Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares

por

João Paulo Formiga de Meneses

sob orientação do

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Campina Grande - PB
Novembro de 2016

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

João Paulo Formiga de Meneses

Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Orientador

Campina Grande, 25 de Novembro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M543e Meneses, João Paulo Formiga de.
Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas Elípticos quaselineares / João Paulo Formiga de Meneses. – Campina Grande-PB, 2016.
191 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos".
Referências.

1. Sub e Supersoluções. 2. Métodos Variacionais. 3. Espaços de Orlicz-Sobolev. 4. Problemas Elípticos Quaselineares. I. Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quasilineares

por

João Paulo Formiga de Meneses

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Orientador
UAMat/CCT/UFCG

Prof. Uberlândio Batista Severo
Examinador
DM/CCEN/UFPB

Prof. Claudianor Oliveira Alves
Examinador
UAMat/CCT/UFCG

Prof. Marco Aurélio Soares Souto
Examinador
UAMat/CCT/UFCG

Dedicatória

Aos meus pais e irmãs, à minha esposa
Naianna e ao meu filho Bernardo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me guiou e me fortaleceu a cada dia para conseguir êxito neste trabalho. À minha família, por ser minha base, minha fortaleza. À minha esposa, Naianna, por todo o amor e carinho dedicado a mim, e pelo incentivo diário. Aos meus familiares mais próximos, à família de minha esposa, aos meus amigos e a todos aqueles que contribuiram direta ou indiretamente para mais este capítulo da minha história. Aos amigos do Departamento de Matemática, que tanto contribuiram na minha formação. Por fim, deixo meus agradecimentos aos professores que me proporcionaram grande aprendizado durante a minha carreira acadêmica, em especial, Jefferson (Orientador do TCC, PIBIC e Mestrado), Daniel (Tutor do PET), José de Arimatéia (Orientador - PIBIC) e Miriam Costa (grande incentivadora para meu ingresso no curso).

Resumo

Neste trabalho, utilizando sub e supersoluções e métodos variacionais sobre espaços de Orlicz-Sobolev, estudamos a existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares.

Palavras-chave: Sub e supersoluções, Métodos variacionais, Espaços de Orlicz-Sobolev, Problemas elípticos quaselineares.

Abstract

In this work, using sub and supersolutions and variational methods on Orlicz-Sobolev spaces, we study the existence of multiple positive solutions for a class of quasilinear elliptic problems.

Keywords: Sub and supersolutions, Variational methods, Orlicz-Sobolev spaces, Quasilinear elliptic problems.

Sumário

Notação

Definições e Notações Gerais

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^N = \{(x_1, ..., x_N); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N\}$;
- $|\ .\ |$ denota o modulo na reta e a norma euclidiana no $\mathbb{R}^N$;
- $|\ .\ |_S$ é a norma da soma em $\mathbb{R}^N$;
- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |\ x - x_0\ | < r\},\ r > 0$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto;
- $\partial\Omega$ fronteira de Ω;
- $|\ A\ |$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável a Lebesgue;
- $\overline{A}^{\|\cdot\|_*}$ é o fecho do conjunto A com relação a uma norma arbitrária $\|\ .\ \|_*$;
- $A \subset\subset \Omega$, o aberto A está compactamente contido em Ω, isto é $\overline{A} \subset \Omega$ é compacto;
- $A \underset{cont}{\hookrightarrow} B$, A está imerso continuamente em B;
- $A \underset{comp}{\hookrightarrow} B$, A está imerso compactamente em B;
- $[w = 0] = \{x; w(x) = 0\}$;
- $|\ .\ |_\infty$ é a norma usual do espaço $L^\infty(\Omega)$;
- $|\ .\ |_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$;
- $d_{\|\cdot\|_*}(x, A) = \inf\{\|\ x - y\ \|_*; y \in A\}$, onde $\|\ .\ \|_*$ é uma norma qualquer;

- $\langle u \rangle = \{\lambda u; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o espaço gerado pelo elemento u;
- $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável;
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita N-mensurável, quando para qualquer função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$, a função composta $f(., u(.))$ é mensurável;
- χ_A é a função característica com relação ao conjunto A;
- $sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0; \end{cases}$
- $div(\overrightarrow{w}(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x)$, onde $\overrightarrow{w}(x) = (w_1(x), ..., w_N(x))\,, x \in \mathbb{R}^N$;
- $p' = \dfrac{p}{p-1}$ é o expoente conjugado de $p > 1$.
- $f'_+(t)$ é a derivada lateral à direita de f, com relação a variável t,

Espaços de Funções

- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}$
- $C_0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua com supp}(u) \subset \Omega \text{ compacto}\}$;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty\right\},\ p \in [1, +\infty)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; existe } c > 0 \text{ tal que } \mid u(x) \mid \leq c \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é continuamente derivável } k \text{ vezes}\}$;
- $\parallel u \parallel_{C^1(\overline{\Omega})} = \displaystyle\max_{i \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega} \left\{ \mid u \mid, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right\}$;
- $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) = \Big\{u \in C^1(\overline{\Omega});$ existem constantes $K_0, K_i > 0,\ i = 1, 2, ..., N$ tais que $\mid u(x) - u(y) \mid \leq K_0 \mid x - y \mid^\alpha$ e $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| \leq K_i \mid x - y \mid^\alpha,$ para todo $x, y \in \Omega \Big\}$;

- $C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$;

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável; $\displaystyle\int_A |\, u \,|\, dx < +\infty,$ para qualquer $A \subset\subset \mathbb{R}^N \Big\}$;

- X^* é o espaço dual de um espaço X;

Introdução

Em 1993, Ambrosetti, Brézis e Cerami [2] estudaram um problema elíptico semilinear com não-linearidades côncavas e convexas, dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

com $0 < q < 1 < p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$, e mostraram, utilizando o método de sub e supersoluções, a existência de um parâmetro $\Lambda > 0$ de modo que (1) possui solução se, e somente se, $0 < \lambda \leq \Lambda$. Além disso, utilizando métodos variacionais, provaram a existência de uma segunda solução (positiva). Reunindo os principais resultados deste trabalho, obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Existe uma constante $\Lambda > 0$ tal que*

(i) *para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, (1) tem, pelo menos, duas soluções;*

(ii) *para $\lambda = \Lambda$, (1) tem, pelo menos, uma solução;*

(iii) *para todo $\lambda > \Lambda$, (1) não tem solução.*

Ainda em 1993, Brezis e Nirenberg [6] trabalharam com o funcional Euler-Lagrange

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

e f é uma função de Caratheodory definida em $\Omega \times \mathbb{R}$, verificando

$$| f(x,s) | \leq C(1+ | s |^m),$$

para

$$1 \leq m \leq \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3$$

e

$$1 \leq m < \infty, \text{ se } N = 1 \text{ ou } N = 2.$$

Neste trabalho, provaram que um mínimo local de J na topologia de $C^1(\overline{\Omega})$, é também mínimo local de J na topologia de $H_0^1(\Omega)$. Este procedimento ficou conhecido como $H_0^1(\Omega)$ versus $C^1(\overline{\Omega})$.

García Azorero, Peral Alonso e Manfredi [18], em 1999, estenderam o resultado de Brézis e Nirenberg para o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Considerando agora o seguinte funcional

$$J_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

com condições similares às dadas sobre (2), ainda neste trabalho, estenderam o resultado obtido em [2] para o operador p-Laplaciano. Considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{p-2} u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

com $1 < q < p < r < p^*$, $\lambda > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, encontraram um resultado similar ao Teorema 0.1.

Seguindo isto, em 2003, Fukagai e Narukawa [15], motivados por uma equação que modela uma corda elástica em um estado de equilíbrio sofrendo uma força exterior [16], trabalharam com o seguinte problema:

$$\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave, $N \geq 1$, $t\phi(t) \in C(\mathbb{R})$, $f(x,t) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ e λ um parâmetro real. Neste caso, o funcional Euler-Lagrange associado ao problema (4) é dado por:

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{5}$$

onde

$$\Phi(t) = \int_0^t s\phi(s)ds, \qquad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds, \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega.$$

Ao longo deste trabalho, os autores assumiram as seguintes condições:

(ϕ_1) $\phi \in C^1(0,\infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;

(ϕ_2') existem constantes $p_0, p_1 > 1$ e $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ tais que

$$\phi(t) = \alpha_0 t^{p_0-2} + o(t^{p_0-2}), \text{ quando } t \to 0^+,$$

$$\phi(t) = \alpha_1 t^{p_1-2} + o(t^{p_1-2}), \text{ quando } t \to +\infty;$$

(ϕ_3') existem constantes $a_0, a_1 > 0$ e $0 < T_0 < T_1$ tais que

$$a_0 t^{p_0-2} \leq (t\phi(t))' \leq a_1 t^{p_0-2}, \text{ para } 0 < t < T_0,$$

$$a_0 t^{p_1-2} \leq (t\phi(t))' \leq a_1 t^{p_1-2}, \text{ para } t > T_1.$$

Além disso, assumiram sobre $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as seguintes condições:

(f_*) existem constantes $q_0 \in (1, p_0)$, $q_1 \in (p_1, p_1^*)$ e $\beta_0(x), \beta_1(x) > 0$ contínuas em $\overline{\Omega}$ tais que

$$f(x,t) = \beta_0(x) t^{q_0-1} + o(t^{q_0-1}), \text{ quando } t \to 0^+,$$

$$f(x,t) = \beta_1(x) t^{q_1-1} + o(t^{q_1-1}), \text{ quando } t \to +\infty,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, onde

$$p_1^* = \frac{Np_1}{N-p_1}, \text{ para } p_1 < N,$$

e

$$p_1^* = \infty, \text{ para } p_1 \geq N,$$

o que corresponde a não-linearidade côncava e convexa.

Este problema quaselinear tem um operador bem mais geral que (1) e (3). Devido a isso, não foi possível seguir o mesmo raciocínio adotado por García Azorero para se obter uma limitação uniforme para as soluções (independente do multiplicador de Lagrange). Contudo, utilizando as ideias apresentadas nos trabalhos [13] e [14], é possível obter tal limitação e, consequentemente, estabelecer uma segunda solução positiva.

A estimativa dada em [14] permitiu ainda que Fukagai e Narukawa, estabelecessem uma limitação para os valores de λ para os quais existe solução positiva para o problema (4) . Eles demonstraram que existe $\Lambda > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \Lambda$, existem pelo menos duas soluções positivas para o problema. Ainda neste trabalho, Fukagai e Narukawa, utilizando o método de sub e supersoluções, garantiram a existência de uma solução positiva mínima deste problema para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Mais recentemente, em 2006, Fukagai e Narukawa [17], trabalharam com o problema (4), assumindo agora as seguintes condições:

(ϕ_1) $\phi \in C^1(0,\infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;

(ϕ_2) existem $l, m > 1$ tais que

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0;$$

(ϕ_3) existem $a_0, a_1 > 0$ tais que

$$a_0 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq a_1, \quad t > 0.$$

Além disso, assumiram também que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, mas agora com o seguinte crescimento:

$$f(x,t) = o(\phi(t)t) \text{ quando } t \to 0 \text{ e } t \to \infty, \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Com estas e demais condições, utilizando sub e supersolução e métodos variacionais, garantiram a existência de uma constante $\Lambda > 0$ tal que, para $\lambda > \Lambda$, o problema (4) possui pelo menos duas soluções positivas.

Uma vez que a função $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ é dado de forma bem geral, esta classe de problemas pode modelar diversos problemas físicos, como por exemplo:

(a) Elasticidade não-linear; $\Phi(t) = \int_0^t ((1+s^2)^\gamma - 1)ds$, se $\gamma \geq 1$ (ver [16]);

(b) Plasticidade; $\Phi(t) = \int_0^t s^\alpha (ln(1+s))^\beta ds$, se $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ (ver [11]);

(c) Fluidos Newtonianos generalizados; $\Phi(t) = \int_0^t s^{1-\alpha}(senh^{-1} s)^\beta ds$, se $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta > 0$ (ver [12]).

O fato, ainda, de $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ ser dada de forma bem geral impossibilita que o espaço ambiente seja o espaço usual de Sobolev. Por este fato, se faz necessário um ambiente mais geral, que são os espaços de Orlicz-Sobolev.

O primeiro trabalho onde aparecem os espaços de Orlicz, que são generalizações naturais dos espaços de funções de Lebesgue, é um artigo do matemático polonês Wladyslaw Roman Orlicz (ver [33]), em 1932. Inicialmente, foram definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2. Em 1936, definiu-se tais espaços sob a generalidade hoje estudada. Da mesma forma que os espaços de Sobolev são definidos a partir dos espaços de Lebesgue, define-se os espaços de Orlicz-Sobolev a partir dos espaços de Orlicz. Devido a sua boa estrutura topológica e geometrica, estes espaços vem ganhando notoriedade e sendo bastante utilizados nas últimas décadas em diversas áreas da Matemática.

Nos **Capítulos 1** e **2**, apresentamos os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, respectivamente. Neles, abordamos diversas propriedades e resultados importantes destes espaços, que servem como base para as argumentações realizadas nos capítulos seguintes.

Por sua vez, no **Capítulo 3**, assumindo as hipóteses $(\phi_1)-(\phi_3)$, mostramos algumas propriedades do operador Φ-Laplaciano em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, definido por

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular. Destacamos que na última seção deste capítulo, fizemos uma adaptação do Princípio do Máximo do Vasquez (ver [39]) para o operador $-\Delta_\Phi(.)$, não encontrada na literatura.

Já no **Capítulo 4**, discutimos, na primeira seção, a existência de uma solução positiva para o problema

$$(P_\lambda)\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

onde assumimos as seguintes hipóteses sobre f:

(f_1) $f(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$;

(f_2) $f(x,t) \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t > 0$, e existe um aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que

$$f(x,t) > 0 \text{ para } x \in \Omega_0, \quad t > 0;$$

(f_3) existe $C_0 > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq C_0\Phi(t) \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0;$$

(f_4) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)t}{\Phi(t)} = 0$ uniformemente em Ω.

Na segunda seção deste capítulo, assumimos (f_1), (f_3), (f_4) e substituimos (f_2) por uma hipótese ligeiramente restritiva, dada por:

(f_2') $f(x,t) > 0$ para $x \in \Omega, \quad t > 0.$

Além disso, adicionamos as seguintes hipóteses:

(f_5) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)t}{\Phi(t)} = 0$ uniformemente em Ω;

(f_6) $f(x,t)$ é não-decrescente em $t > 0$ para cada $x \in \Omega$.

Sob estas condições, garantimos a existência de uma segunda solução positiva através do seguinte teorema:

Teorema 0.2. *Sejam* $(\phi_1) - (\phi_3)$*,* (f_1)*,* (f_2') *e* $(f_4) - (f_6)$ *satisfeitas. Então, existe uma constante* $\Lambda > 0$ *tal que*

(i) *para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$*,* (P_λ) *não tem solução positiva;*

(ii) *para* $\lambda = \Lambda$*,* (P_λ) *tem pelo menos uma solução positiva;*

(iii) *para todo* $\lambda > \Lambda$*,* (P_λ) *tem pelo menos duas soluções positivas* u_λ*,* v_λ *satisfazendo* $v_\lambda \leq u_\lambda$ *e* $v_\lambda \neq u_\lambda$ *em* Ω*.*

Por fim, no **Capítulo 5** assumimos as condições $(f_1)-(f_4)$ e, além destas,

(f_7) existe uma N-função $\Psi = \displaystyle\int_0^t \psi(s)s ds$ equivalente a Φ_* no infinito (isto é, $\psi \sim \Phi_*$) e uma constante $K > 0$ tal que

$$f(x,t) + K.\Psi'(t) \text{ é não-decrescente em } (0, +\infty),$$

para cada $x \in \Omega$. A partir daí, foi possível mostrar a existência de uma solução maximal para o problema (P_λ). Isto é, mostramos o seguinte resultado:

Teorema 0.3. *Assuma* $(\phi_1) - (\phi_3)$*,* $(f_1) - (f_4)$ *e* (f_7)*. Então, para todo* $\lambda > \Lambda$*, o problema* (P_λ) *tem uma solução* w_λ *maximal e positiva.*

Capítulo 1

Espaços de Orlicz

A seguir apresentaremos um breve estudo sobre Espaços de Orlicz, baseado em [1], [37], [35], [34] e [23]. As demonstrações omitidas no decorrer deste capítulo podem ser encontradas em [36].

1.1 N-função

Definição 1.1. *Dizemos que* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *é uma* ***N-função*** *se:*

(i) Φ *é uma função convexa e contínua;*

(ii) $\Phi(t) = 0$ *se, e só se* $t = 0$*;*

(iii) $\frac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *e* $\frac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

(iv) Φ *é par (ou seja* $\Phi(t) = \Phi(-t)$*).*

Exemplo 1.2. *As funções a seguir são exemplos de N-funções*

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$;

2. $\Phi_2(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$;

3. $\Phi_3(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1,\ t \in \mathbb{R}$;

4. $\Phi_4(t) = (1 + \mid t \mid)\ln(1 + \mid t \mid) - \mid t \mid,\ t \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresentamos um lema no qual é dada uma caracterização para N-funções.

Lema 1.3. *Seja* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *dado por*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), \ t \geq 0; \\ -\phi(-t), \ t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *satisfazendo:*

(I) ϕ *é contínua à direita e não-decrescente em* $\mathbb{R}_+$*;*

(II) $\phi(t) = 0$ *se, e só se,* $t = 0$*;*

(III) $\phi(t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$*;*

(IV) $\phi(t) > 0$*,* $t > 0$*.*

Então, Φ *é uma N-função.*

Demonstração. **Verificação de** (iv)**:** Desde que φ é uma função ímpar, Φ é par.
Verificação de (i)**:** Sendo

$$\Phi'(t) = \varphi(t), \ t \in \mathbb{R}^+$$

e φ é uma função não-decrescente em $\mathbb{R}_+$, temos que Φ é uma função convexa em $\mathbb{R}_+$. E como Φ é uma função par em toda a reta e convexa em $\mathbb{R}_+$, conclui-se que Φ é convexa em toda a reta.
Verificação de (iii)**:** Temos para $t > 0$ e pelo fato de φ ser não-decrescente em $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq \frac{\Phi(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s)ds \leq \varphi(t),$$

donde segue de (I) e (II)

$$\frac{\Phi(t)}{t} \stackrel{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

De modo análogo mostra-se que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \stackrel{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$

Além disso, de (I) e (III), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(t)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds \\ &\geq \frac{1}{t}\int_{\frac{t}{2}}^t \varphi(s)ds \\ &\geq \frac{1}{t}\varphi\Big(\frac{t}{2}\Big)(t-\frac{t}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{t}{2}\Big) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.\end{aligned}$$

□

Observação 1.4. *A função Φ definida no Lema 1.3 pode ser escrita da seguinte forma:*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

A seguir, demonstraremos que também vale a recíproca do Lema 1.3. Além disso, ressaltamos que esta prova não é encontrada na literatura.

Lema 1.5. *Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma N-função. Existe $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando as hipóteses do Lema 1.3 tal que*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds.$$

Demonstração. Uma vez que Φ é convexa, segue que existe a derivada lateral à direita de Φ, Φ'_+, em todo ponto de $\mathbb{R}$, e além disso Φ'_+ é não decrescente em $\mathbb{R}$ (ver [29]).

Sendo Φ'_+ uma função monótona em $\mathbb{R}$, a mesma possui no máximo uma quantidade enumerável de pontos descontínuos (Ver [29], página 233). Desta forma, segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo que Φ pode ser definida por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \Phi'_+(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$\phi(t) := \Phi'_+(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

verifica as condições (I)-(IV).

Verificação de (I): Dados $t_0, s, t \in \mathbb{R}_+$, com $t_0 < s < t$, segue da convexidade de Φ que

$$\frac{\Phi(t_0)-\Phi(s)}{t_0-s} < \frac{\Phi(t)-\Phi(s)}{t-s} < \frac{\Phi(t_0)-\Phi(t)}{t_0-t},$$

passando ao limite de $t \to s^+$ e utilizando a continuidade de Φ, segue que

$$\frac{\Phi(t_0) - \Phi(s)}{t_0 - s} \leq \Phi_+^{'}(s) \leq \frac{\Phi(t_0) - \Phi(s)}{t_0 - s}, \text{ para } t_0 < s.$$

Agora, passando ao limite de $s \to t_0^+$, obtemos:

$$\lim_{s \to t_0^+} \Phi_+^{'}(s) = \Phi_+^{'}(t_0),$$

mostrando assim que $\Phi_+^{'}$ é contínua à direita em $\mathbb{R}_+$.
Verificação de (IV): Se $t > 0$, então

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi_+^{'}(s)ds \leq \Phi_+^{'}(t)t,$$

donde

$$\Phi_+^{'}(t) \geq \frac{\Phi(t)}{t} > 0, \text{ para } t > 0. \tag{1.1}$$

Verificação de (III): Basta observar que

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi_+^{'}(t) \geq \lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$$

Verificação de (II): Se $\Phi_+^{'}(t_0) = 0$, temos de (1.1) que $\Phi(t_0) = 0$, donde segue-se pelo fato de Φ ser N-função que $t_0 = 0$.

Reciprocamente, basta observar que

$$\begin{aligned} \Phi_+^{'}(0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0. \end{aligned}$$

□

1.2 Espaço de Orlicz

A ideia desta seção é construir um espaço que generalize os espaços de Lebesgue, chamado de espaço de Orlicz. No que segue, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto.

Definição 1.6. *Seja Φ uma N-função. Definamos o conjunto $K_\Phi(\Omega)$, dado por*

$$K_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty \right\},$$

como ***classe de Orlicz****.*

Verificaremos, a seguir, que $K_\Phi(\Omega)$ é convexo e em geral não define um espaço vetorial.

Lema 1.7. *$K_\Phi(\Omega)$ é convexo.*

Demonstração. De fato, dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(tu + (1-t)v)dx \leq t \int_\Omega \Phi(u)dx + (1-t) \int_\Omega \Phi(v)dx < +\infty, \ t \in [0,1],$$

mostrando que $tu + (1-t)v \in K_\Phi(\Omega), \ t \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 1.8. *$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.*

Considere a N-função $\Phi(t) = e^{t^2} - 1$, e seja $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ dado por (neste caso $\Omega = (0,1)$)

$$u(x) = \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_0^1 (e^{u^2} - 1)dx \\ &= \int_0^1 (e^{\ln(1/\sqrt{x})} - 1)dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = 1, \end{aligned}$$

mostrando que $u \in K_\Phi(\Omega)$, mas

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u\sqrt{2})dx &= \int_\Omega \left(e^{2\ln(1/\sqrt{x})} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx = +\infty, \end{aligned}$$

isto é, $\sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega)$.

Convidamos o leitor a observar que $K_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue. No entanto, vimos que a mesma precisa ser melhorada, tendo em vista que $K_\Phi(\Omega)$ não possui estrutura de espaço vetorial. Seguindo este raciocínio, construímos um novo conjunto $L_\Phi(\Omega)$, definido por

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

Verificaremos agora que o mesmo define um espaço vetorial.

De fato, basta observar que

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que
  $$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big) dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big) dx < +\infty.$$
  Daí, uma vez que
  $$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u + \lambda_v}\Big) dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u + \lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u + \lambda_v)}\Big) dx$$
  e
  $$1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_u + \lambda_v}.$$
  temos pela convexidade de Φ que
  $$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u + \lambda_v}\Big) dx \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_v} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big) dx + \frac{\lambda_v}{\lambda_u + \lambda_v} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big) dx < +\infty,$$
  mostrando que $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.9. *$L_\Phi(\Omega)$ é o menor espaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$, segue pelo fato de $K_\Phi(\Omega) \subset V$ que
$$\frac{u}{\lambda} \in V,$$
mostrando que $L_\Phi(\Omega) \subset V$. $\square$

Definição 1.10. *Definimos o espaço vetorial $L_\Phi(\Omega)$ como* ***espaço de Orlicz****.*

Definição 1.11. *Definimos como* ***norma de Luxemburg*** *a aplicação $|\ .\ |_\Phi : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$| \ u \ |_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx \leq 1 \right\}, \ \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Caminharemos agora com o intuito de mostrar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach.

Lema 1.12. *A N-função Φ satisfaz:*

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ *e* $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta \Phi(t)$, $\beta \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. **Verificação do item** (a)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha \Phi(t), \ \ \alpha \in [0,1];$$

Verificação do item (b)**:** Sem perda de generalidade tome $t > 0$ (já que Φ é par), logo

$$\Phi\Big(\frac{1}{\beta} t\Big) \leq \frac{1}{\beta} \Phi(t).$$

Fazendo $s = \Big(\dfrac{1}{\beta}\Big) t$, obtemos

$$\Phi(\beta s) \geq \beta \Phi(s), \ \text{ para } s > 0.$$

□

Lema 1.13. *Se $u \in L_\Phi(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Fixe $\lambda_u > 0$ tal que $\dfrac{u}{\lambda_u} \in K_\Phi(\Omega)$. Para λ suficientemente grande, $\dfrac{\lambda_u}{\lambda} \in (0,1)$. Sendo assim, segue do item (a) Lema 1.12

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) dx \leq \frac{\lambda_u}{\lambda} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big) dx \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queríamos mostrar. □

Lema 1.14. *A norma de Luxemburg* $|\ .\ |_\Phi$ *define uma norma sobre o espaço* $L_\Phi(\Omega)$.

Lema 1.15. *Se* $u \in L_\Phi(\Omega)$ *é uma função não trivial, então*

$$|\ u\ |_\Phi = \min\Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\}.$$

Lema 1.16. *Sejam* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável e* $k_0 > 0$. *Então*

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k_0}\Big)dx = 1,$$

se, e somente se, $|\ u\ |_\Phi = k_0$.

Exemplo 1.17.

1. Fixado $p > 1$, seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ a função dada por

$$\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$$

e

$$|\ .\ |_\Phi = p^{-\frac{1}{p}}\ |\ .\ |_p,$$

onde $|\ .\ |_p$ é a norma usual do espaço de lebesgue $L^p(\Omega)$.
De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\ u\ |^p\ dx < +\infty,$$

equivalentemente, $u \in L^p(\Omega)$. Portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Suponha agora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente temos

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$, ou seja,

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega |\ u\ |^p\ dx < +\infty,$$

onde isto acontece se, e só se, $u \in L^p(\Omega)$. Logo, $L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Sabendo disto, segue que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \mid u \mid_\Phi &= \inf\Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\} \\ &= \inf\Big\{\lambda > 0; \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\Big(\int_\Omega \mid u \mid^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\Big\} \\ &= p^{-\frac{1}{p}} \mid u \mid_p . \end{aligned}$$

2. Sejam $A \subset \Omega$ um subconjunto mensurável e

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \setminus A \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Temos

$$\mid \chi_A \mid_\Phi = \frac{1}{\Phi^{-1}(1/ \mid A \mid)}, \ A \subset \Omega.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi\Big(\chi_A(x)\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mid A \mid}\Big)\Big)dx &= \int_\Omega \chi_A(x)\Phi\Big(\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mid A \mid}\Big)\Big)dx \\ &= \int_\Omega \frac{\chi_A}{\mid A \mid}dx = 1, \end{aligned}$$

donde segue do Lema 1.16

$$\mid \chi_A \mid_\Phi = \frac{1}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{|A|}\Big)}.$$

A seguir, vemos dois resultados para os espaços de Orlicz que são análogos às relações entre os espaços de Lebesgue padrões.

Proposição 1.18. *Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.*

Proposição 1.19. **(i)** *Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $L_\Phi(\mathbb{R}^N) \subset L^1(K)$;*

(ii) *Se $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.*

Demonstração. Dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{\mid u \mid}{\lambda}\Big)dx < +\infty, \tag{1.2}$$

para algum $\lambda > 0$. Desde que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

tome $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq 1,\ t \geq R,$$

donde

$$\Phi(\mid t \mid) \geq \mid t \mid,\ \mid t \mid \geq R. \tag{1.3}$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1.2) e (1.3)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{\mid u \mid}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{\mid u \mid}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{\mid u \mid}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \mid u \mid dx < +\infty.$$

Sabendo disto, temos

$$\begin{aligned}\int_K \mid u \mid dx &= \int_{\{u\in K;|u|<\lambda R\}} \mid u \mid dx + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \mid u \mid dx \\ &\leq \lambda R \mid \{u \in K; \mid u \mid < \lambda R\} \mid + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \mid u \mid dx \\ &\leq \lambda R \mid K \mid + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \mid u \mid dx < +\infty,\end{aligned}$$

mostrando que $u \in L^1(K)$. Logo, $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(K)$.

Agora, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\mid u \mid)dx \leq \mid u \mid_\Phi,\ \text{para}\ \mid u \mid_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ tal que $| u |_\Phi \leq 1$. Segue da convexidade de Φ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(| u |)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(| u |_\Phi \frac{| u |}{| u |_\Phi}\Big)dx \\ &\leq | u |_\Phi \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{| u |}{| u |_\Phi}\Big)dx, \end{aligned}$$

donde segue-se pelo Lema 1.15 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(| u |)dx \leq | u |_\Phi, \ | u |_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N).$$

como queríamos mostrar.
Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (1.3)

$$\begin{aligned} \int_K | u | \, dx &= \int_{\{u \in K; |u| \leq R\}} | u | \, dx + \int_{\{u \in K; |u| > R\}} | u | \, dx \\ &\leq R \mid \{u \in K; | u | \leq R\} \mid + \int_{\{u \in K; |u| > R\}} \Phi(| u |)dx, \\ &\leq R \mid K \mid + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(| u |)dx, \end{aligned}$$

assim, para $| u |_\Phi \leq 1$, tem-se por (1.4) que

$$\begin{aligned} | j(u) |_{L1(K)} &= \int_K | u | \, dx \leq R \mid K \mid + | u |_\Phi \\ &\leq R \mid K \mid +1 = C, \end{aligned}$$

mostrando que o operador j é limitado.

□

Observação 1.20. *Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.19. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $| u |_\Phi \leq 1$, então*

$$\int_\Omega \Phi(| u |) \leq | u |_\Phi \, .$$

Lema 1.21. *Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $| u |_\Phi \leq k$. Então*

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big)dx \leq 1, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração. Basta observar que

$$1 = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{| u |_\Phi}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{| u |}{| u |_\Phi}\Big)dx \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{| u |}{k}\Big)dx,$$

para qualquer $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $| u |_\Phi \leq k$. □

Proposição 1.22. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$. Segue da Proposição 1.18, que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, $\{u_n\}$ converge forte em $L^1(\Omega)$ para uma função u. Sabendo disto, temos do Teorema A.2

$$u_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \tag{1.5}$$

a menos de subsequência. Desde que

$$\mid u_n - u_m \mid_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$\mid u_n - u_m \mid_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande, implicando do Lema 1.21

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big)dx \leq 1,$$

para n, m suficientemente grande. Para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \geq 0,\ m \in \mathbb{N}$$

e de (1.5)

$$\Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou (ver Teorema A.4, Apêndice A)

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big)dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, além disso

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega)$$

ou seja $u_n - u = w \in L_\Phi(\Omega)$, logo $u = u_n - w \in L_\Phi(\Omega)$. Mostrando assim que

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

e consequentemente que $L_\Phi(\Omega)$ é Banach. □

Proposição 1.23. *$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.19 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach, existe uma subsequência $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$u_n^1 \to u^1 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_1(0). \tag{1.6}$$

Ora, $\{u_n^1\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_2(0))$, daí existe uma subsequência $\{u_n^2\}$ de $\{u_n^1\}$ tal que

$$u_n^2 \to u^2 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_2(0). \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), temos

$$u^1 = u^2 \text{ q.t.p. em } \overline{B}_1(0).$$

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$. Desta forma, considerando

- $w_k(x) := u_k^k(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $u(x) := u^k(x)$, se $x \in \overline{B}_k(x)$,

temos

$$w_k \to u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e $\{w_k\}$ subsequência de $\{u_n\}$. A partir daí a demonstração segue da mesma forma que foi feita na Proposição 1.22. □

1.3 Condição Δ_2

Vimos na Observação 1.8 que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial. Apresentaremos, a seguir, alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial (condição Δ_2) e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor, para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definição 1.24. *A função Φ satisfaz a **condição** Δ_2, e escreve-se $\Phi \in \Delta_2$, se existirem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \; t \geq t_0. \tag{1.8}$$

Observação 1.25. *Para o caso* $\mid \Omega \mid = +\infty$*, dizemos que* $\Phi \in \Delta_2$ *se* Φ *verificar (1.8) para* $t_0 = 0$.

Lema 1.26. *A função* Φ *satisfaz a condição* Δ_2 *se, e só se para cada* $s > 1$*, existirem* $k_s > 0$ *e* $t_0 \geq 0$ *tais que*

$$\Phi(st) \leq k_s \Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Observação 1.27. *Para o caso onde* $\mid \Omega \mid = +\infty$ *o Lema 1.26 vale para* $t_0 = 0$.

Proposição 1.28. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto de medida finita e* $\Phi \in \Delta_2$*. Então,*

$$u_n \to u \ em \ L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(\mid u_n - u \mid) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \to 0,$$

donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande. Então, usando os Lemas 1.12 e 1.16 e o fato de Φ ser par, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{\mid u_n - u \mid_\Phi}\right) dx = 1 \quad & \Rightarrow \quad \frac{1}{\mid u_n - u \mid_\Phi} \int_\Omega \Phi(u_n - u) dx \leq 1 \\ & \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u_n - u) dx \leq \mid u_n - u \mid_\Phi \\ & \Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u_n - u) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, utilizando o Lema 1.26, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx &= \int_{[\mid v_n \mid \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + \int_{[\mid v_n \mid > t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx \\ &\leq \int_{[\mid v_n \mid \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + k_s \int_{[\mid v_n \mid > t_s]} \Phi(v_n) dx. \end{aligned}$$

Porém, como $\int_\Omega \Phi(v_n)dx \to 0$, então

$$k_s \int_{[|v_n|>t_s]} \Phi(v_n)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Afirmamos que $\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s})dx \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, consideremos

$$x_n = \int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_\Omega \Phi(v_n)dx \to 0$, então segue do Teorema A.2 que existe uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$v_{n_k}(x) \to 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_{n_k}|\leq t_s]}(x) \to 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{1.9}$$

onde $\chi_{[|v_{n_k}|\leq t_s]}(x)$ é a função característica do conjunto $\{x \in \Omega :| v_{n_k}(x) \leq t_s\}$. Observemos ainda que

$$\Phi(\frac{v_{n_k}(x)}{s})\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi(\frac{t_s}{s}) \in L^1(\Omega). \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10), segue pelo Teorema A.1 (ver Apêndice A) que

$$\int_\Omega \Phi(\frac{v_{n_k}(x)}{s})\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x)dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi(\frac{v_{n_k}}{s})dx \to 0.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \Phi(\frac{v_{n_k}}{s})dx \leq 1,$$

para n_k suficientemente grande. Portanto,

$$| v_{n_k} |_\Phi \leq s,\ \text{para } n_k \text{ suficientemente grande.}$$

Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{v_n\}$ admite subsequência convergindo para 0 em $L_\Phi(\Omega)$. Logo,

$$| v_n |_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$| u_n - u |_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Observação 1.29. *Para o caso* $\Omega = \mathbb{R}^N$*, tendo em vista que* $t_s = 0$*, a demonstração é feita de modo análogo.*

Proposição 1.30. $K_\Phi(\Omega)$ *é um espaço vetorial (isto é,* $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$*) se, e só se,* Φ *satisfaz a condição* Δ_2*.*

Demonstração. Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2. Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

(i) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;

(ii) $u + v \in K_\Phi(\Omega),\ u, v \in K_\Phi(\Omega)$;

(iii) $lu \in K_\Phi(\Omega),\ l \in \mathbb{R}$ e $u \in K_\Phi(\Omega)$.

A verificação de (i) é imediata. Provemos a validade de (ii) e (iii).
Verificação de (iii)**:** Dado $l \in \mathbb{R}$, fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mid l \mid \leq 2^n$. Logo

$$\begin{aligned} \Phi(lu(x)) &= \Phi(\mid l \mid u(x)) \\ &\leq \Phi(2^n u(x)) \\ &\leq k^n \Phi(u(x)), \text{ se } u(x) \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.11}$$

para algum $t_0 \geq 0$ (ver Definição 1.24).
Considere

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

Segue de (1.11) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(lu)dx &= \int_{\Omega \setminus \Lambda} \Phi(lu)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx \\ &\leq k^n \int_{\Omega \setminus \Lambda} \Phi(u)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(lu)dx \leq k^n \int_\Omega \Phi(u)dx + \Phi(lt_0) \mid \Lambda \mid < +\infty,$$

implicando que $lu \in K_\Phi(\Omega)$. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, desde que $t_0 = 0$, teríamos Λ vazio, e assim o resultado continuaria válido.
Verificação de (ii)**:** Dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$, segue do fato de Φ ser convexa

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{2}(u+v)\Big)dx \leq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \Phi(u)dx + \int_\Omega \Phi(v)dx\Big) < +\infty.$$

Segue de (iii)

$$u + v = 2\Big(\frac{1}{2}(u+v)\Big) \in K_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não satisfaz a condição Δ_2. Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ e satisfaz

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente. E considere $\{\Omega_n\}$ uma sequência de subconjuntos de Ω disjuntos, satisfazendo

$$\mid \Omega_n \mid = \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)}, \tag{1.13}$$

onde $c > 0$ é tomado suficientemente pequeno, de tal forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \Omega_n \mid < \mid \Omega \mid,$$

já que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)} < +\infty.$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária. Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}(x), \ x \in \Omega,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_\Omega \Phi(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n})dx \\
&= \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx \\
&= \int_\Omega \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx.
\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Monótona (ver Apêndice A) que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (1.13)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Por outro lado, por (1.12) e (1.13)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(2u)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n) \mid \Omega_n \mid > \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \\ &= c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} = +\infty,\end{aligned}$$

o que é uma contradição. $\square$

Observação 1.31. *Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$, existem $a, b > 0$, tais que*

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande. Ou seja, Φ vai para infinito abaixo de uma função polinômial.

Considere $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0 > 1.$$

Sendo assim,

$$\Phi(2^n t_0) \leq k^n \Phi(t_0).$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1}t_0]$. Logo,

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1}t_0) \\ &\leq k^{n+1}\Phi(t_0) \\ &= k\Phi(t_0)(2^{n\log_2 k}) \\ &\leq k\Phi(t_0)t^{\log_2 k},\end{aligned}$$

assim

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

onde $a = k\Phi(t_0)$ e $b = \log_2 k$.

Observação 1.32. *O fato de Φ ser uma N-função que vai para o infinito abaixo de uma função polinomial, não me garante que Φ satisfaz a condição Δ_2, ou seja, a recíproca do fato anterior não vale.*

Exemplo 1.33.

1. $\Phi(t) = \dfrac{\mid t \mid^p}{p}$, $p \in (1, +\infty)$.

A função Φ satisfaz a condição Δ_2, pois

$$\Phi(2t) = k\Phi(t),$$

onde $k = 2^p$.

2. $\Phi_1(t) = e^{t^2} - 1$ e $\Phi_2(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1$.

Não satisfazem a condição Δ_2, pois as funções Φ_1 e Φ_2 vão mais rápido para o infinito que qualquer função polinômial.

3. $\Phi(t) = (1+ \mid t \mid) \ln(1+ \mid t \mid) - \mid t \mid, \; t \in \mathbb{R}$.

Fixado $k > 0$, defina

$$\gamma_k(t) = k\Phi(t) - \Phi(2t), \; t \geq 0.$$

Logo,

$$\gamma_k(t) = k(1+t)\ln(1+t) - kt - (1+2t)\ln(1+2t) + 2t$$

e

$$\gamma_k'(t) = k\ln(1+t) - 2\ln(1+2t), \; t > 0. \tag{1.14}$$

Mostraremos agora que

$$k\ln(1+t) - 2\ln(1+2t) > 0, \; \text{para } t > 0 \text{ e } k > 8. \tag{1.15}$$

Para isto, basta mostrar que

$$(1+t)^k > (1+2t)^2, \; t > 0 \text{ e } k > 8.$$

Dado $k > 8$, defina

$$f_k(t) = (1+t)^k - (1+2t)^2, \; t \geq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= k(1+t)^{k-1} - 4 - 8t \\ &> k + kt - 4 - 8t \\ &= (k-8)t + (k-4) > 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

mostrando assim que f_k é crescente para $t > 0$. Desde que f_k é crescente para $t > 0$ e $k > 8$, e contínua à direita no ponto 0, temos

$$f_k(0) < f_k(t), \; t > 0 \text{ e } k > 8,$$

donde

$$(1+t)^k > (1+2t)^2, \ t > 0 \text{ e } k > 8.$$

como queríamos mostrar.

Segue de (1.14) e (1.15), que γ_k é uma função crescente para $t > 0$ e $k > 8$, o que implica

$$\gamma_k(0) \leq \gamma_k(t), \ t \geq 0 \text{ e } k > 8,$$

donde

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq 0 \text{ e } k > 8,$$

mostrando que $\Phi \in \Delta_2$.

Proposição 1.34. *Se Φ satisfaz Δ_2, então $\{u_n\}$ é limitada em $L_\Phi(\Omega)$ se, e somente se, $\{\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx\}$ é limitada.*

Demonstração. Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $\mid u_n \mid_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{\mid u_n \mid_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a Proposição 1.12 (a) e a condição Δ_2,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u_n)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\mid u_n \mid_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{\mid u_n \mid_\Phi}{K}}\Big)dx \\
&\leq \frac{\mid u_n \mid_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(K\frac{u_n}{\mid u_n \mid_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K\frac{\mid u_n \mid_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n}{\mid u_n \mid_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K,
\end{aligned}$$

onde $C_K > 0$ é uma constante dependente de K. Portanto, $\{\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx\}$ é limitada.

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$, ou seja, $\mid u_n \mid_\Phi \to \infty$, a menos de subsequência. Assim, para n suficientemente grande temos que $\mid u_n \mid_\Phi > 1$, o que implica

$$\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx > \mid u_n \mid_\Phi \int_\Omega \Phi(\frac{\mid u_n \mid}{\mid u_n \mid_\Phi})dx = \mid u_n \mid_\Phi,$$

para n suficientemente grande. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, segue que

$$\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx \to \infty.$$

$\square$

1.4 O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{|.|_\Phi}.$$

Será visto que o espaço $E_\Phi(\Omega)$ é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$. Além disso, este espaço será igual ao espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfizer a condição Δ_2.

Observação 1.35. *Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, considere*

$$E_\Phi(\mathbb{R}^N) = \overline{B_0(\mathbb{R}^N)}^{|.|_\Phi},$$

onde $B_0(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^N); supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^N\}$.

Afirmação 1.36.

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Então, existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$| u - v |_\Phi < \frac{1}{2},$$

donde pelo Lema 1.21,

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u-v}{\frac{1}{2}}\Big)dx \leq 1,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \Phi(2(u-v))dx \leq 1,$$

mostrando que $2(u-v) \in K_\Phi(\Omega)$. Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u-2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{2}(2u-2v) + \frac{1}{2}(2v)\Big)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2u-2v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2v)dx < +\infty,\end{aligned}$$

donde $u \in K_\Phi(\Omega)$. E portanto $E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega)$.

Vimos anteriormente na Observação 1.8 e no Lema 1.9 que $K_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido no espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$. Deste fato, podemos concluir que, em geral, $L^\infty(\Omega)$ com a norma $| \ . \ |_\Phi$ não é denso em $L_\Phi(\Omega)$. Veremos a seguir que $E_\Phi(\Omega)$ define um espaço vetorial, podendo concluir assim que $E_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Lema 1.37. *O conjunto*

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); d_\Phi(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$*, isto é,* $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $u \in D$ e $w \in E_\Phi(\Omega)$, tais que

$$| u - w |_\Phi < \frac{1}{2}.$$

Deste fato,

$$| u - w |_\Phi < \frac{1}{2} - \delta, \tag{1.16}$$

para algum $\delta > 0$. Seja $v \in L^\infty(\Omega)$, tal que

$$| w - v |_\Phi < \delta. \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17)

$$| u - v |_\Phi \leq | u - w |_\Phi + | w - v |_\Phi < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(2(u - v))dx \leq 1,$$

implicando

$$u = \frac{1}{2}(2(u - v)) + \frac{1}{2}(2v) \in K_\Phi(\Omega),$$

como queriamos mostrar. □

Lema 1.38. *Seja* $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); d_\Phi(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$*. Então* $K_\Phi(\Omega) \subset A$*.*

Demonstração. De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \ | u(x) | \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$. Considerando

$$\Omega_\infty = \{y \in \Omega; u(y) = \pm\infty\},$$

temos

$$| \Omega_\infty | = 0, \tag{1.18}$$

pois $\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty$. De (1.18), podemos concluir que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema A.1 no Apêndice A)

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx = \int_\Omega \Phi(u)\chi_{[|u|>n]}(x)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue para n suficientemente grande

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx \leq 1,$$

implicando

$$| u - u_n |_\Phi \leq 1,$$

para n suficientemente grande, logo

$$\mathrm{d}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1,$$

como queríamos mostrar. □

Observação 1.39. *Dos Lemas 1.37 e 1.38, temos geometricamente o seguinte:*

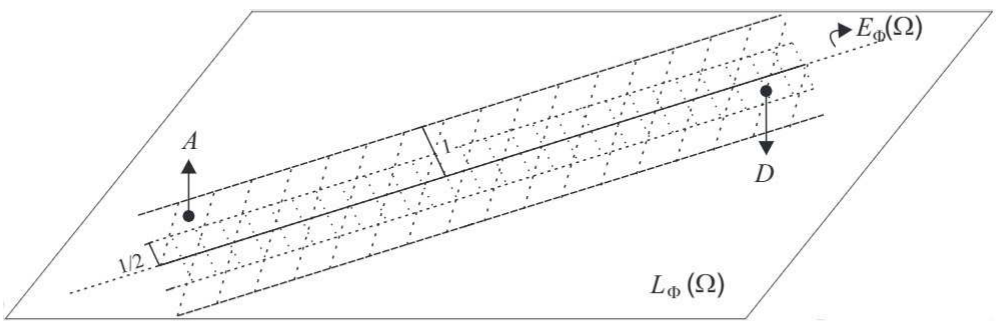

Figura 1.1: Espaço $L_\Phi(\Omega)$.

Ou seja,

$$D \subset K_\Phi(\Omega) \subset A.$$

Proposição 1.40. *$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$ tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que

$$\langle u \rangle \subset\ E_\Phi(\Omega),$$

ou seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Suponha por contradição que $u \notin E_\Phi(\Omega)$, logo

$$d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) > 0. \tag{1.19}$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \mid \lambda u - w \mid_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \mid u - \frac{w}{\lambda} \mid_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} \mid u - \widehat{w} \mid_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (1.19), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) > 1,$$

implicando do Lema 1.38 que $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$ para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$, contradizendo o fato de

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, $u \in E_\Phi(\Omega)$. □

Observação 1.41. *Do que foi visto anteriormente, podemos concluir que $L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$ e $E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial que está contido em $K_\Phi(\Omega)$.*

Corolário 1.42. *$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.*

Demonstração. Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então desde que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto (ver Proposição 1.30) Φ satisfaz a condição Δ_2.
Reciprocamente, se Φ satisfaz a condição Δ_2, então da Proposição 1.30

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se, pelo fato de $E_\Phi(\Omega)$ ser o maior subespaço vetorial que está contido em $K_\Phi(\Omega)$, que

$$E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega).$$

□

Proposição 1.43. *O espaço $E_\Phi(\Omega)$ é separável. Além disso, o espaço $C_0(\Omega)$ das funções contínuas com suporte compacto em Ω é denso em $E_\Phi(\Omega)$, isto é,*

$$\overline{C_0(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi} = E_\Phi(\Omega).$$

Demonstração. Dada $u \in L^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$, existe pelo Teorema A.9 (ver Apêndice A) uma sequência de funções simples $\{\varphi_n\}$ tal que

$$\varphi_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \tag{1.20}$$

e

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq u(x) \leq | u |_\infty \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{1.21}$$

Tal fato implica pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega \Phi(\varphi_n - u)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Fixando $\epsilon > 0$, segue que existe uma função simples φ tal que

$$| \varphi - u |_\Phi < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mostraremos agora que dado uma função simples φ ($\varphi \geq 0$), existe $g \in C_0(\Omega)$ tal que

$$| g - \varphi |_\Phi < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.22}$$

Mostrado isto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} | g - u |_\Phi &\leq | g - \varphi |_\Phi + | \varphi - u |_\Phi \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

mostrando a densidade para as funções positivas de $L^\infty(\Omega)$.
Verificação de (1.22): Seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ uma função simples dada por:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(x),$$

onde χ_{A_j} é a função característica com respeito ao conjunto A_j, $\alpha_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$ e

$$A_j \cap A_k = \emptyset, \; j \neq k.$$

Segue da 1^a versão do Teorema de Lusin (ver Teorema A.11 em Apêndice A), que dado $k \in \mathbb{N}$, existe $g_j^k \in C_0(\Omega)$ tal que

1. $\mu(\{x \in \Omega; g_j^k(x) \neq \chi_{A_j}(x)\}) < \dfrac{1}{kn}, \; j \in \mathbb{N}$; e

2. $g_j^k(x) \in [0, 1]$ $x \in \Omega$ e $j \in \mathbb{N}$.

Defina

$$g_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j^k, \; k \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$\mid g_k(x) \mid \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = c_n, \; x \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

De (1.23) temos

$$\begin{aligned}
\mid g_k - \varphi \mid_2^2 &= \int_\Omega \mid g_k - \varphi \mid^2 dx \\
&= \int_\Omega \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (g_j^k - \chi_{A_j}) \mid^2 dx \\
&\leq c_n^2 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \mid g_j^k - \chi_{A_j} \mid^2 dx \\
&\leq 4c_n^2 \sum_{j=1}^{n} \mu([g_j^n \neq \chi_{A_j}]) \\
&= 4c_n^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{kn} \\
&= \frac{4c_n^2}{k} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Sabendo disto, podemos concluir do Teorema A.2 (ver Apêndice A) que

$$g_k(x) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \ q.t.p. \ x \in \Omega, \tag{1.24}$$

a menos de subsequência, além disso segue de (1.23)

$$| g_k(x) | \leq C_n, \ x \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

De (1.24) e (1.25), podemos concluir que

$$| g_k - \varphi |_\Phi \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando (1.22), e consequentemente a densidade para as funções positivas de $L^\infty(\Omega)$.
Considerando agora u uma função qualquer de $L^\infty(\Omega)$, segue pelo o que foi feito anteriormente que dado $\epsilon > 0$, existem $g_1, g_2 \in C_0(\Omega)$ tais que

$$| g_1 - u_+ |_\Phi < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.26}$$

e

$$| g_2 - u_- |_\Phi < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Definindo

$$\widehat{g} = g_1 - g_2,$$

temos

$$| \widehat{g} - u |_\Phi \leq | g_1 - u_+ |_\Phi + | g_2 - u_- |_\Phi,$$

com $\widehat{g} \in C_0(\Omega)$. Mostrando finalmente que

$$\overline{C_0(\Omega)}^{|.|_\Phi} = L^\infty(\Omega).$$

Sabendo disto, para mostrarmos que $E_\Phi(\Omega)$ é separável, basta mostrarmos que para cada $\widehat{g} \in C_0(\Omega)$ existe uma sequência de polinômios $\{p_k\}$ com coeficientes racionais, tais que

$$p_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{g} \text{ em } E_\Phi(\Omega). \tag{1.28}$$

Mostrado isto, dado $z \in E_\Phi(\Omega)$ e $\delta > 0$, existem $u \in L^\infty(\Omega)$, $v \in C_0(\Omega)$ e um polinômio, p, com coeficientes racionais tais que

$$| z - p |_\Phi \leq | z - u |_\Phi + | u - v |_\Phi + | v - p |_\Phi \leq \delta. \tag{1.29}$$

Considere $P(\Omega)$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais. Note que $P(\Omega)$ é um conjunto enumerável. De (1.28) e (1.29), $P(\Omega)$ é denso

em $E_\Phi(\Omega)$ implicando assim que $E_\Phi(\Omega)$ é separável.
Para mostrar (1.28), basta observar que dado $\widehat{g} \in C_0(\Omega)$, existe, pelo Teorema da aproximação de Weierstrass (ver Teorema A.15 em Apêndice A), uma sequência de polinômios $\{p_k\} \subset P(\Omega)$ tal que

$$p_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{g} \text{ uniformemente em } supp(\widehat{g}) \subset \Omega,$$

e assim concluir que desta convergência uniforme temos

$$| \, p_k - \widehat{g} \, |_\Phi \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste fato, mostraremos agora que dado uma sequência $\{v_n\}$ tal que

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ uniformemente em } K,$$

onde $K \subset \Omega$ é compacto e $supp(v_n), supp(v) \subset K$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então

$$| \, v_n - v \, |_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Desde que

$$v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \text{ uniformemente em } K,$$

temos para cada $\epsilon > 0$, um $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$| \, v_n(x) - v(x) \, | < \epsilon \;\; x \in K \text{ e } n \geq n_0(\epsilon).$$

Logo, dado $\delta > 0$ temos para $\epsilon = \delta \Phi^{-1}(1/ \mid K \mid) > 0$

1. $\Phi\Big(\dfrac{v_n - v}{\delta}\Big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em K;

2. $\Phi\Big(\dfrac{v_n(x) - v(x)}{\delta}\Big) \leq \Phi\Big(\dfrac{\epsilon}{\delta}\Big) \;\; x \in K$ e $n \geq n_0(\epsilon)$.

Assim, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que existe $N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v_n - v}{\delta}\Big) dx = \int_K \Phi\Big(\frac{v_n - v}{\delta}\Big) dx \leq 1, \;\; n \geq N(\delta),$$

donde

$$| \, v_n - v \, |_\Phi \leq \delta, \;\; n \geq N(\delta),$$

como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 1.44. *$L_\Phi(\Omega)$ é separável se, e só se Φ satisfaz a condição Δ_2.*

Demonstração. Se Φ satisfaz a condição Δ_2, então

$$L_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se da Proposição 1.43 que $L_\Phi(\Omega)$ é separável.
Assuma agora que $L_\Phi(\Omega)$ é separável e $\{u_1, ..., u_n, ...\}$ um subconjunto denso em $L_\Phi(\Omega)$. Dado $\epsilon > 0$, segue da 2^a Versão do Teorema de Lusin (ver Teorema A.13 em Apêndice A) existe um subconjunto $G_1 \subset \Omega$ compacto tal que

1. $u_1|_{G_1}$ é contínua;

2. $\mu(\Omega \setminus G_1) < \frac{\epsilon}{2}$.

Segue novamente da 2^a Versão do Teorema de Lusin, que existe $G_2' \subset \Omega$ compacto tal que

1. $u_2|_{G_2'}$ é contínua;

2. $\mu(\Omega \setminus G_2') < \dfrac{\epsilon}{2^2}$.

Considerando

$$G_2 = G_2' \cap G_1 \subset G_1,$$

temos

$$\begin{aligned} \mu(\Omega \setminus G_2) &= \mu(\Omega \setminus (G_2' \cap G_1)) \\ &= \mu((\Omega \setminus G_2') \cup (\Omega \setminus G_1)) \\ &\leq \mu((\Omega \setminus G_2')) + \mu((\Omega \setminus G_1)) \\ &< \epsilon \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

De forma análoga, ao que foi feito anteriormente, existe

$$G_n \subset G_{n-1} \subset ... \subset G_1$$

tal que

1. $u_n|_{G_n}$ é contínua;

2. $\mu(\Omega \setminus G_n) < \epsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$,

onde $G_n = G'_n \bigcap G_{n-1}$. Considere $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ e note que

$$\Omega \setminus G_n \subset \Omega \setminus G_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ na desigualdade abaixo

$$\mu(\Omega \setminus G_n) < \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},$$

obtemos pelo Lema A.14 (ver Apêndice A) que

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus G_n)\Big) < \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

donde

$$\mu(\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) < \epsilon,$$

ou seja

$$\mu(\Omega \setminus G) < \epsilon.$$

Além disso, $u_n|_G$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ com $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ compacto. Logo, podemos concluir que dado $\epsilon > 0$, existe um compacto $G \subset \Omega$ tal que

1. $\{u_n|_G\}$ é contínua, $n \in \mathbb{N}$;
2. $\mu(\Omega \setminus G) < \epsilon$.

Sendo assim

$$u_n \in E_\Phi(G),\ n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, se Φ não satisfaz a condição Δ_2, existe $v \in L_\Phi(G)$ (ver Lema Proposição 1.42) tal que

$$\mid v - u_n \mid_{\Phi,G} \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Defina

$$\widehat{v}(x) = \begin{cases} v(x),\ x \in G \\ 0,\ x \in \Omega \setminus G. \end{cases}$$

Observe que $\widehat{v} \in L_\Phi(\Omega)$ e

$$\mid \widehat{v} - u_n \mid_\Phi \geq 1,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.31}$$

contradizendo o fato de $\{u_1, ..., u_n\}$ ser denso em $L_\Phi(\Omega)$.
Verificação de (1.31): Primeiramente, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\widehat{v} - u_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\} \subset \Big\{\lambda > 0; \int_G \Phi\Big(\frac{v - u_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\}.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\inf\Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\widehat{v} - u_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\} \geq \inf\Big\{\lambda > 0; \int_G \Phi\Big(\frac{v - u_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\},$$

donde

$$| v - u_n |_{\Phi,G} \leq | \widehat{v} - u_n |_\Phi, \; n \in \mathbb{N},$$

implicando de (1.30)

$$| \widehat{v} - u_n |_\Phi \geq 1, \; n \in \mathbb{N},$$

como queríamos mostrar. □

1.5 Dualidade

Nesta seção, veremos que o dual de um espaço de Orlicz pode ser associado a um outro espaço de Orlicz. No que segue, considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semicontínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio e convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 1.45. *Definimos como* ***função conjugada*** *de f a função $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{f}(t) = \sup\{st - f(s); s \in \mathbb{R}\}.$$

Lema 1.46. *Considere*

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

e para cada $(t, a) \in \Lambda$ defina

$$A_{t,a} = \{(s, b) \in \mathbb{R}^2; b \geq st - a\}.$$

Então

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Demonstração. De fato, dado $(\widetilde{s}, b) \in epi(f)$ temos

$$f(\widetilde{s}) \leq b. \tag{1.32}$$

Para cada, $(t, a) \in \Lambda$

$$\begin{aligned} a &\geq \widetilde{f}(t) \\ &\geq st - f(s),\ s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde

$$f(s) \geq st - a,\ s \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

De (1.32) e (1.33)

$$\widetilde{s}t - a \leq b,\ (t, a) \in \Lambda$$

donde segue-se que $(\widetilde{s}, b) \in A_{t,a}$, para todo $(t, a) \in \Lambda$, e portanto

$$(\widetilde{s}, b) \in \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Mostrando que

$$epi(f) \subset \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}. \tag{1.34}$$

Se $(\widetilde{s}, b) \in \bigcap\limits_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}$, temos

$$b \geq \widetilde{s}t - a,\ (t, a) \in \Lambda. \tag{1.35}$$

Desde que f é convexa, f possui derivadas laterais em qualquer ponto de $\mathbb{R}$. Mostraremos agora que

$$\widetilde{f}(f'_+(\widetilde{s})) = \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s}),\ \widetilde{s} \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$\widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s}) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{f'_+(\widetilde{s})s - f(s)\},\ \widetilde{s} \in \mathbb{R}.$$

Para isto considere a seguir os seguintes casos:

1^o **caso:** $\widetilde{s} \geq 0$.

Se $s > \widetilde{s}$, segue pelo fato de f ser convexa em $\mathbb{R}$, que para cada $\lambda \in (\widetilde{s}, s)$

$$\frac{f(\lambda) - f(\widetilde{s})}{\lambda - \widetilde{s}} \leq \frac{f(s) - f(\widetilde{s})}{s - \widetilde{s}},$$

passando ao limite de $\lambda \to \widetilde{s}^{+}$,

$$f'_+(\widetilde{s}) \leq \frac{f(s)-f(\widetilde{s})}{s-\widetilde{s}},\ s > \widetilde{s}.$$

Logo,

$$(s-\widetilde{s})f'_+(\widetilde{s}) \leq f(s)-f(\widetilde{s}),\ s > \widetilde{s},$$

donde

$$sf'_+(\widetilde{s}) - f(s) \leq \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s}),\ s > \widetilde{s}. \tag{1.36}$$

Se $s < \widetilde{s}$, temos para cada $\lambda > \widetilde{s}$

$$\frac{f(s)-f(\widetilde{s})}{s-\widetilde{s}} \leq \frac{f(\lambda)-f(\widetilde{s})}{\lambda-\widetilde{s}},$$

passando ao limite de $\lambda \to \widetilde{s}^{+}$, temos

$$\frac{f(s)-f(\widetilde{s})}{s-\widetilde{s}} \leq f'_+(\widetilde{s}),\ s < \widetilde{s}.$$

Sabendo disto, temos

$$f(s)-f(\widetilde{s}) \geq f'_+(\widetilde{s})(s-\widetilde{s}),\ s < \widetilde{s},$$

donde

$$\widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s}) \geq sf'_+(\widetilde{s}) - f(s),\ s < \widetilde{s}. \tag{1.37}$$

De (1.36) e (1.37), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(f'_+(\widetilde{s})) &= \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sf'_+(\widetilde{s}) - f(s)\}\\ &= \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s}),\ \widetilde{s} > 0.\end{aligned}$$

2^o **caso:** $\widetilde{s} < 0$.

Prova-se de forma análoga ao feito no 1^o caso.

Assim

$$(f'_+(\widetilde{s}), \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - f(\widetilde{s})) \in \Lambda,$$

donde segue-se de (1.35)

$$b \geq \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) - \widetilde{s}f'_+(\widetilde{s}) + f(\widetilde{s}) = f(\widetilde{s}),$$

mostrando que $(\widetilde{s}, b) \in epi(f)$, e finalmente que

$$\bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a} = epi(f),$$

como queriamos demonstrar. $\square$

Lema 1.47. *Dado $t \in \mathbb{R}$, considerando*

$$A_t = \{(s,b); b \geq st - \widetilde{f}(t)\},$$

temos

$$epi(f) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a}.$$

Demonstração. De fato, basta provar que $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a}$. Para isto, considere $(s,b) \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t$, então para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $(s,b) \in A_t$, ou seja,

$$b \geq st - \widetilde{f}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, qualquer que seja $(t,a) \in epi(\widetilde{f})$, temos

$$a \geq \widetilde{f}(t) \quad (\Rightarrow -\widetilde{f}(t) \geq -a).$$

Daí,

$$b \geq st - \widetilde{f}(t) \geq st - a, \text{ para todo } (t,a) \in epi(\widetilde{f}).$$

Portanto, $(s,b) \in A_{t,a}$ para todo $(t,a) \in epi(\widetilde{f})$, o que implica

$$(s,b) \in \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a},$$

donde

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t \subset \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a}.$$

Agora, considere $(s,b) \in \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a}$, então para todo $(t,a) \in epi(\widetilde{f})$, temos $(s,b) \in A_{t,a}$, em particular para $(t, \widetilde{f}(t)) \in epi(\widetilde{f})$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Daí,

$$(s,b) \in A_{t,\widetilde{f}(t)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde,

$$b \geq st - \widetilde{f}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e assim,

$$(s,b) \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t.$$

Logo,

$$\bigcap_{(t,a)\in(\widetilde{f})} A_{t,a} \subset \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t.$$

$\square$

Lema 1.48. *A função conjugada de $\widetilde{f}$ (isto é $\widetilde{\widetilde{f}}$) é a função f, ou seja $f \equiv \widetilde{\widetilde{f}}$.*

Lema 1.49. *Se f é uma N-função, então $\widetilde{f}$ também será uma N-função.*

Demonstração. Para provar este lema, devemos provar que:

1. $\widetilde{f}$ é convexa em $\mathbb{R}$;

2. $\widetilde{f}(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$;

3. $\dfrac{\widetilde{f}(t)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ e $\dfrac{\widetilde{f}(t)}{t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

4. $\widetilde{f}$ é par em $\mathbb{R}$.

Verificação de (1)**:** Dado $\alpha \in [0,1]$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) &= \sup_{s\in\mathbb{R}}\{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)s - f(s)\} \\
&= \sup_{s\in\mathbb{R}}\{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)s - \alpha f(s) - (1-\alpha)f(s)\} \\
&\leq \alpha \sup_{s\in\mathbb{R}}\{t_1 s - f(s)\} + (1-\alpha)\sup_{s\in\mathbb{R}}\{t_2 s - f(s)\} \\
&= \alpha\widetilde{f}(t_1) + (1-\alpha)\widetilde{f}(t_2).
\end{aligned}$$

Verificação de (2)**:** Suponha que

$$\widetilde{f}(t) = 0,$$

para algum $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned}
st - f(s) &\leq \sup_{s\in\mathbb{R}}\{st - f(s)\} \\
&= \widetilde{f}(t) = 0, \ s \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{1.38}$$

em particular

$$t \leq \frac{f(s)}{s}, \ s > 0,$$

passando ao limite de $s \to 0^+$, obtemos $t \leq 0$ (pois f define uma N-função). De (1.38), temos ainda que

$$-st \geq -f(s), \ \ s < 0$$

donde

$$t \geq \frac{f(s)}{s}, \ \ s < 0,$$

passando ao limite de $s \to 0^-$, temos $t \geq 0$. Logo, $t = 0$.

Reciprocamente, se $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \sup_{s \in \mathbb{R}}\{st - f(s)\} \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}}\{-f(s)\} = 0, \end{aligned}$$

já que $f \geq 0$.

Verificação de (4)**:** Dado $t \in \mathbb{R}$, temos pelo fato de f ser par, que

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(-t) &= \sup_{s \in \mathbb{R}}\{s(-t) - f(s)\} \\ &= \sup_{r \in \mathbb{R}}\{rt - f(r)\} \\ &= \widetilde{f}(t), \end{aligned}$$

mostrando que $\widetilde{f}$ é uma função par.

Verificação de (3)**:** Primeiramente, mostraremos que

$$\frac{\widetilde{f}(t)}{t} \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Seja $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência qualquer verificando

$$t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Desde que f é bijetora em $\mathbb{R}_+$ (ver Lema 1.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{f}(t_n)}{t_n} &= \sup_{s \in \mathbb{R}}\left\{s - \frac{f(s)}{t_n}\right\} \\ &\geq f^{-1}(t_n) - \frac{f(f^{-1}(t_n))}{t_n} \\ &= f^{-1}(t_n) - 1 \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

mostrando assim que

$$\frac{\widetilde{f}(t_n)}{t_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Mostraremos agora que

$$\frac{\widetilde{f}(t)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Seja $t_n \subset \mathbb{R}_+^*$ uma sequência qualquer, com $t_n \to 0$. Dado $\epsilon > 0$, observemos os seguintes casos:

caso I: Dado $s \in [0, \epsilon)$ temos

$$s - \frac{f(s)}{t_n} < \epsilon - \frac{f(s)}{t_n} \leq \epsilon.$$

caso II: Dado $k > 1$, existe $r > 0$ tal que

$$f(s) > ks, \;\; s \in [r, +\infty).$$

Logo, para $s \in [r, +\infty)$

$$s - \frac{f(s)}{t_n} < s - \frac{ks}{t_n} = (1 - \frac{k}{t_n})s < 0,$$

para n suficientemente grande.

caso III: Seja

$$0 < c = \min_{s\in[\epsilon,r)} f(s),$$

logo

$$f(s) \geq c, \;\; s \in [\epsilon, r],$$

donde segue-se, para $s \in [\epsilon, r]$, que

$$s - \frac{f(s)}{t_n} \leq r - \frac{c}{t_n} < 0,$$

para n suficientemente grande.

caso IV: Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s < 0$ tem-se que

$$s - \frac{f(s)}{t_n} \leq 0.$$

Concluímos dos casos (I)-(IV), que para cada $\epsilon > 0$

$$s - \frac{f(s)}{t_n} < \epsilon, \ s \in \mathbb{R},$$

para n suficientemente grande. Logo,

$$\frac{\widetilde{f}(t_n)}{t_n} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ s - \frac{f(s)}{t_n} \right\} \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, mostrando que

$$\frac{\widetilde{f}(t_n)}{t_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste fato

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\widetilde{f}(t)}{t} = 0. \tag{1.39}$$

Segue do fato de $\widetilde{f}$ ser par que

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\widetilde{f}(t)}{t} = - \lim_{t \to 0^-} \frac{\widetilde{f}(-t)}{-t} = 0. \tag{1.40}$$

De (1.39) e (1.40), obtemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\widetilde{f}(t)}{t} = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 1.50. *Considere Φ uma N-função dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s) ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 1.3. Definindo

$$\widetilde{\phi}(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; \phi(t) \leq s\}$$

e

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \widetilde{\phi}(s) ds$$

segue que $\widetilde{\Phi}$ é uma N-função.

Veremos mais adiante que as funções definidas no Lema 1.50, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\Phi}$ são funções conjugadas de ϕ e Φ, respectivamente.

Com o intuito de provar o Lema 1.50, provaremos a proposição a seguir.

Proposição 1.51. *As propriedades, a seguir, são verificadas:*

(i) $\widetilde{\phi}(\phi(t)) \geq t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $\phi(\widetilde{\phi}(s)) \geq s$, $s \in \mathbb{R}_+$.

(iii) $\widetilde{\phi}(\phi(t) - \epsilon) \leq t$, $t \geq 0$ *e* $\epsilon > 0$,

(iv) $\phi(\widetilde{\phi}(s) - \epsilon) \leq s$, $s \in \mathbb{R}_+$ *e* $\epsilon > 0$.

Demonstração. **Verificação de** (i)**:** Desde que

$$t \in \{s; \phi(s) \leq \phi(t)\}, \text{ para } t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\phi}(\phi(t)) = \sup\{s; \phi(s) \leq \phi(t)\} \geq t.$$

Verificação de (ii)**:** Dado $s \in \mathbb{R}_+$, considere

$$t_n = \widetilde{\phi}(s) + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Desde que

$$\widetilde{\phi}(s) < \widetilde{\phi}(s) + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

temos

$$\widetilde{\phi}(s) + \frac{1}{n} \notin \{t; \phi(t) \leq s\}, \ n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\phi(t_n) > s, \ n \in \mathbb{N},$$

além disso

$$t_n \stackrel{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\phi}(s) = \sup\{t; \phi(t) \leq s\}.$$

Desde que ϕ é contínua à direita, temos

$$\phi(\widetilde{\phi}(s)) = \lim_{n \to +\infty} \phi(t_n) \geq s.$$

Verificação de (iii)**:** Fixe $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Dado

$$s \in \{r; \phi(r) < \phi(t) - \epsilon\},$$

temos
$$\phi(s) < \phi(t) - \epsilon < \phi(t),$$
implicando que $s < t$, já que ϕ é não decrescente. Deste fato, t é uma cota superior do conjunto
$$\{r; \phi(r) \leq \phi(t) - \epsilon\}.$$
Neste caso
$$\widetilde{\phi}(\phi(t) - \epsilon) \leq t.$$
Verificação de (iv)**:** Fixe $\epsilon > 0$ e $s \in \mathbb{R}_+$. Desde que
$$\widetilde{\phi}(s) = \sup\{t; \phi(t) \leq s\},$$
dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \{t; \phi(t) \leq s\}$ tal que
$$\widetilde{\phi}(s) - \epsilon < t_0,$$
donde segue do fato de ϕ ser não decrecente
$$\phi(\widetilde{\phi}(s) - \epsilon) \leq \phi(t_0) \leq s,$$
como queríamos demonstrar. □

Observação 1.52. *Segue da Proposição 1.51 que se ϕ e $\widetilde{\phi}$ forem funções contínuas em $\mathbb{R}_+$, então ϕ é a inversa de $\widetilde{\phi}$ em $\mathbb{R}_+$.*

Demonstração do Lema 1.50: Para provar o Lema 1.50, basta verificar que $\widetilde{\phi}$ satisfaz as propriedades do Lema 1.3, isto é, $\widetilde{\phi}$ verifica os seguintes fatos:

(I) $\widetilde{\phi}$ é contínua à direita e não decrescente em $\mathbb{R}_+$;

(II) $\widetilde{\phi}(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$;

(III) $\widetilde{\phi}(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

(IV) $\widetilde{\phi}(t) > 0$, *para* $t > 0$.

Verificação de (II): Seja $s \in \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{\phi}(s) = 0$. Por definição
$$\sup\{r; \phi(r) \leq s\} = 0,$$
donde segue que existe $\{r_n\}$ tal que

a. $r_n \leq 0$;

b. $r_n \to 0$;

c. $\phi(r_n) \leq s$.

De (c), temos pelo fato de ϕ ser uma função impar que

$$-\phi(-r_n) \leq s,$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos (pois ϕ é contínua à direita)

$$s \geq -\phi(0) = 0. \tag{1.41}$$

Por outro lado, desde que

$$\sup\{r; \phi(r) \leq s\} = 0,$$

temos

$$0 + \epsilon \notin \{r; \phi(r) \leq s\},\ \epsilon > 0,$$

ou seja

$$\phi(0 + \epsilon) > s,\ \epsilon > 0,$$

passando ao limite de $\epsilon \to 0^+$, temos $s \leq 0$. Segue de (1.41), que $s = 0$.
Verificação de (IV): Primeiramente, mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1.53. *Dado $t > 0$, existe $r_t > 0$ tal que*

$$\phi(r_t) \leq t.$$

Com efeito, suponha que para algum $t > 0$

$$\phi(r) > t,\ r > 0.$$

Dada uma sequência $\{r_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$r_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

temos pela continuidade à direita de ϕ

$$0 = \phi(0) = \lim_{n \to +\infty} \phi(r_n) \geq t,$$

ou seja $t \leq 0$, o que é uma contradição.
Da Afirmação 1.53, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(t) &= \sup\{r; \phi(r) \leq t\} \\ &\geq r_t > 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

Verificação de (I): Mostraremos primeiramente que $\widetilde{\phi}$ é não decrescente. Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $s_1 \leq s_2$. Observe que

$$\{t; \phi(t) \leq s_1\} \subset \{t; \phi(t) \leq s_2\},$$

assim

$$\sup\{t; \phi(t) \leq s_1\} \leq \sup\{t; \phi(t) \leq s_2\},$$

isto é

$$\widetilde{\phi}(s_1) \leq \widetilde{\phi}(s_2).$$

Mostraremos agora que $\widetilde{\phi}$ é contínua à direita em $\mathbb{R}_+$. Sejam $\{s_n\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência e $s \in \mathbb{R}_+$ tais que $s_n > s$ e

$$s_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} s.$$

Afirmamos que

$$\widetilde{\phi}(s_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\phi}(s).$$

Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\phi}(s_n)$ não convirja para $\widetilde{\phi}(s)$. Neste caso, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\mid \widetilde{\phi}(s_n) - \widetilde{\phi}(s) \mid > 2\epsilon, \tag{1.42}$$

a menos de subsequência. Desde que $\widetilde{\phi}$ é não decrescente e $s_n > s$, temos

$$\widetilde{\phi}(s_n) - \widetilde{\phi}(s) \geq 0, \ n \in \mathbb{N},$$

donde segue-se de (1.42)

$$\widetilde{\phi}(s_n) - \epsilon > \widetilde{\phi}(s) + \epsilon.$$

Segue do fato de ϕ ser não decrescente que

$$\phi(\widetilde{\phi}(s_n) - \epsilon) \geq \phi(\widetilde{\phi}(s) + \epsilon),$$

implicando da Proposição 1.51 (iv) que

$$s_n \geq \phi(\widetilde{\phi}(s) + \epsilon).$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, obtemos

$$s \geq \phi(\widetilde{\phi}(s) + \epsilon).$$

Considerando $A = \{t; \phi(t) \leq s\}$, temos $\widetilde{\phi}(s) + \epsilon \in A$, além disso para todo $t \in A$

$$t \leq \sup A = \widetilde{\phi}(s) \leq \widetilde{\phi}(s) + \epsilon.$$

Logo
$$\widetilde{\phi}(s) + \epsilon = \sup\{t; \phi(t) \leq s\} = \widetilde{\phi}(s),$$
o que é um absurdo. Mostrando assim que $\widetilde{\phi}$ é contínua à direita.

Verificação de (III): Seja $\{s_n\} \subset \mathbb{R}_+$, tal que

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Mostraremos agora que
$$\widetilde{\phi}(s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Desde que
$$\phi(s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
e
$$\widetilde{\phi}(\phi(s_n)) \geq s_n, \ n \in \mathbb{N}, \ \text{(ver Proposição 1.51 (i))}$$
temos
$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\phi}(\lambda_n) = +\infty, \tag{1.43}$$
onde $\lambda_n = \phi(s_n)$ e $\lambda_n \to +\infty$. Ora, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$s_n \geq \lambda_k, \ n \geq n_k,$$

donde
$$\widetilde{\phi}(s_n) \geq \widetilde{\phi}(\lambda_k), \ n \geq n_k,$$
pois $\widetilde{\phi}$ é não crescente. Segue de (1.43) que

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\phi}(s_n) = +\infty,$$

onde
$$\lambda_n = \phi(s_n), \ n \in \mathbb{N},$$
provando assim o Lema 1.50.

Observação 1.54. *A função ϕ pode ser definida da seguinte forma:*

$$\phi(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}_+; \widetilde{\phi}(s) \leq t\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, dado $r \in \{s; \widetilde{\phi}(s) \leq t\}$ temos

$$\widetilde{\phi}(r) \leq t.$$

Desde que ϕ é não decrescente, segue

$$\phi(\widetilde{\phi}(r)) \leq \phi(t),$$

implicando da Proposição 1.51 (ii) que

$$r \leq \phi(t),$$

mostrando que $\phi(t)$ é uma cota superior para o conjunto

$$\{s; \widetilde{\phi}(s) \leq t\}.$$

Utilizando a Proposição 1.51 (iii),

$$\widetilde{\phi}(\phi(t) - \epsilon) \leq t, \ \epsilon > 0 \ e \ t \in \mathbb{R}_+,$$

logo

$$\phi(t) - \epsilon \in \{r; \widetilde{\phi}(r) \leq t\}, \ t \in \mathbb{R}_+ \ e \ \epsilon > 0,$$

mostrando assim que $\phi(t)$ é a menor das cotas superiores, isto é

$$\phi(t) = \sup\{r; \widetilde{\phi}(r) \leq t\}.$$

Observação 1.55. *Observando as definições de Φ e $\widetilde{\Phi}$, temos geometricamente*

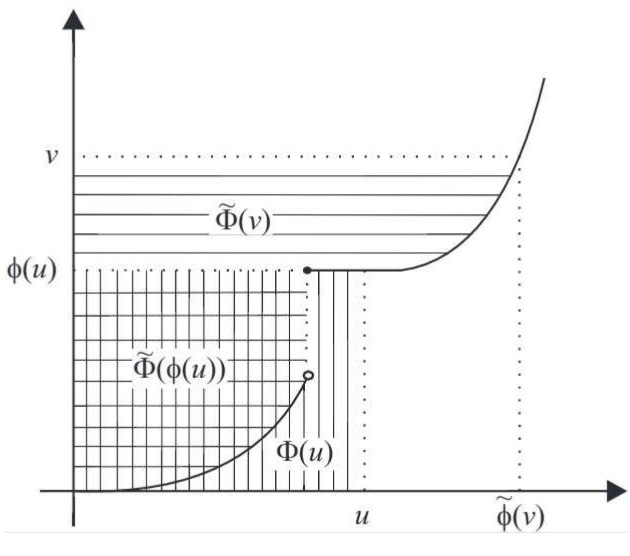

Figura 1.2: Funções Φ e $\widetilde{\Phi}$.

Da Figura 1.2, conclui-se que

$$u\phi(u) = \Phi(u) + \widetilde{\Phi}(\phi(u)), \ u \in \mathbb{R}_+ \tag{1.44}$$

e

$$v\widetilde{\phi}(v) = \Phi(\widetilde{\phi}(v)) + \widetilde{\Phi}(v), \ v \in \mathbb{R}_+. \tag{1.45}$$

Teorema 1.56. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ. Então*

$$ts \leq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s), \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Sendo Φ e $\widetilde{\Phi}$ par, podemos supor que $t, s \geq 0$. Dados $t, s \in \mathbb{R}_+$ considere os seguintes casos:

1^o **caso:** $\phi(t) \leq s$.

Segue da Proposição 1.51 (i) e do fato de $\widetilde{\phi}$ ser não decrescente que

$$\begin{aligned} \int_{\phi(t)}^{s} \widetilde{\phi}(r)dr &\geq \widetilde{\phi}(\phi(t))(s - \phi(t)) \\ &\geq t(s - \phi(t)). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Assim

$$\begin{aligned} \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) &= \Phi(t) + \int_0^s \widetilde{\phi}(r)dr \\ &= \Phi(t) + \int_0^{\phi(t)} \widetilde{\phi}(r)dr + \int_{\phi(t)}^{s} \widetilde{\phi}(r)dr, \end{aligned}$$

donde segue-se de (1.46) que

$$\Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) \geq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(\phi(t)) + ts - t\phi(s),$$

implicando por 1.44 que

$$\begin{aligned} \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) &= \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(\phi(t)) + ts - (\Phi(t) + \widetilde{\Phi}(\phi(t))) \\ &= ts. \end{aligned}$$

2^o **caso:** $\phi(t) > s$.

Observe que

$$s < \sup\{r; \widetilde{\phi}(r) \leq t\},$$

donde

$$s < r,\ \widetilde{\phi}(r) \leq t,$$

logo $\widetilde{\phi}(s) \leq t$. De modo análogo ao feito no 1^o caso, mostra-se que

$$\Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) \geq ts,$$

provando assim o teorema. $\square$

Lema 1.57. *Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ um par de N-funções conjugadas. Então, as seguintes propriedades se verificam:*

a) $\widetilde{\Phi}(\phi(t)) \leq \Phi(2t)$, *para todo* $t \geq 0$*;*

b) $\widetilde{\Phi}\Big(\dfrac{\Phi(t)}{t}\Big) < \Phi(t)$, *para todo* $t > 0$*;*

c) $t < \Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t)$, *para todo* $t > 0$.

Observação 1.58. *A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t),\ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s),\ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Além disso, para $s = \phi(t)$

$$\widetilde{\Phi}(t) = \phi(t)t - \Phi(\phi(t)),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Logo,

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Mostrando assim que $\widetilde{\Phi}$ é a função conjugada de Φ.

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

Exemplo 1.59.

a) Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$. Por este fato, iremos agora obter estes pontos de máximo. Observando que

$$\xi'(s) = t - s^{p-1}, \ s \in \mathbb{R}_+,$$

tem-se

$$\xi'(s) = 0 \ se, \ e \ só \ se \ t - s^{p-1} = 0,$$

ou seja

$$s = t^{\frac{1}{p-1}}.$$

1^o **caso:** $t \geq 0$.

Para este caso, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+}\{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1}t^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

2^o **caso:** $t < 0$.

Para este caso, mostra-se de modo análogo ao feito anteriormente que

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}}\{st - f(s)\} \\ &= (-t)^{p-1}t - f((-t)^{p-1}) \\ &= \frac{1}{q}(-t)^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Do 1^o e 2^o caso, segue-se que

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) $f(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1.$

Se $t \geq 0$, considerando

$$\eta(s) = ts + s + 1 - e^s,\ s > 0,$$

temos

$$\eta'(s) = t + 1 - e^s,\ s > 0.$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \ \textit{se, e só se} \ s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t\ln(1+t) - f(\ln(1+t)) \\ &= (1+t)\ln(1+t) - t,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Se $t < 0$, mostra-se de modo análogo que

$$\widetilde{f}(t) = (1 + (-t))\ln(1 + (-t)) - (-t),\ t < 0.$$

Portanto,

$$\widetilde{f}(t) = (1+ \mid t \mid)\ln(1+ \mid t \mid) - \mid t \mid,\ t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.60. *Sejam* Φ *uma N-função e* $\widetilde{\Phi}$ *a função conjugada de* Φ. *Se* $u \in L_\Phi(\Omega)$ *e* $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, *então*

(i) $uv \in L^1(\Omega)$;

(ii) $\int_\Omega uvdx \leq 2 \mid u \mid_\Phi \mid v \mid_{\widetilde{\Phi}}$.

Observação 1.61. *Note que o espaço* $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ *está contido no espaço dual de* $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. *Caso* Φ *não cumpra a condição* Δ_2, *então esta inclusão é estrita.*

De fato, dado $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ seja $\varphi_v : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\varphi_v(u) = \int_\Omega vudx,\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Segue da Proposição 1.60 que $\varphi_v \in L_\Phi(\Omega)^*$.

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$ (ver Corolário 1.42). Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), segue do Teorema A.16 (ver Apêndice A) que existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{1.47}$$

Suponha, por contradição, que existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uvdx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$, segue de (1.47)

$$\begin{aligned} 0 = f(u) &= \int_\Omega uvdx \\ &= \int_\Omega \mid v \mid dx, \end{aligned}$$

donde

$$v(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

implicando que $f \equiv 0$, o que é uma contradição.

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

Lema 1.62. *Seja $w \in L_\Phi(\Omega)$. Se $\mid w \mid_\Phi > 1$, então*

$$\mid w \mid_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(w)dx.$$

Demonstração. Seja $w \in L_\Phi(\Omega)$, tal que $\mid w \mid_\Phi > 1$. Deste fato, fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo

$$\mid w \mid_\Phi - \epsilon > 1.$$

Temos do Lema 1.12 (a)

$$\frac{1}{\mid w \mid_\Phi - \epsilon} \int_\Omega \Phi(w)dx \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{w}{\mid w \mid_\Phi - \epsilon}\Big)dx. \tag{1.48}$$

Por outro lado, desde que

$$\mid w \mid_\Phi - \epsilon < \mid w \mid_\Phi = \inf\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{w}{\lambda}\Big)dx \leq 1\},$$

temos
$$| w |_\Phi - \epsilon \notin \Big\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{w}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\},$$
donde
$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{w}{| w |_\Phi - \epsilon}\Big)dx > 1. \tag{1.49}$$
De (1.48) e (1.49)
$$\int_\Omega \Phi(w)dx >| w |_\Phi - \epsilon,$$
para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, passando ao limite de $\epsilon \to 0$, tem-se
$$\int_\Omega \Phi(w)dx \geq | w |_\Phi$$
como queríamos demonstrar. $\square$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 1.63. $E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (*equivalentemente* $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$. De fato, dado $\widehat{v} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ definindo
$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\widehat{v}} : E_\Phi(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \Psi_{\widehat{v}}(u) = \displaystyle\int_\Omega u\widehat{v}dx, \end{array}$$
temos $\Psi_{\widehat{v}} \in E_\Phi(\Omega)^*$.

Mostraremos agora que $E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$. Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere
$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \ \textit{é mensurável}\}.$$
Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por
$$\mu(U) = \Psi_v(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$
onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U. Se $| U |= 0$, temos
$$\chi_U(x) = 0 \ q.t.p. \ x \in \Omega,$$
donde $\Psi(\chi_U) = 0$, isto é $\mu(U) = 0$. Mostrando que μ é uma medida absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Segue do Teorema de

Radon-Nikodyn (ver Teorema A.7 em Apêndice A), que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis e $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(w) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi(\chi_{A_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} v dx \\
&= \int_\Omega wv dx. \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue do Teorema A.9 (ver Apêndice A) que existem $\{u_n^1\}$, $\{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas, tais que

$$u_n^1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^+ \ \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$u_n^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^- \ \text{ pontualmente em } \Omega,$$

além disso

$$u_n^1(x) \leq u^+(x) \ x \in \Omega \ e \ n \in \mathbb{N}$$

e

$$u_n^2(x) \leq u^-(x) \ x \in \Omega \ e \ n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1(x) - u_n^2(x)) - u(x)}{\epsilon}\Big) \leq \Phi\Big(\frac{2 \mid u(x) \mid}{\epsilon}\Big) \ x \in \Omega \ e \ n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) dx \leq 1, \ \epsilon > 0,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid (u_n^1 - u_n^2) - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, temos

$$\Psi(u_n^1 - u_n^2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(u) \ em\ \mathbb{R}. \tag{1.51}$$

Por outro lado, desde que

$$| (u_n^1 - u_n^2)v | \leq | uv | \in L^1(\Omega)$$

e

$$(u_n^1 - u_n^2)v \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv \ \text{ pontualmente em } \Omega,$$

temos novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega (u_n^1 - u_n^2)v dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega uv dx. \tag{1.52}$$

Temos de (1.50)

$$\begin{aligned} \Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx, \end{aligned}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, segue de (1.51) e (1.52)

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx.$$

Mostrando que o funcional $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ restrito a $L^\infty(\Omega)$ é dado por:

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L^\infty(\Omega). \tag{1.53}$$

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ | v(x) | \leq n, \\ 0, \ se \ | v(x) | > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \Psi \|_*$. Note que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$. Deste fato, para justificarmos que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, basta provar que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.54}$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$, temos de (1.53)

$$\begin{aligned}
\Psi(\widetilde{u}_n) &= \int_\Omega \widetilde{u}_n v dx \\
&= \int_{[v_n\neq 0]} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda} v dx \\
&= \lambda \int_{[v_n\neq 0]} \widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)\frac{v}{v_n}dx \\
&= \lambda \int_{[v_n\neq 0]} \widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)dx. \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\mid \Psi(\widetilde{u}_n) \mid &\leq \parallel \Psi \parallel_* \mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi \\
&= \lambda \mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi, \ n \in \mathbb{N}. \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

Se $\mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi > 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue do Lema 1.62

$$\mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(\widetilde{u}_n)dx = \int_{[v_n\neq 0]} \Phi\Big(\frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda}\Big)dx,$$

implicando do Lema 1.57 (b) que

$$\mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi < \int_{[v_n\neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx = \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx. \qquad (1.57)$$

De (1.56) e (1.57)

$$\mid \Psi(\widetilde{u}_n) \mid < \lambda \int_{[v_n\neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx = \lambda \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}dx,$$

o que é uma contradição com (1.55). Logo, $\mid \widetilde{u}_n \mid_\Phi \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$, donde, segue-se de (1.55) e (1.56) que

$$\lambda \geq \mid \varphi(\widetilde{u}_n) \mid = \Big|\lambda \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx\Big|,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

mostrando assim (1.54).

Recordando, acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^\Phi(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_\Omega uvdx,\ u \in L^\infty(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_\Phi(\Omega)$, basta tomar uma sequência $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e teremos da Proposição 1.60 (ii)

$$\int_\Omega u_n v dx \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega uvdx.$$

E portanto

$$\Psi(u) = \int_\Omega uvdx,\ u \in E_\Phi(\Omega),$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 1.64. *$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.*

Demonstração. Se Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2, temos

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \ e\ E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Logo,

$$E_\Phi(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \tag{1.58}$$

e

$$E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega). \tag{1.59}$$

De (1.58) e (1.59)

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$$

e

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo, isto é $L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega)$. Desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$, $E_\Phi(\Omega)$ é reflexivo, isto é, $E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}$. Segue do fato de

$$L_\Phi(\Omega) \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = E_\Phi(\Omega)^{**} = E_\Phi(\Omega),$$

que $E_\Phi(\Omega)$ contém $L_\Phi(\Omega)$. Mostrando que $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2 (Ver Corolário 1.42).

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2. Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2. Segue da Observação 1.61, que

$$L^*_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \not\subset L_\Phi(\Omega).$$

No entanto

$$E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**} = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* \not\subset L_\Phi(\Omega),$$

o que é uma contradição. $\square$

Capítulo 2

Espaços de Orlicz-Sobolev

No Capítulo 1, o leitor observou que o espaço de Orlicz é uma generalização natural do espaço $L^p(\Omega)$. Por este fato, nada mais natural que definir, a partir deste espaço, o espaço de Orlicz-Sobolev. O espaço de Orlicz-Sobolev é uma generalização do espaço de Sobolev. As demonstrações omitidas neste capítulo podem ser encontradas em [36].

2.1 Espaços de Orlicz-Sobolev

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.1. *Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad ; \quad \text{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega f_i \psi dx, \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i \in \{1, ..., n\} \Big\}.$$

Observação 2.2. *Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$,*

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad ; \quad \text{existem } \{g_\alpha\} \subset L_\Phi(\Omega), \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N), \ \text{tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\|_S} \int_\Omega g_\alpha \psi dx, \\ \text{para quaisquer } \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \ \| \alpha \|_S \leq m \Big\}.$$

Observação 2.3. *Se $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, então tais f_i's são únicas. Assim, denotemos*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Observação 2.4. *Sobre $W^{1,\Phi}(\Omega)$, podemos estabelecer a seguinte norma:*

$$| u |_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ | u |_\Phi, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_\Phi \right\}.$$

Lema 2.5. *A norma $| \, . \, |_{1,\Phi,\Omega}$ é equivalente à seguinte norma*

$$| u |_{1,\Phi} = | u |_\Phi + | \nabla u |_\Phi, \ u \in W^{1,\Phi}(\Omega).$$

Teorema 2.6. *$W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 2.7. *Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos*

1. *$W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;*

2. *Para cada $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$ existem $\{v_i\}_{i=0}^N \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tais que*

$$T(u) = \int_\Omega u v_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i dx;$$

3. *$W^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo.*

2.2 Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Apresentaremos, a seguir, uma série de resultados com o intuito de obter algumas imersões entre os espaços de Orlicz.

Proposição 2.8. *Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ duas N-funções conjugadas. Então,*

$$t < \Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t, \ t > 0.$$

Demonstração. Desde que

$$ts \leq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s), \ t, s \in \mathbb{R},$$

temos

$$\Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t) \leq \Phi(\Phi^{-1}(t)) + \widetilde{\Phi}(\widetilde{\Phi}^{-1}(t)), \ t > 0,$$

donde

$$\Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t) \leq 2t, t > 0,$$

mostrando a segunda desigualdade.
Agora, dado $t > 0$, tome $a > 0$ tal que

$$\widetilde{\Phi}(a) = t. \tag{2.1}$$

Temos do Lema 1.57 (b)

$$\Phi\Big(\frac{\widetilde{\Phi}(a)}{a}\Big) < \widetilde{\Phi}(a),$$

donde segue-se de (2.1)

$$\Phi\Big(\frac{t}{\widetilde{\Phi}^{-1}(t)}\Big) < t,$$

implicando

$$\Phi^{-1}\Big(\Phi\Big(\frac{t}{\widetilde{\Phi}^{-1}(t)}\Big)\Big) < \Phi^{-1}(t),$$

isto é,

$$\frac{t}{\widetilde{\Phi}^{-1}(t)} < \Phi^{-1}(t).$$

Assim,

$$\Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t) > t,\ t > 0,$$

e, consequentemente, esta proposição está provada. $\square$

Definição 2.9. *Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2* ***cresce estritamente mais lento*** *que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 2.10. *Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, então*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Demonstração. Uma vez que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos k e t_0 positivos tais que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1(kt),\ t \geq t_0.$$

Note que

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \subset L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Sejam $t_1 = \Phi_2^{-1}(1/(2 \mid \Omega \mid))$ e $c = \max\{1, \Phi_2(t_0)/\Phi_1(kt_1)\}$.

Afirmação 2.11. *Para todo $t \geq t_1$, temos*

$$\Phi_2(t) \leq c\Phi_1(kt).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$. Agora, se $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ a desigualdade segue imediatamente. Assim, tomando $t \in [t_1, t_0]$ temos

$$\Phi_1(kt_1) \leq \Phi_1(kt) \tag{2.2}$$

e

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_2(t_0). \tag{2.3}$$

Segue de (2.2) e (2.3) que

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &\leq \Phi_2(t_0) \\ &\leq \Phi_2(t_0)\frac{\Phi_1(kt)}{\Phi_1(kt_1)} \\ &\leq c\Phi_1(kt), \end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 2.11.

Dado $u \in L_{\Phi_1}(\Omega)$, defina

$$\Omega_u = \Big\{x \in \Omega; \frac{| u(x) |}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}} < t_1\Big\}.$$

Da Afirmação 2.11, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{u(x)}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx &= \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{| u |}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{| u |}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\ &\leq \Phi_2(t_1) \mid \Omega_u \mid + c\int_{\Omega\backslash\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{k \mid u \mid}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\ &= \frac{| \Omega_u |}{2 \mid \Omega \mid} + c\int_{\Omega\backslash\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{| u |}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\ &\leq \frac{1}{2} + c\int_{\Omega\backslash\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{| u |}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx, \end{aligned}$$

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\frac{1}{2c} \in [0, 1]$, que

$$\int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{| u |}{2ck \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\backslash\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{| u |}{| u |_{\Phi_1}}\Big)dx \leq 1,$$

donde segue que

$$| u |_{\Phi_2} \leq 2ck \mid u \mid_{\Phi_1},$$

mostrando assim a continuidade da imersão. □

Teorema 2.12. *Suponha que* $| \Omega | < \infty$ *e* $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. *Se uma sequência* (u_n) *em* $L_{\Phi_1}(\Omega)$ *é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em* $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, defina

$$v_{jk}(x) = \frac{u_j(x) - u_k(x)}{\epsilon}, \ x \in \Omega.$$

Por hipotése, (v_{jk}) é uma sequência limitada em $L_{\Phi_1}(\Omega)$. Seja $R > 0$, tal que

$$| v_{jk} |_{\Phi_1} \leq R, \ j, k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\Big(\frac{1}{4R}t\Big), \ t \geq t_0,$$

donde segue do Lema 1.12 (a)

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\Big(\frac{t}{R}\Big), \ t \geq t_0. \tag{2.5}$$

Considere $\delta = \dfrac{1}{4\Phi_2(t_0)}$ e

$$\Omega_{jk} = \left\{x \in \Omega; | v_{jk}(x) | \geq \Phi_2^{-1}\Big(\frac{1}{2 | \Omega |}\Big)\right\}.$$

Desde que (u_n) é convergente em medida, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$| \Omega_{jk} | \leq \delta \ j, k \geq N. \tag{2.6}$$

Considerando agora

$$\Omega'_{jk} = \{x \in \Omega_{jk}; | v_{jk}(x) | \geq t_0\}$$

e

$$\Omega''_{jk} = \Omega_{jk} \setminus \Omega'_{jk},$$

temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(| v_{jk}(x) |)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(| v_{jk}(x) |)dx + \int_{\Omega'_{jk}} \Phi_2(| v_{jk}(x) |)dx \\ &\quad + \int_{\Omega''_{jk}} \Phi_2(| v_{jk}(x) |)dx,\end{aligned}$$

segue de (2.5)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x)\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid \\ &\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid,\end{aligned}$$

implicando de (2.4) e (2.6)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}\mid)dx \leq 1,\ \ j,k\geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk}\mid_{\Phi_2}\leq 1$, isto é

$$\mid u_j - u_k\mid_{\Phi_2} < \epsilon,$$

justificando assim que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$. E portanto, (u_n) é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$, já que $L_{\Phi_2}(\Omega)$ é um espaço de Banach. □

Corolário 2.13. *Suponha que* $\mid \Omega \mid < \infty$ *e* $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. *Se* $S\subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ *é limitado em* $L_{\Phi_1}(\Omega)$ *e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis* $L^1(\Omega)$, *então* S *é pré-compacto em* $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração. Lembre que toda sequência convergente em $L^1(\Omega)$ é convergente em medida. Deste fato, este corolário é uma consequência imediata do Teorema 2.12. □

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada à Φ. Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 2.14. *Seja* Φ *uma N-função satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}}d\tau < +\infty \tag{2.7}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}}d\tau = +\infty. \tag{2.8}$$

Então a função $\Phi_*^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *dada por*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}}d\tau, \tag{2.9}$$

é bijetiva e sua inversa Φ_*, *extendida em toda reta de forma que* Φ_* *seja uma função par, é uma N-função.*

Demonstração. Observe que

$$\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t) = \frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{n}}} > 0, \ t > 0. \tag{2.10}$$

Deste fato, tem-se que Φ_*^{-1} é estritamente crescente em $\mathbb{R}_+$, e portanto injetiva em $\mathbb{R}_+$. Desde que Φ_*^{-1} é estritamente crescente, contínua em $\mathbb{R}_+$ e satisfaz (2.8), tem-se que Φ_*^{-1} é sobrejetiva em $\mathbb{R}_+$. Justificando assim a bijetividade de Φ_*^{-1} em $\mathbb{R}_+$.

Mostraremos agora que Φ_* é uma N-função. Para isto, basta observar os seguintes fatos:

(i) $\Phi_*(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$.
De fato, sendo Φ_*^{-1} bijetiva em $\mathbb{R}_+$ e $\Phi_*^{-1}(0) = 0$, conclui-se que

$$\Phi_*(t) = 0 \textit{ para algum } t \in \mathbb{R}_+, \ \textit{então } t = 0.$$

Caso $t = 0$, é imediato que $\Phi_*(t) = 0$, já que $\Phi_*^{-1}(0) = 0$. Lembrando que Φ_* é uma função par, podemos concluir que

$$\Phi_*(t) = 0 \textit{ se, e só se } t = 0.$$

(ii) Φ_* é contínua em toda a reta.
Mostrado que $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é bijetiva e sua derivada é estritamente crescente em $\mathbb{R}_+^*$ (ver 2.10) temos que Φ_* *é derivável em* $\mathbb{R}_+^*$, além disso sua derivada é dada por

$$\Phi_*'(s) = \frac{1}{\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t)}, \ \textit{para } s = \Phi_*^{-1}(t) > 0.$$

Segue daí e do fato de Φ_* ser par, que Φ_* é contínua em toda a reta.

(iii) Φ_* é convexo.
Para mostrarmos que Φ_* é convexo, basta mostrar que Φ_*^{-1} é côncavo em $\mathbb{R}_+$, pois assim tem-se que a derivada de Φ_*^{-1} é uma função decrescente em $\mathbb{R}_+$. Neste caso, como a derivada de Φ_* em $\mathbb{R}_+^*$ é dada por

$$\Phi_*'(s) = \frac{1}{\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(t)}, \ \textit{para } s = \Phi_*^{-1}(t), \ \textit{com } t > 0,$$

concluímos que Φ_*' será uma função crescente em $\mathbb{R}_+^*$. Consequentemente, Φ_* será convexa em $\mathbb{R}_+^*$. E assim, teremos do fato de Φ_* ser par, que Φ_* é convexa em toda a reta.

Sendo assim, mostraremos agora que Φ_*^{-1} é côncavo em $\mathbb{R}_+$. Lembrando que Φ é uma N-função, dado $s \geq 0$ e $\alpha \in [0,1]$, temos do Lema 1.12 (a)

$$\Phi(\alpha\Phi^{-1}(s)) \leq \alpha\Phi(\Phi^{-1}(s)) \leq \alpha s,$$

donde segue pelo fato de Φ^{-1} ser crescente em $\mathbb{R}_+$

$$\alpha\Phi^{-1}(s) \leq \Phi^{-1}(\alpha s), \ \ s \geq 0 \ \ e \ \alpha \in [0,1]. \tag{2.11}$$

Considerando $0 \leq \alpha = \frac{a}{b} < 1$ e $s = b > 0$, temos de (2.11)

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(a) &\geq \frac{a}{b}\Phi^{-1}(b) \\ &> \left(\frac{a}{b}\right)^{1+\frac{1}{n}}\Phi^{-1}(b). \end{aligned}$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} (\Phi_*^{-1})'(a) &= \frac{\Phi^{-1}(a)}{a^{1+\frac{1}{n}}} \\ &> \left(\frac{a}{b}\right)^{1+\frac{1}{n}}\frac{\Phi^{-1}(b)}{a^{1+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\Phi^{-1}(b)}{b^{1+\frac{1}{n}}} \\ &= (\Phi_*^{-1})'(b). \end{aligned}$$

Mostrando que $(\Phi_*^{-1})'$ é decrescente em $\mathbb{R}_+$, e portanto Φ_*^{-1} é côncava em $\mathbb{R}_+$.

(iv) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi_*(t)}{t} = +\infty.$

Pela Regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi_*(t)}{t} &= \lim_{t\to+\infty}\Phi_*'(t) \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(\Phi_*^{-1})'(\Phi_*(t))} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))/\Phi_*(t)^{1+\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\Phi_*(t)}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))}\right)\Phi_*(t)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, desde que Φ é uma N-função, temos

$$\frac{\Phi(r)}{r} \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

em particular
$$\frac{\Phi(\Phi^{-1}(\Phi_*(t)))}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
ou seja
$$\frac{\Phi_*(t)}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{2.13}$$
De (2.12) e (2.13), concluimos que
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_*(t)}{t} = +\infty.$$

(v) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_*(t)}{t} = 0.$

É feito de modo análogo ao item anterior. Basta utilizar novamente a regra de L'Hopital.

Do item (i) ao item (v), concluímos que a extenção par Φ_* é uma N-função. $\square$

Observação 2.15. *Suponha $\Phi(t) =\mid t \mid^p$. Se Φ satisfaz as hipotéses do lema anterior, então $p \in [1, N)$.*

Primeiramente, note que a inversa de Φ em $\mathbb{R}_+$ é dada por
$$\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}.$$
Deste fato, temos
$$\frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} = \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{1+\frac{1}{N}}} = t^{\frac{N-p(N+1)}{pN}}.$$
Considerando $\alpha = \frac{N-p(N+1)}{pN}$, note que
$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \textit{ se, e só se, } \alpha > -1,$$
ou seja,
$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \textit{ se, e só se, } N > p. \tag{2.14}$$
Além disso,
$$\int_1^\infty t^\alpha dt = +\infty \textit{ se, e só se, } p < N. \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15), podemos concluir que Φ satisfaz as hipotéses do Lema 2.14 se, e só se, $p < N$. Observe agora que, para $p < N$,

$$\Phi_*^{-1}(t) = \frac{pN}{N-p} t^{\frac{N-p}{Np}},$$

e, portanto,

$$\Phi_*(t) = \frac{N-p}{Np} \mid t \mid^{\frac{Np}{N-p}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Como $p^* = \frac{Np}{N-p}$, obtemos

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} \mid t \mid^{p^*}, t \in \mathbb{R}.$$

No que segue, considere Ω um domínio **adimissível**, isto é, um domínio onde ocorram as imersões de Sobolev

$$W^{1,1}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ q \in [1, \frac{N}{N-1}].$$

Teorema 2.16. *Seja Ω um domínio aberto, limitado e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipotéses do Lema 2.14. Se Φ_*^{-1} é dada por*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Além disso, se Ψ é uma N-função crescendo estritamente mais lento que Φ_*, então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{comp}{\hookrightarrow} L_{\Psi}(\Omega).$$

Demonstração. Por definição

$$\frac{d\Phi_*^{-1}}{ds}(s) = \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}, \ s > 0.$$

Logo, se $t = \Phi_*^{-1}(s)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^*}{dt}(t) &= \frac{1}{\frac{d\Phi_*^{-1}}{dt}(s)} \\ &= \frac{s^{1+\frac{1}{N}}}{\Phi^{-1}(s)} \\ &= \frac{\Phi_*(t)^{1+\frac{1}{N}}}{\Phi^{-1}(\Phi_*(t))}. \end{aligned}$$

Portanto, a N-função Φ_* satisfaz a equação diferencial

$$\Phi^{-1}(\Phi_*(t))\frac{d\Phi_*}{dt}(t) = \Phi_*(t)^{1+\frac{1}{N}},\ t \geq 0. \tag{2.16}$$

Considere $\widetilde{\Phi}$ a N-função conjugada de Φ. Da Proposição 2.8

$$\Phi_*(t) \leq \Phi^{-1}(\Phi_*(t))\widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(t)).$$

Segue de (2.16)

$$\Phi^{-1}(\Phi_*(t))\frac{d\Phi_*}{dt}(t) \leq \Phi^{-1}(\Phi_*(t))\widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(t))\Phi_*^{\frac{1}{N}}(t),$$

donde

$$\frac{d\Phi_*}{dt}(t) \leq \widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(t))\Phi_*^{\frac{1}{N}}(t),\ t \in \mathbb{R}_+,$$

o que implica

$$\frac{d\Phi_*}{dt}(t) \leq \widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(t))\Phi_*^{\frac{1}{N}}(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Definindo

$$\sigma(t) = \Phi_*(t)^{1-\frac{1}{N}},\ t > 0,$$

temos

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{N-1}{N}\Phi_*^{-\frac{1}{N}}(t)\frac{d\Phi_*}{dt}(t),\ t > 0, \tag{2.18}$$

donde segue de (2.17)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(t) &\leq \frac{N-1}{N}\widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(t)) \\ &= \frac{N-1}{N}\widetilde{\Phi}^{-1}(\sigma(t)^{\frac{N}{N-1}}),\ t > 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Suponha inicialmente que $u \in W^{1,\Phi}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u \neq 0$. Agora, considere

$$f(\lambda) = \int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx,\ \lambda > 0.$$

Note que f está bem definida e é contínua. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$f(\lambda) \overset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e

$$f(\lambda) \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $k > 0$

$$1 = f(k) = \int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u}{k}\Big)dx. \tag{2.20}$$

Donde concluimos que $k = \mid u \mid_{\Phi_*}$. Desde que $u \in L_\Phi(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_\Phi(\Omega)$ para todo $i = 1, ..., N$ e

$$L_\Phi(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^1(\Omega),$$

temos $u \in L^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ para todo $i = 1, ..., N$, consequentemente $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Seja

$$D_u = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda = \frac{u(x)}{k},\ \textit{para algum } x \in \Omega\Big\}.$$

Observe que D_u é limitado, pois $u \in L^\infty(\Omega)$, e fixe I um intervalo fechado que contém D_u. Logo,

$$\mid \sigma'(t) \mid \leq M,\ t \in I, \tag{2.21}$$

para algum $M > 0$. Sabendo que $\sigma \in C^1(I)$, $\sigma(0) = 0$, σ satisfaz (2.21) e $u \in W^{1,1}(\Omega)$, temos da Proposição A.19 (ver Apêndice A)

$$\varphi = \sigma \circ \left(\frac{\mid u \mid}{k}\right) \in W^{1,1}(\Omega)$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \sigma'\Big(\frac{\mid u \mid}{k}(x)\Big)\frac{1}{k} sgnu(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{2.22}$$

Agora pelo Teorema A.20 (ver Apêndice A), temos

$$W^{1,1}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega),$$

e portanto de (2.22)

$$\begin{aligned} \mid \varphi \mid_{\frac{N}{N-1}} &\leq c_1\Big(\sum_{j=1}^n \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|_1 + \mid \varphi \mid_1\Big) \\ &= \frac{c_1}{k}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \Big|\sigma'\Big(\frac{\mid u \mid}{k}\Big) sgnu(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big| dx + \int_\Omega |\varphi| dx. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De (2.20)

$$1=\Big(\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u}{k}\Big)dx\Big)^{\frac{N-1}{N}}=\Big(\int_\Omega \sigma\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)^{\frac{N}{N-1}}dx\Big)^{\frac{N-1}{N}},$$

donde segue de (2.23)

$$\begin{aligned}1=|\,\varphi\,|_{\frac{N}{N-1}} &\leq \frac{c_1}{k}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega\Big|\sigma'\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)sgnu(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|dx\\ &\quad +c_1\int_\Omega \sigma\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)dx.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Desde que

$$\sigma'\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)\in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$$

(ver (2.19)) e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L_\Phi(\Omega)$, segue de (2.24)

$$1\leq 2\frac{c_1}{k}\sum_{j=1}^{N}\Big|\sigma'\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)\Big|_{\widetilde{\Phi}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{\Phi}+c_1\int_\Omega \sigma\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)dx.\tag{2.25}$$

Por outro lado, de (2.19)

$$\begin{aligned}\Big|\sigma'\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)\Big|_{\widetilde{\Phi}} &\leq \Big|\frac{N-1}{N}\widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\sigma^{\frac{N}{N-1}}\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)\Big)\Big|_{\widetilde{\Phi}}\\ &= \frac{N-1}{N}\inf\Big\{\lambda>0;\int_\Omega\widetilde{\Phi}\Big(\frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(\sigma^{\frac{N}{N-1}}(\,|\,u\,|\,/k)}{\lambda}\Big)\leq 1\Big\}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Observe que

$$\int_\Omega\widetilde{\Phi}\Big(\widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi_*(|\,u\,|\,/k))\Big)dx=\int_\Omega\Phi_*\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)dx=1.$$

Logo

$$\inf\Big\{\lambda>0;\int_\Omega\widetilde{\Phi}\Big[\frac{\widetilde{\Phi}^{-1}(\sigma^{\frac{n}{n-1}}(|\,u\,|\,/k))}{\lambda}\Big]\leq 1\Big\}\leq 1.\tag{2.27}$$

De (2.26) e (2.27)

$$|\,\sigma'\Big(\frac{|\,u\,|}{k}\Big)\,|_{\widetilde{\Phi}}\leq\frac{N-1}{N}.\tag{2.28}$$

Agora, defina

$$g(t) = \frac{\Phi_*(t)}{t},\ t \in \mathbb{R}$$

e

$$h(t) = \frac{\sigma(t)}{t},\ t > 0.$$

Observando que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_*(t)}{\sigma(t)} = \lim_{t\to+\infty} \Big(\Phi_*(t)\Big)^{\frac{1}{N}} = +\infty.$$

Fixe $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{g(t)}{h(t)} \geq 2c_1,\ t \geq t_0,$$

ou seja

$$h(t) \leq \frac{1}{2c_1} g(t),\ t \geq t_0. \tag{2.29}$$

Desde que h é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ e

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sigma'(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{N-1}{N} \widetilde{\Phi}^{-1}\Big(\sigma(t)^{\frac{N}{N-1}}\Big) = 0,$$

podemos definir

$$c_2 = c_1 \sup_{t\in[0,t_0]} h(t). \tag{2.30}$$

Logo, para cada $t \geq t_0$

$$\sigma(t) = h(t)t \leq \frac{1}{2c_1} g(t)t = \frac{1}{2c_1}\Phi_*(t)$$

e para cada $t \in [0, t_0]$

$$\sigma(t) = h(t)t \leq \frac{c_2}{c_1} t.$$

Portanto,

$$\sigma(t) \leq \frac{1}{2c_1}\Phi_*(t) + \frac{c_2}{c_1} t,\ t \geq 0.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} c_1 \int_\Omega \sigma\Big(\frac{\mid u \mid}{k}\Big) dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{\mid u \mid}{k}\Big) dx + c_2 \int_\Omega \frac{\mid u \mid}{k} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{c_2}{k}\int_\Omega \mid u \mid dx, \end{aligned}$$

utilizando a Desigualdade de Holder

$$\begin{aligned} c_1 \int_\Omega \sigma\Big(\frac{| u |}{k}\Big)dx &\leq \frac{1}{2} + \frac{2c_2}{k} \mid 1 \mid_{\widetilde{\Phi}} \mid u \mid_\Phi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{c_3}{k} \mid u \mid_\Phi, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $c_3 = 2c_1 \mid 1 \mid_{\widetilde{\Phi}}$. De (2.25), (2.28) e (2.31)

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{2c_1}{k}\frac{N-1}{N}N \max_{1\leq j\leq N} \{ \mid u \mid_\Phi, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Phi \} \\ &+\frac{1}{2} + \frac{c_3}{k} \max_{1\leq i\leq N} \{ \mid u \mid_\Phi, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Phi \}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2c_1(N-1)}{k} \mid u \mid_{1,\Phi} + \frac{c_3}{k} \mid u \mid_{1,\Phi},$$

lembrando que $k = \mid u \mid_{\Phi_*}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mid u \mid_{\Phi_*} &\leq (4c_1(N-1) + 2c_3) \mid u \mid_{1,\Phi} \\ &= c \mid u \mid_{1,\Phi}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $c = 4c_1(N-1) + 2c_3$. Mostrando que a imersão é válida em $W^{1,\Phi}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Suponha agora que $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$u_k(x) = \begin{cases} \mid u(x) \mid, & se \ \mid u(x) \mid \leq k \\ k, & se \ \mid u(x) \mid > k. \end{cases}$$

Note que $u_k \in W^{1,\Phi}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \begin{cases} sgn(u_k)\frac{\partial u}{\partial x_j}, & se \ \mid u \mid \leq k \\ 0, & se \ \mid u \mid > k. \end{cases}$$

Além disso

$$\mid u_{k_1} \mid_{\Phi_*} \leq \mid u_{k_2} \mid_{\Phi_*}, \ k_1 \leq k_2.$$

Observe que $(\mid u_k \mid_{\Phi_*})$ é uma sequência limitada, pois

$$\mid u_k \mid_{\Phi_*} \leq c \mid u_k \mid_{1,\Phi} \leq c \mid u \mid_{1,\Phi} .$$

Logo, podemos definir

$$\gamma = \lim_{k\to+\infty} \mid u_k \mid_{\Phi_*} \leq c \mid u \mid_{1,\Phi} . \tag{2.33}$$

Desde que
$$\frac{u_k(x)}{\gamma} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u(x)}{\gamma} \ \textit{pontualmente em } \Omega,$$
temos
$$\Phi_*\Big(\frac{u_k(x)}{\gamma}\Big) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi_*\Big(\frac{u(x)}{\gamma}\Big) \ \textit{pontualmente em } \Omega.$$
Sabendo que
$$| \ u_k \ |_{\Phi_*} \leq \gamma, \ \ k \in \mathbb{N},$$
temos
$$\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u_k}{\gamma}\Big)dx \leq \int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u_k}{| \ u_k \ |_{\Phi_*}}\Big)dx \leq 1, \ \ k \in \mathbb{N}.$$
Assim, observando que

1. $\Phi_*\Big(\frac{u_k(x)}{\gamma}\Big) \geq 0, \ \ x \in \Omega;$

2. $\displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u_k}{\gamma}\Big)dx \leq 1, \ \ k \in \mathbb{N};$

3. $\Phi_*\Big(\frac{u_k(x)}{\gamma}\Big) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi_*\Big(\frac{u(x)}{\gamma}\Big)$ *pontualmente em* Ω,

temos pelo Lema de Fatou
$$\int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u(x)}{\gamma}\Big)dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \Phi_*\Big(\frac{u_k(x)}{\gamma}\Big)dx \leq 1,$$
e portanto
$$| \ u \ |_{\Phi_*} \leq \gamma \leq c \ | \ u \ |_{1,\Phi},$$
donde
$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega).$$
Suponha agora que
$$\Psi \prec\prec \Phi_*,$$
consequentemente (ver Teorema 2.10)
$$L_{\Phi_*}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_\Psi(\Omega).$$
Portanto,
$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_\Psi(\Omega),$$
ou seja,
$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_\Psi(\Omega).$$

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$, pois

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Desde que

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} W^{1,1}(\Omega)$$

e

$$W^{1,1}(\Omega) \underset{comp}{\hookrightarrow} L^1(\Omega),$$

temos que S é pré-compacto em $L^1(\Omega)$. Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

temos pelo Corolário 2.13, S é compacto em $L_\Psi(\Omega)$, concluindo a demonstração deste teorema. $\square$

Observação 2.17. *Devido a N-função Φ_* ser a função limite para se obter uma imersão compacta, diz-se que Φ_* é uma função de crescimento crítico de Φ.*

2.3 O Espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Definimos $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma

$$| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} = | \nabla u |_\Phi + | u |_\Phi,$$

isto é,

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|.|_{1,\Phi}}.$$

Lema 2.18. *Seja $| \Omega | < \infty$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$| u |_\Phi \leq C \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_\Phi ,$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\mid \Omega \mid = M$, para alguma constante $M > 0$. Afirmamos que

$$\int_\Omega \Phi(u(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(2M\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)dx, \tag{2.34}$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. De fato, admita inicialmente $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Pela desigualdade de Jensen (ver Teorema A.31, em Apêndice A),

$$\begin{aligned}
\Phi(u(x_1, x_2, .., x_N)) &= \Phi\Big(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_N)d\xi\Big) \\
&= \Phi\Big(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{M}{M}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_N)d\xi\Big) \\
&\leq \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(M\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_N)\Big)d\xi.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega \Phi(u(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(M\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\Big)dx. \tag{2.35}$$

Claramente, (2.35) também é válida para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, cujo suporte é compacto em Ω. Logo, tomando agora $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere um aberto Ω_1 contendo $\overline{\Omega}$, de diâmetro $2M$, e estenda u para o Ω_1 todo, com $u = 0$ em $\Omega_1 \setminus \Omega$. Consequentemente, $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e *supp* u é compacto em Ω_1. Assim, por (2.35), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u(x))dx &= \int_{\Omega_1} \Phi(u(x))dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} \Phi\Big(2M\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\Big)dx \\
&= \int_\Omega \Phi\Big(2M\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\Big)dx,
\end{aligned}$$

provando (2.34). Note que de forma análoga, podemos provar a desigualdade (2.34) para todas as outras derivadas parciais de u. Agora, veja que se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, então

$$\widetilde{u}_i := \frac{u}{2M \mid \partial u/\partial x_i \mid_\Phi} \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Portanto, de (2.34), vale para todo $i = 1, 2, ..., N$ que

$$\int_\Omega \Phi(\widetilde{u}_i(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(2M\frac{\partial u/\partial x_i}{2M \mid \partial u/\partial x_i \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1,$$

Logo,

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{2M \mid \partial u/\partial x_i \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1,$$

donde,

$$\mid u \mid_\Phi \leq 2M \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Phi,$$

demonstrando assim este lema. $\square$

Devido ao Lema 2.18, obtemos a desigualdade de Poincaré

$$\mid u \mid_\Phi \leq K_0 \mid \nabla u \mid_\Phi, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

para algum $K_0 > 0$, a qual implica que a norma $\mid \nabla u \mid_\Phi$ é equivalente à norma $\mid u \mid_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $\mid \nabla u \mid_\Phi$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

O lema a seguir é uma versão da desigualdade de Poincaré para os espaços de Orlicz. Gostaríamos de ressaltar que a prova da mesma não é encontrada na literatura.

Lema 2.19. *(Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$) Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que*

$$\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \leq C_\Phi \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

onde C_Φ é uma constante dependente de Φ.

Demonstração. Desde que Ω é limitado, suponha que

$$\Omega \subset (a,b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

onde a e b são constantes reais. Dado $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, tem-se pelo Teorema Fundamental do Cálculo (ver [29]) que

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)ds, \quad t \in (a,b),$$

donde

$$\mid \varphi(t) \mid \leq \int_a^t \mid \varphi'(s) \mid ds, \quad t \in (a,b),$$

implicando que

$$\mid \varphi(t) \mid \leq \int_a^b \mid \varphi'(s) \mid ds, \quad t \in (a,b). \tag{2.36}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x^{'})$, com $x^{'} = (x_2, ...x_N)$, temos

$$\begin{aligned} \mid \psi(x) \mid &= \mid \psi(t, x^{'}) \mid \\ &= \mid \psi_{x'}(t) \mid \\ &\leq \int_a^b \mid \psi^{'}_{x'}(t) \mid dt. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Usando (2.37) e a desigualdade de Jensen (ver Teorema A.31, em Apêndice A), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(\psi(x))dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi(\mid \psi(t, x^{'}) \mid) dt dx^{'} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi\Big(\int_a^b \mid \psi^{'}_{x'}(s) \mid ds\Big) dt dx^{'} \\ &= (b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{(b-a)\int_a^b |\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s, x^{'})| ds}{\int_a^b 1 ds}\Big) dx^{'}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(\psi(x))dx &\leq K(b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{\int_a^b |\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s, x^{'})| ds}{\int_a^b ds}\Big) dx^{'} \\ &\leq K(b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi\Big(|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s, x^{'})|\Big) ds dx^{'} \\ &= K \int_\Omega \Phi\Big(|\frac{\partial \psi}{\partial x^{'}}(x)|\Big) dx \\ &\leq K \int_\Omega \Phi(\mid \nabla \psi \mid) dx. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou seja,

$$\mid \nabla(\varphi_n - u) \mid_\Phi \to 0.$$

Como $\Phi \in \Delta_2$, tem-se que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla(\varphi_n - u) \mid) dx \to 0,$$

donde segue-se de Brézis-Lieb que

$$\int_\Omega \Big(\Phi(\mid \nabla \varphi_n \mid) - \Phi(\mid \nabla \varphi_n - \nabla u \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)\Big) dx \to 0,$$

e daí

$$\int_\Omega \Phi(|\ \nabla\varphi_n\ |)dx \to \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u\ |)dx. \tag{2.39}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega \Phi(|\ \varphi_n\ |)dx \to \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)dx. \tag{2.40}$$

De (2.38)

$$\int_\Omega \Phi(|\ \varphi_n\ |)dx \leq K \int_\Omega \Phi(|\ \nabla\varphi_n\ |)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos de (2.39) e (2.40)

$$\int_\Omega \Phi(|\ u\ |)dx \leq K \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u\ |)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

$\square$

Observação 2.20. *Observando a demonstração do Lema 2.19, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que* Ω *seja limitado em uma direção.*

Observação 2.21. $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

De fato, visto que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$ e que $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo (considerando que $\Phi \in \Delta_2$ e usando o Teorema 2.7), segue pela Proposição A.18 que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo. Além disso, $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço separável.
Devido a Donaldson e Trudinger (ver [9]) existe uma constante $\gamma = \gamma(N)$, tal que

$$|\ u\ |_{\Phi_*} \leq \gamma\ |\ \nabla u\ |_\Phi,\ \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou melhor, o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

Capítulo 3

O operador Φ-Laplaciano

O objetivo deste capítulo é mostrar algumas propriedades do operador Φ-Laplaciano em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, dado por:

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular e $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds$ uma N-função verificando algumas condições. E além disso, mostrar um resultado qualitativo envolvendo supersoluções deste operador.

3.1 Sobre a N-função Φ

Apresentaremos agora diversos resultados envolvendo uma classe de funções $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ verifica as seguintes condições:

(ϕ_1) $\phi \in C^1(0, \infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;

(ϕ_2) existem $l, m > 1$ tais que

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0;$$

(ϕ_3) existem $a_0, a_1 > 0$ tais que

$$a_0 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq a_1, \quad t > 0.$$

Observação 3.1. *A condição* (ϕ_3) *implica em* (ϕ_2) *para* $l = a_0 + 1$ *e* $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi^{'}(s) \leq \Phi^{''}(s)s \leq a_1\Phi^{'}(s),$$

donde

$$(a_0+1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)^{'}s + \phi(s)s \leq (a_1+1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0+1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)^{'} \leq (a_1+1)\phi(s)s.$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$(a_0+1)\Phi(t) \leq (\phi(t)t)t \leq (a_1+1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

logo,

$$(a_0+1)\Phi(t) \leq \Phi^{'}(t)t \leq (a_1+1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

e, portanto,

$$l = a_0 + 1 \leq \frac{\Phi^{'}(t)t}{\Phi(t)} \leq a_1 + 1 = m, \quad t \geq 0.$$

Os resultados a seguir, não demonstrados, podem ser vistos em [36].

Lema 3.2. *Assumindo* (ϕ_1) *e* (ϕ_2), Φ *e* $\widetilde{\Phi}$ *definem N-funções.*

Abaixo, segue alguns exemplos de N-funções Φ que cumprem $(\phi_1)-(\phi_3)$.

(i) $\Phi_1(t) =\mid t \mid^{p_0} + \mid t \mid^{p_1}$, $1 < p_0 < p_1 < N$ e $p_1 \in (p_0, p_0^*)$.

Em [36] é mostrado que Φ_1 cumpre (ϕ_1) e (ϕ_2), com $l = p_0$ e $m = p_1$. Mostraremos agora que Φ_1 cumpre (ϕ_3). Para isto, observe que

- $\Phi_1^{'}(t) = p_0t^{p_0-1} + p_1t^{p_1-1}$,
- $\Phi_1^{''}(t) = p_0(p_0-1)t^{p_0-2} + p_1(p_1-1)t^{p_1-2}$.

Então, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1^{''}(t)t}{\Phi_1^{'}(t)} &= \frac{p_0(p_0-1)t^{p_0-1} + p_1(p_1-1)t^{p_1-1}}{p_0t^{p_0-1} + p_1t^{p_1-1}} \\ &\leq \frac{p_0(p_1-1)t^{p_0-1} + p_1(p_1-1)t^{p_1-1}}{p_0t^{p_0-1} + p_1t^{p_1-1}} \\ &= p_1 - 1 \qquad (3.1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1''(t)t}{\Phi_1'(t)} &= \frac{p_0(p_0-1)t^{p_0-1}+p_1(p_1-1)t^{p_1-1}}{p_0t^{p_0-1}+p_1t^{p_1-1}}\\ &\geq \frac{p_0(p_0-1)t^{p_0-1}+p_1(p_0-1)t^{p_1-1}}{p_0t^{p_0-1}+p_1t^{p_1-1}}\\ &= p_0-1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Deste modo, fazendo $a_1 = p_1 - 1$ e $a_0 = p_0 - 1$, temos de (3.1) e (3.2)

$$a_0 \leq \frac{\Phi_1''(t)t}{\Phi_1'(t)} \leq a_1, \text{ para } t > 0.$$

(ii) $\Phi_2(t) = (1+t^2)^\gamma - 1$, $\gamma \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$.

Em [36] é mostrado que Φ_2 cumpre (ϕ_1) e (ϕ_2) para $l = 2$ e $m = 2\gamma$. Vejamos agora que Φ_2 satisfaz a condição (ϕ_3). Para isto, observe que

- $\Phi_2'(t) = 2\gamma t(1+t^2)^{\gamma-1}$,
- $\Phi_2''(t) = 2\gamma(1+t^2)^{\gamma-1} + 4\gamma t^2(\gamma-1)(1+t^2)^{\gamma-2}$.

Assim, para $t > 0$,

$$\frac{\Phi_2''(t)t}{\Phi_2'(t)} = 1 + 2(\gamma-1)\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Ora, sabemos que

$$1 < 1 + 2(\gamma-1)\frac{t^2}{1+t^2} < 1 + 2(\gamma-1) = 2\gamma - 1.$$

Portanto, fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 2\gamma - 1$, temos

$$1 \leq \frac{\Phi_2''(t)t}{\Phi_2'(t)} \leq 2\gamma - 1, \quad t > 0.$$

(iii) $\Phi_3(t) = t^p \ln(1+t)$, $1 < p_0 < p < N-1$, onde $p_0 := \dfrac{-1+\sqrt{1+4N}}{2}$.

Em [36], também é mostrado que Φ_3 verifica (ϕ_1) e (ϕ_2), com $l = p$ e $m = p+1$. Verificaremos agora a condição (ϕ_3). Para isto, dado $t > 0$, observe que

- $\Phi_3'(t) = t^{p-1}\left(\dfrac{p(1+t)\ln(1+t)+t}{1+t}\right)$,

- $\Phi_3''(t) = t^{p-2}\Big(\dfrac{p(p-1)(1+t)^2\ln(1+t) + 2pt(1+t) - t^2}{(1+t)^2}\Big).$

Daí, a função

$$\frac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)} = \frac{2p(1+t)t - t^2 + p(p-1)(1+t)^2\ln(1+t)}{(1+t)(t+p(1+t)\ln(1+t))}$$

é decrescente em $(0,+\infty)$. Por outro lado, segue da Regra de L-Hôspital que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{2p+4pt-2t+2p(p-1)(1+t)\ln(1+t)+p(p-1)(1+t)}{t+p(1+t)\ln(1+t)+(1+t)(1+p\ln(1+t)+p)}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{4p-2+3p(p-1)+2p(p-1)\ln(1+t)}{2+3p+2p\ln(1+t)}\\
&= p-1 \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{2p+p(p-1)}{1+p} = p. \qquad (3.4)$$

Uma vez que $\dfrac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)}$ é decrescente em $(0,+\infty)$, temos de (3.3) e (3.4) que

$$p-1 \le \frac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)} \le p, \quad t>0.$$

Portanto, basta considerar $a_0 = p-1$ e $a_1 = p$.

(iv) $\Phi_4(t) = \displaystyle\int_0^{|t|} s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^\beta ds$, $0\le\alpha\le1$ e $0\le\beta<N-2+\alpha$.

Inicialmente, destacamos que a prova na qual Φ_4 verifica as condições $(\phi_1)-(\phi_3)$ não é encontrada na literatura.

Observe que

- $senh^{-1}t = \ln(t+\sqrt{t^2+1})$;

- $(senh^{-1}t)' = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$

Afirmação 3.3. Φ_4 *satisfaz* (ϕ_1).

Ora,
$$\phi(t)=\frac{\Phi_4'(t)}{t}=t^{-\alpha}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta}>0,\quad t>0$$
e
$$\phi^{'}(t)=-\alpha t^{-\alpha-1}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta}+t^{-\alpha}\beta(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta-1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\quad t>0.$$
Assim, $\phi\in C^1(0,+\infty)$ e para $t>0$
$$(\phi(t)t)^{'}=(1-\alpha)t^{-\alpha}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta}+\frac{t^{1-\alpha}\beta(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta-1}}{\sqrt{t^2+1}}>0,$$
mostrando assim a Afirmação 3.3

Afirmação 3.4. Φ_4 *satisfaz* (ϕ_2) *e* (ϕ_3).

Primeiramente, veja que
$$\begin{aligned}\frac{\Phi_4''(t)t}{\Phi_4'(t)} &= \frac{(1-\alpha)t^{1-\alpha}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta}+\frac{t^{2-\alpha}\beta(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta-1}}{\sqrt{t^2+1}}}{t^{1-\alpha}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^{\beta}}\\ &= (1-\alpha)+\beta\frac{t}{\sqrt{t^2+1}\ln(t+\sqrt{t^2+1})}\\ &= \frac{(1-\alpha)(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))+\beta\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\ln(t+\sqrt{t^2+1})}\end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Phi_4''(t)t}{\Phi_4'(t)}\Big)^{'} &= \beta\Big(\frac{\sqrt{t^2+1}\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+1)}{(t^2+1)(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^2}\Big)\\ &= \frac{\beta}{(t^2+1)(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^2}\\ &\quad .\Big(\frac{(t^2+1)\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t^2\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}\Big)\\ &= \frac{\beta}{\sqrt{(t^2+1)^3}(\ln(t+\sqrt{t^2+1}))^2}(\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t\sqrt{t^2+1}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Afirmamos que $\frac{\Phi_4''(t)t}{\Phi_4'(t)}$ é decrescente em $(0,+\infty)$. De fato, definindo
$$\varphi(t):=\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t\sqrt{t^2+1},\quad t\in\mathbb{R},$$

tem-se

$$\varphi^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - \Big(\sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\Big) = \frac{-2t^2}{\sqrt{t^2+1}} < 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Usando (3.6) e o fato de que $\varphi(0) = 0$, segue-se que

$$\varphi(t) < 0, \text{ para } t > 0.$$

Deste modo,

$$\Big(\frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)}\Big)^{'} < 0, \text{ para } t > 0,$$

ou seja,

$$\frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)} \text{ é decrescente para } t > 0.$$

Agora, usando a regra de L-Hôspital, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1-\alpha}{\sqrt{t^2+1}} + \beta\Big(\frac{\sqrt{t^2+1}-\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\Big)}{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \Big((1-\alpha) + \beta\Big(\frac{1}{t^2+1}\Big)\Big) \\
&= 1-\alpha. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)} = 1-\alpha+\beta. \tag{3.8}$$

Então, da monotonicidade de $\frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)}$ em $(0, +\infty)$, (3.7) e (3.8),

$$1-\alpha \leq \frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)} \leq 1-\alpha+\beta, \text{ para } t > 0.$$

Consequentemente, tomando $a_0 = 1-\alpha$ e $a_1 = 1-\alpha+\beta$, obtemos

$$a_0 \leq \frac{\Phi_4^{''}(t)t}{\Phi_4^{'}(t)} \leq a_1, \text{ para } t > 0,$$

mostrando que Φ_4 cumpre (ϕ_3). Segue da Observação 3.1 que Φ_4 cumpre (ϕ_2).

Lema 3.5. *Assumindo* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, sejam*

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$*. Então*

(i) $\xi_0(t)\Phi(\rho) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(t)\Phi(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(ii) $\xi_2(t)\widetilde{\Phi}(\rho) \leq \widetilde{\Phi}(\rho t) \leq \xi_3(t)\widetilde{\Phi}(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(iii) $\xi_0(| u |_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(| u |)dx \leq \xi_1(| u |_\Phi), \quad u \in L_\Phi(\Omega),$

(iv) $\xi_2(| u |_{\widetilde{\Phi}}) \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(| u |)dx \leq \xi_3(| u |_{\widetilde{\Phi}}), \quad u \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$

Lema 3.6. *Seja* $\varphi(t) = \phi(t)t$*, para* $t > 0$*. Assumindo* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, temos*

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. De (ϕ_2),

$$l \leq \frac{s\varphi(s)}{\Phi(s)} \leq m, \text{ para } s > 0.$$

Fazendo $s = \varphi^{-1}(t)$, obtemos

$$l\Phi(\varphi^{-1}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m\Phi(\varphi^{-1}(t)), \quad t > 0.$$

Além disso, de (1.45),

$$l(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)),$$

e, portanto,

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0.$$

□

Observação 3.7. *Segue da Observação 1.52 que*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(s)ds.$$

Deste modo, (3.9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\widetilde{\Phi}'(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0.$$

Lema 3.8. *Assumindo* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, então* Φ *e* $\widetilde{\Phi}$ *cumprem a condição* Δ_2*.*

Observação 3.9. *A partir do Lema 3.8, podemos concluir que*

- $E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ *(ver Corolário 1.42);*
- $L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ *(ver Teorema 1.63);*
- $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *é reflexivo (ver Observação 2.21).*

3.2 O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados para o funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 3.10. *Se* Φ *satisfaz* (ϕ_1) *e* (ϕ_2)*, então* $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$ *e para cada* $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$*,*

$$\langle P^{'}(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla\varphi dx, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração. Para demonstrarmos este resultado, verificaremos as seguintes afirmações:

Afirmação 3.11. *P é contínuo em* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$*.*

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue do Lema 3.5 (iii) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \xi_1(|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi) \to 0. \tag{3.10}$$

E pela Proposição 1.18, existe $C > 0$ tal que

$$|\nabla u_n - \nabla u|_1 \leq C\, |\nabla u_n - \nabla u|_\Phi \to 0,$$

donde

$$||\nabla u_n| - |\nabla u|| \leq |\nabla u_n - \nabla u| \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.11}$$

a menos de subsequência. De (3.10), segue do Teorema A.2 (ver Apêndice A), que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.12}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência. Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned}
\mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid &\leq \Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid) \\
&\leq \Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid + \mid \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid) \\
&\leq K[\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)] + \Phi(\mid \nabla u \mid) \\
&\leq K(\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)),
\end{aligned}$$

onde $K > 0$. Donde segue-se, de (3.12), que

$$\mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid u \mid) \mid \leq K\eta + K\Phi(\mid \nabla u \mid) \in L^1(\Omega). \tag{3.13}$$

De (3.11) e (3.13), temos pelo Teorema A.1 (ver Apêndice A)

$$\int_\Omega \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid) dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx,$$

a menos de subsequência. Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ admite subsequência $\{u_{n_{k_j}}\}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_{k_j}} \mid) dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx.$$

Daí

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid) dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx,$$

mostrando a continuidade de P sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Afirmação 3.12. *P admite derivada de Gâteaux.*

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(\mid x \mid), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(w) = \begin{cases} w_i \phi(\mid w \mid), \text{ se } w \neq 0; \\ 0, \text{ se } w = 0. \end{cases}$$

Assim, dados $u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(\mid \nabla u + t\nabla\varphi \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)}{t} &= \phi(\mid \nabla u \mid) \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\
&= \phi(\mid \nabla u \mid) \nabla u \nabla \varphi. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Fixados $x \in \Omega$ e $|\, t \,| \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Phi(|\, \nabla u + t\nabla\varphi \,|) - \Phi(|\, \nabla u \,|)}{t} \right| &= \frac{1}{|\, t \,|} \left| \frac{\partial f}{\partial(t\nabla\varphi)}(\nabla u + t\theta_x \nabla\varphi) \right| \\
&= |\, \phi(|\, \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \,|)(\nabla u + t\theta_x\nabla\varphi)\nabla\varphi \,| \\
&\leq \phi(|\, \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \,|) \,|\, \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \,||\, \nabla\varphi \,| \,.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$|\, \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \,| \leq |\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos de (ϕ_2)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Phi(|\, \nabla u + t\nabla\varphi \,|) - \Phi(|\, \nabla u \,|)}{t} \right| &\leq \phi(|\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|)(|\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|) \,|\, \nabla\varphi \,| \\
&\leq \phi(|\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|)(|\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|)^2 \\
&\leq m\Phi(|\, \nabla u \,| + |\, \nabla\varphi \,|) \in L^1(\Omega). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Por (3.14), (3.15) e pelo Teorema A.1 (ver Apêndice A),

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\Phi(|\, \nabla u + t\nabla\varphi \,|) - \Phi(|\, \nabla u \,|)}{t} dx = \int_\Omega \phi(|\, \nabla u \,|)\nabla u \nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 3.12.

Afirmação 3.13. *Para cada* $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *fixado,* $\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}$ *é contínua sobre* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

De fato, considere $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue da Desigualdade de Holder que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial P}{\partial\varphi}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial\varphi}(u) \right| &= |\int_\Omega (\phi(|\, \nabla u_n \,|)\nabla u_n - \phi(|\, \nabla u \,|)\nabla u)\nabla\varphi dx \,| \\
&\leq 2 \,|\, \nabla\varphi \,|_\Phi |\, \phi(|\, \nabla u_n \,|)\nabla u_n - \phi(|\, \nabla u \,|)\nabla u \,|_{\widetilde{\Phi}} \,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando os Lemas 1.57 (a) e 3.5 (i), obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(|\, \phi(|\, \nabla u_n \,|)\nabla u_n - \phi(|\, \nabla u \,|)\nabla u \,|) &\leq \widetilde{\Phi}(\phi(|\, \nabla u_n \,|) \,|\, \nabla u_n \,| \\
&\quad + \phi(|\, \nabla u \,|) \,|\, \nabla u \,|) \\
&\leq K[\widetilde{\Phi}(\phi(|\, \nabla u_n \,|) \,|\, \nabla u_n \,|) \\
&\quad + \widetilde{\Phi}(\phi(|\, \nabla u \,|) \,|\, \nabla u \,|)] \\
&\leq K[\Phi(2 \,|\, \nabla u_n \,|) + \Phi(2 \,|\, \nabla u \,|)] \\
&\leq K[\Phi(|\, \nabla u_n \,|) + \Phi(|\, \nabla u \,|)] \\
&\leq K[\Phi(|\, \nabla u_n \,|) + \Phi(|\, \nabla u \,|)], \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

onde $K > 0$. Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \to 0,$$

e assim, considerando uma subsequência se necessário, existe $\eta \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|\nabla u_n - \nabla u| \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{3.17}$$

e

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \le \eta \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.18}$$

De (3.16) e (3.18) obtemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|) &\le K[\Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|)] \\
&\le K[(\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) + \Phi(|\nabla u|))] \\
&\le K[\eta + \Phi(|\nabla u|)] \in L^1(\Omega). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Além disso, de (3.17)

$$\widetilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20), temos pelo Teorema A.1 (ver Apêndice A),

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|)dx \to 0. \tag{3.21}$$

Agora, como $\widetilde{\Phi}$ satisfaz Δ_2, então

$$|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} \to 0,$$

donde segue-se que

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \varphi}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial \varphi}(u)\right| \to 0.$$

Das Afirmações 3.11, 3.12 e 3.13, segue do Teorema A.33 (ver Apêndice A) que $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle P'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx, \text{ para } u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

$\square$

Proposição 3.14. *Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P^{'}(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} P(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty}[P(u) + \langle P^{'}(u), u_n - u\rangle] \\
&= P(u) + \liminf_{n\to+\infty}\langle P^{'}(u), u_n - u\rangle \\
&= P(u),
\end{aligned}$$

mostrando que P é fracamente semicontínuo inferiormente. □

Proposição 3.15. *Assumindo que Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), tem-se que P é coercivo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Demonstração. Decorre do Lema 3.5 (iii) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq \xi_0(|\nabla u|_\Phi), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

e, portanto,

$$P(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \to +\infty, \text{ quando } |\nabla u|_\Phi \to +\infty.$$

□

Lema 3.16. *Seja $\beta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ uma função contínua satisfazendo*

(i) $\lim_{s\to 0} s\beta(s) = 0$ *e* $\lim_{s\to\infty} s\beta(s) = \infty$*;*

(ii) $s \mapsto s\beta(s)$ *é estritamente crescente em* $(0,\infty)$*.*

Então

$$\langle \beta(|x|)x - \beta(|y|)y, x - y\rangle > 0,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$*, com* $x \neq y$*.*

Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz vemos que

$$\begin{aligned}
\langle \beta(|x|)x - \beta(|y|)y, x - y\rangle &= \langle \beta(|x|)x, x\rangle - \langle \beta(|x|)x, y\rangle + \langle \beta(|y|)y, y\rangle \\
&\quad -\langle \beta(|y|)y, x\rangle \\
&= \beta(|x|)|x|^2 - \beta(|x|)\langle x, y\rangle + \beta(|y|)|y|^2 \\
&\quad -\beta(|y|)\langle y, x\rangle \\
&\geq \beta(|x|)|x|^2 - \beta(|x|)|x||y| + \beta(|y|)|y|^2 \\
&\quad -\beta(|y|)|y||x| \\
&= \beta(|x|)|x|(|x| - |y|) \\
&\quad +\beta(|y|)|y|(|y| - |x|),
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$. Se $| x |<| y |$, segue de (ii), que

$$\begin{aligned} \langle \beta(| x |)x - \beta(| y |)y, x-y \rangle &> \beta(| x |) | x | (| x | - | y |) \\ &\quad + \beta(| x |) | x | (| y | - | x |) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, se $| y |<| x |$, temos

$$\langle \beta(| x |)x - \beta(| y |)y, x-y \rangle > 0.$$

Agora, se $| y |=| x |$ com $x \neq y$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \beta(| x |)x - \beta(| y |)y, x-y \rangle &= \langle \beta(| x |)x - \beta(| x |)y, x-y \rangle \\ &= \beta(| x |) | x-y |^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso,

$$\langle \beta(| x |)x - \beta(| y |)y, x-y \rangle > 0,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$. □

Proposição 3.17. *O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,*

$$\langle P'(u) - P'(v), u-v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Demonstração. Sejam $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tais que $u \neq v$. Assim, considerando

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; u(x) \neq v(x)\},$$

e observando que $f(s) = \phi(| s |)$, $s \in \mathbb{R}$, cumpre as condições (i) e (ii) do Lema 3.16 (ver (ϕ_1) e (ϕ_2)), temos

$$\langle \phi(| \nabla u |)\nabla u - \phi(| \nabla v |)\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle > 0 \text{ em } \Omega_0,$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} \langle P'(u) - P'(v), u-v \rangle &= \int_\Omega \langle \phi(| \nabla u |)\nabla u - \phi(| \nabla v |)\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle dx \\ &\geq \int_{\Omega_0} \langle \phi(| \nabla u |)\nabla u - \phi(| \nabla v |)\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle dx > 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.18. *Se* Φ *satisfaz* (ϕ_1) *e* (ϕ_2), *então* $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ *é pseudomonotônico (ver definição em Apêndice A).*

Demonstração. Já sabemos que P' é contínua em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Além disso, pela Proposição 3.17, P' é estritamente monotônico. Portanto, segue do Lema A.36 (a) (ver Apêndice A) que P' é pseudomonotônico. □

Lema 3.19. *Sejam* $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *um operador estritamente monotônico e* $\{v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ *uma sequência verificando*

$$(\beta(v_n) - \beta(v))(v_n - v) \to 0, \ \ em\ \mathbb{R},$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$. *Então,*

$$v_n \to v \ em\ \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Ver Dal Maso e Murat [8]. □

Lema 3.20. *Sejam* $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *e* $\{u_n\}$ *uma sequência limitada de* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *verificando*

$$\int_\Omega (\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

Então,

$$u_n \to u \ em\ W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração. Considerando $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, uma aplicação dada por

$$\beta(x) = \phi(\mid \nabla x \mid)\nabla x, x \in \mathbb{R}^N,$$

tem-se da Proposição 3.17, que β é estritamente monotônico. Deste fato, uma vez que

$$(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ em } L^1(\Omega) \tag{3.22}$$

temos

$$(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde segue-se, pelo Lema 3.19, que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.23}$$

Agora, vejamos os seguintes fatos:

(i) $\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) \leq C(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2), n \in \mathbb{N}$.

De fato, usando (ϕ_2), a convexidade e a monotonicidade em $\mathbb{R}_+$ de Φ, existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) &\leq K(\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)) \\ &\leq \frac{K}{l}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2).\end{aligned}$$

(ii) $\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) \to 0$ q.t.p. em Ω.

Segue de (3.23).

(iii) $C(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2) \in L^1(\Omega)$.

Basta usar (ϕ_2).

(iv) $\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 \to \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2$ q.t.p. em Ω.

Segue de (3.23).

(v) $\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx \to \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx$.

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx &= \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla u dx. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é limitada, temos para cada $i \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)dx &\leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid)dx \\ &\leq K_1 \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \\ &\leq C, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Desse modo, a sequência $\left\{\phi(\mid \nabla u_n \mid)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}$ é limitada em $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, para cada $i \in \{1, ..., N\}$. Além disso, de (3.23),

$$\phi(\mid \nabla u_n(x) \mid)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(\mid \nabla u(x) \mid)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Destes fatos, usando Brézis e Lieb para N-funções (ver Lema A.32, em Apêndice A),

$$\phi(\mid \nabla u_n \mid)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \phi(\mid \nabla u \mid)\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

consequentemente

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \to \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u \mid)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx. \tag{3.25}$$

Afirmamos agora que

$$\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

De fato, utilizando (3.22) tem-se que

$$\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx + o_n(1). \tag{3.26}$$

Por outro lado, desde que

$$\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\} \text{ é limitado em } L_{\Phi}(\Omega)$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_{\Phi}(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ em } L_{\Phi}(\Omega).$$

Deste fato,

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u \mid)\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i}dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega}\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0. \tag{3.27}$$

De (3.26) e (3.27),

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0, \tag{3.28}$$

como queríamos provar.

Agora, utilizando (3.24), (3.25) e (3.28),

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid^2 dx \to \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx,$$

mostrando assim a afirmação (v).

De (i)-(v), segue do Teorema Generalizado de Lebesgue (ver Teorema A.38, em Apêndice A) que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid)dx \to 0,$$

donde, segue-se da Proposição 1.28, que

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

□

Proposição 3.21. *Seja Φ uma função verificando (ϕ_1) e (ϕ_2). Se*

- $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *e*
- $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle P'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0,$

então

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Neste caso, diz-se que P' é um operador do tipo (S_+).

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty}\langle P'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0.$$

Utilizando a Proposição 3.17,

$$\langle P'(u_n)-P'(u), u_n-u\rangle = \int_\Omega \langle \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle dx \geq 0,$$

daí,

$$\langle P^{'}(u), u_n - u\rangle \leq \langle P(u_n), u_n - u\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao $\liminf$ de $n \to +\infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = \liminf_{n\to\infty}\langle P^{'}(u), u_n - u\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty}\langle P^{'}(u_n), u_n - u\rangle \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\langle P^{'}(u_n), u_n - u\rangle \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

consequentemente

$$\lim_{n\to\infty}\langle P^{'}(u_n), u_n - u\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u\rangle \to 0 \text{ em } L^1(\Omega). \tag{3.29}$$

Ora, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\langle \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \to 0 \text{ em } L^1(\Omega),$$

daí, segue de (3.29) que

$$\langle \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \to 0 \text{ em } L^1(\Omega).$$

Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, segue do Teorema A.39 (ver Apêndice A), que $\{u_n\}$ é limitada. Portanto, pelo Lema 3.20, temos

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

□

3.3 Propriedades do operador

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades sobre o operador Φ-Laplaciano definido por

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u), u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Dada uma função $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) = h, & \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

se satisfaz

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla\varphi dx = \langle h, \varphi\rangle \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde $\langle ., .\rangle$ denota a dualidade entre os espaços $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ e $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Definição 3.22. *Sejam* $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. *Dizemos que*

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega,$$

se

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, *com* $\varphi \geq 0$.

Lema 3.23. *Sejam* $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *em* Ω. *Temos:*

(i) *se* $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ *e* $u \leq v$ *na* $\partial\Omega$ *(ou seja,* $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$*), então* $u \leq v$ *em* Ω*;*

(ii) *assumindo que as hipóteses do item anterior ocorrem, se* $u, v \in C(\overline{\Omega})$ *e* $S = \{x \in \Omega; u(x) = v(x)\}$ *é um subconjunto compacto de* Ω*, então* $S = \emptyset$.

Demonstração. **Verificação de (i):** Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla (u-v)^+ dx.$$

Dessa forma, considerando $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u(x) - v(x) \geq 0\}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u &- \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)\rangle dx \\ &= \int_\Omega \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)^+\rangle dx \leq 0\end{aligned}$$

Segue da Proposição 3.17 que

$$\nabla(u-v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

donde segue-se que

$$\nabla(u-v)^+ = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, usando o fato de que $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, obtemos que

$$(u-v)^+ = 0 \text{ em } \Omega,$$

isto é,

$$u \leq v, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Verificação de (ii): Suponha por contradição que $S \neq \emptyset$. Como $dist(S, \partial\Omega) > 0$, existe $\Omega_2 \subset \Omega$, tal que

$$S \subsetneq \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega.$$

Pelo item (i) provado anteriormente e pela definição de S, segue que $u < v$ em $\Omega \setminus S$. Em particular, $u < v$ na $\partial\Omega_2$. Desde que, $u, v \in C(\overline{\Omega})$, podemos definir:

$$\varepsilon := -\max_{x \in \partial\Omega_2} \{u(x) - v(x)\},$$

donde segue-se que

$$u \leq v - \varepsilon \text{ em } \partial\Omega_2.$$

Por outro lado, desde que

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v = -\Delta_\Phi(v - \varepsilon) \text{ em } \Omega_2,$$

obtemos, pelo item (i), que

$$u \leq v - \varepsilon < v \text{ em } \Omega_2,$$

o que contradiz o fato de $u = v$ em $S \subset \Omega_2$. □

Lema 3.24. *O operador $-\Delta_\Phi(.)$ é um homeomorfismo de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.*

Demonstração. Utilizando o Lema 1.57 (a) e o fato de $\Phi \in \Delta_2$, existe $k > 0$ tal que

$$\widetilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t) \leq k\Phi(t), \quad t \geq 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx \leq k \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \tag{3.31}$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Afirmamos que

$$|\phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.$$

De fato, para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ não identicamente nulo vale que

$$\frac{\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx}{k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx} \leq 1 \tag{3.32}$$

- Se $k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq 1$, tem-se do Lema 1.12 (a),

$$\frac{\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx}{k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx} \geq \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx,$$

donde segue-se, de (3.31), que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx \leq 1$$

implicando que

$$|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}} \leq k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx.$$

- Se $k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx < 1$.
Segue de (3.31),

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{1}\Big)dx < 1,$$

logo

$$|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}} \leq 1.$$

Portanto,

$$|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.$$

Agora, usando a desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla v dx\right| &\leq 2.\,|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}}\,.\,|\nabla v|_\Phi \\ &\leq 2.\max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.\,|\nabla v|_\Phi,\end{aligned}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Isto mostra que $\Delta_\Phi u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando as Proposições 3.10, 3.15 e 3.17, obtemos que o operador é contínuo, coercivo e monotônico em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e daí segue do Teorema de Browder-Minty(ver Teorema A.8, em Apêndice A) que, para $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possui única solução. Dessa maneira, fica bem definido o operador inverso de $-\Delta_\Phi$, dado por

$$\begin{array}{rcl}(-\Delta_\Phi)^{-1} : W_0^{1,\Phi}(\Omega)^* & \to & W_0^{1,\Phi}(\Omega) \\ h & \mapsto & (-\Delta_\Phi)^{-1}h = u.\end{array}$$

Agora, provaremos a continuidade do operador inverso. Tome $h_n, h_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $h_n \neq h_0$ e $h_n \to h_0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, e $u_n, u_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ soluções de

$$-div(\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n) = h_n,$$

e

$$-div(\phi(\mid \nabla u_0 \mid)\nabla u_0) = h_0,$$

respectivamente.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. De fato, caso contrário, existiria uma subsequência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que $\mid \nabla u_{n_k} \mid_\Phi \to \infty$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_k} \mid)dx &\leq \int_\Omega \mid \nabla u_{n_k} \mid^2 \phi(\mid \nabla u_{n_k} \mid)dx \\ &= \langle h_{n_k}, u_{n_k} \rangle \\ &\leq \|h_{n_k}\|_* \mid \nabla u_{n_k} \mid_\Phi,\end{aligned}$$

donde segue-se, pelo Lema 3.5

$$\begin{aligned}\|h_{n_k}\|_* &\geq \frac{\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_k} \mid)dx}{\mid \nabla u_{n_k} \mid_\Phi} \\ &\geq \frac{\xi_0(\mid \nabla u_{n_k} \mid_\Phi)}{\mid \nabla u_{n_k} \mid_\Phi} \to \infty,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, já que $\{h_{n_k}\}$ é convergente, e portanto, limitada. Logo, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u_0 \mid)\nabla u_0).(\nabla u_n - \nabla u_0)dx \\ &\qquad = \langle h_n - h_0, u_n - u_0 \rangle \to 0, \qquad \text{quando } n \to \infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Holder e o Lema 3.20, temos

$$u_n \to u_0 \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

$\square$

Em [26] e [27], Lieberman mostrou resultados de regularidade para soluções fracas de problemas de valores de contorno do tipo:

$$\begin{cases} divA(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0, \text{ em } \Omega \\ u = \varphi, \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando seus resultados para o operador $-\Delta_\Phi u$, temos o seguinte Lema.

Lema 3.25. *Seja $h \in L^\infty(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução fraca de (3.30). Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$ dependente de a_0, a_1, l e m. Além disso, existe uma constante $K = K(\| h \|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ tal que*

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K.$$

Essa constante K tende a 0 quando $\| h \|_{L^\infty(\Omega)}$ se aproxima de 0.

3.4 Princípio do máximo

Nesta seção, apresentaremos um resultado qualitativo, conhecido como Princípio do Máximo de Vasquez, para supersoluções. Para isto, verificaremos o seguinte lema:

Lema 3.26. *Para quaisquer $k_1, r_1, v_1 > 0$ existe uma única solução $v = v(k_1, r_1, v_1) \in C^2$ em $[0, r_1]$ do problema*

$$(P_1) \begin{cases} v^{''} = k_1 v^{'}, & 0 < r < r_1 \\ v(0) = 0, & v(r_1) = v_1, \end{cases}$$

e $v, v^{'}, v^{''} \geq 0$. Além disso, $v^{'}(0) > 0$ e $v_1 > v > 0$ em $(0, r_1)$.

Demonstração. Inicialmente, assuma a existência de uma solução $v : [0, r_1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 para (P_1). Fazendo$u = v^{'}$, tem-se que

$$\begin{aligned} u^{'} = k_1 u \quad &\Rightarrow \quad u^{'} - k_1 u = 0 \\ &\Rightarrow \quad e^{-k_1 t} u^{'} - e^{-k_1 t} k_1 u = 0 \\ &\Rightarrow \quad (e^{-k_1 t}.u)^{'} = 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t, com $t \in (0, r_1)$, segue que

$$\begin{aligned} e^{-k_1 t} u(t) - e^{-k_1 0} u(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{-k_1 t} u(t) = u(0) \\ &\Rightarrow \quad u(t) = e^{k_1 t} u(0) \\ &\Rightarrow \quad v^{'}(t) = e^{k_1 t} v^{'}(0), \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$v(t) - v(0) = \int_0^t e^{k_1 s} v^{'}(0) ds, \quad t \in (0, r_1),$$

e assim

$$v(t) = \frac{v^{'}(0)}{k_1}(e^{k_1 t} - 1), \quad t \in (0, r_1). \tag{3.33}$$

Visto isto, defina

- $C_0 := \dfrac{e^{k_1 r_1} - 1}{r_1}$,
- $\widetilde{v}(t) := \dfrac{v_1}{C_0} \dfrac{1}{k_1}(e^{k_1 t} - 1)$, $t \in [0, r_1]$.

Note que

- $\widetilde{v} \in C^2([0, r_1])$ e $\widetilde{v}^{''} = k_1 \widetilde{v}^{'}$ em $[0, r_1]$,
- $\widetilde{v}(r_1) = v_1$,
- $\widetilde{v}(0) = 0$,
- $v, v^{'}, v^{''} \geq 0$ em $[0, r_1]$,
- $\widetilde{v}^{'}(0) > 0$ e $v_1 > v > 0$ em $(0, r_1)$.

Para finalizarmos a demonstração deste lema, basta mostrarmos a unicidade do problema (P_1). Para isto, considere u e v soluções de (P_1) e tome $w = u - v$. Daí,

$$w^{''} = (u - v)^{''} = u^{''} - v^{''} = k_1 u^{'} - k_1 v^{'} = k_1 w^{'},$$

o que implica, de (3.33),

$$w(t) = \frac{w^{'}(0)}{k_1}(e^{k_1 t} - 1), \quad t \in [0, r_1]. \tag{3.34}$$

Mas, como $w(r_1) = u(r_1) - v(r_1) = 0$, temos

$$w(r_1) = \frac{w^{'}(0)}{k_1}(e^{k_1 r_1} - 1),$$

donde

$$w^{'}(0) = 0. \tag{3.35}$$

De (3.34) e (3.35),

$$w(t) = 0, \quad t \in [0, r_1],$$

ou seja,

$$u(t) = v(t), \quad t \in [0, r_1],$$

mostrando a unicidade da solução de (P_1). $\square$

Teorema 3.27. *(Princípio do máximo estrito de Vasquez)*

Sejam Ω um domínio conexo e limitado, Φ uma N-função satisfazendo (ϕ_1) e (ϕ_2) e $u \in C^1(\Omega)$ uma função não-negativa tal que

$$-\Delta_\Phi u \geq 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.36}$$

Se u não é identicamente nula, então u é positiva em Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$, para um $x_0 \in \partial\Omega$, tal que $u(x_0) = 0$ e satisfaz a condição da esfera interior em x_0, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é a normal interior a $\partial\Omega$ em x_0.

Demonstração. Seja $u \in C^1(\Omega)$ não negativa tal que

$$-\Delta_\Phi u \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Suponha por contradição, que u se anula em algum ponto $x_0 \in \Omega$, mas não é identicamente nula. Deste modo, tome uma bola de centro x_1 e raio R, $B = B_R(x_1)$, tal que $\overline{B} \subset \Omega$, $x_0 \in \partial B$ e $u > 0$ em B.

Agora, considere o anel

$$G = \{x \in \mathbb{R}^N; \frac{R}{2} <| x - x_1 |< R\} \subset \Omega,$$

e note que $u > 0$ em G (ver Figura 3.1).

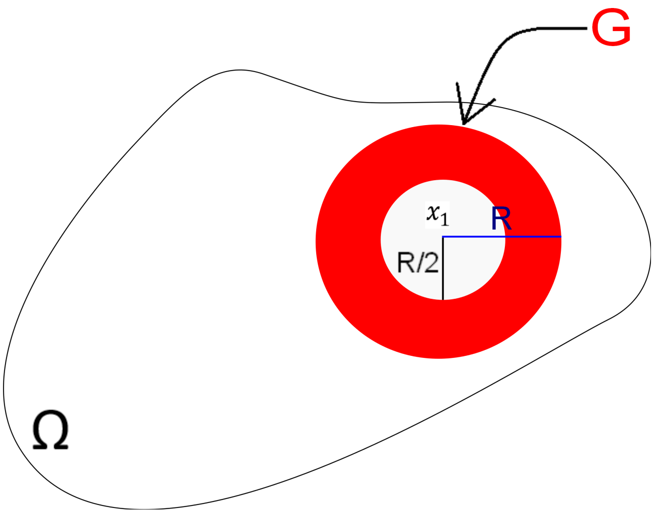

Figura 3.1: Anel G sem interseção com $\partial\Omega$.

Fazendo

- $v_1 = \inf\{u(x); \mid x - x_1 \mid = \frac{R}{2}\} > 0$,
- $r_1 = \frac{R}{2}$,
- $k_1 = \frac{4(N-1)}{R}$,

tome $v = v(k_1, r_1, v_1) \in C^2$ solução de (P_1) dado no Lema 3.26 e defina

$$\hat{u}(x) = v(R- \mid x - x_1 \mid), \quad x \in G.$$

Dessa forma, considerando $x_1 = 0$, por simplicidade nos cálculos, para cada $i \in \{1, ..., N\}$, observe que

- $\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} = -v^{'}(R- \mid x \mid)\dfrac{x_i}{\mid x \mid}$;
- $\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} = v^{''}(R- \mid x \mid)\dfrac{x_i^2}{\mid x \mid^2} - v^{'}(R- \mid x \mid)\dfrac{\mid x \mid^2 - x_i^2}{\mid x \mid^3}$;
- $\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_j} = v^{''}(R- \mid x \mid)\dfrac{x_i x_j}{\mid x \mid^2} + v^{'}(R- \mid x \mid)\dfrac{x_i x_j}{\mid x \mid^3}$, para $i \neq j$ e $j \in \{1, ..., N\}$.

Além disso, como

$$\mid \nabla \hat{u} \mid^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} v^{'}(R- \mid x \mid)^2 \frac{x_i^2}{\mid x \mid^2} = v^{'}(R- \mid x \mid)^2,$$

obtemos que

$$| \nabla \hat{u} |= v^{'}(R- | x |), \quad x \in G. \tag{3.37}$$

Logo, dado $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi}\hat{u} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\phi(| \nabla \hat{u} |)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(| \nabla \hat{u} |))\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} + \phi(| \nabla \hat{u} |)\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\phi^{'}(| \nabla \hat{u} |)}{| \nabla \hat{u} |}\Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \left[\phi(| \nabla \hat{u} |)\Big(v^{''}(R- | x |)\frac{x_i^2}{| x |^2} - v^{'}(R- | x |)\frac{| x |^2 - x_i^2}{| x |^3}\Big)\right] \\
&= \frac{\phi^{'}(| \nabla \hat{u} |)}{| \nabla \hat{u} |}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\right] \\
&\quad + \phi(| \nabla \hat{u} |)\Big(v^{''}(R- | x |) - v^{'}(R- | x |)\frac{(N-1) | x |^2}{| x |^3}\Big) \\
&= \frac{\phi^{'}(| \nabla \hat{u} |)}{| \nabla \hat{u} |}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=1, i\neq j}^{N}\Big(v^{'}(R- | x |)^2\frac{x_i x_j}{| x |^2}\Big(v^{''}(R- | x |)\frac{x_i x_j}{| x |^2} + v^{'}(R- | x |)\frac{x_i x_j}{| x |^3}\Big)\Big) \\
&\quad + v^{'}(R- | x |)^2\frac{x_i^2}{| x |^2}\Big(v^{''}(R- | x |)\frac{x_i^2}{| x |^2} - v^{'}(R- | x |)\frac{| x |^2 - x_i^2}{| x |^3}\Big)\Big] \\
&\quad + \phi(| \nabla \hat{u} |)\Big(v^{''}(R- | x |) - v^{'}(R- | x |)\frac{(N-1)}{| x |}\Big) \\
&= \frac{\phi^{'}(| \nabla \hat{u} |)}{| \nabla \hat{u} |}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=1}^{N}\Big(v^{'}(R- | x |)^2 v^{''}(R- | x |)\frac{x_i^2 x_j^2}{| x |^4}\Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N}\Big(v^{'}(R- | x |)^3\frac{x_i^2 x_j^2}{| x |^5}\Big) - v^{'}(R- | x |)^3\frac{x_i^2}{| x |^3}\Big] \\
&\quad + \phi(| \nabla \hat{u} |)\Big(v^{''}(R- | x |) - v^{'}(R- | x |)\frac{(N-1)}{| x |}\Big) \\
&= \frac{\phi^{'}(| \nabla \hat{u} |)}{| \nabla \hat{u} |}\Big(v^{'}(R- | x |)^2 v^{''}(R- | x |) + \frac{v^{'}(R- | x |)^3}{| x |} - \frac{v^{'}(R- | x |)^3}{| x |}\Big) \\
&\quad + \phi(| \nabla \hat{u} |)\Big(v^{''}(R- | x |) - v^{'}(R- | x |)\frac{(N-1)}{| x |}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\phi^{'}(\mid \nabla\hat{u} \mid)}{\mid \nabla\hat{u} \mid}(v^{'}(R- \mid x \mid)^2 v^{''}(R- \mid x \mid)) \\
&\quad +\phi(\mid \nabla\hat{u} \mid)\Big(v^{''}(R- \mid x \mid) - v^{'}(R- \mid x \mid)\frac{(N-1)}{\mid x \mid}\Big) \\
&= \frac{\phi^{'}(\mid \nabla\hat{u} \mid)}{\mid \nabla\hat{u} \mid}(k_1 v^{'}(R- \mid x \mid)^3) + \phi(\mid \nabla\hat{u} \mid)v^{'}(R- \mid x \mid)\Big(k_1 - \frac{(N-1)}{\mid x \mid}\Big). \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $\mid x \mid > \dfrac{R}{2}$, para todo $x \in G$,

$$\frac{N-1}{\mid x \mid} < \frac{2(N-1)}{R}, \text{ para todo } x \in G.$$

Assim, desde que $k_1 > \dfrac{2(N-1)}{R}$, segue de (3.38),

$$\Delta_\Phi \hat{u} \geq C\Big(\frac{\phi^{'}(\mid \nabla\hat{u} \mid)}{\mid \nabla\hat{u} \mid}(v^{'}(R- \mid x \mid)^3) + \phi(\mid \nabla\hat{u} \mid)v^{'}(R- \mid x \mid)\Big), \quad x \in G,$$

onde $C > 0$, implicando de (3.37),

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Phi \hat{u} &\geq C\Big(\frac{\phi^{'}(\mid \nabla\hat{u} \mid)}{\mid \nabla\hat{u} \mid} \mid \nabla\hat{u} \mid^3 + \phi(\mid \nabla\hat{u} \mid) \mid \nabla\hat{u} \mid\Big) \\
&= C\Big(\phi^{'}(\mid \nabla\hat{u} \mid) \mid \nabla\hat{u} \mid^2 + \phi(\mid \nabla\hat{u} \mid) \mid \nabla\hat{u} \mid\Big) \\
&= C \mid \nabla\hat{u} \mid \frac{d}{dt}\Big(\phi(t)t\Big)\Big|_{t=\mid\nabla\hat{u}\mid} \\
&> 0 \text{ em } G, \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

consequentemente,

$$-\Delta_\Phi \hat{u} \leq 0, \text{ em } G.$$

Segue de 3.36 que

$$-\Delta_\Phi \hat{u} \leq -\Delta_\Phi u, \text{ em } G. \qquad (3.40)$$

Agora, observe que para $x \in \partial G$,

$$\hat{u}(x) = v(R- \mid x \mid) = \begin{cases} v(0) = 0, \text{ se } & \mid x \mid = R, \\ v(\frac{R}{2}) = v(r_1) = v_1, \text{ se } & \mid x \mid = \frac{R}{2}, \end{cases}$$

deste modo

$$\hat{u}(x) \leq u(x), \quad x \in \partial G. \qquad (3.41)$$

De (3.40) e (3.41), pelo Lema 3.23 (i),

$$\hat{u}(x) \leq u(x) \quad x \in G.$$

Deste fato, dado $\lambda > 0$ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} u(x_0 - \lambda x_0) - u(x_0) &= u(x_0 - \lambda x_0) \\ &\geq \hat{u}((1-\lambda)x_0) \\ &= v(R- \mid (1-\lambda)x_0 \mid) \\ &= v(R - (1-\lambda) \mid x_0 \mid) \\ &= v(R - (1-\lambda)R) \\ &= v(\lambda R), \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}[u(x_0 - \lambda x_0) - u(x_0)] &\geq \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{v(\lambda R)}{h} \\ &= R. \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{v(\lambda R) - v(0)}{\lambda R - 0} \\ &= R.v^{'}(0) \\ &> 0, \end{aligned} \tag{3.42}$$

Por outro lado, como $u \geq 0$ em Ω, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{u(x_0 - \lambda e_i) - u(x_0)}{\lambda} \leq 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{u(x_0 - \lambda e_i) - u(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

para cada $i \in \{1, ..., N\}$, logo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad i \in \{1, ..., N\},$$

ou seja,

$$\nabla u(x_0) = 0.$$

contradizendo (3.42). Mostrando assim que $u > 0$ em Ω.

Agora, consideremos $x_0 \in \partial\Omega$ satisfazendo a condição da esfera interior e $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$. Mostraremos agora que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é a normal interior a $\partial\Omega$ em x_0. Para isso, usaremos um argumento semelhante ao feito anteriormente. Assumindo que $B_R(x_1)$ verifica a condição da esfera interior em x_0, tome $G := B_R(x_1) \setminus B_{\frac{R}{2}}(x_1)$, conforme ilustrado na Figura 3.2,

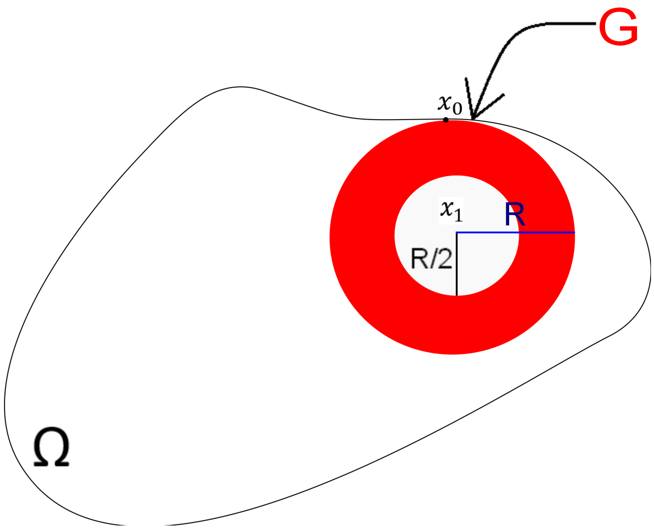

Figura 3.2: Anel G interceptando $\partial\Omega$.

A dificuldade técnica é que agora G intercepta $\partial\Omega$. Isto pode ser contornado movendo G ao longo de ν, substituindo x_1 por $x_1^\varepsilon = x_1 + \varepsilon\nu$ para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Fixando novamente,

- $k_1 = \dfrac{4(N-\varepsilon)}{R}$,
- $r_1 = \dfrac{R}{2}$,
- $v_1 = \inf\limits_{\partial B_{\frac{R}{2}}(x_1)} u(x)$,

considere $v = v(k_1, r_1, v_1)$ a função dada pelo Lema 3.26 e

$$\hat{u}(x-\varepsilon\nu) = v(R- \mid x - x_1 - \varepsilon\nu \mid), x \in G_\varepsilon,$$

onde $G_\varepsilon = B_R(x_1^\varepsilon) \setminus B_{\frac{R}{2}}(x_1^\varepsilon)$. A título de simplificação, assumiremos que $x_1 = 0$. Desta forma, segue de (3.39) que

$$\Delta_\Phi \hat{u}(x-\varepsilon\nu) \geq 0 \text{ em } G_\varepsilon,$$

passando ao limite de $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$\Delta_\Phi \hat{u}(x) \geq 0 \text{ em } G.$$

E assim,

$$-\Delta_\Phi \hat{u} \leq -\Delta_\Phi u \text{ em } G.$$

Uma vez que

$$\hat{u} \leq u \text{ em } \partial G,$$

temos do Lema 3.23 (i), que

$$\hat{u} \leq u \text{ em } G.$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\liminf_{h \to 0^+} \frac{u(x_0 + h\nu) - u(x_0)}{h} &\geq \liminf_{h \to 0^+} \frac{\hat{u}(x_0 + h\nu)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} v(R- \mid x_0 + h\nu \mid) \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v\Big(R- \mid x_0 + h\Big(\frac{-x_0}{|-x_0|}\Big) \mid \Big)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v\Big(R- \mid \Big(1 - \frac{h}{R}\Big)x_0 \mid \Big)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v\Big(R - \Big(1 - \frac{h}{R}\Big) \mid x_0 \mid \Big)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v\Big(R - \Big(1 - \frac{h}{R}\Big)R\Big)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v(h)}{h} \\
&= \liminf_{h \to 0^+} \frac{v(h) - v(0)}{h - 0} \\
&= v^{'}(0) > 0,
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{u(x_0 + h\nu) - u(x_0)}{h} > 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Usando o Lema 3.25 e o Teorema 3.27, obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.28. *Seja $h \in L^\infty(\Omega)$, $h \geq 0$ e $h \neq 0$. Então a solução $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de (3.30) é positiva em Ω.*

Apresentaremos agora uma aplicação do Princípio do Máximo de Vasquez, conhecida como Teorema de Tolksdorf.

Teorema 3.29. *Sejam* $\{h_i\}_{i=1}^2 \subset L^\infty(\Omega)$, *e* $\{u_i\}_{i=1}^2 \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *soluções de*

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u_i|)\nabla u_i) = h_i, & em \quad \Omega \\ u_i = 0, & em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $0 \leq h_1 \leq h_2$ *e o conjunto*

$$\Gamma = \{x \in \Omega; h_1(x) = h_2(x)\}$$

tem interior vazio, então

$$0 \leq u_1 < u_2 \ em\ \Omega$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} < 0 \ em\ \partial\Omega,$$

onde ν *denota a normal exterior unitária.*

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que existe um conjunto de medida positiva onde $h_2 > 0$. Com efeito, suponha por contradição que $h_2 = 0$ q.t.p. em Ω, daí $h_1 = 0$ q.t.p. em Ω e, portanto, $\Gamma = \Omega$, contradizendo o fato de Γ ter interior vazio.

Desse modo, u_2 não é identicamente nula. Além disso, como

$$0 \leq -\Delta_\Phi u_1 \leq -\Delta_\Phi u_2 \text{ em } \Omega,$$

obtemos do Lema 3.23 (i) que

$$u_2 \geq u_1 \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim, como $u_2 \geq 0$, com u_2 não identicamente nula, segue do Teorema 3.27 que

$$u_2(x) > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u_2(x)}{\partial \nu} < 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Considere agora

$$S = \{x \in \Omega; u_1(x) = u_2(x)\}$$

e suponha por contradição que $S \neq \emptyset$. Como $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$, então pelo Lema 3.25 obtemos que $u_1, u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Neste caso, segue do Lema 3.23 (ii) que S não é compacto. Contudo, S é relativamente fechado em Ω, já que $S = (u_2 - u_1)^{-1}(\{0\})$. Desse modo, S é da forma $S = \Omega \cap F$, onde F é um fechado de $\mathbb{R}^N$ que intersecta $\partial\Omega$ (do contrário, teríamos $F \subset \Omega$ e S seria fechado forte). Portanto, deve existir $x_0 \in \partial\Omega$ e $\{x_n\} \subset S \subset \Omega$ tal que $x_n \to x_0$. Pela continuidade de ∇u_1 e ∇u_2, temos

$$\nabla u_1(x_n) \to \nabla u_1(x_0)$$

e

$$\nabla u_2(x_n) \to \nabla u_2(x_0).$$

Uma vez que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ em S, segue que

$$\nabla u_1(x_0) = \nabla u_2(x_0)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x_0). \tag{3.43}$$

Tendo em vista que $u_2 - u_1 \geq 0$ em Ω, analisemos agora, os seguintes casos:

- Se $u_2 - u_1 \equiv 0$ em Ω, então

$$u_1 \equiv u_2 \text{ em } \Omega,$$

donde segue-se que

$$h_1 = h_2 \text{ em } \Omega,$$

contradizendo o fato de Γ ter interior vazio.

- Se $u_2 - u_1$ não é identicamente nulo em Ω, segue do Teorema 3.27,

$$u_2 - u_1 > 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

o que contradiz (3.43). Logo, $S = \emptyset$, o que implica

$$u_2 > u_1 \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Para completar a demonstração, basta mostrar que

$$0 > \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x) > \frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x), \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

Para isto, desde que

$$-\Delta_\Phi(u_2 - u_1) \geq 0 \text{ e } -\Delta_\Phi u_1 = h_1 \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

temos, pelo Teorema 3.27, que

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x) \text{ e } \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial \nu}(x) < 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega,$$

e, portanto,

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x) < \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x) < 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega,$$

como queríamos demonstrar. □

Capítulo 4

Existência de soluções positivas

Neste capítulo, sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, apresentaremos um resultado de não-existência, existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas quaselineares, dada por

$$(P_\lambda)\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

onde ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ (ver Capítulo 3) e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes condições:

(f_1) $f(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$;

(f_2) $f(x,t) \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t > 0$, e existe um aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que

$$f(x,t) > 0 \text{ para } x \in \Omega_0 \text{ e } t > 0;$$

(f_3) existe $C_0 > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq C_0\Phi(t) \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0;$$

(f_4) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)t}{\Phi(t)} = 0$ uniformemente em $x \in \Omega$.

4.1 Existência de uma solução positiva

Inicialmente, entendemos aqui como solução para o problema (P_λ), uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, que satisfaz a equação

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla\varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0 \tag{4.2}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Uma vez que estamos interessados em soluções positivas, assumiremos que

$$f(x,t) = 0, \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \leq 0.$$

Verificaremos agora, através do lema a seguir, a regularidade das soluções de (P_λ).

Lema 4.1. *Sejam ϕ e f satisfazendo $(\phi_1) - (\phi_3)$ e (f_3), respectivamente. Se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução de (P_λ) então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$. Além disso,*

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

para algum $d = d(\lambda, N, | u |_\Phi)$.

Demonstração. Sendo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ solução de (P_λ), temos

$$\int_\Omega \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2 \, dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u dx,$$

implicando de (f_3) que

$$\int_\Omega \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2 \, dx \leq C_0 \int_\Omega \Phi(| u |) dx. \tag{4.3}$$

Veja, também, que

$$\phi(| u |) | u || \nabla u | \leq \phi(| u |) | u |^2, \text{ para } | u | \geq | \nabla u |$$

e, de (ϕ_1),

$$\phi(| u |) | u || \nabla u | \leq \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2, \text{ para } | u | < | \nabla u | .$$

Daí,

$$\phi(| u |) | u || \nabla u | \leq \phi(| u |) | u |^2 + \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2, \text{ para todo } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{4.4}$$

Utilizando (4.4) e (1.44), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega | \nabla(\Phi(| u |)) | \, dx &= \int_\Omega \phi(| u |) | u || \nabla u | \, dx \\ &\leq \int_\Omega (\phi(| u |) | u |^2 + \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2) dx \\ &= \int_\Omega (\Phi(| u |) + \widetilde{\Phi}(\phi(| u |) | u |)) dx + \int_\Omega \phi(| \nabla u |) | \nabla u |^2 \, dx, \end{aligned}$$

donde, segue-se, de (4.3) e dos Lemas 1.57 (a) e 3.5 (i), que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + \int_\Omega \Phi(2 \mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_0 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \\
&\leq C_2 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\nu(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev (ver Teorema A.37, em Apêndice A) e de (4.5) que

$$\Big(\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^\nu dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \leq C_3.K \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx. \qquad (4.6)$$

Por outro lado, fixe $q > 1$, de sorte que $\Phi(\mid u \mid) \in L^q(\Omega)$. Considerando

$$\Phi_L(t) := \Phi(\min\{t, L\}), \quad L > 0,$$

defina $\varphi \equiv \Phi_L(\mid u \mid)^{q-1}u$. Neste caso,

$$\nabla\varphi = \psi_L(\mid u \mid)\nabla u,$$

onde

$$\psi_L(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{q-1} + (q-1)\Phi(t)^{q-2}\phi(t)t^2, & \text{se } \ 0 \leq t \leq L, \\ \Phi(L)^{q-1}, & \text{se } \ t > L. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Visto isto, usando (f_3) e o fato de $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx &= \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi_L(\mid u \mid)^{q-1}udx \\
&\leq \lambda C_0 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Por (ϕ_2), para $\mid u \mid\leq L$, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\geq \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\Phi(\mid u \mid) \\
&= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-1} \\
&= (1 + l(q-1))\Phi(\mid u \mid)^{q-1}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Assim, usando (4.4) e (4.7)-(4.9), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx &= q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi_L(\mid u \mid)^{q-1}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx \\
&\leq \frac{q}{C_4}\int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx \\
&\leq \frac{q}{C_4}\int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} (\psi_L(\mid u \mid)(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\quad +\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2))dx \\
&\leq \frac{q}{C_4}\int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 dx \\
&\quad +\frac{\lambda C_0 q}{C_4}\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

onde $C_4 = 1 + l(q-1)$. Além disso, de (ϕ_2), para $\mid u \mid\leq L$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 &= (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\leq (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)m\Phi(\mid u \mid)^{q-1})m\Phi(\mid u \mid) \\
&= (m + (q-1)m^2)\Phi(\mid u \mid)^q. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

De (4.10) e (4.11), obtemos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx \leq \Big(\frac{m + (q-1)m^2 + \lambda C_0}{1 + l(q-1)}\Big)q\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx. \qquad (4.12)$$

Afirmação 4.2. *Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que*

$$\frac{m + (q-1)m^2 + \lambda C_0}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2 + \lambda C_0}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

observamos que

- $\gamma(t) \to m + \lambda C_0$, quando $t \to 1^+$;
- $\gamma(t) \to \dfrac{m^2}{l}$, quando $t \to +\infty$;
- γ é contínua em $(1, +\infty)$.

Por estes fatos, γ é limitado em $(1, +\infty)$ e, consequentemente, existe $C > 0$, tal que

$$\gamma(t) = \frac{m + (q-1)m^2 + \lambda C_0}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad t > 1,$$

mostrando assim a Afirmação 4.2.

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big(\int_\Omega \Phi_L(| u |)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega | \nabla(\Phi_L(| u |)^q) | \, dx,$$

o que implica de (4.12) e da Afirmação 4.2,

$$\Big(\int_\Omega \Phi_L(| u |)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq \int_\Omega \Phi(| u |)^q dx,$$

onde $C > 0$ independe de q. Passando ao limite de $L \to \infty$, obtemos

$$\Big(\int_\Omega \Phi(| u |)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq. \int_\Omega \Phi(| u |)^q dx. \tag{4.13}$$

Multiplicando (4.13) por C^{N-1} e elevando posteriormente a $\dfrac{1}{q}$, temos

$$\Big(\int_\Omega \Phi(| u |)^{q\nu} C^N dx\Big)^{\frac{1}{q\nu}} \leq q^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega \Phi(| u |)^q C^N dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Fazendo $q = \nu^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, e usando um procedimento iterativo, obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\nu^{t+1}} \leq (\nu^t)^{\frac{1}{\nu^t}} \| \Phi(| u |) \|_{\nu^t}, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{4.14}$$

onde $\| \,.\, \|_q$ denota a norma usual de Lebesgue com a medida $C^N dx$. Logo,

$$\| \Phi(| u |) \|_{\nu^t} \leq \nu^{\sum_{j=0}^{t-1} \frac{j}{\nu^j}} \| \Phi(| u |) \|_1 \leq K_1(N) \| \Phi(| u |) \|_1, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (4.15), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_\infty \leq K_1(N) \int_\Omega \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_\Phi),$$

implicando que $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\| u \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(\lambda, N, | u |_{\Phi}).$$

Deste fato,

$$h = f(x, u) \in L^{\infty}(\Omega),$$

portanto, segue do Lema 3.25, que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$ e existe $d = d(\lambda, N, | u |_{\Phi}) > 0$, tal que

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 4.3. *O Lema 4.1 continua válido substituindo* (f_3) *pela seguinte hipótese:*

$(f_3^{'})$ *existem* $C_0, C_1 > 0$ *tal que*

$$f(x,t)t \leq C_0\Phi(t) + C_1 \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0;$$

De fato, observe que procedendo de forma análoga ao feito na demonstração do Lema 4.1, obtemos que

$$\Big(\int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq C_5 q\Big(\int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q} dx + \int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q-1} dx\Big),$$

onde $C_5 > 0$ independe de q. Deste fato, usando a desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} &\leq C_5 q\Big(\int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q} dx + | \Omega |^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{\Omega} \Phi(| u |)^{q} dx\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big)\\ &\leq Cq(\| \Phi(u) \|_q^q + \| \Phi(u) \|_q^{q-1}),\end{aligned}$$

onde $C > 0$ independe de q. Donde, elevando a $\dfrac{1}{q}$,

$$\| \Phi(u) \|_{q\nu} \leq C^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} (\| \Phi(u) \|_q^q + \| \Phi(u) \|_q^{q-1})^{\frac{1}{q}}.$$

Usando esta desigualdade, dividiremos a demonstração em dois casos:

1º caso: Se $\| \Phi(u) \|_{\nu} \geq 1$.

Para este caso, considerando $q = \nu$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\| \Phi(u) \|_{\nu^2} &\leq C^{\frac{1}{\nu}} \nu^{\frac{1}{\nu}} (\| \Phi(u) \|_{\nu}^{\nu} + \| \Phi(u) \|_{\nu}^{\nu-1})^{\frac{1}{\nu}} \\
&\leq C^{\frac{1}{\nu}} \nu^{\frac{1}{\nu}} (2 \| \Phi(u) \|_{\nu}^{\nu})^{\frac{1}{\nu}} \\
&= C^{\frac{1}{\nu}} \nu^{\frac{1}{\nu}} 2^{\frac{1}{\nu}} \| \Phi(u) \|_{\nu}, \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

onde $C > 1$. Agora, fazendo $q = \nu^2$ e utilizando (4.16),

$$
\begin{aligned}
\| \Phi(u) \|_{\nu^3} &\leq C^{\frac{1}{\nu^2}} (\nu^2)^{\frac{1}{\nu^2}} (\| \Phi(u) \|_{\nu^2}^{\nu^2} + \| \Phi(u) \|_{\nu^2}^{\nu^2-1})^{\frac{1}{\nu^2}} \\
&\leq C^{\frac{1}{\nu^2}} \nu^{\frac{2}{\nu^2}} (2 \| \Phi(u) \|_{\nu^2}^{\nu^2})^{\frac{1}{\nu^2}} \\
&\leq C^{\frac{1}{\nu^2}} \nu^{\frac{2}{\nu^2}} (2 C^{\nu} \nu^{\nu} 2^{\nu} \| \Phi(u) \|_{\nu}^{\nu^2})^{\frac{1}{\nu^2}} \\
&= C^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} \nu^{\frac{1}{\nu}+\frac{2}{\nu^2}} 2^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} \| \Phi(u) \|_{\nu} .
\end{aligned}
$$

Procedendo da mesma forma, para $q = m$,

$$
\| \Phi(u) \|_{\nu^m} \leq C^{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\nu^j}} \nu^{\sum_{j=1}^{m} \frac{j-1}{\nu^j}} 2^{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\nu^j}} \| \Phi(u) \|_{\nu},
$$

e daí, fazendo $m \to +\infty$,

$$
\| \Phi(u) \|_{\infty} \leq C_6 \| \Phi(u) \|_{\nu},
$$

para alguma constante $C_6 > 0$.

2º caso: Se $\| \Phi(u) \|_{\nu} < 1$.

Agora, procedendo de forma análoga ao 1º caso, obtemos, para $q = \nu^m$, que

$$
\| \Phi(u) \|_{\nu^m} \leq C^{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\nu^j}} \nu^{\sum_{j=1}^{m} \frac{j-1}{\nu^j}} 2^{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\nu^j}},
$$

ou seja,

$$
\| \Phi(u) \|_{\infty} \leq C_7,
$$

para alguma constante $C_7 > 0$.

Portanto, em qualquer um dos casos, obtêm-se uma limitação para $\Phi(u)$. Deste fato, seguindo de forma análoga ao feito na conclusão da demonstração do Lema 4.1, fica provada a Observação 4.3.

Agora, para mostrarmos existência de soluções para o problema (P_λ), utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (P_λ), dado por:

$$
I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).
$$

onde
$$F(x,t)=\int_0^t f(x,s)ds.$$
O funcional I_λ é de classe C^1 (ver Proposição 3.10). Vejamos agora que os pontos críticos de I_λ não-triviais, são soluções positivas de (P_λ).

Lema 4.4. *Os pontos críticos não-triviais de I_λ são soluções positivas de (P_λ).*

Demonstração. De fato, seja u_λ, não-trivial, um ponto crítico de I_λ e $\varphi\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi\geq 0$. De (f_2),
$$\int_\Omega \phi(\mid\nabla u_\lambda\mid)\nabla u_\lambda\nabla\varphi dx=\lambda\int_\Omega f(x,u_\lambda(x))\varphi(x)dx\geq 0,$$
logo,
$$\int_\Omega \phi(\mid\nabla u_\lambda\mid)\nabla u_\lambda\nabla\varphi dx\geq 0,$$
o que implica
$$-\Delta_\Phi u_\lambda\geq 0.$$
Além disso, $u_\lambda=0$ na $\partial\Omega$, portanto, pelo Lema 3.23, segue que
$$u_\lambda\geq 0,\ \text{ em }\Omega.$$

Agora, desde que $u_\lambda\in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 4.1) e $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, temos que $f\in L^\infty(\Omega)$. Deste fato, segue pelo Lema 3.28 que
$$u_\lambda>0,\ \text{ em }\Omega.$$
Mostrando assim, que os pontos críticos, não-triviais, de I_λ são soluções positivas de (P_λ). □

Teorema 4.5. *Assuma $(\phi_1)-(\phi_3)$, $(f_1)-(f_4)$. Então, existe uma constante $\lambda_0>0$, tal que (P_λ) tem uma solução positiva para todo $\lambda>\lambda_0$.*

Demonstração. De (f_4), para todo $\lambda>0$, existe uma constante $T_\lambda>0$ tal que
$$\mid f(x,t)\mid\leq\frac{1}{2C_\Phi\lambda}\frac{\Phi(t)}{t},\qquad x\in\Omega \text{ e } t>T_\lambda. \tag{4.17}$$
Observando que
$$\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right)'=\frac{\phi(t)t^2+\Phi(t)}{t^2}>0,\ \text{para } t>0, \tag{4.18}$$

temos que $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ é crescente em $(0, +\infty)$. Deste fato, segue de (4.17),

$$\begin{aligned}
F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\
&= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_{T_\lambda}^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} \mid f(x,t) \mid \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_0^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + C_\lambda \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(t) + C_\lambda, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty]
\end{aligned}$$

onde $C_\lambda = T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} \mid f(x,t) \mid$. Utilizando a desigualdade de Poincaré (ver Lema 2.19) e o Lema 3.5, segue que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \\
&= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \frac{1}{2C_\Phi}\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid \\
&\geq \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \frac{1}{2C_\Phi}C_\Phi\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid \\
&\geq \frac{1}{2}\xi_0(\mid \nabla u \mid_\Phi) - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Assim, I_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \qquad (4.20)$$

para $\rho > \rho_\lambda$.

Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\emptyset \neq supp\varphi \subset \Omega_0$ (onde $\Omega_0 \subset \Omega$ verifica (f_2)), tem-se que

$$I_\lambda(\varphi) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla\varphi \mid)dx - \lambda\int_\Omega F(x,\varphi)dx < 0, \qquad (4.21)$$

para $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, \mid \nabla\varphi \mid_\Phi\}$. Desde que I_λ é limitado inferiormente e

$$\varphi \in B_\rho = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); \mid \nabla u \mid_\Phi < \rho\},$$

temos

$$m_\lambda := \inf_{u \in B_\rho} I_\lambda(u) \in (-\infty, 0). \tag{4.22}$$

Mostraremos agora que m_λ é atingido. Para isto, já sabemos que o funcional

$$P(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \tag{4.23}$$

é fracamente semicontínuo inferiormente (ver Proposição 3.14).

Afirmação 4.6. *O funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$*

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Deste fato,

$$F(x, u_n(x)) \to F(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4.24}$$

a menos de subsequência, e existe $\eta \in L^1(\Omega)$, tal que

$$\mid F(x, u_n(x)) \mid \leq \eta, \quad x \in \Omega. \tag{4.25}$$

Logo, de (4.24) e (4.25), segue, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega F(x, u_n(x))dx \to \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

provando a Afirmação 4.6.

De (4.23) e da Afirmação 4.6, o funcional I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (4.19), I_λ é coercivo.

Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- I_λ é coercivo,

temos, do Teorema A.17 (ver Apêndice A), que existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda.$$

Além disso, de (4.20) e (4.22), temos que $u_\lambda \notin \partial B_\rho$. Por este fato, concluimos que u_λ é um ponto crítico de I_λ, e portanto solução positiva de (P_λ) (ver Lema 4.4). $\square$

Pelo Teorema 4.5, o conjunto

$$M := \{\lambda \in \mathbb{R};\ \text{existe uma solução positiva de } (P_\lambda)\}$$

é não vazio. Desse fato, podemos definir

$$\Lambda := \inf M. \tag{4.26}$$

Verificaremos agora alguns resultados envolvendo Λ.

Lema 4.7. *Sob as hipóteses* $(\phi_1)-(\phi_3)$ *e* $(f_1)-(f_3)$*, a constante* Λ *é positiva.*

Demonstração. Seja λ uma constante para a qual (P_λ) tem uma solução positiva $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Neste caso,

$$\int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx = \lambda \int_\Omega f(x,u) u dx.$$

Utilizando (ϕ_2), (f_3) e a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\lambda \geq \frac{l \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx}{C_0 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid) dx} \geq \frac{l}{C_0 C_\Phi} > 0.$$

$\square$

A fim de mostrar a existência de uma solução positiva de (P_λ) para qualquer $\lambda > \Lambda$, construiremos uma supersolução de (P_λ).

Seja $\eta(t)$ a função inversa de $\phi(t)t$, $t \in [0, +\infty)$. Tomando $R > 0$ tal que $B_R(0) \supset \Omega$, e considerando

$$\overline{f}(t) = \sup_{(x,s) \in \Omega \times (0,t]} f(x,s),$$

definimos o operador $\hat{F} : C^0([0,R]) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$(\hat{F} w)(r) = \int_r^R \eta\Big(\lambda \int_0^t \Big(\frac{s}{t}\Big)^{N-1} \overline{f}(w(s)) ds\Big) dt, \quad 0 \leq r \leq R, \tag{4.27}$$

para $w \in C^0[0,R]$.

Afirmação 4.8. *$v(x) \equiv (\hat{F}w)(r)$, $r =\mid x \mid$, está bem definida.*

Como $w \in C([0,R])$, então w é limitada. Além disso, desde que

- $\mid \Omega \mid < +\infty$,
- $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$,

temos, para cada $t \in [0,R]$, que $f(x,s)$ é limitada em $\Omega \times (0, w(t)]$ é limitada. Mais ainda, existe $C > 0$ tal que

$$\overline{f}(w(t)) = \sup_{(x,s)\in\Omega\times(0,w(t)]} f(x,s) \leq C, \quad t \in [0,R].$$

Daí, dado $t \in (0,R]$,

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} \overline{f}(w(s))ds &\leq C\lambda \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} Cds \\
&= \frac{\lambda C}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} ds \\
&= \frac{\lambda C}{t^{N-1}} \frac{t^N}{N} \\
&= \frac{\lambda C}{N} t,
\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\lambda \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} \overline{f}(w(s))ds \in \left[0, \frac{\lambda CR}{N}\right], \quad t \geq 0.$$

Desde que $\phi(t)t$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, a sua inversa η é contínua em $\mathbb{R}_+$. Logo, $\eta\Big(\big[0, \frac{\lambda CR}{N}\big] \Big)$ é limitado, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\eta\Big(\lambda \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} \overline{f}(w(s))ds\Big) \leq K, \quad t \in \left[0, \frac{\lambda CR}{N}\right]. \tag{4.28}$$

De (4.27) e (4.28), concluímos que $v(x) \equiv (\hat{F}w)(r)$, $r =\mid x \mid$, está bem definida em $[0,R]$.

Afirmação 4.9. *Sendo $v(x) \equiv \hat{F}c(r)$, $r =\mid x \mid$, onde $c(r) \equiv c$ é uma função constante positiva, vale*

- *$v \in C^2(B_R(\Omega))$ e*
- *$-div(\phi(\mid \nabla v \mid)\nabla v) = \lambda\overline{f}(c)$ em $B_R(0)$.*

Para provar esta afirmação, inicialmente observe que, para $x \in B_R(0)$,

- $\hat{F}c(r) = \displaystyle\int_r^R \eta\Big(\frac{\lambda\overline{f}(c)}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}ds\Big)dt = \int_r^R \eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)t\Big)dt,$
- $\dfrac{d}{dr}(\hat{F}c(r)) = -\eta\Big(\dfrac{\lambda}{N}\overline{f}(c)r\Big)$, $r \in (0,R)$,
- $\dfrac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r)) = -\eta'\Big(\dfrac{\lambda}{N}\overline{f}(c)r\Big)\dfrac{\lambda}{N}\overline{f}(c)$, $r \in (0,R)$,
- $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\hat{F}c(| x |)) = \dfrac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\dfrac{x_i}{| x |},$
- $| \nabla v(x) |= \dfrac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|},$
- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\hat{F}c(| x |)) = \dfrac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\dfrac{x_i^2}{| x |^2}+\dfrac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\dfrac{| x |^2 -x_i^2}{| x |^3},$
- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i x_j}(\hat{F}c(| x |)) = \dfrac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\dfrac{x_i x_j}{| x |^2}-\dfrac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\dfrac{x_i x_j}{| x |^3}.$

Sabendo disto,

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Phi v &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\phi(| \nabla v |)\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^N \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(| \nabla v |))\frac{\partial v}{\partial x_i} + \phi(| \nabla v |)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\Big)\\
&= \frac{\phi'(| \nabla v |)}{| \nabla v |}\sum_{i=1}^N\Big(\sum_{j=1}^N\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\Big) + \phi(| \nabla v |)\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\\
&= \frac{\phi'(| \nabla v |)}{| \nabla v |}\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=1,j\neq i}^N\Big[\Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^2\frac{x_i x_j}{| x |^2}\Big(\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{x_i x_j}{| x |^2}\\
&\quad -\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{x_i x_j}{| x |^3}\Big)\Big] + \Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^2\frac{x_i^2}{| x |^2}\\
&\quad .\Big(\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{x_i^2}{| x |^2} + \frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{| x |^2 -x_i^2}{| x |^3}\Big)\Big]\\
&\quad +\phi(| \nabla v |)\sum_{i=1}^N\Big(\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{x_i^2}{| x |^2} + \frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{| x |^2 -x_i^2}{| x |^3}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\phi'(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^2\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\frac{x_i^2x_j^2}{|x|^4}\\
&\quad -\sum_{j=1}^{N}\Big(\Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^3\frac{x_i^2x_j^2}{|x|^5}\Big)+\Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^3\frac{x_i^2}{|x|^3}\Big]\\
&\quad +\phi(|\nabla v|)\Big(\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}+\frac{N-1}{|x|}\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)\\
&= \frac{\phi'(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\Big(\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)^2\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\\
&\quad +\phi(|\nabla v|)\Big(\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}+\frac{N-1}{|x|}\frac{d}{dr}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\Big)\\
&= \phi'(|\nabla v|)\,|\nabla v|\,\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}+\phi(|\nabla v|)\frac{d^2}{dr^2}(\hat{F}c(r))\Big|_{r=|x|}\\
&\quad +\phi(|\nabla v|)\,|\nabla v|\,\frac{N-1}{|x|}\\
&= \phi'\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\Big)\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\Big)\Big(-\eta'\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\Big)\\
&\quad +\phi\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\Big)\Big(-\eta'\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\Big)\\
&\quad +\phi\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\Big)\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\,|x|\Big)\Big)\frac{N-1}{|x|}\\
&= \frac{d}{dr}\Big[\phi\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)r\Big)\Big)\Big(-\eta\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)r\Big)\Big)\Big]\Big|_{r=|x|}-\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)\frac{N-1}{|x|}\\
&= -\frac{d}{dr}\Big(\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)r\Big)\Big|_{r=|x|}-\frac{N-1}{N}\lambda\overline{f}(c)\\
&= -\frac{\lambda}{N}\overline{f}(c)-\frac{N-1}{N}\lambda\overline{f}(c)\\
&= -\lambda\overline{f}(c).
\end{aligned}
$$

Lema 4.10. *Assumindo* $(\phi_1)-(\phi_3)$, (f_1), (f_2) *e* (f_4), *existe uma constante* $c>1$ *tal que a função* $v\equiv\hat{F}c$ *é uma supersolução de* (P_λ).

Demonstração. Para mostrarmos este lema, é suficiente mostrar que

$$c\geq\hat{F}c \text{ em } \Omega \text{ e } \hat{F}c\geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{4.29}$$

De fato, fazendo $v\equiv\hat{F}c$, segue da Afirmação 4.9 e do fato de $\overline{f}(t)$ ser positiva e não-decrescente para $t>0$, que

$$-div(\phi(|\nabla v|)\nabla v)=\lambda\overline{f}(c)\geq\lambda\overline{f}(v)\geq\lambda f(x,v),\ \text{em } \Omega.$$

Além disso, como $v \geq 0$ em $\partial\Omega$, conclui-se que v é supersolução de (P_λ). Verificaremos agora (4.29).

Para uma constante positiva c, temos $(\hat{F}c)(r) \geq 0$ em $[0, R]$, em particular

$$\hat{F}c(x) \geq 0, \text{ para } x \in \partial\Omega.$$

Desde que η é não-decrescente em $\mathbb{R}_+$, obtemos

$$\begin{aligned}(\hat{F}c)(r) &= \int_r^R \eta\Big(\lambda \int_0^t \Big(\frac{s}{t}\Big)^{N-1} \overline{f}(c)ds\Big)dt \\ &\leq \int_r^R \eta\Big(\lambda \int_0^t \overline{f}(c)ds\Big)dt \\ &\leq R\eta(\lambda R\overline{f}(c)), \end{aligned} \tag{4.30}$$

para $0 \leq r \leq R$. Por outro lado, de (f_4), temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(x,c)c}{\Phi(c)} \leq \varepsilon, \text{ para } c > t_0,$$

o que implica de (ϕ_2),

$$f(x,c) \leq \frac{\varepsilon\Phi(c)}{c} \leq \frac{\varepsilon\phi(c)c^2}{c}, \text{ para } c > t_0.$$

Deste fato,

$$\overline{f}(c) \leq \varepsilon\phi(c)c, \text{ para } c > t_0. \tag{4.31}$$

Agora, observando que $\widetilde{\Phi}(s) = \int_0^s \eta(\sigma)d\sigma$, segue do Lema 3.6, que

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{\eta(s)s}{\widetilde{\Phi}(s)} \leq \frac{l}{l-1}. \tag{4.32}$$

Utilizando o Lema 3.5, temos de (4.31) e (4.32) que

$$\begin{aligned} R\eta(\lambda R\overline{f}(c)) &\leq R\eta(\varepsilon\lambda R\phi(c)c) \\ &\leq \frac{lR}{l-1}.\frac{\widetilde{\Phi}(\varepsilon\lambda R\phi(c)c)}{\varepsilon\lambda R\phi(c)c} \\ &\leq \frac{lR}{l-1}.\frac{\xi_3(\varepsilon\lambda R)\widetilde{\Phi}(\phi(c)c)}{\varepsilon\lambda R\phi(c)c} \\ &\leq \frac{l(m-1)R}{(l-1)m}.\frac{\xi_3(\varepsilon\lambda R)\eta(\phi(c)c)}{\varepsilon\lambda R} \\ &= \frac{l(m-1)R}{(l-1)m}.\frac{\xi_3(\varepsilon\lambda R)}{\varepsilon\lambda R}.c, \end{aligned}$$

para $c > t_0$. Donde segue-se, de (4.30), que

$$\frac{(Fc)(r)}{c} \leq \frac{l(m-1)R}{(l-1)m}.\frac{\xi_3(\varepsilon\lambda R)}{\varepsilon\lambda R} \quad \text{para } c > t_0. \tag{4.33}$$

Logo, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$(\hat{F}c)(r) \leq c, \quad \text{para } 0 \leq r \leq R, \tag{4.34}$$

em particular

$$(\hat{F}c)(|\ x\ |) \leq c, \ \text{para } x \in \Omega,$$

como queríamos mostrar. □

Teorema 4.11. *Sob as hipóteses* $(\phi_1)-(\phi_3)$ *e* $(f_1)-(f_4)$, *existe uma solução positiva de* (P_λ) *para todo* $\lambda > \Lambda$.

Demonstração. Seja λ uma constante maior que Λ. Pela definição de Λ, podemos tomar $\lambda_0 < \lambda$ tal que exista uma solução positiva u_{λ_0} de (P_{λ_0}). Desde que

$$\begin{aligned} -div(\phi(|\ \nabla u_{\lambda_0}\ |)\nabla u_{\lambda_0}) &= \lambda_0 f(x, u_{\lambda_0}) \\ &\leq \lambda f(x, u_{\lambda_0}) \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

u_{λ_0} é uma subsolução de (P_λ). Seja $v = \hat{F}c$ a supersolução de (P_λ) obtida no Lema 4.10, então podemos tomar $c = c_R > 1$, para cada $R > 0$, satisfazendo $\Omega \subset B_R(0)$. Assim, tomando $0 < R_0 < R$ tal que $\Omega \subset B_{R_0}(0)$,

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_r^R \eta\Big(\lambda \int_0^t \Big(\frac{s}{t}\Big)^{N-1} \overline{f}(c) ds\Big) dt \\ &= \int_r^R \eta\Big(\frac{\lambda \overline{f}(c)}{N} t\Big) dt \\ &\geq \int_{R_0}^R \eta\Big(\frac{\lambda \overline{f}(c)}{N} t\Big) dt \\ &\geq \int_{R_0}^R \eta\Big(\frac{\lambda \overline{f}(1)}{N} R_0\Big) dt \to \infty, \end{aligned} \tag{4.35}$$

quando $R \to \infty$, para qualquer $0 < r < R_0$. Daí, tendo em vista que u_{λ_0} é limitado em Ω (ver Lema 4.1), podemos fixar $R > 0$ suficientemente grande, tal que

$$v(x) > u_{\lambda_0}(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

Agora, defina

$$Z := \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); u_{\lambda_0}(x) \leq u(x) \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

e note que Z é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois Z é fechado e convexo).

Afirmação 4.12. *O funcional I_λ possui um ponto mínimo em Z.*

Desde que $u_{\lambda_0}, v \in L^\infty(\Omega)$, temos $Z \subset L^\infty(\Omega)$ e, portanto, existe $C > 0$ tal que

$$F(x, u(x)) \leq C, \quad u \in Z \text{ e } x \in \Omega.$$

Observando isto, vejamos agora os seguintes fatos:

- I_λ é coercivo em Z.

De fato, pois

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) - \lambda C \\ &\geq \xi_0(|\nabla u|_\Phi), \quad u \in Z. \end{aligned}$$

- I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente em Z.

Seja $\{u_n\} \subset Z$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, logo $u \in Z$ (pois Z é fracamente fechado). Deste fato, segue da Afirmação 4.6, obtemos que

$$\int_\Omega F(x, u_n(x))dx \to \int_\Omega F(x, u(x))dx.$$

Usando a Proposição 3.14, obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) &= \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)dx - \lambda \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x, u_n)dx \\ &\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x, u)dx \\ &= I_\lambda(u). \end{aligned}$$

Por estes fatos, tem-se do Teorema A.17 (ver Apêndice A) que I_λ possui um minimizante u em Z.

Agora, utilizando um argumento similar ao do Teorema 2.4 em [38], provaremos que u é solução de (P_λ). Dados $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ considere

- $\varphi^\varepsilon = \max\{0, u + \varepsilon\varphi - v\} \geq 0,$
- $\varphi_\varepsilon = \max\{0, u_{\lambda_0} - (u + \varepsilon\varphi)\} \geq 0,$
- $v_\varepsilon = \min\{v, \max\{u_{\lambda_0}, u + \varepsilon\varphi\}\} = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in Z.$

Note que $\varphi_\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Afirmação 4.13. *Dado $h \in (0,1)$, tem-se $u + h(v_\varepsilon - u) \in Z$.*

Para provarmos esta afirmação, verificaremos os seguintes casos:

(i) $u + \varepsilon\varphi \geq v$.

Segue da convexidade de Z que

$$u + h(v_\varepsilon - u) = u + h(\varepsilon\varphi - (u + \varepsilon\varphi) + v) = u + h(v - u) \in Z.$$

(ii) $u + \varepsilon\varphi < v$.

Se $u_{\lambda_0} \geq u + \varepsilon\varphi$, segue novamente da convexidade de Z, que

$$u + h(v_\varepsilon - u) = u + h(\varepsilon\varphi + u_{\lambda_0} - (u + \varepsilon\varphi)) = u + h(u_{\lambda_0} - u) \in Z.$$

Agora, se $u_{\lambda_0} < u + \varepsilon\varphi$, temos

$$u + h(v_\varepsilon - u) = u + h\varepsilon\varphi. \tag{4.36}$$

Considerando $\varphi \geq 0$, segue que

$$u_{\lambda_0} \leq u < u + h\varepsilon\varphi < u + \varepsilon\varphi < v, \quad h \in (0,1). \tag{4.37}$$

No caso em que $\varphi < 0$, obtemos

$$u_{\lambda_0} < u + \varepsilon\varphi < u + h\varepsilon\varphi < u \leq v, \quad h \in (0,1). \tag{4.38}$$

Portanto, de (4.36)-(4.38), $u + h(v_\varepsilon - u) \in Z$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $h \in (0,1)$, completando a prova da afirmação.

Uma vez que u é minimizador de I_λ em Z, temos, da Afirmação 4.13, que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \to 0^+} \frac{I_\lambda(u + h(v_\varepsilon - u)) - I_\lambda(u)}{h} \\ &= \langle I'_\lambda(u), v_\varepsilon - u\rangle \\ &= \varepsilon\langle I'_\lambda(u), \varphi\rangle - \langle I'_\lambda(u), \varphi^\varepsilon\rangle + \langle I'_\lambda(u), \varphi_\varepsilon\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle I'_\lambda(u), \varphi\rangle \geq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\langle I'_\lambda(u), \varphi^\varepsilon\rangle - \langle I'_\lambda(u), \varphi_\varepsilon\rangle\Big). \tag{4.39}$$

Considerando $\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega; u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq v(x) \geq u(x)\}$, temos pelo fato de v ser uma supersolução de (4.1),

$$\begin{aligned} \langle I'_\lambda(u), \varphi^\varepsilon\rangle &= \langle I'_\lambda(v), \varphi^\varepsilon\rangle + \langle I'_\lambda(u) - I'_\lambda(v), \varphi^\varepsilon\rangle \\ &\geq \langle I'_\lambda(u) - I'_\lambda(v), \varphi^\varepsilon\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega^\varepsilon} \{(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla v \mid)\nabla v)\nabla(u+\varepsilon\varphi - v) \\
&\quad -(f(x,u)-f(x,v))(u+\varepsilon\varphi - v)\}dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} (\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid v \mid)\nabla v)\nabla\varphi dx \\
&\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} \mid f(x,u)-f(x,v) \mid\mid u+\varepsilon\varphi - v \mid dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} (\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid v \mid)\nabla v)\nabla\varphi dx \\
&\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} \mid f(x,u)-f(x,v) \mid (u+\varepsilon\varphi - v) dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} (\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid v \mid)\nabla v)\nabla\varphi dx \\
&\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} \mid f(x,u)-f(x,v) \mid (u - v) dx \\
&\quad -\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \mid f(x,u)-f(x,v) \mid \varphi dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} (\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid v \mid)\nabla v)\nabla\varphi dx \\
&\quad -\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \mid f(x,u)-f(x,v) \mid\mid \varphi \mid dx. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que

$$\mid \Omega^\varepsilon \mid \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

segue de (4.40),

$$\langle I_\lambda^{'}(u), \varphi^\varepsilon \rangle \geq o(\varepsilon), \qquad (4.41)$$

onde $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Procedendo de forma análoga, considere

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; u(x) \geq u_{\lambda_0}(x) \geq u(x) + \varepsilon\varphi(x)\},$$

temos pelo fato de u_{λ_0} ser uma subsolução de (4.1),

$$
\begin{aligned}
\langle I_\lambda^{'}(u), \varphi_\varepsilon \rangle &= \langle I_\lambda^{'}(u_{\lambda_0}), \varphi_\varepsilon \rangle + \langle I_\lambda^{'}(u) - I_\lambda^{'}(u_{\lambda_0}), \varphi_\varepsilon \rangle. \\
&\geq \langle I_\lambda^{'}(u) - I_\lambda^{'}(u_{\lambda_0}), \varphi_\varepsilon \rangle \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} (\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla(u_{\lambda_0} - (u+\varepsilon\varphi))dx \\
&\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} (f(x,u) - f(x,u_{\lambda_0}))(u_{\lambda_0} - (u+\varepsilon\varphi))dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega_\varepsilon}(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla((u-u_{\lambda_0})+\varepsilon\varphi)dx \\
&\quad +\int_{\Omega_\varepsilon}(f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0}))(u-u_{\lambda_0}+\varepsilon\varphi)dx \\
&\leq -\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla\varphi dx \\
&\quad +\int_{\Omega_\varepsilon}\mid f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0})\mid\mid u-u_{\lambda_0}+\varepsilon\varphi \mid dx \\
&= -\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla\varphi dx \\
&\quad +\int_{\Omega_\varepsilon}\mid f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0})\mid (u_{\lambda_0}-u-\varepsilon\varphi)dx \\
&= -\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla\varphi dx \\
&\quad +\int_{\Omega_\varepsilon}\mid f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0})\mid (u_{\lambda_0}-u)dx \\
&\quad -\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}\mid f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0})\mid \varphi dx \\
&\leq -\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u - \phi(\mid \nabla u_{\lambda_0} \mid)\nabla u_{\lambda_0})\nabla\varphi dx \\
&\quad +\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}\mid f(x,u)-f(x,u_{\lambda_0})\mid\mid \varphi \mid dx. \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que

$$\mid \Omega_\varepsilon \mid \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

segue de (4.42),

$$\langle I_\lambda^{'}(u), \varphi_\varepsilon\rangle \leq o(\varepsilon). \qquad (4.43)$$

De (4.39), (4.41) e (4.43),

$$\langle I_\lambda^{'}(u), \varphi\rangle \geq 0, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (4.44)$$

implicando que

$$\langle I_\lambda^{'}(u), \varphi\rangle = 0, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja,

$$I_\lambda^{'}(u) = 0.$$

$\square$

4.2 Existência de uma segunda solução positiva

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer uma segunda solução positiva v_λ para o problema (4.1), com $\lambda > \Lambda$. Para isto, além de assumirmos as condições (f_1) e (f_4) sobre f, assumiremos também as seguintes condições:

(f_2') $f(x,t) > 0$ para $x \in \Omega$, $t > 0$;

(f_5) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)t}{\Phi(t)} = 0$ uniformemente em Ω;

(f_6) $f(x,t)$ é não-decrescente em $t > 0$ para cada $x \in \Omega$.

No que segue, considere o funcional I_λ definido sobre

$$X \equiv C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

A ideia agora é trabalhar no espaço X. Por este fato, estabeleceremos agora uma norma conveniente para X.

Afirmação 4.14. $\| u \|_X = \| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ *define uma norma sobre o espaço* X.

Inicialmente, vejamos que $\| \,.\, \|_X$ está bem definida. De fato, tomando $u \in X$, então $u \in C^1(\overline{\Omega})$, daí $\| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} < \infty$. Para completar a prova da afirmação, devemos verificar que:

(i) $u = 0 \Leftrightarrow \| u \|_X = 0$, $u \in X$;

(ii) $\| \alpha u \|_X = | \alpha | \| u \|_X$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in X$;

(iii) $\| u + v \|_X \leq \| u \|_X + \| v \|_X$, $u, v \in X$.

Verificação de (i): Suponha $u = 0$. Então, $\| u \|_{C^1(\overline{\Omega})} = 0$, implicando que $\| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} = 0$, ou seja, $\| u \|_X = 0$. Reciprocamente, suponha $\| u \|_X = 0$, daí

$$\begin{aligned} \| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sup_{x\in\Omega} | \nabla u | = 0 \\ &\Rightarrow \quad | \nabla u | = 0, \text{ para todo } x \in \Omega \\ &\Rightarrow \quad | \nabla u |_\Phi = 0. \end{aligned}$$

Desde que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tem-se $u = 0$ em Ω. Os demais itens deixamos a cargo do leitor.

Lema 4.15. *A função identicamente nula, $u \equiv 0$, é um minimizador local estrito de I_λ em X.*

Demonstração. De (f_5), para todo $\lambda > 0$, existe $\delta_\lambda > 0$ tal que

$$| f(x,t)t | \leq \frac{1}{2\lambda C_\Phi}\Phi(t) \text{ para } 0 < t < \delta_\lambda.$$

Desde que $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$ (ver (4.18)), obtemos, para $t \in (0, \delta_\lambda)$,

$$\begin{aligned} | F(x,t) | &= | \int_0^t f(x,s)ds | \\ &\leq \int_0^t | f(x,s) | \, ds \\ &\leq \frac{1}{2\lambda C_\Phi} \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s} ds \\ &\leq \frac{1}{2\lambda C_\Phi}\Phi(t), \end{aligned} \tag{4.45}$$

Afirmamos que, existe $C_\Omega > 0$ tal que

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{\overline{\Omega}} \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)}, \quad u \in X. \tag{4.46}$$

Com efeito, se $\overline{\Omega}$ é convexo, dados $x_0 \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$ temos $[x, x_0] \subset \overline{\Omega}$. Segue do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} | u(x) | = | u(x) - u(x_0) | &\leq | x - x_0 | \sup_{\theta \in [x, x_0]} | \nabla u(\theta) | \\ &\leq diam(\Omega) \| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\ &= C_\Omega \| \nabla u \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} . \end{aligned}$$

Caso $\overline{\Omega}$ não seja convexo, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que para algum $x \in \Omega$, o segmento $[x, x_0]$ não está completamente contido em $\overline{\Omega}$. Nesse caso, fixe uma cobertura finita de $\overline{\Omega}$ de tal forma que ao traçar um caminho poligonal com $n+1$ segmentos justapostos (denotados por $[x, y_1]$, $[y_1, y_2]$,..., $[y_{n-1}, y_n]$, $[y_n, x_0]$ e todo contido em Ω) ligando x à x_0, cada segmento esteja contido em uma bola dessa cobertura de Ω. Usando o Teorema do Valor Médio "$n+1$" vezes, temos

$$\begin{aligned} | u(x) | &= | u(x) - u(x_0) | \\ &\leq | u(x) - u(y_1) | + | u(y_1) - u(y_2) | + ... + | u(y_n) - u(x_0) | \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ | x-y_1 | \sup_{\theta\in[x,y_1]} | \nabla u(\theta) | + | y_1-y_2 | \sup_{\theta\in[y_1,y_2]} | \nabla u(\theta) | \\
&\quad +...+ | y_n - x_0 | \sup_{\theta\in[y_n,x_0]} | \nabla u(\theta) | . \\
&\leq \ (| x-y_1 | + | y_1-y_2 | +...+ | y_n-x_0 |) \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&\leq \ (n+1)diam(\Omega) \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\
&= \ C_\Omega \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(\overline{\Omega})} .
\end{aligned}
$$

De (4.45) e (4.46),

$$
\left| \int_\Omega F(x,u)dx \right| \leq \frac{1}{2\lambda C_\Phi} \int_\Omega \Phi(| u |)dx, \text{ para } \parallel u \parallel_X \leq \frac{\delta_\lambda}{C_\Omega}.
$$

Donde segue-se, pela desigualdade de Poincaré, que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \frac{1}{2\lambda C_\Phi} \int_\Omega \Phi(| u |)dx \\
&\geq \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \frac{1}{2C_\Phi} C_\Phi \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx \\
&> 0 \quad (= I_\lambda(0)),
\end{aligned}
$$

para $\parallel u \parallel_X \leq \dfrac{\delta_\lambda}{C_\Omega}$. Isto mostra que $u = 0$ é um minimizador local estrito de I_λ em X. $\square$

A fim de encontrar um segundo minimizador local de I_λ no espaço X, para $\lambda > \Lambda$, vamos tomar $\lambda_0 \in (\Lambda, \lambda)$, $\lambda_1 > \lambda$ e as soluções u_{λ_0} de (P_{λ_0}) e u_{λ_1} de (P_{λ_1}), obtida no Teorema 4.11 com λ_1 no lugar de λ.

Usando a mesma ideia da demonstração do Teorema 4.11, vemos que

$$
0 < u_{\lambda_0} \leq u_{\lambda_1} \text{ em } \Omega,
$$

implicando de (f_6) que

$$
0 \leq \lambda_0 f(x, u_{\lambda_0}) < \lambda_1 f(x, u_{\lambda_1}) \text{ em } \Omega.
$$

Deste fato, segue do Lema 3.29,

$$
0 < u_{\lambda_0} < u_{\lambda_1} \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u_{\lambda_1}}{\partial \nu} < \frac{\partial u_{\lambda_0}}{\partial \nu} \leq 0 \text{ na } \partial\Omega.
$$

Agora façamos

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x, u_{\lambda_0}(x)), & \text{se} \quad s \leq u_{\lambda_0}(x) \\ f(x,s), & \text{se} \quad u_{\lambda_0}(x) < s < u_{\lambda_1}(x) \\ f(x, u_{\lambda_1}(x)), & \text{se} \quad s \geq u_{\lambda_1}(x), \end{cases}$$

$$\widetilde{F}(x,t) = \int_0^t \widetilde{f}(x,s)ds$$

e

$$\widetilde{I}_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega \widetilde{F}(x,u)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Desde que $\widetilde{f}$ é limitada e contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, analogamente ao feito na Afirmação 4.12, obtemos que o funcional $\widetilde{I}_\lambda$ tem um minimizador global u_λ no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Assim, u_λ resolve o problema

$$(\widetilde{P}_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda \widetilde{f}(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.47}$$

Utilizando o Lema 4.1, tem-se que $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$. Verificaremos agora, a partir do próximo lema, que $u_\lambda \in X$ é minimizador para $\widetilde{I}_\lambda$ em X.

Lema 4.16. *$u = u_\lambda$ é um minimizador local de I_λ em X.*

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que

$$f(x, u_{\lambda_0}) \leq \widetilde{f}(x, u_\lambda), \text{ em } \Omega.$$

De fato,

- Se $u_\lambda \leq u_{\lambda_0}$, então $\widetilde{f}(x,u_\lambda) = f(x, u_{\lambda_0})$;
- Se $u_{\lambda_0} \leq u_\lambda \leq u_{\lambda_1}$, então $f(x, u_{\lambda_0}) \leq f(x, u_\lambda) = \widetilde{f}(x, u_\lambda)$;
- Se $u_\lambda \geq u_{\lambda_1}$, então $f(x, u_{\lambda_0}) \leq f(x, u_{\lambda_1}) = \widetilde{f}(x, u_\lambda)$.

Analogamente, tem-se que

$$f(x, u_{\lambda_1}) \geq \widetilde{f}(x, u_\lambda) \text{ em } \Omega.$$

Sabendo disto,

$$\begin{aligned} \lambda_0 \widetilde{f}(x, u_{\lambda_0}) = \lambda_0 f(x, u_{\lambda_0}) &< \lambda \widetilde{f}(x, u_\lambda) \\ &< \lambda_1 f(x, u_{\lambda_1}) = \lambda_1 \widetilde{f}(x, u_{\lambda_1}) \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Deste fato, segue do Lema 3.29 que

$$u_{\lambda_0} < u_\lambda < u_{\lambda_1} \quad \text{em } \Omega \tag{4.48}$$

e

$$\frac{\partial u_{\lambda_1}}{\partial \nu} < \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} < \frac{\partial u_{\lambda_0}}{\partial \nu} \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Além disso, para $\varepsilon > 0$ pequeno, se $u \in X$ satisfaz $\| u - u_\lambda \|_X \leq \varepsilon$, então

$$u_{\lambda_0} < u < u_{\lambda_1} \quad \text{em } \Omega. \tag{4.49}$$

Para verificar a desigualdade (4.49), precisamos provar as seguintes afirmações:

Afirmação 4.17. *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$u_{\lambda_0}(x) + \varepsilon_0 dist(x, \partial\Omega) \leq u_\lambda(x) \leq u_{\lambda_1}(x) - \varepsilon_0 dist(x, \partial\Omega), \tag{4.50}$$

para todo $x \in \Omega$.

Com efeito, uma vez que $\dfrac{\partial(u_\lambda - u_{\lambda_1})}{\partial \nu} \in C(\overline{\Omega})$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{\partial(u_\lambda - u_{\lambda_1})}{\partial \nu} \geq \varepsilon, \text{ na } \partial\Omega. \tag{4.51}$$

Desta forma, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \Omega_\delta := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$ tem-se

$$\frac{\partial(u_\lambda - u_{\lambda_1})}{\partial \nu(x)}(x) > \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $\nu(x) = \dfrac{x_0 - x}{\mid x_0 - x \mid}$ e $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que $\mid x - x_0 \mid = dist(x, \partial\Omega)$. Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $x \in \Omega_\delta$,

$$\frac{u_\lambda(x) - u_{\lambda_1}(x)}{\mid x_0 - x \mid} = -\int_0^1 \nabla(u_\lambda - u_{\lambda_1})(x + t(x_0 - x)) \frac{x_0 - x}{\mid x_0 - x \mid} dt < -\frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja,

$$u_\lambda(x) - u_{\lambda_1}(x) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \mid x - x_0 \mid = -\frac{\varepsilon}{2} dist(x, \partial\Omega). \tag{4.52}$$

Por outro lado, sendo $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$ é compacto e $u_\lambda - u_{\lambda_1} < 0$ em Ω, podemos definir

$$0 > -m_0 := \max_{\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}} (u_\lambda - u_{\lambda_1}).$$

Agora, considerando d o diâmetro de Ω, tem-se que

$$\delta \leq \mid x - y \mid \leq d, \text{ para todo } y \in \partial\Omega \text{ e } x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta},$$

e portanto,

$$\delta \leq dist(x, \partial\Omega) \leq d, \text{ para } x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}.$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) - u_{\lambda_1}(x) &\leq -\frac{m_0}{dist(x,\partial\Omega)} dist(x, \partial\Omega) \\ &\leq -\frac{m_0}{d} dist(x, \partial\Omega), \end{aligned} \tag{4.53}$$

para todo $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$.

Definindo $\varepsilon_0 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{m_0}{d}\right\}$, obtemos de (4.52) e (4.53) que

$$u_\lambda(x) - u_{\lambda_1}(x) \leq -\varepsilon_0 dist(x, \partial\Omega), \quad x \in \Omega.$$

De forma análoga, obtemos

$$u_\lambda(x) - u_{\lambda_0}(x) \geq \varepsilon_0 dist(x, \partial\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Afirmação 4.18. *Existe* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *tal que*

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) \cap B_X(u_\lambda, \varepsilon_1) = \{u \in X; \| u - u_\lambda \|_X < \varepsilon_1\} \subset [u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}].$$

De fato, tomando $\varepsilon_1 > 0$, o qual será fixado posteriormente, temos de (4.51), que para cada $u \in B_X(u_\lambda, \varepsilon_1)$,

$$\begin{aligned} (\nabla u - \nabla u_{\lambda_1})\nu &= (\nabla u - \nabla u_\lambda)\nu + (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1})\nu \\ &\geq (\nabla u - \nabla u_\lambda)\nu + \varepsilon, \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Por outro lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato de $\mid \nu \mid = 1$,

$$\begin{aligned} \mid (\nabla u - \nabla u_\lambda)\nu \mid &\leq \mid \nabla u - \nabla u_\lambda \mid\mid \nu \mid \\ &\leq \| \nabla u - \nabla u_\lambda \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \\ &= \| u - u_\lambda \|_X \\ &\leq \varepsilon_1 \text{ em } \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

daí,

$$(\nabla u - \nabla u_\lambda)\nu \geq -\varepsilon_1 \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{4.55}$$

De (4.54) e (4.55),

$$(\nabla u - \nabla u_{\lambda_1})\nu \geq \varepsilon - \varepsilon_1 \text{ em } \partial\Omega.$$

Dessa forma, para $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, temos

$$(\nabla u - \nabla u_{\lambda_1})\nu \geq \varepsilon - \varepsilon_1 > \varepsilon - \varepsilon_0 \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Analogamente, obtem-se que

$$(\nabla u_{\lambda_0} - \nabla u)\nu > \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

Repetindo o argumento da Afirmação 4.17, podemos obter $\overline{\varepsilon_1} > 0$ para o qual

$$u_{\lambda_0}(x) \leq u_{\lambda_0}(x) + \overline{\varepsilon_1} dist(x, \partial\Omega) \leq u(x) \leq u_{\lambda_1}(x) - \overline{\varepsilon_1} dist(x, \partial\Omega) \leq u_{\lambda_1}(x),$$

para todo $x \in \Omega$, o que prova a Afirmação 4.18.

Afirmação 4.19. *Para $u_{\lambda_0} < u < u_{\lambda_1}$, $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos*

$$I_\lambda(u) = \widetilde{I}_\lambda(u) + \lambda K,$$

onde

$$K = \int_\Omega (f(x, u_{\lambda_0})u_{\lambda_0} - F(x, u_{\lambda_0}))dx.$$

De fato, para $u_{\lambda_0} < u < u_{\lambda_1}$, $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\lambda(u) + \lambda K &= \widetilde{I}_\lambda(u) + \lambda \int_\Omega (f(x, u_{\lambda_0})u_{\lambda_0} - F(x, u_{\lambda_0}))dx \\
&= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \int_\Omega \widetilde{F}(x, u)dx + \lambda \int_\Omega f(x, u_{\lambda_0})u_{\lambda_0} dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega F(x, u_{\lambda_0})dx \\
&= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \int_\Omega \Big(\int_0^u \widetilde{f}(x, s)ds - f(x, u_{\lambda_0})u_{\lambda_0} \\
&\quad + \int_0^{u_{\lambda_0}} f(x, s)ds \Big) dx \\
&= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \lambda \int_\Omega \Big(\int_0^{u_{\lambda_0}} f(x, u_{\lambda_0})ds \\
&\quad + \int_{u_{\lambda_0}}^u f(x, s)ds - f(x, u_{\lambda_0})u_{\lambda_0} + \int_0^{u_{\lambda_0}} f(x, s)ds \Big) dx \\
&= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \int_\Omega \Big(\int_0^u f(x, s)ds \Big) dx \\
&= \int_\Omega \Phi(| \nabla u |)dx - \int_\Omega F(x, u)dx \\
&= I_\lambda(u),
\end{aligned}$$

provando a Afirmação 4.19.

Como u_λ é minimizador global de $\widetilde{I}_\lambda$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, então, para $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \cap B_X(u_\lambda, \varepsilon_1)$, temos das Afirmações 4.18 e 4.19, que

$$I_\lambda(u_\lambda) = \widetilde{I}_\lambda(u_\lambda) + \lambda K \leq \widetilde{I}_\lambda(u) + \lambda K = I_\lambda(u).$$

Portanto, u_λ é um minimizador local de I_λ em X. $\square$

Lema 4.20. *Seja $u_0 \geq 0$ ($u_0 \in X$) um minimizador local de I_λ em X. Então u_0 é um minimizador local de I_λ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que u_0 não é um minimizador local de I_λ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Então, existe uma sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_0) \quad \text{e} \lim_{n\to\infty} \mid \nabla u_n - \nabla u_0 \mid_\Phi = 0. \tag{4.56}$$

Façamos

$$Q(u) = \int_\Omega \{\Phi(\mid u - u_0 \mid) + F(x,u) - F(x,u_0) - f(x,u_0)(u-u_0)\}dx,$$

para $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e

$$Z_\varepsilon := \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); Q(u) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Note que $Q \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega))$ e para cada $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$Q'(u)v = \int_\Omega \{\phi(\mid u - u_0 \mid)(u-u_0)v + f(x,u)v - f(x,u_0)v\}dx.$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tal que $u \geq u_0$, temos de (f_6) que

$$\begin{aligned} F(x,u) - F(x,u_0) - f(x,u_0)(u-u_0) &= \int_0^u f(x,s)ds - \int_0^{u_0} f(x,s)ds \\ &\quad -f(x,u_0)(u-u_0) \\ &= \int_{u_0}^u f(x,s)ds - \int_{u_0}^u f(x,u_0)ds \\ &\geq \int_{u_0}^u f(x,u_0)ds - \int_{u_0}^u f(x,u_0)ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, se $u < u_0$, novamente de (f_6), temos que

$$\begin{aligned} F(x,u) - F(x,u_0) - f(x,u_0)(u-u_0) &= \int_0^u f(x,s)ds - \int_0^{u_0} f(x,s)ds \\ &\quad + f(x,u_0)(u_0 - u) \\ &= -\int_u^{u_0} f(x,s)ds + \int_u^{u_0} f(x,u_0)ds \\ &\geq -\int_u^{u_0} f(x,u_0)ds + \int_u^{u_0} f(x,u_0)ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F(x,u) - F(x,u_0) - f(x,u_0)(u-u_0) \geq 0 \text{ em } \Omega. \tag{4.57}$$

Note que

(i) $\int_\Omega \Phi(| u_n - u_0 |)dx \to 0$;

(ii) $\int_\Omega F(x,u_n)dx \to \int_\Omega F(x,u_0)dx$;

(iii) $\int_\Omega f(x,u_0)(u_n - u_0)dx \to 0$.

Fazendo $\varepsilon_n = Q(u_n) > 0$ (de (4.56) e (4.57)) e usando $(i) - (iii)$, temos que $\varepsilon_n \to 0$.

Usando (f_2), (f_3) e o fato de $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ ser crescente, segue que

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \leq C_0 \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s} ds \leq C_0 \int_0^t \frac{\Phi(t)}{t} ds = C_0 \Phi(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(x,u)dx &\leq C_0 \int_\Omega \Phi(| u |)dx \\ &\leq C_0 \int_\Omega \Phi(| u - u_0 | + | u_0 |)dx \\ &\leq C_1 \Big(\int_\Omega \Phi(| u - u_0 |)dx + \int_\Omega \Phi(| u_0 |)dx \Big) \\ &\leq C_1 \int_\Omega \Phi(| u - u_0 |)dx + C_2 \\ &\leq C_1 \int_\Omega \{ \Phi(| u - u_0 |) + F(x,u) - F(x,u_0) \\ &\quad - f(x,u_0)(u - u_0) \} dx + C_2 \\ &= C_1 Q(u) + C_2. \end{aligned} \tag{4.58}$$

De (4.58), para cada $u \in Z_{\varepsilon_n}$, obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq -\lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq -\lambda(C_1 Q(u) + C_2) \\ &\geq -\lambda(C_1 \varepsilon_n + C_2), \end{aligned}$$

donde

$$\inf_{u \in Z_{\varepsilon_n}} I_\lambda(u) \geq -\lambda(C_3 \varepsilon_n + C_4).$$

Assim, desde que

- Z_{ε_n} é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois Z_{ε_n} é fechado e convexo),
- I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- I_λ é coercivo,

temos, do Teorema A.17 (ver Apêndice A), que I_λ possui um minimizante $v_n \in Z_{\varepsilon_n}$.

Afirmamos que $v_n \neq u_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $v_{n_0} \equiv u_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então u_0 seria minimizante de I_λ em $Z_{\varepsilon_{n_0}}$ na topologia de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Mas, desde que $u_n \in Z_{\varepsilon_{n_0}}$ para n suficientemente grande, tem-se $I_\lambda(u_0) \leq I_\lambda(u_n)$, para n suficientemente grande, contradizendo (4.56).

Além disso, segue de (4.56) e do fato de v_n ser minimizante de I_λ em Z_{ε_n} que

$$I_\lambda(v_n) \leq I_\lambda(u_n) \leq I_\lambda(u_0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.59}$$

Afirmação 4.21. *Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $\mu_n \in \mathbb{R}$ um parâmetro a ser determinado, e*

$$h_n = \lambda f(x, v_n) - \mu_n(\phi(| v_n - u_0 |)(v_n - u_0) + f(x, v_n) - f(x, u_0)).$$

Afirmamos que

$$\begin{cases} -div(\phi(| \nabla v_n |)\nabla v_n) = h_n, & em\ \Omega \\ v_n = 0, & na\ \partial\Omega \end{cases}$$

Dividiremos a prova desta afirmação em dois casos:

1º caso: $v_n \in int Z_{\varepsilon_n}$

Se $v_n \in intZ_{\varepsilon_n}$, então $I_\lambda^{'}(v_n) = 0$, e assim, tomando $\mu_n = 0$ segue que

$$I_\lambda^{'}(v_n) = \mu_n Q^{'}(v_n).$$

2º caso: $v_n \in \partial Z_{\varepsilon_n}$

Inicialmente, observe que

$$Q(u_0) = 0 < \varepsilon_n,$$

logo, $u_0 \notin \partial Z_{\varepsilon_n} = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); Q(u) = \varepsilon_n\}$. Deste fato, segue de (f_6) que

$$(f(x,u) - f(x,u_0))(u - u_0) \geq 0, \text{ para todo } u \in \partial Z_{\varepsilon_n}. \tag{4.60}$$

Então, para $u \in \partial Z_{\varepsilon_n}$, temos de (4.60),

$$\begin{aligned}
\langle Q^{'}(u), u - u_0\rangle &= \int_\Omega \phi(\mid u - u_0 \mid) \mid u - u_0 \mid^2 dx + \int_\Omega f(x,u)(u - u_0)dx \\
&\quad - \int_\Omega f(x,u_0)(u - u_0)dx \\
&= \int_\Omega \phi(\mid u - u_0 \mid) \mid u - u_0 \mid^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega (f(x,u) - f(x,u_0))(u - u_0)dx \\
&> 0,
\end{aligned}$$

donde,

$$Q^{'}(u) \neq 0. \tag{4.61}$$

De (4.61) e do fato de $I_\lambda \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema A.30, em Apêndice A) que existe $\mu_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$I_\lambda^{'}(v_n) = \mu_n Q^{'}(v_n).$$

Portanto, para $v_n \in \partial Z_{\varepsilon_n}$,

$$\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla v_n \mid)\nabla v_n) = h_n, & \text{em } \Omega \\ v_n = 0, & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Afirmamos agora que $\mu_n \geq 0$. De fato, caso $\mu_n < 0$,

$$\begin{aligned}
\langle I_\lambda^{'}(v_n), u_0 - v_n\rangle &= \mu_n \langle Q^{'}(v_n), u_0 - v_n\rangle \\
&= \mu_n \int_\Omega \phi(\mid u_0 - v_n \mid) \mid u_0 - v_n \mid^2 dx \\
&\quad + \mu_n \int_\Omega (f(x,u_0) - f(x,v_n))(u_0 - v_n)dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0}\frac{I_\lambda(v_n+t(u_0-v_n))-I_\lambda(v_n)}{t}=\langle I'_\lambda(v_n),v_n-u_0\rangle<0.$$

Daí, tomando $t\in(0,1)$ suficientemente próximo de 0, tem-se

$$I_\lambda(v_n+t(u_0-v_n))<I_\lambda(v_n). \tag{4.62}$$

Ora, como Z_{ε_n} é convexo e $t\in(0,1)$, então

$$v_n+t(u_0-v_n)=(1-t)v_n+tu_0\in Z_{\varepsilon_n},$$

logo, (4.62) contradiz o fato de que v_n é mínimo de I_λ em Z_{ε_n}. Provando assim que $\mu_n\geq 0$.

Por hipótese, u_0 é minimizador local de I_λ em X, desta forma, para $\varphi\in X$,

$$\int_\Omega\phi(|\nabla u_0|)\nabla u_0\nabla\varphi dx=\lambda\int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx. \tag{4.63}$$

Portanto, usando a Proposição 3.17, a Afirmação 4.21 e (4.63), segue-se que

$$\begin{aligned}
0 &< \int_\Omega(\phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n-\phi(|\nabla u_0|)\nabla u_0)(\nabla v_n-\nabla u_0)dx\\
&= \int_\Omega\Big(\lambda f(x,v_n)-\mu_n(\phi(|v_n-u_0|)(v_n-u_0)+f(x,v_n)-f(x,u_0))\\
&\quad -\lambda f(x,u_0)\Big)(v_n-u_0)dx\\
&= -(\mu_n-\lambda)\int_\Omega(f(x,v_n)-f(x,u_0))(v_n-u_0)dx\\
&\quad -\mu_n\int_\Omega\phi(|v_n-u_0|)\,|v_n-u_0|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Desde que $v_n\neq u_0$, temos

$$\int_\Omega\phi(|v_n-u_0|)\,|v_n-u_0|^2\,dx>0. \tag{4.65}$$

Além disso, de (f_6),

$$\int_\Omega(f(x,v_n)-f(x,u_0))(v_n-u_0)dx\geq 0. \tag{4.66}$$

Assim, de (4.64)-(4.66),

$$0\leq\mu_n<\lambda. \tag{4.67}$$

Agora, utilizando (4.57), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(| v_n |)dx &\leq C_1\Big(\int_\Omega \Phi(| v_n - u_0 |)dx + \int_\Omega \Phi(| u_0 |)dx\Big) \\
&\leq C_1\Big(Q(v_n) + \int_\Omega \Phi(| u_0 |)dx\Big) \\
&\leq C_1\Big(\varepsilon_n + \int_\Omega \Phi(| u_0 |)dx\Big) \\
&\leq C_2.
\end{aligned}$$

Da Proposição 1.34, existe $C_0 > 0$ tal que

$$| v_n |_\Phi \leq C_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.68}$$

Por outro lado, defina

$$\gamma_n(x,t) = f(x,t) - \frac{\mu_n}{\lambda}(\phi(| t - u_0(x) |)(t - u_0(x)) - f(x,u_0) + f(x,t)).$$

Segue de (4.67) que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x,t)t &\leq | \gamma_n(x,t) | t \\
&= | f(x,t)t - \frac{\mu_n t}{\lambda}(\phi(| t - u_0 |)(t - u_0) - f(x,u_0) + f(x,t)) | \\
&\leq f(x,t)t + t\phi(| t - u_0 |) | t - u_0 | + f(x,u_0)t + f(x,t)t \\
&\leq 2f(x,t)t + \frac{t}{| t - u_0 |} m\Phi(| t - u_0 |) + f(x,u_0)t \\
&\leq 2f(x,t)t + C_1\Phi(| t - u_0 |) + C_2 t \\
&\leq C_3\Phi(t) + C_1\Phi(t) + C_1\Phi(u_0) + C_2 t \\
&\leq Ct\Big(1 + \frac{\Phi(t)}{t}\Big), \ x \in \Omega \text{ e } t > 0.
\end{aligned}$$

Observando que v_n é solução do problema

$$\begin{cases} -div(\phi(| \nabla v_n |)\nabla v_n) = \lambda\gamma_n(x,t), & \text{em } \Omega \\ v_n = 0, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

podemos concluir (utilizando a Observação 4.3) que $\{v_n\} \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ e

$$\| v_n \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d, \tag{4.69}$$

onde $d = d(| v_n |_\Phi, \lambda, N)$. De (4.68) e (4.69), existe $d_0 = d_0(\lambda, N, C_0) > 0$ tal que

$$\| v_n \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.70}$$

Afirmação 4.22. *Existem* $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ *e* $v_0 \in X$ *tal que*

$$v_{n_j} \to v_0 \text{ em } X.$$

Para provar esta afirmação, observe os seguintes fatos:

- $\{v_n\}$ é limitada em $C^1(\overline{\Omega})$.

Uma vez que $\{\| v_n \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\}$ é limitada (ver (4.70)) e $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ continuamente, segue que $\{\| v_n \|_{C^1(\overline{\Omega})}\}$ também é limitada.

- $\{v_n\}$ e $\left\{\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\right\}$ são uniformemente equicontínuas em $\overline{\Omega}$.

Desde que $\{v_n\} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, existe $C > 0$ tal que

$$| v_n(x) - v_n(y) | \leq C \mid x - y \mid^{\alpha}, \quad x, y \in \overline{\Omega}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, então, para $x, y \in \overline{\Omega}$ tais que $| x - y |< \delta$, temos que

$$| v_n(x) - v_n(y) | \leq C \mid x - y \mid^{\alpha} < C\left(\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},$$

mostrando que $\{v_n\}$ é uniformemente equicontínuo em $\overline{\Omega}$. Analogamente, mostra-se que $\left\{\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{N}$ são uniformente equicontínuos em $\overline{\Omega}$.

Destes fatos, usando Arzelá-Ascoli (ver Teorema A.23), existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ e $v_0 \in C(\overline{\Omega})$ tais que

$$v_n \to v_0 \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0.$$

Agora, utilizando o Teorema de Arzelá-Ascoli para $\left\{\dfrac{\partial v_n}{\partial x_1}\right\}_{N \in \mathbb{N}_0}$, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0$ e $w_1 \in C(\overline{\Omega})$ tais que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_1} \to w_1 \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_1.$$

Segue do Teorema de Dini, que $\dfrac{\partial v_0}{\partial x_1} = w_1$.

Repetindo este argumento $N-1$ vezes, obtemos um subconjunto infinito $\mathbb{N}_N \subset \mathbb{N}_{N-1}$ tal que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_N} \to \frac{\partial v_0}{\partial x_N} \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_N.$$

E, consequentemente, concluímos que

$$\mid \nabla v_n - \nabla v_0 \mid \to 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}_N,$$

isto é,

$$v_n \to v_0 \text{ em } X, \text{ para } n \in \mathbb{N}_N,$$

mostrando a afirmação.

Por outro lado, utilizando que $v_n \in Z_{\varepsilon_n}$ e $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega \Phi(\mid v_n - u_0 \mid)dx \leq Q(v_n) \leq \varepsilon_n \to 0,$$

o que implica

$$\mid v_n - u_0 \mid_\Phi \to 0.$$

Pela unicidade de limite, concluímos que $v_0 = u_0$. Portanto,

$$v_n \to u_0 \text{ em } X, \text{ para } n \in \mathbb{N}_N,$$

e, de (4.59),

$$I_\lambda(v_n) < I_\lambda(u_0), \quad n \in \mathbb{N}_N,$$

o que contradiz a hipótese de que u_0 é um minimizador local de I_λ em X. $\square$

Dos Lemas 4.15, 4.16 e 4.20, temos imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 4.23. *As funções $u = 0$ e u_λ são minimizadores locais de I_λ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

A fim de obter uma terceira solução v_λ de (P_λ) e uma ordenação entre esta solução e u_λ, consideremos o funcional

$$J_\lambda(w) = \int_\Omega \{\Phi(\mid \nabla(u_\lambda + w) \mid) - \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda \nabla w - \lambda G(x,w)\}dx, \quad w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$$

e

$$g(x,s) = \begin{cases} f(x, u_\lambda(x) + s) - f(x, u_\lambda(x)), & \text{para} \quad s < 0 \\ 0, & \text{para} \quad s \geq 0. \end{cases}$$

Observe que o funcional J_λ é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned}\langle J_\lambda^{'}(w), \varphi\rangle &= \int_\Omega \phi(\mid \nabla(u_\lambda + w) \mid)\nabla(u_\lambda + w)\nabla\varphi dx - \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda \nabla\varphi dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega g(x, w)\varphi dx, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Lema 4.24. *$w = 0$ e $-u_\lambda$ são minimizadores locais de J_λ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Demonstração. Dado $t < 0$, veja que

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_0^t f(x, u_\lambda(x) + s)ds - \int_0^t f(x, u_\lambda(x))ds \\ &= \int_{u_\lambda(x)}^{u_\lambda(x)+t} f(x, r)dr - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= \int_0^{u_\lambda(x)+t} f(x, r)dr - \int_0^{u_\lambda(x)} f(x, r)dr - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= F(x, u_\lambda(x) + t) - F(x, u_\lambda(x)) - f(x, u_\lambda(x))t, \ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Para $t \geq 0$, temos de (f_6),

$$\begin{aligned} F(x, u_\lambda(x) + t) &- F(x, u_\lambda(x)) - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= \int_0^{u_\lambda(x)+t} f(x, s)ds - \int_0^{u_\lambda(x)} f(x, s)ds - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= \int_{u_\lambda(x)}^{u_\lambda(x)+t} f(x, s)ds - f(x, u_\lambda(x))t \\ &\geq \int_{u_\lambda(x)}^{u_\lambda(x)+t} f(x, u_\lambda)ds - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= f(x, u_\lambda)t - f(x, u_\lambda(x))t \\ &= 0 \\ &= G(x, t), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por estes fatos,

$$G(x, t) \leq F(x, u_\lambda(x) + t) - F(x, u_\lambda(x)) - f(x, u_\lambda(x))t, \text{ para } t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \tag{4.72}$$

Para $w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\mid \nabla w \mid_\Phi$ suficientemente pequeno, segue de (4.72) e Corolário 4.23,

$$J_\lambda(w) - J_\lambda(0) = \int_\Omega \{\Phi(\mid \nabla(u_\lambda + w) \mid) - \Phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)$$

$$
\begin{aligned}
& -\phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla w - \lambda G(x,w)\}dx \\
\geq & \int_\Omega \Big\{\Phi(|\nabla(u_\lambda + w)|) - \Phi(|\nabla u_\lambda|) - \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla w \\
& -\lambda\Big(F(x,u_\lambda(x)+w) - F(x,u_\lambda(x)) - f(x,u_\lambda(x))w\Big)\Big\}dx \\
= & \; I_\lambda(u_\lambda + w) - I_\lambda(u_\lambda) - \langle I_\lambda^{'}(u_\lambda), w\rangle \\
= & \; I_\lambda(u_\lambda + w) - I_\lambda(u_\lambda) \\
\geq & \; 0, \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

mostrando que $w = 0$ é um minimizador local de J_λ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Além disso, desde que $-u_\lambda \leq 0$ e u_λ é uma solução de (P_λ), temos

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(-u_\lambda) - J_\lambda(0) &= \int_\Omega \{\phi(|\nabla u_\lambda|) \mid \nabla u_\lambda|^2 - \lambda G(x,-u_\lambda) - \Phi(|\nabla u_\lambda|)\}dx \\
&= \int_\Omega \{\phi(|\nabla u_\lambda|) \mid \nabla u_\lambda|^2 + \lambda F(x,u_\lambda) \\
&\quad -\lambda f(x,u_\lambda)u_\lambda - \Phi(|\nabla u_\lambda|)\}dx \\
&= \langle I^{'}(u_\lambda), u_\lambda\rangle - I_\lambda(u_\lambda) \\
&= -I_\lambda(u_\lambda). \qquad (4.74)
\end{aligned}
$$

De (4.73) e (4.74), temos

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(w) - J_\lambda(-u_\lambda) &= J_\lambda(w) - J_\lambda(0) + I_\lambda(u_\lambda) \\
&\geq I_\lambda(u_\lambda + w) - I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(u_\lambda) \\
&= I_\lambda(u_\lambda + w).
\end{aligned}
$$

Desde que $u = 0$ é um minimizador local estrito de I_λ, obtemos, para $w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ com $|\nabla w - \nabla(-u_\lambda)|_\Phi = |\nabla(u_\lambda + w)|_\Phi$ suficientemente pequeno,

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(w) - J_\lambda(-u_\lambda) &\geq I_\lambda(u_\lambda + w) \\
&> I_\lambda(0) = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $w \in B_\delta(-u_\lambda)$,

$$
J_\lambda(-u_\lambda) < J_\lambda(w).
$$

Portanto, $-u_\lambda$ é um minimizador local estrito de J_λ. $\square$

Através do lema a seguir, verificaremos que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Lema 4.25. *O funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, isto é, se*
$$J_\lambda'(u_n) \to 0 \ \text{em}\ W_0^{1,\Phi}(\Omega)^* \ \text{e}\ J_\lambda(u_n) \to c, \quad c \in \mathbb{R},$$
então $\{u_n\}$ contém uma subsequência convergente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Demonstração. Para provar esse lema, considere $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

- $\| J_\lambda'(u_n) \| \to 0$;
- $\{J_\lambda(u_n)\}$ é limitado.

Utilizando o fato de u_λ ser minimizador local de I_λ e (4.19), temos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) &= \int_\Omega \Phi(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid)dx - \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda \nabla u_n dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega F(x, u_\lambda + u_n)dx + \lambda \int_\Omega F(x, u_\lambda)dx + \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda)u_n dx \\
&\geq \Big(\int_\Omega \Phi(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid)dx - \lambda \int_\Omega F(x, u_\lambda + u_n)dx \Big) \\
&\quad -\Big(\int_\Omega \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda \nabla u_n dx - \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda)u_n dx \Big) \\
&= I_\lambda(u_\lambda + u_n) - \langle I_\lambda'(u_\lambda), u_n \rangle \\
&= I_\lambda(u_\lambda + u_n) \\
&\geq \frac{1}{2}\xi_0(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid) - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid,
\end{aligned}$$

isto é,
$$\frac{1}{2}\xi_0(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid) \leq J_\lambda(u_n) + \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid . \tag{4.75}$$
Desde que $\{J_\lambda(u_n)\}$ é limitada, segue de (4.75) que $\{u_\lambda + u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Então, existe $M > 0$ tal que

$$\mid \nabla u_n \mid_\Phi - \mid \nabla u_\lambda \mid_\Phi \leq \mid \nabla u_\lambda + \nabla u_n \mid_\Phi \leq M,$$

donde,
$$\mid \nabla u_n \mid_\Phi \leq M + \mid \nabla u_\lambda \mid_\Phi .$$
E, portanto, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Ora, como $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, existe $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, a menos de subsequência.

Por outro lado, segue da imersão compacta de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $L_\Phi(\Omega)$ que, considerando uma subsequência se necessário, $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$. Além disso, como $\| J_\lambda'(u_n) \| \to 0$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos
$$\langle J_\lambda'(u_n), u_n - u \rangle \to 0. \tag{4.76}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\langle J_\lambda^{'}(u_n), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \phi(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid)\nabla(u_\lambda + u_n)\nabla(u_n + u)dx \\
&\quad - \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda \nabla(u_n - u)dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda + u_n)(u_n - u)dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda)(u_n - u)dx \\
&= \langle I_\lambda^{'}(u_\lambda + u_n), u_n - u\rangle - \langle I_\lambda^{'}(u_\lambda), u_n - u\rangle \\
&= \langle I_\lambda^{'}(u_\lambda + u_n), u_n - u\rangle. \qquad (4.77)
\end{aligned}
$$

Assim, de (4.76) e (4.77),

$$\langle I_\lambda^{'}(u_\lambda + u_n), u_n - u\rangle \to 0. \qquad (4.78)$$

Por outro lado,

$$\mathcal{F}(u_\lambda + u) = \lambda \int_\Omega F(x, u_\lambda + u)dx \in C^1(L_\Phi(\Omega), \mathbb{R})$$

e

$$\langle \mathcal{F}^{'}(u_\lambda + u_n), u_n - u\rangle = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda + u_n)(u_n - u)dx \to 0. \qquad (4.79)$$

De (4.79) e (4.78),

$$\langle P^{'}(u_\lambda + u_n), u_n - u\rangle = \lambda \int_\Omega \phi(\mid \nabla(u_\lambda + u_n) \mid)\nabla(u_\lambda + u_n)\nabla(u_n - u) \to 0.$$

Segue da Proposição 3.21 que $P^{'}$ é do tipo (S_+), portanto, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

como queríamos demonstrar. □

Agora, utilizaremos o Teorema do Link (ver Teorema A.28, em Apêndice A) para garantir a existência de um terceiro ponto crítico w_λ de J_λ, distinto de 0 e $-u_\lambda$.

Lema 4.26. *Existe um ponto crítico não-positivo $w_\lambda \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de J_λ, diferente de $-u_\lambda$ e 0.*

Demonstração. Inicialmente, garantiremos a existência de um ponto crítico de J_λ diferente de $-u_\lambda$ e 0. Sem perda de generalidade, suponha que $J_\lambda(-u_\lambda) \geq J_\lambda(0)$. Neste caso, sendo $-u_\lambda$ um mínimo local de J_λ na topologia de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, existe $\delta \in (0, \mid u_\lambda \mid_\Phi)$ tal que

$$J_\lambda(u) \geq J_\lambda(-u_\lambda), \quad u \in \overline{B_\delta(-u_\lambda)} \tag{4.80}$$

de modo que $0 \notin \overline{B_\delta(-u_\lambda)}$. Defina

$$R_1 := \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); \mid u + u_\lambda \mid_\Phi = \delta\}. \tag{4.81}$$

Considerando

$$\alpha = \max\{J_\lambda(0), J_\lambda(-u_\lambda)\} = J_\lambda(-u_\lambda)$$

e

$$J^\alpha = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); J_\lambda(u) \geq \alpha\},$$

segue-se, de (4.80) e (4.81), que

$$R_1 = \partial B_\delta(-u_\lambda) \subset J^\alpha. \tag{4.82}$$

Além disso,

$$\inf\{J_\lambda(u); \mid u + u_\lambda \mid_\Phi = \delta\} \geq J_\lambda(0) = \max\{J_\lambda(0), J_\lambda(-u_\lambda)\}. \tag{4.83}$$

Observe também, que J_λ verifica a condição $(PS)_{R_1,c}$, para todo $c \in \mathbb{R}$, uma vez que J_λ satisfaz a condição (PS) (ver Observação A.27, em Apêndice A). Então, utilizando (4.82) e (4.83), temos pelo Teorema do Link (ver Teorema A.28, em Apêndice A), que

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(s)) \geq \max\{J_\lambda(0), J_\lambda(-u_\lambda)\}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,\Phi}(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$, é um valor crítico para J_λ, isto é, existe w_λ ($\neq -u_\lambda$ e $\neq 0$) tal que

$$J_\lambda(w_\lambda) = c$$

e

$$\langle J_\lambda'(w_\lambda), \varphi \rangle = 0, \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Agora, provaremos que $w_\lambda \leq 0$ em Ω. Considere

- $w_\lambda^+ \equiv \max\{w_\lambda, 0\}$ e
- $\Omega^+ = \{x \in \Omega; w_\lambda(x) > 0\}$.

Uma vez que w_λ é ponto crítico de J_λ, segue de 4.71 que

$$\int_{\Omega^+}\{\phi(\mid \nabla(u_\lambda+w_\lambda)\mid)\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda\}(\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\nabla u_\lambda)dx$$
$$=\int_{\Omega^+}\{\phi(\mid \nabla(u_\lambda+w_\lambda)\mid)\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda\}(\nabla w_\lambda)dx$$
$$=\lambda\int_{\Omega^+} g(x,w_\lambda)w_\lambda dx. \tag{4.84}$$

Por outro lado,

- $g(x,s)=f(x,u_\lambda(x)+s)-f(x,u_\lambda(x))$, para $s<0$,
- $g(x,s)=0$, para $s\geq 0$.

Logo, de (f_6)

$$g(x,s)\leq 0,\ \text{para } s\in\mathbb{R}.$$

Assim,

$$\lambda\int_{\Omega^+} g(x,w_\lambda)w_\lambda dx\leq 0,$$

daí, de (4.84),

$$\int_{\Omega^+}\{\phi(\mid \nabla(u_\lambda+w_\lambda)\mid)\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda\}(\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\nabla u_\lambda)dx\leq 0. \tag{4.85}$$

Além disso, pela Proposição 3.17, temos

$$\int_{\Omega^+}\{\phi(\mid \nabla(u_\lambda+w_\lambda)\mid)\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda\}(\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\nabla u_\lambda)dx\geq 0. \tag{4.86}$$

Consequentemente, de (4.85) e (4.86),

$$\int_{\Omega^+}\{\phi(\mid \nabla(u_\lambda+w_\lambda)\mid)\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda\}(\nabla(u_\lambda+w_\lambda)-\nabla u_\lambda)dx=0$$

e, portanto, $\nabla w_\lambda=0$ em Ω^+. Ora, pela desigualdade de Poincaré, existe $C>0$ tal que

$$\mid w_\lambda^+\mid_\Phi\leq C\mid \nabla w_\lambda^+\mid_\Phi=0,$$

donde,

$$w_\lambda^+=0 \text{ em } \Omega,$$

isto é,

$$w_\lambda\leq 0 \text{ em } \Omega. \tag{4.87}$$

□

Lema 4.27. *A função* $v_\lambda = u_\lambda + w_\lambda$ $(\leq u_\lambda)$ *é uma solução positiva de* (P_λ).

Demonstração. De (4.87),

$$g(x, w_\lambda(x)) = f(x, u_\lambda(x) + w_\lambda(x)) - f(x, u_\lambda(x)), \quad x \in \Omega.$$

Segue disto e do fato de w_λ ser ponto crítico de J_λ, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\phi(\mid \nabla(u_\lambda + w_\lambda) \mid)\nabla(u_\lambda + w_\lambda) \quad &- \quad \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda)\nabla\varphi dx \\ &= \lambda \int_\Omega g(x, w_\lambda)\varphi dx \\ &= \lambda \int_\Omega (f(x, u_\lambda + w_\lambda) - f(x, u_\lambda)\varphi dx,\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, ou seja,

$$\begin{aligned}-div(\phi(\mid \nabla(u_\lambda + w_\lambda) \mid)\nabla(u_\lambda + w_\lambda)) \quad &+ \quad div(\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda) \\ &= \quad \lambda(f(x, u_\lambda + w_\lambda) - f(x, u_\lambda)).\end{aligned}$$

Tomando $v_\lambda = u_\lambda + w_\lambda$, temos

$$-div(\phi(\mid \nabla(v_\lambda) \mid)\nabla v_\lambda) + div(\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda) = \lambda(f(x, v_\lambda) - f(x, u_\lambda)). \quad (4.88)$$

Por outro lado, como u_λ é solução de (P_λ), então

$$-div(\phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)\nabla u_\lambda) = \lambda f(x, u_\lambda). \quad (4.89)$$

De (4.88) e (4.89),

$$-div(\phi(\mid \nabla v_\lambda \mid)\nabla v_\lambda) = \lambda f(x, v_\lambda).$$

Consequentemente, v_λ é solução de (P_λ). Além disso, desde que $w_\lambda \leq 0$ em Ω, tem-se $v_\lambda \leq u_\lambda$, com v_λ não trivial e $v_\lambda \neq u_\lambda$ em Ω. Portanto, do Lema 3.28,

$$v_\lambda > 0 \text{ em } \Omega.$$

□

Finalmente, apresentaremos o principal resultado desse capítulo.

Teorema 4.28. *Sejam* $(\phi_1) - (\phi_3)$, (f_1), (f_2') *e* $(f_4) - (f_6)$ *satisfeitas. Então, existe uma constante* $\Lambda > 0$ *tal que*

(i) *para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$, (P_λ) *não tem solução positiva;*

(ii) *para $\lambda = \Lambda$, (P_λ) tem pelo menos uma solução positiva;*

(iii) *para todo $\lambda > \Lambda$, (P_λ) tem pelo menos duas soluções positivas u_λ, v_λ satisfazendo $v_\lambda \leq u_\lambda$ e $v_\lambda \neq u_\lambda$ em Ω.*

Demonstração. Seja Λ a constante dada em (4.50).

Verificação de (i): Segue imediatamente do Lema 4.7.

Verificação de (iii): Segue dos Lemas 4.16 e 4.27.

Verificação de (ii): Inicialmente, considere uma sequência $\{\lambda_n\}$ tal que

- $\Lambda < \lambda_n < \Lambda + 1$,
- $\lambda_n \to \Lambda$ quando $n \to \infty$,

e seja u_{λ_n} uma solução positiva de (P_{λ_n}).

Afirmação 4.29. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que a desigualdade*

$$f(x,t)t \leq \varepsilon\Phi(t) + C_\varepsilon$$

vale para todo $t \geq 0$.

De (f_5), para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq \varepsilon\Phi(t), \text{ para } 0 \leq t \leq \delta_1. \tag{4.90}$$

Além disso, de (f_4), existe $K > 0$, suficientemente grande, tal que

$$f(x,t)t \leq \varepsilon\Phi(t), \text{ para } t \geq \delta_2. \tag{4.91}$$

Logo, de (4.90) e (4.91), existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq \varepsilon\Phi(t) + C_\varepsilon, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

mostrando assim a Afirmação 4.29.

Utilizando (ϕ_2), a Afirmação 4.29 e o Lema 2.19, obtemos

$$\begin{aligned}
l\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{\lambda_n} \mid)dx &\leq \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_{\lambda_n} \mid) \mid \nabla u_{\lambda_n} \mid^2 dx \\
&= \lambda_n \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} dx \\
&< (\Lambda + 1)\Big(\varepsilon \int_\Omega \Phi(u_{\lambda_n})dx + C_\varepsilon \mid \Omega \mid\Big) \\
&\leq (\Lambda + 1)\Big(C_\Phi \varepsilon \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{\lambda_n} \mid)dx + C_\varepsilon \mid \Omega \mid\Big)
\end{aligned}$$

Daí, para $\varepsilon = \dfrac{l}{2(\Lambda+1)C_\Phi}$,

$$\xi_0(|\nabla u_{\lambda_n}|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|\nabla u_{\lambda_n}|)dx \leq \frac{2C_\Lambda |\Omega| (\Lambda+1)}{l}$$

Donde segue-se, pela desigualdade de Poincaré, que

$$\frac{1}{C} | u_{\lambda_n} |_\Phi \leq | \nabla u_{\lambda_n} |_\Phi \leq \xi_0^{-1}\Big(\frac{2(\Lambda+1)C_\Lambda |\Omega|}{l}\Big). \tag{4.92}$$

Por outro lado, da Observação 4.3, $u_{\lambda_n} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$ e

$$| u_{\lambda_n} |_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

onde $d = d(C_\Phi, \Lambda, |\Omega|, l) > 0$. Utilizando o mesmo raciocínio da Afirmação 4.22, existem uma subsequência $\{u_{\lambda_{n_k}}\}$ de $\{u_{\lambda_n}\}$ e $u_{\lambda_0} \in C^1(\overline{\Omega})$ tais que

$$u_{\lambda_{n_k}} \to u_{\lambda_0} \text{ em } C^1(\overline{\Omega}),$$

donde

$$\| u_{\lambda_{n_k}} - u_{\lambda_0} \|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \to 0,$$

e daí,

$$u_{\lambda_{n_k}} \to u_{\lambda_0}, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Por outro lado, desde que $\lambda_n \to \Lambda$, temos

$$\lambda_0 = \Lambda.$$

e assim

$$u_{\lambda_{n_k}} \to u_\Lambda \geq 0 \text{ em } C^1(\overline{\Omega}). \tag{4.93}$$

Uma vez que u_{λ_n} é solução de (P_{λ_n}), temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_{\lambda_n}|)\nabla u_{\lambda_n} \nabla \varphi dx - \lambda_n \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n})\varphi dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos de (4.93)

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\Lambda|)\nabla u_\Lambda \nabla \varphi dx - \Lambda \int_\Omega f(x, u_\Lambda)\varphi dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Afirmação 4.30. $u_\Lambda \neq 0$.

Com efeito, suponha por contradição que $u_\Lambda \equiv 0$, logo $u_{\lambda_n} \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Daí, segue de (f_5) que dado $\varepsilon > 0$, temos

$$| f(x, u_{\lambda_n}) u_{\lambda_n} | \leq \varepsilon \Phi(| u_{\lambda_n} |), \quad x \in \Omega,$$

para n suficientemente grande. Por este fato,

$$\begin{aligned} l \int_\Omega \Phi(| \nabla u_{\lambda_n} |) dx &\leq \int_\Omega \phi(| \nabla u_{\lambda_n} |) \mid u_{\lambda_n} |^2 \, dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega f(x, u_{\lambda_n}) u_{\lambda_n} dx \\ &\leq \lambda_n \varepsilon \int_\Omega \Phi(| u_{\lambda_n} |) dx \\ &\leq C_\Phi \lambda_n \varepsilon \int_\Omega \Phi(| \nabla u_{\lambda_n} |) dx, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Agora, observando que

$$\int_\Omega \Phi(| \nabla u_{\lambda_n} |) dx \neq 0,$$

obtemos

$$\lambda_n \geq \frac{l}{C_\Phi \varepsilon}, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, tem-se

$$\Lambda \geq \frac{l}{C_\Phi \varepsilon}, \text{ para todo } \varepsilon > 0,$$

fazendo agora $\varepsilon \to 0^+$, obtemos que

$$\Lambda \to \infty,$$

uma contradição, mostrando assim a Afirmação 4.30.

Desde que

$$div(\phi(| \nabla u_\Lambda |) \nabla u_\Lambda) = \Lambda f(x, u_\Lambda) \neq 0,$$

pelo Lema 3.28, temos $u_\Lambda > 0$ em Ω. Isto completa a prova de (ii), e consequentemente a demonstração do teorema. □

Capítulo 5

Solução maximal

Utilizando argumentos de sub e supersolução, mostraremos, neste capítulo, a existência de uma solução maximal para o problema:

$$(P_\lambda)\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

5.1 Existência de solução maximal

Conforme visto no Capítulo 2, a função de crescimento crítico associado a Φ, Φ_*, é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}} ds. \tag{5.1}$$

Assumindo sobre a N-função Φ as condições $(\phi_1) - (\phi_3)$ vistas no Capítulo 3, conclui-se que Φ_* está bem definido. E portanto define uma N-função, conforme pode ser visto no Lema 2.14. A fim de construir uma solução maximal para o problema (P_λ), assumiremos sobre $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as condições $(f_1) - (f_4)$ (vistas no Capítulo 4) e a seguinte condição:

(f_7) existe uma N-função $\Psi = \displaystyle\int_0^t \psi(s) s ds$ equivalente a Φ_* no infinito (isto é, $\psi \sim \Phi_*$) e uma constante $K > 0$, tal que

$$f(x,t) + K.\Psi^{'}(t) \text{ é não-decrescente em } (0, +\infty),$$

para cada $x \in \Omega$.

Definição 5.1. *Dizemos que $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é solução maximal do problema (P_λ), sempre que*

- *v é solução de (P_λ) e*
- *para toda solução $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de (P_λ), temos $v \geq u$ em Ω.*

Nosso objetivo agora, é mostrar a existência de uma solução maximal para (P_λ). Para isto, considere o seguinte problema de valores de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{rl} -div(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) + \lambda K \psi(\mid u \mid)u = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5.2}$$

onde $h \in L^\infty(\Omega)$ e $\psi(t)t = \Psi'(t)$, $t > 0$.

Lema 5.2. *Para todo $h \in L^\infty(\Omega)$, existe uma solução v de (5.2) em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos definir o funcional energia $E : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado a (5.2), dado por

$$E(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx + \lambda K \int_\Omega \Psi(\mid u \mid)dx - \int_\Omega hudx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Observe que $E \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$. Usando o fato de h ser limitada, segue das desigualdades de Holder e Poincaré que

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx - 2 \mid h \mid_{\widetilde{\Phi}} \mid u \mid_\Phi \\ &\geq \xi_0(\mid \nabla u \mid_\Phi) - 2C_0 \mid h \mid_{\widetilde{\Phi}} \mid \nabla u \mid_\Phi \\ &= \xi_0(\mid \nabla u \mid_\Phi) - C_1 \mid \nabla u \mid_\Phi, \end{aligned} \tag{5.3}$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Deste fato, temos que E é um funcional coercivo.

Agora, considere $\zeta(t) = \xi_0(t) - C_1 t$ em $[0, +\infty)$. Note que ζ é contínua e coerciva, consequentemente, é limitada inferiormente. Deste fato, segue de (5.3), que

$$\nu := \inf_{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)} E(u) > -\infty, \tag{5.4}$$

está bem definido.

Afirmação 5.3. *O funcional E é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Da Proposição 3.14, segue que

$$P(u) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

é fracamente semicontínuo inferiormente. Analogamente ao feito na Proposição 3.14, tem-se que

$$u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \mapsto \int_\Omega \Psi(|\ \nabla u\ |)dx$$

tembém é fracamente semicontínuo inferiormente. Destes fatos, considerando $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n\ |)dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \Psi(|\ \ u_n\ |)dx \\
&\quad - \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega h u_n dx \\
&\geq \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u\ |)dx + \int_\Omega \Psi(|\ \ u\ |)dx - \int_\Omega hudx \\
&= E(u).
\end{aligned}$$

Afirmação 5.4. *O funcional E possui um mínimo global em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

De fato, para provar isto tomemos uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$E(u_n) \to \nu.$$

Note que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, uma vez que E é coercivo. Além disso, desde que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, existe $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup v, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Agora, utilizando o fato de E ser fracamente semicontínuo inferiormente

$$\nu \leq E(v) \leq \liminf_{k\to+\infty} E(u_{n_k}) = \nu,$$

donde

$$E(v) = \nu.$$

Logo, v é um minimizador global de E em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e portanto solução de (5.2). $\square$

A seguir, mostraremos uma limitação uniforme para as soluções positivas de (P_λ) em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Lema 5.5. *Seja $\lambda \in (\Lambda, \infty)$. Então, existe uma constante $d = d(\lambda, |\ \Omega\ |, l, m) > 0$ tal que $\|\ u\ \|_{L^\infty(\Omega)} \leq d$ para qualquer solução positiva u de (P_λ).*

Demonstração. Seja $\lambda > \Lambda$ e para este λ, tomemos uma solução positiva u_λ de (P_λ). Vale que

$$\begin{aligned} l\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)dx &\leq \int_\Omega \phi(\mid \nabla u_\lambda \mid) \mid \nabla u_\lambda \mid^2 dx \\ &= \lambda \int_\Omega f(x,u_\lambda)u_\lambda dx \\ &\leq \lambda\Big(\varepsilon \int_\Omega \Phi(u_\lambda)dx + C_\varepsilon \mid \Omega \mid\Big) \\ &= \lambda\varepsilon \int_\Omega \Phi(\mid u_\lambda \mid)dx + \lambda C_\varepsilon \mid \Omega \mid \\ &\leq \lambda\varepsilon C_\Phi \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)dx + \lambda C_\varepsilon \mid \Omega \mid, \end{aligned}$$

daí, para $\varepsilon = \dfrac{l}{2\lambda C_\Phi}$, temos

$$\xi_0(\mid \nabla u_\lambda \mid_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_\lambda \mid)dx \leq \frac{\lambda C_\varepsilon \mid \Omega \mid}{l - \varepsilon\lambda C_\Phi} = \frac{2\lambda C_\lambda \mid \Omega \mid}{l}.$$

Donde segue-se, pela desigualdade de Poincaré, que

$$\frac{1}{C} \mid u_\lambda \mid_\Phi \leq \mid \nabla u_\lambda \mid_\Phi \leq \xi_0^{-1}\Big(\frac{2\lambda C_\lambda \mid \Omega \mid}{l}\Big). \tag{5.5}$$

Por outro lado, do Lema 4.1,

$$\parallel u_\lambda \parallel_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

onde $d = d(\lambda, \mid u_\lambda \mid_\Phi) > 0$. Donde segue-se, pela imersão contínua de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $C^1(\overline{\Omega})$, que

$$\parallel u_\lambda \parallel_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C_1 \mid u_\lambda \mid_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d. \tag{5.6}$$

De (5.5) e (5.6),

$$\begin{aligned} \parallel u_\lambda \parallel_{L^\infty(\Omega)} &\leq \parallel u_\lambda \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \parallel \nabla u_\lambda \parallel_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \mid u_\lambda \mid_{C^1(\overline{\Omega})} \\ &\leq d, \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $d = d(\lambda, \mid \Omega \mid, l, m)$. □

Teorema 5.6. *Assuma $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(f_1) - (f_4)$ e (f_7). Então, para todo $\lambda > \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução w_λ maximal e positiva.*

Demonstração. Inicialmente, fixemos $\lambda \in (\Lambda, \infty)$, e tomemos a supersolução $v(x) \equiv (Fc)(\mid x \mid)$ construída no Lema 4.10. Segue de 4.35, que $v(x)$ pode ser definida de modo que

$$v(x) \geq d, \quad x \in \Omega, \tag{5.8}$$

onde d cumpre (5.7).

Agora, iremos definir, indutivamente, uma sequência $\{v_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de modo que

$$v_1 = v$$

e v_{n+1} é solução do problema:

$$\begin{cases} -div(\phi(\mid \nabla v_{n+1} \mid)\nabla v_{n+1}) + \lambda K\psi(\mid v_{n+1} \mid)v_{n+1} = h_n, & \text{em} \quad \Omega \\ v_{n+1} = 0, & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.9}$$

onde

$$h_n = \lambda K\psi(\mid v_n \mid)v_n + \lambda f(x, v_n).$$

Mostraremos agora que $\{v_n\}$ é uma sequência monótona não-crescente.

Desde que $v_1 > 0$ é uma supersolução de (P_λ),

$$-div(\phi(\mid \nabla v_1 \mid)\nabla v_1) \geq \lambda f(x, v_1) \text{ em } \Omega,$$

implicando que

$$\begin{aligned} -div(\phi(\mid \nabla v_1 \mid)\nabla v_1) + \lambda K\psi(\mid v_1 \mid)v_1 &\geq \lambda f(x, v_1) + \lambda K\psi(\mid v_1 \mid)v_1 \\ &= h_1 \text{ em } \Omega. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Considerando $(v_2 - v_1)_+(x) := \max\{v_2(x) - v_1(x), 0\}$, temos, pelo fato de $\psi(t)t$ ser não-decrescente, que

$$\int_\Omega (\psi(\mid v_2 \mid)v_2 - \psi(\mid v_1 \mid)v_1)(v_2 - v_1)_+ dx \geq 0. \tag{5.11}$$

Agora, sendo $\Omega^+ = \{x \in \Omega; v_2(x) > v_1(x)\}$, segue de (5.9), (5.10) e (5.11) que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^+} (\phi(\mid \nabla v_2 \mid)\nabla v_2 - \phi(\mid \nabla v_1 \mid)\nabla v_1)\nabla(v_2 - v_1)dx \\ &= \int_\Omega (\phi(\mid \nabla v_2 \mid)\nabla v_2 - \phi(\mid \nabla v_1 \mid)\nabla v_1)\nabla(v_2 - v_1)_+ dx \\ &\leq \int_\Omega (\phi(\mid \nabla v_2 \mid)\nabla v_2 - \phi(\mid \nabla v_1 \mid)\nabla v_1)\nabla(v_2 - v_1)_+ dx \\ &\quad +\lambda K \int_\Omega (\psi(\mid v_2 \mid)v_2 - \psi(\mid v_1 \mid)v_1)(v_2 - v_1)_+ dx \\ &\leq \int_\Omega (h_1 - h_1)(v_2 - v_1)_+ dx = 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Segue do Lema 3.16 que

$$\nabla(v_2 - v_1)_+ = 0, \text{ em } \Omega.$$

Usando a desigualdade de Poincaré,

$$| (v_2 - v_1)_+ |_\Phi \leq C \mid \nabla(v_2 - v_1)_+ |_\Phi = 0,$$

e portanto

$$(v_2 - v_1)_+ = 0, \text{ em } \Omega,$$

ou seja,

$$v_2 \leq v_1 \text{ em } \Omega.$$

Seja u_λ uma solução positiva de (P_λ). Então, de (5.8) e do Lema 5.5,

$$u_\lambda \leq d \leq v_1 \text{ em } \Omega.$$

De (f_6),

$$\begin{aligned} h &= \lambda K \psi(| u_\lambda |) u_\lambda + \lambda f(x, u_\lambda) \\ &\leq \lambda K \psi(| v_1 |) v_1 + \lambda f(x, v_1) \\ &= h_1. \end{aligned}$$

Daí, analogamente ao feito em (5.12),

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^+} (\phi(| \nabla u_\lambda |) \nabla u_\lambda - \phi(| \nabla v_2 |) \nabla v_2) \nabla(u_\lambda - v_2) dx \\ &\quad = \int_\Omega (\phi(| \nabla u_\lambda |) \nabla u_\lambda - \phi(| \nabla v_2 |) \nabla v_2) \nabla(u_\lambda - v_2)_+ dx \\ &\quad \leq \int_\Omega (\phi(| \nabla u_\lambda |) \nabla u_\lambda - \phi(| \nabla v_2 |) \nabla v_2) \nabla(u_\lambda - v_2)_+ dx \\ &\qquad + \lambda K \int_\Omega (\psi(| u_\lambda |) u_\lambda - \psi(| v_2 |) v_2)(u_\lambda - v_2)_+ dx \\ &\quad \leq \int_\Omega (h - h_1)(u_\lambda - v_2)_+ dx \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, utilizando o mesmo argumento,

$$u_\lambda \leq v_2 \leq v_1 \text{ em } \Omega.$$

Analogamente, podemos mostrar de modo indutivo que

$$u_\lambda \leq v_{n+1} \leq v_n \text{ em } \Omega, \tag{5.13}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, de (4.34),

$$v_n \leq v_1 = v \leq c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva c, obtida no Lema 4.10. Deste fato, segue de (f_7) que

$$\begin{aligned} \mid h_n - \lambda K\psi(\mid v_{n+1} \mid)v_{n+1} \mid &\leq h_n + \lambda K\psi(\mid v_{n+1} \mid)v_{n+1} \\ &= \lambda(K\psi(\mid v_n \mid)v_n + f(x, v_n)) + \lambda K\psi(\mid v_{n+1} \mid)v_{n+1} \\ &\leq \lambda(K\psi(c)c + f(x, c)) + \lambda K\psi(c)c \\ &= C, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde $C > 0$. Consequentemente,

$$\mid h_n - \lambda K\psi(\mid v_{n+1} \mid)v_{n+1} \mid_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por este fato, uma vez que v_n verifica (5.9), segue do Lema 3.25 que

- $v_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$,
- $\{v_n\}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Analogamente ao feito na Afirmação 4.22, mostra-se que $\{v_n\}$ possui uma subsequência que converge uniformemente para algum w_λ em $C^1(\overline{\Omega})$. Neste caso, tem-se de (5.9) que w_λ é solução de (P_λ). Além disso, passando ao limite de $n \to +\infty$ em (5.13), obtemos

$$u_\lambda \leq w_\lambda \text{ em } \Omega,$$

mostrando assim que w_λ é uma solução maximal de (P_λ). $\square$

Apêndice A

Resultados gerais utilizados

Teorema A.1. *(Ver [4])(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis definidas em $\Omega \in \mathbb{R}^N$ e que converge em quase todo ponto para $f(x)$. Suponha que exista uma função g, com integral de Lebesgue finita sobre Ω, tal que

$$\mid f_n(x) \mid \leq g(x), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e quase todo } x \in \Omega.$$

Então, f é integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Teorema A.2. *(Ver [5]) Sejam $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\mid f_n - f \mid_p \to 0$. Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

- *$f_{n_k}(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω;*
- *$\mid f_{n_k}(x) \mid \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $x \in \Omega$.*

Teorema A.3. *(Ver [4])(Teorema da Convergência Monótona)*

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em Ω e tais que, para $x \in \Omega$, temos

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$$

Definindo $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, então

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Teorema A.4. *(Ver [4])(Lema de Fatou)*

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções não-negativas que converge em quase todo ponto para uma função $f(x)$. Então,

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Teorema A.5. *(Ver [21]) Considere $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ e $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$. Suponha que*

- *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,*
- *$\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_p = \| f \|_p$.*

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0.$$

Definição A.6. *Seja $\Sigma = \{S \subseteq \Omega : S$ é mensurável$\}$ e ν uma função σ-aditiva em Σ. Suponha que $\nu(\emptyset) = 0$. Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue μ e escrevemos $\nu \in AC[\mu]$, se*

$$\mu(S) = 0 \text{ implicar em } \nu(S) = 0,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Teorema A.7. *(Ver [23])(Teorema de Radon-Nikodyn)*

Seja $\nu \in AC[\mu]$ uma função finita. Então, existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Teorema A.8. *(Ver [5])(Teorema de Browder-Minty)*

Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Teorema A.9. *(Ver [4]) Se $f : X \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável, existem subconjuntos $A_1, ..., A_n, ... \in \chi$ não necessariamente disjuntos e $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$, tais que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_n},$$

com

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \chi_{A_n}(x) \leq f(x), x \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Definição A.10. *Um espaço métrico M chama-se* ***localmente compacto*** *quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança compacta. Isto significa naturalmente, que para todo $x \in M$ existe um compacto K, com x pertencente ao interior do conjunto K.*

Teorema A.11. *(Ver [4])(1ª* ***Versão do Teorema de Lusin****)*
Seja (X, β, μ) um espaço de medida satisfazendo:

- *X é um espaço métrico localmente compacto;*
- *β é a σ-álgebra boreliana ao seu completamento;*
- *μ é uma medida regular.*

Suponha que $A \in \beta$ é tal que $\mu(A) < +\infty$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C_0(X)$ tal que

(I) $\mu(\{x \in X; g(x) \neq \chi_A(x)\}) < \epsilon$;

(II) $g(x) \in [0, 1]$, $x \in X$.

Definição A.12. *Um espaço topológico X chama-se um* ***espaço de Hausdorff*** *quando, para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Teorema A.13. *(Ver [4])(2ª* ***Versão do Teorema de Lusin****)*
Sejam

1. *Y um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável;*
2. *(Ω, β, μ) um espaço de medida finito, onde $\Omega \subset Y$;*
3. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável.*

Dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

(I) *f é contínua em K;*

(II) $\mu(\Omega \setminus K) < \epsilon$.

Lema A.14. *(Ver [4]) Seja μ uma medida definida sobre a σ-algebra β.*

(a) Se E_n é uma sequência crescente de conjuntos pertencente a β, então

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n).$$

(b) *Se* F_n *é uma sequência decrescente de conjuntos pertencentes a* β *e* $\mu(F_1) < +\infty$, *então*

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

Teorema A.15. *(Ver [10])(Teorema de aproximações de Weierstrass)*

Sejam $K \subset \mathbb{R}^N$ *subconjunto compacto e* $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Existe uma sequência de polinômios* p_n *definidas sobre* K *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = f$ *uniformemente em* K.

Teorema A.16. *(Ver [5]) Seja* $F \subset E$ *um subespaço vetorial, tal que* $\overline{F} \neq E$. *Então, existe um funcional* $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$, *tal que*

$$\langle f, x\rangle = 0,\ \ x \in F.$$

Teorema A.17. *(Ver [5]) Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo com norma* $|\ .\ |_E$, $M \subset E$ *um subconjunto fracamente fechado em* E *e* $I : E \to \mathbb{R}$ *um funcional coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente em* M. *Então* I *é limitado inferiormente sobre* M *e atinge mínimo em* M.

Proposição A.18. *(Ver [5]) Seja* E *um espaço reflexivo. Se* $F \subset E$ *é um subespaço vetorial fechado, então* F *é reflexivo.*

Proposição A.19. *(Ver [5]) Seja* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que*

- $G(0) = 0$,
- $|\ G'(s)\ | \leq M$, $s \in \mathbb{R}$.

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *com* $1 \leq p \leq +\infty$, *então*

- $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$;
- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = G'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Teorema A.20. *(Ver [5]) Sejam* Ω *um domínio regular aberto e limitado,* $m \geq 1$ *um inteiro e* $1 \leq p < +\infty$. *Então:*

- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$;
- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$;
- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^\infty(\Omega)$.

Definição A.21. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $C(X)$ o espaço das funções de valores reais contínuas em X. Um subconjunto $E \subset C(X)$ é dito* ***equicontínuo*** *se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon,$$

para todo $x, y \in X$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$ e todo $f \in E$.

Definição A.22. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $C(X)$ o espaço das funções de valores reais contínuas em X. Um subconjunto $E \subset C(X)$ é dito* ***equilimitado*** *se existir uma constante $M > 0$ tal que*

$$| f(x) | \leq M,$$

para toda $f \in E$ e todo $x \in X$.

Teorema A.23. *(Ver [30])(Ascoli-Arzelá)*

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $C(X)$ o espaço das funções de valores reais contínuas em X. Um subconjunto $E \subset C(X)$ é relativamente compacto se, e somente se, E é equilimitado e equicontínuo.

Definição A.24. *Um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), quando para toda sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que*

- *$I(x_n)$ seja limitado e*
- *$I'(x_n) \to 0$,*

existe uma subsequência $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_n \to x$ em X.

Observação A.25. *Na Definição A.24, quando $I(x_n) \to c$, $c \in \mathbb{R}$, dizemos que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, e denotamos por $(PS)_c$.*

Definição A.26. *Dados $B \subset X$ e $c \in \mathbb{R}$ dizemos que $I : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale em torno de B no nível c, e denotamos por $(PS)_{B,c}$, quando para toda sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que*

- *$I(x_n) \to c$,*
- *$dist(x_n, B) \to 0$ e*
- *$I'(x_n) \to 0$,*

existe uma subsequência $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_n \to x$ em X.

Observação A.27. *Em particular, se* $B = X$*, temos que* I *satisfaz a condição* $(PS)_c = (PS)_{B,c}$

Considerando um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dado um número real α, fixemos as seguintes notações que serão úteis no próximo teorema:

- $I^\alpha = \{x \in X; I(x) \geq \alpha\}$,
- $K_c(I) = \{x \in X; I'(x) = 0 \text{ e } I(x) = c\}$.

Teorema A.28. *(Ver [31]) (Teorema do Link)*
Seja $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1*, satisfazendo a condição* $(PS)_{R,c}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$*, onde*

$$R = \{x; \| x - x_i \| = r\} \subset I^\alpha,$$

com $x_i \in \{x_1, x_2\}$*,* $r \in (0, \| x_2 - x_1 \|)$ *e* $\alpha = \max\{I(x_1), I(x_2)\}$*. Se existem* $x_1, x_2 \in X$*, com* $x_1 \neq x_2$ *e* r *tais que*

$$\inf\{I(x); \| x - x_i \| = r\} \geq \max\{I(x_1), I(x_2)\},$$

onde x_i *é tal que* $I(x_i) = \max\{I(x_1), I(x_2)\}$*. Então,*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)) \geq \max\{I(x_1), I(x_2)\},$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2\}$*, é um valor crítico para* I *e* $K_c(I) \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$*.*

Definição A.29. *Sejam* E *um espaço de Banach,* $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ *e*

$$S = \{v \in E; F(v) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$*,* $F'(u) \neq 0$*. Se* $J \in C^1(E, \mathbb{R})$*, então dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é valor crítico de* J *sobre* S *se existe* $u \in S$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$J(u) = c$$

e

$$J'(u) = \lambda F'(u).$$

Nesse caso, u *é ponto crítico de* J *sobre* S *e o número real* λ *é chamado* ***multiplicador de Lagrange*** *para o valor crítico* c*.*

Teorema A.30. *(Ver [21])(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)*

Sob as hipóteses e notações da Definição A.29, assuma que $u_0 \in S$ *satisfaz*

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v).$$

Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$J^{'}(u_0) = \lambda F^{'}(u_0).$$

Teorema A.31. *(Ver [3])(Desigualdade de Jensen)*

Sejam (X, δ, μ) *um espaço de medida com* $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ *em* $L^1(X, \mu)$, *e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então,*

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Lema A.32. *(ver [36])(Brézis Lieb para N-funções)*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto,* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *contínua, convexa, par e* $\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{st - \Phi(s)\}.$$

Suponha

(i) $\Phi(t) = 0$ *se, e somente se,* $t = 0$,

(ii) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ *e* $\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$,

(iii) *existem* $\alpha > 0$ *e* $t_1 \geq 0$ *(*$t_1 = 0$, *caso* $\mid \Omega \mid = +\infty$*), tais que*

$$\frac{\Phi_{+}^{'}(t)}{\Phi(t)} < \alpha, \quad t \geq t_1,$$

(iv) *existem* $\beta > 0$ *e* $t_2 \geq 0$ *(*$t_2 = 0$, *caso* $\mid \Omega \mid = +\infty$*), tais que*

$$\frac{\widetilde{\Phi}_{+}^{'}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} < \beta, \quad t \geq t_2.$$

Se $\{f_n\}$ *é uma sequência limitada em* $L_{\Phi}(\Omega)$, *verificando*

$$f_n \to f \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{em } L_{\Phi}(\Omega).$$

Teorema A.33. *(Ver [21]) Suponha que $I : E \to \mathbb{R}$ é contínua e tem derivada de Gâteaux contínua em E. Então I é diferenciável segundo Frechét e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Lema A.34. *(Ver [8]) Sejam $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação estritamente monotônica e $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\langle G(x_n) - G(x), x_n - x\rangle \to 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, $x_n \to x$ em $\mathbb{R}^N$.

Definição A.35. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Um funcional $T : X \to X^*$ é dito **pseudomonotônico** se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que*

- $u_n \rightharpoonup u$ *em* X
- $\limsup_{n\to\infty}\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0,$

implicar que

$$T(u_n) \rightharpoonup T(u) \text{ em } X^*$$

e

$$\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle.$$

Lema A.36. *(Ver [7]) Sejam $F, G : X \to X^*$ operadores em um espaço de Banach reflexivo X. Então, vale que:*

(a) *Se F é monotônico e contínuo, então F é pseudomonotônico;*

(b) *Se F é fracamente contínuo, então F é pseudomonotônico;*

(c) *Se F e G são pseudomonotônicos, então $F + G$ é pseudomonotônico.*

Teorema A.37. *(Ver [1])(Desigualdade de Sobolev)*

Sejam $1 \leq p < N$ e q tais que $q = \dfrac{Np}{N-p}$. Então existe uma constante $C = C_N(p)$ tal que

$$\| u \|_q \leq C \| \nabla u \|_p,$$

para toda função $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto.

Teorema A.38. *(ver [21])(Teorema Generalizado de Lebesgue)*

Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sequências de funções integráveis em Ω e f, g integráveis em Ω, tais que:

- $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω,

- $g_n \to g$ *q.t.p. em* Ω,
- $| f_n | \leq g_n$,
- $\displaystyle\int_\Omega g_n \to \int_\Omega g$.

Então,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Teorema A.39. *(ver [32]) Seja* $\{\xi_n\}$ *uma sequência em um espaço normado* X*. Se* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* X*, então o limite* ξ *é único e a sequência* $\{\xi_n\}$ *é limitada.*

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, INC., 1975

[2] AMBROSETTI, A., BREZIS, H., CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal 122, 519-543, 1994.

[3] BARRA, G *Measure Theory and Integration*, New age international publishers, 2006.

[4] BARTLE, R. G. *Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[5] BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[6] BREZIS, H., NIRENBERG, L. *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris 317, 465-472, 1993.

[7] CARL, S., LE, V. K., MOTREANN, D. *Nonsmooth variational problems and their inequalities - Comparison principles and applications*, Springer, New York, 2007.

[8] DAL MASO, G., MURAT, F. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal.31, 405-412, 1998.

[9] DONALDSON, T. K., TRUDINGER, N. S. *Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems*, Journal of Functional Analysis 8, 52-75, 1971.

[10] FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[11] FUCHS, M., LI, G. *Variational inequalities for energy functionals with nonstandard growth conditions*, Abstr. Appl. Anal 3, 41-64, 1998.

[12] FUCHS, M., OSMOLOVSKI, V. *Variational integrals on Orlicz-Sobolev spaces*, Z. Anal. wendungen 17, 393-415, 1998.

[13] FUKAGAI, N., ITO, M., NARUKAWA, K. *A bifurcation problem of some nonlinear degenerate elliptic equations*, Adv. Differential Equations 2, 895-926, 1997.

[14] FUKAGAI, N., NARUKAWA, K. *Bifurcation phenomena associated to a class of p-Laplacian like operators*, Manuscripta Math. 109, 175-201, 2002.

[15] FUKAGAI, N., NARUKAWA, K. *Multiple positive solutions of nonlinear eigenvalue problems associated to a class of p-Laplacian like operators*, Commun. Contemp. Math. 5, 737-759, 2003.

[16] FUKAGAI, N., NARUKAWA, K. *Nonlinear eigenvalue problem for a model equation of an elastic surface*, Hiroshima Math. J. 25, 19-41, 1995.

[17] FUKAGAI, N., NARUKAWA, K. *On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Springer-Verlag, 2006.

[18] GARCÍA AZORERO, J. P., PERAL ALONSO, I., MANFREDI, J. J. *Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Commun. Contemp. Math. 2, 385-404, 2000.

[19] GOSSEZ, J. P. *Orlicz-Sobolev Spaces and strongly nonlinear elliptic problems*, Trabalho de Matemática, Nº 103, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 1976.

[20] GUEDDA, M., VERON, L. *Quasilinear elliptic equations involving critical sobolev exponents*, Nonlinear Anal TMA, Vol. 1, Nº 8, 879-902, 1989.

[21] KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problémes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[22] KRSASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, J. B. *Convex Functions and Orlicz Sobolev*, P. Noordhoof International Groningen, 1961.

[23] KUFNER, A., JOHN, O., FUCIK, S. *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, 1977.

[24] LADYZHENSKAYA, O., URAL'TSEVA, N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, 1968.

[25] LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Basel, Switzerland: Birkhäuser-Verlag, 2000.

[26] LIEBERMAN, G. M. *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal 12, 1203-1219, 1988.

[27] LIEBERMAN, G. M. *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 16, 311-361, 1991.

[28] LIMA, E. L. *Análise Real*, Funções de n Variáveis. 6ª Edição. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2013.

[29] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* 13ª Edição. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2011.

[30] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[31] MONTREANU, D., VARGA, C. *Some Critical Point Results for Locally Lipschitz Functionals*, Comm. App. Nonlinear Analysis, 4, 17-33, 1997.

[32] OLIVEIRA, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[33] ORLICZ, W. R., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.

[34] RAO, M. M., REN, Z. D. *Theory of Orlicz spaces, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics*, vol. 146, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.

[35] RIBEIRO, B. H. C. *Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos*, Dissertação. João Pessoa, Brasil: UFPB, 2006.

[36] SANTOS, J. A. *Equações Quasilineares multivalentes*, Tese de Doutorado. Brasília, Brasil: UNB, 2011.

[37] SANTOS, L. M. *Mínimos em C versus Orlicz-Sobolev e multiplicidade global de soluções positivas para problemas elípticos quasilineares*, Dissertação. Brasília, Brasil: UNB, 2014.

[38] STRUWE, M. *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, 3rd edn. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[39] VASQUEZ, J. L., *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. 12, 191-202, 1984.