_{j\in\tilde{J}} \beta_j(x)h_j$$

com

$$\beta_j(x)h_j = \frac{\rho_j(x)}{\sum\limits_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)} h_j, \quad j \in \tilde{J}.$$

Para mostrarmos que o campo v é localmente Lipschitz sobre $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$, basta mostrarmos que $\beta_j h_j$ é localmente Lipschitz, pois soma finita de funções localmente Lipschitz, ainda é uma função localmente Lipschitz. Por isso, verificaremos agora que $\beta_j h_j$ é localmente Lipschitz.

Fixado $\tilde{x} \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$, tome $\tilde{\delta} > 0$ verificando (3.12). Sendo assim, dados $j \in \tilde{J}$ e $x, y \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \cap B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$, temos

$$\|\beta_j(x)h_j - \beta_j(y)h_j\| \quad = \quad \left\| \frac{\sum\limits_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)\rho_j(x) - \sum\limits_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)\rho_j(y)}{\sum\limits_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum\limits_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)} \right\|,$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\|\beta_j(x)h_j - \beta_j(y)h_j\| &\leq \left| \frac{1}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)} \right| \sum_{k\in\tilde{J}} |\rho_k(y)\rho_j(x) - \rho_k(x)\rho_j(y)| \\
&= \left| \frac{1}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)} \right| \sum_{k\in\tilde{J}} \Big(|\rho_k(y)\rho_j(x) - \rho_k(x)\rho_j(y) \\
&\quad + \rho_j(y)\rho_k(y) - \rho_j(y)\rho_k(y)| \Big) \\
&\leq \left| \frac{1}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)} \right| \sum_{k\in\tilde{J}} \Big(\rho_k(y)|\rho_j(x) - \rho_j(y)| \\
&\quad + \rho_j(y)|\rho_k(x) - \rho_k(y)| \Big),
\end{aligned}
$$

donde segue-se, de (3.11), que

$$
\begin{aligned}
\|\beta_j(x)h_j - \beta_j(y)h_j\| &\leq \left| \frac{1}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)} \right| \left(\sum_{k\in\tilde{J}} \Big(\rho_k(y)\|x-y\| \Big) + \rho_j(y)\|x-y\| \right) \\
&\leq \frac{2\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)\|x-y\|}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(y)}
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\|\beta_j(x)h_j - \beta_j(y)h_j\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\displaystyle\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)}. \tag{3.13}
$$

Da definição de ρ_i, tem-se

$$
\sum_{k\in J_w} \rho_k(x) > 0, \quad x \in \overline{N}_{3\delta_1, 3\varepsilon_1} \cap B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}),
$$

donde segue-se, da continuidade de ρ_i, que existe $\tilde{M} = M(\tilde{x}) > 0$ tal que

$$\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x) \geq \tilde{M}, \quad \forall x \in \overline{B}_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}) \supset B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}).$$

Portanto,

$$\|\beta_j(x)h_j - \beta_j(y)h_j\| \leq \frac{2}{\tilde{M}}\|x-y\|, \quad \forall x,y \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \cap B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}),$$

mostrando a Afirmação 1.

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
\|v(x)\| &= \left\|\sum_{j\in\tilde{J}} \beta_j(x)h_j\right\| \leq \sum_{j\in\tilde{J}} |\beta_j(x)|\|h_j\| \\
&= \sum_{j\in\tilde{J}} |\beta_j(x)| = \sum_{j\in\tilde{J}} \left|\frac{\rho_j(x)}{\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)}\right| \\
&= \frac{\sum_{j\in\tilde{J}} \rho_j(x)}{\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)} = 1.
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (3.9) que

$$\begin{aligned}
\langle z, v(x)\rangle &= \left\langle z, \sum_{j\in\tilde{J}} \left(\frac{\rho_j(x)}{\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)} h_j\right)\right\rangle = \sum_{j\in\tilde{J}} \left(\frac{\rho_j(x)}{\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)}\right) \langle z, h_j\rangle \\
&> \left(\sum_{j\in\tilde{J}} \frac{\rho_j(x)}{\sum_{k\in\tilde{J}} \rho_k(x)}\right) \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\sigma_1}{3}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\langle z, v(x)\rangle > \frac{\sigma_1}{3},$$

o que conclui a demonstração deste lema. ■

A seguir, enunciaremos e demonstraremos um versão do Teorema da Deformação para funcionais localmente Lipschitz, o qual é devido a **Motreanu-Varga [21]**.

Teorema 3.4 (Teorema da Deformação) *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz e $A, B \subseteq X$ subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos, tais que:*

(1) $A \subset I^c$;

(2) $B \subset I_c$;

(3) $B \cap K_c(I) = \varnothing$;

(4) a condição $(PS)_{B,c}$ é verificada.

Então, existe um número $\varepsilon > 0$ e um homeomorfismo $\eta : X \longrightarrow X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $I(\eta(x)) \leq I(x), \quad \forall x \in X$;

(ii) $\eta(x) = x, \quad \forall x \in A$;

(iii) $\eta(B) \subset I_{c-\varepsilon}$.

Demonstração: Observe inicialmente que

$$(N_{2\delta_1,2\varepsilon_1})^C \cap \overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1} = \varnothing.$$

Assim, podemos definir $\phi : X \longrightarrow [0,1]$, dada por

$$\phi(x) = \frac{dist(x, X \setminus (N_{2\delta_1,2\varepsilon_1}))}{dist(x, \overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1}) + dist(x, X \setminus (N_{2\delta_1,2\varepsilon_1}))}$$

Note que:

- $\phi \in Lip_{loc}(X, [0,1])$;
- $\phi(x) = 0, \quad \forall x \in X \setminus (N_{2\delta_1,2\varepsilon_1})$;
- $\phi(x) = 1, \quad \forall x \in \overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1}$.

Consideremos agora, o seguinte campo vetorial $V : X \longrightarrow X$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} -\delta_1 \phi(x) v(x), & \forall x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $v : \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \longrightarrow X$ é o campo vetorial encontrado no Lema 3.3.

Afirmação 1: $V \in Lip_{loc}(X, X)$.

De fato, sabemos que ϕ, v são localmente Lipschitz. Analisaremos os seguinte casos:

Caso 1: Se $w \in int(\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(w) \subset int(\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}).$$

Assim, dados $x, y \in B_\delta(w)$, temos

$$\begin{aligned}
\|V(x) - V(y)\| &= \delta_1\|\phi(x)v(x) - \phi(y)v(y)\| \\
&= \delta_1\|\phi(x)(v(x) - v(y)) + v(y)(\phi(x) - \phi(y))\| \\
&\leq \delta_1(|\phi(x)|\|v(x) - v(y)\| + \|v(y)\||\phi(x) - \phi(y)|) \qquad (3.15) \\
&\leq \delta_1(K_1(w)\|x - y\| + K_2(w)\|x - y\|) \\
&\leq K(w)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B_\delta(w).
\end{aligned}$$

Caso 2: Se $w \in \partial(\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})$, $B_\delta(w)$ contém pontos do interior de $\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}$ e de seu complementar, logo se

$$x, y \in B_\delta(w) \cap int(\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}) \;\; ou \;\; x, y \in B_\delta(w) \cap (\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})^C,$$

temos V verificando (3.15) ou sendo identicamente nula, respectivamente. Porém, se

$$x \in B_\delta(w) \cap (\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})^C \;\; e \;\; y \in B_\delta(w) \cap int(\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1}),$$

temos

$$\begin{aligned}
\|V(x) - V(y)\| &= \|0 - (-\delta_1\phi(y)v(y))\| = \delta_1\|v(y)\||\phi(y)| \\
&\leq \delta_1 1|0 - \phi(y)| \leq \delta_1|\phi(x) - \phi(y)| \\
&\leq \delta_1 K_2(w)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B_\delta(w).
\end{aligned}$$

Caso 3: Se $w \in (\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})^C$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(w) \subset (\overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1})^C$. Neste caso, $V(x) = 0$, para todo $x \in B_\delta(w)$, consequentemente é Lipschitz em $B_\delta(w)$.

Pelos três casos que acabamos de ver, segue a Afirmação 1.

Segue do Lema 3.3 e pelo fato de $|\phi(x)| \leq 1$, que

$$\|V(x)\| \leq \| - \delta_1 \phi(x) v(x)\| \leq \delta_1, \quad \forall x \in X. \tag{3.16}$$

Visto isto, o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\gamma}{dt} & = & V(\gamma(t,x)), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times X \\ \gamma(0,x) & = & x, \quad \forall x \in X \end{array} \right. \tag{3.17}$$

tem única solução globalmente definida em $\mathbb{R} \times X$. Ademais, sendo V contínua, segue que $\gamma(.,x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$ (ver Apêndice C).

Afirmação 2: O subconjunto $B_1 := \{\gamma(t,x); x \in B, t \in [0,1]\} \subset X$ é fechado.

Com efeito, suponha que $(y_n) \subset B_1$ e $y_n \longrightarrow y_0 \in X$. Assim, podemos encontrar $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset [0,1]$ tal que $y_n = \gamma(t_n, x_n)$. Passando a uma subsequência, caso necessário, temos $t_n \longrightarrow t_0 \in [0,1]$ em $\mathbb{R}$.

Fazendo $u_n = \gamma(t_0, x_n)$, tem-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para espaços de Banach (ver Teorema C.7) e (3.17),

$$\begin{aligned} \|u_n - y_n\| &= \|\gamma(t_0, x_n) - \gamma(t_n, x_n)\| = \left\| \int_{t_n}^{t_0} \frac{d\gamma}{dt}(s, x_n) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_n}^{t_0} \|V(\gamma(s, x_n))\| \, ds, \end{aligned}$$

donde segue-se, pelo fato (3.16), que

$$\|u_n - y_n\| \leq \delta_1 |t_0 - t_n| \longrightarrow 0$$

Assim,

$$\|u_n - y_0\| = \|u_n - y_n + y_n - y_0\| \leq \|u_n - y_n\| + \|y_n - y_0\| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$u_n \longrightarrow y_0, \quad em \quad X.$$

Note que $\gamma_{-t_0} = \gamma(-t_0, .)$ é a função inversa de $\gamma_{t_0}(t_0, .)$. De fato, utilizando (3.17) obtemos:

$$\gamma_{t_0} \circ \gamma_{-t_0}(x) = \gamma_{t_0}(t_0, \gamma_{-t_0}(x)) = \gamma_{t_0}(t_0, \gamma(-t_0, x)) = \gamma_{t_0}(t_0 - t_0, x) = x.$$

Da mesma forma, temos $\gamma_{-t_0} \circ \gamma_{t_0}(x) = x$. Deste fato e pela dependência contínua de solução sobre valores iniciais, temos

$$x_n = \gamma(-t_0, u_n) \longrightarrow \gamma(-t_0, y_0).$$

Por outro lado, $(x_n) \subset B$ e B é fechado, logo $\gamma(-t_0, y_0)) \in B$. Sendo assim, basta observar que $y_0 = \gamma(t_0, \gamma(-t_0, y_0)) \in B$. Mostrando a Afirmação 2.

Afirmação 3: $I(\gamma(., x))$ é uma função não crescente em $\mathbb{R}$, para cada $x \in X$.

Primeiramente, verificaremos que para cada $x \in X$, $I(\gamma(., x))$ é localmente Lipschitziana sobre $\mathbb{R}$. Fixados $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon' > 0$ (pois $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) tal que

$$|I(\gamma(s_1, x)) - I(\gamma(s_2, x))| \leq K(\gamma(t, x)) \|\gamma(s_1, x) - \gamma(s_2, x)\|, \quad \forall \gamma(s_1, x), \gamma(s_2, x) \in B_{\varepsilon'}(\gamma(t, x)).$$

Considerando $\theta = \max\{s_1, s_2\}$ e $\alpha = \min\{s_1, s_2\}$

$$\begin{aligned} |I(\gamma(s_1, x)) - I(\gamma(s_2, x))| &\leq K(\gamma(t, x)) \left\| \int_\alpha^\theta V(\gamma(s, x)) ds \right\| \\ &\leq K(\gamma(t, x)) \int_\alpha^\theta \|V(\gamma(s, x))\| ds \\ &\leq K(\gamma(t, x)) \delta_1 (\theta - \alpha) = K(\gamma(t, x)) \delta_1 |s_1 - s_2| \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como $\gamma(., x)$ é contínua sobre $\mathbb{R}$, existe $\delta' > 0$ verificando

$$|s - t| < \delta' \;\Rightarrow\; \gamma(s, x) \in B_{\varepsilon'}(\gamma(t, x)). \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.19)

$$|I(\gamma(s_1, x)) - I(\gamma(s_2, x))| \leq K_t |s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in \big(t - \delta', t + \delta'\big),$$

como queríamos mostrar.

Mostraremos agora que $I(\gamma(.,x))$ é não crescente sobre $\mathbb{R}$. Fixe $s \in \mathbb{R}$ e $\delta_s > 0$ tais que $I(\gamma(.,x))$ é Lipschitz em $(s-\delta_s, s+\delta_s)$. Pelo Teorema de Lebourg (ver Capítulo 1), dados $t_0, t \in (s-\delta_s, s+\delta_s)$ existem $\tau \in (t_0, t)$ e $\hat{\xi} \in \partial_\tau I(\gamma(\tau, x))$ tais que

$$I(\gamma(t,x)) - I(\gamma(t_0,x)) = \langle \hat{\xi}, t - t_0 \rangle. \tag{3.20}$$

Sendo $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, X)$ e $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, tem-se pela Regra da Cadeia I (ver Capítulo 1),

$$\partial_\tau I(\gamma(\tau,x)) \subset \partial_{\gamma(\tau,x)} I(\gamma(\tau,x)) \circ \frac{d\gamma}{dt}(\tau,x) = \partial_{\gamma(\tau,x)} I(\gamma(\tau,x)) \circ V(\gamma(\tau,x)). \tag{3.21}$$

De (3.20) e (3.21), existe $\xi \in \partial_{\gamma(\tau,x)} I(\gamma(\tau,x))$ tal que

$$I(\gamma(t,x)) - I(\gamma(t_0,x)) = \langle \xi, V(\gamma(\tau,x))(t-t_0) \rangle. \tag{3.22}$$

Agora, analisaremos os seguintes fatos:

(I) $\gamma(\tau,x) \notin \overline{N}_{3\delta_1, 3\varepsilon_1}$.

Neste caso,

$$V(\gamma(\tau,x))(t-t_0) = 0$$

donde segue-se, de (3.22), que

$$I(\gamma(t,x)) = I(\gamma(t_0,x)), \quad t_0 < t.$$

(II) $\gamma(\tau,x) \in \overline{N}_{3\delta_1, 3\varepsilon_1} \setminus N_{2\delta_1, 2\varepsilon_1}$.

Para este caso, $\phi(\gamma(\tau,x)) = 0$, portanto

$$V(\gamma(\tau,x)) = 0.$$

Consequentemente,

$$I(\gamma(t,x)) = I(\gamma(t_0,x)), \quad t_0 < t.$$

(III) $\gamma(\tau,x) \in N_{2\delta_1, 2\varepsilon_1} \setminus \overline{N}_{\delta_1, \varepsilon_1}$.

Observando que

$$V(\gamma(\tau,x))(t-t_0) = -\delta_1 \phi(\gamma(\tau,x)) v(\gamma(\tau,x))(t-t_0),$$

temos de (3.22)

$$\begin{aligned} I(\gamma(t,x)) - I(\gamma(t_0,x)) &= \langle \xi, -\delta_1\phi(\gamma(\tau,x))v(\gamma(\tau,x))(t-t_0)\rangle \\ &= -\delta_1\phi(\gamma(\tau,x))(t-t_0)\langle \xi, v(\gamma(\tau,x))\rangle. \end{aligned}$$

Segue do Lema 3.3 que

$$I(\gamma(t,x)) - I(\gamma(t_0,x)) < -\delta_1\phi(\gamma(\tau,x))(t-t_0)\frac{\sigma_1}{3} < 0,$$

implicando que

$$I(\gamma(t,x)) < I(\gamma(t_0,x)), \quad t_0 < t.$$

(IV) $\gamma(\tau,x)(t-t_0) \in \overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1}$.

Neste caso, $\phi(\gamma(\tau,x)) = 1$, implicando que

$$V(\gamma(\tau,x))(t-t_0) = -\delta_1 v(\gamma(\tau,x))(t-t_0).$$

Donde segue-se, de (3.22), que

$$\begin{aligned} I(\gamma(t,x)) - I(\gamma(t_0,x)) &= -\delta_1\langle \xi, v(\gamma(\tau,x))(t-t_0)\rangle \\ &= -\delta_1\frac{\sigma_1}{3} < 0 \end{aligned}$$

implicando que

$$I(\gamma(t,x)) < I(\gamma(t_0,x)), \quad t_0 < t.$$

Por (I), (II), (III) e (IV) concluímos que

$$I(\gamma(t,x)) \leq I(\gamma(t_0,x)), \quad t_0 < t, \quad t_0, t \in (s-\delta_s, s+\delta_s).$$

Sejam $t_1', t_2' \in \mathbb{R}$, com $t_1' < t_2'$. Veja que

$$[t_1', t_2'] \subset \bigcup_{s\in[t_1',t_2']} (s-\delta_s, s+\delta_s),$$

onde $\delta_s > 0$ é tomado de sorte que a função $I(\gamma(.,x))$ seja lipschitziana em $(s-\delta_s, s+\delta_s)$. Utilizando o Teorema de Borel-Lebesgue, existe um conjunto finito $J = \{1,2,\ldots,k\}$ tal que

$$[t_1', t_2'] \subset \bigcup_{j\in J}(s_j-\delta_j, s_j+\delta_j),$$

de modo que $s_i < s_{i+1}$ e

$$(s_i - \delta_i, s_i + \delta_i) \cap (s_{i+1} - \delta_{i+1}, s_{i+1} + \delta_{i+1}) \neq \varnothing,$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, tome $r_i \in (s_i - \delta_i, s_i + \delta_i) \cap (s_{i+1} - \delta_{i+1}, s_{i+1} + \delta_{i+1})$. Logo,

$$I(\gamma(t_1', x)) \geq I(\gamma(r_1, x)) \geq \cdots \geq I(\gamma(r_i, x)) \geq \cdots \geq I(r_k, x)) \geq I(\gamma(t_2', x)),$$

mostrando a Afirmação 3.

Afirmação 4: $A \cap B_1 = \varnothing$.

Com efeito, suponha por contradição que $A \cap B_1 \neq \varnothing$, isto é, que exista $x_0 \in B$ e $t_0 \in [0, 1]$ com $\gamma(t_0, x_0) \in A$. Note que $t_0 > 0$, pois caso contrário

$$x_0 = \gamma(0, x_0) = \gamma(t_0, x_0) \in A,$$

o que não é possível, visto que $x_0 \in B$.
De *(1)*, *(2)* e pela Afirmação 3, obtemos

$$c \overset{(1)}{\leq} I(\gamma(t_0, x_0)) \overset{(A3)}{\leq} I(\gamma(t, x_0)) \overset{(A3)}{\leq} I(\gamma(0, x_0)) = I(x_0) \overset{(2)}{\leq} c, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Logo,

$$I(\gamma(t, x_0)) = c \quad \forall t \in [0, t_0] \tag{3.23}$$

Por outro lado, para todo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\gamma(t, x_0) - x_0\| &= \left\| \int_0^t \frac{d\gamma}{ds}(s, x_0) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|V(\gamma(s, x_0))\| ds \leq \delta_1 t \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Logo, $\gamma(t, x_0) \in \overline{N}_{\delta_1}(B)$ e por (3.23), temos que

$$c - \varepsilon_1 \leq I(\gamma(t, x_0)) \leq c + \varepsilon_1, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Assim,

$$\gamma(t, x_0) \in \overline{N}_{\delta_1}(B) \cap I^{c-\varepsilon_1} \cap I_{c+\varepsilon_1}, \quad \forall t \in [0, t_0]. \tag{3.24}$$

Por (3.22), existem $\xi \in \partial_{\gamma(\tau,x)} I(\gamma(\tau,x))$ e $\tau \in (0,t_0)$ tais que

$$I(\gamma(t_0,x_0)) - I(\gamma(0,x_0)) = \langle \xi, V(\gamma(\tau,x))(t_0-0)\rangle,$$

implicando, de (3.24) e Lema 3.3

$$I(\gamma(t_0,x_0)) - I(\gamma(0,x_0)) = -\delta_1\langle \xi, v(\gamma(\tau,x_0))< \frac{-\delta_1\sigma_1}{3},$$

donde segue-se que

$$I(\gamma(t_0,x_0)) < I(x_0) - \frac{\delta_1\sigma_1}{3} \le c - \frac{\delta_1\sigma_1}{3} < c,$$

caracterizando uma contradição com (3.23), mostrando a Afirmação 4.

Segue da Afirmação 4 e pelo Teorema C.2, que existe um conjunto fechado A_1 em X tal que $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ e $A \subset intA_1$. Neste caso, defina $\psi : X \longrightarrow [0,1]$ dado por:

$$\psi(x) = \frac{dist(x,A_1)}{dist(x,A_1)+dist(x,B_1)}, \quad x \in X.$$

Note que

- $\psi \in Lip_{loc}(X,[0,1])$;
- $\psi(x) = 0, \quad \forall x \in A_1$;
- $\psi(x) = 1, \quad \forall x \in B_1$.

Agora, defina um novo campo vetorial $W : X \longrightarrow X$ dado por

$$W(x) = \psi(x)V(x), \quad x \in X,$$

deste modo

$$W(x) = \begin{cases} \psi(x)V(x), & \forall x \in \overline{N}_{3\delta_1,3\varepsilon_1} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.25}$$

Observe que $W \in Lip_{loc}(X,X)$, pois ψ e V são localmente Lipschitz. A prova deste fato segue o mesmo raciocínio feito na Afirmação 1. Além do mais, $\|W(x)\| \le \delta_1$, $x \in X$. Assim, o problema de Cauchy com relação ao campo vetorial W, dado por

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dt}(t,x) = W(\zeta(t,x)), & \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times X \\ \zeta(0,x) = x, & \forall x \in X \end{cases} \tag{3.26}$$

possui única solução globalmente definida em $\mathbb{R} \times X$. E mais, como W é contínua, temos que $\zeta(.,x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$.

Provaremos agora os itens *(i), (ii) e (iii)*, para

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{\delta_1\sigma_1}{3}, \varepsilon_1\right\} \tag{3.27}$$

e

$$\eta(x) := \zeta(1,x), \quad \forall x \in X. \tag{3.28}$$

Inicialmente, mostraremos que $\eta : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, seja $\eta_{-1} : X \longrightarrow X$

$$\eta_{-1}(x) = \zeta(-1,x), \quad x \in X.$$

Observe que

$$\eta \circ \eta_{-1}(x) = \eta(\eta_{-1}(x)) = \zeta(1, \eta_{-1}(x)) = \zeta(1, \zeta(-1,x)) = \zeta(1-1,x) = x, \quad x \in X.$$

Analogamente, temos

$$\eta_{-1} \circ \eta(x) = x. \ \ x \in X.$$

Logo, η é bijetora com $\eta^{-1} \equiv \eta_{-1}$. Como ambas as aplicações são contínuas, segue que η é um homeomorfismo.

Usando o Lema 3.3, a definição de V em (3.14) e observando que o fluxo ζ tem as mesmas propriedades do fluxo do problema de Cauchy (3.17), seguindo o mesmo raciocínio da Afirmação 3, mostra-se que $I(\zeta(t,x))$ é uma função não crescente em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$. Sendo assim,

$$I(\eta(x)) = I(\zeta(1,x)) \leq I(\zeta(0,x)) = I(x), \quad \forall x \in X,$$

mostrando *(i)*.

Agora mostraremos *(ii)*. Fixando $x \in A_1$, defina $\varphi(t) = x$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Observe que φ define uma solução para o problema de Cauchy (3.26), pois

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}(t) &= & 0 &= & W(\varphi(t)) \\ \varphi(0) &= & x. \end{cases}$$

Assim, pela unicidade da solução, segue que $\varphi(t) = \zeta(t,x)$, isto é,

$$\zeta(t,x) = x, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $\eta(x) = \zeta(1, x) = x, \quad \forall x \in A_1$, e como $A \subset intA_1$, temos

$$\eta(x) = x, \quad \forall x \in A,$$

mostrando *(ii)*.

Para mostrar que *(iii)* é satisfeita, suponha por contradição que existe $x_0 \in B$ tal que $\eta(x_0) \notin I_{c-\varepsilon}$, isto é,

$$I(\eta(x_0)) > c - \varepsilon. \tag{3.29}$$

Recorde que $W(x) = V(x)$, $\forall x \in B_1$ (basta observar a definição de ψ). Pela definição de B_1 temos

$$W(\gamma(t, x_0)) = V(\gamma(t, x_0)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Assim, $\gamma(t) = \gamma(t, x_0)$ satisfaz o problema de Cauchy (3.26), logo por unicidade de solução, temos

$$\gamma(t, x_0) = \zeta(t, x_0), \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{3.30}$$

Por hipótese $B \subset I_c$, assim, pela Afirmação 3 e (3.30)

$$c \geq I(x_0) = I(\zeta(0, x_0)) = I(\gamma(0, x_0)) \geq I(\gamma(t, x_0)) = I(\zeta(t, x_0)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo, de (3.28) e (3.29), temos

$$c \geq I(\zeta(t, x_0)) \geq I(\zeta(1, x_0)) = I(\eta(x_0)) > c - \varepsilon, \forall t \in [0, 1]. \tag{3.31}$$

Além do mais, por (3.26) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} \|\zeta(t, x_0) - x_0\| &= \|\zeta(t, x_0) - \zeta(0, x_0)\| = \left\| \int_0^t W(\zeta(s, x_0))ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|W(\zeta(s, x_0))\|ds \leq \delta_1 t \leq \delta_1, \end{aligned}$$

mostrando que $\zeta(t, x_0) \in \overline{N}_{\delta_1}(B)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Além disso, como $\varepsilon := \min\left\{\dfrac{\delta_1 \sigma_1}{3}, \varepsilon_1\right\}$ segue de (3.31) que

$$c + \varepsilon_1 \geq c \geq I(\zeta(t, x_0)) > c - \varepsilon > c - \varepsilon_1,$$

implicando que $\zeta(t,x_0) \in I^{c-\varepsilon_1} \cap I_{c+\varepsilon_1}$ $\forall t \in [0,1]$, consequentemente

$$\zeta(t,x_0) \in \overline{N}_{\delta_1,\varepsilon_1}, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3.32}$$

Agora, por (3.30)

$$\begin{aligned} I(\eta(x_0)) - I(x_0) &= I(\zeta(1,x_0)) - I(\zeta(0,x_0)) \\ &= I(\gamma(1,x_0)) - I(\gamma(0,x_0)). \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Lebourg e a Regra da Cadeia I, existem $\tau \in [0,1]$ e $\xi \in \partial_{\gamma(\tau,x)} I(\gamma(\tau,x))$, tais que

$$\begin{aligned} I(\eta(x_0)) - I(x_0) &= I(\gamma(1,x_0)) - I(\gamma(0,x_0)) \\ &= \langle \xi, V(\gamma(\tau,x_0)) \rangle \\ &= \langle \xi, V(\zeta(\tau,x_0)) \rangle, \end{aligned}$$

implicando de (3.32) que

$$\begin{aligned} I(\eta(x_0)) - I(x_0) &= \langle \xi, V(\zeta(\tau,x_0)) \rangle \\ &= -\delta_1 \langle \xi, v(\zeta(\tau,x_0)) \rangle. \end{aligned}$$

Daí, segue pelo Lema 3.3 que

$$I(\eta(x_0)) < I(x_0) - \frac{\delta_1\sigma_1}{3} \leq c - \frac{\delta_1\sigma_1}{3}.$$

Lembrando que $\varepsilon < \dfrac{\delta_1\sigma_1}{3}$, concluímos que

$$I(\eta(x_0)) < c - \varepsilon,$$

o que caracteriza uma contradição com (3.29), mostrando *(iii)*.

■

3.2 Teorema do Link

Agora, vejamos uma aplicação do Teorema da Deformação (ver Teorema 3.4), conhecido na literatura como Teorema do Link, o qual a demonstração é devido a **Motreanu-Varga [21]**, mas antes precisamos estabelecer uma definição de *link*.

Definição 3.3 *Sejam Q, Q_0 e S subconjuntos de X, não vazios e fechados tais que $Q_0 \subset Q$ e $Q_0 \cap S = \varnothing$. Dizemos que o par (Q, Q_0) possui link com S em X, se para* *cada* $g \in C(Q, X)$ *com*

$$g|_{Q_0} \equiv Id|_{Q_0},$$

temos $g(Q) \cap S \neq \varnothing$.

Teorema 3.5 *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* (Q, Q_0) *um par que possui link com* S *em* X. *Assuma ainda que* Q *seja compacto e* $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja um funcional localmente Lipschitz verificando:*

(1) existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *tal que* $Q_0 \subset I_\alpha$ *e* $S \subset I^\alpha$.

Se I *verifica a condição* $(PS)_{S,c}$, *com*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \sup_{x\in Q} I(g(x)),$$

onde $\Gamma = \{g \in C(Q, X); g|_{Q_0} \equiv Id|_{Q_0}\}$, *então, as propriedades abaixo são verdadeiras:*

(i) $c \geq \alpha$;

(ii) $K_c(I) \setminus Q_0 \neq \varnothing$;

(iii) $K_c(I) \cap S \neq \varnothing$ *se* $c = \alpha$.

Demonstração: **Prova de (i):** Como o par (Q, Q_0) possui *link* com S em X, dado $g \in \Gamma$, existe $y_j \in g(Q) \cap S$. Assim, existe $x_j \in Q$ tal que $g(x_j) = y_j$ e $y_j \in S$.
Por hipótese, $S \subset I^\alpha$, logo

$$I(g(x_j)) = I(y_j) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma$$

e como Q é compacto

$$\sup_{x\in Q} I(g(x)) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma. \tag{3.33}$$

Consideremos o seguinte conjunto

$$H = \left\{ \sup_{x\in Q} I(g(x)); \; g \in \Gamma \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Segue de (3.33), que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, e α uma cota inferior para H.
Deste modo

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \sup_{x\in Q} I(g(x)) \geq \alpha,$$

mostrando *(i)*.

Prova de (iii): Suponha por contradição que $K_c(I) \cap S = \varnothing$ ou equivalentemente, que $K_{-c}(-I) \cap S = \varnothing$.

Como $\alpha = c$, temos

$$Q_0 \subset I_c \ \ e \ \ S \subset I^c$$

implicando que

$$I(x) \leq c, \quad \forall x \in Q_0$$

e

$$I(x) \geq c \quad \forall x \in S.$$

De forma equivalente,

$$-I(x) \geq -c, \quad \forall x \in Q_0$$

e

$$-I(x) \leq -c, \quad \forall x \in S,$$

ou seja,

$$Q_0 \subset -I^{-c} \ \ e \ \ S \subset -I_{-c}.$$

Agora, desde que $Q_0 \cap S = \varnothing$ e $K_{-c}(-I) \cap S = \varnothing$, pelo Teorema da Deformação (ver Teorema 3.4), existem $\varepsilon > 0$ e um homeomorfismo $\eta : X \longrightarrow X$ tais que

$$\eta(x) = x, \quad \forall x \in Q_0 \tag{3.34}$$

e

$$\eta(S) \subset -I_{-c-\varepsilon} = I^{c+\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Sendo $c = \inf\limits_{g \in \Gamma} \sup\limits_{x \in Q} I(g(x))$, existe $g_0 \in \Gamma$ tal que

$$\sup_{x \in Q} I(g_0(x)) < c + \varepsilon,$$

implicando que

$$I(g_0(x)) < c + \varepsilon, \quad \forall x \in Q. \tag{3.36}$$

Considerando $g_2 \equiv \eta^{-1} \circ g_0$, obtemos de (3.34)

$$g_2|_{Q_0} = \eta^{-1} \circ g_0|_{Q_0} = \eta^{-1} \circ Id|_{Q_0} = \eta^{-1}|_{Q_0} = Id|_{Q_0},$$

mostrando que $g_2 \in \Gamma$. Deste fato, como o par (Q, Q_0) possui *link* com S em X, existe $x_0 \in Q$ tal que

$$g_2(x_0) = \eta^{-1} \circ g_0(x_0) \in S,$$

implicando de (3.35) que $\eta(g_2(x_0)) \in I^{c+\varepsilon}$, consequentemente

$$I(g_0(x_0)) = I(\eta \circ \eta^{-1} \circ g_0(x_0)) = I(\eta \circ g_2(x_0)) \geq c + \varepsilon, \tag{3.37}$$

contradizendo (3.36). Logo, $K_c(I) \cap S \neq \varnothing$, mostrando o item *(iii)*.

Prova de (ii): Inicialmente, suponha $c = \alpha$. Segue do item *(iii)* que

$$K_c(I) \cap S \neq \varnothing. \tag{3.38}$$

Tendo em vista que $Q_0 \cap S = \varnothing$ e $K_c(I) \cap S \subset S$, temos

$$\big(K_c(I) \cap S\big) \cap Q_0 = \varnothing. \tag{3.39}$$

De (3.38) e (3.39)

$$\varnothing \neq K_c(I) \cap S = \big(K_c(I) \cap S\big) \setminus Q_0 \subset K_c(I) \setminus Q_0,$$

mostrando *(ii)* para o caso $c = \alpha$.

Agora, suponha que $c > \alpha$. Neste caso,

$$I(x) < c, \quad \forall x \in Q_0,$$

daí, $K_c(I) \cap Q_0 = \varnothing$ e portanto $K_c(I) \setminus Q_0 = K_c(I)$. Assim, basta mostrarmos que $K_c(I) \neq \varnothing$. Suponha, por absurdo, que $K_c(I) = \varnothing$, utilizando o Lema 3.1, existem $\varepsilon \in (0, c - \alpha)$ e um homeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ verificando

$$\varphi(x) = x, \quad \forall x \notin I_{c+\varepsilon} \setminus I_{c-\varepsilon} \tag{3.40}$$

e

$$\varphi(I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}. \tag{3.41}$$

Pela definição do valor c, existe $g_0 \in \Gamma$, tal que

$$\sup_{x \in Q} I(g_0(x)) \leq c + \varepsilon,$$

consequentemente

$$I(g_0(x)) \leq c + \varepsilon, \quad \forall x \in Q, \tag{3.42}$$

em particular, $g_0(x) \in I_{c+\varepsilon}$, para todo $x \in Q_0$.
Como $\varepsilon \in (0, c - \alpha)$, temos $Q_0 \subset I_\alpha \subset I_{c-\varepsilon}$, implicando de (3.40)

$$\varphi(x) = x, \quad \forall x \in Q_0. \tag{3.43}$$

Defina $g_1 \equiv \varphi \circ g_0$. Note que $g_1 \in C(Q, X)$ e por (3.43)

$$g_1|_{Q_0} = \varphi \circ g_0|_{Q_0} = \varphi \circ Id|_{Q_0} = \varphi|_{Q_0} = Id|_{Q_0},$$

mostrando que $g_1 \in \Gamma$. De (3.41) e (3.42)

$$I(g_1(x)) = I(\varphi \circ g_0(x)) \leq c - \varepsilon \quad \forall x \in Q,$$

implicando que

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \sup_{x \in Q} I(g(x)) \leq c - \varepsilon$$

o que caracteriza um absurdo. Logo, $K_c(I) \neq \varnothing$, mostrando *(ii)*.

■

O próximo resultado, é uma extensão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente Lipschitz, devido a **Kristály-Marzantowicz-Varga [16]**, e sua demonstração não é encontrada em detalhes na literatura.

Corolário 3.1 *Seja* $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional localmente Lipschitz, satisfazendo a condição* $(PS)_{R,c}$*, onde* $R := \{x; \|x - x_i\| = r\} \subset I^\alpha$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$*. Se existem* $x_1,\ x_2 \in X$*, com* $x_1 \neq x_2$ *e* $r \in \big(0, \|x_2 - x_1\|\big)$ *tais que*

$$\inf\{I(x); \|x - x_i\| = r\} \geq \max\{I(x_1), I(x_2)\},$$

onde $x_i \in \{x_1, x_2\}$ *é tal que* $I(x_i) = \max\{I(x_1), I(x_2)\}$*. Então,*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \geq \max\{I(x_1), I(x_2)\},$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = x_1 \text{ e } \gamma(1) = x_2\}$*, é um valor crítico para* I *e* $K_c(I) \setminus \{x_1, x_2\} \neq \varnothing$*.*

Demonstração: Inicialmente, faremos algumas observações para que, possamos aplicar o Teorema 3.5. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{\gamma} & : & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & & s & \longmapsto & \tilde{\gamma}(s) = sx_2 + (1-s)x_1. \end{array} \tag{3.44}$$

Note que $\tilde{\gamma}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem $\tilde{\gamma}([0,1]) = [x_1, x_2]$. Definamos o conjunto

$$\tilde{\Gamma} = \{g \in C([x_1, x_2], X);\ g(x_1) = x_1 \ \ e \ \ g(x_2) = x_2\}.$$

Assim, dado $\gamma \in \Gamma$, existe $g \in \tilde{\Gamma}$ $(g \equiv \gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1})$ tal que

$$\gamma \equiv g \circ \tilde{\gamma}.$$

Afirmação 1: $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) = \inf\limits_{g \in \tilde{\Gamma}} \max\limits_{x \in \tilde{\gamma}([0,1])} I(g(x)) = \tilde{c}.$

Definamos os conjuntos

$$A = \left\{ \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)); \gamma \in \Gamma \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \max_{x \in \tilde{\gamma}([0,1])} I(g(x)); g \in \tilde{\Gamma} \right\}.$$

Mostraremos agora que os conjuntos A e B são iguais. Com efeito, dado $a \in A$, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$a = \max_{s \in [0,1]} I(\gamma_0(s)).$$

Seja $g_0 \in \tilde{\Gamma}$ tal que $\gamma_0 \equiv g_0 \circ \tilde{\gamma}$, assim

$$a = \max_{s \in [0,1]} I(g_0 \circ \tilde{\gamma}(s)) = \max_{x \in \tilde{\gamma}([0,1]))} I(g_0(x)),$$

implicando que $A \subset B$. Da mesma forma, dado $b \in B$, existe $g_1 \in \tilde{\Gamma}$ de modo que

$$b = \max_{x \in \tilde{\gamma}([0,1])} I(g_1(x)) = \max_{s \in [0,1]} I(g_1 \circ \tilde{\gamma}(s)) = \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)),$$

onde $\gamma \equiv g_1 \circ \tilde{\gamma} \in \Gamma$, mostrando que $B \subset A$. Portanto, $A = B$ e consequentemente $\inf A = \inf B$, mostrando a Afirmação 1.

Note que o conjunto $\tilde{\gamma}([0,1]) = [x_1, x_2]$ é compacto, pois $\tilde{\gamma}$ é uma aplicação contínua e $[0,1]$ é compacto.

Afirmação 2: Considerando $\alpha := \max\{I(x_1), I(x_2)\} \in \mathbb{R}^+$, temos $\{x_1, x_2\} \subset I_\alpha$ e $R \subset I^\alpha$.

A primeira inclusão é evidente, devido a definição de α. Verificaremos agora que $R \subset I^{\alpha}$. Dado $x \in R$, temos por hipótese, que

$$I(x) \geq \inf\{I(x); \|x - x_i\| = r\} \geq \max\{I(x_1), I(x_2)\} = \alpha,$$

mostrando a Afirmação 2.

Afirmação 3: O par $([x_1, x_2], \{x_1, x_2\})$ possui *link* com R em X.

De fato, inicialmente, note que $R \cap \{x_1, x_2\} = \varnothing$, visto que $r \in (0, \|x_2 - x_1\|)$. Fixando $g \in \tilde{\Gamma}$, afirmamos que $g([x_1, x_2]) \cap R \neq \varnothing$. Com efeito, desde que $g \circ \tilde{\gamma}$ é uma aplicação contínua e $[0, 1]$ é conexo, $g \circ \tilde{\gamma}([0, 1]) = g([x_1, x_2])$ é conexo. Considerando $D = \{x; \|x - x_i\| \leq r\}$, suponha sem perder a generalidade que

$$x_1 \in g([x_1, x_2]) \cap D \quad e \quad x_2 \in g([x_1, x_2]) \cap D^C,$$

utilizando o Teorema da Alfândega (C.10), temos

$$\varnothing \neq g([x_1, x_2]) \cap \partial D = g([x_1, x_2]) \cap R,$$

mostrando a Afirmação 3.

Utilizando as Afirmações 1-3, o fato que I verifica a condição $(PS)_{R,c}$ e o Teorema 3.5 com $Q = \tilde{\gamma}([0, 1]) = [x_1, x_2]$, $Q_0 = \{x_1, x_2\}$ e $S = R$, obtemos que

$$K_c(I) \setminus \{x_1, x_2\} \neq \varnothing$$

e

$$c = \tilde{c} \geq \alpha = I(x_i),$$

logo c é um valor crítico para o funcional I, como queríamos demonstrar. ∎

Capítulo 4

Teorema de Multiplicidade

Neste capítulo, apresentaremos condições suficientes para se obter, pelo menos, três pontos críticos para uma classe de funcionais localmente Lipschitz. Para isto, revisaremos alguns conceitos básicos.

4.1 Resultados Preliminares

No que segue, $(X, \|.\|)$ é um espaço de Banach. Para mais detalhes sobre esta seção ver **[5]**,**[22]** e **[25]**.

Definição 4.1 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é semicontínua superiormente, se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, tem-se*

$$\limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(x_0).$$

Definição 4.2 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser semicontínua inferiormente, se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, tem-se*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Observação 4.1 *Se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x_0$, tem-se*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x_0),$$

a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser fracamente semicontínua inferiormente ($f.s.i.$).

Definição 4.3 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser coerciva, se*

$$f(x) \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quando} \quad \|x\| \longrightarrow +\infty.$$

Definição 4.4 *Diremos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é côncava, quando*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0,1).$$

Teorema 4.1 [5] *Suponha que o funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja convexo e semicontínuo inferiormente na topologia forte, então f é semicontínua inferiormente na topologia fraca.*

Teorema 4.2 [22] *Sejam $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Então, existem $\delta = \delta(x_0) > 0$ e $K = K(x_0) > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in B_\delta(x_0).$$

Lema 4.3 *Todo mínimo local de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é também mínimo local de $g := f + c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.*

4.2 Teorema de Multiplicidade

Nesta seção, enunciaremos e provaremos, um resultado de multiplicidade de pontos críticos devido a **Kristály-Marzantowicz-Varga [16]**, que é uma adaptação do seguinte resultado devido a **Ricceri [24]**,

Teorema 4.4 [24] *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : X \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $\varphi(x, .)$ *é côncava em J, para cada $x \in X$;*

(2) $\varphi(., \lambda)$ *é contínua, coerciva e f.s.i. em X para cada $\lambda \in J$;*

(3) $\beta_1 := \sup\limits_{\lambda \in J} \inf\limits_{x \in X} \varphi(x, \lambda) < \inf\limits_{x \in X} \sup\limits_{\lambda \in J} \varphi(x, \lambda) =: \beta_2$.

Então, para cada $\sigma > \beta_1$ existe um conjunto aberto não vazio $J_0 \subset J$ com a seguinte propriedade:

($\star$) *dados uma função $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ f.s.i. e $\lambda \in J_0$, existe $\mu_0 > 0$ de modo que, para cada $\mu \in (0, \mu_0)$, o funcional*

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \varphi(u, \lambda) + \mu\Phi(u), \quad u \in X,$$

possui pelo menos dois mínimos locais no conjunto $\{x \in X; \varphi(x,\lambda) < \sigma\}$.

Para cada $\tau \geq 0$, definamos o seguinte conjunto

$$\mathcal{C}_\tau = \{g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R});\ g \text{ é } \textit{limitada e } g(t) = t, \forall t \in [-\tau,\tau]\}.$$

Teorema 4.5 *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* X_i*, com* $i = 1, 2$*, dois espaços de Banach tais que* $X \underset{comp.}{\hookrightarrow} X_i$*. Sejam* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo,* $h : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *uma função convexa não decrescente e* $\Phi_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$*, com* $i = 1, 2$*, dois funcionais localmente Lipschitz tais que*

$$E_{\lambda,\mu} = h(\|.\|) + \lambda\Phi_1 + \mu g \circ \Phi_2,$$

restrita a X *satisfaça a condição* $(PS)_c$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$*,* $\lambda \in J$*,* $\mu \in [0, |\lambda| + 1]$ *e* $g \in \mathcal{C}_\tau$*,* $\tau \geq 0$*. Assumindo que:*

- $h(\|.\|) + \lambda\Phi_1$ *é coercivo sobre* X*, para todo* $\lambda \in J$*;*
- $\exists \rho \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\sup_{\lambda \in J} \inf_{x \in X} [h(\|x\|) + \lambda(\Phi_1(x) + \rho)] < \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in J} [h(\|x\|) + \lambda(\Phi_1(x) + \rho)]. \tag{4.1}$$

Então, existem um intervalo não vazio $A \subset J$ *e* $r > 0$ *verificando: dado* $\lambda \in A$ *existe* $\mu_0 \in (0, |\lambda| + 1]$ *tal que o funcional* $\mathcal{E}_{\lambda,\mu} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = h(\|u\|) + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u), \quad u \in X, \quad \textit{com} \;\; \mu \in [0, \mu_0],$$

possui pelo menos três pontos críticos $x_1, x_2, x_3 \in X$*, tais que* $\|x_j\| < r$ *com* $j = 1, 2, 3$.

Demonstração: Sendo h uma função não decrescente e convexa, observa-se pela desigualdade triangular que

$$h(\|tx + (1-t)y\|) \leq h(t\|x\| + (1-t)\|y\|) \leq th(\|x\|) + (1-t)h(\|y\|),$$

com $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$, mostrando que $h(\|.\|)$ é convexa. Deste fato, segue pelo Teorema 4.1 que $h(\|.\|)$ é fracamente semicontínua inferiormente.

Agora, defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & X \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,\lambda) & \longmapsto & \varphi(x,\lambda) = h(\|x\|) + \lambda(\Phi_1(x) + \rho), \end{array}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}$ verifica (4.1).

Afirmação 1: As funções $E_{\lambda,\mu}$ e $\varphi(.,\lambda)$, são fracamente semicontínuas inferiormente. Além disso, o funcional $E_{\lambda,\mu} \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$.
De fato,

$$\Phi_1 = \Phi_1 \circ Id_1 : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g \circ \Phi_2 = (g \circ \Phi_2) \circ Id_2 : X \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde as aplicações

$$\begin{array}{rcccc} Id_i & : & X & \longrightarrow & X_i \\ & & x & \longmapsto & Id_i(x) \end{array}$$

são compactas devido as imersões $X \underset{comp.}{\hookrightarrow} X_i$, com $i = 1, 2$. Deste modo, dado $(x_n) \subset X$ com $x_n \rightharpoonup x$ tem-se

$$\Phi_1(x_n) = \Phi_1 \circ Id_1(x_n) \longrightarrow \Phi_1 \circ Id_1(x) = \Phi_1(x), \tag{4.2}$$

e

$$g \circ \Phi_2(x_n) = (g \circ \Phi_2) \circ Id_2(x_n) \longrightarrow (g \circ \Phi_2) \circ Id_2(x) = g \circ \Phi_2(x). \tag{4.3}$$

Visto isto, dada $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$, temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} E_{\lambda,\mu}(x_n) &\geq \liminf_{n\to\infty} h(\|x_n\|) + \liminf_{n\to\infty} \lambda\Phi_1(x_n) + \liminf_{n\to\infty} \mu g \circ \Phi_2(x_n) \\ &\geq h(\|x\|) + \lambda\Phi_1(x) + \mu g \circ \Phi_2(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to\infty} E_{\lambda,\mu}(x_n) \geq E_{\lambda,\mu}(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n,\lambda) &\geq \liminf_{n\to\infty} h(\|x_n\|) + \liminf_{n\to\infty} \lambda(\Phi_1(x_n) + \rho) \\ &\geq h(\|x\|) + \lambda(\Phi_1(x) + \rho) \\ &\geq \varphi(x,\lambda). \end{aligned}$$

Agora, observando que h é localmente Lipschitz sobre $[0,+\infty)$ (ver Teorema 4.2), tem-se que $h(\|.\|) \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ e como $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, segue que $E_{\lambda,\mu} \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, mostrando assim a Afirmação 1.

Para cada $t \in [0,1]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) &= h(\|x\|) + t\lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) + (1-t)\lambda_2(\Phi_1(x) + \rho) \\
&= th(\|x\|) + (1-t)h(\|x\|) + t\lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) + (1-t)\lambda_2(\Phi_1(x) + \rho) \\
&= t(h(\|x\|) + \lambda_1(\Phi_1(x) + \rho)) + (1-t)(h(\|x\|) + \lambda_2(\Phi_1(x) + \rho)) \\
&= t\varphi(x, \lambda_1) + (1-t)\varphi(x, \lambda_2),
\end{aligned}$$

mostrando que $\varphi(x, .)$ é côncava. Tendo em vista, que φ verifica as hipóteses do Teorema 4.4, fixemos

$$\sigma > \sup_{\lambda \in J} \inf_{x \in X} [h(\|x\|) + \lambda(\Phi_1(x) + \rho)]$$

e consideremos um conjunto aberto não vazio $J_0 \subset J$ verificando $(\star)$. Fixe $A = [a,b] \subset J_0$ e $\lambda \in A$. Para cada $\tau \geq 0$ e $g_\tau \in \mathcal{C}_\tau$ definamos o funcional $\Phi(.) = g_\tau \circ \Phi_2(.)$ fracamente semicontínua inferiormente (ver (4.3)). Segue do Teorema 4.4, que existe $\mu_\tau > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu_\tau)$, o funcional

$$\begin{aligned}
\varphi(., \lambda) + \mu\Phi(.) &= h(\|.\|) + \lambda\Phi_1(.) + \mu(g_\tau \circ \Phi_2(.)) + \lambda\rho \\
&= E^\tau_{\lambda,\mu}(.) + \lambda\rho
\end{aligned}$$

possui pelo menos dois mínimos locais, digamos $x_1^\tau, x_2^\tau \in \{x \in X; \varphi(x,\lambda) < \sigma\}$, que também são mínimos locais do funcional $E^\tau_{\lambda,\mu}(.)$ (ver Lema 4.3).

Afirmação 2:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\lambda \in [a,b]} \{x \in X; \varphi(x,\lambda) < \sigma\} \;\subset\; & \{x \in X; h(\|x\|) + a\Phi_1(x) < \sigma - a\rho\} \\
& \cup \{x \in X; h(\|x\|) + b\Phi_1(x) < \sigma - b\rho\}.
\end{aligned}$$

Dado $x \in \bigcup_{\lambda \in [a,b]} \{x \in X ; \varphi(x,\lambda) < \sigma\}$, existe $\lambda_1 \in [a,b]$ tal que $x \in \{x \in X; \varphi(x, \lambda_1) < \sigma\}$. Vejamos os seguintes casos:

Caso 1: Se $\Phi_1(x) + \rho < 0$, temos

$$a(\Phi_1(x) + \rho) > \lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) > b(\Phi_1(x) + \rho).$$

Daí,

$$h(\|x\|) + b(\Phi_1(x) + \rho) < h(\|x\|) + \lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) < \sigma,$$

implicando

$$h(\|x\|) + b\Phi_1(x) < \sigma - b\rho$$

donde segue que

$$x \in \{x \in X; h(\|x\|) + b\Phi_1(x) < \sigma - b\rho\}.$$

Caso 2: Se $\Phi_1(x) + \rho > 0$, temos

$$a(\Phi_1(x) + \rho) < \lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) < b(\Phi_1(x) + \rho).$$

Logo,

$$h(\|x\|) + a(\Phi_1(x) + \rho) < h(\|x\|) + \lambda_1(\Phi_1(x) + \rho) < \sigma,$$

implicando

$$h(\|x\|) + a\Phi_1(x) < \sigma - a\rho$$

donde

$$x \in \{x \in X; h(\|x\|) + a\Phi_1(x) < \sigma - a\rho\}.$$

Pelos Casos 1 e 2, conclui-se que

$$x \in \{x \in X; h(\|x\|) + a\Phi_1(x) < \sigma - a\rho\} \cup \{x \in X; h(\|x\|) + b\Phi_1(x) < \sigma - b\rho\}$$

mostrando a Afirmação 2.

Como $h(\|.\|) + \lambda\Phi_1$ é coerciva sobre X, os conjuntos

$$\{x \in X; h(\|x\|) + a\Phi_1(x) < \sigma - a\rho\} \;\; e \;\; \{x \in X; h(\|x\|) + b\Phi_1(x) < \sigma - b\rho\},$$

são limitados sobre X, donde segue-se, da Afirmação 2, que

$$\bigcup_{\lambda \in [a,b]} \{x \in X; \varphi(x, \lambda) < \sigma\}$$

é limitado, consequentemente existe $\eta > 0$ tal que

$$\bigcup_{\lambda \in [a,b]} \{x \in X; \varphi(x, \lambda) < \sigma\} \subset B_\eta(0). \tag{4.4}$$

Logo $x_1^\tau, x_2^\tau \in B_\eta(0)$.

Agora, defina

$$c^* = \sup_{t \in [0,\eta]} h(t) + \max\{|a|, |b|\} \sup_{x \in B_\eta(0)} |\Phi_1(x)|$$

e fixe $r > \eta$ suficientemente grande, tal que para cada $\lambda \in [a, b]$

$$\{x \in X; h(\|x\|) + \lambda \Phi_1(x) < c^* + 2\} \subset B_r(0). \tag{4.5}$$

Considere $r^* = \sup\limits_{x \in B_r(0)} |\Phi_2(x)|$ e fixe $g = g_{r^*} \in \mathcal{C}_{r^*}$. Defina

$$\mu_0 = \min \left\{ |\lambda| + 1, \frac{1}{1 + \sup |g|} \right\} \in (0, |\lambda| + 1].$$

Por hipótese

$$E_{\lambda,\mu}(x) = E_{\lambda,\mu}^{r^*}(x) = h(\|x\|) + \lambda \Phi_1(x) + \mu g_{r^*} \circ \Phi_2(x), \quad x \in X$$

verifica a condição $(PS)_c$ para cada $c \in \mathbb{R}$ e $\mu \in [0, \mu_0]$. Além disso, $x_1 = x_1^{r^*}$ e $x_2 = x_2^{r^*}$ são mínimos locais distintos, logo existem $r_1, r_2 > 0$, tais que

$$E_{\lambda,\mu}(x) \geq E_{\lambda,\mu}(x_1), \quad \forall x \in B_{r_1}(x_1)$$

e

$$E_{\lambda,\mu}(x) \geq E_{\lambda,\mu}(x_2), \quad \forall x \in B_{r_2}(x_2).$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $E_{\lambda,\mu}(x_1) = \max\{E_{\lambda,\mu}(x_1), E_{\lambda,\mu}(x_2)\}$ e fixe $r' \in \big(0, \min\{r_1, \|x_2 - x_1\|\}\big)$. Note que

$$E_{\lambda,\mu}(x) \geq E_{\lambda,\mu}(x_1), \quad \forall x \in X, \quad \text{com} \quad \|x - x_1\| = r'.$$

Mostrando que $E_{\lambda,\mu}(x_1)$ é cota inferior para o conjunto

$$\{E_{\lambda,\mu}(x); \|x - x_1\| = r'\},$$

logo,

$$\inf\{E_{\lambda,\mu}(x); \|x - x_1\| = r'\} \geq E_{\lambda,\mu}(x_1) = \max\{E_{\lambda,\mu}(x_1), E_{\lambda,\mu}(x_2)\}.$$

Aplicando o Corolário 3.1, obtemos que

$$c_{\lambda,\mu} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} E_{\lambda,\mu}(\gamma(s)) \geq \max\{E_{\lambda,\mu}(x_1), E_{\lambda,\mu}(x_2)\}$$

é um valor crítico para $E_{\lambda,\mu}$, onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = x_1 \ e \ \gamma(1) = x_2\}$. Portanto, existe $x_3 \in X$ tal que $c_{\lambda,\mu} = E_{\lambda,\mu}(x_3)$ e $0 \in \partial E_{\lambda,\mu}(x_3)$.

Considerando $\gamma(s) = sx_2 + (1-s)x_1$, $s \in [0,1]$, tem-se

$$\gamma([0,1]) \subset B_\eta(0). \tag{4.6}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} h(\|x_3\|) + \lambda\Phi_1(x_3) &= E_{\lambda,\mu}(x_3) - \mu g(\Phi_2(x_3)) \\ &= c_{\lambda,\mu} - \mu g(\Phi_2(x_3)) \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} \{h(\|\gamma(s)\|) + \lambda\Phi_1(\gamma(s)) + \mu g(\Phi_2(\gamma(s)))\} - \mu g(\Phi_2(x_3)) \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} (h(\|\gamma(s)\|)) + \sup_{s\in[0,1]} (\max\{|a|,|b|\}|\Phi_1(\gamma(s))|) \\ &\quad + \sup_{s\in[0,1]} (\mu|g(\Phi_2(\gamma(s)))|) + \mu|g(\Phi_2(x_3))| \end{aligned}$$

Por (4.6), temos

$$\begin{aligned} h(\|x_3\|) + \lambda\Phi_1(x_3) &\leq \sup_{t\in[0,\eta]} (h(t)) + \max\{|a|,|b|\} \sup_{B_\eta(0)} |\Phi_1|) \\ &\quad + \mu_0 \sup |g| + \mu_0 \sup |g| \\ &= \sup_{t\in[0,\eta]} (h(t)) + \max\{|a|,|b|\} \sup_{B_\eta(0)} |\Phi_1| + 2\mu_0 \sup |g| \\ &\leq c^* + 2\frac{\sup |g|}{1 + \sup |g|} \leq c^* + 2. \end{aligned}$$

Mostrando que $x_3 \in \{x \in X; h(\|x\|) + \lambda\Phi_1(x) < c^* + 2\}$, donde segue-se, por (4.5), que $x_3 \in B_r(0)$. Portanto, pelo Lema 1.4, x_1, x_2 *e* x_3 são pontos críticos para o funcional $E_{\lambda,\mu}$, tais que $\|x_i\| < r$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Verificaremos agora que $x_1,\ x_2$ *e* x_3 são pontos críticos para o funcional $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$. Com efeito, sendo $r^* = \sup\limits_{x \in B_r(0)} |\Phi_2(x)|$, temos

$$|\Phi_2(x)| \leq r^*, \quad \forall x \in B_r(0). \tag{4.7}$$

Como $g \in \mathcal{C}_{r^*}$, por (4.7), temos

$$g(\Phi_2(x)) = \Phi_2(x), \quad \forall x \in B_r(0), \tag{4.8}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\mu}(x) &= h(\|x\|) + \lambda\Phi_1(x) + \mu g \circ \Phi_2(x) \\ &= h(\|x\|) + \lambda\Phi_1(x) + \mu\Phi_2(x), \quad \forall x \in B_r(0), \end{aligned}$$

ou seja, $E_{\lambda,\mu} \equiv \mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ sobre $B_r(0)$. Ora, $x_i \in B_r(0)$, para cada $i = 1, 2, 3$, logo, são pontos críticos também para $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$, o que conclui nossa demonstração.

■

Capítulo 5

Um Problema de Inclusão Diferencial em um Domínio Limitado

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar a existência de pelo menos três soluções para uma classe de problema de inclusão diferencial em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado com fronteira suave.

5.1 Sobre o Problema

Considere o seguinte problema com a condição não homogênea de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u + u & \in & \lambda \partial F(u(x)), \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & \in & \mu \partial G(u(x)), \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\lambda, \mu > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave. Além disso, $\partial F, \partial G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$ são os gradientes generalizados dos funcionais $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. O funcional $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz satisfazendo as seguintes condições:

(F_0) $F(0) = 0$ e existem $C_1 > 0$ e $p \in [1, 2^*)$ tais que

$$|\xi| \leq C_1(1 + |t|^{p-1}), \quad \forall \xi \in \partial F(t), t \in \mathbb{R}; \tag{5.2}$$

(F_1) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\}}{|t|} = 0;$

(F_2) $\displaystyle\limsup_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{t^2} \leq 0$;

(F_3) Existe $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ tais que $F(\tilde{t}) > 0$.

Vejamos agora um exemplo de funcional $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica a condições $(F_0) - (F_3)$.

Exemplo 5.1 *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{3t^2\pi}{4}, & se \quad 0 < t < 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2}, & se \quad t \geq 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Como vimos no Capítulo 2, temos

$$F(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{t^3\pi}{4}, & se \quad 0 < t \leq 1 \\ \arctan(t), & se \quad t > 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

com

$$\partial F(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t \leq 0 \\ \dfrac{3t^2\pi}{4}, & se \quad 0 < t < 1 \\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right], & se \quad t = 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2}, & se \quad t > 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Vejamos agora que F verifica as condições $(F_0) - (F_3)$. Anteriormente, no Capítulo 2, vimos que a condição (F_0) é verificada, assim verifiquemos as demais.

Verificação de (F_1)**:** Observe que

$$\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\} \leq \frac{3\pi t^2}{4}$$

para $t \approx 0$. Logo,

$$0 \leq \lim_{t \to 0} \frac{\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\}}{|t|} \leq \lim_{t \to 0} \frac{3\pi |t|^2}{4|t|} = 0,$$

implicando

$$\lim_{t \to 0} \frac{\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\}}{|t|} = 0.$$

Verificação de (F_2)**:** Note que

$$0 \leq \frac{F(t)}{t^2} \leq \frac{\pi}{2t^2} = \frac{\pi}{2|t|^2}, \quad \forall t \neq 0.$$

Logo,

$$\limsup_{|t| \to \infty} \frac{F(t)}{t^2} = 0.$$

Verificação de (F_3)**:** Claramente $F(\tilde{t}) > 0, \quad \forall\, \tilde{t} \in (0, \infty)$.

Sobre o funcional $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos que $G \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verificando:

(G_0) $G(0) = 0$ e existem $C_2 > 0$ e $q \in [1, \overline{2}^*)$ tais que

$$|\xi| \leq C_2(1 + |t|^{q-1}), \quad \forall \xi \in \partial G(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Entendemos aqui como solução do problema (5.1), uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ verificando a identidade

$$\int_\Omega \big(\nabla u \nabla v + uv\big)dx - \lambda \int_\Omega \xi_F v dx - \mu \int_{\partial\Omega} \xi_G v d\sigma = 0, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega),$$

para algum $\xi_F \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e $\xi_G \in L^{\frac{q}{q-1}}(\partial\Omega)$ (ver (2.11)), tais que

$$\xi_F(x) \in \partial F(u(x)) \quad e \quad \xi_G(x) \in \partial G(u(x)) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega.$$

Pelo Lema 2.4, podemos definir os funcionais localmente Lipschitz

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 \;:\; L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \Phi_1(u) = -\int_\Omega F(u(x))dx,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 \;:\; L^q(\partial\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \Phi_2(u) = -\int_{\partial\Omega} G(u(x))d\sigma
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

onde $p \in [1, 2^*]$ e $q \in [1, \overline{2}^*]$. Segue do Teorema 2.5, que

$$
\partial\Phi_1(u) \subset -\int_\Omega \partial F(u(x))dx \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega. \tag{5.9}
$$

e

$$
\partial\Phi_2(u) \subset -\int_{\partial\Omega} \partial G(u(x))d\sigma \quad q.t.p. \quad em \quad \partial\Omega. \tag{5.10}
$$

O funcional energia associado ao problema (5.1) é dado por

$$
\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u), \quad u \in W^{1,2}(\Omega).
$$

Tendo em vista que o funcional $J : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2$ é de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, com $J'(u).v = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx$ (ver Lema D.1), temos $\mathcal{E}_{\lambda,\mu} \in Lip_{loc}(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, pelas Propriedades (P_3) e (P_7), (5.9) e (5.10), temos

$$
\begin{aligned}
\partial\mathcal{E}_{\lambda\mu}(u) &\subset \{J'(u)\} + \lambda\partial\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u) \\
&\subset \{J'(u)\} - \lambda\int_\Omega \partial F(u(x))dx - \mu\int_{\partial\Omega} \partial G(u(x))d\sigma,
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Lema 5.1 *Todo ponto crítico de $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ é solução do problema (5.1).*

Demonstração: Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ um ponto crítico de $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$, isto é, $0 \in \partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u)$. Logo, por (5.11), existem $\xi_F(x) \in \partial F(u(x))$ e $\xi_G(x) \in \partial G(u(x))$ q.t.p. em Ω, tais que

$$
0 = \langle 0, v\rangle \;=\; \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx - \lambda\int_\Omega \xi_F v dx - \mu\int_{\partial\Omega} \xi_G v d\sigma, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega).
$$

■

Proposição 5.1 *Se* $\beta(t) = \inf\{\Phi_1(u); u \in W^{1,2}(\Omega), \|u\|^2 < 2t\}$, *então*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\beta(t)}{t} = 0.$$

Demonstração: Fixe $\tilde{p} \in (\max\{2, p\}, 2^*)$. Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que F é Lipschitz em $[0, t]$, utilizando o Teorema de Lebourg, existem $s \in [0, t]$ e $\xi_s \in \partial F(s)$ tais que

$$F(t) - F(0) = \langle \xi_s, t - 0 \rangle$$

e como $F(0) = 0$, temos

$$|F(t)| \leq |\xi_s||t| \tag{5.12}$$

implicando por (F_0) que

$$|F(t)| \leq |\langle \xi_s, t \rangle| = |\xi_s||t| \leq C_1|t| + C_1|t|^p.$$

Por outro lado, como $\tilde{p} \in (\max\{2, p\}, 2^*)$, existe $K' > 0$ tal que

$$\frac{|F(t)|}{|t|^{\tilde{p}}} \leq \frac{C_1}{|t|^{\tilde{p}-1}} + \frac{C_1}{|t|^{\tilde{p}-p}} \leq C, \quad \forall |t| > K',$$

e assim,

$$|F(t)| \leq C|t|^{\tilde{p}} \leq C|t|^{\tilde{p}} + \varepsilon|t|^2, \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; e \;\; |t| > K'. \tag{5.13}$$

De (F_1) e (5.12)

$$|F(t)| \leq \varepsilon|t|^2, \quad \forall t \in (-\delta(\varepsilon), +\delta(\varepsilon)),$$

implicando que

$$|F(t)| \leq \varepsilon|t|^2 + C|t|^{\tilde{p}}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{5.14}$$

Agora, fixe $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{F(t)}{|t|^{\tilde{p}}} \leq M, \quad t \in [\delta(\varepsilon), K']$$

implicando que

$$|F(t)| \leq M|t|^{\tilde{p}} + \varepsilon|t|^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad t \in [\delta(\varepsilon), K']. \tag{5.15}$$

De (5.13), (5.14) e (5.15)

$$|F(t)| \leq \varepsilon|t|^2 + K(\varepsilon)|t|^{\tilde{p}}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $K(\varepsilon) = \max\{C, M\}$. Deste fato,

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(u) &= -\int_\Omega F(u(x))dx \geq \int_\Omega -|F(u(x))|dx \geq \int_\Omega (-\varepsilon|u|^2 + K(\varepsilon)|u|^{\tilde{p}})dx \\
&\geq -\varepsilon|u|_2^2 - K(\varepsilon)|u|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}}.
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que $W^{1,2}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$ e $L^{\tilde{p}}(\Omega)$, obtemos

$$
\Phi_1(u) \geq -\varepsilon C\|u\|^2 - K(\varepsilon)C\|u\|^{\tilde{p}}, \quad u \in W^{1,2}(\Omega). \tag{5.16}
$$

Defina para $t > 0$ o conjunto $S_t = \{u \in W^{1,2}(\Omega); \|u\|^2 < 2t\}$, assim

$$
\Phi_1(u) \geq -\varepsilon C2t - K(\varepsilon)C2^{\frac{\tilde{p}}{2}}t^{\frac{\tilde{p}}{2}}, \quad u \in S_t,
$$

donde

$$
0 \geq \frac{\inf\{\Phi_1(u); u \in W^{1,2}(\Omega) \;\; e \;\; \|u\|^2 < 2t\}}{t} \geq -\frac{\varepsilon C2t}{t} - \frac{k(\varepsilon)C2^{\frac{\tilde{p}}{2}}t^{\frac{\tilde{p}}{2}}}{t}.
$$

Assim, passando ao limite de $t \to 0^+$, obtemos

$$
\lim_{t \to 0^+} \frac{\inf\{\Phi_1(u); u \in W^{1,2}(\Omega) \;\; e \;\; \|u\|^2 < 2t\}}{t} \geq -2C\varepsilon,
$$

consequentemente

$$
\lim_{t \to 0^+} \frac{\inf\{\Phi_1(u); u \in W^{1,2}(\Omega) \;\; e \;\; \|u\|^2 < 2t\}}{t} = 0,
$$

como queríamos demonstrar.

■

5.2 Verificação da Condição de Palais-Smale

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que o funcional energia $E_{\lambda,\mu}$ verifica a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Seja u_0 uma função constante sobre Ω com $u_0 = \tilde{t}$, onde $\tilde{t}$ é dado pela condição (F_3). Desde que $\Phi_1(u_0) = -\int_\Omega F(\tilde{t}) < 0$, temos

$$
-\frac{2\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^2} > 0.
$$

Fixe $\eta > 0$ tal que

$$0 < \eta < -\frac{2\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^2}. \tag{5.17}$$

Da Proposição 5.1, existe $\delta(\eta) > 0$ tal que

$$-\eta < \frac{\beta(t)}{t} < \eta, \quad \forall t \in (0, \delta(\eta)).$$

Assim existe $t_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\|u_0\|^2\right)$ tal que $-\beta(t_0) < \eta t_0$. Logo, por (5.17) temos

$$\beta(t_0) > -\eta t_0 > \frac{2\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^2} t_0. \tag{5.18}$$

Agora, fixe $\rho_0 > 0$, tal que

$$-\beta(t_0) < \rho_0 < -\frac{2\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^2} t_0 < -\frac{2\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^2} . \frac{\|u_0\|^2}{2} = -\Phi_1(u_0), \tag{5.19}$$

ou seja,

$$-\beta(t_0) < \rho_0 < -\Phi_1(u_0). \tag{5.20}$$

Visto isto, considere o funcional $\varphi : W^{1,2}(\Omega) \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(u, \lambda) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \lambda\rho_0,$$

onde $J = [0, \infty)$.

Lema 5.2 *O funcional $\varphi(., \lambda)$ é limitado inferiormente, para cada $\lambda \in J$.*

Demonstração: De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos por $(F_0) - (F_2)$

$$F(t) < \varepsilon|t|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\begin{aligned} \varphi(u, \lambda) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega F(u(x))dx + \lambda\rho_0 \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\varepsilon \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \lambda\rho_0 \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\varepsilon|u|_2^2 + \lambda\rho_0. \end{aligned}$$

Logo, pela imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\varphi(u,\lambda) \;\geq\; \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\lambda\varepsilon\|u\|^2 + \lambda\rho_0. \tag{5.21}$$

Agora, defina

$$q(t) = \frac{t^2}{2} - \varepsilon C_1 t^2 + \lambda\rho_0 = t^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_1\right) + \lambda\rho_0, \quad t \in (0,+\infty).$$

Note que

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = +\infty, \quad \text{para} \;\; 0 < \varepsilon < \frac{1}{2C_1}.$$

Logo, existem $K, M > 0$ tais que

$$q(t) > M, \quad \forall t > K.$$

Como $q \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, existe $t_1 \in [0,K]$ tal que

$$q(t_1) = \min\{q(t); t \in [0,K]\}.$$

Assim, concluímos que

$$q(t) \geq \min\{M, q(t_1)\} =: K_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{5.22}$$

De (5.21) e (5.22), temos

$$\varphi(u,\lambda) \geq K_0, \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega),$$

mostrando que $\varphi(.,\lambda)$ é limitado inferiormente.

■

Lema 5.3 *O funcional φ verifica a seguinte desigualdade*

$$\sup_{\lambda\in J}\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda) < \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)}\sup_{\lambda\in J}\varphi(u,\lambda).$$

Demonstração: Seja $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por

$$f(\lambda) = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda), \quad \text{com} \;\; \lambda > 0,$$

a qual está bem definida, pelo Lema 5.2. Afirmamos que f é semicontínua superiormente. Com efeito, seja $(\lambda_n) \subset J$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0 \in J$. Para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$, temos

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda_n(\rho_0 + \Phi_1(u)) \geq \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda_n(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right\} = f(\lambda_n)$$

Daí,

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda_0} f(\lambda_n) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda_0(\rho_0 + \Phi_1(u)), \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega).$$

Por propriedade de ínfimo,

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda_0} f(\lambda_n) \leq \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda_0(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right\},$$

ou seja,

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda_0} f(\lambda_n) \leq f(\lambda_0),$$

como queríamos mostrar.

Passando ao limite de $\lambda \to +\infty$, na seguinte desigualdade

$$\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda) \leq \varphi(u_0,\lambda) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \lambda(\rho_0 + \Phi_1(u_0)),$$

obtemos, por (5.20),

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left(\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u_0,\lambda) \right) \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \lambda(\rho_0 + \Phi_1(u_0)) \right) = -\infty. \tag{5.23}$$

Utilizando o Lema C.12 existe $\overline{\lambda} \in J$ tal que

$$\sup_{\lambda\in J} \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda) = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right]. \tag{5.24}$$

Verificaremos agora as seguintes afirmações.

Afirmação 1: $\displaystyle\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda\in J} \varphi(u,\lambda) = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2 ; -\Phi_1(u) \geq \rho_0 \right\}.$

Primeiramente, veja que

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda\in J} \varphi(u,\lambda) &= \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left(\sup_{\lambda\in J} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right] \right) \\
&= \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 + \sup_{\lambda\in J} \big[\lambda(\rho_0 + \Phi_1(u)) \big] \right).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Vejamos agora, os seguintes casos:

Caso 1: $\rho_0 + \Phi_1(u) > 0$.

Neste caso,

$$\sup_{\lambda \in J}(\rho_0 + \Phi_1(u)) = +\infty.$$

Caso 2: $\rho_0 + \Phi_1(u) \leq 0$.

Para este caso,

$$\sup_{\lambda \in J}(\lambda(\rho_0 + \Phi_1(u)) = 0.$$

Dos casos 1 e 2, conclui-se que

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 + \sup_{\lambda \in J}\big[\lambda(\rho_0 + \Phi_1(u))\big] \right) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2; -\Phi_1(u) \geq \rho_0 \right\}.$$

Daí, segue de (5.25) que

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda \in J} \varphi(u, \lambda) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2; -\Phi_1(u) \geq \rho_0 \right\},$$

mostrando assim a Afirmação 1.

Afirmação 2: $t_0 \leq \inf\left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2; u \in W^{1,2}(\Omega), -\Phi_1(u) \geq \rho_0 \right\}$.

Para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$, com $\frac{1}{2}\|u\|^2 < t_0$, temos de (5.20) que

$$-\Phi_1(u) \leq -\inf\left\{ \Phi_1(u); u \in W^{1,2}(\Omega) \;\; e \;\; \frac{1}{2}\|u\|^2 < t_0 \right\} = -\beta(t_0) < \rho_0.$$

Deste modo, se $-\Phi_1(u) \geq \rho_0$,

$$t_0 \leq \inf\left\{ \frac{1}{2}\|u\|^2; u \in W^{1,2}(\Omega), -\Phi_1(u) \geq \rho_0 \right\}, \tag{5.26}$$

mostrando a Afirmação 2.

Das Afirmações 1 e 2, conclui-se que

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda \in J} \varphi(u, \lambda) \geq t_0. \tag{5.27}$$

Consideremos agora, dois casos:

Caso I: $\overline{\lambda} \in [0, {}^{t_0}/_{\rho_0})$.

Neste caso,

$$\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u))\right] \leq \varphi(0,\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}\rho_0 < t_0,$$

donde segue-se, de (5.24) e (5.27), que

$$\sup_{\lambda\in J} \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda) < \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda\in J} \varphi(u,\lambda).$$

Caso II: $\overline{\lambda} \in [{}^{t_0}/_{\rho_0}, +\infty)$.

Desde que $0 < \rho_0 < -\Phi_1(u_0)$

$$\begin{aligned} \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u))\right] &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u_0)) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + t_0 + \frac{t_0}{\rho_0}\Phi_1(u_0), \end{aligned} \tag{5.28}$$

implicando de (5.19) que

$$\inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2 + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u))\right] < \frac{1}{2}\|u\|^2 + t_0 - \frac{1}{2}\|u\|^2 = t_0.$$

Sendo assim, temos de (5.24) e (5.27)

$$\sup_{\lambda\in J} \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \varphi(u,\lambda) < \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)} \sup_{\lambda\in J} \varphi(u,\lambda).$$

Dos Casos I e II, conclui-se a demonstração.

■

Lema 5.4 *Sejam $\tau \geq 0$, $\lambda \in J$, $\mu \in [0, \lambda+1]$ e $g \in \mathcal{C}_\tau$. Então, o funcional*

$$E_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu(g\circ\Phi_2)(u), u \in W^{1,2}(\Omega)$$

é coercivo em $W^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração: De (F_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ satisfazendo

$$\frac{F(t)}{t^2} < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}, \text{com } |t| > K.$$

Assim,

$$F(t) < \varepsilon|t|^2, \quad |t| > K,$$

donde

$$-F(t) > -\varepsilon|t|^2 \quad |t| > K. \tag{5.29}$$

Logo, sendo F contínua, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_\Omega F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{[|u(x)|>K]} F(u(x))dx \\
&\quad -\lambda\int_{[|u(x)|\leq K]} F(u(x))dx \\
&> \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{[|u(x)|>K]} \varepsilon|u(x)|^2dx - \lambda\overline{C}.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) > \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\varepsilon|u|_2^2 - \lambda\overline{C}.$$

Pela imersão contínua $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) > \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\varepsilon C\|u\|^2 - \lambda\overline{C} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\varepsilon C\right)\|u\|^2 - \lambda\overline{C}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos supor $\left(\frac{1}{2} - \lambda C\varepsilon\right) > 0$. Sendo assim,

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) \stackrel{\|u\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Como $g \in \mathcal{C}_\tau$ é limitado, existe $K_1 > 0$

$$\begin{aligned}
E_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu(g(\Phi_2(u))) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) - \mu K_1 \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad \|u\| \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

Utilizando as propriedades de gradiente generalizado, a Regra da Cadeia II, o

Teorema 2.5 e a Observação 2.1,

$$\begin{aligned}\partial E_{\lambda,\mu}(u) &\subseteq \{J'(u)\} + \lambda\partial\Phi_1(u) + \mu g'(\Phi_2(u))\partial\Phi_2(u) \\ &\subseteq \{J'(u)\} - \lambda\int_\Omega \partial F(u)dx - \mu g'(\Phi_2(u))\int_{\partial\Omega}\partial G(u)d\sigma \end{aligned} \tag{5.30}$$

Lema 5.5 *Sejam $\tau \geq 0$, $\lambda \in J$, $\mu \in [0, \lambda+1]$ e $g \in \mathcal{C}_\tau$. Então, o funcional*

$$E_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu(g\circ\Phi_2)(u), u \in W^{1,2}(\Omega),$$

verifica a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$E_{\lambda,\mu}(u_n) \longrightarrow c \ \ e \ \ \lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_n) \longrightarrow 0. \tag{5.31}$$

Pelo Lema 5.4 e (5.31), conclui-se que (u_n) é uma sequência limitada. Desta forma, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

- $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$,
- $u_{n_k} \to u$ em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 2^*$,
- $u_{n_k} \to u$ em $L^q(\partial\Omega)$, $1 \leq q < \overline{2}^*$ e
- $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω.

Considere $(w_{n_k}) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $\|w_{n_k}\|_* = \lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_{n_k})$. Deste fato,

$$\langle w_{n_k}, v\rangle = \int_\Omega \nabla u_{n_k}\nabla v - u_{n_k}v dx - \lambda\int_\Omega \xi_F^{n_k} v dx - \mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega}\xi_G^{n_k} v d\sigma, \tag{5.32}$$

para algum $\xi_F^{n_k} \in \partial F(u_{n_k})$ e $\xi_G^{n_k} \in \partial G(u_{n_k})$. Considerando $v = u_{n_k} - u$ em (5.32)

$$\langle w_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = \langle u_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_W - \lambda\int_\Omega \xi_F^{n_k}(u_{n_k} - u)dx - \mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega}\xi_G^{n_k}(u_{n_k} - u)d\sigma, \tag{5.33}$$

com $n_k \in \mathbb{N}$ e $\langle .,. \rangle_W$ denota o produto interno de $W^{1,2}(\Omega)$. Fixado $\varepsilon > 0$, temos

$$|\langle w_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle| \leq \|w_{n_k}\|_*\|u_{n_k} - u\| < \varepsilon, \tag{5.34}$$

para k suficientemente grande. Por outro lado, pela propriedade (F_0) e pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda\int_\Omega \xi_F^{n_k}(u_{n_k}-u)dx\right| &\leq |\lambda|\int_\Omega |\xi_F^{n_k}||u_{n_k}-u|dx \\
&\leq |\lambda|C_1\int_\Omega |u_{n_k}-u|dx + |\lambda|C_1\int_\Omega |u_{n_k}|^{p-1}|u_{n_k}-u|dx \\
&\leq |\lambda|C_1|u_{n_k}-u|_p + |\lambda|C_1|u_{n_k}^{p-1}|_{\frac{p}{p-1}}|u_{n_k}-u|_p.
\end{aligned}$$

Note que

$$|u_{n_k}^{p-1}|_{\frac{p}{p-1}} = \left(\int_\Omega |u_{n_k}^{p-1}|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\left(\int_\Omega |u_{n_k}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} = |u_{n_k}|_p^{p-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda\int_\Omega \xi_F^{n_k}(u_{n_k}-u)dx\right| &\leq |\lambda|C_1|u_{n_k}-u|_p + |\lambda|C_1|u_{n_k}|_p^{p-1}|u_{n_k}-u|_p \\
&\leq |\lambda|C_1|u_{n_k}-u|_p + |\lambda|C_2\|u_{n_k}\|^{p-1}|u_{n_k}-u|_p.
\end{aligned}$$

Sendo (u_{n_k}) limitada em $W^{1,2}(\Omega)$,

$$\left|\lambda\int_\Omega \xi_F^{n_k}(u_{n_k}-u)dx\right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n_k \longrightarrow +\infty. \tag{5.35}$$

Da mesma forma, pela propriedade (G_0) temos,

$$\begin{aligned}
\left|\mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega} \xi_G^{n_k}(u_{n_k}-u)d\sigma\right| \leq\ & |\mu||g'(\Phi_2(u_{n_k}))|\int_{\partial\Omega} C_3|u_{n_k}-u|d\sigma \\
&+|\mu||g'(\Phi_2(u_{n_k}))|\int_{\partial\Omega} C_3|u_{n_k}|^{q-1}|u_{n_k}-u|d\sigma.
\end{aligned}$$

E pela Desigualdade de Hölder , segue que

$$\begin{aligned}
\left|\mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega} \xi_G^{n_k}(u_{n_k}-u)d\sigma\right| \leq\ & |\mu||g'(\Phi_2(u_{n_k}))|C_3|u_{n_k}-u|_{\frac{q}{q-1},\partial\Omega} \\
&+|\mu||g'(\Phi_2(u_{n_k}))|C_3|u_{n_k}|_{q,\partial\Omega}^{q-1}|u_{n_k}-u|_{q,\partial\Omega},
\end{aligned}$$

daí,

$$\left|\mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega}\xi_G^{n_k}(u_{n_k}-u)d\sigma\right| \leq |\mu||g'(\Phi_2(u_{n_k}))|\Big[C_3|u_{n_k}-u|_{q,\partial\Omega} + C_4\|u_{n_k}\|^{q-1}|u_{n_k}-u|_{q,\partial\Omega}\Big].$$

Sendo Φ_2 contínuo e $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g' \circ \Phi_2$ é contínuo, logo

$$\left|g' \circ \Phi_2(u_{n_k}) - g' \circ \Phi_2(u)\right| \longrightarrow 0,$$

implicando que $g'(\Phi_2(u_{n_k}))$ é limitada. Como (u_{n_k}) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$,

$$\left|\mu g'(\Phi_2(u_{n_k}))\int_{\partial\Omega}\xi_G^{n_k}(u_{n_k}-u)d\sigma\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \;\; n_k \longrightarrow +\infty. \tag{5.36}$$

De (5.34), (5.35) e (5.36), obtemos

$$\langle u_{n_k}, u_{n_k}-u\rangle_W \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \;\; n_k \longrightarrow \infty. \tag{5.37}$$

Visto isto,

$$\|u_{n_k}-u\|^2 = \langle u_{n_k}-u, u_{n_k}-u\rangle_W = \langle u_{n_k}, u_{n_k}-u\rangle_W - \langle u, u_{n_k}-u\rangle_W$$

e lembrando que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, temos de (5.37) que

$$\|u_{n_k}-u\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n_k \longrightarrow \infty.$$

Portanto, o funcional

$$E_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu(g\circ\Phi_2)(u),\ u \in W^{1,2}(\Omega)$$

satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in J = [0,\infty)$, $g \in \mathcal{C}_\tau$, com $\tau \leq 0$, $\mu \in [0,\infty]$.

■

5.3 Existência de Soluções

Vimos na seção anterior, alguns resultados que nos garantem as hipóteses do Teorema de Multiplicidade (ver Teorema 4.5), com isso podemos mostrar o seguinte resultado que nos garante a existência de pelo menos três soluções:

Teorema 5.6 *Sejam $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais localmente Lipschitz, satisfazendo as condições $(F_0) - (F_3)$, e (G_0), respectivamente. Então, existem um intervalo não degenerado compacto $[a, b] \subset (0, +\infty)$ e um número $r > 0$, tais que para cada $\lambda \in [a, b]$ existe $\mu_0 \in (0, \lambda+1]$ tal que para cada $\mu \in [0, \mu_0]$, o problema (5.1) admite, pelo menos, três soluções diferentes com as normas em $W^{1,2}(\Omega)$ menores que r.*

Demonstração: Sejam $g \in \mathcal{C}_\tau$ com $\tau \geq 0$, $\lambda \in J$, $\mu \in [0, \lambda + 1]$, e $c \in \mathbb{R}$. Primeiramente, observe que os Lemas 5.3, 5.4 e 5.5 nos garantem as hipóteses do Teorema 4.5 para:

- $X = W^{1,2}(\Omega)$;
- $X_1 = L^p(\Omega)$ com $p \in [1, 2^*)$;
- $X_2 = L^q(\partial\Omega)$ com $q \in [1, \overline{2}^*)$;
- $J = [0, +\infty)$;
- $h(t) = t^2/2$, $t \geq 0$.

Logo, existem $[a, b] \subset J$ e $r > 0$, tais que dado $\lambda \in [a, b]$, existe $\mu_0 \in (0, \lambda + 1]$ tal que o funcional $\mathcal{E}_{\lambda,\mu} : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u), \quad \text{com} \quad \mu \in [0, \mu_0],$$

possui pelo menos três pontos críticos distintos, tais que a norma em $W^{1,2}(\Omega)$ é menor que r. Donde segue-se, pelo Lema 5.1, que o problema (5.1) possui pelo menos três soluções distintas.

■

Capítulo 6

Um Problema de Inclusão Diferencial no $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo, mostraremos a existência de pelo menos três soluções para uma classe de problema de inclusão diferencial definido sobre o $\mathbb{R}^N$.

6.1 Sobre o Problema

Sejam $p > N \geq 2$ e $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz verificando

$(\tilde{F}_1)$ $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(t)\}}{|t|^{p-1}} = 0;$

$(\tilde{F}_2)$ $\displaystyle\limsup_{|t| \to \infty} \frac{F(t)}{|t|^p} \leq 0;$

$(\tilde{F}_3)$ Existe $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ tais que $F(\tilde{t}) > 0$ e $F(0) = 0$.

Nestas condições, considere o seguinte problema de inclusão diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u & \in & \lambda\alpha(x)\partial F(u(x)) + \mu\beta(x)\partial G(u(x)), \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, & & \text{quando} \quad |x| \to +\infty. \end{array}\right. \tag{6.1}$$

onde $\lambda, \mu > 0$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um funcional localmente Lipschitz. Além disso, suponha que $\beta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ verificando:

$(\tilde{\alpha})\quad \alpha \geq 0 \quad \text{e} \quad \sup_{R>0} \, ess \inf_{|x|\leq R} \alpha(x) > 0.$

Diremos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução do problema (6.1), quando para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-1}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\xi_F v dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\xi_G v dx, \tag{6.2}$$

para algum ξ_F e ξ_G tais que

- $\xi_F w, \xi_G w \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall w \in L^\infty(\mathbb{R}^N);$
- $\xi_F(x) \in \partial F(u(x))$ *e* $\xi_G(x) \in \partial G(u(x))$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$.

Observação 6.1 *Como* $p > N$*, qualquer* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz* $u(x) \to 0$*, quando* $|x| \to +\infty$ *(ver Observação A.3, Apêndice A).*

Observação 6.2 *Na igualdade (6.2), os termos do lado direito estão bem definidos.*

Com efeito, pelo Teorema de Morrey (ver Apêndice A), se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u(x)| \leq |u|_\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, existe um intervalo $I_u \subset \mathbb{R}$ compacto tal que $u(x) \in I_u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, assim existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_u \subset \cup_{i=1}^{k_0} B_{\delta_i}(x_i)$. Como ∂F é semicontínua superiormente (ver propriedade (P_4)), para cada $x \in I_u$ e $\xi \in \partial F(x)$, existe $\xi_i \in \partial F(x_i)$ verificando

$$|\xi| < 1 + |\xi_i|,$$

visto que $x \in B_{\delta_i}(x_i)$ para algum $i = 1, ..., k_0$. Daí, tomando $K := \max_{i\in\{1,...,k_0\}} |\xi_i|$, temos

$$|\xi| < 1 + K,$$

mostrando que o conjunto $\partial F(I_u) \subset \mathbb{R}$ é limitado. Deste fato, seja $C_F = \sup_{\xi\in\partial F(I_u)} |\xi|$. Para cada $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\xi_F v(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\alpha(x)||\xi_F||v(x)|dx \\
&\leq C_F \int_{\mathbb{R}^N} |\alpha(x)||v(x)|dx \\
&\leq C_F|\alpha|_1|v|_\infty < +\infty
\end{aligned}$$

visto que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De modo análogo, mostra-se para o segundo termo.

Pelo Lema 2.8 podemos definir os funcionais $\Phi_1, \Phi_2 : L^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dados, respectivamente, por

$$\Phi_1(u) = -\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)F(u(x))dx \quad e \quad \Phi_2(u) = -\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)G(u(x))dx, \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

além disso,

$$\partial\Phi_1(u) \subset -\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\partial F(u(x))dx \quad e \quad \partial\Phi_2(u) \subset -\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\partial G(u(x))dx, \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{6.3}$$

Associado ao problema (6.1), temos o seguinte funcional energia

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{E}_{\lambda,\mu} & : & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = \dfrac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u) \end{array} \tag{6.4}$$

que está bem definido, visto que os funcionais Φ_1 e Φ_2 estão bem definidos.

Tendo em vista que o funcional $J : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, com

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx, \quad u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

(ver Lema D.2), temos $\mathcal{E}_{\lambda,\mu} \in Lip_{loc}(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Além disso, pelas Propriedades (P_3) e (P_7), temos

$$\partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) \subset \{J'(u)\} + \lambda\partial\Phi_1(u) + \mu\partial\Phi_2(u), \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

donde segue-se, de (6.3), que

$$\partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) \subset \{J'(u)\} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\partial F(u(x))dx - \mu\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\partial G(u(x))dx, \tag{6.5}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 6.1 *Se* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *é tal que* $0 \in \partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u)$, *ou seja,* u *é ponto crítico do funcional* $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$, *então* u *é solução do problema* (6.1).

Demonstração: Pela inclusão (6.5), temos

$$0 \in \partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) \subset \{J'(u)\} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\partial F(u(x))dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\partial G(u(x))dx,$$

assim, existem $\xi_F(x) \in \partial F(u(x))$ e $\xi_G(x) \in \partial G(u(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, tais que

$$0 = \langle 0, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\xi_F v dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\xi_G v dx,$$

para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Deste fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\xi_F v dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\xi_G v dx,$$

para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Mostrando que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é solução para o problema (6.1).

■

6.2 Princípio de Criticalidade Simétrica

Antes de continuarmos, lembramos que neste momento faz-se necessário uma leitura no Apêndice B. O próximo resultado é conhecido na literatura como Princípio de Criticalidade Simétrica, o qual é uma versão, devido a **Krawcewicz-Marzantowicz [14]**, para funcionais localmente Lipschitz.

Teorema 6.2 [14] *Sejam X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz e G-invariante onde G é um grupo de Lie compacto. Então, $x \in X_{rad}$ (ver Apêndice B) é um ponto crítico de f se, e somente se, x é ponto crítico de $f^{rad} := f|_{X_{rad}} : X_{rad} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Corolário 6.1 *Se $u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é tal que $0 \in \partial\mathcal{E}^{rad}_{\lambda,\mu}(u) = \partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}|_{W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}(u)$, então $0 \in \partial\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u)$.*

Demonstração: Desde que $O(N)$ é um grupo de Lie compacto, e o funcional $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ é $O(N)$-invariante (ver Exemplos B.1 e B.3, Apêndice B), temos pelo Princípio de Criticalidade Simétrica para funcionais localmente Lipschitz (Teorema 6.2), que os pontos críticos de $\mathcal{E}^{rad}_{\lambda,\mu}$, são também pontos críticos para $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$. ■

Proposição 6.1 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\inf\{\Phi_1(u); u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N),\ \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} < pt\}}{t} = 0.$

Demonstração: Por $(\tilde{F}_1)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{|\xi|}{|t|^{p-1}} \leq \frac{\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\}}{|t|^{p-1}} < \varepsilon, \quad \forall t \in [-\delta, \delta], \quad \forall \xi \in \partial F(t),$$

implicando que

$$|\xi| \leq \varepsilon |t|^{p-1}, \quad \forall t \in [-\delta, \delta], \quad \forall \xi \in \partial F(t). \tag{6.6}$$

Fixado $t \in (0, {}^1\!/_p\, ({}^\delta\!/_{C_\infty})]$ defina

$$S_t = \{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N); \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} < pt\},$$

onde C_∞ denota a melhor constante da imersão $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se $u \in S_t$, pelo Teorema de Morrey, temos

$$|u|_\infty \leq C_\infty \|u\|_{\mathbb{R}^N} < C_\infty \sqrt[p]{pt} < C_\infty \sqrt[p]{\left(\frac{\delta}{C_\infty}\right)^p} = \delta.$$

Agora, fixado $u \in S_t$, e utilizando o Teorema de Lebourg, existe $\xi_x \in \partial F(\theta_x u(x))$, com $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$F(u(x)) - F(0) = \langle \xi_x, u(x) \rangle \leq |\langle \xi_x, u(x) \rangle| \leq |\xi_x||u(x)|,$$

logo

$$F(u(x)) \leq |\xi_x||u(x)|.$$

De (6.6), temos

$$F(u(x)) \leq \varepsilon |u(x)|^{p-1}|u(x)| < \varepsilon |u(x)|^p \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Assim, para cada $u \in S_t$

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= -\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) F(u(x)) dx \geq -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)|u(x)|^p dx \geq -\varepsilon |\alpha|_1 |u|^p_\infty \\ &\geq -\varepsilon |\alpha|_1 C^p_\infty \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} \geq -\varepsilon |\alpha|_1 C^p_\infty pt. \end{aligned}$$

Mostrando que o conjunto $\{\Phi_1(u); u \in S_t\}$ é limitado inferiormente e que $-\varepsilon|\alpha|_1 C^p_\infty pt$, com $t \in (0, {}^1\!/_p\, ({}^\delta\!/_{C_\infty})]$ é cota inferior do mesmo. Logo,

$$0 \geq \inf_{u \in S_t} \Phi_1(u) \geq -\varepsilon |\alpha|_1 C^p_\infty pt$$

ou ainda,

$$0 \geq \frac{\inf_{u \in S_t} \Phi_1(u)}{t} \geq -\varepsilon |\alpha|_1 C_\infty^p p.$$

Passando ao limite de $t \to 0^+$, obtemos

$$0 \geq \lim_{t \to 0^+} \frac{\inf_{u \in S_t} \Phi_1(u)}{t} \geq -\varepsilon |\alpha|_1 C_\infty^p p.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\inf_{u \in S_t} \Phi_1(u)}{t} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\inf\{\Phi_1(u); u \in W_{rad}^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_{\mathbb{R}^N}^p < pt\}}{t} = 0$$

como queríamos demonstrar.

■

Lema 6.3 *Sejam $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ uma função radialmente simétrica satisfazendo a condição $(\tilde{\alpha})$ e $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz satisfazendo as condições $(\tilde{F}_1) - (\tilde{F}_3)$. Então, podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ fixado, a função*

$$w_n(x) = \begin{cases} 0 & , \ se \ \ x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) \\ \tilde{t} & , \ se \ \ x \in B_{\sigma_n R}(0) \\ \dfrac{\tilde{t}(R - |x|)}{R(1 - \sigma_n)} & , \ se \ \ x \in B_R(0) \setminus B_{\sigma_n R}(0), \end{cases} \tag{6.7}$$

onde $\sigma_n = (1 - {}^1\!/_n)$ e $\tilde{t} \neq 0$ é dado pela condição $(\tilde{F}_3)$, a qual pertence a $W_{rad}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $p > N \geq 2$. Além disso, para $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\Phi_1(w_{n_0}) < 0$.

Demonstração: Pela condição $(\tilde{\alpha})$, podemos fixar $R > 0$ tal que

$$\alpha_R \ = \ ess \inf_{|x| \leq R} \alpha(x) > 0. \tag{6.8}$$

Agora, vamos mostrar que

$$w_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

ou seja, devemos mostrar que $w_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e que a derivada fraca de w_n também pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)|^p dx &= \int_{B_{\sigma_n R}} |\tilde{t}|^p dx + \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \left| \frac{\tilde{t}(R-|x|)}{R(1-\sigma_n)} \right|^p dx \\
&= C_1 + \left| \frac{\tilde{t}}{R(1-\sigma_n)} \right|^p \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} |R-|x||^p dx \\
&\leq C_1 + \left| \frac{\tilde{t}}{R(1-\sigma_n)} \right|^p \left(\int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} 2^p |R|^p dx + \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} 2^p |x|^p dx \right) \\
&\leq C_1 + 2^p R^p |B_R \setminus B_{\sigma_n R}| + 2^p \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} |R|^p dx < +\infty
\end{aligned}$$

mostrando que $w_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Agora mostraremos que a derivada fraca de w_n pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$. Note que, a derivada fraca de w_n, é dada por

$$\frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) \quad ou \quad x \in B_{\sigma_n R}(0) \\ \\ -\dfrac{\tilde{t} x_i}{R(1-\sigma_n)|x|}, & se \quad x \in B_R(0) \setminus B_{\sigma_n R}(0), \end{cases}$$

visto que a fronteira da bola $B_{\sigma_n R}(0)$ (onde a derivada parcial no sentido clássico pode não existir), tem medida nula. Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \right|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \left| \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \right|^p dx + \int_{B_{\sigma_n R}} \left| \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \right|^p dx + \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \left| \frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) \right|^p dx \\
&= \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \left| - \frac{\tilde{t} x_i}{R(1-\sigma_n)|x|} \right|^p dx \\
&= \left| \frac{\tilde{t}}{R(1-\sigma_n)} \right|^p \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \left(\frac{|x_i|}{|x|} \right)^p dx \\
&\leq \left| \frac{\tilde{t}}{R(1-\sigma_n)} \right|^p \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \left(\frac{|x|}{|x|} \right)^p dx \\
&\leq \left| \frac{\tilde{t}}{R(1-\sigma_n)} \right|^p \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} 1 dx < +\infty
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrando que a derivada fraca de w_n pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$. Portanto, a função $w_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Recordemos que $O(N)$ é um grupo (ver Exemplo B.1, Apêndice B) tal que seus elementos são transformações ortogonais logo, para cada $g \in O(N)$, temos $|g^{-1}(x)| = |x|$, ou seja, os elementos do grupo $O(N)$ preservam distância. Desta forma, para cada $g \in O(N)$,

$$gw_n(x) = w_n(g^{-1}(x)) = w_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N e \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

em relação a ação de grupo definida no Exemplo B.2. Mostrando que w_n é radialmente simétrica.

Mostremos agora que $\Phi_1(w_{n_0}) < 0$, para $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para isto, vamos fazer algumas estimativas. Por (6.8), temos que

$$\alpha(x) \geq \alpha_R, \quad q.t.p. \;\; x \in \mathbb{R}^N \quad com \quad |x| \leq R \tag{6.10}$$

Sendo $\alpha \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\alpha\chi_K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, em particular para $K = B_R(0)$, então

$$0 < \alpha(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\alpha(x)\chi_{B_R(0)}(x)| = \sup_{x\in B_R(0)} \alpha(x) < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.11}$$

Além do mais, para $x \in B_R(0) \setminus B_{\sigma_n R}(0)$, temos $-\sigma_n R \geq -|x| \geq -R$, assim,

$$-|\tilde{t}| \leq 0 = \frac{\tilde{t}(R-R)}{R(1-\sigma_n)} \leq \frac{\tilde{t}(R-|x|)}{R(1-\sigma_n)} \leq \frac{\tilde{t}(R-\sigma_n R)}{R(1-\sigma_n)} = \tilde{t} \leq |\tilde{t}|,$$

ou seja,

$$|t| \leq |\tilde{t}|,$$

onde $t = \dfrac{\tilde{t}(R-|x|)}{R(1-\sigma_n)}$. Sendo F contínua, existe $t_0 \in [-|\tilde{t}|, |\tilde{t}|]$, tal que

$$F(t) \leq t_0 = \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)|, \quad \forall x \in B_R(0) \setminus B_{\sigma_n R}(0). \tag{6.12}$$

Agora, por (6.7), temos

$$\begin{aligned} -\Phi_1(w_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)F(w_n(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \alpha(x)F(0)dx + \int_{B_{\sigma_n R}} \alpha(x)F(\tilde{t})dx + \int_{B_R\setminus B_{\sigma_n R}} \alpha(x)F(t)dx \end{aligned}$$

e combinando (6.8), (6.10), (6.11) e (6.12), obtemos

$$\begin{aligned} -\Phi_1(w_n) &\geq \alpha_R F(\tilde{t}) \int_{B_{\sigma_n R}} dx - \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)| \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} \alpha(x) dx \\ &\geq \alpha_R F(\tilde{t}) |B_{\sigma_n R}| - \sup_{x \in B_R(0)} \alpha(x) \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)| \int_{B_R \setminus B_{\sigma_n R}} dx \\ &\geq \alpha_R F(\tilde{t}) |B_{\sigma_n R}| - \sup_{x \in B_R(0)} \alpha(x) \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)| \big(|B_R| - |B_{\sigma_n R}| \big), \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\Phi_1(w_n) \geq \alpha_R F(\tilde{t}) |B_{\sigma_n R}| - \sup_{x \in B_R(0)} \alpha(x) \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)| \big(|B_R| - |B_{\sigma_n R}| \big) \tag{6.13}$$

Afirmação 1: $\lim_{n\to+\infty} |B_{\sigma_n R}(0)| = |B_R(0)|$.

De fato, sabemos que

$$|B_{\sigma_n R}(0)| = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_{\sigma_n R}(0)} dx \quad e \quad |B_R(0)| = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_R(0)} dx.$$

Note que

$$\chi_{B_{\sigma_n R}(0)} \longrightarrow \chi_{B_R(0)}, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

e

$$|\chi_{B_{\sigma_n R}(0)}| \leq \chi_{B_R(0)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_{\sigma_n R}(0)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_R(0)} dx$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} |B_{\sigma_n R}(0)| = |B_R(0)|,$$

mostrando a Afirmação 1.

Pela Afirmação 1, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de sorte que

$$\alpha_R F(\tilde{t}) |B_{\sigma_{n_0} R}| - \sup_{x \in B_R(0)} \alpha(x) \max_{|t|\leq|\tilde{t}|} |F(t)| \big(|B_R| - |B_{\sigma_{n_0} R}| \big) > 0.$$

Desta forma

$$\Phi_1(w_{n_0}) < 0,$$

como queríamos demonstrar.

■

6.3 Verificação da Condição de Palais-Smale

Neste momento mostraremos que o funcional energia associado ao problema (6.1) verifica a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Defina a função

$$\nu(t) = \inf\left\{\Phi_1(u); u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} < t\right\}.$$

Pela Proposição 6.1, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\nu(t)}{t} = 0. \tag{6.14}$$

Consideremos a função $u_0 := w_{n_0} \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ dada no Lema 6.3, assim $\Phi_1(u_0) < 0$. Logo,

$$-\frac{p\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}} > 0, \quad \text{com} \quad p > 2.$$

Fixe $\eta > 0$, verificando

$$0 < \eta < -\frac{p\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}}. \tag{6.15}$$

Por (6.14), e pela definição de limite, existe $\delta = \delta(\eta) > 0$, tal que

$$-\eta < \frac{\nu(t)}{t} < \eta, \quad \forall t \in (0, \delta).$$

Daí, existe $t_0 \in \left(0, {}^1\!/\!{}_p\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}\right)$ tal que $\nu(t_0) > -\eta t_0$. Segue de (6.15), que

$$\nu(t_0) > -\eta t_0 > \frac{p\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}} t_0. \tag{6.16}$$

Assim, por (6.16) e recordando que $-\dfrac{p\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}} > 0$, existe $\rho_0 > 0$, tal que

$$-\nu(t_0) < \rho_0 < -\frac{p\Phi_1(u_0)}{\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}} t_0 < -\Phi_1(u_0), \tag{6.17}$$

ou ainda,

$$-\nu(t_0) < \rho_0 < -\Phi_1(u_0). \tag{6.18}$$

Agora, definamos o funcional

$$\begin{array}{rcl} \varphi \;:\; W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,\lambda) & \longmapsto & \varphi(u,\lambda) = \dfrac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) + \lambda\rho_0, \end{array}$$

onde $J = [0, +\infty)$.

Lema 6.4 *O funcional* $\varphi(.,\lambda)$ *é limitado inferiormente para cada* $\lambda \in J$.

Demonstração: De fato, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos por $(\tilde{F}_1) - (\tilde{F}_3)$ temos

$$F(t) < \varepsilon |t|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Daí, usando Hölder, temos

$$\begin{aligned} \varphi(u,\lambda) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) F(u(x))dx + \lambda\rho_0 \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)|u(x)|^p dx + \lambda\rho_0 \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\varepsilon|\alpha|_1|u|^p_\infty + \lambda\rho_0 \end{aligned}$$

e pelo Teorema de Morrey,

$$\varphi(u,\lambda) \;\geq\; \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - C_\infty\lambda\varepsilon|\alpha|_1\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\rho_0. \tag{6.19}$$

Defina a função

$$q(t) = \frac{t^p}{p} - \varepsilon C t^p + \lambda\rho_0 = t^p\left(\frac{1}{p} - C\varepsilon\right) + \lambda\rho_0,$$

onde $C = C_\infty\lambda|\alpha|_1$ e $t \in (0, +\infty)$. Observe que

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = +\infty,$$

para $p > 2$ e $\varepsilon > 0$ escolhido de tal forma que $\dfrac{1}{p} - C\varepsilon > 0$. Logo, existem $K, M > 0$ tais que

$$q(t) > M, \quad \forall t > K.$$

Note que $q \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, donde existe $t_1 \in [0, K]$ tal que

$$q(t_1) = \min\{q(t); t \in [0, K]\}.$$

Assim,

$$q(t) \geq \min\{M, q(t_1)\} := K_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{6.20}$$

De (6.19) e (6.20),

$$\varphi(u, \lambda) \geq K_0, \quad \forall u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que $\varphi(., \lambda)$ é limitado inferiormente.

∎

Lema 6.5 *O funcional φ verifica a desigualdade*

$$\sup_{\lambda \in J} \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \varphi(u, \lambda) < \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \sup_{\lambda \in J} \varphi(u, \lambda).$$

Demonstração: Seja a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \lambda & \longmapsto & f(\lambda) = \displaystyle\inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \left\{ \frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right\}, \end{array}$$

que está bem definida, devido ao Lema 6.4. Afirmamos que f é semicontínua superiormente. Com efeito, seja $(\lambda_n) \subset J$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0 \in J$. Dado $u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda_n(\rho_0 + \Phi_1(u)) \geq \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \left\{ \frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda_n(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right\} = f(\lambda_n).$$

Daí,

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda_0} f(\lambda_n) \leq \frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda_0(\rho_0 + \Phi_1(u)). \quad \forall u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Consequentemente

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda_0} f(\lambda_n) \leq \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \left\{ \frac{1}{p} \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda_0(\rho_0 + \Phi_1(u)) \right\} = f(\lambda_0),$$

mostrando que f é semicontínua superiormente.

Note que

$$\inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \varphi(u, \lambda) \leq \varphi(u_0, \lambda) = \frac{1}{p} \|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda(\rho_0 + \Phi_1(u_0)),$$

implicando que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\varphi(u,\lambda)\right)\leq \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}+\lambda(\rho_0+\Phi_1(u_0))\right)=-\infty, \qquad (6.21)$$

visto que, por (6.18), temos $(\rho_0+\Phi_1(u_0))<0$. Segue do Lema C.12 que existe $\overline{\lambda}\in J$ tal que

$$\sup_{\lambda\in J}\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\varphi(u,\lambda)=\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\varphi(u,\overline{\lambda}). \qquad (6.22)$$

Afirmação 1: $\displaystyle\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\sup_{\lambda\in J}\varphi(u,\lambda)=\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N};-\Phi_1(u)\geq\rho_0\right\}.$

Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\sup_{\lambda\in J}\varphi(u,\lambda) &= \inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left(\sup_{\lambda\in J}\left[\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\lambda(\rho_0+\Phi_1(u))\right]\right)\\ &= \inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left(\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\sup_{\lambda\in J}\big(\lambda\rho_0+\lambda\Phi_1(u)\big)\right). \qquad (6.23)\end{aligned}$$

Vejamos agora, os seguintes casos:

Caso 1: $\rho_0+\Phi_1(u)>0$.

Neste caso,

$$\sup_{\lambda\in J}(\rho_0+\Phi_1(u))=+\infty.$$

Caso 2: $\rho_0+\Phi_1(u)\leq 0$.

Para este caso,

$$\sup_{\lambda\in J}(\lambda(\rho_0+\Phi_1(u))=0.$$

Dos Casos 1 e 2, conclui-se que

$$\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left(\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\sup_{\lambda\in J}\big(\lambda\rho_0+\lambda\Phi_1(u)\big)\right)=\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N};-\Phi_1(u)\geq\rho_0\right\}.$$

Daí, segue de (6.23) que

$$\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\sup_{\lambda\in J}\varphi(u,\lambda)=\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N};-\Phi_1(u)\geq\rho_0\right\},$$

mostrando a Afirmação 1.

Afirmação 2: $t_0 \leq \inf\left\{\dfrac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}; u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), -\Phi_1(u) \geq \rho_0\right\}$.

De (6.18), para cada $u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com $\dfrac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} < t_0$, tem-se que

$$-\Phi_1(u) \leq -\inf\left\{\Phi_1(u); u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} < t_0\right\} = -\nu(t_0) < \rho_0.$$

Sendo assim, se $-\Phi_1(u) \geq \rho_0$,

$$t_0 \leq \inf\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}; u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), -\Phi_1(u) \geq \rho_0\right\}, \tag{6.24}$$

mostrando a Afirmação2.

Das Afirmações 1 e 2, conclui-se que

$$\inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \sup_{\lambda \in J} \varphi(u,\lambda) \geq t_0. \tag{6.25}$$

Vamos agora, considerar dois casos:

Caso I: $\overline{\lambda} \in [0, {}^{t_0}/_{\rho_0})$.
Para este caso,

$$\inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \left[\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \overline{\lambda}(\rho_0 + \Phi_1(u))\right] \leq \varphi(0,\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}\rho_0 < t_0,$$

donde segue-se, de (6.22) e (6.25), que

$$\sup_{\lambda \in J} \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \varphi(u,\lambda) < \inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \sup_{\lambda \in J} \varphi(u,\lambda).$$

Caso II: $\overline{\lambda} \in [{}^{t_0}/_{\rho_0}, +\infty)$.
De (6.16) e (6.18),

$$\begin{aligned}\inf_{u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)} \left[\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \overline{\lambda}\big(\rho_0 + \Phi_1(u)\big)\right] &\leq \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N} + \overline{\lambda}\big(\rho_0 + \Phi_1(u_0)\big) \\ &< \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N} + t_0 + \frac{\Phi_1(u_0)}{\rho_0}t_0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

implicando de (6.17) que

$$\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\left[\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\overline{\lambda}\big(\rho_0+\Phi_1(u)\big)\right] \;<\; \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}+t_0-\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{\mathbb{R}^N}=t_0$$

Desta forma, temos de (6.22) e (6.25)

$$\sup_{\lambda\in J}\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\varphi(u,\lambda)<\inf_{u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)}\sup_{\lambda\in J}\varphi(u,\lambda).$$

Dos Casos I e II, conclui-se a demonstração. ■

Lema 6.6 *Sejam* $\tau\geq 0$, $\lambda\in J$, $\mu\in[0,\lambda+1]$, $c\in\mathbb{R}$ *e* $g\in\mathcal{C}_\tau$. *Então, o funcional*

$$E_{\lambda,\mu}(u)=\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\lambda\Phi_1(u)+\mu\big(g\circ\Phi_2\big)(u),\quad \forall u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$$

é coercivo em $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: De $(\tilde{F}_2)$, dado $\varepsilon>0$, existe $K>0$ tal que

$$\frac{F(t)}{|t|^p}<\varepsilon,\quad \forall t\in\mathbb{R}\ \text{ com }\ |t|>K,$$

ou ainda,

$$F(t)<\varepsilon|t|^p,\quad \forall t\in\mathbb{R}\ \text{ com }\ |t|>K,$$

donde

$$-F(t)>-\varepsilon|t|^p,\quad \forall t\in\mathbb{R}\ \text{ com }\ |t|>K. \tag{6.27}$$

Consequentemente, sendo F contínua, para cada $u\in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}+\lambda\Phi_1(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\alpha(x)F(u(x))dx\\
&= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}-\lambda\int_{[|u(x)|>K]}\alpha(x)F(u(x))dx\\
&\quad -\lambda\int_{[|u(x)|\leq K]}\alpha(x)F(u(x))dx\\
&> \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N}-\lambda\int_{[|u(x)|>K]}\alpha(x)\varepsilon|u(x)|^p dx\\
&\quad -\lambda\max_{|t|\leq K}|F(t)|\int_{[|u(x)|\leq K]}\alpha(x)dx
\end{aligned}$$

logo, por Hölder e pelo Teorema de Morrey,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) &> \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\varepsilon|\alpha|_1|u|^p_\infty - \lambda \max_{|t|\leq K}|F(t)||\alpha|_1 \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\varepsilon|\alpha|_1 C^p_\infty\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda \max_{|t|\leq K}|F(t)||\alpha|_1 \\
&= \left(\frac{1}{p} - \lambda\varepsilon|\alpha|_1 C^p_\infty\right)\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda \max_{|t|\leq K}|F(t)||\alpha|_1.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos supor $\varepsilon > 0$ de forma que $\left(\frac{1}{p} - \varepsilon\lambda|\alpha|_1 C^p_\infty\right) > 0$, assim

$$\frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad \|u\|^p_{\mathbb{R}^N} \to +\infty.$$

Recordando que $g \in \mathcal{C}_\tau$ é limitado, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
E_{\lambda,\mu}(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) + \mu\big(g(\Phi_2(u))\big) \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) - \mu K_1 \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_{\mathbb{R}^N} \to +\infty.
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

■

Lema 6.7 *Se* (u_n) *é tal que*

$$\lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_n) \to 0,$$

então existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset (0, +\infty)$ *com* $\varepsilon_n \to 0$ *verificando*

$$E^0_{\lambda,\mu}(u_n; v - u_n) + \varepsilon_n\|v - u_n\|_{\mathbb{R}^N} \geq 0, \quad \forall v \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Com efeito, seja $\xi^n_0 \in \partial E_{\lambda,\mu}(u_n)$ tal que

$$\lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_n) = \|\xi^n_0\|_* = \min\{\|\xi^n\|_*; \xi^n \in \partial E_{\lambda,\mu}(u_n)\} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.28}$$

Por definição, dado $\xi \in \partial E_{\lambda,\mu}(u_n)$

$$E^0_{\lambda,\mu}(u_n; v - u_n) \geq \langle \xi, v - u_n \rangle, \quad \forall v \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N). \tag{6.29}$$

Por (6.28), existe $\xi^n \in \partial E_{\lambda,\mu}(u_n)$ tal que

$$\|\xi^n\|_* \leq \|\xi_0^n\|_* + \frac{1}{n}, \tag{6.30}$$

logo, por (6.29) e (6.30), temos

$$\begin{aligned} E^0_{\lambda,\mu}(u_n; v - u_n) &\geq -|\langle \xi^n, v - u_n\rangle| \\ &\geq -\|\xi^n\|_* \|v - u_n\|_{\mathbb{R}^N} \\ &\geq -\left(\|\xi_0^n\|_* + \frac{1}{n}\right)\|v - u_n\|_{\mathbb{R}^N}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E^0_{\lambda,\mu}(u_n; v - u_n) + \varepsilon_n \|v - u_n\|_{\mathbb{R}^n} \geq 0, \quad \forall v \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\varepsilon_n = \big(\|\xi_0^n\|_* + {}^1\!/\!_n\big) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, como queríamos demonstrar.

■

Lema 6.8 *Sejam* $\tau \geq 0$, $\lambda \in J$, $\mu \in [0, \lambda + 1]$, $c \in \mathbb{R}$ *e* $g \in \mathcal{C}_\tau$. *Então, o funcional*

$$E_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) + \mu\big(g \circ \Phi_2\big)(u), \quad \forall u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$$

satisfaz a condição $(PS)_c$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$E_{\lambda,\mu}(u_n) \to c \;\; e \;\; \lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_n) \to 0. \tag{6.31}$$

Pelo Lema 6.6 e (6.31), tem-se que (u_n) é limitada. Desta forma, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ (ver Lema B.1, Apêndice B), tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Segue do Teorema B.2, que $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \underset{comp.}{\hookrightarrow} L^\infty(\mathbb{R}^N)$, assim

$$u_{n_k} \to u, \quad \text{em} \quad L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Sendo $\lambda_{E_{\lambda,\mu}}(u_{n_k}) \to 0$, segue-se do Lema 6.7 que existe $(\varepsilon_{n_k}) \subset (0, +\infty)$ com $\varepsilon_{n_k} \to 0$

verificando

$$E^0_{\lambda,\mu}(u_{n_k}; v - u_{n_k}) \geq -\varepsilon_{n_k}\|v - u_{n_k}\|_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall v \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N). \tag{6.32}$$

Utilizando a Proposição 1.1, veja que

$$\begin{aligned} E^0_{\lambda,\mu}(u;v) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\big)dx + \big(\lambda\Phi_1 + \mu(g\circ\Phi_2)\big)^0(u;v) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv\big)dx + \lambda\Phi_1^0(u;v) + \mu(g\circ\Phi_2)^0(u;v), \end{aligned} \tag{6.33}$$

para cada $v \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, para os pares $(u,v) = (u_{n_k}, u - u_{n_k})$ e $(u,v) = (u, u_{n_k} - u)$, obtemos

$$A_{n_k} \leq -E^0_{\lambda,\mu}(u_{n_k}; u - u_{n_k}) + \lambda\Phi_1^0(u_{n_k}; u - u_{n_k}) + \mu(g\circ\Phi_2)^0(u_{n_k}; u - u_{n_k})$$

e

$$B_{n_k} \leq -E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k} - u) + \lambda\Phi_1^0(u; u_{n_k} - u) + \mu(g\circ\Phi_2)^0(u; u_{n_k} - u),$$

onde

$$A_{n_k} = -\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u - u_{n_k}) + |u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k}(u - u_{n_k})\big)dx$$

e

$$B_{n_k} = -\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_{n_k} - u) + |u|^{p-2}u(u_{n_k} - u)\big)dx.$$

Fazendo $v = u$ em (6.32), segue que

$$\begin{aligned} I_{n_k} \leq\ & \varepsilon_{n_k}\|u - u_{n_k}\|_{\mathbb{R}^N} - E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k} - u) + \lambda\big[\Phi_1^0(u_{n_k}; u - u_{n_k}) + \Phi_1^0(u; u_{n_k} - u)\big] \\ & + \mu\big[(g\circ\Phi_2)^0(u_{n_k}; u - u_{n_k}) + (g\circ\Phi_2)^0(u; u_{n_k} - u)\big] \end{aligned} \tag{6.34}$$

onde

$$\begin{aligned} I_{n_k} := & \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u) + |u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k}(u_{n_k} - u)\big)dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_{n_k} - u) + |u|^{p-2}u(u_{n_k} - u)\big)dx \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} I_{n_k} := & \int_{\mathbb{R}^N} \big(\big(|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\nabla(u_{n_k} - u)\big)dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \big(|u_{n_k}|^{p-2}u_{n_k} - |u|^{p-2}u\big)(u_{n_k} - u)dx. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_{n_k} \to 0$,

$$\lim_{n_k\to+\infty} \varepsilon_{n_k}\|u-u_{n_k}\|_{\mathbb{R}^N} = 0. \tag{6.35}$$

Fixando $\xi^* \in \partial E_{\lambda,\mu}(u)$ arbitrário, temos

$$\langle \xi^*, u_{n_k}-u\rangle \leq E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k}-u).$$

Desde que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$,

$$\liminf_{n_k\to+\infty} E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k}-u) \geq \liminf_{n_k\to+\infty}\langle \xi^*, u_{n_k}-u\rangle = 0,$$

logo,

$$-\liminf_{n_k\to+\infty} E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k}-u) \leq 0,$$

ou seja,

$$\limsup_{n_k\to+\infty}\big(-E^0_{\lambda,\mu}(u; u_{n_k}-u)\big) \leq 0. \tag{6.36}$$

Tendo em vista que Φ_1^0 e $(g\circ\Phi_2)^0$ funcionais são semicontínuos superiormente e $u_{n_k} \to u$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

- $\limsup\limits_{n_k\to+\infty} \Phi_1^0(u_{n_k}; u-u_{n_k}) \leq \Phi_1^0(u;0) = 0$;
- $\limsup\limits_{n_k\to+\infty} \Phi_1^0(u; u_{n_k}-u) \leq \Phi_1^0(u;0) = 0$;
- $\limsup\limits_{n_k\to+\infty} (g\circ\Phi_2)^0(u_{n_k}; u-u_{n_k}) \leq (g\circ\Phi_2)^0(u;0) = 0$;
- $\limsup\limits_{n_k\to+\infty} (g\circ\Phi_2)^0(u; u_{n_k}-u) \leq (g\circ\Phi_2)^0(u;0) = 0$.

Daí, segue de (6.34) que

$$\limsup_{n_k\to+\infty} I_{n_k} \leq 0. \tag{6.37}$$

Sendo $p>2$, existe $C_p>0$ (ver o Lema C.13, Apêndice C), tal que

$$\big(|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y\big).(x-y) \geq C_p|x-y|^p,$$

para todos $x,y\in\mathbb{R}^N$, logo,

$$C_p|\nabla u_{n_k}(x)-\nabla u(x)|^p \leq \big(|\nabla u_{n_k}(x)|^{p-2}\nabla u_{n_k}(x)-|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\big).(\nabla u_{n_k}(x)-\nabla u(x))$$

e

$$C_p|u_{n_k}(x)-u(x)|^p \leq \big(|u_{n_k}(x)|^{p-2}u_{n_k}(x)-|u(x)|^{p-2}u(x)\big).(u_{n_k}(x)-u(x)),$$

e assim,

$$C_p\|u_{n_k}-u\|^p_{\mathbb{R}^N} = C_p\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u_{n_k}(x)-\nabla u(x)|^p+|u_{n_k}(x)-u(x)|^p\Big)dx \leq I_{n_k}. \quad (6.38)$$

Portanto, por (6.37) e (6.38),

$$C^p \limsup_{n_k\to+\infty}\|u_{n_k}-u\|^p_{\mathbb{R}^N}\leq 0$$

implicando que

$$\limsup_{n_k\to+\infty}\|u_{n_k}-u\|_{\mathbb{R}^N}\leq 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n_k\to+\infty}\|u_{n_k}-u\|_{\mathbb{R}^N}=0,$$

mostrando que o funcional $E_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c\in\mathbb{R}$, $\lambda\in J$, $\mu\in[0,|\lambda|+1]$ e $g\in\mathcal{C}_\tau$, $\tau\geq 0$.

■

6.4 Existência de Soluções

Nesse momento, enunciaremos e demonstraremos o resultado que nos garantirá o objetivo deste capítulo.

Teorema 6.9 *Supondo que $p>N\geq 2$. Sejam $\alpha\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$,$\beta\in L^1(\mathbb{R}^N)$ funções radialmente simétricas, com α satisfazendo a condição $(\tilde{\alpha})$ e $F,G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funcionais localmente Lipschitz, com F satisfazendo as condições $(\tilde{F}_1)-(\tilde{F}_3)$. Então, existem um intervalo não degenerado $[a,b]\subset[0,+\infty)$ e um número $\tilde{r}>0$, tais que para cada $\lambda\in[a,b]$ existe $\mu_0\in(0,\lambda+1]$, tal que para cada $\mu\in[0,\mu_0]$ o problema (6.1) possui pelo menos três soluções distintas, radialmente simétricas tais que a norma em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é menor que $\tilde{r}$.*

Demonstração: Sejam $\tau\geq 0$, $\lambda\in J$, $\mu\in[0,\lambda+1]$, $c\in\mathbb{R}$ e $g\in\mathcal{C}_\tau$. Observe que os Lemas 6.5, 6.6 e 6.8 nos garantem as hipóteses do Teorema 4.5 para:

- $X=W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$;
- $X_i=L^\infty(\mathbb{R}^N)\;\; i=1,2;$
- $J=[0,+\infty);$
- $h(t)={}^{t^p}\!/_p,\quad t\geq 0.$

Logo, existe $[a, b] \subset [0, +\infty)$ e $r > 0$, tais que dado $\lambda \in [a, b]$, existe $\mu_0 \in (0, \lambda + 1]$ tal que para cada $\mu \in [0, \mu_0]$, o funcional

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{\mathbb{R}^N}^p + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u)$$

possui pelo menos três pontos críticos distintos com a norma em $W_{rad}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ menor que r. Sejam eles $u_1, u_2, u_3 \in W_{rad}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|u_j\|_{\mathbb{R}^N} < r$ com $j = 1, 2, 3$. Pela imersão compacta $W_{rad}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$C_\infty |u_j|_\infty \leq \|u_j\|_{\mathbb{R}^N} < r, \quad \text{com} \quad j = 1, 2, 3,$$

logo,

$$|u_j|_\infty < \frac{r}{C_\infty} =: \tilde{r}, \quad \text{com} \quad j = 1, 2, 3.$$

Pelos Lema 6.1 e o Corolário 6.1, temos que u_1, u_2 e u_3 são soluções do problema (6.1), como queríamos mostrar.

■

Apêndice A

Teorias sobre Análise Funcional, Medida e Integração e Espaços de Sobolev

A.1 Teoria de Análise Funcional

Aqui, apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional que foram utilizados ao longo desta dissertação, para maiores detalhes ver [5].

Considere $B(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y.

Definição A.1 *Um espaço vetorial $(X, \|.\|)$ é dito ser de Banach quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

Definição A.2 *Um espaço vetorial é dito separável se existe $M \subset X$ enumerável e denso em X, isto é, $\overline{M} = X$.*

Teorema A.1 (Hahn-Banach, Forma analítica) *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo*

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X$;

(ii) $p(\lambda x) = \lambda(p(x)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$

Se $G \subset X$ é um subespaço X e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear que verifica

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G,$$

existe um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *verificando*

(1) $f(x) = g(x), \quad \forall x \in G$;

(2) $f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X$.

Corolário A.1 *Seja* X *um espaço vetorial normado e* $x \in X$. *Então,*

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_*=1} \langle f, x \rangle = \max\{\langle f, x \rangle; f \in X^*; \|f\|_* = 1\}.$$

Definição A.3 *Um hiperplano é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional linear não identicamente nulo. Diremos, neste caso, que o hiperplano* H *tem equação* $[f = \alpha]$.

Definição A.4 *Sejam* $A, B \subset X$. *Dizemos que um hiperplano* H *de equação* $[f = \alpha]$ *separa os conjuntos* A *e* B *no sentido forte se:*

$$f(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in B.$$

Diremos que a separação é estrita se existe $\varepsilon > 0$, *tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \forall x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \quad \forall x \in B.$$

Teorema A.2 (Hahn-Banach, Primeira Forma Geométrica) *Sejam* $A, B \subset X$, *dois conexos, não vazios e disjuntos. Se* A *é um aberto, existe um hiperplano fechado que separa* A *e* B *no sentido forte.*

Teorema A.3 (Hahn-Banach, Segunda Forma Geométrica) *Sejam* $A, B \subset X$ *convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que* A *é fechado e* B *é compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa no sentido estrito os conjuntos* A *e* B.

Teorema A.4 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto*

$$B_* = \{f \in X^*; \|f\| \leq 1\}$$

é compacto pela topologia $fraca^*$.

Teorema A.5 (Kakutani) *Seja* X *um espaço de Banach. Então,* X *é reflexivo se, e somente se,*

$$B_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca.

Teorema A.6 *Seja X um espaço de Banach separável. Então, $B_1 \subset X^*$ é metrizável pela topologia $fraca^*$. Reciprocamente, se $B_1 \subset X^*$ é metrizável na topologia $fraca^*$, temos que X é separável.*

Teorema A.7 *Seja X um espaço de Banach com X^* separável. Então, $B_1 \subset X$ é metrizável na topologia fraca de X. Além disso, a recíproca também é verdadeira.*

Teorema A.8 *Seja (f_n) uma sequência de X^*. Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então*

$$\|f\|_* \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$

A.2 Teoria de Medida e Integração

Nesta seção enunciaremos os principais teoremas da teoria de Medida e Integração utilizados nas demonstração durante todo nosso trabalho, para maiores detalhes ver [4] e [26]. No que segue-se temos as seguintes notações:

- X é um conjunto mensurável;
- μ é uma medida em X;
- M^+ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas em X.

Lema A.9 (Fatou) *Se f_n pertence a M^+, então*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Corolário A.2 *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n \leq g$ q.t.p. em X, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde g é mensurável. Então,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu.$$

Teorema A.10 *Se $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, para $n = 1, 2, \ldots$ e*

$$h = \limsup_{n\to\infty} f_n,$$

então h é mensurável.

Teorema A.11 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.12 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int |fg| d\mu \leq |f|_p |g|_q.$$

Teorema A.13 (Representação de Riesz) *Seja $G : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, $1 < p < +\infty$. Então, existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $q = \frac{p}{p-1}$, tal que*

$$\langle G, f \rangle = \int_\Omega fg d\mu, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $|G|_p = |g|_q$.

Teorema A.14 *Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \rightarrow f \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que

(i) $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

A.3 Espaços de Sobolev

Mostraremos aqui neste apêndice alguns teoremas utilizados durante esta dissertação, envolvendo Espaços de Sobolev, para maiores detalhes veja [1], [5] e [13]. No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição A.5 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido da seguinte forma:*

$$W^{1,p}(\Omega)=\Big\{u\in L^p(\Omega)\quad;\quad \exists g_1,...g_N\in L^p(\Omega)\ \text{tais que}$$
$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\int_\Omega g_i\varphi,\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\forall i\in\{1,...,N\}\Big\}$$

Observação A.1 *Denotamos $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,2}(\Omega)$.*

Observação A.2 *Em $W^{1,p}(\Omega)$ temos a seguinte norma*

$$||u||=\Big(\int_\Omega|\nabla u|^pdx+\int_\Omega|u|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

com a qual temos a seguinte proposição.

Proposição A.1 *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável, quando $1<p<+\infty$.*

Teorema A.15 *Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo aberto e $u\in W^{1,p}(I)$. Então existe $\widehat{u}\in C(I)$ tal que*

$$u=\widehat{u},\ \text{q.t.p. em } I$$

e

$$\widehat{u}(x)-\widehat{u}(y)=\int_y^x u'(t)dt,\ \forall x,y\in\overline{I}.$$

Teorema A.16 *Sejam $m\geq 1$ um inteiro e $1\leq p<+\infty$. Então:*

- *se $\frac{1}{p}-\frac{m}{N}>0$ temos $W^{m,p}(\Omega)\underset{cont}{\hookrightarrow}L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{N}$;*
- *se $\frac{1}{p}-\frac{m}{N}=0$ temos $W^{m,p}(\Omega)\underset{cont}{\hookrightarrow}L^q(\Omega)$, $\forall q\in[p,+\infty)$;*
- *se $\frac{1}{p}-\frac{m}{N}<0$ temos $W^{m,p}(\Omega)\underset{cont}{\hookrightarrow}L^\infty(\Omega)$,*

onde Ω é limitado.

Teorema A.17 *Suponha $p>N$. Então*

$$W^{2,p}(\Omega)\underset{cont}{\hookrightarrow}C^{1,\mu}(\overline{\Omega}),\ \mu\in\left(0,1-\frac{N}{p}\right).$$

Teorema A.18 *Suponha* $m > j + \dfrac{N}{p}$. *Então* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} C^j(\overline{\Omega})$.

Teorema A.19 (Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave, se* $1 \leq p \leq \infty$ *as seguintes imersões são compactas*

(i) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$, *se* $p < N$;

(ii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty)$, *se* $p = N$;

(iii) $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *compactamente para todo* p *e* N.

Teorema A.20 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *com* $N \geq 3$, *um domínio limitado com fronteira suave. Então, a imersão*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega),$$

é contínua para $q \in [1, \overline{2}^*]$ *e é compacta para* $q \in [1, \overline{2}^*)$.

Teorema A.21 (Morrey) *Seja* $p > N$. *Então,* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \underset{cont.}{\hookrightarrow} L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observação A.3 *Da imersão no Teorema A.21, temos que* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *com* $N < p < \infty$, *então*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

De fato, existe $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema de Morrey, temos

$$|u_n - u|_\infty \leq C_\infty \|u_n - u\|_{\mathbb{R}^N},$$

logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \text{ para } \ n \geq n_0,$$

ou seja, u é o limite uniforme de (u_n). Assim, temos

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0,$$

visto que (u_n) tem suporte compacto.

Apêndice B

Grupos, Ações de Grupo, Simetria e Compacidade

B.1 Grupos

Definição B.1 *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação sobre G. Dizemos que G munido com esta operação é um grupo, quando forem satisfeitas as seguintes propriedades:*

(i) A operação $*$ é associativa, ou seja,

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro para a operação $*$, isto é,

$$\exists \; e \in G, \quad \textit{tal que} \;\; e * a = a * e = a, \quad \forall a \in G.$$

(iii) Todo elemento em G possui inverso, ou seja,

$$\forall \; a \in G, \exists \; a' \in G \;\; \textit{tal que} \;\; a * a' = a' * a = e.$$

Observação B.1 *Se o grupo $(G, *)$, ou simplesmente G, satisfaz ainda a propriedade*

$$\textit{(iv)} \; a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G,$$

dizemos que G é um grupo abeliano ou comutativo.

Definição B.2 *Dizemos que um grupo $(G,*)$ é um grupo topológico, quando G é munido de uma topologia, de modo que*

$$\begin{array}{rlll} *: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & a*b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rlll} h: & G & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

sejam contínuas.

Definição B.3 *Dizemos que um grupo $(G,*)$, é um grupo de Lie, quando as aplicações*

$$\begin{array}{rlll} *: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & a*b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rlll} h: & G & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Definição B.4 *Uma transformação $g : V \longrightarrow V$, onde V é um espaço vetorial munido com um produto interno, é dita ortogonal quando*

$$g\circ g^* = I_d = g^*\circ g,$$

onde g^* é a transformação adjunta de g.

Exemplo B.1 *O conjunto*

$$O(N) = \{g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N ; g \text{ é uma transformação ortogonal}\}$$

munido da operação composição e com a norma das transformações lineares, é um grupo de Lie, chamado de grupo ortogonal.

De fato, dados $f, g, h \in O(N)$, temos

$$g\circ(f\circ h) = (g\circ f)\circ h. \tag{B.1}$$

Além disso, a transformação identidade $I_d : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é ortogonal, ou seja, $I_d \in O(N)$, e temos

$$g\circ I_d = I_d\circ g = g, \quad \forall g\in G. \tag{B.2}$$

Por fim, sabendo que $g \in O(N)$ é ortogonal, temos que $g\circ g^* = g^*\circ g = I_d$, isto é, $g^* = g^{-1}$, onde g^* é a transformação adjunta que também é ortogonal. Visto que, $(g^*)^* = g$, ou seja, $(g^{-1})^* = g$, temos

$$\forall g\in O(N), \quad \exists\ g^{-1} = g^* \quad \in O(N) \quad \text{tal que} \quad g\circ g^{-1} = g^{-1}\circ g = I_d. \tag{B.3}$$

Por (B.1), (B.2) e (B.3), temos que $O(N)$ é um grupo.

Agora, vamos tratar o grupo $O(N)$ como sendo o grupo das matrizes ortogonais, visto que existe uma isomorfismo entre tais grupos. Observando que as transformações:

$$\begin{array}{rll} M: & O(N)\times O(N) & \longrightarrow O(N) \\ & (A,B) & \longmapsto M(A,B)=AB \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rll} Inv: & O(N) & \longrightarrow O(N) \\ & A & \longmapsto Inv(A)=A^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis, conclui-se que $O(N)$ é um grupo de Lie.

Para a próxima definição e observação, ainda vamos tratar o grupo $O(N)$ como sendo o grupo das matrizes ortogonais.

Definição B.5 *Um grupo de Lie, $G \subset O(N)$, é dito compacto sempre que este verificar as seguintes condições:*

(i) Se (A_m) é qualquer sequência de matrizes em G, e (A_m) converge para uma matriz A, então $A \in G$;

(ii) Existe uma constante C tal que para todo $A \in G$, $|a_{ij}| \leq C$ para todo $1 \leq i,j \leq N$.

Observação B.2 *O grupo $O(N)$ é um grupo de Lie compacto. De fato, a condição (i) é satisfeita porque o limite de matrizes ortogonais é ortogonal e o limite de matrizes com determinante um é uma matriz com determinante um. A segunda condição é satisfeita porque se A é ortogonal, então os vetores colunas de A têm norma um, e portanto, $|a_{kl}| \leq 1$, para todo $1 \leq k,l \leq N$.*

B.2 Ação de Grupo

Definição B.6 *Sejam G um grupo topológico e H um espaço vetorial normado. Definimos uma ação de G em H como sendo uma aplicação*

$$\begin{array}{rll} \rho: & G\times H & \longrightarrow H \\ & (g,x) & \longrightarrow \rho(g,x)=gx \end{array}$$

Satisfazendo as seguintes condições:

(i) $(gh)x = g(hx)$, $\forall\ x \in H$ e $g,h \in G$

(ii) $e.x = x$, $\forall x \in H$

Observação B.3 *Quando tivermos*

$$\|gx\| = \|x\|, \ \forall x \in H,$$

a ação é dita **isométrica**.

Exemplo B.2 *Sejam $O(N)$ o grupo ortogonal e $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & O(N) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ & (g,u) & \longmapsto & \rho(g,u) = gu \end{array}$$

onde $gu(x) = u(g^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^N$, é uma ação de $O(N)$ sobre $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, primeiramente observe que $gu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Agora dados $g, h \in O(N)$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} g(hu)(x) &= (hu)(g^{-1}(x)) = u(h^{-1}(g^{-1}x)) \\ &= u((gh)^{-1}x) \\ &= (gh)u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

mostrando que $g(hu) = (gh)u$. Além disso, sendo $I_d \in O(N)$ a transformação identidade

$$(I_d u)x = u(I_d^{-1}x) = u(I_d x) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

mostrando que ρ é uma ação de grupo.

Ademais, mostraremos que tal aplicação é isométrica. Com efeito, seja $g \in O(N)$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, observando que $g\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ temos por uma mudança de variável, que

$$\begin{aligned} \|gu\|^p_{\mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla gu|^p + |gu|^p)dx = \int_{g\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p)dz = \|u\|_{\mathbb{R}^N} \end{aligned}$$

mostrando que $\|gu\|_{\mathbb{R}^N} = \|u\|_{\mathbb{R}^N} \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, isto é, a aplicação é isométrica.

B.3 Simetria e Compacidade

Vamos agora mostrar um resultado de imersão compacta, que foi crucial em nossa segunda aplicação. Fixe $p > N \geq 2$. Dados $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, definamos

$$m(y,r) = \max \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \ ; \ \exists g_i \in O(N), \quad com \quad i = 1, ..., n, \quad \text{tais que} \\ B_r(g_j y) \cap B_r(g_k y) = \varnothing \quad quando \quad j \neq k. \end{array} \right\}$$

Note que

$$\lim_{|y| \to \infty} m(y,r) = +\infty$$

para algum $r > 0$ fixado, neste caso diremos que $\mathbb{R}^N$ é **compatível** com $O(N)$.

Definição B.7 *Seja G um subgrupo de $O(N)$ e seja X um espaço normado. Diremos que $u \in X$ é radialmente simétrica com relação ao grupo G, quando*

$$gu = u, \quad \forall g \in G.$$

Observação B.4 *Denotaremos por X_{rad} o conjunto dos elementos $u \in X$ radialmente simétricos.*

Definição B.8 *Seja um subgrupo G de $O(N)$. Diremos que um funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é G-invariante, quando*

$$f(gu) = f(u),$$

para cada $g \in G$ e $u \in X$.

Exemplo B.3 *Sejam $\alpha, \beta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétricas. Então, o funcional*

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} + \lambda\Phi_1(u) + \mu\Phi_2(u),$$

dado em (6.4), é $O(N)$-invariante com relação a ação de grupo definida no Exemplo B.2.

De fato, seja $g \in O(N)$, $u \in W_{1,p}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(gu) = \frac{1}{p}\|gu\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)F(gu(x))dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)G(gu(x))dx.$$

Como a ação definida no Exemplo B.2 é isométrica, temos $\|gu\|^p_{\mathbb{R}^N} = \|u\|^p_{\mathbb{R}^N}$, e como $g\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$, dado $x \in \mathbb{R}^N$ existe $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $z = g^{-1}x$, ou seja, $x = gz$. Por fim,

$|detg| = 1$. Logo, pelo Teorema de Mudança de Variável, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(gu) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\alpha(gz)F(u(z))dz - \mu\int_{\mathbb{R}^N}\beta(gz)G(u(z))dz \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}g^{-1}\alpha(z)F(u(z))dz - \mu\int_{\mathbb{R}^N}g^{-1}\beta(z)G(u(z))dz,\end{aligned}$$

e sendo α, β radialmente simétricas, temos

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mu}(gu) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\alpha(z)F(u(z))dz - \mu\int_{\mathbb{R}^N}\beta(z)G(u(z))dz = \mathcal{E}_{\lambda,\mu}(u)$$

mostrando que o funcional $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ é $O(N)$-invariante.

Definição B.9 *Definimos o conjunto das funções radialmente simétricas de* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, *por*

$$W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \quad gu = u, \quad \forall \ g \in O(N)\}. \tag{B.4}$$

Lema B.1 *O Conjunto* $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ *é um espaço vetorial de Banach reflexivo.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Note que $u = 0 \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Sejam $u_1, u_2 \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g \in O(N)$, temos

$$\begin{aligned}g(u_1 + \alpha u_2)(x) = (u_1 + \alpha u_2)(g^{-1}x) &= u_1(g^{-1}x) + \alpha(u_2(g^{-1}x)) \\ &= gu_1(x) + \alpha gu_2(x) = u_1(x) + \alpha u_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

Mostrando que $u_1 + \alpha u_2 \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é subespaço vetorial normado com a norma induzida de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Para mostrarmos que $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach, basta mostrar que $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é fechado. Com efeito, seja $(u_n) \subset W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que

$$u_n \longrightarrow u \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Como

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

continuamente, então,

$$u_n \longrightarrow u \ \ em \ \ L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e passando a uma subsequência se necessário, temos

$$u_n(x) \longrightarrow u(x), \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Daí,

$$gu(x) = u(g^{-1}x) = \lim_{n\to\infty} u_n(g^{-1}(x)) = \lim_{n\to\infty} (gu_n(x)) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Mostrando que $u \in W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$. E portanto, $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach. Além do mais é reflexivo, visto que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço reflexivo.

■

Teorema B.2 *As imersões* $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *são compactas para* $2 \leq N < p < \infty$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Passando a uma subsequência caso necessário, temos $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, ou ainda,

$$v_n = u_n - u \rightharpoonup 0 \ \ em \ \ W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N),$$

logo basta mostrar que

$$v_n \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Fixe $r > 0$. Dados $y \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{m(y,r)} \|v_n\|^p_{B_r(g_jy)} = \|v_n\|^p_{\cup_{j=1}^{m(y,r)} B_r(g_jy)} \leq \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N} \leq \sup_n \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N}.$$

Para cada $x \in B_r(g_jy)$, tem-se que

$$r > |x - g_jy| = |(g_j \circ g_j^{-1})x - g_jy| = |g_j(g_j^{-1}x - y)| = |g_j^{-1}x - y|.$$

Considerando $z = g_j^{-1}x$, temos que $z \in B_r(y)$. Além disso, $x \in g_j(B_r(y))$, ou seja, $B_r(g, y) \subset g_j(B_r(y))$. De modo análogo mostra-se $g_j(B_r(y)) \subset B_r(g_jy)$, ou seja, $B_r(g_jy) = g_j(B_r(y))$. Sendo assim, pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\|v_n\|^p_{B_r(g_jy)} &= \int_{B_r(g_jy)} (|\nabla v_n(x)|^p + |v_n(x)|^p)dx \\
&= \int_{B_r(y)} (|\nabla v_n(g_jz)|^p + |v_n(g_jz)|^p)|\det A_j|dz \\
&= \int_{B_r(y)} (|\nabla v_n(z)|^p + |v_n(z)|^p)dz = \|v_n\|^p_{B_r(y)}. \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

Segue de (B.5) que

$$m(y,r)\|v_n\|^p_{B_r(y)} = \sum_{j=1}^{m(y,r)} \|v_n\|^p_{B_r(y)} = \sum_{j=1}^{m(y,r)} \|v_n\|^p_{B_r(g_j y)},$$

implicando

$$\|v_n\|^p_{B_r(y)} \leq \frac{\sup_n \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N}}{m(y,r)}. \tag{B.6}$$

Por outro lado, sendo $\mathbb{R}^N$ compatível com $O(N)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$m(y,r) \geq \frac{(2C)^p \sup\limits_n \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N}}{\varepsilon^p}, \quad |y| \geq R, \tag{B.7}$$

onde $C > 0$ é a constante de imersão devido a *Rellich-Kondrachov* (ver Teorema A.19), a saber

$$W^{1,p}(B_r(y)) \hookrightarrow C^0(\overline{B}_r(y)), \tag{B.8}$$

com $p > N$. Combinando (B.6) e (B.7)

$$\|v_n\|^p_{B_r(y)} \leq \sup_n \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^p}{(2C)^p \sup\limits_n \|v_n\|^p_{\mathbb{R}^N}} = \frac{\varepsilon^p}{(2C)^p}, \tag{B.9}$$

donde segue-se, da imersão (B.8), que

$$\|v_n\|^p_{C^0(\overline{B}_r(y))} \leq C^p \|v_n\|^p_{B_r(y)} \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p}. \tag{B.10}$$

Consequentemente

$$|v_n(x)| \leq \sup_{x \in \overline{B}_r(y)} |v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \overline{B}_r(y), \quad |y| \geq R. \tag{B.11}$$

Agora se $|y| < R$ e $x \in B_r(y)$, temos $x \in B_{R+r}(0)$. Deste fato, seja $R > 0$ suficientemente grande. Desde que

$$W^{1,p}(B_{R+r}(0)) \hookrightarrow C^0(\overline{B}_{R+r}(0)),$$

temos $v_n \to 0$ em $C^0(\overline{B}_{R+r}(0))$. Assim, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n\|_{C^0(\overline{B}_{R+r}(0))} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_0 \ \ e \ \ |y| < R,$$

implicando que

$$|v_n(x)| \leq \sup_{x \in \overline{B}_{R+r}(0)} |v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > n_0, \quad x \in \overline{B}_{R+r}(0) \quad e \quad |y| < R. \qquad \text{(B.12)}$$

Combinando (B.11) e (B.12), temos

$$|v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \, \forall n > n_0 \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Logo,

$$|v_n|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

mostrando que $v_n \to 0$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

■

Apêndice C

Resultados Gerais Utilizados

C.1 Espaços Métricos

Definição C.1 [19] *Uma família $F = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se localmente finita quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de conjuntos C_λ.*

Em termos mais explícitos: F é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existem índices $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ e uma vizinhança V , com $x \in V$, tais que $V \cap C_\lambda \neq \varnothing$, implica $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Definição C.2 [19] *Um espaço métrico M chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

Teorema C.1 [19] *Todo espaço métrico separável é paracompacto.*

Teorema C.2 *Sejam $A, B \subset X$ dois subconjuntos do espaço métrico X, verificando $dist(A, B) > 0$. Então, existe um conjunto A_1 fechado tal que $A_1 \cap B = \varnothing$ e $A \subset intA_1$.*

C.2 Integrais em Espaços de Banach

Nesta seção trataremos o conceito de integrais em espaços de Banach e estudaremos algumas de suas propriedades, para maiores detalhes ver [17]. No que segue, X é um espaço vetorial normado completo cuja a norma é denotada por $|\ .\ |$. Considere

E o espaço das funções limitadas de $[a,b]$ em X com a norma

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Sejam a, b números reais tais que $a < b$, P uma partição do intervalo $[a,b]$ e considere a sequência de números $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tal que

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b.$$

Definição C.3 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow X$ uma função. Dizemos que f é uma função escada, se existem elementos $w_1, ..., w_n \in X$ tais que*

$$f(t) = w_i \quad para\ a_{i-1} < t < a_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Assim, pela definição acima, f tem valor constante em cada intervalo aberto determinado pela partição.

Definição C.4 *Seja f uma função escada com respeito a partição P. O valor da integral de f será definido por*

$$I_P(f) = (a_1 - a_0)w_1 + ... + (a_n - a_{n-1})w_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})w_i.$$

Lema C.3 *Suponha que f é uma função escada com respeito a outra partição Q de $[a,b]$, então*

$$I_P(f) = I_Q(f).$$

Lema C.4 *O conjunto das funções escadas $f : [a,b] \longrightarrow X$ é um subespaço do espaço de todas as funções limitadas de $[a,b]$ em X, que denotaremos por $S_t([a,b],X)$. A função*

$$I : S_t([a,b],X) \longrightarrow X$$

é linear e limitada, isto é,

$$|I(f)| \leq (b-a)\|f\|.$$

Teorema C.5 *Toda função contínua de $[a,b]$ em X pode ser aproximada uniformemente por funções escadas. Além disso, o fecho de $S_t([a,b],X)$ contém $C([a,b],X)$.*

Teorema C.6 (Extensão Linear) *Seja Y um espaço vetorial normado, e F um subespaço de Y. Seja $T : F \longrightarrow X$ um funcional linear contínuo. Então, T tem* *uma única extensão linear contínua* $\widehat{T} : \overline{F} \longrightarrow X$, *onde*

$$\widehat{T}(x) = T(x), \quad \forall x \in F.$$

Agora, considere a aplicação $I : S_t([a,b],X) \longrightarrow X$, *dado por*

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Considerando $F = S_t([a,b],X)$ e $I = T$, podemos aplicar o Teorema C.6 e concluir que existe uma única extensão linear contínua $\widehat{I} : \overline{F} \longrightarrow X$, onde

$$\widehat{I}(f) = I(f), \quad \forall f \in S_t([a,b],X). \tag{C.1}$$

Do Teorema C.5 $C([a,b],X) \subset \overline{S_t([a,b],X)}$, assim podemos definir $\widehat{T} = \widehat{I}|_{C([a,b],X)}$.

Dado $f \in C([a,b],X)$, pelo Teorema C.5, existe uma sequência $(f_n) \subset S_t([a,b],X)$ tal que

$$f_n \to f \text{ uniformemente em } S_t([a,b],X).$$

Sendo $\widehat{T}$ um operador linear contínuo, segue

$$\widehat{T}(f_n) \to \widehat{T}(f) \text{ em } X.$$

Logo, definimos a integral de uma função contínua em um espaço de Banach da seguinte forma:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

O próximo resultado é uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema C.7 *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *contínua e* $F : [a,b] \longrightarrow X$ *diferenciável em* $[a,b]$ *com* $F' = f$. *Então,*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Corolário C.1 *Se* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *é contínua e* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, *então* $F'(x) = f(x)$.

C.3 Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach

Nesta seção iremos fazer um breve estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach, mais especificamente sobre o problema de Cauchy.

Para maiores detalhes, ver [2], [17] e [29].

Definição C.5 *Um campo vetorial de classe C^p, $1 \leq p \leq +\infty$ em U é uma aplicação $f : U \longrightarrow X$ de classe C^p, com $U \subset X$ aberto.*

Ao campo vetorial f associemos a equação diferencial

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = f(\alpha(t)). \tag{C.2}$$

As soluções desta equação, são as aplicações diferenciáveis $\alpha : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$, onde J é um intervalo aberto contendo possivelmente o zero,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = f(\alpha(t))$$

e satisfazendo a condição inicial

$$\alpha(0) = x_0, \quad x_0 \in U,$$

ou seja, um (PVI). Essas soluções são chamadas trajetórias ou curvas integrais de f ou da equação diferencial (C.2).

Observação C.1 *Seja $\alpha : J \longrightarrow U$ uma função contínua satisfazendo a condição*

$$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f(\alpha(s))ds.$$

Logo, pelo Teorema C.7,

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t))).$$

Definição C.6 *Seja U_0 uma aberto de U contendo x_0. A aplicação $\alpha : U_0 \times J \longrightarrow U$, $U_0 \times J = \{(x,t); x \in U_0, t \in J\}$, chama-se fluxo gerado por f e vale as seguintes propriedades:*

(i) $\alpha(x, 0) = x$;

(ii) $\alpha(x, t + s) = \alpha(\alpha(x, s), t)$.

Teorema C.8 *Sejam J um intervalo aberto contendo o zero e U um aberto em X, $x_0 \in U$, e $0 < a < 1$ tais que $\overline{B}_{2a}(x_0) \subset U$. Considere $f : U \times J \longrightarrow X$ uma função contínua, limitada por uma constante $c > 0$ satisfazendo a condição de Lipschitz em U com constante de Lipschitz $K > 0$. Se $b < \min\{a \setminus c, 1 \setminus K\}$, então existe um único fluxo $\alpha : B_a(x_0) \longrightarrow U$. Além disso, se f é de classe C^p, então cada curva integral $\alpha(x,t)$ referente a C.2, também é de classe C^p.*

Teorema C.9 *Nas mesmas hipóteses do Teorema C.8, se α_1, α_2 são soluções do (PVI) que estamos considerando definidas num certo intervalo, então existe $K > 0$ tal que*

$$|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x_0) - \alpha_2(x_0)|e^{K(x-x_0)},$$

para todo x no referido intervalo.

C.4 Outros Resultados

Teorema C.10 (Teorema da Alfândega) *Seja Y um subconjunto do espaço vetorial normado X. Se um conjunto conexo $C \subset X$ contém um ponto $a \in Y$ e um ponto $b \in Y^C$, então $C \cap \partial Y \neq \varnothing$.*

Teorema C.11 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é aberto. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f|_{[a,a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Definição C.7 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço topológico. Diremos que f é semicontínua superiormente, quando para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$f^{-1}(-\infty, \lambda) = \{x; f(x) < \lambda\}$$

é aberto em X.

Lema C.12 *Seja $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função semicontínua superiormente tal que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Então, existe $\overline{x} \in [0, +\infty)$ tal que

$$f(\overline{x}) = \sup_{x \in [0,+\infty)} f(x).$$

Demonstração: Seja $\lambda \in [0, +\infty)$. Inicialmente, vamos restringir f a $[0, \lambda]$. Temos,

$$[0, \lambda] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(-\infty, n),$$

onde $f^{-1}(-\infty, n) = \{x; f(x) < n\}$ são abertos para cada $n \in \mathbb{N}$ pois, f é semicontínua superiormente. Pela compacidade de $[0, \lambda]$, existe n_0 verificando

$$[0, \lambda] \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} f^{-1}(-\infty, n).$$

Daí,

$$f(x) < n_0, \quad \forall x \in [0, \lambda],$$

mostrando que f é limitada superiormente.

Seja $c = \sup_{x \in [0,\lambda]} f(x) < +\infty$ e suponha, por absurdo, que $f(x) < c, \quad \forall x \in [0, \lambda]$, ou seja, o supremo não seja atingido.

Mais uma vez, temos

$$[0, \lambda] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(-\infty, c - \frac{1}{n}\right),$$

e pela compacidade de $[0, \lambda]$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) < c - \frac{1}{k_0}, \quad \forall x \in [0, \lambda].$$

Logo, por definição de supremo, temos $c \leq c - \frac{1}{k_0}$, o que é um absurdo. Logo, o supremo é atingido.

Agora, como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, temos que este supremo é atingido em $[0, +\infty)$.

■

Lema C.13 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então, existe $C_p > 0$ tal que*

$$\big(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\big).(x - y) \geq C_p|x - y|^p,$$

para $p \geq 2$.

Demonstração: Ver [3] e [11]. ■

Apêndice D

Demonstrações de Lemas Importantes

Neste apêndice, demonstraremos dois lemas que forma utilizados nos Capítulos 5 e 6.

Lema D.1 *O funcional*

$$\begin{array}{rcccl} J & : & W^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & J(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2 = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx\right) \end{array}$$

é de classe $C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, $J'(u).v = \langle u, v\rangle_W$ para todo $v \in W^{1,2}(\Omega)$, onde $\langle u, v\rangle_W = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx$ é o produto interno em $W^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente, que é derivável a Gâteaux. Dados $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left[\|u+tv\|^2 - \|u\|^2\right]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left[\|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2 - \|u\|^2\right]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\langle u, v\rangle_W + \frac{t}{2}\|v\|^2\right] \\ &= \langle u, v\rangle_W . \end{aligned}$$

Mostrando que J é derivável a Gâteaux e $\dfrac{\partial J}{\partial v}(u) = \langle u, v\rangle_W$ para todo $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Note que $\dfrac{\partial J}{\partial (.)}(u) \in \left(W^{1,2}(\Omega)\right)^*$ pois, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\sup_{\|v\|\leq 1}\left|\frac{\partial J}{\partial v}(u)\right| = \sup_{\|v\|\leq 1}|\langle u, v\rangle| \leq \sup_{\|v\|\leq 1}\|u\|.\|v\| = \|u\| < +\infty.$$

Logo, $\langle u, v\rangle_W$ é candidato natural a ser $J'(u).v$. Observe que J é diferenciável a Fréchet pois,

$$\begin{aligned}
\frac{J(u+v) - J(u) - \dfrac{\partial J}{\partial v}(u)}{\|v\|} &= \frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v\rangle_W}{\|v\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \langle u, v\rangle_W + \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v\rangle_W}{\|v\|} \\
&= \frac{1}{2}\|v\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $\|v\| \longrightarrow 0$. Mostrando que J é diferenciável a Fréchet e que $J'(u).v = \langle u, v\rangle_W$ para todo $u, v \in W^{1,p}$.

Para completar a prova deste lema, devemos mostrar que J' é contínua, ou seja, dada $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, nosso objetivo é provar que $J'(u_n) \longrightarrow J'(u)$ em $(W^{1,2}(\Omega))^*$, ou de forma equivalente,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1}\big|(J'(u_n) - J'(u)).v\big| \longrightarrow 0.$$

Seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que, $u_n \longrightarrow u \in W^{1,2}(\Omega)$. Dado $v \in W^{1,2}(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\big|(J'(u_n) - J'(u)).v\big| &= |J'(u_n).v - J'(u).v| \\
&= \big|\langle u_n, v\rangle_W - \langle u, v\rangle_W\big| \\
&= \big|\langle u_n - u, v\rangle_W\big| \\
&\leq \|u_n - u\|.\|v\|.
\end{aligned}$$

Como $\|v\| \leq 1$, temos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_* \leq \|u_n - u\|,$$

passando ao limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_* \longrightarrow 0.$$

$\blacksquare$

Lema D.2 *O funcional*

$$\begin{array}{rcccl} J & : & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & J(u) = \dfrac{1}{p}\|u\|^p_{\mathbb{R}^N} \end{array}$$

é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, com $J'(u)v = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx$, para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Escrevamos $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$, onde

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad e \quad J_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Vamos mostrar que

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$

é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com $J_1'(u)v = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx$. Para isto, mostraremos os seguintes fatos:

i) J_1 é Fréchet diferenciável;

ii) J_1' é contínuo, isto é, se $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $\|J_1'(u_n) - J'(u)\|_* \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Verificação de (i): Sejam,

$$T(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx$$

e

$$R(v) = J_1(u+v) - J_1(u) - T(v).$$

Mostremos que

$$\frac{|R(v)|}{\|v\|_{\mathbb{R}^N}} \overset{\|v\|_{\mathbb{R}^n}\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio (ver Teorema C.11) sobre a função

$$\begin{array}{rcl} f \; : \; \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x|^p, \end{array}$$

tem-se

$$|\nabla u + \nabla v|^p - |\nabla u|^p = p|\nabla u + \theta \nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta \nabla v\big)\nabla v, \quad \theta \in (0,1) \tag{D.1}$$

Daí,

$$\begin{aligned} R(v) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p}\Big(\big(|\nabla(u+v)|^p - |\nabla u|^p\big) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\Big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta\nabla v\big)\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\Big)dx \end{aligned}$$

implicando que

$$R(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta\nabla v\big) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\nabla v dx,$$

donde

$$R(v) \leq \big||\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta\nabla v\big) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\big|_{\frac{p}{p-1}}|\nabla v|_p.$$

Como $|\nabla v|_p \leq \|v\|_{\mathbb{R}^N}$, temos

$$R(v) \leq \big||\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta\nabla v\big) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\big|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_{\mathbb{R}^N}$$

implicando

$$\frac{|R(v)|}{\|v\|_{\mathbb{R}^N}} \leq \big||\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2}\big(\nabla u + \theta\nabla v\big) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\big|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Por outro lado, considere $(v_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $v_n \to 0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to 0 \;\; \text{em} \;\; L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{com} \;\; i = 1, 2, ..., N.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) \to 0 \;\; e \;\; \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x)\right| \leq h_i(x), \quad \text{q.t.p. em} \;\; \mathbb{R}^N,$$

onde $h_i \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\left||\nabla u(x)+\theta\nabla v_n(x)|^{p-2}\big(\nabla u(x)+\theta\nabla v_n(x)\big)-|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left||\nabla u+\theta\nabla v_n|^{p-2}\big(\nabla u+\theta\nabla v_n\big)-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \big(|\nabla u+\theta\nabla v_n|^{p-1}+|\nabla u|^{p-1}\big)^{\frac{p}{p-1}}\\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}}\Big((|\nabla u|+\theta|\nabla v_n|)^p+|\nabla u|^p\Big)\\
&\leq C_1|\nabla u|^p+C_2|\nabla v_n|^p \in L^1(\mathbb{R}^N),
\end{aligned}$$

visto que $|\nabla u|, |\nabla v_n| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\left||\nabla u+\theta\nabla v_n|^{p-2}\big(\nabla u+\theta\nabla v_n\big)-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|_{\frac{p}{p-1}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde seque que

$$\frac{|R(v)|}{\|v\|} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \|v\|_{\mathbb{R}^N} \to 0,$$

mostrando assim, que J_1 é Fréchet diferenciável.

Verificação de (ii): De fato, seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Da mesma forma como feito, anteriormente, no item *(i)*, obtemos

$$|(J_1'(u_n)-J_1'(u))v| \leq \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|_{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0$$

e assim,

$$\|J_1'(u_n)-J_1'(u)\|_* \longrightarrow 0,$$

mostrando a continuidade de J_1'.

De **(i)** e **(ii)**, $J_1' \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ com

$$J_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx.$$

De maneira inteiramente análoga, mostra-se que $J_2' \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ com

$$J_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv dx.$$

Portanto, $J \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dx.$$

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R.A., *Sobolev spaces.* Academic press 1975.

[2] Aragão, G. S., *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach.* Dissertação de Mestrado, USP, 2006.

[3] Barroso, K. C., *Existência de Soluções Periódicas e Homoclínicas para uma Classe de Sistemas Hamiltonianos.* Dissertação de Mestrado. UFCG. 2011.

[4] Bartle, R.G., *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[5] Brézis, H., *Analyse fonctionelle*, 2ª ed. Masson, 1987.

[6] Chang, K. C., *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations.* J. math. Anaysis Aplic, 80, 102-129 1981.

[7] Clarke, F.H., *Optimization and nonsmooth analysis.* SIAM, Philadelphia, 1990.

[8] De Lacerda, C. D., *Grupos de Lie Compactos.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[9] Gasiński, L. e Papageorgiou, N.S., *Nonsmooth Critical Point Theory and Nonlinear Boundary Value Problems.* Chapman & Hall/CRC, London, 2004.

[10] Grossinho, M.R. e Tersian, S.A., *An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations.* Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001.

[11] Guimarães, C. J., *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)-$Laplaciano.* Dissertação de Mestrado. UFCG, 2006.

[12] Ioffe, A. D., e Levin, V. L., *Subdifferential of Convex Functions*, Moscow Math. Soc., 26, 1-73 1972. *in russian.*

[13] Kavian, O., *Introduction a la théorie des points critiques*. Springer-Verlag, 1993.

[14] Krawcewicz, W. e Marzantowicz, W., *Some remarks on the Lusternik-Schnirelman method for nondifferentiable functionals invariant with respect to a fnite group action*. Rocky Mt. J. Math. 20, 1041–1049, 1990.

[15] Kristály, A., *Infinitely many solutions for a differential inclusion problem in* $\mathbb{R}^N$. J.Differ.Equ. 220, 511–530, 2006.

[16] Kristály, A., Marzantowicz, W. e Varga, C., *A non-smooth three critical points theorem with applications in differential inclusions*. 46, 49-62, 2010.

[17] Lang, S., *Analysis II*, Addison-Wesley, 1969.

[18] Lima, E. L., *Curso de análise, Vol.1*. 11.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[19] Lima, E. L., *Espaços métricos*. Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[20] Marano, S. e Motreanu, D., *Infinitely many critical points of non-differentiable functions and applications to a Neumann-type problem involving the p-Laplacian*. J. Differential Equations 182, 108–120, 2002.

[21] Motreanu, D. e Varga, C., *Some Critical Point Results for Locally Lipschitz Functionals*. Comm. App. Nonlinear Analysis, 4, 17-33, 1997.

[22] Nickel, S., *Convex Analysis*. University of Kaiserslautern, Dep. of Math., 1998.

[23] Ricceri, B., *Infinitely many solutions of the Neumann problem for elliptic equations involving the p-Laplacian*. Bull. London Math. Soc. 33 331-340, 2001.

[24] Ricceri, B., *Minimax theorems for limits of parametrized functions having at most one local minimum lying in a certain set*. Topol. Appl. 153, 3308–3312, 2006.

[25] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1970.

[26] Royden, H.L., *Real analysis*. Third Edition, Prentice Hall, Inc, New Jersey, 1988.

[27] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*. 1.ed. Editora da UNICAMP, 1999.

[28] Santos, J. A., *Teoremas Minimax para Funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, UFCG, 2007.

[29] Sotomayor, J., *Equações Diferenciais Ordinárias*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.