

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Sobre Hipersuperfícies Completas em Produtos Riemannianos

por

Arlandson Matheus Silva Oliveira <sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Sobre Hipersuperfícies Completas em Produtos Riemannianos

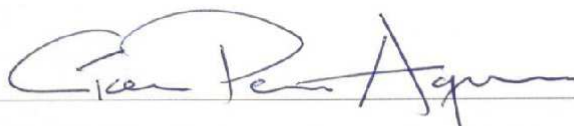
por

Arlandson Matheus Silva Oliveira

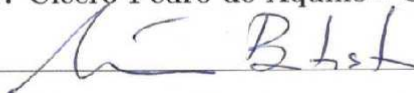
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

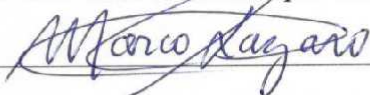
Aprovada por:



Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - UFPI



Prof. Dr. Marcio Henrique Batista - UFAL



Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG



Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

02/2015

# Resumo

No começo do século passado, S. Bernstein provou seu celebrado teorema, o qual assevera serem os planos os únicos gráficos inteiros e mínimos em  $\mathbb{R}^3$ . Desde então, um dos tópicos de pesquisa de grande importância na teoria de imersões isométricas são as possíveis extensões desse teorema para dimensões maiores ou para outros espaços ambiente. Os esforços consignados por escrito nesta dissertação são devotados à segunda vertente. Vamos considerar hipersuperfícies completas, conexas, orientáveis e com curvatura média constante,  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ , isometricamente imersas em um produto Riemanniano da forma  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ , em que  $M^n$  é uma variedade Riemanniana conexa e completa, para as quais sempre escolheremos um campo de vetores suave, normal e unitário  $N$ , globalmente definido em  $\Sigma^n$ . Com o propósito de estudar a geometria de uma tal  $\Sigma^n$ , lançaremos mão da análise de duas funções naturalmente relacionadas a ela, a saber: a *função altura vertical*  $h := (\pi_I)|_{\Sigma}$  e a *função ângulo*  $\eta := \langle N, \partial_t \rangle$ , em que  $\partial_t$  representa o vetor unitário que determina em  $\overline{M}^{n+1}$  uma folheação de codimensão 1 por *slices* totalmente geodésicos  $M_t^n := \{t\} \times M^n$ . A partir de restrições apropriadas sobre essas funções e suas derivadas, aliadas a exigências bastante razoáveis sobre a geometria de  $M$  e sobre os autovalores do endomorfismo

de Weingarten associado à orientação  $N$ , empregaremos métodos analíticos (essencialmente, os princípios do máximo devidos ao Omori e ao Yau) para assegurar que  $\Sigma^n$  seja (isométrica a) um slice. No caso particular em que  $\Sigma$  é um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , i.e.,  $\Sigma^n = \Sigma^n(u) = \{(u(x), x) \in \overline{M}^{n+1} : x \in M^n\}$ , para alguma função  $u \in C^\infty(M)$ , mostraremos que um controle adequado da norma do gradiente de  $u$  em  $M^n$  é suficiente para que tenhamos  $u \equiv t_0$  ou, equivalentemente,  $\Sigma^n = M_{t_0}^n$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Palavras-chave:** Problemas tipo-Bernstein, produtos riemannianos, princípios do máximo.

# Abstract

In the beginning of past century, S. Bernstein proved his celebrated theorem which asserts that the planes are the only entire minimal graphs in  $\mathbb{R}^3$ . Since then, one of research topics of greatest interest into the theory of Isometric Immersions are the possible extensions of this theorem either to higher dimensions or to other ambient spaces. The efforts registered in writing in this dissertation are devoted to the second perspective. We will consider complete connected orientable constant mean curvature hypersurfaces  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  isometrically immersed in a Riemannian product space of the form  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  ( $M^n$  being a complete connected Riemannian manifold), for which we will always chose a smooth normal unitary vector field  $N$  globally defined in  $\Sigma^n$ . With the purpose of studying the geometry of such a  $\Sigma^n$ , we will analyze two functions naturally related to it, namely, the *vertical height function*  $h := (\pi_I)|_{\Sigma}$  and the *angle function*  $\eta := \langle N, \partial_t \rangle$  (here  $\partial_t$  stands for the unitary vector field which determines in  $\overline{M}^{n+1}$  a codimension-one foliation by totally geodesic *slices*  $M_t^n := \{t\} \times M^n$ ). After imposing appropriated restrictions on these functions, combined with very reasonable requirements on the geometry of  $M^n$  e on the eigenvalues of the Weingarten endomorphism associated to the orientation given by  $N$ , we will apply analytic techni-

ques (essentially, the maximum principles due to Omori and Yau) to ensure that  $\Sigma^n$  is (isometric to) a slice. In the particular case in which  $\Sigma^n$  is an entire graph defined on  $M^n$ , i.e.  $\Sigma^n = \Sigma^n(u) = \{(u(x), x) \in \overline{M}^{n+1} : x \in M^n\}$ , for some function  $u \in C^\infty(M)$ , we will show that an adequate control over the norm of the gradient of  $u$  is enough to ensure that  $u \equiv t_0$  or, equivalently,  $\Sigma^n = M_{t_0}^n$ , for some  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Keywords:** Bernstein-type problems, Riemannian products, maximum principles.

# Agradecimentos

Ao professor Cláudio Dias, de alguma maneira ponto zero maquínico deste texto.

Ao professor Rubens Leão de Andrade, por me haver ensinado os rudimentos de Topologia.

Ao professor Ronaldo Freire de Lima, por haver me inspirado o desejo de constar n' *O Livro*.

Ao professor Henrique Fernandes de Lima, pela confiança e pela orientação.

Ao professor Marco Antônio, pelo zelo e pela coorientação.

Ao professor Antônio Brandão, com quem aprendi que Matemática é, antes de mais, criação e empenho.

Ao professor Marco Aurélio, por ter me ensinado a integrar e a ser pontual  $\mu$ -a.e.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande.

Aos professores e funcionários dos departamentos de Matemática da Universidades Federais do Rio Grande do Norte e de Campina Grande, em particular aos professores Marcelo e Viviane, a Andrezza e a Aninha.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Ao Hugo Romero (*in memoriam*), pelos *morangos mofados*.

Aos amigos com quem partilhei as mais diversas alegrias e agruras desde que cheguei em Campina Grande, em especial, ao Ailton, ao Fábio, à Débora e à Manu.

*Last, but not least*, à minha família, particularmente à minha mãe (*sine qua non*), à minha irmã, ao meu pai e às minhas tias Lívia e Dagmar, por mais de duas décadas de incentivo, cuidado e amor.

# Dedicatória

Ao Bernstein, ao Yau, aos meus pais (Sandra e Antenor) e à minha irmã Camila.



I modi in cui ignoriamo qualcosa sono altrettanto e forse più importanti dei modi in cui lo conosciamo. Vi sono modi del non sapere – sbadataggini, disattenzioni, dimenticanze – che producono goffaggine e bruttura; ma di altri – la svagatezza del giovinetto di Kleist, la spezzatura incantata di un bambino – non ci stanchiamo mai di ammirare la compiutezza. [...] Vi sono, dunque, modi riusciti di ignorarsi e la bellezza è uno di questi. È possibile, anzi, che sia proprio il modo in cui riusciamo a ignorare a definire il rango di ciò che riusciamo a conoscere e che l'articolazione di una zona di non conoscenza sia la condizione – e, insieme, la pietra di paragone – di ogni nostro sapere. [...] Epistemologia e scienza del metodo indagano e fissano le condizioni, i paradigmi e gli statuti del sapere, ma per come sia possibile articolare una zona di non conoscenza non vi sono ricette. Articolare una zona di non conoscenza non significa, infatti, semplicemente non sapere, non si tratta soltanto di una mancanza o un difetto. Significa, al contrario, tenersi nella giusta relazione con un'ignoranza, lasciare che un'inconoscenza guidi e accompagni i nostri gesti, che un mutismo risponda limpidamente per le nostre parole. O, per usare un vocabolario desueto, che ciò che ci è più intimo e nutriente abbia la forma non della scienza e del dogma, ma della grazia e della testimonianza. L'arte di vivere è, in questo senso, la capacità di tenersi in armonica relazione con ciò che ci sfugge. Anche il sapere si tiene, in ultima analisi, in rapporto con un'ignoranza. Ma lo fa nel modo della rimozione o in quello, più efficace e potente, della presupposizione. Il non sapere è ciò che il sapere presuppone come il paese inesplorato che si tratta di conquistare, l'inconscio è la tenebra in cui la coscienza dovrà portare la sua luce. In entrambi i casi qualcosa viene separato, per poi essere compenetrato e raggiunto. La relazione con una zona di non conoscenza veglia, al contrario, a che essa resti tale. E non per esaltarne l'oscurità, come fa la mistica, né per glorificarne l'arcano, come fa la liturgia. E nemmeno per riempirla di fantasmi, come fa la psicanalisi. Non si tratta di una dottrina segreta o di una scienza più alta, né di un sapere che non si sa. È possibile, anzi, che la zona di non conoscenza non contenga proprio nulla di speciale, che, se si potesse guardarvi dentro, s'intravedrebbe soltanto – ma non è certo – un vecchio slittino abbandonato, soltanto – ma non è chiaro – il cenno scontroso di una

bambina che ci invita a giocare. Forse non esiste nemmeno una zona di non conoscenza, esistono soltanto i suoi gesti. Come Kleist aveva capito così bene, la relazione con una zona di non conoscenza è una danza.

Giorgio Agamben, *Nudità*.

Nosotros (la indivisa divinidad que opera en nosotros) hemos soñado el mundo. Lo hemos soñado resistente, misterioso, visible, ubicuo en el espacio y firme en el tiempo; pero hemos consentido en su arquitectura tenues y eternos intersticios de sinrazón para saber que es falso.

J. L. Borges, *Avatares de la tortuga*.

As luzes do casario, aos poucos se apagaram.

Somente no alto de um sótão brilha uma lâmpada;

E, através da janela, se vê um jovem estudante,

– Cabelos despenteados, caídos sobre a testa;

Está lendo: estuda um teorema de geometria.

Joaquim Cardozo, *Visão do último trem subindo ao céu*.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Brevíssima excursão pela Análise Geométrica</b>	<b>10</b>
1.1 Produtos warped semi-riemannianos . . . . .	10
1.2 Hipersuperfícies . . . . .	16
1.3 A análise do laplaciano . . . . .	18
1.3.1 O princípio do máximo de Omori-Yau . . . . .	18
1.3.2 O princípio do máximo de Hopf-Calabi . . . . .	38
1.3.3 A fórmula de Bochner . . . . .	40
1.3.4 O laplaciano das funções altura e suporte . . . . .	48
1.4 Os tensores de Newton . . . . .	55
<b>2 Resultados principais</b>	<b>61</b>
2.1 Resultados de rigidez . . . . .	63
2.2 Aplicações no espaço hiperbólico . . . . .	75
<b>3 Gráficos verticais inteiros</b>	<b>83</b>
3.1 Gráficos em $\mathbb{R} \times M$ . . . . .	84
3.2 Um resultado de integrabilidade . . . . .	87
3.3 Um pouco de heurística . . . . .	91
3.4 Resultados tipo-Moser . . . . .	96
3.5 Coda . . . . .	98
<b>Bibliografia</b>	<b>101</b>

# Introdução

No começo do século passado, S. Bernstein [11] provou seu celebrado teorema (modificado por E. Hopf [41]), o qual assevera serem os planos os únicos gráficos inteiros e mínimos em  $\mathbb{R}^3$ .<sup>1</sup> Desde então, um dos tópicos de pesquisa de grande importância na teoria de imersões isométricas são as possíveis extensões desse teorema para dimensões maiores ou para outros espaços-ambiente. Nos anos subsequentes, houve um crescente interesse no estudo de hipersuperfícies imersas em um produto warped  $\mathbb{R} \times_f M^n$ , o que corresponde à segunda vertente oriunda do resultado de Bernstein. Neste contexto, assinalamos o artigo seminal de U. Abresch e H. Rosenberg [1] que generaliza o teorema de Hopf para produtos riemannianos (nos quais  $f \equiv \text{constante}$ ) homogêneos. No que tange às superfícies mínimas nestes espaços produto, esse artigo é de grande relevância,

---

<sup>1</sup>J. Simons [64] provou um resultado que, combinado com alguns teoremas de E. de Giorgi [37] e W. H. Fleming [31], fornece uma prova da extensão do teorema de Bernstein para  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \leq 7$ . No entanto, E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti [13] surpreendentemente mostraram que esse teorema não vale para  $n \geq 8$ . Desde então, um interessante tópico de pesquisa em Análise Geométrica têm sido as possíveis extensões do resultado de Bernstein para dimensões maiores ou para outros espaços-ambiente. Uma contribuição notável foi dada por J. Moser [48], que mostrou que os hiperplanos são os únicos gráficos inteiros e mínimos de  $\mathbb{R}^n$  tais que o gradiente da função correspondente tem norma limitada. Mais surpreendentemente ainda, D. T. Hieu e T. L. Nam [39] mostraram que o teorema de Bernstein é verdadeiro para  $\mathbb{G} \times \mathbb{R}$ , que é  $\mathbb{R}^{n+1}$  com a densidade mista euclidiana e gaussiana. De forma precisa, eles provaram o seguinte: *O gráfico  $\Sigma$  de uma função  $u(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}$  sobre  $\mathbb{G}^n$  é  $H_f$ -mínimo se, e somente se, ele é um hiperplano  $x_{n+1} = a$ , i.e.,  $u$  é constante. (Aqui,  $\mathbb{G}^n$  é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a densidade probabilística gaussiana  $e^{-f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ , conhecido como espaço de Gauss, e  $H_f$ -mínimo quer dizer que a curvatura média ponderada  $H_f := H + \langle \nabla f, N \rangle$  é identicamente nula, em que  $N$  é o campo unitário normal a  $\Sigma$ .)* Para uma demonstração bastante elegante do teorema de Bernstein em  $\mathbb{R}^3$ , veja [23]. Para uma não menos elegante do teorema de Bernstein-Calabi (uma versão Lorentziana do resultado de Bernstein), veja [55]. Veja também [2].

se levarmos em consideração o trabalho anterior de H. Rosenberg [56], que mostrou que, quando  $M^2$  é uma superfície completa com curvatura Gaussiana não negativa, um gráfico inteiro e mínimo em  $\mathbb{R} \times M^2$  é totalmente geodésico. Portanto, neste caso, o gráfico é um slice horizontal ou  $M^2$  é um  $\mathbb{R}^2$  plano e o gráfico é um plano inclinado.

Algum tempo depois, L. J. Alías, M. Dajczer e J. Ripoll [5] generalizaram o resultado de H. Rosenberg [56] para gráficos inteiros de curvatura média constante imersos num espaço riemanniano munido de um campo de Killing. A seguir, J. M. Espinar e H. Rosenberg [29] classificaram as superfícies de curvatura média constante em  $\mathbb{R} \times M^2$  segundo o ínfimo de suas projeções horizontais. C. P. Aquino e H. F. de Lima [6] aplicaram o conhecido princípio do máximo de H. Omori [50] e S. T. Yau [66] para obter resultados de rigidez concernentes a gráficos verticais completos em um produto riemanniano  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  é ou isométrica a  $\mathbb{S}^n$  ou é plana.<sup>2</sup> Em [45], H. F. de Lima e U. Parente obtiveram um teorema tipo-Bernstein em  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ . Como aplicação de seu resultado, eles estudaram a unicidade de gráficos verticais completos com curvatura média constante em tal espaço. H. Rosenberg, F. Schulze e J. Spruck [58] mostraram que um gráfico inteiro mínimo com função altura não negativa em um produto riemanniano  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  é completa com curvatura de Ricci não negativa e curvatura seccional limitada inferiormente, deve ser um slice. Em [43], H. F. de Lima, usando uma extensão do teorema de Stokes-Yau devida a A. Caminha, provou que em um produto  $\mathbb{R} \times M^n$  cuja fibra  $M^n$  tem curvatura de Ricci não negativa, os gráficos inteiros que têm segunda curvatura média limitada inferiormente e norma do gradiente da função correlacionada integrável à Lebesgue em  $M^n$  são totalmente geodésicos; em particular, se a curvatura de Ricci de  $M^n$  é positiva, então tais gráficos são slices. C. P. Aquino, H. F. de Lima e E. A. Lima Jr. [7] fizeram uso do referido princípio do máximo generalizado de Omori-Yau e da fórmula de Bochner a fim de obter resultados de rigidez em em produto riemanniano  $\mathbb{R} \times M^n$  e apresentaram um exemplo não trivial de um gráfico vertical com curvatura média constante em  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ . Mais recentemente, H. F. de Lima, E. A. Lima Jr. and U. L. Parente [44] trabalharam com hipersuperfícies completas e two-sided imersas em um produto riemanniano  $\overline{M}^{n+1} =$

---

<sup>2</sup>No Teorema 2.7 desta dissertação, apresentamos um resultado um pouco mais geral, obtido a partir deste de Aquino e de Lima.

$\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  tem curvatura seccional limitada inferiormente, e mostraram que controles adequados na norma do gradiente da função altura e no comportamento da função ângulo, aliados a certas condições geométricas (quais sejam, a curvatura média não mudar de sinal – em particular, ser constante – e segunda curvatura média limitada inferiormente), são suficientes para assegurar que hipersuperfícies imersas em  $\overline{M}^{n+1}$  são slices.

Dillen et al. estudaram superfícies de ângulo constante imersas em um espaço produto  $\mathbb{R} \times M^2$ , especificamente aquelas superfícies para as quais o campo unitário normal faz um ângulo constante com a direção tangente a  $\mathbb{R}$  (veja, por exemplo, [25], [26] e [27]). Estendendo tais estudos, E. Garnica, O. Palmas e G. Ruiz-Hernández [36] estabeleceram que hipersuperfícies completas, com ângulo e curvatura média constantes, imersas em um produto  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  tem curvatura de Ricci não negativa, devem ser ou totalmente geodésicas ou parte de um cilindro sobre uma hipersuperfície de curvatura média constante imersa em  $M^n$ .

Os esforços consignados por escrito nesta dissertação são devotados à segunda vertente. Vamos considerar hipersuperfícies conexas, completas, *two-sided* e com curvatura média constante,  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ , isometricamente imersas em um produto riemanniano da forma  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ , em que  $M^n$  é uma variedade riemanniana conexa e completa, para as quais sempre escolheremos um campo de vetores suave, normal e unitário  $N$ , globalmente definido em  $\Sigma^n$ . Com o propósito de estudar a geometria de uma tal  $\Sigma^n$ , lançaremos mão da análise de duas funções naturalmente relacionadas a ela, a saber: a *função altura vertical*  $h := (\pi_I)|_{\Sigma}$  e a *função ângulo*  $\eta := \langle N, \partial_t \rangle$ , em que  $\partial_t$  representa o vetor unitário que determina em  $\overline{M}^{n+1}$  uma folheação de codimensão 1 por *slices* totalmente geodésicos  $M_t^n := \{t\} \times M^n$ . A partir de restrições apropriadas sobre essas funções e suas derivadas, aliadas a exigências bastante razoáveis sobre a geometria de  $M^n$  e sobre os autovalores do endomorfismo de Weingarten associado à orientação  $N$ , empregaremos métodos analíticos (essencialmente, os princípios do máximo devidos ao Omori e ao Yau) para assegurar que  $\Sigma^n$  é (isométrica a) um slice. No caso particular em que  $\Sigma^n$  é um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , i.e.,  $\Sigma^n = \Sigma^n(u) = \{(u(x), x) \in \overline{M}^{n+1} : x \in M^n\}$ , para alguma função  $u \in C^\infty(M)$ ,

mostraremos que um controle adequado da norma do gradiente de  $u$  em  $M^n$  é suficiente para que tenhamos  $u \equiv t_0$  ou, equivalentemente,  $\Sigma = M_{t_0}^n$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

O texto está organizado da seguinte maneira. No **Capítulo 1** – Brevíssima excursão pela Análise Geométrica, estabeleceremos o arcabouço analítico que será utilizado na obtenção dos resultados dos demais capítulos. No **Capítulo 2** – Resultados principais, baseado em [6, 7, 44], vamos nos dedicar ao estudo de hipersuperfícies  $\Sigma^n$  isometricamente imersas em um produto warped  $\mathbb{R} \times_f M^n$ . Finalmente, no **Capítulo 3** – Gráficos verticais inteiros, tecido a partir dos resultados de [6, 7, 43, 44, 49], lidaremos com gráficos verticais inteiros em produtos riemannianos.

# Capítulo 1

## Brevíssima excursão pela Análise Geométrica

### 1.1 Produtos warped semi-riemannianos

Nesta seção, introduziremos o conceito de *produto warped semi-riemanniano* e estabeleceremos alguns resultados concernentes às curvaturas seccional e de Ricci desse ambiente. O estudo da geometria de espaços da forma  $\mathbb{R} \times_f M^n$  é particularmente profícuo e relevante em decorrência do fato de esses espaços possuírem naturalmente, como veremos, um campo conforme e fechado – o campo  $f\partial_t$ .

Recordamos que um *tensor métrico* sobre uma variedade suave  $M$  é um 2 – tensor covariante e simétrico  $\mathfrak{g}$  sobre  $M$ , tal que  $\mathfrak{g}_p$  é não-degenerado para todo ponto  $p \in M$ . Uma *variedade semi-riemanniana* é um par  $(M, \mathfrak{g})$ , em que  $M$  é uma variedade suave e  $\mathfrak{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é um tensor métrico de índice<sup>1</sup> constante sobre  $M$ .

**Definição 1.1** (PRODUTO WARPED SEMI-RIEMANNIANO) *Sejam  $(M, \mathfrak{g}_M)$  e  $(N, \mathfrak{g}_N)$  variedades semi-Riemannianas e seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e positiva. O produto warped  $\overline{M} = M \times_f N$  é a variedade produto  $M \times N$  munida do tensor métrico*

$$\overline{\mathfrak{g}} = \pi^*(\mathfrak{g}_M) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(\mathfrak{g}_N), \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Sejam  $X$  um espaço vetorial real e  $\beta$  uma forma bilinear sobre  $X$ . Recordamos que o *índice* de  $\beta$  é, por definição, a maior dimensão dos subespaços  $Y \leq X$  tais que  $\beta|_{Y \times Y}$  é negativa-definida.



em que  $\pi$  e  $\sigma$  são as projeções sobre  $M$  e  $N$ , nesta ordem. Explicitamente, denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$  as métricas de  $M$  e  $N$ , respectivamente, se  $v$  e  $w$  são tangentes a  $M \times N$  em  $r = (p, q)$ , então

$$\langle v, w \rangle_r = \langle d\pi_r(v), d\pi_r(w) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma_r(v), d\sigma_r(w) \rangle_q^N.$$

A variedade  $M$  é dita a base de  $\overline{M} = M \times_f N$  e a variedade  $N$ , a fibra.

Se  $f \equiv 1$ , então  $M \times_f N$  é simplesmente a variedade produto. Nosso objetivo é expressar a geometria de  $\overline{M}$  em termos da função warping  $f$  e das geometrias de  $M$  e  $N$ .

**Observação 1.1** Assim como no caso de uma variedade produto, as fibras  $\{p\} \times N = \pi^{-1}(p)$  e as folhas  $M \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$  são subvariedades semi-riemannianas de  $\overline{M}$ , e a métrica warped é tal que se verificam as seguintes condições:

- (i) Para cada ponto  $q \in N$ , a aplicação  $\pi|_{M \times \{q\}}$  é uma isometria sobre  $M$ .
- (ii) Para cada ponto  $p \in M$ , a aplicação  $\sigma|_{\{p\} \times N}$  é uma homotetia positiva sobre  $N$ , com fator de homotetia  $1/f(p)$ .
- (iii) Para cada ponto  $(p, q) \in \overline{M}$ , a folha  $M \times \{q\}$  e a fibra  $\{p\} \times N$  são ortogonais em  $(p, q)$ .

Com efeito, para cada ponto  $q \in N$ , a aplicação  $\Pi_q := \pi|_{M \times \{q\}} : M \times \{q\} \rightarrow M$  é um difeomorfismo. Além disso, para cada ponto  $r = (p, q) \in M \times \{q\}$  e para todos  $x, y \in T_r(M \times \{q\}) \leq T_r \overline{M}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_r &= \langle d\pi_r(x), d\pi_r(y) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma_r(x), d\sigma_r(y) \rangle_q^N \\ &= \langle d(\Pi_q)_p(x), d(\Pi_q)_p(y) \rangle_p^M, \end{aligned}$$

pois  $d(\Pi_q)_p = d\pi_r|_{T_r(M \times \{q\})}$  e  $\sigma$  é constante na folha  $M \times \{q\}$ , logo induz em  $T_r(M \times \{q\})$  a aplicação linear nula. Isso prova (i). De maneira análoga, podemos demonstrar (ii): basta considerarmos, para cada  $p \in M$ , o difeomorfismo  $\Sigma_p := \sigma|_{\{p\} \times N} : \{p\} \times N \rightarrow N$ . A condição (iii) é consequência imediata da definição do tensor métrico  $\mathfrak{g}$  dada em (1.1).

Vetores tangentes às folhas serão ditos *horizontais*; vetores tangentes às fibras serão ditos *verticais*. Denotaremos por  $\text{nor}$  a projeção ortogonal de  $T_r\overline{M}$ ,  $r = (p, q) \in \overline{M}$ , sobre seu subespaço horizontal  $T_r(M \times \{q\}) \cong T_pM$  e por  $\text{tan}$  a projeção sobre o subespaço vertical  $T_r(\{p\} \times N) \cong T_qN$ . Pelo item (iii) da Observação 1.1, temos

$$(T_r(\{p\} \times N))^\perp = T_r(M \times \{q\}).$$

Portanto, para campos de vetores verticais  $V, W$  em  $\overline{M}$ , a fórmula

$$\alpha(V, W) = \text{nor } \overline{\nabla}_V W,$$

em que  $\overline{\nabla}$  denota a conexão de Levi-Civita de  $\overline{M}$ , fornece o tensor de forma de todas as fibras.

O espaço dos campos de  $\overline{M} = M \times_f N$  que são levantamento<sup>2</sup> de campos de  $M$  (respectivamente,  $N$ ) será denotado por  $\mathcal{L}(M)$  (respectivamente,  $\mathcal{L}(N)$ ). É claro que  $\mathcal{L}(M)$  é um  $C_M^\infty(\overline{M})$ -módulo, em que  $C_M^\infty(\overline{M})$  é o anel das funções  $C^\infty(\overline{M})$  que são levantamento de funções  $C^\infty(M)$ . De modo similar,  $\mathcal{L}(N)$  é um  $C_N^\infty(\overline{M})$ -módulo, em que  $C_N^\infty(\overline{M})$  é o anel das funções  $C^\infty(\overline{M})$  que são levantamento de funções  $C^\infty(N)$ .

A relação do produto warped para com a base  $M$  é quase tão simples quanto no caso especial do produto semi-riemanniano; a relação para com a fibra  $N$ , por seu turno, geralmente envolve a função *warping*  $f$ .

**Lema 1.1** *Seja  $h \in C^\infty(M)$ . Então o gradiente do levantamento  $h \circ \pi$  em  $\overline{M} = M \times_f N$  é o levantamento para  $\overline{M}$  do gradiente de  $h$  em  $M$ .*

**Demonstração.** Dado um vetor vertical  $v$ , temos que  $\langle \text{grad}(h \circ \pi), v \rangle = v(h \circ \pi) = d\pi(v)(h) = 0$ , pois  $d\pi(v) = 0$ . Logo,  $\text{grad}(h \circ \pi)$  é horizontal. Agora, dado um vetor horizontal  $x$ , temos

$$\langle d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)), d\pi(x) \rangle = \langle \text{grad}(h \circ \pi), x \rangle = x(h \circ \pi) = d\pi(x)h = \langle \text{grad } h, d\pi(x) \rangle.$$

Assim, em cada ponto de  $\overline{M}$ ,  $d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)) = \text{grad } h$ , i.e.,  $\text{grad}(h \circ \pi)$  é  $\pi$ -relacionado a  $\text{grad } h$  em  $M$ . ■

**Proposição 1.2** *Se  $X, Y \in \mathcal{L}(M)$  e  $V, W \in \mathcal{L}(N)$ , então:*

---

<sup>2</sup>Veja, por exemplo, [52], p. 24–25.

- (i)  $\bar{\nabla}_X Y$  é o levantamento de  $\nabla_X^M Y$  em  $M$ ;
- (ii)  $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = (X(f \circ \pi)/f \circ \pi)V$ ;
- (iii)  $\text{nor } \bar{\nabla}_V W = \alpha(V, W) = -(\langle V, W \rangle / f \circ \pi) \text{grad}(f \circ \pi)$ ;
- (iv)  $\tan \bar{\nabla}_V W \in \mathcal{L}(N)$  é o levantamento de  $\nabla_V^N W$  em  $N$ .

**Demonstração.**

- (i) A fórmula de Koszul<sup>3</sup> para  $2\langle \bar{\nabla}_X Y, V \rangle$  se reduz a

$$-V\langle X, Y \rangle + \langle V, [X, Y] \rangle,$$

uma vez que  $[X, V] = [Y, V] = 0$ . Como  $X$  e  $Y$  são levantamentos a partir de  $M$ ,  $\langle X, Y \rangle$  é constante nas fibras. Sendo  $V$  vertical, temos  $V\langle X, Y \rangle = 0$ . Mas  $[X, Y]$  é tangente às folhas, logo  $\langle V, [X, Y] \rangle = 0$ . Portanto  $\langle \bar{\nabla}_X Y, V \rangle = 0$ , para todo  $V \in \mathcal{L}(N)$ , donde  $\bar{\nabla}_X Y$  é horizontal. O resultado segue, então, do fato de cada  $\Pi_q$  ser uma isometria.

- (ii)  $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X$ , pois  $[X, V] = 0$ . Esses campos de vetores são verticais, pois, por (i),  $\langle \bar{\nabla}_X V, Y \rangle = -\langle V, \bar{\nabla}_X Y \rangle = 0$ . Todos os termos na fórmula de Koszul para  $2\langle \bar{\nabla}_X V, W \rangle$  se anulam, à exceção de  $X\langle V, W \rangle$ . Pela definição do tensor métrico warped,  $\langle V, W \rangle_{(p,q)} = f(p)^2 \langle V_q, W_q \rangle^M$ . Escrevendo  $f$  em lugar de  $f \circ \pi$ , temos  $\langle V, W \rangle = f^2(\langle V, W \rangle^M \circ \sigma)$ . A expressão entre parênteses no lado direito da última igualdade é constante nas folhas, às quais  $X$  é tangente. Assim,

$$\begin{aligned} X\langle V, W \rangle &= X[f^2(\langle V, W \rangle^M \circ \sigma)] \\ &= 2fXf(\langle V, W \rangle^M \circ \sigma) \\ &= 2(Xf/f)\langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{\nabla}_X V = (Xf/f)V$ .

---

<sup>3</sup>Em Geometria Diferencial, prova-se o seguinte resultado: *Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade semi-riemanniana. Então existe uma única conexão  $\nabla$  em  $M$ , dita a conexão de Levi-Civita de  $M$ , que é simétrica e compatível com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Essa conexão é caracterizada pela fórmula de Koszul,*

$$2\langle \nabla_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle,$$

para todos  $X, V, W \in TM$ . Veja, por exemplo, o Teorema 11 à página 61 de [52].

(iii) Por (ii),

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_V W, X \rangle &= -\langle W, \bar{\nabla}_V X \rangle \\ &= -\langle W, (Xf/f)V \rangle \\ &= (Xf/f)\langle V, W \rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1,  $Xf = \langle \text{grad } f, X \rangle$ , em  $\bar{M}$  como em  $M$ . Assim, para todo  $X$ ,

$$\langle \bar{\nabla}_V W, X \rangle = -\langle (\langle V, W \rangle / f) \text{grad } f, X \rangle.$$

(iv) Como  $V$  e  $W$  são tangentes a todas as fibras, em uma dada fibra  $\tan \bar{\nabla}_V W$  é a derivada covariante aplicada às restrições de  $V$  e  $W$  àquela fibra. O fato de  $\tan \bar{\nabla}_V W$  e  $\nabla_V^N W$  serem  $\sigma$ -relacionados segue, então, do fato de as homotetias preservarem as conexões de Levi-Civita.

■

**Corolário 1.3** *As folhas  $M \times \{q\}$  de um produto warped  $\bar{M} = M \times_f N$  são totalmente geodésicas e as fibras  $\{p\} \times N$  são totalmente umbílicas.*

**Observação 1.2** *Em virtude do Lema 1.1, não deverá haver confusão, se simplificarmos a notação escrevendo  $h$  e  $\text{grad } h$  em lugar de  $h \circ \pi$  e  $\text{grad}(h \circ \pi)$ , respectivamente. Igualmente com o intento de simplificar a notação (e levando em consideração a Proposição 1.2), doravante escreveremos  $X$  para designar tanto um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  quanto seu levantamento  $\bar{X} \in \mathcal{L}(M)$ , assim como denotaremos por  $V$  tanto  $V \in \mathfrak{X}(M)$  quanto  $\bar{V} \in \mathcal{L}(M)$ .*

### Exemplo 1

(i) *Uma superfície de revolução é um produto warped, as folhas sendo as diferentes posições da curva rotacionada e as fibras os círculos de revolução. Explicitamente, se  $M$  é obtida pela rotação de uma curva plana  $C$  em torno de um eixo em  $\mathbb{R}^3$  e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^+$  dá a distância a esse eixo, então  $\bar{M} = C \times_f \mathbb{S}^1(1)$ .*

(ii)  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  *como um produto warped: em coordenadas esféricas, o elemento de linha de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é*

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Fazendo  $r = 1$ , obtemos o elemento de linha da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Evidentemente  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  sob a aplicação natural  $(t, p) \leftrightarrow tp$ . Assim, a fórmula para  $ds^2$  mostra que  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  pode ser identificado com o produto warped  $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$ . Em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , as folhas são os raios partindo da origem e as fibras são as esferas  $\mathbb{S}^2(r), r > 0$ . Mais geralmente,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é naturalmente isométrico a  $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ .

(iii) Os modelos de espaço-tempo standard do universo são produtos warped, bem como os modelos mais simples de vizinhanças de estrelas e buracos negros. (Veja, por exemplo, os capítulos 12 e 13 de [52].)

(iv) O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  é isométrico aos produtos warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n$ . (Veja o Exemplo 4.3 de [46]. Uma isometria explícita entre  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  pode ser encontrada em [4].)

O problema é expressar a curvatura de um produto warped  $\overline{M} = M \times_f N$  em termos de sua função *warping*  $f$  e das curvaturas de  $M$  e  $N$ .

Para um tensor covariante  $A$  em  $M$ , seu *levantamento*  $\overline{A}$  para  $\overline{M}$  é simplesmente seu pullback  $\pi^*(A)$  sob a projeção  $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ . No caso de um  $(1, s)$ -tensor  $A : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , se  $v_1, \dots, v_s \in T_r \overline{M}, r = (p, q) \in \overline{M}$  definimos  $\overline{A}(v_1, \dots, v_s)$  como sendo o vetor horizontal em  $r$  cuja projeção em  $T_p M$  é  $A(d\pi(v_1), \dots, d\pi(v_s))$ . Essas definições não envolvem nenhuma geometria, logo continuam válidas, *mutatis mutandis*, para levantamentos de  $N$ .

Sejam  $R^M$  e  $R^N$  os levantamentos para  $\overline{M}$  dos tensores curvatura de  $M$  e  $N$ . Como a projeção  $\pi$  é uma isometria em cada folha,  $R^M$  dá a curvatura de cada folha. A asserção correspondente vale para  $R^N$ , uma vez que a projeção  $\sigma$  é uma homotetia. Como as folhas são totalmente geodésicas,  $R^M$  coincide com o tensor curvatura  $\overline{R}$  de  $\overline{M}$  em vetores horizontais. A asserção correspondente para  $R^N$  e  $\overline{R}$ , contudo, falha, pois as fibras são, em geral, apenas umbílicas.

Se  $h \in C^\infty(M)$ , o levantamento para  $\overline{M}$  de Hess  $h$  será denotado por  $H^h$ . Ele concorda com o hessiano do levantamento  $h \circ \pi$  geralmente apenas em vetores horizontais.

**Proposição 1.4** *Seja  $\overline{M} = M \times_f N$  um produto warped com tensor curvatura  $\overline{R}$ . Se  $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M)$  e  $U, V, W \in \mathcal{L}(N)$ , então:*

- (i)  $\bar{R}(X, Y)Z \in \mathcal{L}(M)$  é o levantamento de  $R^M(X, Y)Z$  em  $M$ ;
- (ii)  $\bar{R}(V, X)Y = (H^f(X, Y)/f)V$ , em que  $H^f$  é o Hessiano de  $f$ ;
- (iii)  $\bar{R}(X, Y)V = \bar{R}(V, W)X = 0$ ;
- (iv)  $\bar{R}(X, V)W = (\langle V, W \rangle / f) \bar{\nabla}_X \text{grad } f$ ;
- (v)  $\bar{R}(V, W)U = R^N(V, W)U - (\langle \nabla f, \nabla f \rangle / f^2) \{ \langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V \}$ .

**Demonstração.** Veja a Proposição 42 às páginas 210–211 de [52]. ■

Agora, considere a curvatura de Ricci  $\bar{\text{Ric}}$  de um produto *warped*, escrevendo  $\text{Ric}^M$  para o levantamento (*pullback* por  $\pi$ ) da curvatura de Ricci de  $M$ , e similarmente para  $\text{Ric}^N$ .

**Corolário 1.5** *Em um produto warped  $\bar{M} = M \times_f N$ , com  $d := \dim N > 1$ , sejam  $X, Y$  horizontais e  $V, W$  verticais. Então:*

- (i)  $\bar{\text{Ric}}(X, Y) = \text{Ric}^M(X, Y) - (d/f)H^f(X, Y)$ ;
- (ii)  $\bar{\text{Ric}}(X, V) = 0$ ;
- (iii)  $\bar{\text{Ric}}(V, W) = \text{Ric}^N(V, W) - \langle V, W \rangle f^\#$ , em que

$$f^\# = \frac{\Delta f}{f} + (d-1) \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2}$$

e  $\Delta f$  é o laplaciano em  $M$ .

**Demonstração.** Veja [52], p. 211. ■

## 1.2 Hipersuperfícies

Começemos por recordar a seguinte

**Definição 1.6** *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade riemanniana e  $(\bar{M}^{n+p}, \bar{g})$  uma variedade semi-riemanniana. Uma imersão isométrica  $\psi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$  é uma imersão (i.e.,  $\psi$  é uma aplicação suave e sua diferencial é injetiva em todo ponto  $x \in M$ ) que satisfaz  $\psi^* \bar{g} = g$ . Por simplicidade, denotaremos os tensores métricos de  $M$  e  $\bar{M}$  pelo mesmo símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que  $\psi(M) \subset \bar{M}$  é uma hipersuperfície se  $p = 1$ , i.e., se a codimensão da imersão  $\psi$  for igual a 1.*

Seja uma imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ . Sempre podemos considerar localmente um campo suave de vetores normais e unitários, i.e., um campo suave de vetores  $\xi \in T\Sigma^\perp$  definido numa vizinhança  $U$  de cada  $x \in \Sigma^n$  tal que  $\langle \xi_y, \xi_y \rangle = 1$  para todo  $y \in U$ .<sup>4</sup> (De fato, existem apenas duas possíveis escolhas para  $\xi$ .) Se  $X \in T_x\Sigma$  e  $Y \in T\Sigma$ , então a *fórmula de Gauss* é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y \rangle \xi, \quad (1.2)$$

em que  $A_\xi : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$  é o *endomorfismo de Weingarten* (ou o *operador de forma*). Por outro lado, como  $\xi$  é um vetor normal unitário, temos  $\langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$ , donde  $\nabla_X^\perp \xi = 0$  para todo  $X \in TM$ . Logo, a *fórmula de Weingarten* é dada por

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X, \quad \forall X \in T\Sigma. \quad (1.3)$$

**Observação 1.3** *Doravante, nesta dissertação, todas as hipersuperfícies  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com as quais lidaremos serão supostas conexas e orientáveis. Ademais, suporemos que foi fixada uma orientação  $N$  (i.e., um campo suave normal e unitário, globalmente definido em  $\Sigma^n$ ) e denotaremos simplesmente por  $A = A_N$  o endomorfismo de Weingarten associado a  $N$ . Identificando  $\Sigma^n$  com sua imagem por  $\psi$ ,  $\psi(\Sigma^n) \subseteq \overline{M}^{n+1}$ , vamos nos referir à hipersuperfície  $\Sigma^n$ . Assim, a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é dada por*

$$H := \frac{1}{n} \text{traço}(A).$$

O tensor curvatura  $R$  de uma hipersuperfície  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

em que  $[\cdot, \cdot]$  é o colchete de Lie e  $X, Y, Z \in T\Sigma$ . A *equação de Gauss*, que descreve o tensor curvatura  $R$  de  $\Sigma^n$  em termos do endomorfismo de Weingarten e do tensor curvatura  $\overline{R}$  do ambiente  $\overline{M}^{n+1}$ , é dada por

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^\top + \langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX, \quad \forall X, Y, Z \in T\Sigma. \quad (1.4)$$

---

<sup>4</sup>Aqui, como de praxe nos textos de Geometria Diferencial,  $T\Sigma$  e  $T\Sigma^\perp$  denotam, respectivamente, os fibrados tangente e normal de  $\Sigma^n$ . As quantidades com  $\perp$  sobrescrito dirão respeito aos elementos de  $T\Sigma^\perp$ . Para definições e detalhes, sugerimos ao leitor que veja [18], [24] ou [42].

## 1.3 A análise do laplaciano

Estamos, finalmente, em condições de descrever nosso objeto de interesse, a saber: hipersuperfícies  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  isometricamente imersas em um produto Riemanniano da forma  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ , em que a fibra  $M^n$  é uma variedade riemanniana. Diremos que uma tal hipersuperfície  $\Sigma^n$  é *two-sided* se seu fibrado normal for trivial, o que, neste caso, é equivalente à existência de um campo suave normal e unitário  $N$ , globalmente definido em  $\Sigma^n$  (e está em concordância com a delimitação que fizemos na seção precedente acerca das hipersuperfícies com as quais trabalharemos; cf. Observação 1.3).

Com o propósito de estudar a geometria de uma tal  $\Sigma^n$ , lançaremos mão da análise de duas funções naturalmente relacionadas a  $\Sigma^n$ : a *função altura*  $h := (\pi_I)|_{\Sigma}$  e a *função ângulo*  $\eta := \langle N, \partial_t \rangle$ , em que  $\partial_t$  representa o vetor unitário que determina em  $\overline{M}^{n+1}$  uma folheação de codimensão 1 por *slices* totalmente geodésicos  $M_t^n := \{t\} \times M$  (cf. Corolário 1.3). Em suma, procuraremos respostas satisfatórias para a seguinte questão: *Sob que restrições sobre as funções altura e ângulo (e sobre as geometrias de  $\Sigma^n$  e de  $M^n$ ), uma hipersuperfície completa  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  deve, necessariamente, ser um slice?*

Nesta seção, estabeleceremos os resultados analíticos que empregaremos no estudo das funções altura e ângulo.

### 1.3.1 O princípio do máximo de Omori-Yau

Em 1967, H. Omori [50], estudando imersões em espaços euclidianos, provou o seguinte resultado:

*Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e conexa, com curvatura seccional limitada inferiormente. Se  $f$  é uma função suave sobre  $M$  limitada superiormente, então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um ponto  $p \in M$ , tal que:*

$$\sup f - f(p) < \epsilon,$$

$$|\nabla f(p)| < \epsilon$$



*e*

$$\text{Hess } f(p)(X, X) < \epsilon, \forall X \in T_p M, |X| = 1.$$

A abordagem de Omori, no entanto, é assaz complicada e tem o inconveniente de envolver apenas o hessiano. Em 1975, S. T. Yau [66], obteve um princípio de máximo mais simples, envolvendo o operador de Laplace-Beltrami, para variedades completas com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Mais precisamente, Yau provou este teorema:

*Sejam  $M$  uma variedade riemanniana completa e  $f \in C^2(M)$  limitada superiormente. Então, para todo  $p \in M$ , existe uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ , tal que:*

$$\lim_k f(p_k) = \sup_M f,$$

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)\rho_p(p_k)}{k(\rho_p(p_k)^2 + 2) \ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)}$$

*e*

$$\Delta f(p_k) \leq \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)(\rho_p(p_k)K(p_k) + 1)}{k(\rho_p(p_k)^2 + 2) \ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} + \frac{4(f(p_k) - f(p) + 1)\rho_p(p_k)}{k^2(\rho_p(p_k)^2 + 2)^2 [\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^2},$$

*em que  $\rho_p(x) = d(p, x)$  é a distância a partir de  $p$ .*

Nesta seção, apresentaremos uma demonstração desse teorema e obteremos, como corolário, o seguinte resultado, a que nos referiremos como o “princípio do máximo generalizado de Omori-Yau” e que será fundamental para provarmos os resultados do próximo capítulo:

*Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se  $f$  é uma função de classe  $C^2(M)$ , limitada superiormente em  $M$ , então existe uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ , tal que:*

$$\lim_k f(p_k) = \sup_M f, \quad \lim_k |\nabla f(p_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_k \Delta f(p_k) \leq 0.$$

## O cut locus

Precisaremos do conceito de *cut locus*, introduzido para superfícies sob o nome *ligne de partage* por H. Poincaré em 1905 e para variedades Riemannianas por J.H. Whitehead em 1935.

Sejam  $M$  uma variedade riemanniana completa,  $p \in M$  e  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . Sabemos que se  $\tau > 0$  é suficientemente pequeno, então  $d(\gamma(0), \gamma(\tau)) = \tau$ , i.e.,  $\gamma|_{[0, \tau]}$  é uma geodésica minimizante. Ademais, se  $\gamma|_{[0, \tau_0]}$  não é minimizante, o mesmo acontece para todo  $\tau > \tau_0$ . Por continuidade, o conjunto dos números  $\tau > 0$  para os quais  $d(\gamma(0), \gamma(\tau)) = \tau$  é da forma  $[0, \tau_0]$  ou  $[0, +\infty)$ . Isso motiva a seguinte

**Definição 1.7** (PONTO DE MÍNIMO & CUT LOCUS) *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana completa e  $p \in M$ . Denotemos por  $UM$  o fibrado tangente unitário de  $M$ ,*

$$\bigsqcup_{p \in M} U_p M,$$

em que  $U_p M = \{u \in T_p M : |u| = 1\}$ . Dado  $u \in U_p M$ , seja  $\gamma_u : [0, +\infty) \rightarrow M$  o raio geodésico normalizado,  $\gamma_u(t) = \exp_p(tu)$ . Se

$$\tau(u) := \sup\{t : \gamma_u|_{[0, t]} \text{ é uma geodésica minimizante}\} < +\infty,$$

então diremos que  $\gamma_u(\tau(u))$  é o ponto mínimo de  $p$  na direção  $u$ . O cut locus de  $p$ , que denotaremos por  $\text{Cut}(p)$ , é o conjunto de todos os pontos de mínimo de  $p$ , em todas as direções  $u \in U_p M$ .

**Observação 1.4** *Se  $M$  é compacta, então  $\text{Cut}(p) \neq \emptyset$  para todo  $p$ . [Com efeito, dado  $p \in M$ , seja  $\rho_p$  a função distância a partir de  $p$ . Sendo imagem contínua de  $M$ , o conjunto  $\rho_p(M) \subset \mathbb{R}$  é compacto e, portanto, limitado. Seja  $u \in U_p M$ . Se não existisse ponto mínimo na direção  $u$ , então  $\rho_p \circ \gamma_u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  seria tal que  $\rho_p \circ \gamma_u(t) = t$  para todo  $t \in [0, +\infty)$ . Assim, esta seria uma função ilimitada com imagem contida no compacto  $\rho_p(M)$ . Absurdo.] A recíproca é verdadeira.*

## Exemplo 2

- (i) *Em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  (cada um munido de sua métrica canônica), existe uma única geodésica normal minimizante ligando dois quaisquer pontos dados. Logo  $\text{Cut}(p) = \emptyset$ , para todo  $p$ .*

- (ii) Se  $M$  é completa, simplesmente conexa e tem curvatura seccional não-positiva, segue do teorema de Hadamard que  $M$  é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos. Por conseguinte, se  $p \in M$  e  $u \in U_p M$ , então  $\gamma_u(t) = \exp_p(tu)$  é minimizante em  $[0, +\infty)$ , donde inferimos que  $\text{Cut}(p) = \emptyset$ , para todo  $p \in M$ .
- (iii) Para o cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  munido da métrica canônica, se  $p = (e^{i\vartheta_0}, z_0)$ , então  $\text{Cut } p = \{(e^{i(\vartheta_0 + \pi)}, z) : z \in \mathbb{R}\}$  é a linha vertical “oposta a  $p$ ”. Note que  $p$  não tem pontos conjugados.
- (iv) Para  $S^n$  com a métrica euclidiana,  $\text{Cut}(p) = \{\bar{p}\}$ , em que  $\bar{p} = -p$  é o ponto antípoda de  $p$ . Note que  $\bar{p}$  é também o primeiro ponto conjugado de  $p$ .

**Observação 1.5** Uma variedade riemanniana compacta  $M$  para a qual o cut locus de todo ponto  $p \in M$  se reduz a um único ponto é chamada uma variedade *Wiedersehen*. Um resultado devido a L. Green assevera que as superfícies ( $\dim M = 2$ ) *Wiedersehen* são isométricas às esferas. Esse resultado foi generalizado por M. Berger e J. Kazdan<sup>5</sup> para o caso em que  $\dim M$  é par e por C.T. Yang<sup>6</sup> para o caso em que  $\dim M$  é ímpar.

**Proposição 1.8** Suponhamos que  $\gamma(\tau_0)$  é o ponto mínimo de  $p = \gamma(0)$  ao longo da geodésica normalizada  $\gamma$ . Então:

- (i) ou  $\gamma(\tau_0)$  é o primeiro ponto conjugado de  $p$  ao longo de  $\gamma$ ;
- (ii) ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$ , de  $p$  a  $\gamma(\tau_0)$ , tal que  $L(\sigma) = L(\gamma)$ .
- (Aqui,  $L(\cdot)$  denota o comprimento de uma curva.) Reciprocamente, se (i) ou (ii) se verifica, então existe  $\bar{\tau}$  em  $(0, \tau_0]$ , tal que  $\gamma(\bar{\tau})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ .

**Demonstração.** Veja a Proposição 2.2 às páginas 296-297 de [18]. ■

**Corolário 1.9** Se  $q \in \text{Cut}(p)$ , então  $p \in \text{Cut}(q)$ .

**Demonstração.** Se  $q$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ , então  $\gamma$  é minimizante entre  $p$  e  $q$ . Segue que a “geodésica oposta”  $-\gamma$  é também minimizante entre  $q$  e  $p$ . Pela Proposição precedente, ou  $q$  é conjugado a  $p$ , ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$ , ligando  $p$  a  $q$ , tal que  $L(\sigma) = L(\gamma) = d(p, q)$ . Em ambos os casos, o ponto de mínimo de  $q$  ao longo de  $-\gamma$  não ocorre depois de  $p$ . Como  $L(-\gamma) = d(p, q)$ , concluímos que  $p$  é o ponto de mínimo de  $q$  ao longo de  $-\gamma$ . ■

<sup>5</sup>Veja J. L. Kazdan, *An isoperimetric inequality and wiedersehen manifolds*. In: S. T. Yau (ed.), *Seminar on Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1982, pp. 143–157.

<sup>6</sup>Veja C. T. Yang, *Odd-dimensional wiedersehen manifolds are spheres*, *J. Diff. Geometry*, **15** (1980), 91–96.

**Corolário 1.10** *Se  $q \notin \text{Cut}(p)$ , então existe uma única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema de Hopf e Rinow, existe uma geodésica minimizante  $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(\tau) = q$ . Se existisse outra geodésica minimizante  $\sigma \neq \gamma$  ligando  $p$  a  $q$ , então, pela recíproca da Proposição 1.8, existiria  $\bar{\tau} \in [0, \tau]$  tal que  $\gamma(\bar{\tau})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ . Como  $q \notin \text{Cut}(p)$ , teríamos  $\bar{\tau} < \tau$ . Mas, então,  $\gamma$  não seria minimizante em  $[0, \tau]$ . Contradição. ■

**Observação 1.6** *É possível mostrar que a função  $\tau : UM \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , definida por*

$$\tau(p, u) = \begin{cases} \tau_0, & \text{se } \gamma_{p,u}(\tau_0) = \exp_p(\tau_0 u) \in \text{Cut}(p), \\ +\infty, & \text{se } p \text{ não tem ponto de mínimo na direção } u, \end{cases}$$

*é contínua. Um corolário disso é que  $\text{Cut}(p)$  é um subconjunto fechado de medida zero em  $M$ .*

Fixemos um ponto  $p \in M$ . O *cut locus* está profundamente relacionado à suavidade da função distância a partir de  $p$ ,

$$\begin{aligned} \rho_p : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \rho_p(x) = d(p, x). \end{aligned}$$

Sabemos que  $\rho_p$  é uma função contínua. Contudo, não é difícil ver que  $\rho_p$  não é suave em  $M$ . De fato,  $\rho_p$  nunca é suave em  $p$ ! Neste contexto, temos a seguinte

**Proposição 1.11**

(i)  $\rho_p$  é de classe  $C^\infty$  em  $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ , e seu gradiente  $\nabla \rho_p(q)$  em  $q \in M \setminus \text{Cut}(p) \cup \{p\}$  é dado por

$$\nabla \rho_p(q) = \gamma'_{pq}(\rho(q)),$$

em que  $\gamma_{pq}$  denota a única geodésica minimizante de  $p$  a  $q$  parametrizada pelo comprimento de arco. Em particular,  $|\nabla \rho_p(q)| = 1$ .

(ii) Suponha que existem pelo menos duas geodésicas minimizantes normalizadas ligando  $p$  a  $q$ . Então  $\rho_p$  não é diferenciável em  $q$ .

**Demonstração.** Veja a Proposição 4.8 às páginas 108–109 de [59]. ■

**Observação 1.7**

(i) O conjunto dos pontos  $q$  satisfazendo a hipótese de (ii) é denso em  $\text{Cut}(p)$ . Como  $\text{Cut}(p)$  é um subconjunto fechado de  $M$ , isso fornece a seguinte caracterização do cut locus:  $\text{Cut}(p)$  é o fecho do conjunto de todos os pontos de  $M$  que podem ser ligados a  $p$  por pelo menos duas geodésicas minimizantes. Pode-se provar que se  $q$  pode ser ligado a  $p$  por pelo menos duas geodésicas minimizantes, então  $\rho_p^2$  não possui derivada direcional em  $q$  para vetores na direção dessas duas geodésicas. Esses dois fatos, combinados, implicam o seguinte resultado (Teorema 2 de [65]):

*Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa de dimensão  $n$ . Assuma que existe um ponto  $p \in M$  tal que  $\rho_p^2$  possui derivadas direcionais em toda a  $M$ . Então  $M$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

(ii) Usando a fórmula da segunda variação, é possível calcular o hessiano de  $\rho_p$  em  $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ . Em particular, podemos provar o seguinte (veja [59], p. 109–110):

*Se  $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$  é uma geodésica normalizada partindo de  $\gamma(0) = p$  que não intersecta  $\text{Cut}(p)$ . Se  $\tau_0 \in (0, \tau]$  e  $X \in T_{\gamma(\tau_0)}M$  é ortogonal a  $\gamma'(\tau_0)$ , então*

$$(\text{Hess } \rho_p)_{\gamma(\tau_0)}(X, X) = \langle \dot{J}, J \rangle_{\gamma(\tau_0)},$$

*em que  $J$  é o único campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $J(\tau_0) = X$ .*

Se  $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$  é uma geodésica normalizada ligando  $p$  a  $x$ , definimos (veja [66])

$$K_\gamma(x) := \min_{t \in [0, \tau]} \left\{ \frac{n-1}{\tau-t} - \frac{1}{(\tau-t)^2} \int_t^\tau (\zeta-t)^2 \text{Ric}(\gamma'(\zeta)) d\zeta \right\}.$$

Esta quantidade  $K_\gamma(x)$  é bem-definida, uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\tau-t)^2} \int_t^\tau (\zeta-t)^2 \text{Ric}(\gamma'(\zeta)) d\zeta &\leq \frac{1}{(\tau-t)^2} \sup_{\zeta \in [0, \tau]} \text{Ric}(\gamma'(\zeta)) \int_t^\tau (\zeta-t)^2 d\zeta \\ &= \frac{\tau-t}{3} \sup_{\zeta \in [0, \tau]} \text{Ric}(\gamma'(\zeta)), \end{aligned}$$

donde

$$K_\gamma(x) \geq \min_{t \in [0, \tau]} \left\{ \frac{n-1}{\tau-t} - \left( \frac{\tau-t}{3} \right) \sup_{\zeta \in [0, \tau]} \text{Ric}(\gamma'(\zeta)) \right\}.$$

O mínimo no lado direito da última desigualdade existe, pois a expressão entre chaves é uma função  $g(t)$ , contínua em  $[0, \tau)$  e tal que  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} g(t) = +\infty$ .

Caso  $x \in M \setminus \text{Cut}(p)$ , seja  $\gamma$  a única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $x$ . Definimos  $K(x) := K_\gamma(x)$ . Caso contrário, pomos  $K(x) := \inf_\gamma K_\gamma(x)$ , em que o ínfimo é tomado sobre todas as geodésicas minimizantes  $\gamma$  ligando  $p$  a  $x$ .

O próximo lema coleciona alguns fatos sobre a quantidade  $K$  que acabamos de definir.

**Lema 1.2**

- (i) Para todo  $x \in M \setminus \text{Cut}(p)$ , temos que  $\Delta \rho_p(x) \leq K(x)$ ;
- (ii) Se a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente, então

$$\sup_{x \in M} K(x) < \infty.$$

**Demonstração.**

- (i) Sejam  $\gamma : [0, \rho_p(x)] \rightarrow M$  a geodésica minimizante ligando  $p$  a  $x$  e  $J_1, \dots, J_{n-1}$  os únicos campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$  que se anulam em  $\gamma(0)$  e tais que  $J_i(\rho_p(x)) = e_i(\rho_p(x))$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , em que  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \gamma'\}$  é um referencial ortonormal e paralelo ao longo de  $\gamma$ . Como  $J_i(0) = 0$  e  $\langle J_i, \gamma' \rangle_x = 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , temos<sup>7</sup>

$$(\text{Hess } \rho_p)_x(J_i, J_i) = \langle J'_i, J_i \rangle_x,$$

---

<sup>7</sup>Cf. Observação 1.7–(ii).

donde

$$\begin{aligned}
 \Delta\rho_p(x) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla \rho_p, e_i \rangle_x \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nabla \rho_p, e_i \rangle_x \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Hess } \rho_p)_x(e_i, e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Hess } \rho_p)_x(J_i, J_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle J'_i, J_i \rangle_x.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação de Jacobi,

$$\langle J''_i, J_i \rangle = -\langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_i \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 I_{\rho_p(x)}(J_i, J_i) &= \int_0^{\rho_p(x)} \{ \langle J'_i, J'_i \rangle - \langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_i \rangle \} dt \\
 &= \int_0^{\rho_p(x)} \{ \langle J'_i, J'_i \rangle + \langle J''_i, J_i \rangle \} dt \\
 &= \int_0^{\rho_p(x)} \langle J'_i, J_i \rangle' dt \\
 &= \langle J'_i, J_i \rangle_x.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta\rho_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} I_{\rho_p(x)}(J_i, J_i).$$

Fixado  $\tau_0 \in [0, \rho_p(x))$ , se  $f : [0, \rho_p(x)] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \tau_0, \\ \frac{t-\tau_0}{\rho_p(x)-\tau_0}, & \text{se } \tau_0 \leq t \leq \rho_p(x), \end{cases}$$

então  $f$  é seccionalmente suave e tal que  $f(0) = 0$  e  $f(\rho_p(x)) = 1$ . Como  $\langle J_i, \gamma' \rangle = 0$ ,  $V_i := f e_i$  é um campo de vetores seccionalmente suave ao longo de  $\gamma$ , com

$\langle V_i, \gamma' \rangle = 0$ ,  $J_i(0) = V_i(0) = 0$  e  $J_i(\rho_p(x)) = V_i(\rho_p(x)) = e_i(\rho_p(x))$ . Aplicando o lema do índice, é fácil ver que

$$\Delta \rho_p(x) \leq \frac{n-1}{\rho_p(x) - \tau_0} - \frac{1}{(\rho_p(x) - \tau_0)^2} \int_{\tau_0}^{\rho_p(x)} (\zeta - \tau_0)^2 \text{Ric}(\gamma'(\zeta)) d\zeta.$$

Basta, por fim, tomarmos o mínimo em  $\tau_0 \in [0, \rho_p(x))$ ,  $\tau_0 \rightarrow \rho_p(x)^-$ .

- (ii) Podemos supor que  $\text{Ric}_M \geq C$ , em que  $C < 0$  é uma constante a ser escolhida posteriormente. Se  $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$  é uma geodésica normalizada ligando  $p$  a  $x$ , então

$$K_\gamma(x) \leq \min_{t \in [0, \tau]} \left\{ \frac{n-1}{\tau-t} - \frac{C}{(\tau-t)^2} \int_t^\tau (\zeta-t)^2 d\zeta \right\} \quad (1.5)$$

$$= \min_{t \in [0, \tau]} \left\{ \frac{n-1}{\tau-t} - \frac{C(\tau-t)}{3} \right\}. \quad (1.6)$$

Estudemos a função

$$f : t \mapsto f(t) = \frac{n-1}{\tau-t} - \frac{C(\tau-t)}{3}, t \neq \tau.$$

Derivando, obtemos  $f'(t) = \frac{n-1}{(\tau-t)^2} + \frac{C}{3}$ . Assim, os pontos críticos de  $f$  são

$$t_1 = \tau - \sqrt{-\frac{3(n-1)}{C}}$$

e

$$t_2 = \tau + \sqrt{-\frac{3(n-1)}{C}}.$$

É fácil ver que

$$f'(t) < 0 \iff t \in (-\infty, t_1) \cup (t_2, +\infty)$$

e que

$$f'(t) > 0 \iff t \in (t_1, t_2), t \neq \tau.$$

Portanto,  $t_1$  é um mínimo global para  $f|_{(-\infty, \tau)}$ . Tomando  $|C|$  suficientemente grande, temos  $0 \leq t_1 < \tau$ . Como  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) = +\infty$ , segue de (1.5) que  $K_\gamma(x) \leq f(t_1)$ .

■



**Lema 1.3** *Seja  $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$  uma geodésica minimizante, tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(\tau) \in M \setminus \text{Cut}(p)$ . Então existe um aberto  $\mathcal{U}$  contendo  $\Gamma := \gamma([0, \tau])$  tal que, para todo  $x \in \mathcal{U}$ , há em  $\mathcal{U}$  no máximo uma geodésica minimizante ligando  $x$  a  $p$ .*

**Demonstração.** Podemos supor que  $\gamma$  esteja normalizada. Por contradição, se nenhum tal  $\mathcal{U}$  existir, para todo  $j \in \mathbb{N}$ , existiria  $x_j \in M$ , tal que  $\lim_j d(x_j, \Gamma) = 0$  e  $x_j$  é ligado a  $p$  por pelo menos duas geodésicas minimizantes distintas, digamos  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ , com  $|\alpha'_j(0)| = |\beta'_j(0)| = 1$ .

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existem  $\tau_0 \in (0, \tau]$  e  $v, w \in U_p M$ , tais que

$$\lim x_j = \gamma(\tau_0), \lim \alpha'_j(0) = v, \lim \beta'_j(0) = w.$$

Pela continuidade da função distância, para  $t \in [0, \tau_0]$ , temos que  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  e  $\gamma_w(t) = \exp_p(tw)$  são geodésicas minimizantes ligando  $p$  a  $\gamma(\tau_0)$ .

Há dois casos a considerar.

I CASO:  $v \neq \gamma'(0)$  ou  $w \neq \gamma'(0)$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $v \neq \gamma'(0)$ . Então  $\gamma(\tau_0)$  é ligado a  $p$  pelas geodésicas minimizantes distintas  $\gamma$  e  $\gamma_v$ . Logo, pela Proposição 1.8, existe  $\bar{\tau} \in (0, \tau_0]$  tal que  $\gamma(\bar{\tau})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ , contradizendo nossas hipóteses.

II CASO:  $v = w = \gamma'(0)$ . Então

$$\lim_j \exp_p(\tau_0 \alpha'_j(0)) = \exp_p(\tau_0 \gamma'(0)) = \lim_j \exp_p(\tau_0 \beta'_j(0)).$$

Como  $\gamma$  é minimizante e  $\gamma(\tau) \in M \setminus \text{Cut}(p)$ , novamente pela Proposição 1.8, temos que  $\gamma(\tau_0)$  não é conjugado a  $p$  ao longo de  $\gamma$  e, portanto,  $\tau_0 \gamma'(0)$  não é um ponto crítico de  $\exp_p$ . Logo  $\exp_p$  é injetiva numa vizinhança de  $\tau_0 \gamma'(0)$ , de modo que, para  $j$  suficientemente grande, teremos  $\tau_0 \alpha'_j(0) = \tau_0 \beta'_j(0)$ . Contradição. ■

O teorema de Yau e seus corolários

**Teorema 1.12** (YAU [66]) *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana completa e  $f \in C^2(M)$  limitada superiormente. Então, para todo  $p \in M$ , existe uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que*

$$\lim_k f(p_k) = \sup_M f, \tag{1.7}$$

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)\rho_p(p_k)}{k(\rho_p(p_k)^2 + 2) \ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} \tag{1.8}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta f(p_k) \leq & \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)(\rho_p(p_k)K(p_k) + 1)}{k(\rho_p(p_k)^2 + 2) \ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} \\ & + \frac{4(f(p_k) - f(p) + 1)\rho_p(p_k)}{k^2(\rho_p(p_k)^2 + 2)^2 [\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

em que  $\rho_p(x) = d(p, x)$  é a distância a partir de  $p$ .

**Demonstração.** Para  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$g_k(x) := \frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}}.$$

Obviamente,  $g_k$  é contínua e, se  $f(x) \leq C$  para todo  $x \in M$ , então

$$g_k(x) \leq \frac{C - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}},$$

de maneira que

$$\limsup_{\rho_p(x) \rightarrow +\infty} g_k(x) \leq 0. \tag{1.10}$$

**AFIRMAÇÃO.**  $g_k$  assume seu máximo (absoluto) em algum  $p_k \in M$ .

Com efeito, como  $g_k(p) > 0$ , segue de (1.10) que existe  $R > 0$  tal que  $\rho_p(x) > R \Rightarrow g_k(x) < g_k(p)$ . Como  $\overline{B_R(p)}$  é limitado e fechado e  $M$  é completa, o teorema de Hopf e Rinow garante que  $\overline{B_R(p)}$  é compacto. Por continuidade,  $g_k$  assume um máximo  $p_k \in \overline{B_R(p)}$ , o qual é, portanto, um máximo global. Em particular,  $f(p_k) - f(p) + 1 > 0$ .

Agora, há dois casos a considerar.

I CASO:  $p_k \in M \setminus \text{Cut}(p)$ . Se  $v \in T_x M$ , como (omitindo  $x$  por simplicidade)

$$v(g_k) = \frac{v(f)}{[\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)\rho_p v(\rho_p)}{[k(\rho_p^2 + 2) \ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}}, \quad (1.11)$$

obtemos, em  $p_k$ ,

$$0 = \nabla g_k = \frac{\nabla f}{[\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)\rho_p \nabla \rho_p}{[k(\rho_p^2 + 2) \ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}}. \quad (1.12)$$

Como  $|\nabla \rho_p(p_k)| = 1$ , obtemos (1.8).

Para o cálculo do laplaciano, a equação (1.11) nos dá

$$\begin{aligned} v(v(g_k)) &= \frac{v(v(f))}{[\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{2\rho_p v(f)v(\rho_p)}{k(\rho_p^2 + 2) [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &\quad - \frac{2\{ \rho_p v(f)v(\rho_p) + (f - f(p) + 1) [v(\rho_p)^2 + \rho_p v(v(\rho_p))] \}}{k(\rho_p^2 + 2) [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &\quad + \frac{4(f - f(p) + 1)\rho_p^2 v(\rho_p)^2}{k(\rho_p^2 + 2)^2 [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+2}} \left( \frac{1}{k} + 1 + \ln(\rho_p^2 + 2) \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Portanto, em  $p_k$ ,

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta g_k &= \frac{\Delta f}{[\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} - \frac{4\rho_p \langle \nabla f, \nabla \rho_p \rangle}{k(\rho_p^2 + 2) [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &\quad - \frac{2(f - f(p) + 1)(1 + \rho_p \Delta \rho_p)}{k(\rho_p^2 + 2) [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+1}} \\ &\quad + \frac{4(f - f(p) + 1)\rho_p^2}{k(\rho_p^2 + 2)^2 [\ln(\rho_p^2 + 2)]^{\frac{1}{k}+2}} \left( \frac{1}{k} + 1 + \ln(\rho_p^2 + 2) \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Novamente usando que  $|\nabla \rho_p(p_k)| = 1$ , segue de (1.12) que, em  $p_k$ ,

$$\langle \nabla f, \nabla \rho_p \rangle = \frac{2(f - f(p) + 1)\rho_p}{k(\rho_p^2 + 2) \ln(\rho_p^2 + 2)}.$$

Substituindo essa expressão em (1.14) e usando o Lema 1.2–(i), obtemos a desigualdade (1.9).

II CASO:  $p_k \in \text{Cut}(p)$ . Então  $p \in \text{Cut}(p_k)$ . Se  $\gamma$  é uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco ligando  $p_k = \gamma(0)$  a  $p$ , tal que  $p$  é o ponto de mínimo de  $p_k$  ao longo de  $\gamma$ , então  $q \notin \text{Cut}(p_k)$  para todo  $q \in \Gamma$ ,  $q \neq p, p_k$ . Fixando um

tal  $q = \gamma(\tau_0)$ , pelo Lema 1.3, podemos tomar um aberto  $\mathcal{U} \supset \tilde{\Gamma}$ , em que  $\tilde{\Gamma} = \gamma([0, \tau_0])$ , tal que, para todo  $x \in \mathcal{U}$ , há no máximo uma geodésica minimizante ligando  $q$  a  $x$ .

Denotemos por  $\tilde{\rho}_q$  a função distância a  $q$  na variedade  $\mathcal{U}$ . Temos que  $\tilde{\rho}_q$  é suave numa vizinhança de  $p_k$ , pois  $p_k \notin \text{Cut}(q) \cup \{q\}$ . Da definição de distância, inferimos que  $\tilde{\rho}_q(x) \geq \rho_q(x)$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

Definimos  $\tilde{g}_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{g}_k(x) = \frac{f(x) - f(p) + 1}{\{\ln [(\tilde{\rho}_q(x) + \rho_p(q))^2 + 2]\}^{\frac{1}{k}}}, \quad x \in \mathcal{U}.$$

AFIRMAÇÃO.  $\tilde{g}_k$  atinge seu máximo em  $p_k$ .

De fato, como  $g_k$  assume seu máximo em  $p_k$ , temos, para todo  $x \in \mathcal{U}$ , que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k(p_k) &= \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{\{\ln [(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))^2 + 2]\}^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} = g_k(p_k) \\ &\geq g_k(x) = \frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} \\ &\geq \frac{f(x) - f(p) + 1}{\{\ln [(\tilde{\rho}_q(x) + \rho_p(q))^2 + 2]\}^{\frac{1}{k}}} = \tilde{g}_k(x). \end{aligned}$$

(Na última desigualdade, usamos que  $\tilde{\rho}_q(x) + \rho_p(q) \geq \rho_q(x) + \rho_p(q) \geq \rho_p(x)$ .) Logo,  $\nabla \tilde{g}_k(p_k) = 0$  e  $\Delta \tilde{g}_k(p_k) \leq 0$ .

Note que a diferença entre as expressões de  $g_k$  e  $\tilde{g}_k$  é a troca de  $\rho_p(x)$  por  $\tilde{\rho}_q(x) + \rho_p(q)$ . Como  $\rho_p(q)$  é constante, um cálculo semelhante àquele que nos conduziu à expressão (1.11) mostra que, para  $v \in T_x \mathcal{U}$ , e omitindo  $x$  por clareza, temos

$$v(\tilde{g}_k) = \frac{v(f)}{\{\ln [\tilde{\rho}_q + \rho_p(q)] + 2\}^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)(\tilde{\rho}_q + \rho_p(q))\nabla \tilde{\rho}_q}{k [(\tilde{\rho}_q + \rho_p(q))^2 + 2] \{\ln [\tilde{\rho}_q + \rho_p(q)] + 2\}^{\frac{1}{k}+1}}.$$

Assim, em  $p_k$ ,

$$0 = v(\tilde{g}_k) = \frac{v(f)}{\{\ln [\tilde{\rho}_q + \rho_p(q)] + 2\}^{\frac{1}{k}}} - \frac{2(f - f(p) + 1)(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))\nabla\tilde{\rho}_q(p_k)}{k [(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))^2 + 2] \{\ln [\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q) + 2]\}^{\frac{1}{k}+1}}.$$

Como  $|\nabla\tilde{\rho}_q| = 1$ , obtemos

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))}{k [(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))^2 + 2] \ln [(\tilde{\rho}_q(p_k) + \rho_p(q))^2 + 2]},$$

De  $\tilde{\rho}_q(p_k) = \rho_q(p_k)$  e da continuidade da função distância  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , fazendo  $q \rightarrow p$ , seque que

$$|\nabla f(p_k)| = \frac{2(f(p_k) - f(p) + 1)\rho(p_k)}{k(\rho_p(p_k)^2 + 2) \ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)}$$

que é precisamente (1.8). De maneira similar, obtém-se (1.9).

Para provar (1.7), é suficiente mostrarmos que  $\limsup f(p_k) = \sup_M f$ . Se isso não fosse verdade, então existiriam  $\delta > 0$  e  $\bar{x} \in M$ , tais que

$$f(\bar{x}) > \limsup f(p_k) + \delta,$$

donde

$$f(\bar{x}) > f(p_k) + \delta/2, \tag{1.15}$$

para todo  $k$  suficientemente grande.

Se  $\rho_p(p_k) \rightarrow \infty$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , então

$$g_k(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(\bar{x})^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} > \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} = g_k(p_k),$$

quando  $\rho_p(p_k) > \rho_p(\bar{x})$ . Isso contradiria a definição de  $p_k$ .

Se, para alguma subsequência de  $k$ ,  $(p_k)$  convergisse para um ponto  $x_0$ , então, de (1.15), teríamos

$$f(\bar{x}) \geq f(x_0) + \delta/2. \quad (1.16)$$

Como

$$\frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} \rightarrow f(x) - f(p) + 1, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

temos

$$\frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} > f(x) - f(p) + 1 - \delta/4, \quad (1.17)$$

para  $j$  suficientemente grande. De

$$\frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} \rightarrow f(x_0) - f(p) + 1, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

segue que

$$f(x_0) - f(p) + 1 > \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} - \delta/4. \quad (1.18)$$

De (1.16), (1.17) e (1.18), decorre que

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} + \delta/4 &> f(\bar{x}) - f(p) + 1 \\ &> f(x_0) - f(p) + 1 + \delta/2 \\ &> \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} + \delta/4, \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{f(x) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(x)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}} > \frac{f(p_k) - f(p) + 1}{[\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)]^{\frac{1}{k}}},$$

novamente uma contradição.

■

**Teorema 1.13** (PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE OMORI-YAU) *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se  $f \in C^2(M)$  é limitada superiormente em  $M$ , então existe uma seqüência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que*

$$\lim_k f(p_k) = \sup_M f, \quad \lim_k |\nabla f(p_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_k \Delta f(p_k) \leq 0.$$

**Demonstração.** Caso  $f$  atinja máximo em  $M$  (em particular, se  $M$  for compacta), o resultado é trivial: de fato, basta tomarmos  $p^* \in M$  tal que  $f(p^*) = \sup_M f$  e  $p_k = p^*$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Caso contrário, fixemos  $p \in M$ , e seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  uma seqüência satisfazendo (1.7), (1.8) e (1.9), cuja existência é assegurada pelo Teorema 1.12. Então, pondo  $C_1 := \sup f$ , de (1.8), segue que

$$\begin{aligned} |\nabla f(p_k)| &\leq \frac{2(C_1 - f(p) + 1)}{k} \cdot \frac{\rho_p(p_k)}{\rho_p(p_k)^2 + 2} \cdot \frac{1}{\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} \\ &\leq \frac{2(C_1 - f(p) + 1)}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\ln 2}, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_k |\nabla f(p_k)| = 0.$$

Como a curvatura de Ricci de  $M$  é limitada inferiormente, existe, pelo Lema 1.2, uma constante (positiva)  $C_2$ , tal que  $K(p_k) \leq C_2$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Daí e de (1.9), inferimos que

$$\begin{aligned} \Delta f(p_k) &\leq \frac{2(C_1 - f(p) + 1)}{k} \cdot \frac{C_2 \rho_p(p_k) + 1}{\rho_p(p_k)^2 + 2} \cdot \frac{1}{\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} \\ &\quad + \frac{4(C_1 - f(p) + 1)}{k^2} \cdot \left( \frac{\rho_p(p_k)}{\rho_p(p_k)^2 + 2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\ln(\rho_p(p_k)^2 + 2)} \\ &\leq \frac{2(C_1 - f(p) + 1)C_3}{k \ln 2} + \frac{C_1 - f(p) + 1}{2k^2 \ln^2 2}, \end{aligned}$$

em que  $C_3$  é uma constante positiva, de modo que

$$\limsup_k \Delta f(p_k) \leq 0.$$

■

No caso em que  $f \in C^2(M)$  é uma função limitada inferiormente, aplicando o Teorema 1.13 à função  $-f$ , obtemos o seguinte

**Corolário 1.14** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se  $f \in C^2(M)$  é limitada inferiormente em  $M$ , então existe uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que*

$$\lim_k f(p_k) = \inf_M f, \quad \lim_k |\nabla f(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_k \inf \Delta f(p_k) \geq 0.$$

**Corolário 1.15** (CHENG-YAU [21]) *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa, com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-negativa de classe  $C^2$ , tal que  $\Delta f \geq \alpha f^\beta$  para algum par de números  $\alpha > 0$  e  $\beta > 1$  (em particular, se  $f$  for subharmônica), então  $f \equiv 0$ .*

Antes de passarmos à demonstração do Corolário 1.15, recordamos as seguintes expressões para o gradiente e o laplaciano de uma função  $F = \varphi \circ f$ , em que  $f \in C^\infty(M)$  e  $\varphi : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave:

$$\nabla F = \varphi'(f)\nabla f, \quad \Delta F = \varphi'(f)\Delta f + \varphi''(f)|\nabla f|^2. \quad (1.19)$$

### Demonstração do Corolário 1.15.

Definimos  $F := \varphi \circ f$ , em que

$$\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{(1+t)^\lambda} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda := \frac{\beta-1}{2} > 0.$$

Usando as fórmulas em (1.19) e o fato de que  $\varphi(t) > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , obtemos

$$\Delta F = \varphi'(f)\Delta f + \frac{\varphi''(f)}{\varphi'(f)^2}|\nabla f|^2,$$

de modo que

$$-\frac{\varphi''(f)}{\varphi'(f)^2}|\nabla f|^2 + \Delta F = \varphi'(f)\Delta f.$$

Agora, é fácil ver que

$$\varphi'(t) = -\lambda\varphi(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}, \quad \frac{\varphi''(f)}{\varphi'(f)^2} = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) \frac{1}{\varphi(f)}.$$

Assim,



$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) |\nabla f|^2 - f\Delta f &= \lambda\varphi(f)^{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \Delta f \\ &\geq \alpha\lambda \frac{f^\beta}{(1+f)^{2\lambda+1}} \\ &= \alpha\lambda \left(\frac{f}{1+f}\right)^\beta; \end{aligned}$$

em suma,

$$\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) |\nabla f|^2 - f\Delta f \geq \alpha\lambda \left(\frac{f}{1+f}\right)^\beta. \quad (1.20)$$

Como  $F$  é, claramente, limitada inferiormente ( $F \geq 0$ ), seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  uma sequência minimizante para  $F$  no sentido de Omori-Yau, cuja existência é assegurada pelo Corolário 1.14. Avaliando ambos os lados da desigualdade (1.20) em  $p_k$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$ , vemos que

$$\lim_k \left[ \alpha\lambda \left(\frac{f(p_k)}{1+f(p_k)}\right)^\beta \right] = 0,$$

donde  $\lim_k f(p_k) = 0$ . Ora, como  $\lim_k F(p_k) = \inf_M F$  e  $\varphi$  é estritamente decrescente,  $\lim_k f(p_k) = \sup_M f$ . O resultado segue. ■

Inspirados na prova do Corolário 1.15, se acrescentarmos às hipóteses deste corolário a hipótese de  $f$  ser limitada superiormente, então podemos estender o resultado para o caso em que  $\beta = 1$ . Mais precisamente, temos o seguinte

**Corolário 1.16** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se  $f$  é uma função de classe  $C^2$ , não-negativa, limitada superiormente e tal que  $\Delta f \geq cf$ , para alguma constante  $c > 0$ , então  $f \equiv 0$ .*

**Demonstração.** Definimos  $F : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  por  $F(x) = 1/\sqrt{1+f(x)}$ . Se  $A > 0$  é tal que  $f(x) \leq A$ , para todo  $x \in M$ , então

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+A}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+f}} = F \leq 1.$$

Ademais, note que  $F = \varphi(f)$ , em que  $\varphi : t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$ . Então

$$\nabla F = \varphi'(f)\nabla f = \frac{-\nabla f}{2(1+f)^{3/2}} = \frac{-F^3\nabla f}{2},$$

i.e.,

$$\nabla f = \frac{-2}{F^3} \nabla F.$$

Por outro lado,

$$\Delta F = \varphi'(f)\Delta f + \varphi''(f)|\nabla f|^2 = \frac{-\Delta f}{2(1+f)^{3/2}} + \frac{3|\nabla F|^2}{(1+f)^{3/5}F^6},$$

i.e.,

$$F\Delta F = \frac{-1}{2}F^4\Delta f + 3|\nabla F|^2,$$

ou ainda,

$$F^4\Delta f = 6|\nabla F|^2 - 2F\Delta F.$$

Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  uma sequência minimizante para  $F$  no sentido de Omori-Yau. Então, avaliando ambos os membros da última igualdade em  $p_k$ , fazendo  $k \rightarrow \infty$  e levando em consideração que  $F$  é limitada, obtemos  $\lim_k [F(p_k)^4 \Delta f(p_k)] = 0$ . Como  $F(p_k) \not\rightarrow 0$ , segue que  $\lim_k \Delta f(p_k) = 0$ . Daí e de  $\Delta f \geq cf$ , decorre que  $\lim f(p_k) = 0$ . Ora,  $\lim f(x_k) = \sup f$ . ■

**Observação 1.8** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa. Diremos que o princípio do máximo (forte) de Omori-Yau vale para  $M$  se, para qualquer função  $f \in C^2(M)$  limitada superiormente (respectivamente, inferiormente), for possível obter uma sequência de pontos de  $M$  satisfazendo as três condições do Teorema 1.13 (respectivamente, Corolário 1.14). Um tal sequência será dita uma sequência maximizante (respectivamente, sequência minimizante) para  $f$ . Note que o Teorema 1.13 estabelece uma condição suficiente para a validade do Omori-Yau, qual seja, a de que a curvatura de Ricci de  $M$  seja limitada inferiormente. Em seu belo opúsculo [54], S. Pigola, M. Rigoli e A.G. Setti provaram que a validade do Omori-Yau depende menos da curvatura de Ricci (e mesmo da geometria) de  $M$  do que os resultados apresentados nesta seção nos levariam a crer. Mais precisamente, eles provaram o seguinte*

*Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade riemanniana e suponha que existe uma função  $C^2$  não-negativa  $\nu$  satisfazendo as exigências a seguir:*

$$\nu(x) \rightarrow +\infty \quad \text{quando } x \rightarrow \infty,$$

$$\exists A > 0 \quad \text{tal que } |\nabla \nu| \leq A\nu^{1/2} \quad \text{fora de um compacto,}$$

$$\exists B > 0 \quad \text{tal que } \Delta \nu \leq B\nu^{1/2}G(\nu^{1/2})^{1/2} \quad \text{fora de um compacto,}$$

*em que  $G$  é uma função suave em  $[0, +\infty)$  satisfazendo:*

- (G1)  $G(0) > 0$ ;  
 (G2)  $G'(t) \geq 0$  em  $[0, +\infty)$ ;  
 (G3)  $G(t)^{-1/2} \notin L^1(+\infty)$ ;  
 (G4)  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tG(t^{1/2})}{G(t)} < +\infty$ .

Então, dada qualquer função  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < +\infty$ , existe uma sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  com as seguintes propriedades:

- (OY1)  $u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}$ ;  
 (OY2)  $|\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}$ ;  
 (OY3)  $\Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Se substituirmos a última exigência sobre a função  $\nu$  por  $\exists B > 0$  tal que  $\text{Hess } \nu \leq B\nu^{1/2}G(\nu^{1/2})^{1/2}\langle \cdot, \cdot \rangle$  fora de um compacto, no sentido de formas quadráticas, obteremos, em lugar de (OY3), a seguinte conclusão mais forte

$$\text{Hess } u(x_k) < \frac{1}{k}\langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Exemplos especialmente significativos de funções satisfazendo (G1) – (G4) são dados por

$$G(t) = t^2 \prod_{j=1}^N \left( \ln^{(j)}(t) \right)^2, \quad t \gg 1,$$

em que  $\ln^{(j)}$  denota o  $j$ -ésimo iterado da função logaritmo. As duas primeiras condições sobre a função  $\nu$  implicam que  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é completa.

**Exemplo 3** Uma variedade na qual não vale o princípio de Omori-Yau. Seja  $M$  o plano  $\mathbb{R}^2$  com a métrica  $\mathbf{g} = dr^2 + h^2(r)d\theta^2$ , em que  $h \in C^\infty([0, +\infty))$  é tal que  $h(r) > 0$  para  $r > 0$  e

$$h(r) = \begin{cases} r, & \text{se } 0 \leq r \leq 1, \\ 3r^2e^{r^3}, & \text{se } r \geq 3. \end{cases}$$

A métrica  $\mathbf{g}$  é suave e completa. Definimos  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \int_0^{r(x)} \left( \frac{1}{h(t)} \int_0^t h(s) ds \right) dt.$$

Então  $f \in C^2(M)$ ,  $\sup_M f < +\infty$  e  $\Delta f \equiv 1$ . Em particular, não existe nenhuma sequência  $(p_k)$  em  $M$  tal que  $\limsup_k \Delta f(p_k) \leq 0$ . Para  $r > 3$ , a curvatura gaussiana de  $M$  é dada por

$$K(r) = -\frac{h''(r)}{h(r)} = -\left( 9r^2 + 18r + \frac{2}{r^2} \right),$$

donde  $K(r) \rightarrow -\infty$  quando  $r \rightarrow +\infty$ .

### 1.3.2 O princípio do máximo de Hopf-Calabi

**Lema 1.4** *Se  $f, g : (M, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções  $C^2$  tais que  $f(p) = g(p)$  e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x$  próximo de  $p$ , então*

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= \nabla g(p), \\ \text{Hess } f(p) &\geq \text{Hess } g(p), \\ \Delta f(p) &\geq \Delta g(p).\end{aligned}$$

**Demonstração.** Se  $(M, \mathfrak{g}) \subset (\mathbb{R}, \text{can})$ , então o resultado é simples cálculo. Em geral, tomando uma geodésica  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ , podemos usar essa observação para  $f \circ \alpha$  e  $g \circ \alpha$ , a fim de ver que

$$\begin{aligned}df(\alpha'(0)) &= dg(\alpha'(0)) \\ \text{Hess } f(\alpha'(0), \alpha'(0)) &\geq \text{Hess } g(\alpha'(0), \alpha'(0)).\end{aligned}$$

Claramente, isso implica o lema, se fizermos  $v = \dot{\alpha}(0)$  percorrer todos os  $v \in T_p M$ . ■

Desse lema decorre que uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tem  $\text{Hess } f(p) \geq B$ , em que  $B$  é uma aplicação bilinear simétrica em  $T_p M$  (ou  $\Delta f(p) \geq a \in \mathbb{R}$ ) se, e somente se, existe uma função  $f_\epsilon(x)$ , definida numa vizinhança de  $p$ , tal que

- (i)  $f_\epsilon(p) = f(p)$ ;
- (ii)  $f(x) \geq f_\epsilon(x)$  em alguma vizinhança de  $p$ ;
- (iii)  $\text{Hess } f_\epsilon(p) \geq B - \epsilon \cdot \mathfrak{g}|_p$  (ou  $\Delta f_\epsilon(p) \geq a - \epsilon$ ).

As próximas definições visam dar sentido a esses fatos (reproduzi-los, se assim podemos dizer) quando  $f$  é apenas uma função contínua.

**Definição 1.17 (FUNÇÃO-SUPORTE)** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Uma função-suporte para uma função contínua  $f$  em um ponto  $x_0 \in M$  é uma função  $g$  de classe  $C^2$ , definida em uma vizinhança de  $x_0$ , tal que  $g(x_0) = f(x_0)$  e  $g(x) \leq f(x)$  nessa vizinhança.*

**Definição 1.18 (SUB/SUPERHAMONICIDADE NO SENTIDO DE FUNÇÕES-SUPORTE)** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $f \in C^0(M)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $\Delta f \geq a$*

em  $x_0$  no sentido de funções-suporte se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir uma função-suporte  $\tilde{f} = f_{x_0, \epsilon}$  de  $f$  em  $x_0$  tal que

$$\Delta \tilde{f} \geq a - \epsilon,$$

em que, nesta última ocorrência,  $\Delta$  denota o operador de Laplace-Beltrami. Diremos que  $\Delta f \geq a$  se  $\Delta f \geq a$  em todo  $x \in M$ . Uma função contínua  $f$  com  $\Delta f \geq 0$  (respectivamente,  $\Delta f \leq 0$ ) será dita subharmônica (respectivamente, superharmônica).

**Teorema 1.19** (PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE HOPF-CALABI [14, 40]) *Sejam  $M^n$  uma variedade riemanniana conexa de dimensão  $n$  e  $f \in C^0(M)$  uma função subharmônica (no sentido de funções-suporte). Então  $f$  não atinge máximo em  $M^n$ , a menos que  $f$  seja constante.*

A demonstração que apresentaremos é devida a J. Eschenburg e E. Heintze [28]. (Veja também [19, 20, 59].)

**Demonstração.** Seja  $p$  um máximo local, de tal maneira que  $f(p) \geq f(x)$  para todo  $x$  próximo de  $p$ . Tomemos uma pequena bola coordenada normal  $B_\delta(p)$ , e vamos supor que exista um ponto  $z \in \partial B_\delta(p)$  tal que  $f(p) > f(z)$ . Então, por continuidade,  $f(p) > f(z')$  para  $z' \in \partial B_\delta(p)$  suficientemente próximo de  $z$ . Consideremos um sistema de coordenadas normal  $\{x^i\}_{i=1}^n$  tal que  $z = (\delta, 0, \dots, 0)$ . Ponhamos  $\phi(x) := x^1 - d((x^2)^2 + \dots + (x^n)^2)$ , em que  $d$  é um número tão grande que, se  $y \in \partial B_\delta(p)$  e  $f(y) = f(p)$ , então  $\phi(y) < 0$ . Note que

$$\nabla \phi = \frac{\partial}{\partial x^1} - \dots \neq 0.$$

Seja  $\psi := e^{a\phi} - 1$ . Então  $\Delta \psi = (a^2 |\nabla \phi|^2 + a \Delta \phi) e^{a\phi}$ . Logo, para  $a$  suficientemente grande,  $\Delta \psi > 0$ . Ademais,  $\psi(p) = 0$ . Assim, para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno,

$$(f + \mu\psi)|_{\partial B_\delta(p)} < f(p), \quad (f + \mu\psi)(p) = f(p).$$

Por conseguinte,  $f + \mu\psi$  tem um máximo interior em algum ponto  $q \in B_\delta(p)$ .

Se  $\tilde{f} = f_{q, \epsilon}$  é uma função-suporte para  $f$  em  $q$  com  $\Delta \tilde{f} \geq -\epsilon$ , então  $\tilde{f} + \mu\psi$  é também uma função-suporte para  $f + \mu\psi$  em  $q$ . Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos que  $\Delta(\tilde{f} + \mu\psi) > 0$ . Como  $f + \mu\psi$  tem um máximo local em  $q$  e

$$\tilde{f} + \mu\psi < f + \mu\psi, \quad (\tilde{f} + \mu\psi)(q) = (f + \mu\psi)(q),$$

segue que  $\tilde{f} + \mu\psi$  tem um máximo local em  $q$ . Isso é uma contradição, uma vez que o Hessiano de uma função em um ponto de máximo é negativo semi-definido, logo seu traço é  $\leq 0$ .

Portanto, o conjunto de pontos nos quais  $f$  atinge um máximo é aberto e fechado e, por hipótese, coincide com toda a variedade. ■

### 1.3.3 A fórmula de Bochner

**Teorema 1.20** (BOCHNER [10, 12]) *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e seja  $f \in C^2(M)$ . Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\text{Hess } f|^2. \quad (1.21)$$

**Demonstração.** Fixemos  $p \in M$ , e seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial ortonormal em uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ , geodésico em  $p$ . Então, em  $p$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \sum_i (\text{Hess } |\nabla f|^2)(E_i, E_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i E_i(E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle) = \sum_i E_i(\langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle + \sum_i |\nabla_{E_i} \nabla f|^2 \\ &= \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle + |\text{Hess } f|^2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Agora, para  $X \in TM$ , temos que

$$\sum_i \langle R(E_i, X) \nabla f, E_i \rangle = \sum_i \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f - \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f + \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle. \quad (1.23)$$

Como o referencial é geodésico em  $p$ , temos que  $\nabla_X E_i(p) = 0$  e, daí, em  $p$ ,

$$\sum_i \langle \nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \sum_i X \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle. \quad (1.24)$$

Novamente em virtude de o referencial ser geodésico em  $p$ , junto com o fato de  $\text{Hess } f$

ser um operador linear auto-adjunto, obtemos, em  $p$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f - \nabla_{[E_i, X]} \nabla f, E_i \rangle &= E_i \langle \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_X \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_{E_i} \nabla f, [E_i, X] \rangle \\
 &= E_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, X \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} X - \nabla_X E_i \rangle \tag{1.25} \\
 &= \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, X \rangle + \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} X \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} X \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, X \rangle.
 \end{aligned}$$

Substituindo (1.24) e (1.25) em (1.23), obtemos

$$\sum_i \langle R(E_i, X) \nabla f, E_i \rangle = \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle - \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, X \rangle$$

ou, ainda,

$$\sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \nabla f, X \rangle = \text{Ric}(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle.$$

Basta tomar  $X = \nabla f$  na última relação e substituir o resultado em (1.22). ■

**Observação 1.9** Em [34], a fórmula de Bochner é deduzida da seguinte identidade para 1-formas diferenciais:

$$((D_X D_Y - D_Y D_X) \alpha)(Z) = \alpha(R(X, Y)Z),$$

quaisquer que sejam os campos  $X, Y, Z$  em  $(M, \mathfrak{g})$  e a 1-forma  $\alpha$ . Aplicando essa fórmula a  $\alpha = df$ , obtemos

$$DDdf(X, Y, Z) - DDdf(Y, X, Z) = df(R(X, Y)Z).$$

Tomando traços com respeito a  $X$  e a  $Z$  e observando que

$$DDdf(X, Y, Z) = DDdf(X, Z, Y)$$

(pois  $df$  é fechada), vemos que

$$\text{tr}_{12} DDdf(Y) = -d\Delta f(Y) + \text{Ric}(\nabla f, Y).$$

Por outro lado,  $D_X |df|^2 = 2\mathfrak{g}(D_X df, df)$ , donde

$$D_{X, Y}^2 |df|^2 = 2\mathfrak{g}(D_X df, D_Y df) + 2\mathfrak{g}(D_X D_Y df, df).$$

Tomando o traço, obtemos

$$-\frac{1}{2}\Delta|df|^2 = |Ddf|^2 + \text{tr}_{12}DDdf(\nabla f).$$

A fórmula desejada segue, bastando para isso eliminar o termo  $DDdf(\nabla f)$ .

Combinaremos o princípio do máximo de Omori e Yau (1.13) e a fórmula de Bochner (1.20) para obter a seguinte extensão do teorema de Liouville, devida ao S. T. Yau ([66]).

**Proposição 1.21** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa, com curvatura de Ricci não negativa. As únicas funções harmônicas limitadas inferiormente em  $M^n$  são as constantes.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\inf_M f > 0$ . Para  $a > 0$ , definimos uma função  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|\nabla f(x)|^2 + a}}. \quad (1.26)$$

Da definição de  $g$  e das propriedades do gradiente, segue que

$$\nabla g = \frac{\nabla f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - \frac{f\nabla|\nabla f|^2}{2(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}}. \quad (1.27)$$

Usando  $\text{div}(hX) = \langle \nabla h, X \rangle + h\text{div}X$  e a fórmula de Bochner (1.21), obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta g &= -\frac{\langle \nabla|\nabla f|^2, \nabla f \rangle}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} + \frac{\Delta f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} + \frac{3f|\nabla|\nabla f|^2|^2}{4(|\nabla f|^2 + a)^{5/2}} \\ &\quad - \frac{f}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \{|\text{Hess}f|^2 + \langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f)\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Como, por hipótese,  $\Delta f = 0$  e  $\text{Ric}_M \geq 0$ , segue que

$$\Delta g \leq -\frac{\langle \nabla|\nabla f|^2, \nabla f \rangle}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} + \frac{3f|\nabla|\nabla f|^2|^2}{4(|\nabla f|^2 + a)^{5/2}} - \frac{f}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}}|\text{Hess}f|^2. \quad (1.29)$$

Tomando o produto interno de (1.27) com  $\nabla f$  e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos



$$-\frac{\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f \rangle}{|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \leq \frac{2}{f} \left\{ |\nabla g| |\nabla f| - \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} \right\}. \quad (1.30)$$

De (1.27), vem também que

$$\begin{aligned} \frac{3f|\nabla |\nabla f|^2|^2}{4(|\nabla f|^2 + a)^{5/2}} &= \frac{3\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}{f} \left| \frac{f\nabla |\nabla f|^2}{2(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \right|^2 \\ &\leq \frac{3\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}{f} \left[ \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} + |\nabla g| \right]^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.29) por  $g$  e usando (1.26), (1.30) e (1.31), obtemos

$$\begin{aligned} g\Delta g &\leq 2 \left( \frac{|\nabla g| |\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|^2 + a} \right) + 3 \left( \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} + |\nabla g| \right)^2 \\ &\quad - \frac{f^2}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} |\text{Hess } f|^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Portanto,

$$\frac{f|\nabla f| |\text{Hess } f|}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \leq \sqrt{8|\nabla g| + 1 + 3|\nabla g|^2 - g\Delta g} \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}. \quad (1.33)$$

Agora, dado  $x \in M$  com  $\nabla f(x) \neq 0$ , escolhamos uma base ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $T_x M$  tal que  $e_1 = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ . Usando a desigualdade  $\left(\sum_{i=1}^k c_i\right)^2 \leq k \sum_{i=1}^k c_i^2$ , obtemos, em  $x$ ,

$$\begin{aligned} |\text{Hess } f|^2 &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n f_{ii}^2 = f_{11}^2 + \sum_{i=2}^n f_{ii}^2 \geq f_{11}^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=2}^n f_{ii} \right)^2 \\ &= f_{11}^2 + \frac{1}{n-1} (\Delta f - f_{11})^2 = f_{11}^2 + \frac{f_{11}^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} f_{11}^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Tomando o produto interno de (1.27) com  $e_1$ , temos

$$\langle \nabla g, e_1 \rangle = \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - \frac{f \langle \nabla_{e_1} \nabla f, \nabla f \rangle}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} = \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - \frac{f |\nabla f| f_{11}}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}}$$

e, daí,

$$\frac{f|\nabla f||f_{11}|}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \geq \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - |\langle \nabla g, e_1 \rangle| \geq \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - |\nabla g|. \quad (1.35)$$

Combinando (1.34) e (1.35), obtemos

$$\frac{f|\nabla f||\text{Hess}f|}{(|\nabla f|^2 + a)^{3/2}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left( \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - |\nabla g| \right). \quad (1.36)$$

De (1.33) e (1.36), temos

$$\sqrt{8|\nabla g| + 1 + 3|\nabla g|^2 - g\Delta g} \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left( \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} - |\nabla g| \right),$$

que implica

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n}{n-1}} |\nabla g| &\geq \\ &\frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}} \left( \sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{8|\nabla g| + 1 + 3|\nabla g|^2 - g\Delta g} \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Seja, agora,  $(p_k) \subset M$  uma sequência minimizante para  $g$  no sentido do Omori-Yau. Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\nabla g(p_k)| < \epsilon, \quad -g(p_k)\Delta g(p_k) < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Daí e de (1.37), temos

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} \epsilon > \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}(p_k) \left( \sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{1 + 9\epsilon + 3\epsilon^2} \right),$$

implicando

$$\limsup_k \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}(p_k) \leq \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}} \epsilon}{\sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{1 + 9\epsilon + 3\epsilon^2}}.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$  na desigualdade precedente, encontramos que

$$\limsup_k \frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}(p_k) = 0.$$

Portanto, existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{|\nabla f|}{\sqrt{|\nabla f|^2 + a}}(p_k) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall k \geq k_1$$

e, assim,  $|\nabla f(p_k)|^2 < a, \forall k \geq k_1$ . Ora,

$$g(p_k) = \frac{f(p_k)}{\sqrt{|\nabla f(p_k)|^2 + a}} > \frac{f(p_k)}{\sqrt{2a}} \geq \frac{\inf f}{\sqrt{2a}}, \quad \forall k \geq k_1.$$

Como  $g(p_k) \rightarrow \inf g$ , segue que  $\inf g \geq \frac{\inf f}{\sqrt{2a}}$ . Portanto,

$$\frac{|\nabla f(p)|}{f(p)} < \frac{\sqrt{|\nabla f(p)|^2 + a}}{f(p)} = \frac{1}{g(p)} \leq \frac{1}{\inf g} \leq \frac{\sqrt{2a}}{\inf f}, \quad \forall p \in M, a > 0.$$

Fazendo  $a \rightarrow 0^+$ , obtemos que  $|\nabla f(p)| = 0$ , para todo  $p \in M$ . ■

**Exemplo 4** Com o auxílio do princípio do máximo de Hopf-Calabi e da Fórmula de Bochner estabeleceremos o seguinte resultado, devido a Myers e a Cheng:

*Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade riemanniana completa cuja curvatura de Ricci satisfaz  $\text{Ric}_M \geq (n-1)\kappa = \text{Ric}_{\mathbb{S}^n(\kappa)}$ . Então  $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ , e a igualdade vale se, e somente se,  $(M, \mathbf{g})$  é isométrica a  $\mathbb{S}^n(\kappa)$ .*

*Necessitaremos desta*

**Proposição 1.22** (COMPARAÇÃO DO LAPLACIANO) *Sejam  $M$  completa e  $p \in M$ . Denote por  $r(x) := d(p, x), x \in M$ , a função distância a partir de  $p$ . Se  $\text{Ric}(v, v) \geq (n-1)\kappa$ , para todo  $v \in UM$ , então, em  $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ , temos*

$$\Delta r \leq \Delta^\kappa r = \begin{cases} (n-1)\sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa}r), & \text{se } \kappa > 0, \\ (n-1)/r, & \text{se } \kappa = 0, \\ (n-1)\sqrt{-\kappa} \coth(\sqrt{-\kappa}r), & \text{se } \kappa < 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

*Aqui  $\Delta^\kappa$  denota o operador de Laplace-Beltrami na variedade Riemanniana simplesmente conexa  $M(\kappa)$  com curvatura seccional constante  $\kappa$ .*

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1.22.** *Aplicando a fórmula de Bochner (1.21) à função  $f(x) = r(x)$  em  $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ , onde  $r$  é suave e  $|\nabla r| = 1$ , obtemos*

$$|\text{Hess } r|^2 + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta r) + \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0.$$

*Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os auto-valores de  $\text{Hess } r$ , i.e., os autovalores da aplicação linear auto-adjunta*

$$v \mapsto \nabla_v \nabla r.$$

Como  $\nabla r(x) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_x = \gamma'_{r(x)}$ , em que  $\gamma$  é a única geodésica normalizada ligando  $p$  a  $x$ , temos

$$\nabla_{\nabla r} \nabla r = 0.$$

Segue que um dos auto-valores, digamos  $\lambda_1$ , é zero. A desigualdade de Cauchy-Schwarz dá

$$\frac{(\Delta r)^2}{n-1} = \frac{(\text{traço}(\text{Hess } r))^2}{n-1} = \frac{(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}{n-1} \leq \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = |\text{Hess } r|^2.$$

Como  $\text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \geq (n-1)\kappa$ , obtemos a **desigualdade de Riccati**

$$\frac{(\Delta r)^2}{n-1} + \frac{\partial}{\partial r} + (n-1)\kappa \leq 0. \quad (1.39)$$

Definimos

$$\text{sn}_\kappa(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t), & \text{se } \kappa > 0, \\ t, & \text{se } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t), & \text{se } \kappa < 0, \end{cases}$$

$$\text{ct}_\kappa(t) := \frac{\text{sn}'_\kappa(t)}{\text{sn}_\kappa(t)}$$

e

$$\psi_\kappa(t) := (n-1)\text{ct}_\kappa(t).$$

Note que  $\psi_\kappa$  satisfaz a **equação de Riccati**,

$$\psi'_\kappa + \frac{\psi_\kappa^2}{n-1} + (n-1)\kappa = 0.$$

Sejam  $x \in M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ ,  $\gamma$  a única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $x$ ,  $v := \gamma'(0)$  e  $\varphi(t) = \Delta r(\gamma(t))$ . Observe que  $\varphi$  satisfaz

$$\varphi' + \frac{\varphi^2}{n-1} + (n-1)\kappa \leq 0.$$

Por outro lado, como

$$\Delta r = \frac{n-1}{r} + O(r), \quad \text{quando } r \rightarrow 0, \quad (1.40)$$

i.e.,  $\varphi(t) = \frac{n-1}{t} + O(t)$ , existe  $r_0 \leq d(v)$  tal que

$$\frac{\varphi(t)^2}{n-1} + (n-1)\kappa > 0, \quad \forall t \in (0, r_0). \quad (1.41)$$

Assim, levando em consideração a desigualdade (1.39), obtemos

$$\frac{-\varphi'}{\frac{\varphi^2}{n-1} + (n-1)\kappa} \geq 1 \quad \text{em } (0, r_0).$$

Por integração, obtemos

$$\int_0^t \frac{-\varphi'}{\frac{\varphi^2}{n-1} + (n-1)\kappa} ds \geq t, \quad \forall t \in (0, r_0],$$

donde

$$\text{arc ct}_\kappa \left( \frac{\varphi(t)}{n-1} \right) \geq t, \quad \forall t \in (0, r_0].$$

(Aqui  $\text{arc ct}_\kappa$  denota a função inversa de  $\text{ct}_\kappa$ .) Daí,

$$\varphi(t) \leq (n-1)\text{ct}_\kappa(t) = \psi_\kappa(t), \quad t \in (0, r_0].$$

Pomos

$$t_0 := \sup\{0 < t < \tau(v) : \varphi \leq \psi_\kappa \text{ em } (0, t)\}.$$

Se  $t_0 = \tau(v)$ , obtemos (1.38). Se  $t_0 < \tau(v)$ , então  $\varphi(t_0) = \psi_\kappa(t_0)$  e, assim,

$$\frac{\psi(t_0)^2}{n-1} + (n-1)\kappa = \frac{\psi_\kappa(t_0)^2}{n-1} + (n-1)\kappa > 0.$$

Mas, então, (1.41) vale em  $(0, t_0 + \epsilon)$  para algum  $\epsilon > 0$  e, portanto,  $\varphi(t) \leq \psi_\kappa(t)$ , para todo  $t \in (0, t_0 + \epsilon)$ , o que contradiz a definição de  $t_0$ . Logo,  $\varphi(t) \leq \psi_\kappa(t)$ , para todo  $t \in (0, \tau(v))$ . Em  $M(\kappa)$ , a desigualdade (1.39) é, na verdade, uma igualdade. Como  $\Delta^\kappa r$  satisfaz (1.40), temos  $\Delta^\kappa(x) = \psi_\kappa(x)$ . ■

Passemos ao resultado prometido:

**DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO DE MYERS E CHENG.** A primeira parte do teorema é já bastante conhecida. Provaremos a parte da rigidez. Podemos supor que  $\kappa = 1$ . Sejam  $p, q \in M$  tais que  $d(p, q) = \pi$ . Denote por  $r$  e  $\tilde{r}$  as funções distância a partir de  $p$  e  $q$ , respectivamente. Pela desigualdade triangular, temos  $r + \tilde{r} \geq \pi$ , e a igualdade vale para qualquer  $x \in M \setminus \{p, q\}$  que pertença a uma segmento ligando  $p$  e  $q$ . Defina  $f := r + \tilde{r} - \pi$ . Então  $f \geq 0$ . Como  $\tilde{r} \geq \pi - r$ , temos  $\cot \tilde{r} \leq \cot(\pi - r) = -\cot r$ . Segue daí e da Proposição 1.22 que

$$\Delta f \leq (n-1)(\cot r + \cot \tilde{r}) \leq 0.$$

Assim,  $f$  é uma função super-harmônica que atinge seu mínimo em  $M$ . O Teorema 1.19, aplicado à função  $-f$ , garante que  $f \equiv 0$ . Consequentemente,  $r + \tilde{r} = \pi$ , e qualquer geodésica normalizada partindo de  $p$  encontra  $q$  a uma distância  $\pi$ . Logo,  $\text{Cut}(p) = \{q\}$  e  $\text{Cut}(q) = \{p\}$ . Em particular,  $r$  e  $\tilde{r}$  são suaves em  $M \setminus \{p, q\}$ . A partir daí, é possível provar que  $\text{Hess } r = \cot(r)ds_{n-1}^2$  em  $M \setminus \{p, q\}$  e que  $\mathbf{g} = dr^2 + \sin(r)ds_{n-1}^2$ . Ora, esta última condição implica que  $M$  deve ser (isométrica a)  $\mathbb{S}^n$  (veja, por exemplo, [53], p. 136–137, 270–272 e 284–285). ■

### 1.3.4 O laplaciano das funções altura e suporte

Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-riemanniana conexa com métrica  $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  de índice  $\nu \leq 1$  e conexão semi-riemanniana  $\overline{\nabla}$ . Para um campo de vetores  $X \in T\overline{M}$ , seja  $\epsilon(X) = \langle X, X \rangle$ .

Um campo de vetores  $V$  em  $\overline{M}^{n+1}$  é dito *conforme* se

$$\mathcal{L}_V \langle \cdot, \cdot \rangle = 2\varphi \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

para alguma função  $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$ , em que  $\mathcal{L}$  denota a derivada de Lie da métrica de  $\overline{M}$ . A função  $\phi$  é chamada de *fator conforme* de  $V$ .

Como  $\mathcal{L}_V(X) = [X, X]$  para todo  $X \in T\overline{M}$ , segue do caráter tensorial de  $\mathcal{L}_V$  que  $V \in T\overline{M}$  é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle = 2\varphi \langle X, Y \rangle,$$

para todos  $X, Y \in T\overline{M}$ . Em particular,  $V$  é campo de Killing relativamente a  $\overline{g}$  se, e somente se,  $\phi \equiv 0$ .

No que segue, consideraremos *imersões riemannianas*  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , ou seja, imersões de uma variedade suave  $n$ -dimensional, orientável e conexa,  $\Sigma^n$  em  $\overline{M}^{n+1}$ , tal que a métrica induzida  $g = \psi^*(\overline{g})$  faz de  $\Sigma^n$  uma variedade riemanniana, com conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . Orientamos  $\Sigma^n$  pela escolha de um campo de vetores normal e unitário  $N$ , e sejam  $A$  o endomorfismo de Weingarten e  $H = (\epsilon \text{traço}(A))/n$  a curvatura média correspondentes.

O resultado a seguir apareceu pela primeira vez em [60], no contexto riemanniano. Em [9], A. Barros, A. Brasil e A. Caminha generalizaram-no para o contexto lorentziano. Apresentamos aqui a versão unificada que pode ser encontrada em [17].

**Teorema 1.23 (Proposição 2.1 de [17])** *Seja  $\overline{M}$  uma variedade semi-riemanniana de dimensão  $n + 1$  que admite um campo de vetores conforme  $V$ , com fator conforme  $\phi \in C^\infty(\overline{M})$ , e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão riemanniana. Se  $\eta := \langle V, N \rangle$ , então*

$$\Delta\eta = -\epsilon n \langle V, \nabla H \rangle - \epsilon \eta \{ \overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2 \} - n \{ \epsilon H \varphi + N(\varphi) \}, \quad (1.42)$$

em que  $\epsilon = \epsilon(N)$ ,  $\nabla H$  é o gradiente de  $H$  na métrica de  $\Sigma^n$ ,  $\overline{\text{Ric}}$  é o tensor de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  e  $|A|$  é a norma de Hilbert-Schmidt de  $A$ .

**Demonstração.** Fixemos  $p \in \Sigma^n$ , e seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial ortonormal em uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma^n$ , geodésico em  $p$ , e tal que, também em  $p$ ,  $AE_i = \lambda_i E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (i.e.,  $\{E_i|_p\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$  formada por autovetores de  $A$ , com autovalores  $\{\lambda_i\}$ ). Estendemos  $E_i$  a uma vizinhança de  $p$  em  $\bar{M}$  de tal forma que  $\bar{\nabla}_N E_i(p) = 0$ . Podemos escrever

$$V = \sum_i \alpha_i E_i + \epsilon \eta N.$$

Então

$$\begin{aligned} \eta = \langle N, V \rangle \implies E_i(\eta) &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, V \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle \\ &= -\langle AE_i, V \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= \sum_i E_i(E_i(\eta)) = -\sum_i E_i \langle AE_i, V \rangle + \sum_i E_i \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle \\ &= -\sum_i \langle \bar{\nabla}_{E_i} AE_i, V \rangle - 2 \sum_i \langle AE_i, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle + \sum_i \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Agora, derivando  $AE_i = \sum_j h_{ij} E_j$  com relação a  $E_i$ , obtemos em  $p$

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \bar{\nabla}_{E_i} AE_i, V \rangle &= \sum_{i,j} E_i(h_{ij}) \langle E_j, V \rangle + \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, V \rangle \\ &= \sum_{i,j} \alpha_j E_i(h_{ij}) + \epsilon \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, N \rangle \langle V, N \rangle \\ &= \sum_{i,j} \alpha_j E_i(h_{ij}) + \epsilon \sum_{i,j} h_{ij}^2 \eta \\ &= \sum_{i,j} \alpha_j E_i(h_{ij}) + \epsilon \eta |A|^2. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Usando que  $AE_i = \lambda_i E_i$  em  $p$ , temos que, em  $p$ ,

$$\sum_i \langle AE_i, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = \sum_i \lambda_i \langle E_i, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = \sum_i \lambda_i \varphi = \epsilon n H \varphi. \tag{1.45}$$

A fim de computar o último somatório de (1.43), note que a conformidade de  $V$  dá

$$\langle \bar{\nabla}_N V, E_i \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = 0$$

para todo  $k$ . Derivando a relação precedente na direção de  $E_i$ , temos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_N V, E_i \rangle + \langle \bar{\nabla}_N V, \bar{\nabla}_{E_i} E_i \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = 0.$$

Contudo, em  $p$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_N V, \bar{\nabla}_{E_i} E_i \rangle &= \epsilon \langle \bar{\nabla}_N V, \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N \rangle N \rangle = \epsilon \langle \bar{\nabla}_N V, \lambda_i N \rangle \\ &= \epsilon \lambda_i \varphi \langle N, N \rangle = \lambda_i \varphi. \end{aligned}$$

e

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = -\lambda_i \langle E_i, \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = -\lambda_i \varphi,$$

donde

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_N V, E_i \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle = 0. \quad (1.46)$$

Por outro lado, como

$$[N, E_i](p) = \bar{\nabla}_N E_i(p) - \bar{\nabla}_{E_i} N(p) = \lambda_i E_i(p),$$

segue de (1.46) que

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(N, E_i)V, E_i \rangle_p &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_N V - \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{E_i} V + \bar{\nabla}_{[N, E_i]} V, E_i \rangle_p \\ &= -\langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle_p - N \langle \bar{\nabla}_{E_i} V, E_i \rangle_p + \langle \bar{\nabla}_{\lambda_i E_i} V, E_i \rangle_p \\ &= -\langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle_p - N(\varphi) + \lambda_i \varphi, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_i \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} V \rangle_p = -nN(\varphi) + \epsilon n H \varphi - \bar{\text{Ric}}(N, V)_p. \quad (1.47)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{\text{Ric}}(N, V) &= \sum_j \alpha_j \bar{\text{Ric}}(N, e_j) + \epsilon \eta \bar{\text{Ric}}(N, N) \\ &= \sum_{i,j} \langle \bar{R}(E_i, E_j) E_i, N \rangle + \epsilon \eta \bar{\text{Ric}}(N, N) \end{aligned}$$

e

$$\langle \bar{R}(E_i, E_j) E_i, N \rangle_p = \langle \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\nabla}_{E_i} E_i - \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_j} E_i, N \rangle_p.$$



Daí,

$$\overline{\text{Ric}}(N, V)_p = \sum_{i,j} \alpha_j E_j(h_{ii}) - \sum_{i,j} \alpha_j E_i(h_{ij}) + \epsilon \eta \overline{\text{Ric}}(N, N)_p.$$

Segue de (1.49) que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle N, \overline{\nabla}_{E_i} \overline{\nabla}_{E_i} V \rangle_p = & -nN(\varphi) + \epsilon n H \varphi - V^\top(\epsilon n H) \\ & + \sum_{i,j} \alpha_j E_i(h_{i,j}) - \epsilon \eta \overline{\text{Ric}}(N, N). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Substituindo (1.44), (1.46) e (1.48) em (1.43), obtemos a desejada fórmula (1.42). ■

**Exemplo 5 (Corolário 1 de [32])** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $(n+1)$ , admitindo um campo de Killing  $K$ . Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta e orientável, com campo normal unitário  $N$  e curvatura média constante  $H$ . Suponha que*

$$\overline{\text{Ric}}(V, V) \geq -nH^2, \quad \forall V \in U\overline{M}.$$

*Se a função ângulo  $\eta = \langle N, K \rangle$  de  $\psi$  não muda de sinal em  $\Sigma^n$ , então  $\Sigma^n$  é invariante pelo grupo de isometrias a um parâmetro de  $\overline{M}^{n+1}$  determinado por  $K$  ou  $\Sigma^n$  é umbílica e  $\overline{M}^{n+1}$  tem curvatura de Ricci não positiva  $\overline{\text{Ric}}(N, N) = -nH^2$  na  $N$ -direção.*

**Demonstração.** Não há perda de generalidade em supormos que  $\eta \geq 0$ . Note que  $\langle K, \nabla H \rangle \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv 0$  e, por (1.42),

$$\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2 \geq \overline{\text{Ric}}(N, N) + nH^2 \geq 0.$$

*Segue do Teorema 1.23 que  $\Delta\eta \leq 0$ . Como  $M$  é compacta, decorre do teorema de Hopf que  $\eta = \text{constante}$  e, assim,  $\Delta\eta \equiv 0$ . Logo,  $\eta \equiv 0$  ou  $\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2 \equiv 0$ . No primeiro caso, concluímos que  $K$  é um campo vetorial em  $\Sigma^n$ , donde  $\Sigma^n$  é invariante pelo grupo de isometrias a um parâmetro determinado por  $K$ . No segundo caso, teremos  $|A|^2 = nH^2 = -\overline{\text{Ric}}(N, N)$ , e a igualdade  $|A|^2 = nH^2$  implica que  $\Sigma^n$  é umbílica. ■*

**Exemplo 6 (Corolário 2 de [32])** *Seja  $\overline{M}^3$  uma variedade Riemanniana de dimensão 3. Seja  $M^2$  uma superfície completa, conexa, simplesmente conexa e de curvatura média constante  $H$  imersa em  $\overline{M}^3$ , tal que*

$$\overline{\text{Ric}}(V, V) \geq -2H^2, \quad \forall V \in U\overline{M}.$$

*Seja  $K$  um campo de Killing em  $\overline{M}^3$  e suponha que a função  $\eta = \langle N, K \rangle$  não muda de sinal em  $M^2$ . Se*

(i)  $M^2$  tem o tipo conforme do disco ou da esfera, ou

(ii)  $M^2$  tem o tipo conforme do plano e  $|K|$  é limitado em  $M^2$ ,

então  $M$  é invariante pelo grupo de isometrias a um parâmetro de  $\overline{M}^3$  determinado por  $K$  ou  $M^2$  é umbílica e  $\overline{M}^3$  tem curvatura de Ricci não positiva  $\overline{\text{Ric}}(N, N) = -2H^2$  na  $N$ -direção.

**Demonstração.** Se  $M^2$  é a esfera, então este exemplo se reduz ao anterior. Consideremos que  $M^2$  é do tipo conforme do disco. Suponhamos que  $\eta \leq 0$ . Então

$$\Delta\eta = -(\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2)\eta \geq -(\overline{\text{Ric}}(N, N) + 2H^2)\eta \geq 0;$$

logo  $\eta$  é subharmônica. Portanto, se  $\eta = 0$  em algum ponto de  $M^2$ , então  $\eta \equiv 0$  pelo princípio do máximo e, daí,  $M^2$  é invariante por  $K$ . Vamos provar que o caso  $\eta < 0$  não pode ocorrer. Por contradição, suponhamos que  $\eta < 0$  em  $M^2$ . Temos, pela equação de Gauss,

$$|A|^2 = 4H^2 - 2(K - \overline{K}),$$

em que  $K$  é a curvatura gaussiana de  $M^2$  e  $\overline{K}$  é a curvatura seccional de  $\overline{M}^3$ . Da expressão para o laplaciano de  $\eta$  fornecida pelo Teorema 1.23, obtemos

$$\Delta\eta - 2K\eta + (\overline{\text{Ric}}(N, N) + 2\overline{K} + 4H^2)\eta = 0. \quad (1.49)$$

Considerando  $\{E_1, E_2\}$  um referencial ortonormal local em  $TM$ , obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(N, N) + 2\overline{K} &= \langle \overline{R}(N, E_1)N, E_1 \rangle + \langle \overline{R}(N, E_2)N, E_2 \rangle + 2\langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle \overline{R}(N, E_1)N, E_1 \rangle + \langle \overline{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(N, E_2)N, E_2 \rangle + \langle \overline{R}(E_2, E_1)E_2, E_1 \rangle \\ &= \overline{\text{Ric}}(E_1) + \overline{\text{Ric}}(E_2). \end{aligned}$$

Então

$$\overline{\text{Ric}}(N, N) + 2\overline{K} + 4H^2 \geq 0.$$

Contudo, (1.49) contradiz o Corolário 3 de [30], que estabelece que quando  $K$  é a curvatura gaussiana de uma métrica completa e conforme no disco unitário, não existe solução não positiva de (1.49) se  $\overline{\text{Ric}}(N, N) + 2\overline{K} + 4H^2 \geq 0$ .

Finalmente, vamos supor que  $M^2 = \mathbb{R}^2$  (conformemente) e que  $|K|$  é limitada em  $M^2$ . Então  $\eta$  é limitada e subharmônica em  $\mathbb{R}^2$ . Decorre que  $\eta = \text{constante}$ . Então  $\Delta\eta \equiv 0$ , donde  $(\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2)\eta \equiv 0$ . A conclusão segue como no exemplo precedente. ■

Sejam, agora,  $M^n$  uma variedade riemanniana  $n$ -dimensional, orientável e conexa,  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave positiva. Consideremos o produto warped  $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$  munido da métrica

$$\langle v, w \rangle_p = \epsilon \langle (d\pi_I(v), d\pi_I(w)) \rangle + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (d\pi_M(v), d\pi_M(w)) \rangle,$$

em que  $\epsilon = -1$  ou  $\epsilon = 1$  para todo  $p \in \overline{M}$  e para todos  $v, w \in T_p \overline{M}$ , e  $\pi_I$  e  $\pi_M$  denotam as projeções sobre  $I$  e  $M$ , respectivamente. O campo de vetores

$$V := (f \circ \pi_I) \partial_t$$

é conforme e fechado (no sentido de que sua 1-forma dual é fechada), com fator conforme  $\varphi = f'$ , em que a linha denota derivação com respeito a  $t \in I$ .

Se  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é uma imersão riemanniana, com  $\Sigma^n$  orientada pelo campo de vetores normais e unitários  $N$ , temos que  $\epsilon = \epsilon(\partial_t) = \epsilon(N)$ . A proposição seguinte restabelece o Teorema 1.23 nesse contexto.

**Proposição 1.24 (Proposição 3.1 de [17])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$ . Nas notações do Teorema 1.23, se  $\Sigma^n$  tem curvatura média constante  $H$ , então*

$$\Delta \eta = -\epsilon \eta \{ \text{Ric}_M(N^\top, N^\top) + (n-1)(\ln f)''(1 - \langle N, \partial_t \rangle^2) + |A|^2 \} - \epsilon n H f', \quad (1.50)$$

em que  $\text{Ric}_M$  denota o tensor de Ricci de  $M^n$  e  $N^\top = d\pi_M(N)$ .

**Demonstração.** Antes de mais,  $\eta = \langle V, N \rangle = f \langle N, \partial_t \rangle$  e segue de (1.42) que

$$\Delta \eta = -\epsilon \eta \{ \overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2 \} - n \{ \epsilon H f' + N(f') \}.$$

Agora,  $N(f') = \epsilon f'' \langle N, \partial_t \rangle = \epsilon (f''/f) \eta$ . Por outro lado, como  $N = N^\top + \epsilon \langle N, \partial_t \rangle \partial_t$ , segue do Corolário 1.5 que

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(N, N) &= \overline{\text{Ric}}(N^\top, N^\top) + \langle N, \partial_t \rangle^2 \overline{\text{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \\ &= \text{Ric}(N^\top, N^\top) - \epsilon \langle N^\top, N^\top \rangle \left\{ \frac{f''}{f} + (n-1) \frac{(f')^2}{f} \right\} - \frac{n f''}{f} \langle N, \partial_t \rangle^2 \\ &= \text{Ric}(N^\top, N^\top) - \left\{ \frac{f''}{f} + (n-1) \frac{(f')^2}{f} \right\} - (n-1) \left( \frac{f'}{f} \right)' \langle N, \partial_t \rangle^2 \end{aligned}$$

(usamos que  $\langle N^\top, N^\top \rangle$  na última igualdade). Assim,

$$\begin{aligned}
 \Delta\eta &= -\epsilon\eta \left\{ \text{Ric}(N^\top, N^\top) - \left\{ \frac{f''}{f} + (n-1)\frac{(f')^2}{f} \right\} - (n-1) \left( \frac{f'}{f} \right)' \langle N, \partial_t \rangle^2 \right\} \\
 &\quad - \epsilon\eta |A|^2 - \epsilon n \left\{ Hf' + \frac{f''}{f} \eta \right\} \\
 &= -\epsilon\eta \left\{ \text{Ric}_M(N^\top, N^\top) + (n-1)(\ln f)''(1 - \langle N, \partial_t \rangle^2) + |A|^2 \right\} - \epsilon n H f'.
 \end{aligned}$$

■

**Proposição 1.25 (Proposição 3.2 de [17])** *Na notação precedente,*

$$\Delta h = (\ln f)'(h) \{ \epsilon n - |\nabla h|^2 \} + \epsilon n H \langle N, \partial_t \rangle, \quad (1.51)$$

em que  $H$  denota a curvatura média de  $\Sigma^n$  com relação a  $N$ .

**Demonstração.** Como  $h = \pi_I|_\Sigma$ , temos

$$\begin{aligned}
 \nabla h &= \nabla(\pi_I|_\Sigma) = (\bar{\nabla}\pi_I)^\top = \epsilon\partial_t^\top \\
 &= \epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N,
 \end{aligned}$$

em que  $\bar{\nabla}$  denota o gradiente com relação à métrica do espaço-ambiente e  $(\cdot)^\top$  denota a componente tangencial de um campo de  $T\bar{M}$  em  $\Sigma^n$ . Agora fixe  $p \in M, v \in T_p M$  e seja  $A$  o endomorfismo de Weingarten associado a  $N$ . Escrevemos  $v = w + \epsilon\langle v, \partial_t \rangle \partial_t$ , em que  $w \in T_p \bar{M}$  é tangente à fibra de  $\bar{M}^{n+1}$  passando em  $p$ . Por repetidos usos da Proposição 1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_v \partial_t &= \bar{\nabla}_w \partial_t + \epsilon\langle v, \partial_t \rangle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = \bar{\nabla}_w \partial_t \\
 &= (\ln f)' w = (\ln f)'(v - \epsilon\langle v, \partial_t \rangle \partial_t),
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \nabla_v \nabla h &= \bar{\nabla}_v \nabla h - \epsilon \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \bar{\nabla}_v (\epsilon \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N) - \epsilon \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \epsilon (\ln f)' w - v (\langle N, \partial_t \rangle N) + \langle N, \partial_t \rangle Av - \epsilon \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \epsilon (\ln f)' w + (\langle Av, \partial_t \rangle - \langle N, \bar{\nabla}_v \partial_t \rangle) N + \langle N, \partial_t \rangle Av - \epsilon \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \epsilon (\ln f)' w + (\langle Av, \partial_t^\top \rangle - \langle N, (\ln f)' w \rangle) N + \langle N, \partial_t \rangle Av - \epsilon \langle Av, \nabla h \rangle N \\
 &= \epsilon (\ln f)' w + \epsilon (\ln f)' \langle v, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle N + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
 &= \epsilon (\ln f)' \{v - \langle v, \partial_t \rangle (\epsilon \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N)\} + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
 &= (\ln f)' (\epsilon v - \epsilon \langle v, \partial_t^\top \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av \\
 &= (\ln f)' (\epsilon v - \langle v, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle Av.
 \end{aligned}$$

Agora, fixando  $p \in \Sigma^n$  e uma base ortonormal  $\{e_i\}$  de  $T_p \Sigma$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \text{tr}(\nabla^2 h) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle (\ln f)' (\epsilon e_i - \langle e_i, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle A e_i, e_i \rangle \\
 &= (\ln f)' \{ \epsilon n - |\nabla h|^2 \} + \langle N, \partial_t \rangle \text{tr}(A) \\
 &= (\ln f)' \{ \epsilon n - |\nabla h|^2 \} + \epsilon n H \langle N, \partial_t \rangle.
 \end{aligned}$$

■

## 1.4 Os tensores de Newton

Nesta seção, vamos definir as curvaturas médias de ordem superior de uma hipersuperfície, bem como os tensores de Newton e os operadores diferenciais lineares de segunda a eles associados. Daremos destaque ao operador quadrado de Cheng-Yau, que desempenhará um papel fundamental na demonstração do resultado de integrabilidade contido na Seção 3.2.

Dada uma imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \bar{M}^{n+1}$ , seja  $A$  o endomorfismo de Weingarten associado à escolha de um campo normal unitário  $N \in T\Sigma^\perp$  que determina a

orientação de  $\Sigma^n$ . Associados a  $A$ , temos os  $n$  invariantes algébricos  $S_r$ ,  $1 \leq r \leq n$ , dados pelas igualdades

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r},$$

em que  $S_0 = 1$  por definição. Quando  $\{e_k\}$  é uma base de  $T_p\Sigma$  formada por autovetores de  $A_p$ , com autovalores (ou *curvaturas principais*) correspondentes  $\{\lambda_k\}$ , temos

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

em que  $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  é o  $r$ -ésimo polinômio simétrico elementar nas  $n$  indeterminadas  $X_1, \dots, X_n$ , i.e.,

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}.$$

Para cada  $0 \leq r \leq n$ , a  $r$ -ésima *curvatura média*  $H_r$  de  $\Sigma^n$  é definida por

$$\binom{n}{r} H_r = S_r.$$

Em particular, quando  $r = 1$ ,

$$H_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = H$$

é a curvatura média de  $\Sigma^n$  e, quando  $r = n$ ,

$$H_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

é a curvatura de Gauss-Kronecker.

**Observação 1.10** *As curvaturas médias de ordem superior cumprem*

$$H_j^2 \geq H_{j-1} H_{j+1},$$

para todo  $1 \leq j \leq n - 1$ . Ademais, caso ocorra a igualdade para  $r = 1$  ou algum  $1 < r < n$  com  $H_{r+1} \neq 0$ , temos  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ . Essas desigualdades são conhecidas como *desigualdades de Newton*. Veja, por exemplo, a *Proposição 1* de [15] e o *Teorema 51* de [38].

Usando restrições apropriadas sobre as  $r$ -curvaturas, muitos autores têm obtidos interessantes resultados de rigidez. Por exemplo, L. J. Alías, A. G. Colares e A. Brasil Jr. [3] provaram que uma hipersuperfície tipo-espaço e fechado imersa numa variedade conformemente estacionária  $\overline{M}^{n+1}(c)$ , de curvatura seccional constante  $c$ , e que possua

curvaturas  $H_r$  e  $H_{r+1}$  constantes (não nulas), para algum  $1 \leq r \leq n-1$ , deve ser totalmente umbílica. No caso Riemanniano, o trabalho de S. Montiel e A. Ros [47] nos oferece uma bela caracterização de esferas totalmente umbílicas como as únicas hipersuperfícies fechadas mergulhadas em  $\mathbb{H}^{n+1}$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  ou num hemisfério aberto de  $\mathbb{S}^{n+1}$  e que possuem alguma curvatura  $H_r$  constante.

Vamos restringir nossa atenção ao contexto riemanniano (o que já se apercebe da ausência de  $\epsilon$  na definição de  $H_r$ ).

Para cada  $0 \leq r \leq n$ , definimos os *tensores de Newton*

$$P_r : T\Sigma \leftrightarrow$$

pondo  $P_0 = I$  e, para  $1 \leq r \leq n$ ,

$$P_r = S_r I - A P_{r-1},$$

onde  $I : T\Sigma \leftrightarrow$  é o operador identidade. Associado a cada  $P_r$ , temos o operador diferencial linear de segunda ordem  $L_r : C^\infty(\Sigma) \leftrightarrow$ , dado por

$$L_r(u) = \text{traço}(P_r \circ \text{Hess } u), \quad \in C^\infty(\Sigma).$$

Em particular,  $L_0(u) = \text{traço}(\text{Hess } u) = \Delta u$ .

Uma indução trivial mostra que

$$P_r = \sum_{j=0}^r (-1)^j S_{r-j} A^j,$$

de modo que o teorema de Cayley-Hamilton assegura que  $P_n = 0$ . Ademais, como cada  $P_r$  é um polinômio em  $A$  para cada  $r$ , cada  $P_r$  é um operador auto-adjunto que comuta com  $A$ , para todo  $r$ . Logo, se  $\mathcal{B} = \{e_i\}$  é uma base que diagonaliza  $A$  em  $p \in \Sigma$ , então  $\mathcal{B}$  também diagonaliza  $P_r$  em  $p$ . Note ainda que, se escrevermos  $Ae_i = \lambda_i e_i$ , para todo  $i$ , e denotarmos por  $A_i$  a restrição de  $A$  ao subespaço  $\text{span}\{e_i\}^\perp \leq T_p \Sigma$ , então

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

em que

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \\ j_1, \dots, j_m \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}.$$

Com essas notações é fácil ver que

$$P_r e_i = S_r (A_i) e_i$$

e, daí (cf. Lema 2.1 de [8]),

$$\begin{cases} \text{traço}(P_r) = (n - r)S_r = b_r H_r; \\ \text{traço}(AP_r) = (r + 1)S_{r+1} = b_r H_{r+1}; \\ \text{traço}(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2} = n \frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2}, \end{cases}$$

em que  $b_r = (r + 1) \binom{n}{r+1} = (n - r) \binom{n}{r}$ .

Quando  $\bar{M}^{n+1}$  é uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, H. Rosenberg [57] provou que

$$L_r(u) = \text{Div}(P_r \nabla u),$$

em que  $\text{Div}$  denota a divergência de um campo vetorial sobre  $\Sigma^n$ .

Voltemos nossa atenção para o tensor  $P_1$ . Note que

$$P_1 = nHI - A. \tag{1.52}$$

O operador diferencial linear de segunda ordem naturalmente associado a  $P_1$  é chamado de *operador quadrado de Cheng-Yau* [22] e é dado por

$$\begin{aligned} \square : C^\infty(\Sigma) &\leftrightarrow \\ f &\mapsto \square f = \text{traço}(P_1 \circ \nabla^2 f), \end{aligned} \tag{1.53}$$

em que  $\nabla^2 f : T\Sigma \leftrightarrow$  denota o operador linear auto-adjunto metricamente equivalente ao Hessiano de  $f$  e é definido por

$$\langle \nabla^2 f(X), Y \rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle, \quad X, Y \in T\Sigma.$$

Considerando em  $\Sigma^n$  um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$ , de (1.53) segue que



$$\begin{aligned}\square f &= \sum_{i=1}^n \langle P_1(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, P_1(E_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{P_1(E_i)} \nabla f, E_i \rangle = \text{traço}(\nabla^2 f \circ P_1).\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}\text{div}(P_1(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_1)(\nabla f), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_1(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle \\ &= \langle \text{Div } P_1, \nabla f \rangle + \square f,\end{aligned}$$

em que

$$\text{Div } P_1 := \text{traço}(\nabla P_1) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_1)(E_i).$$

Por outro lado, de (1.52) temos

$$(\nabla_X P_1)Y = n\langle \nabla H, X \rangle Y - (\nabla_X A)Y, \quad \forall X, Y \in T\Sigma.$$

Assim, tomando um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  em  $\Sigma^n$ , obtemos

$$\text{Div } P_1 = n\nabla H + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)E_i.$$

Usando a equação de Codazzi, para  $X \in T\Sigma$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle (\nabla_{E_i} A)E_i, X \rangle &= \langle (\nabla_{E_i} A)E_i, X \rangle \\ &= \langle (\nabla_X A)E_i, E_i \rangle + \langle \bar{R}(X, E_i)E_i, N \rangle \\ &= \langle (\nabla_X A)E_i, E_i \rangle - \langle \bar{R}(N, E_i)X, E_i \rangle.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle \text{Div } P_1, X \rangle &= n\langle \nabla H, X \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} A)E_i, X \rangle \\ &= n\langle \nabla H, X \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X A)E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, E_i)X, E_i \rangle \\ &= n\langle \nabla H, X \rangle - \text{traço}(\nabla_X A) + \bar{\text{Ric}}(N, X).\end{aligned}$$

Temos, ainda,

$$\text{traço}(\nabla_X A) = n\langle \nabla H, X \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \text{Div } P_1, X \rangle = \overline{\text{Ric}}(N, X).$$

## Capítulo 2

### Resultados principais

Começemos por registrar dois lemas cujas conclusões, uma vez estabelecidas, serão tratadas como argumentos canônicos e empregadas tacitamente a partir de então.

**Lema 2.1** *Sejam  $M, N$  variedades riemannianas,  $N$  conexa, com  $M \subseteq N$ . Se  $M$  é completa, então  $M = N$ .*

**Demonstração.** Consideremos os espaços métricos  $(M, d_M) \subseteq (N, d_N)$ , em que  $d_N$  é a distância riemanniana induzida pela métrica Riemanniana em  $N$  e  $d_M$  é a distância riemanniana induzida por  $d_N$  em  $M$ . Em virtude do teorema de Hopf e Rinow,  $(M, d_M)$  é um espaço métrico completo. Temos que  $M$  é um subconjunto aberto de  $N$ . Afirmamos que  $M$  é, também, fechado em  $N$ . A conclusão decorrerá, então, da conexidade de  $N$ . Se  $M$  não fosse fechado, existiria  $p_0 \in \text{Bd } M \setminus M$ . Assim, existiria uma sequência  $(p_n) \subset M$ , tal que  $p_n \rightarrow p_0$  segundo a distância  $d_N$ . Contradição. ■

O próximo lema contém as restrições que faremos sobre as geometrias da fibra  $M^n$  de um produto  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  e da hipersuperfície  $\Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ .

**Lema 2.2** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana cujas curvaturas seccionais  $K_M$  são tais que  $K_M \geq -K_0$ , para alguma constante  $K_0 > 0$ . Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície two-sided completa, com curvatura média constante e segunda curvatura média limitada inferiormente. Então a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$  é limitada inferiormente.*

**Demonstração.** Denotemos por  $\text{Ric}_\Sigma$  a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$ . Para conveniência do leitor, recordamos que a equação de Gauss, por intermédio da qual podemos descrever o tensor curvatura de  $\Sigma$  em termos do tensor curvatura  $\bar{R}$  de  $\mathbb{R} \times M$ , é dada por

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + \langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX, \quad X, Y, Z \in T\Sigma. \quad (2.1)$$

Consideremos um campo vetorial  $X \in T\Sigma$  e um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset T\Sigma$ . Segue da equação (2.1) que

$$\text{Ric}_\Sigma(X, X) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + nH \langle AX, X \rangle - \langle AX, AX \rangle. \quad (2.2)$$

Por outro lado, em virtude do Corolário 1.5, temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle_M \\ &= K_M(X^*, E_i^*) (\langle X^*, X^* \rangle_M \langle E_i^*, E_i^* \rangle_M - \langle X^*, E_i^* \rangle_M^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que  $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$  e  $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t$  são as projeções de  $X$  e  $E_i$  sobre  $M$  e  $R_M$  e  $K_M$  denotam, respectivamente, o tensor curvatura e a curvatura seccional de  $M$ .

Como estamos supondo que  $K_M \geq -K_0$ , para alguma constante  $K_0 > 0$ , somando a relação (2.3) em  $i = 1, \dots, n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &\geq -K_0((n-1)|X|^2 - |\nabla h|^2|X|^2 - (n-2)\langle X, \nabla h \rangle^2) \\ &\geq (n-1)K_0(1 - |\nabla h|^2)|X|^2 \\ &\geq -K_0(n-1)|X|^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

para todo  $X \in T\Sigma$ .

De (2.2) e (2.4), vemos que a curvatura de Ricci de  $\Sigma$  satisfaz a seguinte estimativa

$$\text{Ric}_\Sigma(X, X) \geq \{(n-1)K_0(1 - |\nabla h|^2) - \left| AX - \frac{nH}{2}X \right|^2 + \frac{n^2H^2}{4}|X|^2\}, \quad (2.5)$$

Fazendo, agora, uso da seguinte relação algébrica

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2, \quad (2.6)$$

de (2.2) inferimos que nossas restrições sobre  $H$  e  $H_2$  asseguram que a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$  é limitada inferiormente. ■

## 2.1 Resultados de rigidez

Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície *two-sided*, com curvatura média constante  $H$ . Definimos a *função argumento* de  $\Sigma^n$  como sendo a função suave  $\theta : \Sigma^n \rightarrow [0, \pi]$  dada por

$$\theta = \arccos \eta.$$

Recordamos que o gradiente e o laplaciano da função altura  $h = \pi_{\mathbb{R}}|_{\Sigma}$  de  $\Sigma^n$  são dados por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^{\top} = \partial_t^{\top} = \partial_t - \eta N. \quad (2.7)$$

e

$$\Delta h = nH\eta, \quad (2.8)$$

em que  $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$  é a função ângulo de  $\Sigma^n$ , definida com relação ao campo normal e unitário  $N$  que dá a orientação de  $\Sigma^n$ . O laplaciano de  $\eta$  é dado por

$$\Delta \eta = -(\text{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\eta, \quad (2.9)$$

em que  $\text{Ric}_M$  é o tensor de Ricci da fibra  $M^n$ ,  $N^*$  é a projeção do campo vetorial  $N$  sobre  $TM$  e  $|A|$  é a norma do endomorfismo de Weingarten.

O teorema a seguir é a pedra fundamental desta dissertação.

**Teorema 2.1 (Teorema 1 de [7])** *Sejam  $M^n$  uma variedade riemanniana completa cujas curvaturas seccionais  $K_M$  são tais que  $K_M \geq K_0$ , para alguma constante  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ , e  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície completa e two-sided, com curvatura média constante  $H$  e segunda curvatura média  $H_2$  limitada inferiormente. Se a função argumento de  $\psi$  é tal que  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  ou  $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$ , então  $\Sigma^n$  é um slice  $\{t_0\} \times M^n$ .*

**Demonstração.** Pela fórmula de Bochner (cf. Teorema 1.20), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 = |\nabla^2 h|^2 + \text{Ric}(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla \Delta h, \nabla h \rangle, \quad (2.10)$$

em que  $\nabla^2 h : T\Sigma \leftrightarrow$  denota o operador linear auto-adjunto, metricamente equivalente ao Hessiano de  $h$ , dado por

$$\langle \nabla^2 h(X), Y \rangle = \langle \nabla_X(\nabla h), Y \rangle, \quad X, Y \in T\Sigma.$$

Segue de (2.2) e (2.4) que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\nabla h, \nabla h) &\geq (n-1)K_0(1-|\nabla h|^2)|\nabla h|^2 + nH\langle A(\nabla h), \nabla h \rangle \\ &\quad - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\ &\geq (n-1)K_0(1-|\nabla h|^2)|\nabla h|^2 + nH\langle A(\nabla h), \nabla h \rangle \\ &\quad - |A|^2|\nabla h|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por outro lado, como  $H$  é constante, por (2.7) temos

$$\nabla \Delta h = nH\nabla \eta. \quad (2.12)$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} X(\eta) &= X\langle N, \partial_t \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= -\langle A(X), \partial_t \rangle = -\langle A(X), \partial_t^\top \rangle \\ &= -\langle X, A(\partial_t^\top) \rangle = -\langle X, A(\nabla h) \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $X \in T\Sigma$ . Note que usamos que  $\overline{\nabla}_X \partial_t = 0$ , para todo  $X \in T\Sigma$  (cf. Proposição 1.2). Daí,

$$\nabla \eta = -A(\nabla h). \quad (2.13)$$

Conseqüentemente, de (2.12) e (2.13), obtemos

$$\nabla\Delta h = -nHA(\nabla h). \quad (2.14)$$

Temos, ainda, que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_X(\partial_t^\top + \eta N) \\ &= \bar{\nabla}_X \partial_t^\top + \bar{\nabla}_X \eta N \\ &= \nabla_X \partial_t + \langle A(X), \partial_t^\top \rangle N + \eta \bar{\nabla}_X N + X \langle N, \partial_t \rangle N, \end{aligned}$$

qualquer que seja  $X \in T\Sigma$  (fizemos uso da fórmula de Gauss). Como, claramente,  $\langle A(X), \partial_t^\top \rangle = X \langle N, \partial_t \rangle$ , concluimos que

$$\nabla_X(\nabla h) = \nabla_X(\partial_t^\top) = \eta A(X).^1 \quad (2.15)$$

Daí, temos

$$|\nabla^2 h|^2 = |A|^2 \eta^2. \quad (2.16)$$

Usando, finalmente, que

$$|\nabla h|^2 = 1 - \eta^2, \quad (2.17)$$

podemos rescrever (2.16) da seguinte forma

$$|\nabla^2 h|^2 = |A|^2 - |\nabla h|^2 |A|^2. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.11), (2.14) e (2.18) em (2.10), obtemos

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla h|^2 \geq (n-1)K_0(1 - |\nabla h|^2)|\nabla h|^2 + |A|^2(1 - 2|\nabla h|^2). \quad (2.19)$$

Levando em consideração nossa hipótese sobre a função ângulo,  $\theta$ , de  $\psi$ , de (2.17) e de (2.19) vem que

---

<sup>1</sup>Note que, a partir dessa relação, podemos obter diretamente (i.e., sem o auxílio da Proposição 1.25) a expressão (2.8) para o laplaciano de  $h$ .

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 \geq (n-1)K_0(1-|\nabla h|^2)|\nabla h|^2. \quad (2.20)$$

Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  uma sequência de pontos, tal que

$$\lim_k |\nabla h|^2(p_k) = \sup_{\Sigma} |\nabla h|^2 \quad \text{e} \quad \limsup_k \Delta|\nabla h|^2(p_k) \leq 0.$$

Note que é de fato possível escolher uma tal sequência, uma vez que o tensor de Ricci de  $\Sigma$  é limitado inferiormente e que  $|\nabla h|^2 \leq 1/2$ . Avaliando as aplicações em ambos os lados da desigualdade (2.20) em  $p_k$  e tomando o  $\limsup$  em  $k$ , obtemos

$$0 \geq \limsup_k \Delta|\nabla h|^2(p_k) \geq (n-1)K_0(1 - \sup_{\Sigma} |\nabla h|^2) \sup_{\Sigma} |\nabla h|^2 \geq 0. \quad (2.21)$$

Novamente em virtude de nossa hipótese sobre  $\theta$ , inferimos de (2.21) que  $\sup_{\Sigma} |\nabla h|^2 = 0$ . Logo,  $h$  é constante em  $\Sigma$  e, assim,  $\psi(\Sigma)$  é um slice  $\{t\} \times M^n$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Observação 2.1** *Seja  $M^n$  como no Teorema 2.1. Como  $M^n$  é completa e tal que  $K_M \geq K_0 > 0$ , segue do teorema de Bonnet que  $M^n$  é compacta. Se acrescentarmos a hipótese de compacidade de  $\Sigma^n$  (fato que será constatado a posteriori), podemos oferecer outra demonstração do Teorema 2.1. Na verdade, sob essa hipótese adicional, podemos provar um pouco mais, a saber:*

*Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa cujas curvaturas seccionais são limitadas inferiormente por uma constante  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ . Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície completa, compacta e two-sided. Suponha que a curvatura média e que a função ângulo não mudam de sinal em  $\Sigma^n$ . Então  $\Sigma$  é um slice mergulhado  $M_{t_0}^n$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

*Com efeito, sabemos que o laplaciano da função altura  $h$  é dado por  $\Delta h = nH\eta$ . Como  $H$  e  $\eta$  não mudam de sinal em  $\Sigma^n$ , o mesmo acontece com  $\Delta h$ . Aplicando o teorema de Hopf à função  $h$ , concluímos que  $h \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 2.2 (Teorema 2 de [7])** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa, com curvaturas seccionais não negativas. Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície completa e two-sided, com segunda curvatura  $H_2$  limitada inferiormente. Se a função argumento de  $\psi$  está longe de  $\pi/2$ , então  $\psi(\Sigma^n)$  é mínima.*



**Demonstração.** Substituindo (2.2), (2.11), (2.14) e (2.18) em (2.10) e levando em consideração que a fibra  $M^n$  tem curvatura seccional não negativa, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 \geq |A|^2(1 - |\nabla h|^2) - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle. \quad (2.22)$$

Assim como na demonstração do Teorema 2.1, nossas restrições sobre  $H$  e  $H_2$ , junto com a hipótese de que  $M^n$  tem curvaturas seccionais  $\geq 0$ , nos permitem aplicar o princípio do máximo de Omori e Yau (cf. 1.13) à função  $|\nabla h|^2$ . Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$  uma sequência maximizante para  $|\nabla h|^2$  no sentido do Omori-Yau. Temos

$$\lim_k |\nabla|\nabla h|^2(p_k)| = 0. \quad (2.23)$$

De (2.13), (2.17) e (2.23), obtemos

$$\lim_k |\eta(p_k)A(\nabla h)(p_k)| = 0. \quad (2.24)$$

Ora, nossa hipótese sobre o ângulo,  $\theta$  de  $\psi$  garante que existe uma constante positiva  $\delta$ , tal que  $\eta \geq \delta$ . Assim, de (2.24) vem que

$$\lim_k |A(\nabla h)(p_k)| = 0. \quad (2.25)$$

Combinando (2.17), (2.23) e (2.24), obtemos

$$0 \geq \limsup_k \frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2(p_k) \geq \lim_k |A|^2(p_k)(1 - |\nabla h|^2(p_k)) \geq \lim_k |A|^2(p_k)\delta^2. \quad (2.26)$$

Como  $|A|^2 \geq nH^2$ , segue de (2.26) que

$$0 \geq \limsup_k \frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2(p_k) \geq nH^2\delta^2 \geq 0,$$

donde  $H = 0$ , i.e.,  $\psi$  é mínima. ■

**Corolário 2.3** *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, temos:*

- (i) *se  $h$  atinge máximo em  $\Sigma^n$  (em particular, se  $\Sigma^n$  é compacta), então  $\Sigma^n$  é um slice  $\{t_0\} \times M^n$ ;*

(ii) se  $h$  é limitada inferiormente em  $\Sigma^n$  e se o tensor de Ricci de  $\Sigma^n$  é não negativo, então  $\Sigma^n$  é slice  $\{t_0\} \times M^n$ .

**Demonstração.** Sabemos que, sob as hipóteses do Teorema 2.2,  $\psi$  é mínima. Sabemos, igualmente, que  $\Delta h = nH\eta$ . Assim,  $\Delta h = 0$ , i.e.,  $h$  é harmônica em  $\Sigma^n$ . Os itens (i) e (ii) seguem, então, nesta ordem, do princípio do máximo de Hopf-Calabi (cf. Teorema 1.19) e do resultado de Liouville-Yau (cf. Proposição 1.21). ■

**Teorema 2.4 (Teorema 1 de [44])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  um produto riemanniano, cuja fibra  $M^n$  tem curvaturas seccionais  $K_M$  tais que  $K_M \geq -K_0$ , para alguma constante  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ , e seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa e two-sided, com  $H$  constante e  $H_2$  limitada inferiormente. Suponha que a função ângulo  $\eta$  de  $\Sigma^n$  está longe de zero e que sua função altura  $h$  satisfaz uma das seguintes condições:*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{(n-1)K_0} |A|^2, \quad (2.27)$$

para alguma constante  $0 < \alpha < 1$ ; ou

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{(n-1)K_0} H^2. \quad (2.28)$$

Então  $\Sigma^n$  é um slice de  $\overline{M}^{n+1}$ .

**Demonstração.** Podemos supor que  $\inf \eta > 0$ . O laplaciano de  $\eta$  é dado por

$$\Delta \eta = -(\text{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\eta. \quad (2.29)$$

Como, por hipótese, as curvaturas seccionais  $K_M$  da fibra  $M^n$  são tais que  $K_M \geq -K_0$ , para alguma constante  $K_0 \in \mathbb{R}_+$ , é fácil ver que

$$\text{Ric}_M(N^*, N^*) \geq -(n-1)K_0|N^*|^2 = -(n-1)K_0(1-\eta^2) = -(n-1)K_0|\nabla h|^2.$$

Assim,

$$\Delta \eta \leq -(|A|^2 - (n-1)K_0|\nabla h|^2)\eta. \quad (2.30)$$

Se a função altura de  $\Sigma^n$  satisfaz a condição (2.27), então dessa condição e de (2.41) segue que

$$\Delta\eta \leq -(n-1)|A|^2\eta. \quad (2.31)$$

Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$  uma sequência minimizante para  $\eta$  no sentido do Omori-Yau. Por conseguinte, como estamos supondo que o operador de Weingarten  $A$  é limitado, de (2.42), passando a uma subsequência se necessário, obtemos

$$0 \leq \liminf_k \Delta\eta(p_k) \leq -(1-\alpha) \lim_k |A|^2(p_k) \inf_{\Sigma} \eta \leq 0,$$

donde  $\lim_k |A|^2(p_k) = 0$  e, conseqüentemente, por (2.27),  $\lim_k |\nabla h|(p_k) = 0$ . Portanto, de (2.17) concluimos que  $\inf_{\Sigma} \eta = 1$ , logo  $\eta \equiv 1$ .

Recorde que

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2 = nH^2 + n(n-1)(H^2 - H_2). \quad (2.32)$$

Se supusermos agora que a função altura de  $\Sigma^n$  satisfaz a condição (2.28), então, de (2.41) e (2.32), obtemos

$$\Delta\eta \leq -n(n-1)(H^2 - H_2)\eta. \quad (2.33)$$

Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$  uma sequência minimizante para  $\eta$  no sentido do Omori-Yau. Então

$$0 \leq \liminf_k \Delta\eta(p_k) \leq -n(n-1) \liminf_k (H^2 - H_2)(p_k) \inf_{\Sigma} \eta \leq 0.$$

Daí, passando a uma subsequência se necessário, temos que  $\lim_k (H^2 - H_2)(p_k) = 0$ .

Ademais, como  $H$  é constante, de (2.32) vem que

$$\lim_k |A|^2(p_k) = nH^2. \quad (2.34)$$

Como  $|A|^2 = \sum_i \lambda_i^2$ , em que  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$ , novamente passando a uma subsequência se necessário, para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos que  $\lim \lambda_i(p_k) = \lambda_i^*$ , para alguns  $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ . Motivados por isso, pomos

$$\frac{n(n-1)}{2} \overline{H_2} = \sum_{i < j} \lambda_i^* \lambda_j^*.$$

Note que  $H = 1/n \sum_i \lambda_i^*$ . Portanto,  $H^2 = \overline{H}_2$  e  $\lambda_i^* = H$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $\{E_i\}$  um referencial ortonormal local de autovetores, associado aos autovalores  $\{\lambda_i\}$  de  $A$ . Podemos escrever  $\nabla h = \sum_i h_i E_i$ , em que cada  $h_i$  é uma função suave em  $\Sigma^n$ . Uma vez que

$$\nabla \eta = -A(\nabla h),$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_k |\nabla \eta|^2(p_k) = \lim_k |A(\nabla h)|^2(p_k) = \sum_i \lim_k (\lambda_i^2 h_i^2)(p_k) \\ &= \sum_i (\lambda_i^*)^2 \lim_k h_i^2(p_k) = H^2 \sum_i \lim_k h_i^2(p_k), \end{aligned}$$

passando a uma subsucessão, se preciso. Se  $H = 0$ , segue imediatamente de (2.28) que  $\Sigma^n$  é um slice de  $\overline{M}^{n+1}$ . Se  $H^2 > 0$ , então, para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos que  $\lim_k \lambda_i(p_k) = 0$ , donde  $\lim_k |\nabla h|(p_k) = 0$ . Ora, por (2.17),

$$\inf_{\Sigma} \eta = \lim_k \eta(p_k) = 1.$$

Logo  $\eta \equiv 1$  em  $\Sigma^n$  e, assim,  $\Sigma^n$  é um slice. ■

**Corolário 2.5 (Corolário 2 de [44])** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície completa e two-sided de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com curvatura média constante e curvatura escalar limitada inferiormente. Se o fecho da aplicação de Gauss de  $\Sigma^n$  está contido num hemisfério aberto de  $\mathbb{S}^n$ , então  $\Sigma^n$  é mínima.*

**Observação 2.2** *Apresentaremos outra demonstração da primeira parte do Teorema 2.2. Podemos supor que  $\sup_{\Sigma} \eta < 0$ . Definimos  $\xi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\xi = (1 + \eta)^2$ . Obviamente, tal  $\xi$  é limitada em  $\Sigma^n$ . Temos que*

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= 2|\nabla \eta|^2 + 2(1 + \eta)\Delta \eta \\ &= 2|\nabla \eta|^2 - 2(1 + \eta)\{\text{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2\}\eta \\ &\geq \underbrace{-2\eta(1 + \eta)}_{>0} \underbrace{\text{Ric}_M(N^*, N^*)}_{\geq 0} \underbrace{-2\eta(1 + \eta)|A|^2}_{\geq -(n-1)K_0|\nabla h|^2} \\ &\geq -2\eta(1 + \eta)(-\alpha|A|^2) - 2\eta(1 + \eta)|A|^2 \\ &= 2\eta(1 + \eta)(\alpha - 1)|A|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Seja  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$  uma sequência maximizante para  $\xi$  no sentido do Omori-Yau. Pelas estimativas precedentes, temos, passando a uma subsucessão se necessário, que

$$0 \geq \limsup_k \Delta \xi(p_k) \geq \lim_k (2(\alpha - 1)\eta(1 + \eta)|A|^2)(p_k) \geq 0.$$

Daí,  $\lim_k |A|^2(p_k) = 0$  ou  $\lim_k (1 + \eta)(p_k) = 0$ . O primeiro caso reduz-se ao segundo, pois  $\lim_k |A|^2(p_k) = 0$  implica, levando em consideração (2.27),  $\lim_k |\nabla h|^2(p_k) = 0$ , donde  $\lim \eta^2(p_k) = 1$ . Como  $\eta < 0$  em  $\Sigma^n$ , segue que  $\lim_k (1 + \eta)(p_k) = 0$ . Assim, esta última condição deve necessariamente valer. Ora,

$$\lim_k (1 + \eta)(p_k) = 0 \implies 0 = \lim_k (1 + \eta)^2(p_k) = \lim_k \xi(p_k) = \sup_{\Sigma} \xi.$$

Uma vez que  $\xi \geq 0$ , inferimos que  $\xi \equiv 0$  em  $\Sigma^n$ , i.e.,  $\eta \equiv -1$ . Logo  $\Sigma^n$  é um slice.

Neste ponto, convém observarmos que a condição de a função ângulo  $\eta$  de uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  não mudar de sinal é mais fraca que a condição de  $\Sigma^n$  ser localmente um gráfico. Assim, no que segue, suporemos a primeira condição, em virtude da qual podemos sempre supor que  $\eta \leq 0$ , e é isso que faremos, salvo menção explícita em contrário.

Por bem da heurística, passaremos pelo próximo resultado antes de chegarmos ao Teorema 2.7, no qual ofeceremos uma melhoria no controle imposto sobre a função ângulo no Teorema 5.1 de [6].

**Teorema 2.6** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$  um produto riemanniano, em que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo e a fibra  $M^n$  é isométrica a  $\mathbb{S}^n$  ou é plana. Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante. Se a função ângulo de  $\Sigma^n$  está longe de zero e, além disso, satisfaz a seguinte estimativa*

$$\eta \leq |A|^2 - 1, \tag{2.35}$$

então  $\Sigma^n$  é um slice.

**Demonstração.** Podemos escolher a orientação de  $\Sigma^n$  de tal maneira que sua função ângulo satisfaça  $-1 \leq \eta < 0$ . Desse modo, como por hipótese  $\eta$  é limitada longe de zero, teremos  $\sup_{\Sigma} \eta < 0$ . Definimos uma função  $\xi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\xi = (1 + \eta)^2.$$

Claramente, tal  $\xi$  é limitada em  $\Sigma^n$ . Temos

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= 2|\nabla\eta|^2 + 2(1+\eta)\Delta\eta \\ &= 2|\nabla\eta|^2 - 2(1+\eta)\{\text{Ric}_{\mathbb{S}^n}(N^*, N^*) + |A|^2\}\eta.\end{aligned}$$

Note que  $\text{Ric}_{\mathbb{S}^n}(N^*, N^*) = (n-1)|N^*|^2 = (n-1)|\nabla|^2$ . Assim,

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= 2|\nabla\eta|^2 - 2(1+\eta)\{\text{Ric}_{\mathbb{S}^n}(N^*, N^*) + |A|^2\}\eta \\ &= 2|\nabla\eta|^2 - 2(1+\eta)\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\}\eta \\ &= 2|\nabla\eta|^2 + \{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\}(|\nabla h|^2 - \xi).\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}|\nabla h|^2 - \xi &= (1 - \eta^2) - (1 + \eta)^2 = (1 - \eta^2) - (1 + 2\eta + \eta^2) \\ &= \underbrace{-2\eta}_{>0} \underbrace{(1 + \eta)}_{\geq 0}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Por conseguinte, temos

$$\Delta\xi \geq \{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\}(|\nabla h|^2 - \xi).\tag{2.37}$$

Seja, agora,  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n$  uma sequência maximizante para  $\xi$  no sentido do Omori-Yau. Avaliando ambos os lados de (2.37) em  $p_k$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_k [((n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2)(|\nabla h|^2 - \xi)](p_k) = 0.$$

Daí,

$$\lim_k ((n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2)(p_k) = 0$$

ou

$$\lim_k (|\nabla h|^2 - \xi)(p_k) = 0.$$

No primeiro caso, concluímos que  $\lim_k |A|^2(p_k) = 0$ , donde, por (2.39),  $\lim_k \eta(p_k) = -1$ . No segundo, recorremos a (2.36) para concluir que  $\lim_k (1 + \eta)(p_k) = 0$ . Em ambos os casos, inferimos que  $\lim_k \xi(p_k) = 0$ . Ora,  $\lim_k \xi(p_k) = \sup_\Sigma \xi$ . Sendo  $\xi$  uma função não negativa, devemos necessariamente ter  $\xi \equiv 0$ , o que implica  $\eta \equiv -1$ . ■

Uma análise cuidadosa da demonstração precedente nos conduz imediatamente à seguinte extensão do Teorema 2.6:

**Teorema 2.7** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$  um produto riemanniano, em que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo e a fibra  $M^n$  tem curvatura de Ricci não negativa. Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante. Se a função ângulo de  $\Sigma^n$  está longe de zero e, além disso, satisfaz a seguinte estimativa*

$$\eta \leq |A|^2 - 1, \quad (2.38)$$

então  $\Sigma^n$  é um slice.

**Corolário 2.8** *Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície, com curvatura média constante  $H$  e curvatura escalar  $R$  limitada inferiormente. Se a função ângulo de  $\Sigma^n$  está longe de zero e, além disso, satisfaz a seguinte estimativa*

$$\eta \leq -1 - n(n-1)R, \quad (2.39)$$

então  $\Sigma^n$  é um hiperplano.

**Observação 2.3** *Quando a curvatura  $H$  não é necessariamente constante, mas apenas limitada e com sinal definido, então é possível mostrar que  $H$  não pode estar globalmente longe do zero. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, cuja demonstração será apresentada no próximo capítulo:*

*Seja  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  um produto riemanniano, cuja fibra  $M^n$  tem curvaturas seccionais limitadas inferiormente, e seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided e completa, contida num slab,*

$$[t_1, t_2] \times M^n, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

*de  $\overline{M}^{n+1}$ . Suponha que a função ângulo de  $\Sigma^n$  está longe de 1 ou de  $-1$ . Se  $H_2$  é limitada inferiormente e  $H$  é limitada e não muda de sinal em  $\Sigma^n$ , então  $\inf_\Sigma H = 0$ . Em particular, se  $H$  é constante, então  $\Sigma^n$  é mínima.*

Averiguemos o que acontece quando uma hipersuperfície faz um ângulo constante com a  $\mathbb{R}$ -direção.

**Teorema 2.9 (Teorema 15 de [36])** *Sejam  $M^n$  uma variedade riemanniana com curvatura de Ricci não negativa e  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  uma hipersuperfície imersa que faz um ângulo constante com o campo vetorial  $\partial_t$  tangente à  $\mathbb{R}$ -direção. Se  $\Sigma^n$  tem curvatura média constante, então  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica ou é parte de um cilindro sobre uma hipersuperfície de curvatura média constante imersa em  $M^n$ .*

**Demonstração.** Por hipótese, o ângulo  $\eta$  entre  $\Sigma^n$  e  $\partial_t$  é constante. Se  $\eta = 0$ , então  $\partial_t$  é tangente a  $\Sigma^n$ , i.e.,  $\Sigma^n$  é folheada pelas linhas integrais de  $\partial_t$ , que são geodésicas em  $\mathbb{R} \times M^n$ . Por transversalidade, a interseção de  $\Sigma^n$  com um slice  $M_{t_0}^n$  é (isométrica a) um hipersuperfície de  $\Sigma^n$ . Como  $\partial_t$  é globalmente tangente a  $\Sigma^n$ , podemos reconstruir  $\Sigma^n$  a partir dessa interseção e seguindo o fluxo de  $\partial_t$ , obtendo o cilindro referido no enunciado do teorema. Como  $\Sigma^n$  tem curvatura média constante, o mesmo deverá acontecer com esse cilindro.

Se  $\eta \neq 0$ , então  $\Sigma^n$  é localmente o gráfico de uma função  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ . O Teorema 2.3 de [35] estabelece que  $|\nabla f| = c$ , uma constante. Por outro lado, a curvatura média  $H$  do gráfico de  $f$  é dada por

$$H = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|_M^2}} \right).$$

Como  $\Sigma^n$  tem curvatura média constante e o gradiente de  $f$  tem norma constante, segue que  $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$  é uma função constante. Pela fórmula de Bochner,

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle - \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) - |\operatorname{Hess} f|^2,$$

e pela hipótese sobre a curvatura de Ricci de  $M^n$ , concluímos que  $\operatorname{Hess} f$  se anula identicamente. Como  $\operatorname{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$ , temos que  $\nabla f$  é um campo paralelo em  $M^n$ .

Isso implica que as hipersuperfícies de nível  $L_t = f^{-1}(t)$  de  $f$  são totalmente geodésicas em  $M^n$ ; logo  $\{t\} \times L_t$  é totalmente geodésica em  $\mathbb{R} \times M^n$  (pois cada  $\{t\} \times M^n$  é totalmente geodésico em  $\mathbb{R} \times M^n$ ). Concluímos que  $\Sigma^n$  é folheada pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas  $\{t\} \times L_t$ .

Por outro lado, sabemos que o campo vetorial

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|_M^2}} (\partial_t - \nabla f)$$



dá uma orientação para o gráfico de  $f$  (na qual  $\eta > 0$ ). Como  $|\nabla f|$  é constante, podemos escrever  $N = \lambda \partial_t - \lambda \nabla f$ , em que  $\lambda = (1 + |\nabla f|_M^2)^{-1/2}$ . Segue que  $N$  é paralelo, por ser a soma de dois campos paralelos e, portanto, que  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica. ■

## 2.2 Aplicações no espaço hiperbólico

O propósito desta seção é estabelecer o resultado a seguir e, a partir dele, derivar algumas aplicações no espaço hiperbólico.

**Teorema 2.10 (Teorema 3.4 de [6])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ , em que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo, um produto warped, que satisfaz a seguinte condição de convergência*

$$K_M \geq \sup_I (f'^2 - f\ddot{f}) \quad (2.40)$$

*e cuja fibra  $M^n$  tem curvatura seccionais não negativas. Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa e two – sided, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante. Suponha que  $\Sigma^n$  está contida num slab de  $\overline{M}^{n+1}$  e que*

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f}. \quad (2.41)$$

*Se a função altura de  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left( \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right)^\beta, \quad (2.42)$$

*para algumas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\Sigma^n$  é um slice.*

Precisaremos de um resultado análogo ao Lema 2.2.

**Lema 2.3** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ , em que  $I \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo, um produto warped que satisfaz a seguinte condição de convergência (2.40), em que  $K_M$  denota a curvatura seccional da fibra  $M^n$ . Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa, com curvatura média e segunda forma fundamental limitadas. Se a função  $f''/f$  é limitada em  $\Sigma^n$ , então a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$  é limitada inferiormente.*

**Demonstração.** Denotemos por  $\text{Ric}_{\Sigma}$  o tensor de Ricci de  $\Sigma^n$  e consideremos  $X \in T\Sigma$  e um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T\Sigma$ . Revisitando os cálculos feitos na demonstração do Lema 2.2, temos que

$$\text{Ric}_\Sigma(X, X) \geq \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \left| AX - \frac{nH}{2}X \right|^2 + \frac{n^2 H^2}{4} |X|^2$$

Assim, como por hipótese  $H$  e  $A$  são limitadas, vemos que  $\text{Ric}_\Sigma(X, X)$  será limitada inferiormente se, e somente se,  $\sum_i \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle$  o for.

Lançando mão das propriedades do tensor curvatura, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, E_i)X &= \bar{R}(X^*, E_i^*)X^* + \langle X, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, E_i^*)\partial_t + \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, \partial_t)X^* \\ &+ \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, \partial_t)\partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, E_i^*)X^* \\ &+ \langle X, \partial_t \rangle^2 \bar{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)X^* \\ &+ \langle X, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)\partial_t, \end{aligned}$$

em que  $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$  e  $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t$  são as projeções dos campos de vetores  $X$  e  $E_i$ , respectivamente, sobre a fibra  $M$ .

A Proposição 1.4 nos fornece

- (i)  $\bar{R}(X^*, E_i^*)\partial_t = 0$ ;
- (ii)  $\bar{R}(X^*, \partial_t)X^* = -\bar{R}(\partial_t, X^*)X^* = -|X^*|^2 \frac{f''}{f} \partial_t = -(|X|^2 - \langle X, \partial_t \rangle^2) \frac{f''}{f} \partial_t$ ;
- (iii)  $\bar{R}(X^*, \partial_t)\partial_t = \frac{\ddot{f}}{f} X^* = \frac{\ddot{f}}{f} (X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t)$ ;
- (iv)  $\bar{R}(\partial_t, E_i^*)X^* = \langle E_i^*, X^* \rangle \frac{f''}{f} \partial_t = (\langle X, E_i \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle) \frac{f''}{f} \partial_t$ ;
- (v)  $\bar{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t = -\bar{R}(E_i^*, \partial_t)\partial_t = -\frac{f''}{f} E_i^* = -\frac{f''}{f} (E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t)$ ;
- (vi)  $\bar{R}(\partial_t, \partial_t) = 0$ .

Ademais, temos

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle - \frac{f f''}{f^2} |X|^2 \\ &+ \frac{(f')^2}{f^2} (|\nabla h|^2 - (n-1)) |X|^2 \\ &+ (n-2) \left( \frac{(f')^2 - f f''}{f^2} \right) \langle X, \nabla h \rangle^2. \end{aligned}$$

Desse modo, usando também que  $\nabla h = \partial_t^\top = \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N$ , temos que

$$\begin{aligned} \overline{R}(X^*, E_i^*)X^* &= R_M(X^*, E_i^*)X^* - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 (|X|^2 E_i - \langle X, E_i \rangle X) \\ &+ \left(\frac{f'}{f}\right)^2 |X|^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 E_i \\ &- \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \langle X, E_i \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle X. \end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle &= \frac{1}{f^2} \sum_i K_M(X^*, E_i^*) (|X|^2 - \langle \nabla h, E_i \rangle^2 |X|^2) \\ &- \frac{1}{f^2} \sum_i K_M(X^*, E_i^*) (\langle X, E_i \rangle^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2) \\ &+ \frac{2}{f^2} \sum_i K_M(X^*, E_i^*) \langle X, \nabla h \rangle \langle X, E_i \rangle \langle \nabla h, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Logo, usando a condição de convergência (2.40), e através de outro cálculo simples, obtemos

$$\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle \geq -\frac{f''}{f}(n - |\nabla h|^2)|X|^2 \geq -(n-1)\frac{|f''|}{f}|X|^2,$$

donde se infere que  $\text{Ric}_\Sigma$  é limitada inferiormente, como afirmado. ■

**Demonstração do Teorema 2.10.** Definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} g : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto g(p) = f(1 + \langle N, \partial_t \rangle)(p). \end{aligned}$$

Como estamos a supor que  $\Sigma$  está contida num *slab* de  $I \times_f M$ , existe uma constante positiva  $C$  tal que  $g \leq C$  em  $\Sigma$ .

Calculando o laplaciano de  $g$  com o auxílio das Proposições 1.24 e 1.25, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta g = & - \left( \text{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1) \frac{(f')^2 - ff''}{f^2} |\nabla h|^2 \right) f \langle N, \partial_t \rangle \\ & + \left( \frac{ff'' - (f')^2}{f} \right) |\nabla h|^2 + n \frac{(f')^2}{f} - nHf' \\ & + (nHf' - f|A|^2) \langle N, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, graças à condição de convergência (2.40), um cálculo direto nos fornece a seguinte estimativa

$$\text{Ric}_M(N^*, N^*) \geq \frac{(n-1)}{f^2} \sup_I ((f')^2 - ff'') |\nabla h|^2.$$

Logo, como  $\langle N, \partial_t \rangle < 0$ , obtemos

$$\Delta g \geq \left( \frac{ff'' - (f')^2}{f} \right) |\nabla h|^2 + n \frac{(f')^2}{f} - nHf' + (nHf' - f|A|^2) \langle N, \partial_t \rangle.$$

Conseqüentemente, como por hipótese  $K_M \leq 0$ , segue que

$$\Delta g \geq n \frac{(f')^2}{f} - nHf' + (nHf' - f|A|^2) \langle N, \partial_t \rangle.$$

Sabemos que  $|A|^2 \geq nH^2$ . Daí e da estimativa precedente, por intermédio de um cálculo simples, obtemos

$$\Delta g \geq n \left( \frac{f'}{f} - H \right) (f' + Hf \langle N, \partial_t \rangle).$$

Suponhamos agora, a partir de (2.41), e por contradição, que  $H < \inf_{\Sigma} (f'/f)$ . Assim,

$$\Delta g \geq n \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} \left( \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right) g \geq \frac{n}{C} \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} \left( \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right) g^2.$$

Pelo Corolário 1.15, devemos ter  $g \equiv 0$ . Logo,  $\langle N, \partial_t \rangle \equiv -1$ , o que implica que  $\Sigma^n$  é um slice. Contudo, um slice  $M_t^n$  tem curvatura média constante igual a  $(f'/f)(t)$ . Isso nos dá uma contradição. Dessa maneira,  $H = \inf_{\Sigma} (f'/f)$  e, por (2.42),  $\Sigma^n$  é um slice.

■

**Observação 2.4** *O Teorema 2.10 pode ser visto como uma extensão do Teorema 3 de [46].*

Em [46], S. Montiel provou os resultados que colecionamos na proposição a seguir.

**Proposição 2.11** *Seja  $M^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , uma variedade Riemanniana completa munida de um campo fechado, conforme e não-trivial  $X$ . Então:*

1. *O conjunto  $\mathcal{Z}(X)$  formado pelos pontos de  $M^{n+1}$  nos quais  $X$  se anula é discreto.*
2. *O campo unitário  $\mathcal{N} = X/|X|$  definido no conjunto aberto e denso  $M' = M^{n+1} \setminus \mathcal{Z}(X)$  satisfaz*

$$\nabla_{\mathcal{N}}\mathcal{N} = 0, \quad \nabla_u\mathcal{N} = \frac{\varphi}{|X|}u \text{ se } \langle u, \mathcal{N} \rangle = 0.$$

4. *A distribuição de dimensão  $n$   $\mathcal{D}$  definida em  $M'$  por*

$$p \in M' \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p M^{n+1} : \langle X(p), v \rangle = 0\}$$

*determina uma folheação umbílica  $\mathcal{F}(X)$  de codimensão um que é orientada por  $\mathcal{N}$ . Ademais, as funções  $|X|$ ,  $\text{Div } X$  e  $X\varphi$  são constantes nas folhas conexas de  $\mathcal{F}(X)$  e cada folha tem curvatura média constante  $\mathcal{H} = -\text{Div } X/(n+1)|X|$ .*

5.  *$X$  tem no máximo dois zeros e as alternativas a seguir são as únicas possíveis, correspondendo respectivamente aos casos em que  $X$  tem um, dois ou nenhum zero em  $M^{n+1}$ :*

- (i)  *$M^{n+1}$  é um espaço euclidiano com uma métrica rotacionalmente invariante, i.e.,  $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$  e a métrica, em termos de coordenadas polares ( $x = rp$ ) em  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^n$ , é, a menos de homotetias,*

$$dr^2 + f(r)2d\sigma_n^2,$$

*em que  $d\sigma_n^2$  é a métrica de curvatura constante e igual a um 1 em  $\mathbb{S}^n$  e  $f$  é a restrição positiva a  $\mathbb{R}_+$  de uma função suave ímpar com  $f'(0) = 1$ . Além disso, o campo  $X$  é dado por  $X(r,p) = f(r)p$  para  $r \in \mathbb{R}_+$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e as folhas da folheação  $\mathcal{F}(X)$  são as esferas centradas na origem  $r = r_0$ .*

- (ii)  *$M^{n+1}$  é uma esfera com uma métrica rotacionalmente invariante, i.e.,  $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$  e a métrica, em termos das coordenadas polares ( $x = a \cos \theta + p \sin \theta$ ) em  $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{a, -a\} = (0, \pi) \times \mathbb{S}^n$ , em que  $a \in \mathbb{S}^{n+1}$  é arbitrário e  $\mathbb{S}^n$  é o equador ortogonal a  $a$ , é dada, a menos de homotetias, por*

$$d\theta^2 + f(\theta)d\sigma_n^2,$$

em que  $f$  é a restrição a  $(0, \pi)$  de uma função periódica ímpar, de período  $2\pi$ , com  $f'(0) = 1$  e sem zeros em  $(0, \pi)$ . Ademais, o campo  $X$  é dado por  $X(\theta, p) = f(\theta)(a \sin \theta - p \cos \theta)$ , para cada  $\theta \in (0, \pi)$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ . Neste caso, as folhas de  $\mathcal{F}(X)$  são as pequenas esferas de  $\mathbb{S}^{n+1}$  paralelas ao equador  $\mathbb{S}^n$ .

(iii) O recobrimento riemanniano simplesmente conexo de  $M^{n+1}$  é um produto warped  $\mathbb{R} \times_f P^n$ , em que  $P^n$  é uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa, de dimensão  $n$ , e  $f$  é uma função positiva definida em  $\mathbb{R}$ . Ademais, o grupo  $\Gamma$  de automorfismos isométricos é um subgrupo de  $\text{Iso}(\mathbb{R}) \times \text{Iso}(P^n)$ . Neste caso, a função  $f$  é invariante pelas translações na projeção de  $\Gamma$  em  $\text{Iso}(\mathbb{R})$ , o campo  $X$  é determinado como sendo a projeção de  $f(s)\partial_s$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$  e todo  $p \in P^n$ , e a folheação  $\mathcal{F}(X)$  consiste nas projeções dos slices  $\{s\} \times P^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Os espaços hiperbólicos  $\mathbb{H}^{n+1}$  podem ser pensados como uma classe de hipersuperfícies no espaço de Minkowski. De fato, denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica canônica de Lorentz de índice 1 em  $\mathbb{R}^{n+2}$ , temos que cada componente conexa da hiperquádrica

$$\{p \in \mathbb{R}^{n+2} : \langle p, p \rangle = -1\},$$

munida da métrica induzida, é uma variedade riemanniana completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante e igual a  $-1$ . Com essa representação para  $\mathbb{H}^{n+1}$ , não é difícil acreditar que

$$X(p) = a + \langle a, p \rangle, \quad p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

para um vetor  $a \in \mathbb{R}^{n+2}$  fixado, provê campos conformes e exatos que são qualitativamente distintos, de acordo com o caráter causal do vetor  $a$ . Assim, cada  $X$  origina uma folheação  $\mathcal{F}(X)$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por esferas, quando  $a$  é um vetor tipo-tempo; por horoesferas, quando  $a$  é tipo-luz; e por hiperplanos hiperbólicos totalmente geodésicos, quando  $a$  é tipo-espaço. A primeira situação corresponde a um caso particular da Proposição 2.11–5(i), em que se tem a métrica rotacionalmente invariante  $dr^2 + f(r)^2 d\sigma_n^2$ , com  $f(r) = \sinh r$ . A segunda situação é um caso particular da Proposição 2.11–5(iii), porque, desse ponto de vista,  $\mathbb{H}^{n+1}$  pode ser considerado como o produto warped  $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$  com  $f(t) = e^t$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . A terceira situação corresponde à da Proposição

2.11–5(ii) e descreve  $\mathbb{H}^{n+1}$  como  $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ , com  $f(t) = \cosh t$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Uma isometria explícita entre o modelo do semi-espaço para  $\mathbb{H}^{n+1}$  e o produto warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  é dada como segue. Seja  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f M^n$  um produto warped. A família de hipersuperfícies  $M_t := \{t\} \times M$  constitui uma folheação de  $\overline{M}$  por folhas totalmente umbílicas de curvatura média constante

$$H(t) = (\ln f)'(t) = (f'/f)(t).$$

Seja  $s : \mathbb{R} \rightarrow J$  a aplicação dada por  $s(t) = s(0) + \int_0^t f^{-1}(u) du$ , em que  $J = s(\mathbb{R})$ . Então a variedade produto warped  $\mathbb{R} \times_f M^n$  é isométrica à variedade produto  $J \times M^n$ , munida da métrica conforme

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda^2(s)(ds^2 + \langle \cdot, \cdot \rangle_M), \quad \text{com } \lambda(s) = f(t(s)),$$

por meio da isometria  $\tau(t, p) = (s(t), p)$  que reverte a orientação, já que reverte a orientação na direção do campo  $\partial_t$ . Temos que  $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ , uma vez que  $\tau$  é uma isometria entre  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  no modelo do semi-espaço.

Neste contexto, do Teorema 2.10 obtemos a seguinte extensão do Teorema 5.2 de [17].

**Corolário 2.12 (Corolário 4.1 de [6])** *Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, com campo normal unitário  $N$ , segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante  $0 \leq H \leq 1$ . Suponha que a função  $\Sigma^n \ni p \mapsto \langle N, \partial_t \rangle(p)$  tem sinal definido em  $\Sigma^n$ . Se  $\Sigma^n$  está contida entre duas horoesferas e sua função altura satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha(1 - H^\beta),$$

para algumas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera.

O corolário precedente é mais exatamente um escólio da demonstração do Teorema 2.10. De fato, é suficiente notar que, sob as hipóteses desse corolário, os cálculos feitos na referida demonstração, nos permitem concluir que  $H^\beta = 1$ , logo  $H = 1$ , e como  $|\nabla h|^2 \leq \alpha(1 - H^\beta)$ , segue  $\Sigma^n$  é uma horoesfera. Convém enfatizarmos que, para não sermos conduzidos a uma longa digressão sobre o espaço hiperbólico, por horoesfera, entedemos simplesmente um slice  $\{t\} \times \mathbb{R}^n$  da representação  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ .

Para a representação  $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , obtemos o seguinte

**Corolário 2.13 (Corolário 4.2 de [6])** *Seja  $\psi : \Sigma \looparrowright \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, com campo normal unitário  $N$ , segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante  $H$ . Suponha que a função  $\Sigma^n \ni p \mapsto \langle N, \partial_t \rangle(p)$  tem sinal definido em  $\Sigma^n$ . Suponha, ainda, que  $\Sigma^n$  está contida entre duas hiperesferas e que*

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma}(\tanh t).$$

*Se a função altura de  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha(\inf_{\Sigma}(\tanh t) - H)^\beta,$$

*para algumas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\Sigma^n$  é uma hiperesfera. (Aqui, por hiperesfera, entendemos um slice  $\{t\} \times \mathbb{R}^n$  da representação  $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .)*

Fazendo uma análise da demonstração do Teorema 2.10, vemos que a hipótese de  $\Sigma^n$  estar entre dois slices é uma condição suficiente para garantir que tanto  $f$  quanto  $f''$  são limitadas em  $\Sigma^n$ . Como nos modelos warped de  $\mathbb{H}^{n+1}$  temos  $f = f''$ , é suficiente garantirmos que a função warping  $f$  é limitada. Consequentemente, considerando mais uma vez  $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ , obtemos a seguinte extensão do Teorema 5.1 de [17].

**Corolário 2.14 (Corolário 4.3 de [6])** *Seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientável, com campo normal unitário  $N$ , segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante  $0 \leq H \leq 1$ . Suponha que a função  $\Sigma^n \ni p \mapsto \langle N, \partial_t \rangle(p)$  tem sinal definido em  $\Sigma^n$ . Se a função altura de  $\Sigma^n$  é tal que*

$$h \leq C - \ln(1 + \langle N, \partial_t \rangle),$$

*para alguma constante  $C$ , e  $|\nabla h|^2 \leq \alpha(1 - H^\beta)$ , para algumas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\Sigma$  é uma horoesfera.*

**Observação 2.5** *No Corolário 2.14, o termo  $-\ln(1 + \langle N, \partial_t \rangle)$  deve ser interpretado como  $+\infty$  quando  $\langle N, \partial_t \rangle = -1$ .*



# Capítulo 3

## Gráficos verticais inteiros

O estudo da geometria de hipersuperfícies imersas em um espaço riemanniano constitui um clássico e profícuo tema na Teoria de Imersões Isométricas. Um dos mais celebrados resultados desse ramo é, sem dúvida, o teorema de Bernstein [11] (modificado por Hopf [41]), o qual estabelece que os únicos gráficos inteiros e mínimos em  $\mathbb{R}^3$  são os planos.

Algum tempo depois, J. Simons [64] provou um resultado que, combinado com alguns teoremas de E. de Giorgi [37] e W. H. Fleming [31], fornece uma prova da extensão do teorema de Bernstein para  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \leq 7$ . No entanto, E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti [13] surpreendentemente mostraram que esse teorema não vale para  $n \geq 8$ . Desde então, um interessante tópico de pesquisa em Análise Geométrica têm sido as possíveis extensões do resultado de Bernstein para dimensões maiores ou para outros espaços-ambiente. Uma contribuição notável foi dada por J. Moser [48], que mostrou que os hiperplanos são os únicos gráficos inteiros e mínimos de  $\mathbb{R}^n$  tais que o gradiente da função correspondente tem norma limitada.

Este capítulo é devotado ao estudo de gráficos inteiros

$$\Sigma^n(u) := \{(u(x), x) : x \in M^n\} \subset \mathbb{R} \times M^n, \quad u \in C^\infty(M).$$

Essencialmente, empregaremos o princípio do máximo de H. Omori [50] e S. T. Yau [66] e a expressão dada pela Proposição 1.24 para o laplaciano da função ângulo de uma

hipersuperfície  $\Sigma^n$  isometricamente imersa em  $\mathbb{R} \times M^n$  para obter resultados de rigidez para os referidos gráficos. Averiguaremos o que acontece quando a curvatura não é necessariamente constante e discutiremos um resultado de integrabilidade (é bastante natural nos voltarmos para  $L^1(M)$  quando queremos obter, via métodos analíticos, informações sobre a geometria de uma variedade riemanniana não compacta  $M^n$ ). Finalmente, apresentaremos dois resultados do tipo-Moser, o segundo dos quais é, em certo sentido, uma extensão do resultado original de Moser.

### 3.1 Gráficos em $\mathbb{R} \times M$

Consideremos  $\Omega \subseteq M^n$  um domínio (i.e., um aberto conexo). Toda função  $u \in C^\infty(\Omega)$  determina um gráfico sobre  $\Omega$  dado por

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R} \times M^n.$$

Dizemos que o gráfico é *inteiro* quando  $\Omega = M^n$ .

Seja  $\Sigma^n(u) = \{(u(x), x) : x \in M^n\} \subset \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro. A função  $g : (t, x) \in \mathbb{R} \times M^n \mapsto g(t, x) = t - u(x) \in \mathbb{R}$  é tal que  $\Sigma^n(u) = g^{-1}(0)$ . Seja  $p \in \Sigma^n(u)$ . Dado  $v \in T_p \Sigma^n(u)$ , tomemos uma curva suave  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma^n(u)$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Temos

$$v(g) = \left. \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = 0.$$

Como  $v(g) = \langle v, \overline{\nabla} g \rangle$ , inferimos que  $\overline{\nabla} g(p) \perp v$ , para todo  $v \in T_p \Sigma^n(u)$ . (Aqui, como de praxe nesta dissertação, objetos assinalados por  $\overline{(\cdot)}$  dizem respeito ao espaço-ambiente  $\mathbb{R} \times M^n$ .) Por outro lado, se escrevermos  $v = (\lambda \partial_t, w)$ , em que  $w \in T_q M^n, q = \pi_M(p)$ , então

$$\begin{aligned} v(g) &= \lambda \partial_t(g) + w(g) \\ &= \lambda + w(u) \\ &= \langle \partial_t, v \rangle - \langle Du, w \rangle \\ &= \langle \partial_t - Du, v \rangle, \end{aligned}$$

em que  $Du$  denota o gradiente de  $u$  em  $M^n$ . Portanto, como  $p \in \Sigma^n(u)$  é arbitrário,

$$\bar{\nabla}g(u(x), x) = \partial_t|_{(u(x), x)} - Du(x), \quad \forall x \in M^n,$$

e o campo de vetores unitários

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}}(\partial_t|_{(u(x), x)} - Du(x)), \quad x \in M^n, \quad (3.1)$$

dá uma orientação para  $\Sigma^n(u)$  na qual temos  $\eta > 0$ . Daí e da relação  $\eta^2 = 1 - |\nabla h|^2$ , segue que

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_M^2}{1 + |Du|_M^2}. \quad (3.2)$$

Apesar de ser corriqueira em Geometria Diferencial a identificação de um objeto com sua imagem por uma imersão suave – e, de fato, foi isso que até agora fizemos e continuaremos a fazer sistematicamente –, em certas ocasiões é essencial ser preciso com a notação empregada. Todo gráfico pode ser visto como a imagem da imersão  $\Gamma_u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times M^n$  dada por

$$\Gamma_u(x) = (u(x), x), \quad x \in \Omega.$$

Dados  $x \in \Omega$  e  $v \in T_x M$ , temos por definição que

$$d\Gamma_u(v) = \left. \frac{d}{dt} \Gamma_u(\alpha(t)) \right|_{t=0},$$

para qualquer curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  com  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha'(0) = v$ . Então

$$d\Gamma_u(v) = \left. \frac{d}{dt} (u(\alpha(t)), \alpha(t)) \right|_{t=0} = (v, du_x(v)) = v + \langle Du(x), v \rangle_M \partial_t|_{(u(x), x)}. \quad (3.3)$$

A partir da expressão obtida para  $d\Gamma_u$ , comprovamos imediatamente que  $\Gamma_u$  é, em verdade, uma imersão. Por outro lado, também a partir daí podemos obter a expressão geral da métrica induzida em  $\Omega$  por  $\Sigma^n(u)$ . Para  $v, w \in T_x M$ , temos

$$\langle v, w \rangle = \langle d\Gamma_u(v), d\Gamma_u(w) \rangle = \langle v, w \rangle_M + \langle Du(x), v \rangle_M \langle Du(x), w \rangle_M,$$

i.e., a métrica induzida sobre  $\Omega$  da métrica Riemanniana do espaço ambiente  $\mathbb{R} \times M^n$  via  $\Sigma^n(u)$  é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_M + du^2.$$

É imediato, então, que um gráfico inteiro é completo, se  $M$  o for, pois

$$\langle X, X \rangle = \langle X, X \rangle_M + \langle Du, X \rangle_M^2 \geq \langle X, X \rangle_M,$$

e, assim, curvas divergentes na métrica original de  $M^n$  também o serão na nova métrica. Vamos empregar a imersão  $\Gamma_u$  para calcular o operador de forma de  $\Sigma^n(u)$ . A fórmula de Weingarten estabelece que, dado qualquer campo vetorial  $X \in TM$ , temos

$$\bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} N = -d\Gamma_u(AX). \quad (3.4)$$

Calculemos  $\bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} N$ . Tendo em conta as propriedades básicas da conexão de Levi-Civita e denotando  $\xi := \partial_t - Du$ , temos

$$\bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} N = \bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} \left( \frac{1}{|\xi|} \xi \right) = \frac{1}{|\xi|} \bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} \xi + d\Gamma_u(X) \left( \frac{1}{|\xi|} \right) \xi. \quad (3.5)$$

Por um lado, também temos

$$\bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} \xi = \bar{\nabla}_{(X + \langle Du, X \rangle \partial_t)} (\partial_t - Du) = -D_X Du,$$

em que  $D$  denota a conexão de Levi-Civita de  $M$  e, por outro lado,

$$d\Gamma_u(X) \left( \frac{1}{|\xi|} \right) = X \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}} \right) = -\frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + |Du|_M^2)^{3/2}}$$

Substituindo as duas últimas expressões em (3.5), obtemos

$$\bar{\nabla}_{d\Gamma_u(X)} N = -\frac{D_X Du}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}} - \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + |Du|_M^2)^{3/2}} (\partial_t - Du). \quad (3.6)$$

Da equação 3.3, deduzimos que

$$d\Gamma_u(AX) = AX + \langle Du, AX \rangle_M \partial_t. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) na identidade (3.4) e identificando as partes tangentes, finalmente obtemos que

$$AX = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}} D_X Du - \frac{\langle D_X Du, Du \rangle_M}{(1 + |Du|_M^2)^{3/2}} Du, \quad (3.8)$$

para qualquer campo vetorial tangente  $X$  sobre  $\Omega$ .

Seja, agora,  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal local de  $TM$  (com relação à métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ ). Tomando traços relativamente a esse referencial na expressão (3.8), obtemos que a função curvatura média  $H_u$  de um gráfico  $\Sigma^n(u)$  é dada por

$$nH_u(1 + |Du|_M^2)^{3/2} = (1 + |Du|_M^2)\Delta^M u - |Du|_M^2 D^2 u(Du, Du),$$

em que  $\Delta^M$  e  $D^2$  representam, nesta ordem, os operadores laplaciano e hessiano sobre  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ . Esta última expressão pode ser reescrita de modo mais condensado usando o operador divergência. Assim, a curvatura média de  $\Sigma^n(u)$  é dada pela seguinte equação

$$nH_u = \text{Div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}} \right), \quad (3.9)$$

em que  $\text{Div}$  denota o divergente na fibra  $M^n$ .

## 3.2 Um resultado de integrabilidade

Em 1976, S. T. Yau [67] obteve a seguinte extensão do teorema de Hopf:

**Proposição 3.1** *Sejam  $M^n$  uma variedade riemanniana de dimensão  $n$ , completa e orientada, e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Se  $u$  é subharmônica (ou superharmônica) e  $|\nabla u| \in L^1(M)$ , então  $u$  é harmônica. Aqui,  $L^1(M)$  denota o conjunto de todas as funções  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que são integráveis no sentido de Lebesgue.*

A ferramenta essencial para a demonstração do supracitado resultado é a seguinte extensão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas e não compactas, também devida a S. T. Yau[67]<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>*Esboço da demonstração.* Seja  $r$  a função Lipschitziana definida em  $M^n$  que a cada ponto faz corresponder a distância a partir de um ponto fixado  $p$ . Para cada  $R > 0$ , seja  $B(R)$  a bola de raio  $R$  centrada em  $p$ . Aproximando a função  $r$ , podemos encontrar uma função suave não negativa  $g_R$  tal que: (1) Exceto, possivelmente, para um número finito de  $t < R$ ,  $g_R^{-1}(t)$  é uma hipersuperfície regular e compacta; (2)  $|dg_R| \leq 3/2$  em  $g_R^{-1}([0, R])$ ; (3)  $g_R^{-1}(t) \subset B(t+1) \setminus B(t-1)$  para  $t \leq R$ . Por outro lado,

Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana de dimensão  $n$ , completa e não compacta. Se  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  é uma  $(n-1)$ -forma diferencial integrável em  $M^n$ , então existe uma sequência  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de domínios em  $M^n$ , tal que  $B_i \subset B_{i+1}$ ,  $M = \cup_i B_i$  e

$$\lim_i \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Com efeito, fazendo  $\omega = \iota_{\nabla u} d\Sigma$ , em que  $u \in C^\infty(\Sigma)$ ,  $\iota_{\nabla u}$  é a contração na direção do gradiente de  $u$  e  $d\Sigma$  é o elemento de volume de  $\Sigma$ , obtemos imediatamente a Proposição 3.1.

Seguindo as ideias desenvolvidas por Yau, A. Caminha [16] mostrou a seguinte

**Proposição 3.2** *Seja  $X$  um campo suave definido numa Riemanniana  $n$ -dimensional  $M^n$ , completa, não compacta e orientada. Suponha que  $\text{Div } X$  não muda de sinal em  $M^n$  e que  $|X| \in L^1(M)$ . Então  $\text{Div } X \equiv 0$ .*

**Demonstração.** Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\text{Div } X \geq 0$  em  $M^n$ . Seja  $\omega$  a  $(n-1)$ -forma diferencial em  $M$  dada por  $\iota_X dM$ , i.e.,  $\omega$  é a contração de  $dM$  na direção do campo vetorial  $X \in TM$ . Se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal em um aberto  $U \subset M$ , com formas duais  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , então

$$\iota_X dM = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \langle X, E_i \rangle \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Uma vez que as  $(n-1)$ -formas  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n$  são ortonormais em  $\Omega^{n-1}(M)$ , temos

$$|\omega|^2 = \sum_{i=1}^n \langle X, E_i \rangle^2 = |X|^2,$$

donde  $|\omega| \in L^1(M)$ . Ademais,  $d\omega = d(\iota_X dM) = (\text{Div } X)dM$ . Existe, pois, uma sequência de domínios  $B_i \subset M$  tal que  $M = \cup_i B_i$ ,  $B_i \subset B_{i+1}$  e

$$\int_{B_i} (\text{div } X) dM = \int_{B_i} d\omega \xrightarrow{i} 0.$$

---

temos que  $\int_{g_R^{-1}([0, R])} |dg_R| |\omega| = \int_0^R \left( \int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt$ . Segue de (2) que  $\int_0^R \left( \int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq 3/2 \int_M |\omega|$ . Assim, para algum  $R/2 \leq t_R \leq R$  em que  $g_R^{-1}(t_R)$  é uma hipersuperfície regular e compacta, temos que  $\int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq 3/R \int_M |\omega|$ . Do teorema standard de Stokes e da última desigualdade, inferimos que  $\left| \int_{g_R^{-1}([0, t_R])} d\omega \right| \leq \int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq 3/R \int_M |\omega|$ . Da propriedade (3) de  $g_R$ , concluimos, então, que  $M^n = \cup_i g_i^{-1}([0, t_i])$  e que  $\lim_i \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega = 0$ . **Q.E.D.**

Como  $\text{Div } X \geq 0$  em  $M$ , concluímos que  $\text{Div } X \equiv 0$ . ■

Nesta seção, seguindo o espírito dos resultados de integrabilidade discutidos até aqui, estabeleceremos o seguinte

**Teorema 3.3 (Teorema 1.1 de [43])** *Seja  $\Sigma^n(u) = \{(u(x), x) : x \in M^n\}$  um gráfico vertical inteiro em  $\mathbb{R} \times M^n$ , com curvatura média limitada. Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i)  $M^n$  tem curvatura de Ricci negativa e  $H_2$  é não negativa em  $\Sigma^n(u)$ ;
- (ii)  $M^n$  tem curvatura de Ricci positiva e  $H_2$  é não positiva e limitada inferiormente em  $\Sigma^n(u)$ .

Se  $|Du| \in L^1(M)$ , então  $\Sigma^n(u)$  é um slice  $\{t_0\} \times M^n$ .

Antes, contudo, de passarmos à prova deste teorema, precisamos de uma expressão apropriada para o operador quadrado de Cheng-Yau (cf. Seção 1.4) da função altura. Essa expressão será crucial para a prova.

Recordamos que

$$\nabla_X \nabla h = \eta AX, \quad \forall X \in T\Sigma. \quad (3.10)$$

Levando em consideração que

$$\text{traço}(A \circ P_1) = n(n-1)H_2,$$

em que  $H_2 = \frac{2}{n(n-1)}S_2$  denota o valor médio da segunda função simétrica elementar  $S_2$  dos valores do operador de forma de  $\Sigma^n$ , da expressão para o operador quadrado de Cheng-Yau dada em (1.53) e de (3.10), obtemos

$$\square h = n(n-1)H_2 \langle N, \partial_t \rangle. \quad (3.11)$$

**Demonstração do Teorema 3.3.** Suponhamos que (i) é satisfeita. Observe que se  $A$  é a segunda forma fundamental da imersão, então seus autovalores são funções contínuas em  $\Sigma^n(u)$ . Segue da definição de  $P_1$  que  $|P_1|$  é limitada em  $\Sigma^n(u)$ , sempre que a norma  $|A|$  for limitada em  $\Sigma^n(u)$ . Portanto, como

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2,$$

das hipóteses de que a curvatura média é limitada e de que  $H_2$  é não negativa, inferimos que existe uma constante  $C > 0$ , tal que  $|P_1| \leq C$  em  $\Sigma^n(u)$ . Daí,

$$|P_1(\nabla h)| \leq |P_1| |\nabla h| \leq C |\nabla h|. \quad (3.12)$$

Consequentemente, de

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_M^2}{1 + |Du|_M^2}$$

e de (3.12), vemos que a hipótese  $|Du| \in L^1(M)$  assegura que  $|P_1(\nabla h)| \in L^1(\Sigma)$ .

Por outro lado, em virtude das equações  $\langle \text{Div } P_1, X \rangle = \overline{\text{Ric}}(N, X)$ , para todo  $X \in T\Sigma$  (cf. Seção 1.4), e  $\nabla h = \partial_t - \eta N$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \text{Div } P_1, \nabla h \rangle &= \overline{\text{Ric}}(N, \nabla h) \\ &= \overline{\text{Ric}}(N, \partial_t) - \langle N, \partial_t \rangle \overline{\text{Ric}}(N, N), \end{aligned}$$

em que  $\overline{\text{Ric}}$  denota o tensor de Ricci de  $\mathbb{R} \times M^n$ . Assim, levando em consideração que

$$\overline{R}(X, Y)Z = R_M(X^*, Y^*)Z^*,$$

para quaisquer campos vetoriais  $X, Y, Z$  em  $\mathbb{R} \times M^n$ , em que  $R_M$  denota o tensor curvatura da fibra  $M^n$  e  $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$  é a projeção do campo vetorial  $X$  sobre  $M^n$  (cf. Corolário 1.5), obtemos

$$\langle \text{Div } P_1, \nabla h \rangle = -\langle N, \partial_t \rangle \text{Ric}_M(N^*, N^*), \quad (3.13)$$

em que  $\text{Ric}_M$  é o tensor de Ricci da fibra  $M^n$ .

Portanto, das equações  $\text{Div } P_1(\nabla f) = \langle \text{Div } P_1, \nabla f \rangle + \square f$ , para toda  $f \in C^\infty(\Sigma)$  (cf. Seção 1.4), (3.11) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Div } P_1 &= \langle \text{Div } P_1, \nabla h \rangle + \square h \\ &= \langle N, \partial_t \rangle (n(n-1)H_2 - \text{Ric}_M(N^*, N^*)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, como a função ângulo  $\langle N, \partial_t \rangle$  tem sinal estrito em  $\Sigma^n(u)$ , nossas hipóteses sobre a curvatura de Ricci da fibra  $M^n$  e sobre o sinal de  $H_2$  garantem que  $\text{div } P_1(\nabla h)$  não



muda de sinal. (Note que se (ii) for satisfeita, ainda se pode dizer o mesmo sobre a invariância de sinal.)

Podemos aplicar a Proposição 3.2 para concluir que  $\text{Div } P_1 \equiv 0$  em  $\Sigma^n(u)$ . Retornemos a (3.14). Como o sinal de  $\text{Ric}_M$  é estrito (negativo, no caso com que estamos a lidar), inferimos que  $N^*$  é identicamente zero em  $\Sigma^n(u)$ , i.e.,  $\Sigma^n(u)$  é um slice  $\{t_0\} \times M^n$ .

■

Para o caso de gráficos inteiros mínimos, da prova do Teorema 3.3 obtemos a seguinte extensão fraca do teorema de Bernstein clássico:

**Corolário 3.4** (DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.3) *Seja  $\Sigma^n(u)$  um gráfico vertical inteiro e mínimo em  $\mathbb{R} \times M^n$ , com segunda curvatura média limitada inferiormente. Suponha que  $M^n$  tem curvatura de Ricci não negativa. Se  $|Du| \in L^1(M)$ , então  $\Sigma^n(u)$  é totalmente geodésica. Em particular, se a curvatura de Ricci de  $M^n$  é positiva, então  $\Sigma^n(u)$  é um slice  $\{t_0\} \times M^n$ .*

Quando o espaço ambiente é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ , o Corolário 3.4 assume a seguinte configuração:

**Corolário 3.5** *Os únicos gráficos inteiros e mínimos  $\Sigma^n(u)$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com curvatura escalar limitada inferiormente e tais que  $|Du| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , são os hiperplanos.*

**Observação 3.1** *Um gráfico vertical inteiro  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$ , com curvatura média constante  $H$  e tal que  $|Du| \in L^1(M)$ , é necessariamente mínimo. Com efeito, temos que o laplaciano da função altura de  $\Sigma^n(u)$  é dado por  $\Delta h = nH\eta$ . Escolhendo para  $\Sigma^n(u)$  a orientação dada em (3.1), com respeito à qual  $\eta > 0$ , vemos que  $\Delta h$  não muda de sinal em  $\Sigma^n(u)$ . Em virtude de (3.2), temos que  $|Du| \in L^1(M)$  implica  $|\nabla h| \in L^1(\Sigma(u))$ . Podemos, então, aplicar a extensão do Teorema de Hopf com a qual iniciamos esta seção para concluir que  $h$  é harmônica em  $\Sigma^n(u)$ . Retornando à relação  $\Delta h = nH\eta$ , inferimos que  $H = 0$ .*

### 3.3 Um pouco de heurística

Os dois resultados a seguir (Teoremas 3 e 4 de [7]), achamos por bem incluí-los a fim de deixar transparecer o processo heurístico que nos conduziu aos teoremas da próxima seção.

**Teorema 3.6** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana compacta com curvaturas seccionais positivas. Seja  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , com curvatura média constante e segunda curvatura média limitada inferiormente. Se  $|Du|_M \leq 1$ , então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Considere  $\Sigma^n(u)$  com a orientação dada por (3.1). Sabemos que

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_M^2}{1 + |Du|_M^2}.$$

Assim,  $|Du|_M \leq 1$  implica  $|\nabla h|^2 \leq \frac{1}{2}$ . Como  $\Sigma^n(u)$  é completo, podemos invocar o Teorema 2.1, o qual nos permite concluir que  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . ■

**Teorema 3.7** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana compacta com curvaturas seccionais positivas. Seja  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , com curvatura média constante e segunda curvatura média limitada inferiormente. Se  $|Du|_M$  é limitada, então  $\Sigma^n(u)$  é mínimo. Ademais, se  $u \geq 0$ , então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \geq 0$ .*

Precisaremos do seguinte

**Lema 3.1 (Teorema 1.3 de [58])** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e curvaturas seccionais  $K_\pi \geq -K_0$ , para alguma constante não negativa  $K_0$ . Seja  $S$  um gráfico inteiro e mínimo em  $M \times \mathbb{R}$  com função altura  $u \geq 0$ . Então  $S = M \times \{c\}$ , para alguma constante  $c \geq 0$ .<sup>2</sup>*

**Demonstração do Teorema 3.7.** Das relações  $|\nabla h|^2 = 1 - \eta^2$  e

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_M^2}{1 + |Du|_M^2},$$

vemos que a hipótese de  $|Du|_M$  ser limitada implica que o ângulo de  $\Sigma^n(u)$  está longe de 1 (equivalentemente, o argumento de  $\Sigma^n(u)$  está longe de  $\frac{\pi}{2}$ ). Então, podemos aplicar

---

<sup>2</sup>*Esboço da demonstração.* Seja  $S$  um gráfico inteiro e mínimo com função altura  $u \geq 0$ . Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  um sistema de coordenadas locais para  $M$  com métrica correspondente  $\sigma_{ij}$ . A métrica induzida em  $S$  é então  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \sigma_{ij} + u_i u_j$ . De acordo com o Corolário 4.4 de [58],  $|Du| \leq C_1$  globalmente em  $M$  ( $Du$  denota o Laplaciano de  $u$  em  $M$ ). Portanto, a métrica induzida  $g_{ij}$  é uniformemente elíptica e o laplaciano  $\Delta^S$  em  $S$ , dado por  $\Delta^S = \operatorname{div}^S(D^S \cdot) = \frac{1}{\sqrt{g}} D_i(\sqrt{g} g^{ij} D_j \cdot) = g^{ij} D_i D_j$ , em que  $D$  denota a derivada covariante em  $M$ ,  $g = \det(g_{ij})$  e  $(g^{ij})$  é a inversa de  $(g_{ij})$ , é um operador uniformemente elíptico em forma de divergência. Por translação, podemos supor que  $\inf_M u = 0$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe um ponto  $p \in M$  com  $u(p) \leq \epsilon$ . Aplicando a desigualdade de Harnack (Teorema 7.4 de [63]), para todo  $R$  temos que  $\sup_{B_R(p)} u \leq C \inf_{B_R(p)} u \leq C\epsilon$ , para uma constante uniforme  $C$  independente de  $R$ . Fazendo  $R \rightarrow \infty$  e então  $\epsilon \rightarrow 0$ , vemos que  $u \equiv 0$ . **Q.E.D.**

o Teorema 2.2 para concluir que  $\Sigma^n(u)$  é mínimo. Ademais, se  $u \geq 0$ , então, pelo Lema 3.1, devemos ter  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \geq 0$ . ■

O próximo teorema, o último desta secção, talvez tenha seu lugar de direito entre os resultados do capítulo precedente. No entanto, por causa dos interessantes corolários que dele decorrem para o estudo de gráficos, decidimos aloca-lo aqui.

**Teorema 3.8 (Teorema 3 de [44])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  um produto riemanniano cuja fibra  $M^n$  tem curvaturas seccionais limitadas inferiormente, e seja  $\psi : \Sigma^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$  um hipersuperfície completa e two-sided que está contida entre dois slices de  $\overline{M}^{n+1}$ . Suponha que  $\pm 1 \notin \overline{\{\eta(p) : p \in \Sigma^n\}}^{\mathbb{R}}$ . Se  $H_2$  é limitada inferiormente e  $H$  é limitada e não muda de sinal em  $\Sigma^n$ , então  $\inf_{\Sigma} H = 0$ . Em particular, se  $H$  é constante, então  $\Sigma^n$  é mínima.*

**Demonstração.** Antes de mais, note que estamos sob as hipóteses do Lema 2.2, o que nos assegura que a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$  é limitada inferiormente.

Agora, suponhamos por exemplo que  $H \geq 0$  em  $\Sigma^n$ . Recorde que  $\Delta h = nH\eta$ . Considere  $(p_k) \subset \Sigma^n$  tal que

$$0 \geq \limsup_k \Delta h(p_k) = n \limsup_k (H\eta)(p_k).$$

Também temos

$$0 = \lim_k |\nabla h(p_k)|^2 = 1 - \lim_k \eta^2(p_k).$$

Logo, se supusermos por exemplo que  $-1$  não pertence ao fecho da imagem de  $\eta$ , obtemos  $\lim_k \eta(p_k) = 1$ . Consequentemente,

$$0 \geq \limsup_k \Delta h(p_k) = n \limsup_k H(p_k) \geq 0,$$

e, assim, concluímos que

$$\limsup_k H(p_k) = 0.$$

(Se  $1$  não pertence ao fecho da imagem de  $\eta$ , então  $\lim_k \eta(p_k) = -1$  e, assim,  $0 \geq \limsup_k \Delta h(p_k) = -n \limsup_k H(p_k) = n \liminf_k H(p_k) \geq 0$ .)

Se  $H \leq 0$ , então seja  $(q_k)$  uma sequência de pontos de  $\Sigma^n$  tal que

$$0 \leq \liminf_k \Delta h(q_k) = n \liminf_k (H\eta)(q_k).$$

Supondo novamente que  $-1$  não pertence ao fecho da imagem de  $\eta$ , obtemos

$$0 \leq \liminf_k \Delta h(q_k) = n \liminf_k H(q_k) \leq 0.$$

(Se  $1$  não pertence ao fecho da imagem de  $\eta$ , então  $\lim_k \eta(p_k) = -1$  e, daí,  $0 \leq \liminf_k \Delta h(q_k) = -n \liminf_k H(q_k) = n \limsup_k H(q_k) \leq 0$ .) Portanto, também neste caso concluíremos que  $\inf_\Sigma H = 0$ . ■

Em 1959, R. Osserman [51] respondeu uma conjectura de Nirenberg, mostrando que se uma superfície mínima e completa  $\Sigma^2$  em  $\mathbb{R}^3$  não é um plano, então a imagem da aplicação normal de Gauss de  $\Sigma^2$  é densa na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Mais geralmente, H. Fujimoto [33] provou que se a imagem da aplicação de Gauss de uma superfície deixa de conter mais que quatro pontos, então essa superfície é um plano. Graças ao resultado de Osserman, decorre do Teorema 3.8 o seguinte

**Corolário 3.9 (Corolário 4 de [44])** *As únicas superfícies de  $\mathbb{R}^3$  completas, two-sided e de curvatura média constante, com curvatura Gaussiana limitada inferiormente, contidas entre dois planos e tais que ambos os pólos de  $\mathbb{S}^2$  – que são ortogonais àqueles planos – não estão no fecho da imagem da aplicação de Gauss, são os planos de  $\mathbb{R}^3$ .*

Por outro lado, o exemplo da Seção 3.5 mostrará que a hipótese de  $\Sigma^n$  estar contida entre dois slices de  $\mathbb{R} \times M^n$  é necessária no Teorema 3.8, a fim de concluirmos que a curvatura média de  $\Sigma^n$  não pode estar globalmente longe de zero. Ademais, observe que o cilindro circular horizontal  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  satisfaz quase todas as hipóteses do Corolário 3.9, exceto a que exige que nenhum dos pólos de  $\mathbb{S}^2$ , ortogonais a  $\mathcal{C}$ , pertença ao fecho da imagem da aplicação de Gauss  $N$  de  $\mathcal{C}$ . Na verdade,  $\mathcal{C}$  é ilimitado em todas as direções nas quais  $N$  é isolada.

Em virtude do Lema 3.1, o Teorema 3.8 também fornece este

**Corolário 3.10 (Corolário 5 de [44])** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e curvatura seccional limitada inferiormente. Seja  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro de uma função suave e não negativa  $u \in C^\infty(M)$ , com  $H$  constante e  $H_2$  limitada inferiormente. Se  $u$  é limitada, então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

Ainda do Teorema 3.8, desta vez combinado com o Teorema 1.2 de [58]<sup>3</sup>, obtemos o seguinte

**Corolário 3.11 (Corolário 6 de [44])** *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa e recorrente, com curvatura de Ricci não negativa e curvatura seccional limitada inferiormente. Seja  $\Sigma^n(u) \subset \mathbb{R} \times M^n$  o gráfico inteiro de uma função  $u \in C^\infty(M)$ , com  $H$  constante e  $H_2$  limitada inferiormente. Se  $u$  é limitada, então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Observação 3.2** *I. Salavessa [62] provou que quando a fibra  $M^n$  é completa e não compacta, um gráfico inteiro  $\Sigma^n(u)$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  com curvatura média constante  $H$  é mínimo, se a constante de Cheeger  $\mathfrak{h}(M)$  da fibra  $M^n$  se anula. Recordamos que*

$$\mathfrak{h}(M) = \inf_D \frac{A(\partial D)}{V(D)},$$

em que  $D$  percorre todas as subvariedades abertas de  $M^n$  com fecho compacto em  $M^n$  e bordo suave, e  $V(D)$  e  $A(\partial D)$  são o volume de  $D$  e a área de  $\partial D$ , respectivamente, calculados na métrica de  $M^n$ .

Retornando ao contexto do Teorema 2.4, observamos que a condição de o ângulo  $\eta$  da hipersuperfície  $\Sigma^n$  estar longe de zero assegura que  $\Sigma^n$  é, de fato, (localmente) o gráfico  $\Sigma^n(u)$  de alguma função  $u \in C^\infty(M)$ . Se (2.28) vale, de (3.2) e (3.9) vemos que o argumento de Salavessa nos permite obter que

$$\begin{aligned} nHV(D) &= \int_D nHdV = \int_D \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) dV \\ &= \int_{\partial D} \left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \nu \right\rangle dA \leq \sqrt{\frac{n}{(n-1)K_0}} HA(\partial D), \end{aligned}$$

em que  $\nu$  é o vetor unitário normal que aponta para fora de  $\partial D$ . Isso fornece a seguinte estimativa para a constante de Cheeger da fibra  $M^n$ :

$$\sqrt{n(n-1)K_0} \leq \mathfrak{h}(M).$$

---

<sup>3</sup>Dizemos que uma variedade  $M^n$  tem a *propriedade do semi-espaço* se os slices  $M^n \times \{t\}$  são as únicas hipersuperfícies mínimas propriamente imersas em  $M^n \times \mathbb{R}_+$ .  $M^n$  é dita *recorrente* se para qualquer aberto limitado  $\emptyset \neq U \subseteq M^n$ , toda função harmônica limitada em  $M^n \setminus U$  é determinada por seus valores de fronteira. O Teorema 1.2 de [58] estabelece o seguinte: *Seja  $M^n$  uma variedade riemanniana completa e recorrente, com curvaturas seccionais limitadas  $|K_\pi| \leq K_0$ , para alguma constante  $K_0$ . Então  $M^n$  tem a propriedade do semi-espaço.*

Ademais, recordando o operador de estabilidade  $\mathcal{L} = -\Delta - \text{Ric}(N, N) - |A|^2$ , uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  com curvatura média constante  $H$  é dita estável se

$$\int_{\Sigma} (\mathcal{L}f)f \geq 0, \quad \forall f \in C_0^2(\Sigma).$$

Note que, sob a referida hipótese do Teorema 2.4, a hipersuperfície é um slice e, portanto,  $\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = 0$  e  $|A|^2 = 0$ . Logo, neste caso, vemos que a hipersuperfície mínima é estável.

### 3.4 Resultados tipo-Moser

Os resultados desta seção compõem o paper [49].

**Teorema 3.12** *Sejam  $M^n$  uma variedade riemanniana compacta com curvaturas seccionais positivas e  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , com curvatura média  $H$  constante e segunda curvatura média  $H_2$  limitada inferiormente. Se  $|Du|_M \leq C$ , para alguma constante  $C > 0$ , então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 3.13** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa e  $\Sigma^n(u) \looparrowright \mathbb{R} \times M^n$  um gráfico inteiro sobre  $M^n$ , com curvatura média  $H$  constante e segunda curvatura média  $H_2$  limitada inferiormente. Se  $|Du|_M \leq \alpha|A|$ , para alguma constante  $\alpha > 0$ , então  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração dos Teoremas 3.12 e 3.13.** Sabemos que  $\Sigma^n(u)$  é uma variedade completa e que o campo unitário

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|_M^2}}(\partial_t - Du)$$

dá uma orientação para  $\Sigma(u)$  com relação à qual temos  $0 < \eta \leq 1$ . Considerando  $\Sigma^n(u)$  com essa orientação, definimos uma função limitada e suave  $g : \Sigma^n(u) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g = -e^\eta.$$

Temos

$$\nabla g = -e^\eta \nabla \eta$$

e, usando a Proposição 1.24,

$$\Delta g = e^\eta \{-|\nabla \eta|^2 + (\text{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\eta\}.$$

É imediato que  $N^{*\top} = \eta \nabla u$  e  $|\nabla u|^2 = \langle N^*, N^* \rangle_M$ . Aqui, estamos levando em consideração que a função altura  $h$  de  $\Sigma(u)$  não é senão a função  $u$  vista como uma função em  $\Sigma(u)$ . Da expressão para o campo  $N$ , obtemos

$$|\nabla u|^2 = \frac{|Du|_M^2}{1 + |Du|_M^2}. \quad (3.15)$$

A norma do endomorfismo de Weingarten  $A$  de  $\Sigma(u)$  satisfaz a seguinte identidade algébrica

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2,$$

donde inferimos, uma vez que por hipótese  $H$  é constante e  $H_2$  é limitada inferiormente, que  $\sup_{p \in \Sigma(u)} |A(p)|^2 < +\infty$ .

Como existe uma constante positiva  $C$  tal que  $|Du|_M \leq C$  (no contexto do Teorema 3.13, podemos tomar  $C = \alpha \sup_{p \in \Sigma(u)} |A(p)|^2$ ), de  $\eta^2 = 1 - |\nabla u|^2$  e de (3.15), vem que

$$\eta \geq \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} > 0. \quad (3.16)$$

Note que estamos sob as hipóteses do Lema 2.2, o qual assegura que a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n(u)$  é limitada inferiormente. Existe, pois, uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma^n(u)$ , tal que  $\lim_k g(p_k) = \sup_{\Sigma(u)} g$ ,  $\lim_k |\nabla g(p_k)| = 0$  e  $\limsup_k \Delta g(p_k) \leq 0$ . Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_k \Delta g(p_k) = \lim_k e^{\eta(p_k)} (\text{Ric}_M(N^*, N^*) |A|^2) \eta(p_k) \\ &\geq e^{\inf_{p \in \Sigma(u)} \eta(p)} \cdot \lim_k (\text{Ric}_M(N^*, N^*) |A|^2)(p_k) \cdot \inf_{p \in \Sigma(u)} \eta(p) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora, suponha que as curvaturas seccionais de  $M$  são limitadas por uma constante positiva  $\beta$ . Então, neste caso,

$$\text{Ric}_M(N^*, N^*) \geq \beta |\nabla u|^2.$$

Consequentemente, como (3.16) garante que  $\inf_{p \in \Sigma(u)} \eta(p) > 0$ , concluimos que

$$\lim_k |\nabla u(p_k)|^2 = 0.$$

Daí e de  $\eta^2 = 1 - |\nabla u|^2$ , segue que  $\eta \equiv 1$ , i.e.,  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, supondo que  $M^n$  tem curvatura de Ricci não negativa, de (3.17) vem que  $\lim_k |A(p_k)| = 0$ . Logo, como por hipótese existe uma constante positiva  $\alpha$  tal  $|Du|_M \leq \alpha|A|$ , de (3.15) inferimos que  $\lim_k |\nabla u(p_k)|^2 = 0$ . Assim, também neste caso, temos  $u \equiv t_0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . ■

### 3.5 Coda

Finalizemos com um exemplo. No que segue, consideraremos o modelo do semi-espaço para o espaço hiperbólico de dimensão 2, i.e.,  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  munido da métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2} = (dx^2 + dy^2)/y^2$ .

Neste ambiente, estudemos a função suave  $u : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x, y) = a \cdot \ln y$ , para uma constante não nula  $a \in \mathbb{R}$ . Seu gráfico é

$$\Sigma^2(u) = \{(a \cdot \ln y, x, y) : y > 0\} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2.$$

Temos  $Du(x, y) = (0, ay)$  e, portanto,  $|Du|_{\mathbb{H}^2}^2 = a^2$ . Ademais, a função altura  $h$  de  $\Sigma^2(u)$  satisfaz

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|_{\mathbb{H}^2}^2}{1 + |Du|_{\mathbb{H}^2}^2} = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$

Logo, a função ângulo  $\eta$  de  $\Sigma^n(u)$  com relação à orientação (3.1) é dada por

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Em particular,  $\Sigma^n(u)$  tem argumento constante

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}\right).$$

Afirmamos que  $\text{Div} = \text{Div}_0 - \frac{2}{y}dy$ , em que  $\text{Div}_0$  denota a divergência em  $\mathbb{R}^2$ . Com efeito, note que  $\{y\partial_x, y\partial_y\}$  é um referencial ortonormal global em  $\mathbb{H}^2$ . Seja  $X \in T\mathbb{H}^2$ . Temos

$$\begin{aligned} \text{Div } X &= \langle \nabla_{y\partial_x} X, y\partial_x \rangle + \langle \nabla_{y\partial_y} X, y\partial_y \rangle \\ &= y^2(\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle + \langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y \rangle). \end{aligned}$$



Pela fórmula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle &= \partial_x \langle X, \partial_x \rangle + X \langle \partial_x, \partial_x \rangle - \partial_x \langle \partial_x, X \rangle \\ &\quad - \langle \partial_x, [X, \partial_x] \rangle + \langle X, [\partial_x, \partial_x] \rangle + \langle \partial_x, [\partial_x, X] \rangle \\ &= X \left( \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{y^2} \langle \partial_x, [\partial_x, X] \rangle_0. \end{aligned}$$

Logo

$$\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle = \frac{1}{y^2} \langle \nabla_{\partial_x}^0 X, \partial_x \rangle_0 + \frac{X}{2} \left( \frac{1}{y^2} \right).$$

Analogamente, obtemos

$$\langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y \rangle = \frac{1}{y^2} \langle \nabla_{\partial_y}^0 X, \partial_y \rangle_0 + \frac{X}{2} \left( \frac{1}{y^2} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Div}(X) &= \text{Div}_0(X) + y^2 X \left( \frac{1}{y^2} \right) \\ &= \text{Div}_0(X) - \frac{2}{y} X y \\ &= \text{Div}_0(X) - \frac{2}{y} dy(X), \end{aligned}$$

donde

$$\text{Div} = \text{Div}_0 - \frac{2}{y} dy.$$

Dessa identidade que relaciona as divergências em  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{R}^2$  e de (3.9), seque que

$$2Hr^3 = r^2 y^2 \Delta_0 u - y^3 (yQ(u) + u_y |D_0 u|_0^2),$$

em que as quantidades com o zero subscrito dizem respeito a  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}})$ ,

$$r = \sqrt{1 + |Du|_{\mathbb{H}^2}^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

e

$$Q(u) = u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}.$$

Substituindo  $u(x, y) = a \cdot \ln y$ , obtemos

$$H = \frac{a}{2\sqrt{1+a^2}}$$

e, como  $\eta$  é constante,

$$0 = \Delta\eta = -(|A|^2 - |\nabla h|^2)\eta$$

e, assim,

$$|A|^2 = \frac{a^2}{1+a^2}.$$

Ademais, da identidade algébrica  $|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2$ , vemos que  $H_2 = 0$  em  $\Sigma^2(u)$ . Mas  $H_2 = \lambda_1 \lambda_2$ , em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são os autovalores de  $A$ . Assim, considerando  $\lambda_2 = 0$  e usando que  $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1}{2}$ , obtemos  $\lambda_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**Observação 3.3** Em [61], I. Salavessa provou que para cada  $c$  com  $|c| \in [0, n-1]$ , a função  $u : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \int_0^{r(x)} \frac{\frac{c}{(\sinh r)^{n-1}} \int_0^r (\sinh t)^{n-1} dt}{\sqrt{1 - \left( \frac{c}{(\sinh r)^{n-1}} \int_0^r (\sinh t)^{n-1} dt \right)^2}} dr,$$

em que

$$r(x) = \ln \left( \frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right),$$

é suave em  $\mathbb{H}^n$ , e  $\Sigma^n(u) \subset \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  tem curvatura média constante dada por  $|H| = \frac{|c|}{n}$ . Em particular, se  $n = 2$  e  $c = 1$ ,  $u$  pode ser escrita como

$$u(x) = \int_0^{r(x)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh r - 1)} dr.$$

# Bibliografia

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg, *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Math. **193** (2004), 141–174.
- [2] A. L. Albuje and L. J. Alías, *Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces*, J. Geom. Phys. **59**, 620–631, 2009.
- [3] L. J. Alías, A. G. Colares e A. Brasil Jr., *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications*, Proc. Edinb. Math. Soc. **46** (2003), 465–488.
- [4] L. J. Alías and M. Dajczer, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), 653–663.
- [5] L. J. Alías, M. Dajczer and J. Ripoll, *A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 363–373.
- [6] C. P. de Aquino and H. F. de Lima, *On the rigidity of constant mean curvature complete vertical graphs in warped products*, Diff. Geom. Appl. **29** (2011), 590–596.
- [7] C. P. de Aquino, H. F. de Lima and E. A. Lima Jr., *On the angle of complete CMC hypersurfaces in Riemannian product spaces*, Diff. Geom. Appl. **33** (2014), 139–148.
- [8] J. L. M. Barbosa and A. G. Colares, *Stability of hypersurfaces with constant  $r$ -mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277–297.

- 
- [9] A. Barros, A. Brasil and A. Caminha, *Stability of spacelike hypersurfaces in foliated space-times*, Diff. Geom. and Its Applications **26** (2008).
- [10] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. **194**, Springer, Berlin, 1971.
- [11] S. Bernstein, *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2ème sér.) **15** (1915-1917), 38–45. Tradução ao alemão: *Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*, Math. Z. **26** (1927), 551-558.
- [12] S. Bochner, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. American Math. Soc. **52** (1946), 776–797.
- [13] E. Bombieri, E. de Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.
- [14] E. Calabi, *An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry*, Duke Math. J. **25** (1957), 45–56.
- [15] A. Caminha, *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds*, J. Geom. and Phys. **56** (2006), 1144–1174.
- [16] A. Caminha, *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **42** (2011), 277–300.
- [17] A. Caminha and H. F. de Lima, *Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi-Riemannian warped products*, Bull. Belgian Math. Soc. **16** (2009), 91–105.
- [18] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, quinta edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [19] J. Cheeger, *Critical Points of Distance Functions and Applications to Geometry*.
- [20] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, and Elsevier, New York, 1975.

- [21] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. (2), **104**(3), 407–419, 1976.
- [22] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), no. 3, 195–204.
- [23] S. Chern, *Simple proofs of two theorems on minimal surfaces*, L'Enseignement Math. **15** (1969), 53–61.
- [24] M. Dajczer et al., *Submanifolds and isometric immersions*, Math. Lect. Ser., **13**, Publish or Peris, Inc., Houston, Texas, 1990.
- [25] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken and L. Vrancken, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Monats. Math. **152** (2007), 89–96.
- [26] F. Dillen and D. Kowalczyk, *Constant angle surfaces in product spaces*, J. Geom. Phys. **62** (2012), 1414–1432.
- [27] F. Dillen and M. I. Munteanu, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Brazilian Math. Soc. **40** (2009), 85–97.
- [28] J. Eschenburg and E. Heintze, *An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Ann. Glob. Anal. and Geom. **2** (1984), 141–151.
- [29] J. M. Espinar and H. Rosenberg, *Complete constant mean curvature surfaces and Bernstein type theorems in  $M^2 \times \mathbb{R}$* , J. Diff. Geom. **82** (2009), 611–628.
- [30] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33**(1980), 199–211.
- [31] W. H. Fleming, *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo **11** (1962), 69–90.
- [32] S. Fornari and J. Ripoll, *Killing fields, mean curvature, translation maps*, Illinois J. of Math. **48**:4 (2004), 1385–1403.
- [33] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan **40**:2 (1988), 235–247.

- 
- [34] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, 3rd. edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [35] E. Garnica, O. Palmas and G. Ruiz-Hernández, *Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions*.
- [36] E. Garnica, O. Palmas and G. Ruiz-Hernández, *Hypersurfaces with a canonical principal direction*, Diff. Geom. Appl. **30** (2012), 382–391.
- [37] E. de Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1965), 79–85.
- [38] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge, Cambridge Mathematical Library, 1989.
- [39] D. T. Hieu e T. L. Nam, *Bernstein type theorem for entire weighted minimal graphs in  $\mathbb{G}^n \times \mathbb{R}$* , J. Geom. Phys. **81** (2014), 87–91.
- [40] E. Hopf, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sb. Preuss. Akad. Wiss. **19** (1927), 147–152.
- [41] E. Hopf, *On S. Bernstein's theorem on surfaces  $z(x, y)$  of nonpositive curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 80–85.
- [42] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of Graduate Texts in Mathematics, second edition, Springer-Verlag, New York, 2013.
- [43] H. F. de Lima, *Entire vertical graphs in Riemannian product spaces*, to appear in Quaest. Math.
- [44] H. F. de Lima, E. A. Lima Jr. and U. L. Parente, *Hypersurfaces with prescribed angle function*, Pacific J. of Math. **269**, (2014), 393–406.
- [45] H. F. de Lima and U. L. Parente, *A Bernstein type theorem in  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$* , Bull. Brazilian Math. Soc. **43** (2012), 17–26.
- [46] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

- [47] S. Montiel and A. Ros, *Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, *Diff. Geom.* **52** (1991), 279–296.
- [48] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 577–591.
- [49] A. M. S. Oliveira and H. F. de Lima, *Moser type results in Riemannian product spaces* (2014) (submitted).
- [50] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 205–214.
- [51] R. Osserman, *Proof of a conjecture of Nirenberg*, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 229–232.
- [52] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.
- [53] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, 2nd. edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [54] S. Pigola, M. Rigoli and A. Setti, *Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 174, n. 822, 2005.
- [55] A. Romero, *Simple proof of Calabi-Bernstein's Theorem on maximal surfaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1315–1317.
- [56] H. Rosenberg, *Minimal surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$* , *Illinois J. Math.* **46** (2002), 1177–1195.
- [57] H. Rosenberg, *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, *Bull. Sci. Math.* **117** (1993) 217–239.
- [58] H. Rosenberg, F. Schulze and J. Spruck, *The half-space property and entire positive minimal graphs in  $M \times \mathbb{R}$* , *J. Diff. Geom.* **95** (2013), 321–336.
- [59] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Volume **149**, AMS, Providence, 1996.
- [60] P. A. A. Souza, *O Laplaciano de uma função tipo suporte e aplicações*, Universidade Federal do Ceará, Dissertação de Mestrado, 2004.

- 
- [61] I. M. C. Salavessa, *Graphs with parallel mean curvature and a variational problem in conformal geometry*. University of Warnick, Ph.D. Thesis, 1987.
- [62] I. M. C. Salavessa, *Graphs with parallel mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **107**:2 (1989), 449–458.
- [63] L. Saloff-Coste, *Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **36** (1992), no. 2, 417–450.
- [64] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.
- [65] F. E. Wolter, *Distance function and cut loci on a complete Riemannian manifold*, Arch. Math. (Basel) **32** (1979), 92–96.
- [66] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.
- [67] S. T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 659–670.