



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sobre Defeitos, Twistons e Férmions

Ivânderson Oliveira Moreira

CAMPINA GRANDE

Julho 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sobre Defeitos, Twistons e Férmions

Ivânderson Oliveira Moreira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE

Julho 2018

M838s Moreira, Ivânderson Oliveira.
Sobre defeitos, twistons e férmions / Ivânderson Oliveira Moreira. –
Campina Grande, 2018.
61 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".
Referências.

1. Equações Diferenciais – Matemática. 2. Física. 3. Defeitos
Topológicos. 4. Twistons. 5. Férmions. I. Santos, João Rafael Lúcio dos.
II. Título.

CDU 517.9(043)

SOBRE DEFEITOS, TWISTONS E FÉRMIONS

IVÂNDERSON OLIVEIRA MOREIRA

Aprovado em 26 de Julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos
Orientador

Prof. Dra. Azadeh Mohammadi
Examinador Externo

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Examinador Interno

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela Graça Maravilhosa, por ter me concedido peregrinar por este mundo e pelas incontáveis bençãos que tenho recebido.

Agradeço aos meus familiares que tanto me ajudaram e torceram por mim. Agradeço especialmente aos meus irmãos Iranrlei, Naldinei e Hirlei e também às minhas cunhadas Deise e Camila por todo o apoio. Não posso deixar de agradecer aos meus pais Nivaldo e Valdinei por tudo o que sei, em tudo voltarei para agradecê-los.

Agradeço ao Professor João Rafael por todo o conhecimento, pela paciência, por acreditar nesse trabalho, por acreditar em mim. Esse trabalho não seria possível sem o Professor João, muito obrigado.

Agradeço aos queridos amigos que conquistei na graduação e que continuaram torcendo e incentivando no mestrado. Obrigado também aos novos amigos que fiz durante esse período de estudos.

Não poderia deixar de agradecer imensamente à Damares, que desde à graduação trilhou comigo esse árduo caminho da Física. Obrigado por tudo. Sem você por perto as coisas seriam bem mais difíceis. Obrigado por me apresentar O Caminho através de sua própria vida.

Agradeço a todos os professores da UFCG que contribuíram grandemente para minha formação. Agradeço também aos funcionários que de forma anônima mantiveram tudo funcionando perfeitamente.

Por fim agradeço à CAPES pelo auxílio com a bolsa de estudos. Sem esse auxílio o sonho do mestrado não seria possível.

Lista de Figuras

2.1	Potencial do modelo ϕ^4	8
2.2	Soluções apresentadas na equação (2.26): <i>kink</i> , curva azul e <i>anti-kink</i> , curva vermelha.	9
2.3	Potencial do modelo ϕ^4 invertido	10
2.4	Soluções apresentadas na equação (2.33): solução positiva, curva azul e solução negativam curva vermelha.	11
3.1	Movimento de torção seguido de um deslocamento longitudinal em uma cadeia de CH_2	19
3.2	Potencial V , equação (3.8), para $\lambda = 7.30\pi^{-2}$ e $\mu = 0.67$. O gráfico mostra uma linha de zeros para $\phi = 0$ entre dois vácuos em $\phi = \pm\pi$ e $\chi = 0$	22
3.3	Em (a) mostramos o potencial V para $\lambda = 7.30\pi^{-2}$, $\mu = 0.67$ e $b_2 = 0$. Em (b) mostramos um contorno de V , onde as curvas vermelhas solida e pontilhada são as órbitas analíticas que conectam os campos ϕ e χ	25
3.4	Em (a) mostramos o potencial V para $\lambda = 7.30\pi^{-2}$, $\mu = 0.67$ e $b_2 = 2$. Em (b) mostramos um contorno de V , onde as curvas vermelhas solida e pontilhada são as órbitas analíticas que conectam os campos ϕ e χ	25
4.1	Forma das soluções (4.99) em (a) e (4.100) em (b). Em (a): $\lambda = 0, 0.5$ e 0.75 nas curvas preta, azul e vermelha, respectivamente. Em (b): $\mu = 0, 0.5$ e 0.75 nas curvas preta, azul e vermelha, respectivamente.	45
4.2	Potencial U_- mostrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	46
4.3	Potencial U_- mostrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	47

4.4	Energia E_{th} representada para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente.	48
4.5	Energia E_{th} representada para $\mu = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente	48
4.6	Modo zero ilustrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	49
4.7	Modo zero ilustrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	50
4.8	Potencial U_- mostrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	52
4.9	Potencial U_- mostrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	53
4.10	Energia E_{th} representada para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente	54
4.11	Energia E_{th} representada para $\mu = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente	54
4.12	Modo zero ilustrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	55
4.13	Modo zero ilustrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.	56

Sumário

Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Campos Escalares Reais	4
2.1 Modelos de um Campo Escalar Real	5
2.2 Método BPS	6
2.3 Defeitos do Tipo Kink	8
2.4 Defeitos do Tipo Lump	10
2.5 Modelos de Dois Campos Escalares Reais	12
2.6 Método da Deformação	14
2.7 Método de Extensão de um Modelo de um Campo para Dois Campos	16
3 Twistons Extendidos	19
3.1 Twistons Topológicos	20
3.2 Método de Extensão Aplicado a Twistons Topológicos	23
4 Férmions na Presença de Campos Escalares Reais	28
4.1 Equação de Dirac	29
4.2 Soluções da Equação de Dirac	34
4.3 Spin da Partícula de Dirac	39
4.4 Acoplamento Férmion-Bóson	41
4.5 Férmions em Dois Campos Escalares Não Interagentes	42
4.5.1 Acoplamento $F(\phi, \chi) = \phi\chi$	42
4.5.2 Acoplamento $F(\phi, \chi) = \phi + \chi$	50

Resumo

Defeitos topológicos são soluções de equações diferenciais que conectam configurações distintas de um sistema. Para modelos unidimensionais essas soluções são chamadas de *kinks*. Com isso, neste trabalho vamos estudar as soluções do tipo torção, denominadas twistons topológicos e também investigaremos o comportamento de férmions na presença de estruturas do tipo *kink*. Primeiramente estudaremos os twistons topológicos presentes no polietileno cristalino que representam uma torção de 180° na cadeia de CH_2 causando também uma contração do comprimento da molécula. Pretendemos então construir um modelo efetivo de dois campos que não contenha degenerescência na energia através da aplicação do chamado Método de Extensão, buscando também obter soluções analíticas desse modelo. Após este estudo, voltaremos nossas investigações para a análise de férmions na presença de *kinks* com o objetivo de obter um controle da energia de limiar (gap de energia onde residem os estados ligados) usando dois campos escalares.

PALAVRAS-CHAVE: Defeitos Topológicos, Twistons, Férmions

Abstract

Topological defects are solutions of differential equations that connect distinct configurations of a system. For one-dimensional models these solutions are called *kinks*. In this work we will study the twist-like solutions, called topological twistons and also investigate the behavior of fermions in the presence of kink-like structures. First we will study the topological twistons present in the crystalline polyethylene which represent a 180° twist in the CH_2 chain also causing a contraction of the length of the molecule. We intend to construct an effective model of two fields that does not contain degeneracy in the energy through the application of the so called Extension Method, also seeking to obtain analytical solutions of this model. After this study, we will turn our investigations for fermion analyzes in the presence of *kinks* in order to control of the threshold energy (energy gap where bound states reside) using two scalar fields.

KEY WORDS: Topological Defects, Twistons, Fermions

Capítulo 1

Introdução

Campos escalares têm sido usados de várias formas em diversos ramos da Física. Eles representam regiões no espaço em que cada ponto dessa região está relacionado com um escalar. Em Teoria de Campos eles são associados a partículas de spin 0, que podem ser descritas pela equação de Klein-Gordon. O campo de Higgs, que faz parte do mecanismo gerador de massa das partículas, também é um campo escalar. Podemos entender campos escalares também como soluções de equações de movimento de um determinado sistema Físico. Se essas soluções fizerem conexões entre configurações desse sistema, são denominadas de *defeitos*. Caso essas conexões sejam entre pontos de mínimo distintos (ou vácuos) de um potencial, são chamadas de *defeitos topológicos*. Para sistemas unidimensionais esses defeitos topológicos recebem o nome de *kinks*. Em (2+1) dimensões os defeitos chamados de vórtices e em (3+1) dimensões podem ser monopolos e skyrmions. Defeitos topológicos podem ser estudados, por exemplo, em cosmologia [1], na dinâmica da molécula de DNA [2], em twistons topológicos (no estudo da dinâmica da molécula de polietileno cristalino) e também no comportamento de férmions quando imersos em estruturas do tipo *kink*. Dentre as aplicações de defeitos topológicos citadas, voltaremos nossos esforços para o estudo dos twistons topológicos e também do comportamento dos férmions imersos em *kinks*.

Twistons topológicos foram primeiramente estudados por Mansfield e Boyd [3] e representam uma torção de 180° sobre grupos formados por CH_2 em uma molécula de polietileno cristalino, causando também uma contração do comprimento de uma unidade de CH_2 . A partir de então, vários trabalhos surgiram com o intuito de descrever o comportamento dos twistons no polietileno cristalino, como por exemplo [4, 5, 6, 7]. Há

também estudos em polímeros orgânicos, como o poliacetileno [8, 9], onde se investigou a sua condutividade. Os trabalhos de [4, 6] mostram como pode ser feita a conexão entre a dinâmica molecular e a teoria clássica de campos que descreve as soluções tipo torção, ou twistons. Nesses trabalhos os autores apresentam um modelo para descrever os twistons topológicos onde um campo é responsável pelo movimento de torção e outro campo é responsável por contrair a cadeia. Os autores calcularam também a energia associada aos twistons topológicos. Entretanto, esse modelo apresenta uma degenerescência na energia que permite que a cadeia de CH_2 possa ser quebrada sem nenhum gasto energético adicional. Essa questão foi investigada por [5] onde foi encontrada uma maneira de contornar essa degenerescência inserindo uma perturbação ao modelo, apresentando, entretanto, apenas soluções numéricas. Diante disto, buscamos encontrar um caminho alternativo para minimizar o problema da degenerescência do modelo citado e obter também soluções analíticas para o modelo, como pode ser visto em [10], através da aplicação do chamado Método de Extensão.

Nossa segunda linha de pesquisa se trata de férmions na presença de campos escalares. As primeiras investigações de férmions na presença de estruturas topológicas se iniciaram com o importante trabalho desenvolvido nos anos 1970 por Jackiw e Rebbi [8], que teve como importante contribuição para a Física a fracionalização do número fermiônico. Mais tarde, Jackiw e Schrieffer [11] estudaram as conexões entre matéria condensada e teoria de campos relativística, que surgiram daquele primeiro trabalho, investigando polímeros orgânicos. Trabalhos recentes têm estudado o comportamento de férmions na presença de campos escalares em 1+1 dimensões [12, 13, 14, 15] e também em 2+1 dimensões [16, 17] onde observam o modo zero fermiônico, estados fermiônicos ligados e também o comportamento do gap de energia (energia de limiar) que contém os estados ligados. Nesse contexto de férmions em campos escalares, nosso objetivo é, usando os modelos propostos por [14], observar o comportamento da energia de limiar colocando o campo fermiônico na presença de dois campos escalares. Mais precisamente, pretendemos controlar esse gap de energia, aumentando ou diminuindo o mesmo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2 estudamos a teoria básica para campos escalares reais unidimensionais. Iniciamos nossa revisão apresentando um modelo para um único campo escalar e em seguida estudamos o Método BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) desenvolvido por [18, 19] que permite encontrar

as equações de primeira ordem de um determinado sistema minimizando a tarefa de se resolver uma equação de movimento de segunda ordem, além de possibilitar encontrar a energia do sistema sem necessariamente conhecermos as soluções das equações de movimento, utilizando apenas os mínimos (ou vácuos) do potencial. Aplicamos essas técnicas em dois modelos conhecidos, o modelo ϕ^4 e o modelo ϕ^4 invertido, com o intuito de discutir os defeitos do tipo *kink* e *lump*, respectivamente. Discutimos também o chamado Método da Deformação, proposto por [20], que tem como objetivo fazer um mapeamento entre dois modelos conhecendo apenas um deles. Em seguida apresentamos um modelo para dois campos escalares reais, onde também aplicamos o Método BPS. Por fim, estudamos o Método de Extensão desenvolvido por [21] que permite que possamos criar um modelo de dois campos escalares efetivo (com interação entre os campos) a partir de dois modelos de um campo escalar.

No Capítulo 3 discutimos os Twistons Topológicos. Iniciamos o capítulo mostrando como é feita a conexão entre a dinâmica molecular e a teoria clássica de campos. Apresentamos um modelo para descrição de Twistons proposto por [4, 6] e em seguida buscamos uma solução, usando o Método de Extensão, para o problema da degenerescência na energia que o modelo proposto apresenta.

No Capítulo 4 voltamos nossos estudos para os férmions na presença de campos escalares, ou, na presença de *kinks*, revisando os trabalhos de [12, 13, 14]. O capítulo começa com uma breve revisão sobre a construção da Equação de Dirac bem como suas soluções e finalizamos com o spin que a partícula descrita pela Equação de Dirac apresenta. Mostramos também a teoria por trás do acoplamento dos férmions com campos escalares por meio do acoplamento de Yukawa e finalizamos nossos estudos investigando o comportamento dos férmions imersos em dois campos escalares através de dois diferentes acoplamentos.

No último capítulo do trabalho são apresentadas as conclusões e perspectivas.

Adotaremos neste trabalho a assinatura $(+, -, -, -)$ para a métrica de Minkowski e também faremos uso do sistema de unidades naturais $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

Campos Escalares Reais

Campos escalares são regiões finitas ou infinitas do espaço em que cada ponto dessa região está associado a uma quantidade escalar contínua [22]. Em Teoria Quântica de Campos, por exemplo, campos escalares estão associados com partículas de spin 0, que podem ser descritas pela Equação de Klein-Gordon. O campo de Higgs, que faz parte do mecanismo gerador de massa das partículas do Modelo Padrão, também é um campo escalar. Campos escalares podem ser entendidos também como soluções de equações de movimento associadas a um sistema Físico. Caso estas soluções façam uma conexão entre configurações do sistema (sejam mínimos ou máximos locais de um potencial) são chamadas de *defeitos*. Para soluções estáveis que conectem mínimos distintos de um potencial, estes defeitos são ditos *topológicos* e para soluções instáveis associadas a máximos locais de um determinado potencial, os defeitos são chamados de *não-topológicos*. Se estivermos tratando de um sistema unidimensional, o defeito topológico é chamado de *kink* e o defeito não-topológico recebe o nome de *lump*.

Neste capítulo abordaremos de forma breve a teoria básica para campos escalares reais. Inicialmente traremos o modelo para um campo escalar, onde tomaremos como exemplos de soluções os defeitos do tipo *kink* e *lump*. Apresentaremos também o modelo para dois campos escalares reais. Traremos também alguns métodos necessários para o desenvolvimento do trabalho, tais como, Método BPS, Método da Deformação e Método de Extensão de um modelo de um campo para dois campos.

2.1 Modelos de um Campo Escalar Real

De modo geral, modelos de um campo escalar real são descritos pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde a ação pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.2)$$

Para sistemas em $(1 + 1)$ dimensões podemos determinar a equação de movimento (ou equação de Euler-Lagrange) a partir da minimização da ação, isto é, fazendo $\delta S = 0$, resultando em

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.3)$$

onde $\ddot{\phi} = \partial^2 \phi / \partial t^2$ e $\phi'' = \partial^2 \phi / \partial x^2$. Considerando soluções estáticas, $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento anterior toma a forma

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.4)$$

Podemos realizar uma primeira integral na equação acima multiplicando ambos os lados por ϕ' da seguinte maneira

$$\phi' \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \phi', \quad (2.5)$$

$$\frac{d\phi}{dx} \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) = \frac{dV}{dx}. \quad (2.7)$$

Agora, integrando ambos os lados desta última equação obtemos

$$\frac{\phi'^2}{2} + c_1 = V + c_2, \quad (2.8)$$

ou, unindo as constantes c_1 e c_2 em uma única constante e explicitando ϕ' , podemos escrever

$$\phi' = \pm\sqrt{2V + C}, \quad (2.9)$$

onde C é dependente das condições de contorno. As soluções da equação (2.9) também resolvem a equação de segunda ordem (2.4), entretanto, nem todas as soluções da equação (2.4) satisfazem a equação de primeira ordem pois estas fazem parte de um conjunto maior de soluções.

Esta mesma equação de primeira ordem (2.9) pode ser obtida de forma alternativa utilizando um procedimento conhecido como Método BPS.

2.2 Método BPS

O procedimento BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) foi desenvolvido por Bogomol'nyi [18] e também por Prasad e Sommerfield [19] e tem como um de seus objetivos encontrar soluções para as equações de movimento de segunda ordem a partir de equações de primeira ordem que minimizem a energia do sistema, como veremos a seguir. Ou seja, este importante procedimento permite a redução da ordem da equação de movimento a ser resolvida. Para isso, precisamos escrever a densidade de energia (ou densidade de hamiltoniana) de um determinado sistema que pode ser obtida através da transformação de Legendre

$$\mathcal{E} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (2.10)$$

onde $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ é o momento canonicamente conjugado. Podemos reescrever a densidade de lagrangiana (2.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi), \quad (2.11)$$

e substituindo em (2.10) obtemos a densidade de energia

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi), \quad (2.12)$$

que, para campos estáticos, se reduz a

$$\mathcal{E} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) = -\mathcal{L}. \quad (2.13)$$

Podemos agora integrar a densidade de energia e assim obter a energia total do sistema, que fica na forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} dx, \quad (2.14)$$

e no caso de campos estáticos em $(1 + 1)$ dimensões temos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (-\mathcal{L}) = \int dx \left(\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (2.15)$$

O passo seguinte do método BPS consiste em completar um quadrado perfeito no integrando da equação (2.15) de forma a obter

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} \phi' \right], \quad (2.16)$$

onde podemos observar que a minimização da energia total exige que

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}, \quad (2.17)$$

de forma que (2.16) se resume a

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{2V} \phi'. \quad (2.18)$$

Vamos supor que o nosso potencial $V(\phi)$ seja escrito em termos de uma função W ¹, da seguinte maneira

$$V = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (2.19)$$

onde $W_\phi = \partial W(\phi)/\partial \phi$. Dessa forma, a energia (2.18) fica

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\phi \phi' dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]| = \Delta W, \quad (2.20)$$

onde E_{BPS} é a menor energia não trivial do sistema e a equação de primeira ordem (2.17) agora se torna

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi). \quad (2.21)$$

¹Esta função W vem da supersimetria e é chamada de superpotencial. Quando um potencial é escrito em termos de W o modelo de campo escalar pode ser visto como a parte bosônica de uma teoria supersimétrica [23]

Verificamos então que ao fazermos uso do Método BPS encontramos as equações de primeira ordem do sistema, cujas soluções também satisfazem as equações de segunda ordem. A vantagem da aplicação desse procedimento reside no fato de que resolver equações diferenciais de primeira ordem pode ser uma tarefa mais fácil que resolver equações de segunda ordem. É também importante lembrar que, a aplicação do método só é bem sucedida ao trabalharmos com potenciais positivos definidos.

2.3 Defeitos do Tipo Kink

Para ilustrar as técnicas vistas nas seções anteriores, vamos considerar o seguinte potencial unidimensional

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2, \quad (2.22)$$

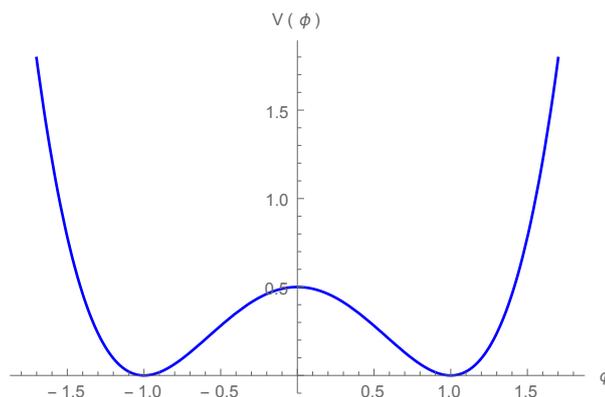


Figura 2.1: Potencial do modelo ϕ^4

conhecido como ϕ^4 , cuja forma pode ser vista na Figura 2.1. A densidade de lagrangiana do sistema fica escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (2.23)$$

Aplicando a equação (2.19) no nosso potencial obtemos que

$$W_\phi = 1 - \phi^2, \quad (2.24)$$

e de acordo com (2.21) a equação de primeira ordem fica

$$\phi' = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.25)$$

Notemos que $\phi = +1$ e $\phi = -1$ são soluções estáticas da equação de primeira ordem (2.25) com energia zero, uma vez que nesse contexto $\mathcal{E} = -\mathcal{L} = 0$. Dessa forma, o sistema possui duas configuração distintas de energia mínima que são os vácuos do potencial. Existem outras soluções estáticas não-triviais para a equação de primeira ordem (2.25), são elas

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.26)$$

Em relação ao comportamento assintótico das soluções, veja que, a partir da Figura 2.2, para $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi \rightarrow \pm 1$, que são os pontos de mínimo do potencial. A região entre esses dois mínimos é denominada de *setor topológico*. Assim, soluções que conectam essas duas configurações distintas do sistema, ou esses dois vácuos, são chamadas de *kinks*. Na equação (2.26) temos um *kink*, quando $\phi = +\tanh(x)$ e um *anti-kink* quando $\phi = -\tanh(x)$.

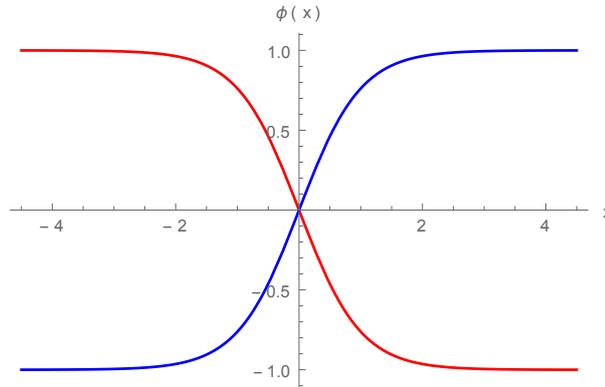


Figura 2.2: Soluções apresentadas na equação (2.26): *kink*, curva azul e *anti-kink*, curva vermelha.

Podemos ainda calcular a energia das soluções estáticas (2.26) usando a equação (2.15), obtendo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\phi'}{2} + V(\phi) \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(x) dx = \frac{4}{3}. \quad (2.27)$$

Essa mesma energia poderia ser calculada mesmo se não soubéssemos a forma da solução da equação de primeira ordem (2.25), apenas aplicando a energia BPS nos mínimos do potencial. Usando a equação (2.24) escrevemos

$$W = \int W_\phi d\phi = \phi - \frac{\phi^3}{3}, \quad (2.28)$$

e substituindo esse resultado na equação (2.20), onde os limites de integração agora são os mínimos do potencial, obtemos que

$$E_{BPS} = \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) \Big|_{\phi=+1} - \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) \Big|_{\phi=-1} = \frac{4}{3}. \quad (2.29)$$

2.4 Defeitos do Tipo Lump

Vamos considerar um outro potencial unidimensional, semelhante ao ilustrado anteriormente, dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2), \quad (2.30)$$

que é conhecido como ϕ^4 invertido, cuja forma pode ser vista na Figura 2.3.

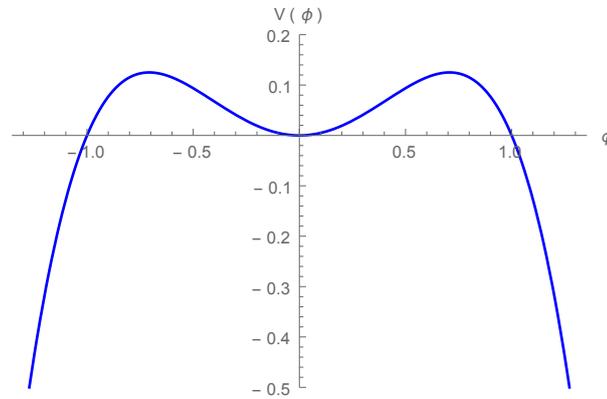


Figura 2.3: Potencial do modelo ϕ^4 invertido

Podemos ver que, de acordo com (2.19)

$$W_\phi = \phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

e conseqüentemente a equação de primeira ordem fica dada por

$$\phi' = \pm W_\phi = \pm \phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.32)$$

que tem como solução estática

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.33)$$

cuja forma é mostrada na Figura 2.4.

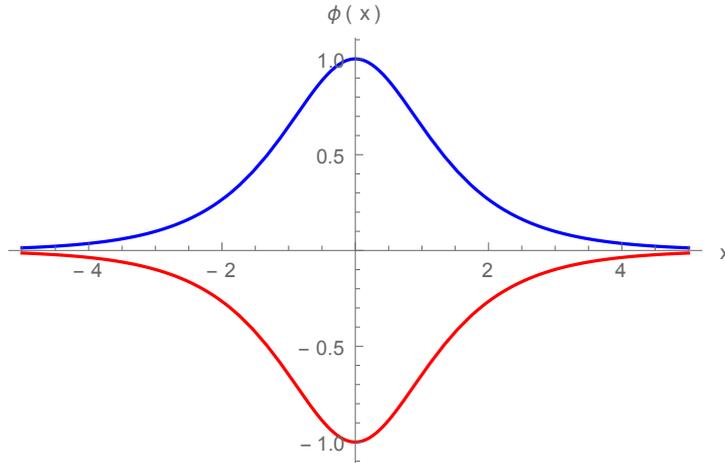


Figura 2.4: Soluções apresentadas na equação (2.33): solução positiva, curva azul e solução negativa curva vermelha.

Veja que $\phi = 0$ e $\phi = \pm 1$ são pontos de equilíbrio do potencial $V(\phi)$. Entretanto, diferentemente do modelo tipo *kink*, $\phi = \pm 1$ não formam um setor topológico pois são pontos de equilíbrio instáveis e apenas $\phi = 0$ configura um vácuo do potencial. Com isso, não existem duas configurações distintas com mesma energia para serem conectadas, mas apenas uma. Como podemos ver na Figura 2.4, quando $x \rightarrow \pm\infty$, a solução (2.33) parte da sua posição de equilíbrio $\phi = 0$, evolui até o ponto de equilíbrio instável $\phi = \pm 1$ e retorna para sua configuração inicial. Soluções com essa característica são chamadas de *lumps*.

Semelhantemente ao caso visto na seção anterior, podemos calcular a energia total do *lump* usando a equação (2.15), como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\phi'^2}{2} + \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2) \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x) dx = \frac{2}{3}. \quad (2.34)$$

Entretanto, não podemos usar equação (2.20) para calcular a energia do *lump*. Vejamos que para este potencial temos

$$W(\phi) = -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.35)$$

e assim

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]| = -\frac{1}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0, \quad (2.36)$$

que é um resultado diferente do que foi calculado anteriormente em (2.34). Uma alternativa para calcular a energia BPS do *lump* é definir

$$E_{BPS_{lump}} \equiv |W[\phi(+\infty)] + W[\phi(-\infty)]|. \quad (2.37)$$

2.5 Modelos de Dois Campos Escalares Reais

Vamos agora estender nossas discussões para um sistema descrito por dois campos escalares reais. Para isso, considere a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (2.38)$$

cujas equações de movimento em (1 + 1) dimensões são dadas por

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0; \quad \ddot{\chi} - \chi'' + V_\chi = 0, \quad (2.39)$$

onde $V_\phi = \partial V/\partial\phi$ e $V_\chi = \partial V/\partial\chi$. Se considerarmos campos estáticos, isto é $\phi = \phi(x)$, e $\chi = \chi(x)$, as equações de movimento se resumem a

$$\phi'' = V_\phi; \quad \chi'' = V_\chi. \quad (2.40)$$

Buscaremos novamente equações de primeira ordem através do método BPS. Vimos que a energia total é escrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{E}, \quad (2.41)$$

e também que para campos estáticos $\mathcal{E} = -\mathcal{L}$ permitindo-nos escrever

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right). \quad (2.42)$$

Caso nosso potencial $V(\phi, \chi)$ seja definido como

$$V(\phi, \chi) \equiv \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (2.43)$$

a energia (2.42) é reescrita da seguinte maneira

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right). \quad (2.44)$$

Para aplicar o método BPS, basta que completemos quadrados perfeitos no integrando da equação (2.44) semelhante ao que foi feito anteriormente para o caso de apenas um campo escalar real. Assim, completando os quadrados temos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2\phi'W_\phi \pm 2\chi'W_\chi], \quad (2.45)$$

de forma que

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi, \chi) \quad \text{e} \quad \chi' = \pm W_\chi(\phi, \chi), \quad (2.46)$$

minimizam a energia total e agora podemos escrever a energia BPS como

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\phi'W_\phi \pm \chi'W_\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW(\phi, \chi)}{dx}, \quad (2.47)$$

e portanto

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]| = \Delta W. \quad (2.48)$$

Podemos ainda unir as equações em (2.46) da seguinte maneira

$$\frac{\phi'}{\chi'} = \frac{\frac{d\phi}{dx}}{\frac{d\chi}{dx}} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (2.49)$$

cuja solução é conhecida como equação de órbita. Sua importância reside no fato de que esta órbita desacopla, sempre que possível, as equações de primeira ordem obtidas anteriormente.

2.6 Método da Deformação

O método da deformação, proposto por Bazeia e colaboradores [20] consiste na geração de novos modelos com solução do tipo defeito topológico a partir de um modelo cujas características sejam previamente conhecidas. A conexão entre o modelo de partida e o modelo de chegada (desconhecido) é feita por uma função chamada *função de deformação*. Para desenvolver o método, vamos considerar a seguinte densidade de lagrangiana em $(1 + 1)$ dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.50)$$

que será nosso modelo de partida, o qual nos é conhecido. Como vimos anteriormente, a equação de movimento para soluções estáticas é do tipo

$$\phi'' = V_\phi, \quad (2.51)$$

que ao ser integrada uma vez nos dá uma equação de primeira ordem na forma

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.52)$$

Se considerarmos que o potencial $V(\phi)$ pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (2.53)$$

a equação de primeira ordem fica dada por

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi). \quad (2.54)$$

Consideremos também um outro modelo, também em $(1 + 1)$ dimensões, expresso pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi), \quad (2.55)$$

que será o nosso sistema de chegada, cujas informações são desconhecidas. Semelhantemente ao que foi feito em (2.50), para soluções estáticas temos a seguinte equação de primeira ordem para (2.55)

$$\chi' = \pm\sqrt{2U}, \quad (2.56)$$

e se consideramos novamente que o potencial $U(\chi)$ pode ser escrito como

$$U(\chi) = \frac{1}{2}\tilde{W}_\chi^2, \quad (2.57)$$

a equação (2.56) se torna

$$\chi' = \tilde{W}_\chi(\chi). \quad (2.58)$$

Vamos agora definir as relações entre os campos ϕ e χ que farão a ponte entre os dois modelos. Essas relações são dadas por

$$\phi = f(\chi); \quad \chi = f^{-1}(\phi), \quad (2.59)$$

sendo $f(\chi)$ uma função inversível chamada de função de deformação. Sabemos que $\phi' = d\phi/dx$ e usando que $\phi = f(\chi)$ podemos escrever uma relação entre as equações de primeira ordem na forma

$$\phi' = \frac{d[f(\chi)]}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} = f_\chi \chi'. \quad (2.60)$$

Comparando agora este ultimo resultado com as equações (2.54) e (2.58) podemos ver que

$$W_\phi(\phi) = f_\chi \tilde{W}_\chi(\chi), \quad (2.61)$$

ou ainda

$$\tilde{W}_\chi(\chi) = \left. \frac{W_\phi(\phi)}{f_\chi} \right|_{\phi \rightarrow f(\chi)}. \quad (2.62)$$

Substituindo este resultado na equação (2.57) escrevemos

$$U = \frac{1}{2} \left. \frac{W_\phi^2(\phi)}{f_\chi^2} \right|_{\phi \rightarrow f(\chi)}, \quad (2.63)$$

e identificando nesta última a equação (2.53) obtemos por fim

$$U(\chi) = \left. \frac{V(\phi)}{f_\chi^2} \right|_{\phi \rightarrow f(\chi)}. \quad (2.64)$$

2.7 Método de Extensão de um Modelo de um Campo para Dois Campos

Nesta seção, abordaremos o método de extensão de um modelo de um campo escalar para um modelo de dois campos escalares proposto por Bazeia e Colaboradores [21]. A ideia principal do método é gerar a partir de um dado modelo de um campo outro modelo também de um campo através do procedimento de deformação e em seguida acoplá-los de forma a gerar um modelo efetivo de dois campos.

Vimos no final da seção 2.5 que podemos relacionar os campos ϕ e χ através da expressão

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}. \quad (2.65)$$

Podemos também considerar dois modelos de um campo, dados pelas densidades de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi); \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi), \quad (2.66)$$

cujas equações de primeira ordem são escritas como

$$\phi' = W_\phi(\phi); \quad \chi' = W_\chi(\chi), \quad (2.67)$$

como foi visto em seções anteriores. Aplicando o método da deformação podemos relacionar essas equações de forma a obter

$$\phi' = \frac{df}{d\chi} \chi' \quad \text{e} \quad W_\phi(\phi) = \frac{df}{d\chi} W_\chi(\chi), \quad (2.68)$$

semelhante ao que vimos nas equações (2.60) e (2.62) na seção 2.6. Das relações anteriores, podemos ainda escrever

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{\phi'}{\chi'} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi)}{W_\chi(\chi)}, \quad (2.69)$$

que é semelhante à (2.65) para dois campos. A chave desse método está em reescrever a relação (2.69) usando o método da deformação, obtendo uma equação do tipo

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (2.70)$$

com o intuito de que sua solução relacione um modelo de dois campos efetivo.

Para construir esse modelo efetivo de dois campos inicialmente escreve-se a equação de primeira ordem para $\phi(x)$ de três maneiras diferentes porém equivalentes, como

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad \phi' = W_\phi(\chi), \quad \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.71)$$

onde, na segunda equação usa-se a função de deformação e substitui-se $\phi \rightarrow f(\chi)$ em todos os termos de W_ϕ resultando em $W_\phi(\chi)$ dependendo apenas do campo χ , e na terceira equação a deformação é feita de forma parcial, ou seja, troca-se $\phi \rightarrow f(\chi)$ de uma determinada maneira que resulte em W_ϕ com dependência tanto no campo ϕ quanto no campo χ . O mesmo procedimento pode ser feito na equação de primeira ordem para o campo χ onde obtém-se

$$\chi' = W_\chi(\chi), \quad \chi' = W_\chi(\phi), \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi). \quad (2.72)$$

Em seguida define-se os parâmetros a_i , b_i e c_i , com o índice $i = 1, 2, 3$ e também com os vínculos $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ e $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Essas constantes estão relacionadas com as diferentes formas de escrever ϕ' e χ' presentes nas equações (2.71) e (2.72), de maneira que troca-se W_ϕ por $a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi)$ e também W_χ por $b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi)$ e por fim rescreve-se (2.70) como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi) + c_1g(\chi) + c_2g(\phi, \chi) + c_3g(\phi)}{b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi)}. \quad (2.73)$$

Assim como as diferentes formas de escrever W_ϕ e W_χ foram construídas através da função de deformação assim também é a função contra-pesa $g(\chi) = g(\phi, \chi) = g(\phi)$. Esta função levará ao modelo final o acoplamento entre os dois campos. Para encontrar g usa-se outro vínculo que aparece de uma propriedade das derivadas de $W(\phi, \chi)$ que diz

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (2.74)$$

Como podemos ver na equação (2.73), substitui-se W_ϕ por

$$a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi) + c_1g(\chi) + c_2g(\phi, \chi) + c_3g(\phi) \quad (2.75)$$

e W_χ por

$$b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi). \quad (2.76)$$

Dessa forma, aplicando-se o vínculo (2.74) tem-se

$$a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi) = b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi), \quad (2.77)$$

de onde calcula-se a função contra-peso g e em seguida determina-se o superpotencial efetivo $W(\phi, \chi)$. Posteriormente aplicaremos este método no estudo de Twistons Topológicos, Capítulo 3, de forma que o funcionamento do mesmo será melhor exemplificado.

Capítulo 3

Twistons Extendidos

Twistons topológicos são defeitos topológicos do tipo kink que foram primeiramente propostos por Mansfield e Boyd [3] como sendo uma torção de 180° que se estende de forma suave sobre vários grupos de CH_2 em uma molécula de polietileno cristalino causando também uma contração do comprimento da unidade de CH_2 na cadeia polimérica [4, 5, 6], como ilustrado na Figura 3.1. Neste capítulo apresentaremos o modelo proposto por Bazeia e colaboradores [4] para descrever twistons topológicos e buscaremos um caminho para contornar o problema da degenerescência que aparece no mesmo usando o chamado método de extensão desenvolvido por [21] que foi visto na Seção 2.7 do capítulo anterior.

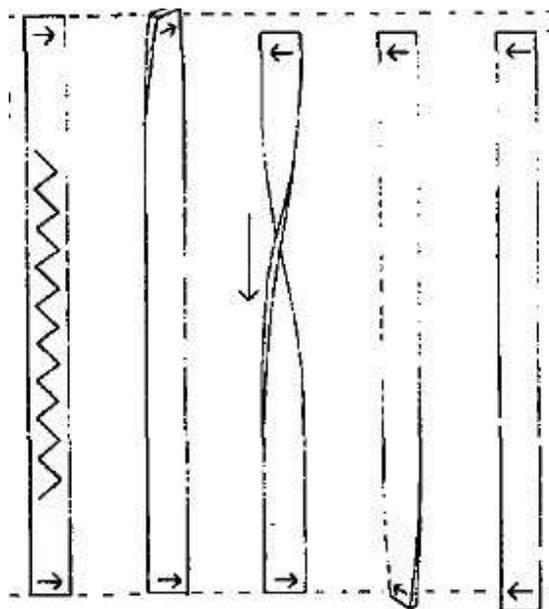


Figura 3.1: Movimento de torção seguido de um deslocamento longitudinal em uma cadeia de CH_2 .

3.1 Twistons Topológicos

Primeiramente vamos entender de que forma é feita a conexão entre dinâmica molecular e teoria clássica de campos, estudada anteriormente por [4, 5, 6]. Suponhamos que estamos tratando de um grupo molecular rígido que pode ser descrito por coordenadas cilíndricas. Assim, sua energia cinética fica caracterizada por

$$T = \frac{1}{2}m \sum_n \left[\dot{r}_n^2 + r_n^2 \dot{\theta}_n^2 + \dot{z}_n^2 \right], \quad (3.1)$$

onde m é a massa associada ao grupo molecular CH_2 . Podemos reescrever essa energia como

$$T = \frac{1}{2}m r_0^2 \sum_n \left[\dot{\phi}_n^2 + \frac{c^2}{r_0^2} \dot{\chi}_n^2 + \dot{\rho}_n^2 \right], \quad (3.2)$$

onde r_0 é a posição de equilíbrio da coordenada radial, c é a distância longitudinal entre os grupos moleculares consecutivos e definimos

$$\phi_n = \theta_n - [1 - (-1)^n] \frac{\pi}{2}, \quad (3.3a)$$

$$\chi_n = \frac{z_n - nc}{c}, \quad (3.3b)$$

$$\rho_n = \frac{r_n - r_0}{r_0}. \quad (3.3c)$$

Desprezando o grau de liberdade radial, que é uma boa aproximação na descrição de *twistons* no polietileno cristalino, a energia cinética se torna

$$T = \frac{1}{2}m r_0^2 \sum_n \left[\dot{\phi}_n^2 + \frac{c^2}{r_0^2} \dot{\chi}_n^2 \right], \quad (3.4)$$

As coordenadas ϕ_n e χ_n correspondem aos graus de liberdade torcional e longitudinal, respectivamente.

Assim, a Lagrangiana para cada cadeia apresenta a forma usual

$$L = T - U(\phi_n, \chi_n), \quad (3.5)$$

onde U é o potencial intermolecular. No limite contínuo as coordenadas ϕ_n e χ_n podem ser vistas como campos reais $\phi(x, t)$ e $\chi(x, t)$. Portanto, a dinâmica dos twistons pode

ser modelada por uma densidade de lagrangiana relativística clássica contendo esses dois campos escalares, como vimos na Seção 2.5 Equação (2.38), que tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (3.6)$$

Com o intuito de encontrar defeitos topológicos analíticos responsáveis por um movimento de torção, assumimos que nosso potencial $V(\phi, \chi)$ é positivo definido e o escrevemos em termos de um superpotencial, isto é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (3.7)$$

como vimos na Seção 2.5.

Um possível modelo introduzido por Bazeia e colaboradores [4, 6] para descrever este problema, estudado também por [5], consiste no seguinte potencial

$$V = \frac{1}{2} [\lambda \phi (\phi^2 - \pi^2) + \mu \phi \chi^2]^2 + \frac{1}{2} (\mu \phi^2 \chi)^2, \quad (3.8)$$

onde λ e μ são constantes reais. Como podemos ver na Figura 3.2, este potencial apresenta uma linha de zeros em $\phi = 0$. As equações diferencial de primeira ordem para este potencial são

$$\frac{d\phi}{dx} = \lambda \phi (\phi^2 - \pi^2) + \mu \phi \chi^2; \quad \frac{d\chi}{dx} = \mu \phi^2 \chi, \quad (3.9)$$

cujas soluções analíticas são dadas por

$$\phi(x) = \pm \pi \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \tanh(\mu \pi^2 x))}; \quad \chi(x) = \pm \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1} \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \tanh(\mu \pi^2 x))}. \quad (3.10)$$

Essa soluções têm validade apenas enquanto $\lambda/\mu > 1$, como mostram [4, 6] que também foram responsáveis por calculá-las.

Para descrever esse modelo analítico o superpotencial usado é

$$W(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{2} \phi^2 \left(\frac{\phi^2}{2} - \pi^2 \right) + \frac{\mu}{2} \phi^2 \chi^2, \quad (3.11)$$

que por sua vez é construído a partir das equações de primeira ordem (3.9). Com o intuito de calcularmos a energia do modelo, vamos invocar o método BPS aplicado a dois campos escalares visto na Seção 2.5. Nesta seção, vimo que para calcular a energia BPS, equação (2.48), tomamos

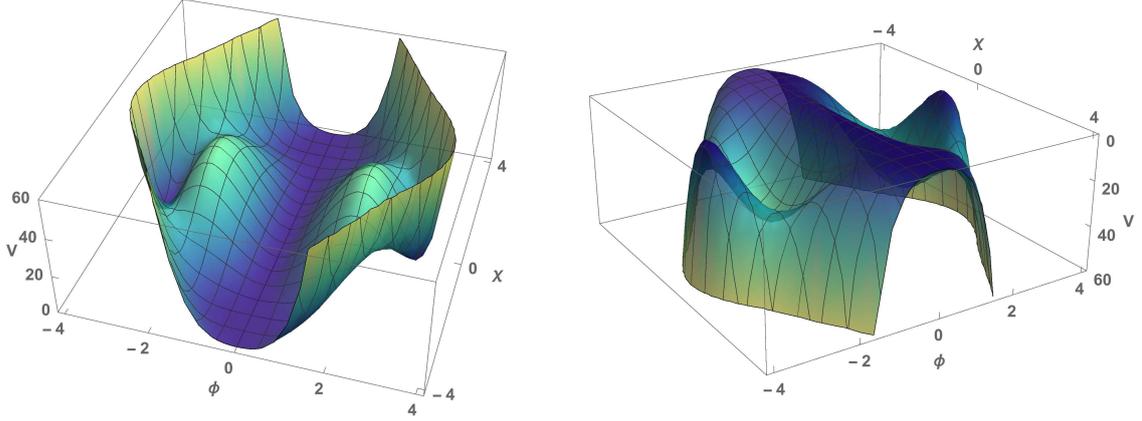


Figura 3.2: Potencial V , equação (3.8), para $\lambda = 7.30 \pi^{-2}$ e $\mu = 0.67$. O gráfico mostra uma linha de zeros para $\phi = 0$ entre dois vácuos em $\phi = \pm\pi$ e $\chi = 0$.

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]| = \Delta W. \quad (3.12)$$

Substituindo o superpotencial (3.11), juntamente com as soluções analíticas (3.10), na equação (3.12), chegamos à energia BPS

$$E_{BPS} = \frac{\lambda}{4} \pi^4. \quad (3.13)$$

Essa energia BPS foi calculada em [6], usando $|\lambda|\pi^2 = 7.30$, baseando-se em um dado experimental apresentado em [3] para a contribuição energética da região torcida. Esta restrição experimental leva a $E = 17.99$ kcal/mol como a energia para os twistons topológicos.

Um aspecto importante a ser notado na Figura 3.2 é a linha de zeros que o potencial apresenta. Como vimos, o campo ϕ desempenha o papel de torcer a cadeia molecular por um múltiplo inteiro de π e o campo χ é responsável por movimentar a cadeia longitudinalmente por uma unidade de CH_2 .

Esse deslocamento longitudinal realizado pelo campo χ deve ser da ordem da distância longitudinal entre os grupos moleculares adjacentes, isto é, $c = 1.27\text{Å}$. Entretanto, sabendo que a linha de zeros apresenta degenerescência na energia, seja qual for o valor de χ_v , isto nos revela que seria possível romper a cadeia sem qualquer custo extra de energia [5].

Na referência [5] foi proposto um caminho para resolver o problema da energia degenerada através da inserção de uma perturbação no potencial original. Apesar de ter

funcionado bem, as soluções para os campos são apenas numéricas.

3.2 Método de Extensão Aplicado a Twistons Topológicos

Com o intuito de contornar o problema da degenerescência no modelo proposto por [4, 6] e manter uma descrição analítica para os twistons, vamos fazer uso do Método de Extensão, visto na Seção 2.7, na construção de outros modelos de dois campos [10] que apresentem vácuos bem definidos para o campo χ . Para isso, vamos considerar agora dois modelos de um campo que obedecem as equações diferenciais de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi(\phi) = \mu\phi(\phi^2 - \pi^2), \quad \chi' = W_\chi(\chi) = \mu\chi \left(\pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda} \right), \quad (3.14)$$

que são satisfeitos pelos defeitos analíticos (3.10). Dessas soluções, podemos ver que o mapeamento entre os campos ϕ e χ é feito pela seguinte função de deformação ¹ e sua inversa

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{\pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda}}, \quad \chi = f^{-1}(\phi) = \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{\mu}(\phi^2 - \pi^2)}. \quad (3.15)$$

Agora, podemos escrever as equações de primeira ordem (3.14) de três formas distintas, porém equivalentes. Para o campo ϕ , temos

$$W_\phi(\chi) = \mu\phi(\phi^2 - \pi^2), \quad (3.16a)$$

$$W_\phi(\phi) = \pm \frac{\mu^2\chi^2}{\mu - \lambda} \sqrt{\pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda}}, \quad (3.16b)$$

$$W_\phi(\phi, \chi) = \phi \left(\frac{\mu^2\chi^2}{\mu - \lambda} \right). \quad (3.16c)$$

Para o campo χ , obtemos

¹Ver Seção 2.6 sobre método da deformação.

$$W_\chi(\chi) = \mu\chi \left(\pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda} \right), \quad (3.17a)$$

$$W_\chi(\phi) = \pm\mu\phi^2 \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{\mu}(\phi^2 - \pi^2)}, \quad (3.17b)$$

$$W_\chi(\phi, \chi) = \mu\phi^2\chi. \quad (3.17c)$$

Observando as novas formas de escrever W_ϕ e W_χ , dadas respectivamente por

$$W_\phi = a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi) + c_1g(\chi) + c_2g(\phi, \chi) + c_3g(\phi) \quad (3.18)$$

e

$$W_\chi = b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi), \quad (3.19)$$

vemos que para evitar o aparecimento de raízes quadradas no nosso potencial final, devemos escolher $a_1 = b_3 = 0$, de forma que tenhamos os vínculos $a_2 + a_3 = 1$ e $b_1 + b_2 = 1$. Escolhemos também $c_1 = 0$, implicando em $c_2 + c_3 = 0$. Usando o vínculo $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$, (veja a equação (2.74) da Seção 2.7), encontramos a seguinte expressão para $g_\chi(\phi, \chi)$

$$c_2g_\chi(\phi, \chi) = 2\mu\phi\chi \left(b_2 - \frac{\mu a_2}{\mu - \lambda} \right). \quad (3.20)$$

Integrando a equação anterior em relação a χ obtemos

$$c_2g(\phi, \chi) = \mu\phi\chi^2 \left(b_2 - \frac{\mu a_2}{\mu - \lambda} \right), \quad (3.21)$$

e usando a função de deformação inversa $\chi = f^{-1}(\phi)$ em (3.15) encontramos

$$c_2g(\phi) = \phi(\phi^2 - \pi^2)[(\mu - \lambda) - \mu a_2]. \quad (3.22)$$

Substituindo estes resultados para a função contrapeso g em 3.18 e 3.19 e escolhendo $a_2 = 1 - a_3$, $b_1 = 1 - b_2$ e $c_2 = -c_3$, encontramos que

$$W_\phi = b_2\mu\phi\chi^2 - b_2\phi(\phi^2 - \pi^2)(\mu - \lambda) + \mu\phi(\phi^2 - \pi^2) \quad (3.23)$$

e

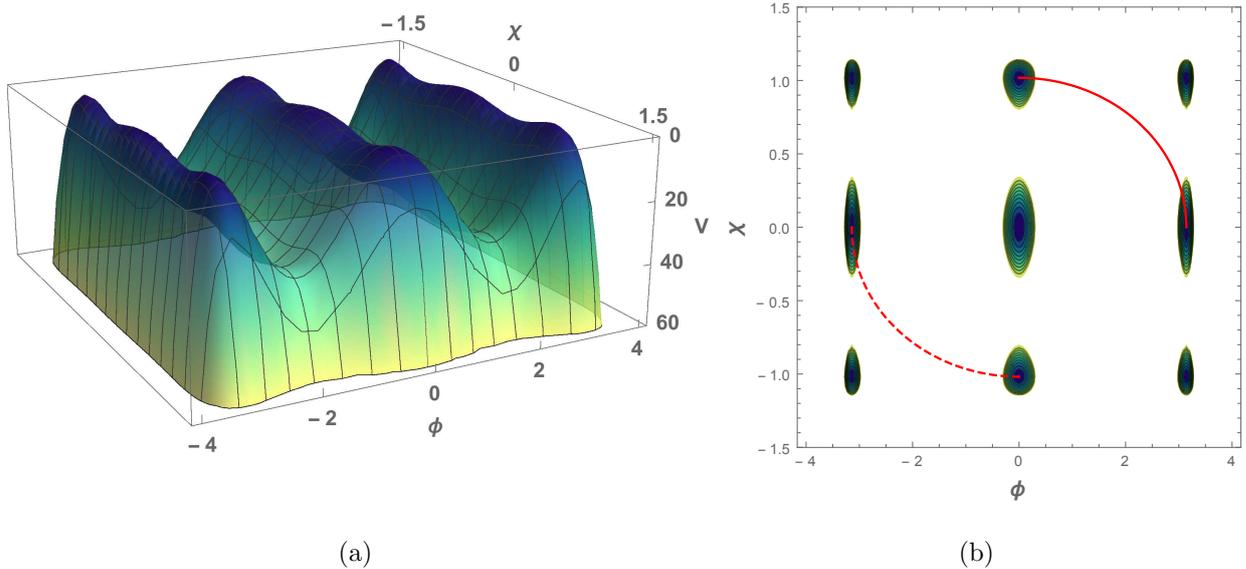


Figura 3.3: Em (a) mostramos o potencial V para $\lambda = 7.30\pi^{-2}$, $\mu = 0.67$ e $b_2 = 0$. Em (b) mostramos um contorno de V , onde as curvas vermelhas solidas e pontilhadas são as órbitas analíticas que conectam os campos ϕ e χ .

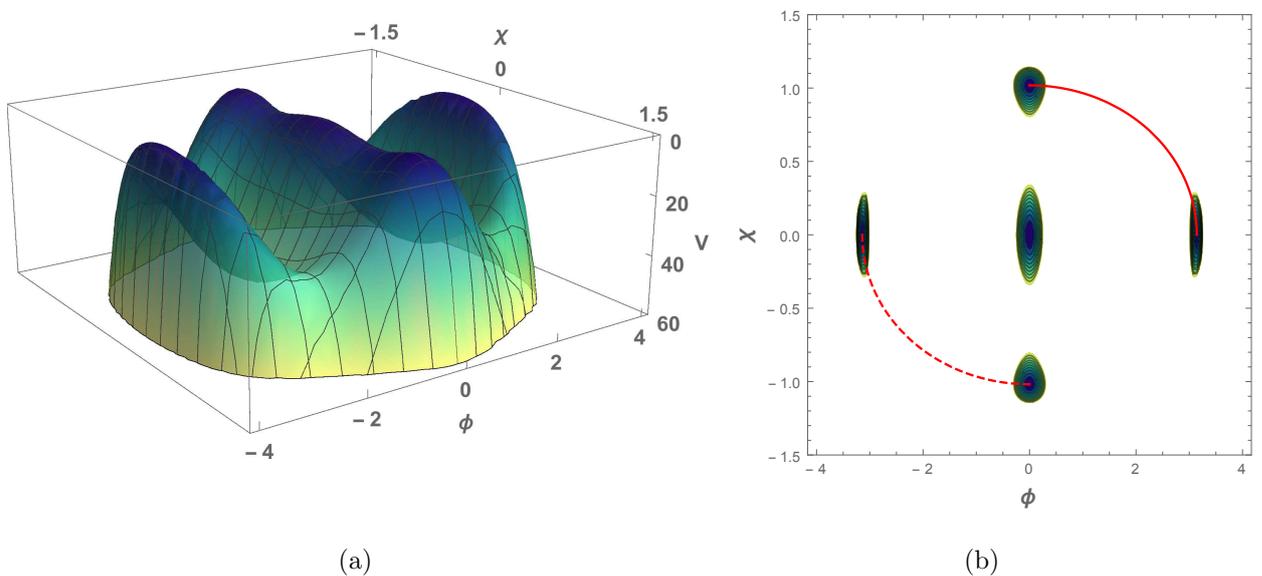


Figura 3.4: Em (a) mostramos o potencial V para $\lambda = 7.30\pi^{-2}$, $\mu = 0.67$ e $b_2 = 2$. Em (b) mostramos um contorno de V , onde as curvas vermelhas solidas e pontilhadas são as órbitas analíticas que conectam os campos ϕ e χ .

$$W_\chi = (1 - b_2)\mu\chi \left(\pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda} \right) + b_2\mu\phi\chi^2. \quad (3.24)$$

Integrando (3.23) em relação a ϕ e (3.24) em relação a χ obtemos o seguinte superpotencial

efetivo

$$W(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - b_2) \left(\mu\chi^2 \left(\frac{\mu\chi^2}{2(\mu - \lambda)} + \pi^2 \right) \right) - \frac{1}{2}b_2 \left(\frac{\phi^2}{2} - \pi^2 \right) \phi^2(\mu - \lambda) + \frac{1}{2}b_2\mu\chi^2\phi^2 + \frac{1}{2}\mu\phi^2 \left(\frac{\phi^2}{2} - \pi^2 \right). \quad (3.25)$$

Podemos encontrar o potencial efetivo $V(\phi, \chi)$ usando o fato de que $V(\phi, \chi)$ pode ser escrito em termos de W_ϕ e W_χ , isto é

$$V(\phi, \chi) = \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (3.26)$$

e com isso obtemos

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2\chi^2 ((\pi^2(b_2 - 1) - b_2\phi^2)(\mu - \lambda) + (b_2 - 1)\mu\chi^2)^2}{(\lambda - \mu)^2} \right) + \frac{1}{2}(\phi(\phi^2 - \pi^2)(b_2(\lambda - \mu) + \mu) + b_2\mu\chi^2\phi)^2. \quad (3.27)$$

Como podemos ver em (3.10) a amplitude do movimento longitudinal é dada por

$$\pi\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1}, \quad (3.28)$$

e de acordo com [4], é necessário ajustar essa amplitude à unidade, isto é,

$$\pi\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1} = 1, \quad (3.29)$$

para torná-la compatível com o fato de que quando a cadeia molecular gira em 180° e volta para seu registro cristalino, o movimento longitudinal muda em $c = 1.27\text{\AA}$, que é a distância entre dois grupos moleculares consecutivos. Isto nos retorna, a partir de (3.29), uma restrição nos parâmetros λ e μ de forma que

$$\mu = \frac{\pi^2}{1 + \pi^2}\lambda. \quad (3.30)$$

Conseqüentemente, escolhendo $\lambda = 7.30\pi^{-2}$, encontramos $\mu \approx 0.67$, resultando em uma família de potenciais físicos que podem descrever naturalmente o comportamento da torção. Podemos observar as características desses potenciais nas Figuras 3.3 e 3.4 onde mostramos como o parâmetro b_2 altera a forma do potencial, interferindo inclusive no

número de vácuos do mesmo. Na Figura 3.3 plotamos o potencial (3.27) para $b_2 = 0$ que para este caso apresenta nove vácuos, sendo quatro deles conectados por órbitas analíticas. Na figura, a órbita vermelha sólida representa o conjunto de soluções analíticas positivas presentes na equação (3.10) e a órbita vermelha pontilhada representa o conjunto de soluções analíticas negativas de (3.10). Observamos também o comportamento do potencial V para $b_2 = 2$ que nos traz um novo conjunto de vácuos, a saber, cinco vácuos. Novamente, quatro deles são conectados pelas órbitas presentes em (3.10). No caso em que fazemos $b_2 = 1$, o potencial retorna à forma analisada por [4, 6], como podemos ver na Figura 3.2. Um fato interessante de se ressaltar é que essa nova família de modelos apresenta a mesma energia BPS encontrada por [4, 6], a saber,

$$E_{BPS} = \frac{\lambda}{4}\pi^4 = 17.99, \quad (3.31)$$

e isso confirma ainda mais a validade da nova famílias de modelos.

Pela primeira vez um modelo de twiston com soluções analíticas foi construído através de uma combinação de dois sistemas de um campo onde há interação entre eles. As soluções analíticas usadas satisfazem uma família inteira de dois modelos de campo escalar, cujos potenciais não apresentam uma linha de zeros. Conclui-se então que esses novos modelos concordam com um deslocamento longitudinal fisicamente consistente para a cadeia molecular, que deve ser proporcional à distância entre os grupos moleculares adjacentes.

Capítulo 4

Férmions na Presença de Campos Escalares Reais

Os primeiros estudos sobre férmions imersos em campos escalares, mais especificamente na presença de soluções do tipo kink, foram feitos por Jackiw e Rebbi [8]. Um resultado importante obtido nesse trabalho foi a fracionalização do número fermiônico ¹.

Trabalhos recentes têm utilizado o modelo de Jackiw e Rebbi acoplado ao modelo $\lambda\phi^4$ [12] e também a outras estruturas do tipo kink [13] com o intuito de observar o comportamento dos férmions nesses campos em 1 + 1 dimensão e há também estudos desse comportamento em 2 + 1 dimensões [16].

Neste capítulo vamos estudar o comportamento dos férmions quando imersos em campos escalares reais. Estudaremos como se comporta o gap de energia (energia de limiar) onde residem os estados ligados fermiônicos e também a possibilidade de controlar esse gap, aumentando ou diminuindo sua largura. Para isso, faremos uma breve revisão sobre a construção da equação de Dirac, de suas soluções e também sobre o spin da partícula de Dirac. Em seguida revisaremos o acoplamento entre o campo fermiônico e o campo escalar (campo bosônico) e também a forma da densidade de Lagrangiana para este tipo de acoplamento. Por fim observaremos o comportamento dos férmions imersos em dois campos escalares reais usando dois diferentes acoplamentos.

¹O número (ou carga) fermiônico é uma quantidade conservada que está ligada a uma transformação de simetria do grupo U(1) aplicada a uma lagrangiana com férmions de Dirac. Geralmente, no vácuo, esse número fermiônico é zero [24].

4.1 Equação de Dirac

Uma das primeiras tentativas de estabelecer uma teoria que descrevesse sistemas quânticos e também relativísticos veio com a equação de Klein-Gordon. Esta, por sua vez, apresentava derivadas temporais de segunda ordem que levava a uma densidade de probabilidade com derivadas temporais de primeira ordem. Este fato, unido a possibilidade da equação de Klein-Gordon apresentar estados com energias negativas, gera uma densidade de probabilidade que pode ser tanto positiva quanto negativa e isto está em desacordo com a definição de densidade de probabilidade [25] e por essas razões esta equação foi descartada [26]. Este problema representava uma limitação para que Dirac construísse uma teoria relativística para o elétron. Então, ele observou que a equação de Schrödinger não-relativística não continha densidades de probabilidade negativas pelo fato de sua derivada temporal ser de primeira ordem, o que não acontecia na equação de Klein-Gordon [27].

Dirac partiu da equação de Einstein

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2, \quad (4.1)$$

cuja raiz quadrada tem a forma

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (4.2)$$

que está longe de ser uma relação linear. Embora essa raiz quadrada não leve a uma relação linear entre a energia e o momento, uma raiz quadrada matricial pode levar a essa relação e essa foi a proposta de Dirac para contornar esse problema. Vamos reescrever a equação Einstein como

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \text{ou} \quad p^2 = p^\mu p_\mu = m^2. \quad (4.3)$$

Vamos considerar isto como uma relação matricial, isto é, uma matriz identidade $n \times n$ multiplicando ambos os lados. Vamos supor ainda que existam 4 matrizes γ^μ $n \times n$ linearmente independentes, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, que são independentes do espaço-tempo de tal modo que

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \quad (4.4)$$

representa a raiz quadrada matricial de p^2 . Se isso é verdade, então, por definição, nós temos

$$\not{p}\not{p} = p^2\mathbb{1} \quad (4.5)$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu = p^2\mathbb{1}, \quad (4.6)$$

onde $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade (no espaço matricial apropriado, neste caso, de dimensional n) e usamos o fato de que as matrizes γ^μ são constantes para movê-las através dos operadores momento. Para a relação (4.6) ser verdadeira, é necessário que as matrizes γ^μ satisfaçam uma álgebra, que tem a forma

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}. \quad (4.7)$$

Esta álgebra é conhecida como Álgebra de Clifford. Vemos que se podemos encontrar um conjunto de 4 matrizes independentes do tempo satisfazendo a Álgebra de Clifford, então, podemos obter a raiz quadrada matricial de p^2 que seria linear na energia e no momento. Antes de buscarmos uma representação para as matrizes γ^μ , vamos olhar as consequências dessa possibilidade. Neste caso, as soluções da equação

$$\not{p}\psi = m\psi, \quad (4.8)$$

satisfariam automaticamente a equação de Einstein, ou seja,

$$\not{p}(\not{p}\psi) = m\not{p}\psi \quad \text{ou} \quad p^2\psi = m^2\psi. \quad (4.9)$$

Além disso, uma vez que a nova equação é linear nas variáveis energia e momento, será, conseqüentemente, linear nas derivadas do espaço e do tempo. Isto é o que se espera para uma definição consistente para a densidade de probabilidade, contornando o problema de Klein-Gordon. A equação (4.8) (ou sua representação nas coordenadas) é conhecida como Equação de Dirac.

Para determinarmos as matrizes, γ^μ , e sua dimensionalidade, notemos que a Álgebra de Clifford em (4.7)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

pode ser reescrita explicitamente como

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= \mathbb{1}, \\ (\gamma^i)^2 &= -\mathbb{1}, \quad (\text{para qualquer } i = 1, 2, 3) \\ \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 &= 0, \\ \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i &= 0. \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pode-se escolher qualquer uma das matrizes para ser diagonal e sem perda de generalidade, escolhe-se

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Do fato de que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, concluímos que um dos elementos da diagonal de γ^0 deve ser ± 1 , isto é

$$b_\alpha = \pm 1. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (4.13)$$

Usando as relações da Álgebra de Clifford em (4.7), para i fixo, obtemos

$$\text{Tr}\gamma^i\gamma^0\gamma^i = \text{Tr}\gamma^i(-\gamma^i\gamma^0) = -\text{Tr}(\gamma^i)^2\gamma^0 = \text{Tr}\gamma^0. \quad (4.14)$$

Por outro lado, a propriedade cíclica do traço que diz que

$$\text{Tr}ABC = \text{Tr}CAB, \quad (4.15)$$

leva a

$$\text{Tr}\gamma^i\gamma^0\gamma^i = \text{Tr}\gamma^i\gamma^i\gamma^0 = \text{Tr}(\gamma^i)^2\gamma^0 = -\text{Tr}\gamma^0. \quad (4.16)$$

Assim, comparando (4.14) e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}\text{Tr}\gamma^i\gamma^0\gamma^i &= \text{Tr}\gamma^0 = -\text{Tr}\gamma^0 \\ \text{ou } \text{Tr}\gamma^0 &= 0.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Para isso ser verdade, concluímos que γ^0 deve ter tantos elementos diagonais com valor $+1$ quantos com -1 . Conseqüentemente as matrizes γ^μ tem dimensão par.

Vamos assumir que $n = 2N$. A estrutura matricial não-trivial mais simples surgiria para $N = 1$ quando as matrizes devem ser bidimensionais (matrizes 2×2). Sabemos que as 3 matrizes de Pauli junto com a matriz identidade definem uma base completa para as matrizes 2×2 . Entretanto elas não satisfazem a Álgebra de Clifford. Ou seja, se definimos $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, então,

$$\{\sigma^\mu, \sigma^\nu\} \neq 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}.\tag{4.18}$$

De fato, em duas dimensões, não podem existir 4 matrizes anticomutantes.

A próxima escolha é $N = 2$ para a qual as matrizes serão quadri-dimensionais (matrizes 4×4). Neste caso, podemos encontrar um conjunto de 4 matrizes constantes linearmente independentes que satisfaça a Álgebra de Clifford. Uma escolha particular dessas matrizes, por exemplo, tem a forma

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \\ \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{4.19}$$

onde cada elemento das matrizes 4×4 representam uma matriz 2×2 e as σ_i correspondem as três matrizes de Pauli. Essa escolha particular das matrizes de Dirac é comumente conhecida como representação de Pauli-Dirac.

Para obter a hamiltoniana para a equação de Dirac, vamos para a representação das coordenadas onde a equação de Dirac (4.8) toma a forma (lembre que $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}(i\cancel{\partial} - m)\psi &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ \text{ou, } (i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi &= 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Multiplicando γ^0 pela esquerda e usando o fato de que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, temos

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m\gamma^0)\psi = 0. \quad (4.21)$$

Por convenção, denota-se

$$\beta = \gamma^0, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}. \quad (4.22)$$

Em termos dessas matrizes, então, podemos escrever (4.21) como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\beta)\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi. \quad (4.23)$$

Esta é uma equação de primeira ordem (na derivada temporal) do mesmo modo que a equação de Schrödinger e podemos identificar a hamiltoniana da equação de Dirac como

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (4.24)$$

Em uma representação particular das matrizes γ^μ na equação (4.19), podemos notar que

$$\begin{aligned} \beta = \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \\ \alpha = \gamma^0\vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Agora é possível determinar a partir das equações (4.22) e (4.7) ou da própria representação explícita na equação anterior que as matrizes α e β satisfazem as seguintes relações de anti-comutação

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= 2\delta^{ij}\mathbb{1}, \\ \{\alpha^i, \beta\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

sabendo que $\beta^2 = \mathbb{1}$. Podemos checar diretamente a partir de (4.25) que tanto α quanto β são matrizes hermitianas. Entretanto, independentemente, podemos notar também da própria hamiltoniana (4.24) que, para que ela seja hermitiana, devemos ter

$$\begin{aligned}\beta^\dagger &= \beta, \\ \vec{\alpha}^\dagger &= \vec{\alpha}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Em termos das matrizes γ^μ isto pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\beta &= \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger, \\ \vec{\alpha} &= \gamma^0 \vec{\gamma} = (\gamma^0 \vec{\gamma})^\dagger = \vec{\alpha}^\dagger.\end{aligned}\tag{4.28}$$

De maneira equivalente podemos escrever

$$\begin{aligned}(\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, \\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Isto significa que, independente da representação, as matrizes γ^μ devem sempre satisfazer as propriedades de hermiticidade vistas anteriormente na equação (4.29).

4.2 Soluções da Equação de Dirac

A equação de Dirac em (4.20) também pode ser escrita na representação do momento, na forma

$$(\not{p} - m)\psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0\tag{4.30}$$

Esta equação, como vimos, define um conjunto de equações matriciais. Uma vez que as matrizes γ^μ são matrizes 4×4 , as funções de onda, neste caso, são matrizes coluna de 4 componentes (vetores coluna). Para entender que tipo de partículas são descritas pela equação de Dirac, olhemos as soluções de onda plana da equação.

Vamos denotar a função de onda de 4 componentes como (x significa ambos espaço e tempo)

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix},\tag{4.31}$$

com

$$\psi_\alpha(x) = e^{-ip \cdot x} u_\alpha(p), \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \quad (4.32)$$

Substituindo isto de volta na equação de Dirac (4.30), obtemos

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (4.33)$$

onde a função de 4 componentes $u(p)$ tem a forma

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Vamos simplificar os cálculos restringindo o movimento ao longo do eixo z . Em outras palavras, definimos

$$p_1 = p_2 = 0. \quad (4.35)$$

Neste caso, a equação de Dirac fica

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i)u(p) = (\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3)u(p) = (\gamma^0 p_0 + \gamma^3 p_3)u(p) = 0. \quad (4.36)$$

Tomando a representação particular das matrizes γ^μ em (4.19), podemos escrever esta última equação como

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_0 - m & 0 & -p_3 \\ -p_3 & 0 & -(p_0 + m) & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & -(p_0 + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.37)$$

Este é um segundo conjunto de 4 equações lineares homogêneas e uma solução não-trivial existe apenas se o determinante da matriz dos coeficientes for zero. Assim, é necessário que

$$\det \begin{pmatrix} p_0 - m & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_0 - m & 0 & -p_3 \\ -p_3 & 0 & -(p_0 + m) & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & -(p_0 + m) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.38)$$

donde obtemos

$$p_0^2 - p_3^2 - m^2 = 0. \quad (4.39)$$

Com isso, vemos que uma solução não-trivial de onda plana para a equação de Dirac existe apenas para os valores de energia

$$p_0 = \pm E = \pm \sqrt{p_3^2 + m^2}. \quad (4.40)$$

Podemos obter as soluções da equação de Dirac resolvendo diretamente o conjunto de equações acopladas em (4.37). Alternativamente, podemos introduzir funções de onda de duas componentes $\tilde{u}(p)$ e $\tilde{v}(p)$ e escrever

$$u(p) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

onde

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Notamos que, para as soluções com energia positiva, isto é,

$$p_0 = E_+ = E = \sqrt{p_3^2 + m^2}, \quad (4.43)$$

o conjunto de equações acopladas toma a forma

$$\begin{pmatrix} (E_+ - m)\mathbb{1} & \sigma_3 p_3 \\ -\sigma_3 p_3 & -(E_+ + m)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.44)$$

Escrevendo explicitamente a equação anterior, temos

$$\begin{aligned}
(E_+ - m)\tilde{u}(p) + \sigma_3 p_3 \tilde{v}(p) &= 0, \\
\sigma_3 p_3 \tilde{u}(p) + (E_+ + m)\tilde{v}(p) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

A função de duas componentes $\tilde{v}(p)$ pode ser resolvida em termos de $\tilde{u}(p)$ e obtemos da segunda relação em (4.44)

$$\tilde{v}(p) = -\frac{\sigma_3 p_3}{E_+ + m} \tilde{u}(p). \tag{4.46}$$

Vemos aqui que a primeira relação em (4.44) também leva à mesma relação (4.46). Portanto, a solução com energia positiva é completamente dada pela relação (4.46).

Escolhendo as duas soluções independentes para \tilde{u} como

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

obtemos respectivamente, substituindo-as em (4.46),

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_+ + m} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

e

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_+ + m} \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Similarmente, para as equações com energia negativa escrevemos

$$p_0 = E_- = E = -\sqrt{p_3^2 + m^2}, \tag{4.50}$$

e o conjunto de equações (4.44) se torna

$$\begin{aligned}
(E_- - m)\tilde{u}(p) + \sigma_3 p_3 \tilde{v}(p) &= 0, \\
\sigma_3 p_3 \tilde{u}(p) + (E_- + m)\tilde{v}(p) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

podemos resolver isso (da primeira relação) e obter

$$\tilde{u}(p) = -\frac{\sigma_3 p_3}{E_- + m} \tilde{v}(p). \tag{4.52}$$

Escolhendo novamente soluções independentes como

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

obtemos respectivamente, substituindo em (4.52),

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

e

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_- - m} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

e essas determinam as duas soluções da equação de Dirac com energia negativa.

As funções de onda de duas componentes independentes em (4.47) e (4.47) sugerem estados de spin *up* e *down* de um espinor de duas componentes. Assim, do fato de que podemos escrever

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ -\frac{\sigma_3 p_3}{E_+ + m} \tilde{u}(p) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_-(p) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_3 p_3}{E_- - m} \tilde{v}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

as soluções com energia positiva e negativa têm as formas explícitas

$$u_+^\uparrow(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_3}{E_+ + m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_+^\downarrow(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E_+ + m} \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

$$u_-^\uparrow(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-^\downarrow(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

A notação é sugestiva e implica que a função de onda corresponde a uma partícula de spin 1/2.

4.3 Spin da Partícula de Dirac

Como vimos, a estrutura das soluções de onda plana da equação de Dirac sugere o fato de que a partícula descrita pela equação de Dirac tem spin $1/2$. Vamos definir uma generalização quadridimensional das matrizes de Pauli como

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.59)$$

Pode-se verificar que isso está relacionado às matrizes α_i definidas em (3.22) e (3.25) através da relação

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \rho \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i \rho, \quad (4.60)$$

onde

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Notemos que $\rho^2 = \mathbb{1}$, então podemos inverter a definição (4.60) e escrever

$$\begin{aligned} \rho \alpha_i &= \rho^2 \tilde{\alpha}_i \rightarrow \rho \alpha_i = \tilde{\alpha}_i, \\ \tilde{\alpha}_i &= \rho \alpha_i = \alpha_i \rho. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Da estrutura das matrizes α_i e $\tilde{\alpha}_i$ concluímos que

$$[\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tilde{\alpha}_k. \quad (4.63)$$

Isso mostra que $\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_i$ satisfaz a álgebra do momento angular (lembre que $\hbar = 1$) e isso é porque chamamos as matrizes, $\tilde{\alpha}_i$, a generalização das matrizes de Pauli. Além disso, notemos que

$$[\tilde{\alpha}_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k, \quad (4.64)$$

e também que

$$[\tilde{\alpha}_i, \beta] = 0. \quad (4.65)$$

Com essas relações à nossa disposição, vamos observar a hamiltoniana livre de Dirac em (4.24)

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = \alpha_i p_i + \beta m. \quad (4.66)$$

O operador momento angular é dado por

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.67)$$

Calculando o comutador deste operador com o hamiltoniano de Dirac, obtemos

$$[L_i, H] = i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k. \quad (4.68)$$

Assim, notamos que operador momento angular orbital não comuta com o hamiltoniano de Dirac. Conseqüentemente, o momento angular que comutaria com o hamiltoniano deve conter também uma parte de spin. Para determinar o momento angular de spin, notamos que

$$[\tilde{\alpha}_i, H] = -2i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k. \quad (4.69)$$

Então, combinando esta relação com (4.68) obtemos

$$[L_i + \frac{1}{2}\alpha_i, H] = [L_i, H] + \frac{1}{2}[\tilde{\alpha}_i, H] = i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k - i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k = 0. \quad (4.70)$$

Em outras palavras, o momento angular total deve comutar com o hamiltoniano, se as rotações são uma simetria do sistema, podemos identificar que

$$J_i = L_i + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_i. \quad (4.71)$$

Neste caso, portanto, podemos identificar o momento angular de spin como

$$S_i = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_i. \quad (4.72)$$

Note, em particular que

$$S_3 = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

que tem autovalores duplamente degenerados $\pm\frac{1}{2}$. Portanto, concluímos que a partícula descrita pela equação de Dirac corresponde a uma partícula de spin 1/2.

4.4 Acoplamento Férmion-Bóson

Como foi visto na seção 4.1, a equação de Dirac para uma partícula massiva de spin 1/2 tem a seguinte forma

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (4.74)$$

A densidade de lagrangiana que dá origem a esta equação e também à sua adjunta, $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$ [25], é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = i\bar{\psi}\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.75)$$

onde podemos ver claramente que as equações de Euler-Lagrange são obtidas da densidade de probabilidade anterior, ou seja

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.76)$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = m\bar{\psi} - \partial_\mu(-i\bar{\psi}\gamma^\mu) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0. \quad (4.77)$$

Com o intuito de estudarmos o comportamento de campos fermiônicos imersos em campos escalares reais, necessitamos de uma densidade de lagrangiana que contenha um acoplamento entre esse campos. Para isso, é preciso utilizar o acoplamento de Yukawa. Este tipo de acoplamento foi proposto por Hideki Yukawa com o objetivo de investigar as interações nucleares entre *núcleons* (ψ) e *píons* (ϕ) (méson π). Em teorias modernas de partículas, o Modelo Padrão contém termos de acoplamento de Yukawa entre o campo escalar de Higgs com quarks e léptons [28].

O acoplamento de Yukawa é dado por $g\bar{\psi}F(\phi)\psi$ onde $F(\phi)$ é uma função que depende do campo escalar real e g é uma constante que tem o papel de regular a intensidade da interação entre os campos chamada de constante de acoplamento. A densidade de lagrangiana total será então composta por uma parte fermiônica, uma parte bosônica (campo escalar real) e também pelo acoplamento de Yukawa, isto é

$$\mathcal{L}_{Total} = \mathcal{L}_{Bosônica} + \mathcal{L}_{Fermiônica} - g\bar{\psi}F(\phi)\psi, \quad (4.78)$$

onde temos explicitamente que

$$\mathcal{L}_{Total} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi) + \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - g\bar{\psi}F(\phi)\psi. \quad (4.79)$$

Analogamente, para o caso de sistemas em que o campo fermiônico está imerso em dois campos escalares reais, ϕ e χ , a densidade de lagrangiana total se torna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi - V(\phi, \chi) + \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - g\bar{\psi}F(\phi, \chi)\psi. \quad (4.80)$$

onde a forma de $F(\phi, \chi)$ pode nos retornar acoplamentos usuais de Yukawa ou acoplamentos tipo-Yukawa.

4.5 Férmions em Dois Campos Escalares Não Interagentes

Nesta seção, faremos uma revisão sobre férmions não massivos na presença de um campo escalar usando as referências [12, 13, 14]. Nestes estudos observou-se que o comportamento do campo fermiônico está ligado à forma do campo escalar. A depender da forma do potencial escalar em que o campo fermiônico está imerso há um aumento ou diminuição do número de estados ligados. A forma da energia onde é possível ter estados ligados (energia de limiar) também muda de potencial para potencial. Pensando nisso, vamos investigar a possibilidade de alterar a forma da energia de limiar usando dois campos escalares ao invés de um, utilizando um acoplamento do tipo $F(\phi, \chi) = \phi\chi$ e outro do tipo $F(\phi, \chi) = \phi + \chi$.

4.5.1 Acoplamento $F(\phi, \chi) = \phi\chi$

Podemos escrever a densidade de lagrangiana (4.80) para férmions não massivos, fazendo $g = 1$, da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi - (V(\phi) + V(\chi)) + \frac{1}{2}\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi - \bar{\psi}F(\phi, \chi)\psi, \quad (4.81)$$

onde $F(\phi, \chi) = \phi\chi$, representando um acoplamento tipo-Yukawa. Desta lagrangiana tem-se a parte bosônica

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (4.82)$$

lembrando que

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2} \quad \text{e} \quad V(\chi) = \frac{W_\chi^2}{2}. \quad (4.83)$$

A parte fermiônica fica dada por

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi}\phi\chi\psi. \quad (4.84)$$

Da lagrangiana (4.82) obtêm-se as equações de movimento

$$\phi'' - W_\phi W_{\phi\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \chi'' - W_\chi W_{\chi\chi} = 0, \quad (4.85)$$

cujas equações de primeira ordem obtidas via método BPS têm a forma abaixo

$$\phi' = W_\phi \quad \text{e} \quad \chi' = W_\chi. \quad (4.86)$$

A partir da lagrangiana (4.84) chega-se na equação de movimento para o campo fermiônico

$$(i\not{\partial} - 2\phi\chi)\psi = 0, \quad (4.87)$$

com

$$\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu. \quad (4.88)$$

Dado o seguinte ansatz para o campo fermiônico

$$\psi(x, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \psi^{(+)}(x) \\ \psi^{(-)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

e substituindo-o na equação de movimento (4.87) obtém-se

$$E\psi^{(\pm)} + \left(\pm \frac{d}{dx} - 2\phi\chi \right) \psi^{(\mp)} = 0. \quad (4.90)$$

É possível ainda obter uma equação tipo Schrödinger a partir da equação anterior, que fica na forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U_{(\mp)}(x)\right) \psi^{(\pm)} = E^2 \psi^{(\pm)}, \quad (4.91)$$

onde o potencial $U_{(\pm)}(x)$ é dado por

$$U_{(\pm)}(x) = \pm 2 \frac{d(\phi\chi)}{dx} + 4(\phi\chi)^2. \quad (4.92)$$

Pode-se reescrever a equação (4.91) como

$$Q^\mp Q^\pm \psi^{(\pm)} = E^2 \psi^{(\pm)}, \quad (4.93)$$

onde

$$Q^\pm = \pm \frac{d}{dx} + 2\phi\chi. \quad (4.94)$$

Para encontrar o modo zero fermiônico resolve-se $Q^\pm \psi^{(\pm)} = 0$ obtendo

$$\psi_0^{(\pm)} = c_\pm e^{\mp 2 \int \phi\chi dx}. \quad (4.95)$$

Tomando o limite $x \rightarrow \infty$ na equação (4.90) chega-se na energia de limiar (threshold energy)

$$E_{th} = 2\phi_{min}\chi_{min}, \quad (4.96)$$

onde ϕ_{min} e χ_{min} indicam os mínimos (ou vácuos) do potencial. Essa energia de limiar representa a interface entre a região espectral compatível com estados ligados e a região dos estados de espalhamento.

Consideremos dois modelos bosônicos, presentes em [14].

$$W_\phi = \frac{1}{1-\lambda} \text{cd}(\phi, \lambda), \quad (4.97)$$

e

$$W_\chi = \frac{2 \text{cn}^2(\chi/2, \mu) - (1-\mu)}{\text{dn}(\chi/2, \mu)}. \quad (4.98)$$

Podemos observar que os modelos são escritos em termos das funções elípticas de Jacobi onde λ e μ são parâmetros reais que pertencem ao intervalo $[0,1]$. As soluções obtidas para os modelos (4.97) e (4.98) são dadas por

$$\phi(x) = \text{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right) \quad (4.99)$$

e

$$\chi(x) = 2 \text{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\mu^2} x \right), \mu \right). \quad (4.100)$$

Como podemos ver na Figura 4.1, as soluções (4.99) e (4.100) representam configurações topológicas (kinks), como vimos na Seção 2.1. Ao passo que alteramos os valores dos parâmetros λ e μ a transição entre dois diferentes estados do sistema se torna mais suave ou mais abrupta, sendo que para o modelo (4.99) essa característica é mais acentuada.

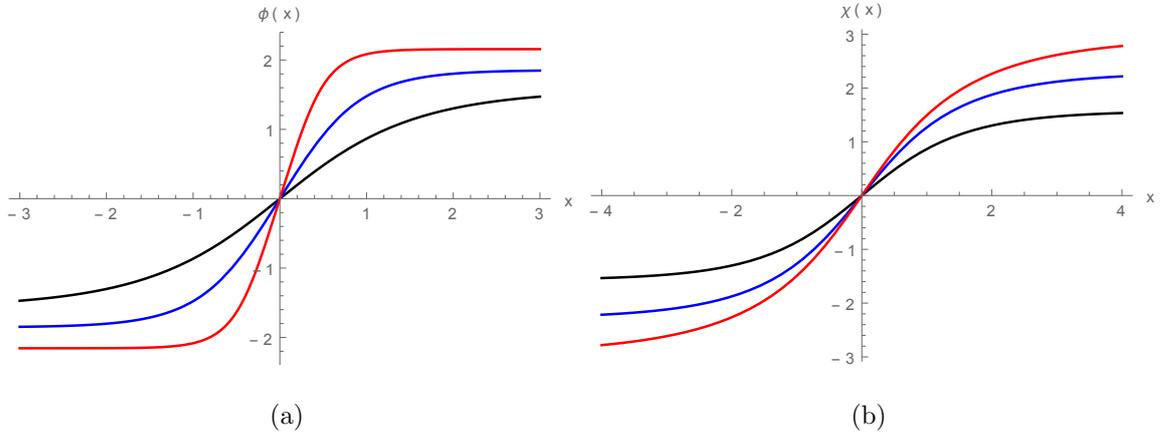


Figura 4.1: Forma das soluções (4.99) em (a) e (4.100) em (b). Em (a): $\lambda = 0, 0.5$ e 0.75 nas curvas preta, azul e vermelha, respectivamente. Em (b): $\mu = 0, 0.5$ e 0.75 nas curvas preta, azul e vermelha, respectivamente.

Dadas essas soluções podemos observar o comportamento do potencial (4.92) para diferentes valores dos parâmetros λ e μ que nesse caso fica dado por

$$U_- = \frac{16 \text{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \tanh \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-\mu^2} \right), \mu \right)^2 \text{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right)^2 + 4 \text{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \tanh \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-\mu^2} \right), \mu \right) \text{cd} \left(\text{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right), \lambda \right)}{\lambda - 1} + \frac{2(\mu - 1) \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \sqrt{1-\mu^2} \text{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right)}{\mu - \cosh \left(\sqrt{1-\mu^2} x \right)} \quad (4.101)$$

De imediato podemos perceber, através das Figuras 4.2 e 4.3, que o potencial não é simétrico (não possui simetria de reflexão). Entretanto, essa assimetria diminui conforme

aumentamos os valores dos parâmetros. Em ambos fixamos um parâmetro e modificamos o outro. Na figura 4.2 fixamos o parâmetro λ nos valores 0, 0.25, 0.5 e 0.75 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, e variamos o parâmetro μ também em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de λ . Observamos também que a medida que aumentamos os valores dos parâmetros a profundidade do poço do potencial aumenta e sua largura sofre poucas alterações, permanecendo praticamente a mesma.

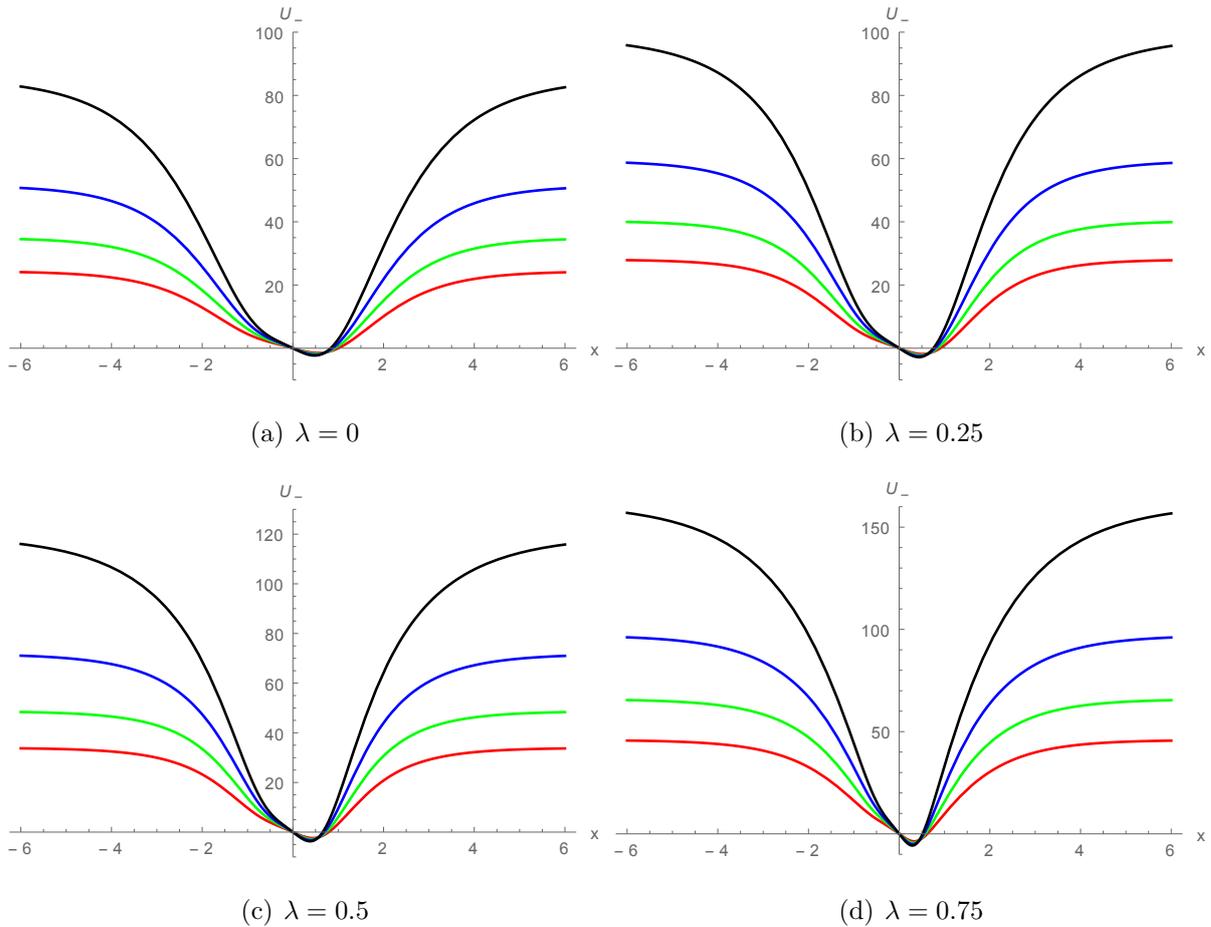


Figura 4.2: Potencial U_- mostrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

Já na figura 4.3 fixamos o parâmetro μ nos valores 0, 0.25, 0.5 e 0.75 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, e variamos o parâmetro λ também em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de μ . Aqui verificamos um comportamento semelhante ao caso anterior, onde fixamos λ , entretanto vemos que a profundidade do poço aumenta de forma mais abrupta. A largura do potencial por sua vez sofre também pequenas alterações conforme aumentamos os valores dos parâmetros.

Vamos agora observar o comportamento da energia de limiar. Para as soluções

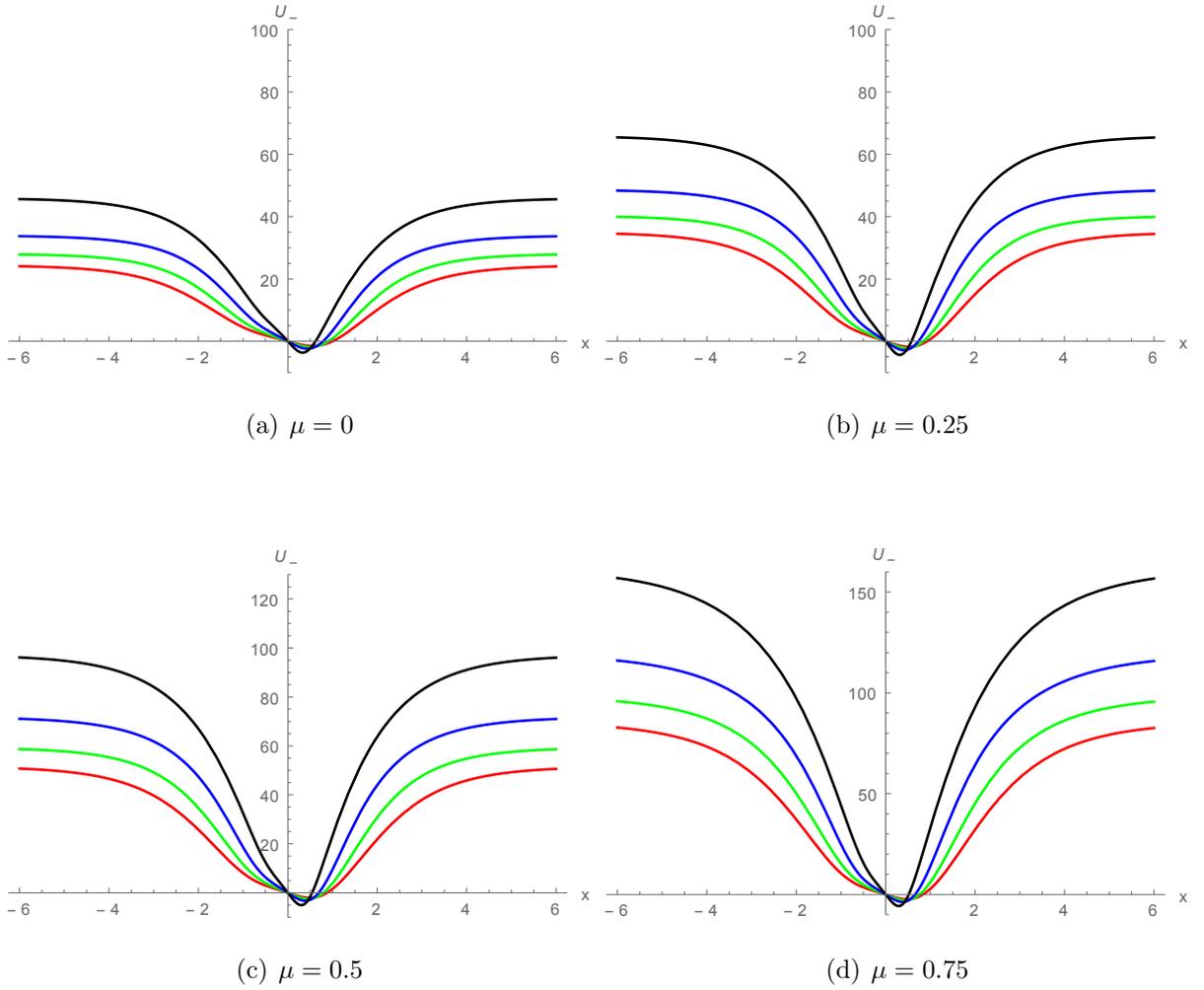


Figura 4.3: Potencial U_- mostrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

(4.99) e (4.100) a energia de limiar (4.96) tem a seguinte forma

$$E_{th} = 4 \operatorname{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, \mu \right) \operatorname{sn}^{-1}(1, \lambda). \quad (4.102)$$

Na Figura 4.4 representamos a energia de limiar (4.102) em função do parâmetro μ para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 . Também representamos a mesma energia na Figura 4.5 agora em função de λ , fixando os valores de μ em $0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 . Podemos verificar que é possível, combinando os parâmetros dos modelos, alterar a forma da energia de limiar, aumentando ou diminuindo a região onde os estados ligados são possíveis. Em consequência dessa alteração o número de estados ligados também pode aumentar ou diminuir. Percebemos também, que esse controle do gap de energia é mais evidente quando tomamos a energia em função de λ .

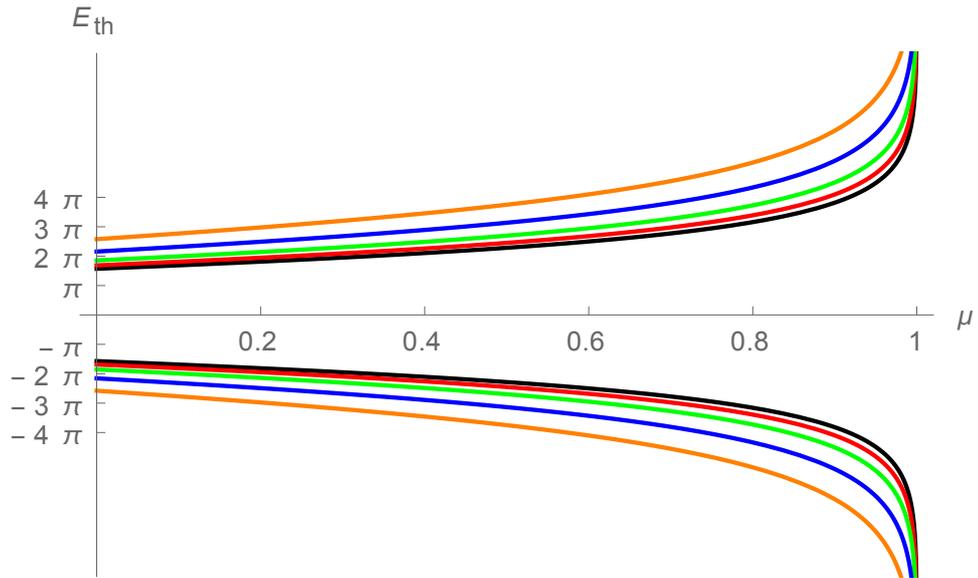


Figura 4.4: Energia E_{th} representada para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente.

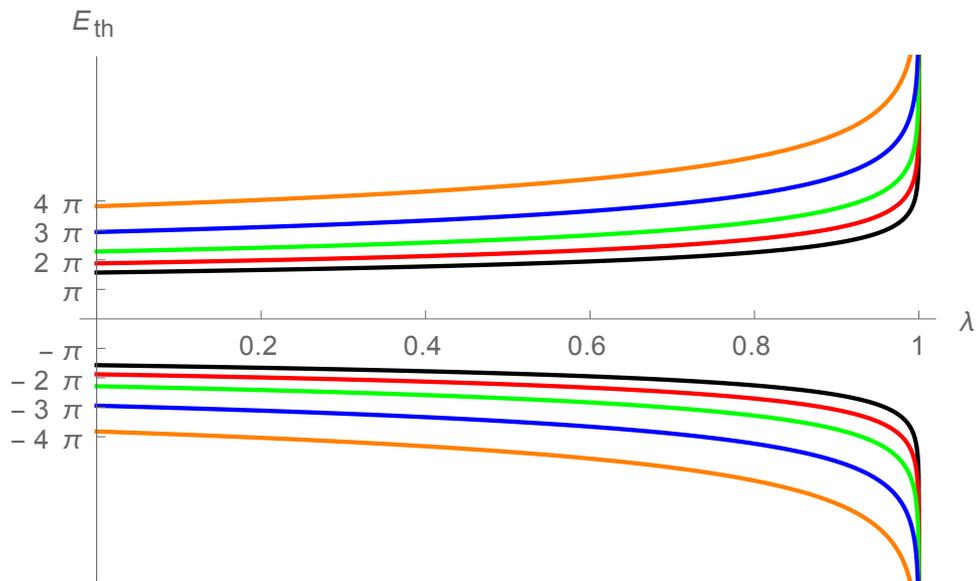


Figura 4.5: Energia E_{th} representada para $\mu = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente .

Nas Figuras 4.6 e 4.7 mostramos o comportamento do modo zero fermiônico, equação (4.95), para diferentes valores de λ e μ . Na Figura 4.6 vemos a forma do modo zero

fixando os valores de λ em 0, 0.5, 0.75 e 0.95 e variando μ em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de λ . Vemos que quando λ cresce há uma diminuição da largura e um aumento na altura do modo zero. Vemos também que o modo zero fica mais localizado. Para a Figura 4.7, fixamos os valores de μ e variamos λ . Percebemos outra vez uma diminuição da largura e aumento de altura, causando novamente um modo zero mais localizado.

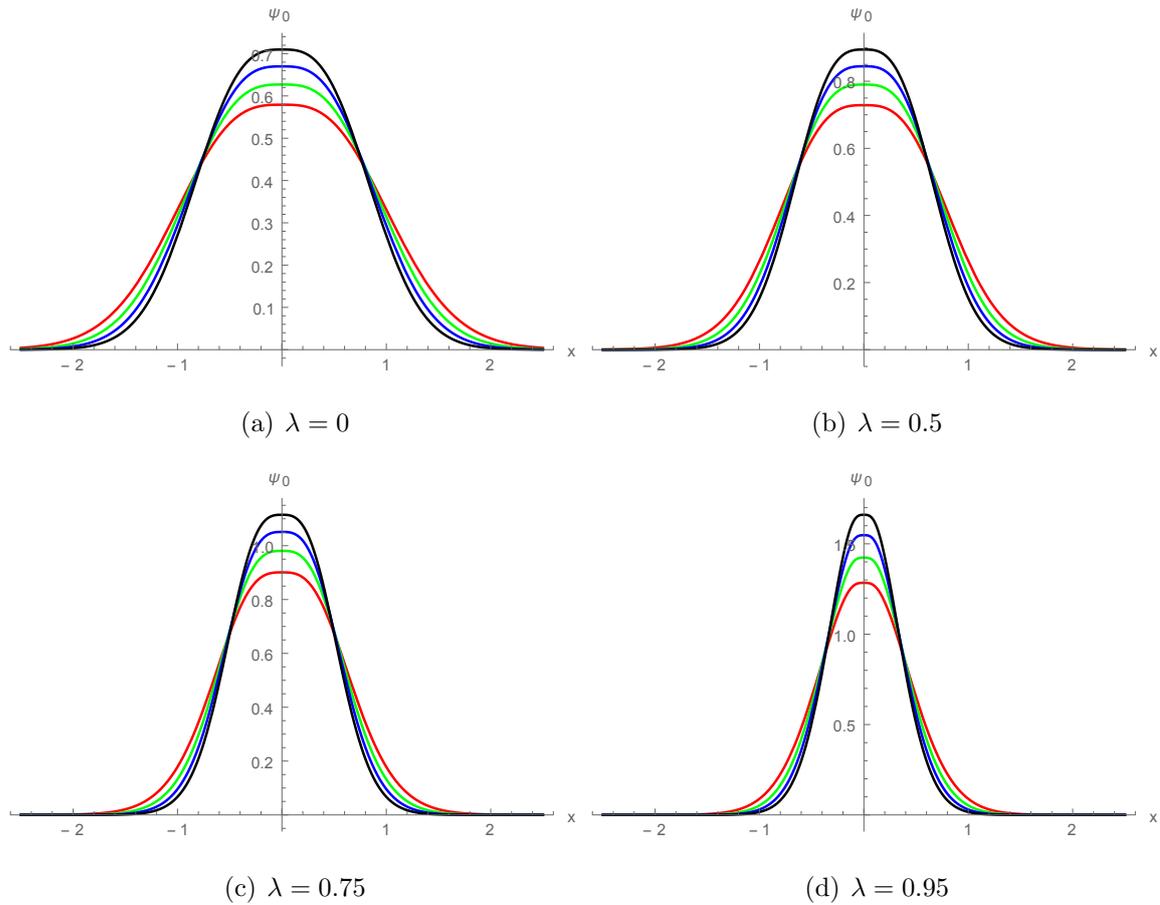


Figura 4.6: Modo zero ilustrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

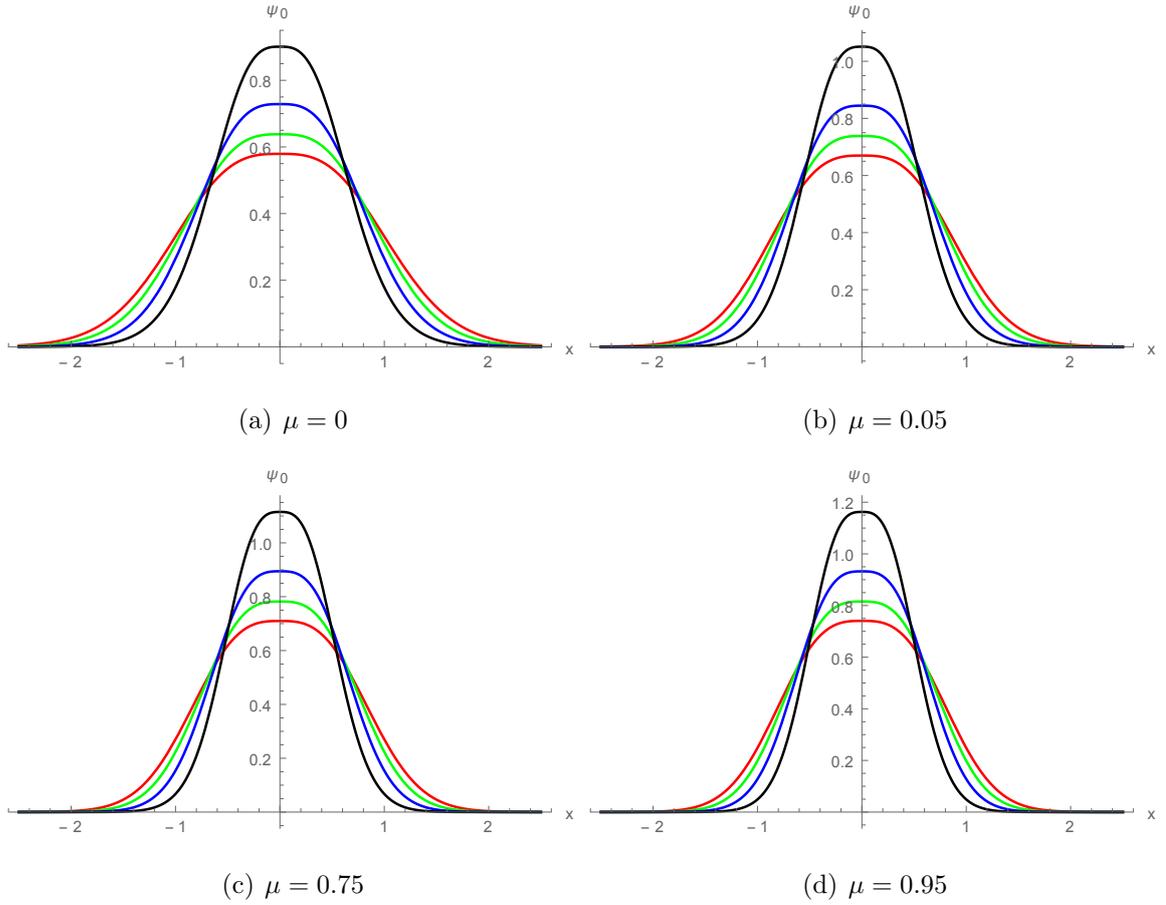


Figura 4.7: Modo zero ilustrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

Vimos que para este acoplamento podemos construir um potencial fermiônico U_- , apesar do mesmo possuir uma assimetria em sua forma, e obter ainda modos zeros fermiônicos bem definidos. A energia de limiar por sua vez, apresentou um bom controle, no sentido de que nos permite fazer variações significativas conforme alteramos os parâmetros do modelo. Essas variações são mais acentuadas se fixarmos o parâmetro λ e menos acentuadas se fixarmos o parâmetro μ .

4.5.2 Acoplamento $F(\phi, \chi) = \phi + \chi$

Vamos considerar agora acoplamentos usuais de Yukawa na forma $F(\phi, \chi) = \phi + \chi$ e com isso reescrever a lagrangiana (4.81) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - (V(\phi) + V(\chi)) + \frac{1}{2}\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi - \bar{\psi}\phi\psi - \bar{\psi}\chi\psi. \quad (4.103)$$

A equação de movimento para o campo fermiônico toma a forma

$$(i\cancel{D} - 2(\phi + \chi))\psi = 0, \quad (4.104)$$

e ao aplicarmos o ansatz (4.89) chegamos com facilidade em

$$E\psi^{(\pm)} + \left(\pm \frac{d}{dx} - 2(\phi + \chi) \right) \psi^{(\mp)} = 0. \quad (4.105)$$

Como para o caso anterior, podemos escrever também uma equação tipo Schrödinger a partir de (4.105) como

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U_{(\mp)}(x) \right) \psi^{(\pm)} = E^2 \psi^{(\pm)}, \quad (4.106)$$

onde o potencial $U_{(\pm)}(x)$ é dado por

$$U_{(\pm)}(x) = \pm 2 \frac{d(\phi + \chi)}{dx} + 4(\phi + \chi)^2. \quad (4.107)$$

Para encontrar o modo zero fermiônico seguimos os mesmos procedimentos vistos anteriormente e reescrevemos (4.106) na forma da equação (4.93), onde

$$Q^\pm = \pm \frac{d}{dx} + 2(\phi + \chi), \quad (4.108)$$

e resolvendo $Q^\pm \psi^{(\pm)} = 0$ obtemos

$$\psi_0^{(\pm)} = c_\pm e^{\mp 2 \int (\phi + \chi) dx}. \quad (4.109)$$

Tomando novamente o limite $x \rightarrow \infty$ na equação (4.105) chegamos em

$$E_{th} = 2(\phi_{min} + \chi_{min}), \quad (4.110)$$

que é a energia de limiar.

Vamos utilizar os mesmos modelos vistos no caso anterior, a saber, os modelos (4.97) e (4.98). Neste caso, o potencial (4.107) tem a forma

$$\begin{aligned}
U_- = & 4 \left(2 \operatorname{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu+1}{1-\mu}} \tanh \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-\mu^2} \right), \mu \right) + \operatorname{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right) \right)^2 + \\
& 2 \frac{(\mu-1) \sqrt{\frac{\mu+1}{1-\mu}} \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{nd} \left(\operatorname{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu+1}{1-\mu}} \tanh \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-\mu^2} \right), \mu \right), \mu \right)}{\mu - \cosh \left(\sqrt{1-\mu^2} x \right)} - \\
& 2 \frac{\operatorname{cd} \left(\operatorname{sn}^{-1} \left(\tanh \left(\frac{x}{1-\lambda} \right), \lambda \right), \lambda \right)}{1-\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Podemos ver o comportamento desse potencial nas Figuras 4.8 e 4.9 para diferentes valores de λ e μ . Diferentemente do caso anterior, esse potencial apresenta simetria de reflexão. Na figura 4.8 fixamos o valor do parâmetro λ em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente, e variamos o parâmetro μ também em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de λ . Vemos que a medida que aumentamos o valor de λ aumenta-se também a profundidade do poço do potencial e sua largura sofre poucas alterações.

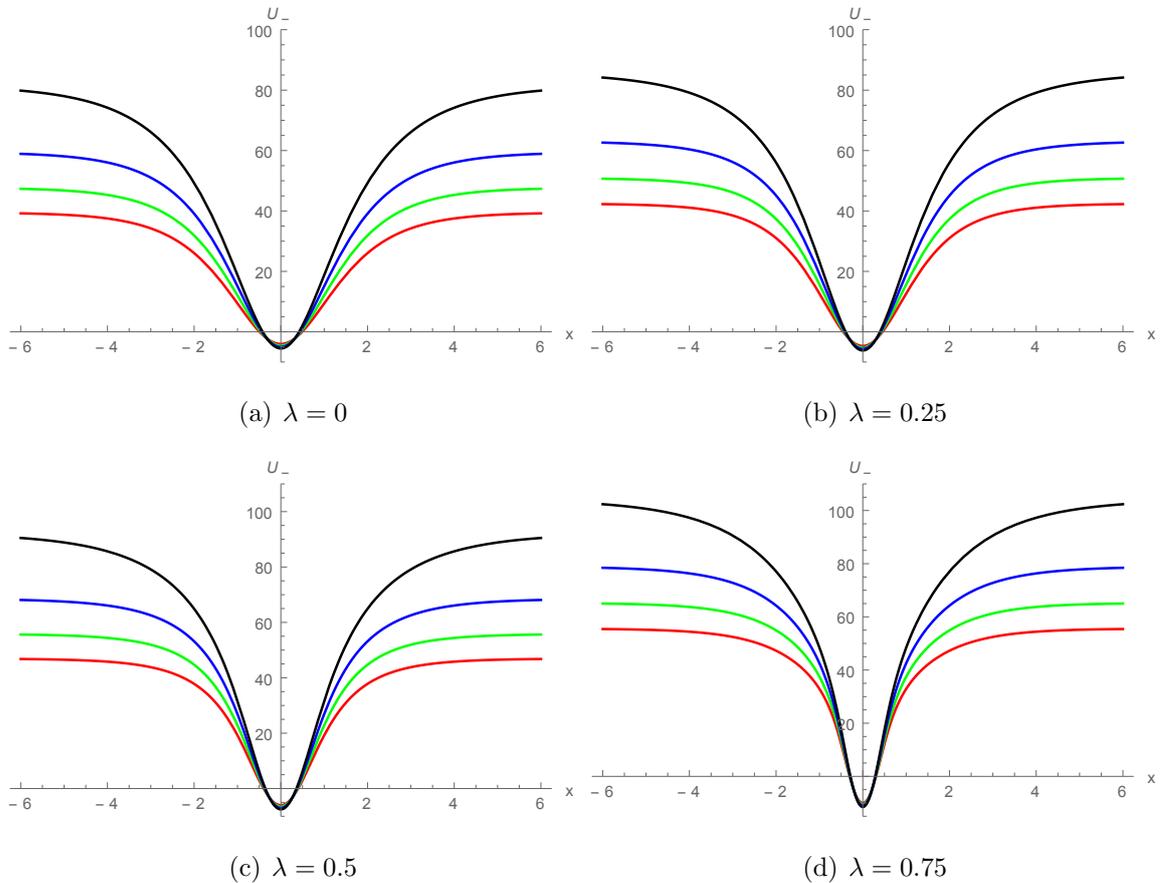


Figura 4.8: Potencial U_- mostrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

Semelhantemente, na Figura 4.9, fixamos o valor de μ em em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 em (a) ,(b) ,(c) e (d), nessa ordem, e variamos λ em em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de μ . Podemos ver que quando aumentamos os valores de μ a profundidade do potencial também aumenta, de forma mais abrupta que o caso anterior, entretanto podemos uma alteração mais acentuada em sua largura, em oposição ao que observamos na Figura 4.8.

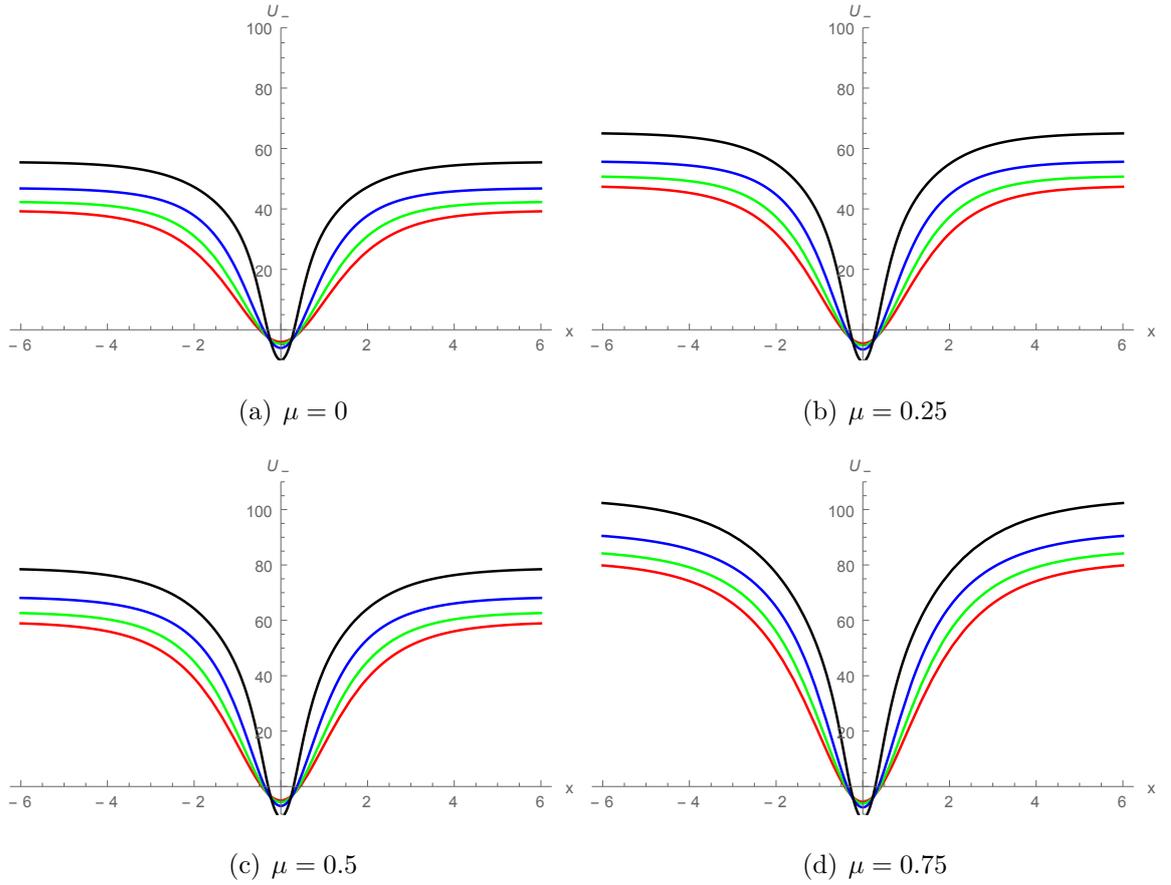


Figura 4.9: Potencial U_- mostrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

Para este acoplamento, observamos também como se comporta o modo zero fermiônico normalizado. Através da equação (4.109) geramos as Figuras 4.12 e 4.13. Em ambas, podemos observar que a função de onda para o modo zero mantém sua altura e fica mais estreita conforme aumentamos os valores de λ e μ

A energia de limiar, a equação (4.110), toma a forma

$$E_{th} = 2 \left(2 \operatorname{sc}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, \mu \right) + \operatorname{sn}^{-1}(1, \lambda) \right). \quad (4.112)$$

Representamos essa energia na Figura 4.10 em função do parâmetro μ para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 . Na Figura 4.11 podemos ver a mesma energia em função de λ fixando os valores de μ em $0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 . Novamente podemos perceber que é possível controlar esse gap de energia a proporção que alteramos os valores dos parâmetros dos modelos. Entretanto, a mudança é mais suave e o controle mais limitado que no caso anterior, levando em conta o intervalo de variação dos parâmetros λ e μ , mas permanece a característica mais visível quando tomamos a energia como função de λ .

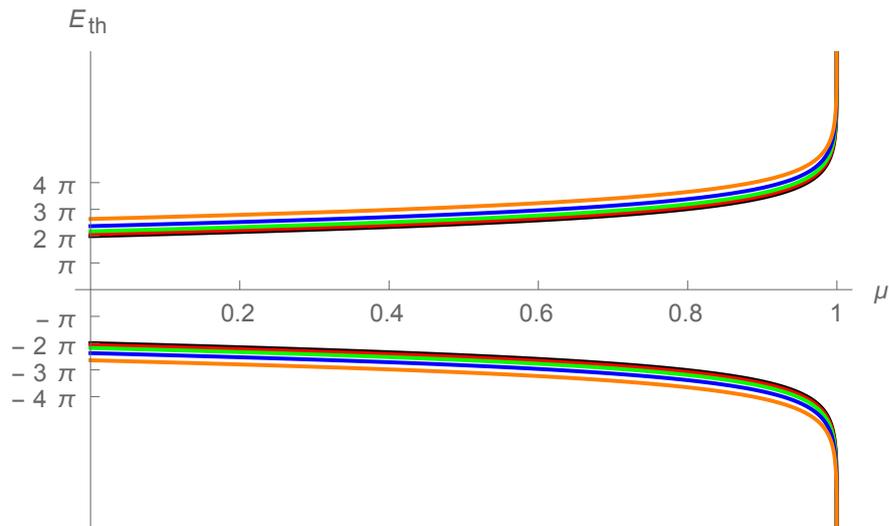


Figura 4.10: Energia E_{th} representada para $\lambda = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente .

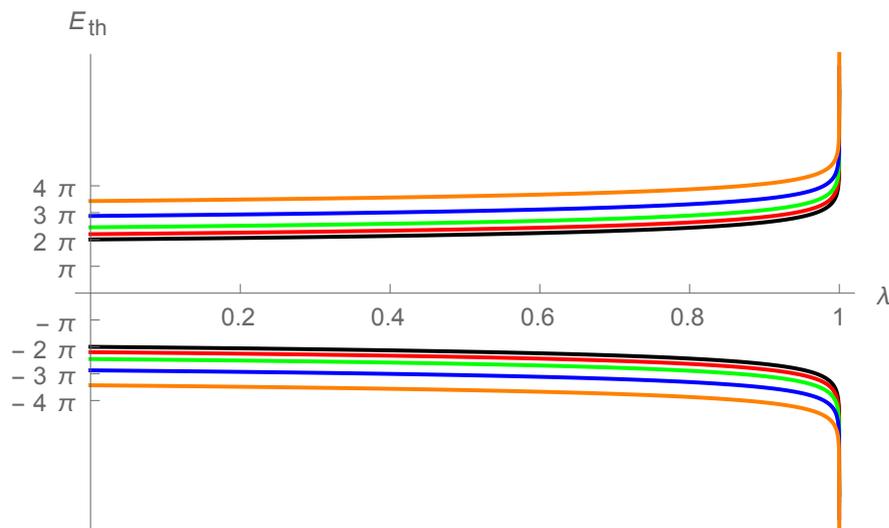


Figura 4.11: Energia E_{th} representada para $\mu = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.9 nas curvas preta, vermelha, verde, azul e laranja respectivamente .

Nas Figuras 4.12 e 4.13 o comportamento do modo zero fermiônico, equação (4.109), é mostrado para diferentes valores de λ e μ . Na figura 4.12 podemos ver o comportamento do modo zero fixando os valores de λ em 0, 0.5, 0.75 e 0.95 e variando μ em 0, 0.25, 0.5 e 0.75 para cada um dos valores de λ . Vemos que quando λ cresce há uma diminuição da largura e um aumento na altura do modo zero. Quanto maior o valor de λ mais próximas ficam as curvas. No caso da Figura 4.13 fixamos os valores de μ e variamos λ . Observamos novamente uma diminuição da largura e aumento de altura, entretanto, não há uma proximidade tão grande do modo zero quanto no caso anterior. Portanto, variar μ e manter λ fixo afeta mais o modo zero fermiônico do que o contrário.

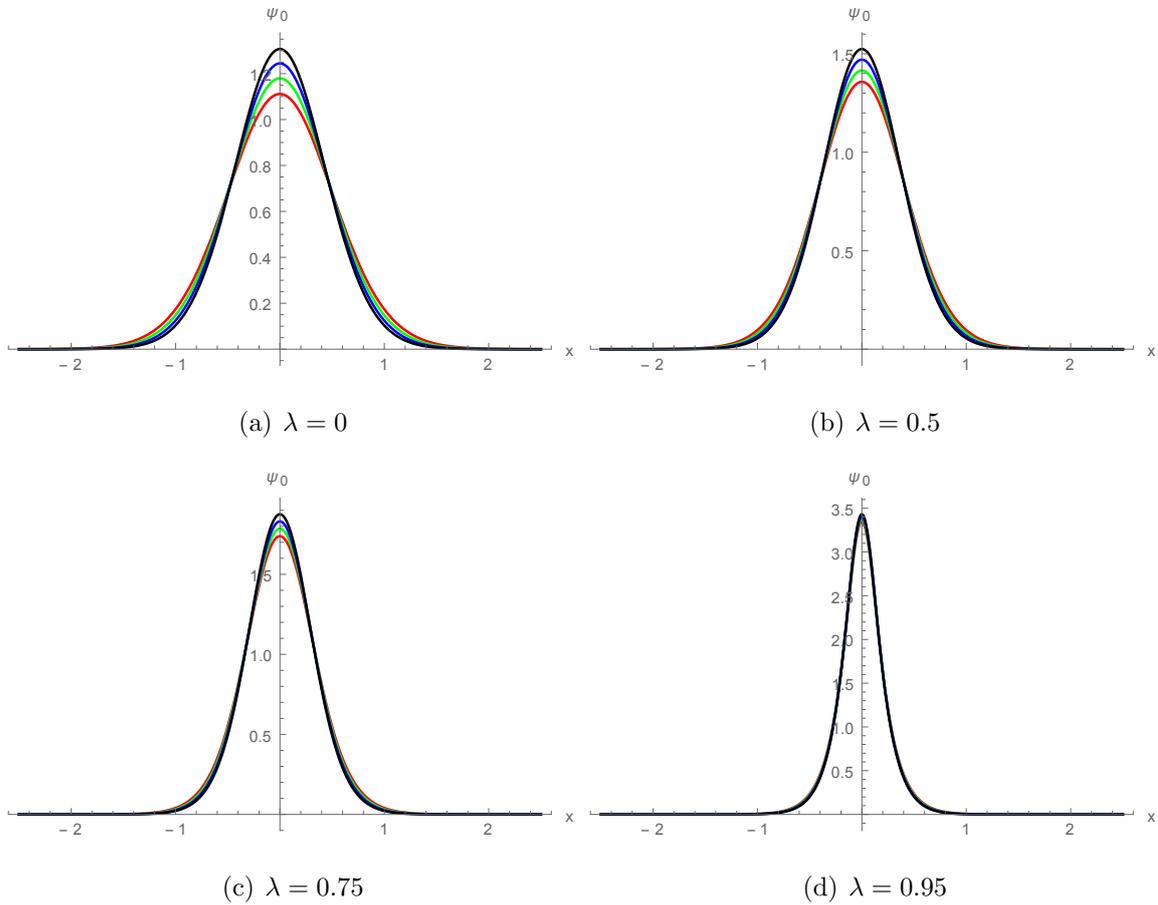


Figura 4.12: Modo zero ilustrado para $\mu = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

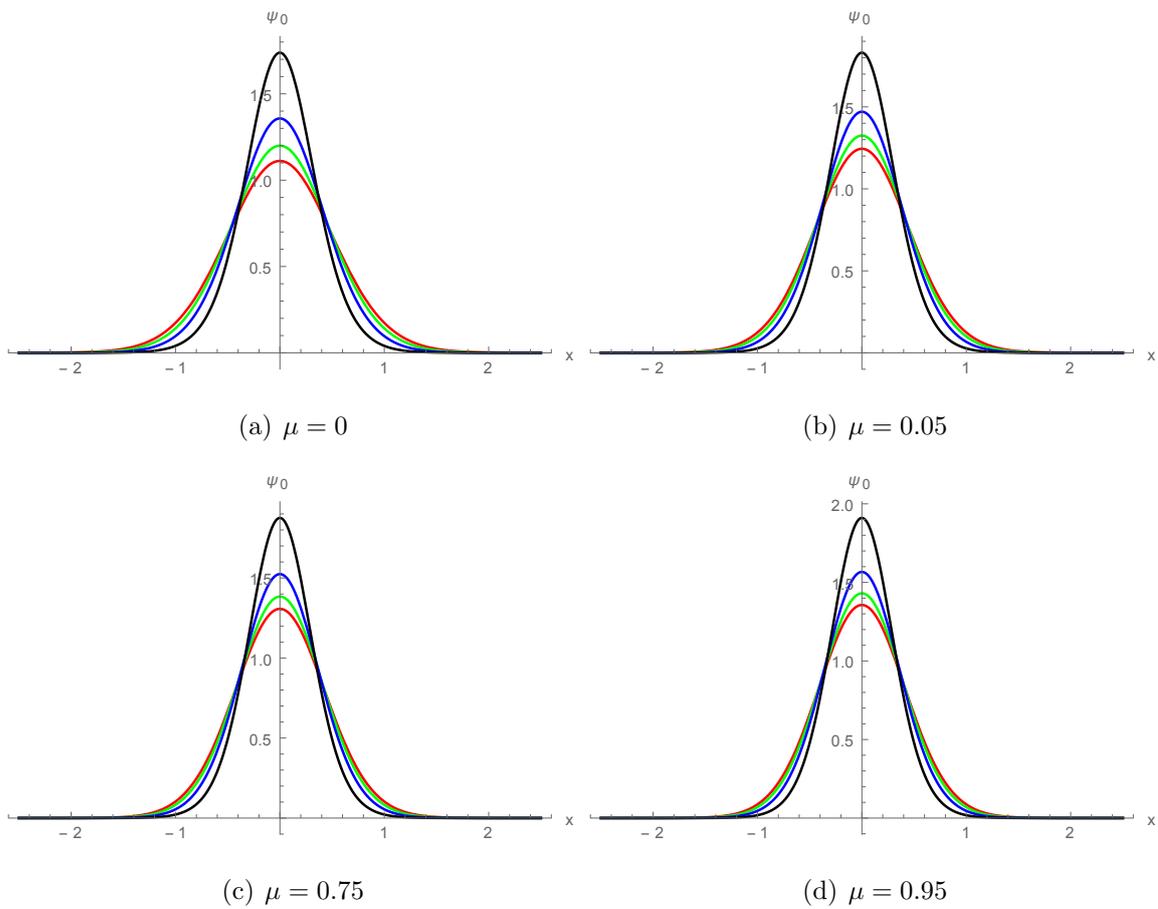


Figura 4.13: Modo zero ilustrado para $\lambda = 0, 0.25, 0.5$ e 0.75 em (a), (b), (c) e (d) nas curvas vermelha, verde, azul e preta, respectivamente.

Diferentemente do acoplamento anterior, o potencial observado para este caso apresenta simetria de reflexão. Observamos também que o controle na energia de limiar permanece e suas variações ainda são significativas. Novamente as variações são mais acentuadas quando fixamos o parâmetro λ e variamos o parâmetro μ .

Capítulo 5

Conclusões

Nossos estudos se concentram em dois temas principais, a saber, twistons topológicos e férmions na presença de campos escalares. Para realizar nossas investigações, iniciamos o trabalho fazendo uma revisão sobre campos escalares reais unidimensionais para modelos de um e dois campos. Revisamos também alguns métodos que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho como, Método BPS [18, 19], Método da Deformação [20] e Método de Extensão [21].

Inicialmente estudamos os twistons topológicos em uma cadeia de moléculas de polietileno cristalino utilizando o modelo proposto por [4, 6] para descrever esse tipo de solução. Entretanto, esse modelo apresenta uma linha de zeros, causando degenerescência em sua energia o que permite que a cadeia possa ser rompida sem custo adicional de energia. Uma solução foi proposta por [5] para eliminar essa degenerescência na energia, entretanto, as soluções apresentadas eram apenas numéricas. Com o intuito de contornar o problema da degenerescência do modelo e ao mesmo tempo encontrar soluções analíticas aplicamos o Método de Extensão ao modelo estudado.

Com isso, construímos pela primeira vez um modelo para twistons através de uma combinação não trivial de dois sistemas de um campo e que também possui soluções analíticas. O novo modelo representa uma família de novos potenciais que não apresentam a linha de zeros existente no modelo estudado inicialmente. A energia calculada para esse novo modelo é a mesma encontrada no modelo inicial de estudo, o que corrobora a validade do mesmo. Pretendemos aplicar estes procedimentos para descrever twistons usando três campos escalares e também revisar descrições do polietileno cristalino via modelos baseados em potenciais do tipo seno-Gordon.

Nossa segunda etapa deste trabalho se concentra no estudo do comportamento dos férmions na presença de campos escalares, em particular, no controle da energia de limiar onde residem os estados ligados. Nos trabalhos desenvolvidos por [12, 14] é mostrado que a energia de limiar permanecia inalterada para os modelos aplicados, onde os férmions estavam acoplados a somente um campo. Em especial, nos modelos apresentados por [14], o número de estados ligados aumentava, diminuía ou permanecia o mesmo a depender da forma do campo escalar no qual os férmions estavam imersos. Baseando-se nisto, conseguimos controlar a energia de limiar colocando o campo fermiônico na presença de dois campos escalares, utilizando modelos trazido por [14]. Percebemos ainda uma ligeira vantagem no acoplamento do tipo $F(\phi, \chi) = \phi + \chi$, por apresentar um potencial com simetria de reflexão, que está de acordo com os modelos estudados. Por fim, nossas análises sobre o espectro fermiônico do sistema de dois campos nos permite conjecturar que o aumento do número de campos pode ser interpretado como um mecanismo de controle que nos permite aumentar o número de estados ligados, uma vez que, ele altera a energia de limiar do espectro. Pretendemos confirmar nossa conjectura através de uma análise numérica do espectro de energia fermiônico.

Referências Bibliográficas

- [1] P. H. R. S. Moraes and J. R. L. Santos, “Two scalar field cosmology from coupled one-field models,” *Physical Review D*, vol. 89, apr 2014.
- [2] S. Zdravković, M. V. Satarić, and M. Daniel, “Kink solitons in dna,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 27, pp. 135–184, dec 2013.
- [3] M. Mansfield and R. H. Boyd, “Molecular motions, the α relaxation, and chain transport in polyethylene crystals,” *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*, vol. 16, pp. 1227–1252, jul 1978.
- [4] D. Bazeia and E. Ventura, “Topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 303, pp. 341–346, Apr. 1999.
- [5] A. de Souza Dutra, J. R. dos Santos, and O. C. Winter, “Extended class of exact twistons and crystalline polyethylene,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 36, pp. 365–402, 2010.
- [6] E. Ventura, A. Simas, and D. Bazeia, “Exact topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 320, no. 5, pp. 587–593, 2000.
- [7] F. Zhang and M. A. Collins, “Topological solitons in polyethylene crystals,” *Phys. Rev. E*, vol. 49, pp. 5804–5811, Jun 1994.
- [8] R. Jackiw and C. Rebbi, “Solitons with fermion number $1/2$,” *Physical Review D*, vol. 13, pp. 3398–3409, jun 1976.
- [9] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, “Solitons in polyacetylene,” *Physical Review Letters*, vol. 42, pp. 1698–1701, jun 1979.
- [10] J. R. L. Santos, D. S. S. Borges, and I. O. Moreira, “New family of potentials with analytical twiston-like solutions,” Jun 2018. arXiv:1806.00539. Em submissão.

- [11] R. Jackiw and J. Schrieffer, “Solitons with fermion number $1/2$ in condensed matter and relativistic field theories,” *Nuclear Physics B*, vol. 190, pp. 253–265, aug 1981.
- [12] A. Amado and A. Mohammadi, “Coupled fermion–kink system in jackiw–rebbi model,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 7, p. 465, 2017.
- [13] D. Bazeia and A. Mohammadi, “Fermionic bound states in distinct kinklike backgrounds,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 4, p. 203, 2017.
- [14] D. Bazeia, A. Mohammadi, and D. C. Moreira, “Fermion bound states in geometrically deformed backgrounds,” 06 2017.
- [15] E. J. A. Curi, “Férmions em uma parede de bloch,” dissertação de mestrado, Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Física, São Luís, 2017.
- [16] D. Bazeia and A. Mohammadi, “Dirac field in the background of a planar defect,” *Physics Letters B*, vol. 779, pp. 420–424, apr 2018.
- [17] G. Lozano, A. Mohammadi, and F. A. Schaposnik, “Fermion zero modes in z_2 vortex background,” *Physical Review D*, vol. 94, sep 2016.
- [18] E. B. Bogomolny, “Stability of Classical Solutions,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 24, p. 449, 1976.
- [19] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, “Exact classical solution for the’t hooft monopole and the julia-zee dyon,” *Physical Review Letters*, vol. 35, pp. 760–762, sep 1975.
- [20] D. Bazeia, L. Losano, and J. M. C. Malbouisson, “Deformed defects,” *Physical Review D*, vol. 66, nov 2002.
- [21] D. Bazeia, L. Losano, and J. Santos, “Kinklike structures in scalar field theories: From one-field to two-field models,” *Physics Letters A*, vol. 377, no. 25, pp. 1615–1620, 2013.
- [22] D. B. Walter Greiner, Joachim Reinhardt, *Field quantization*. Springer, 1 ed., 1996.

- [23] D. Bazeia, *Campos Escalares em Ação*. Tese de doutorado, Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Naturais, Departamento de Física, João Pessoa, 2004. Tese apresentada ao Departamento de Física, em cumprimento as exigências estabelecidas para Concurso Público para Professor Titular.
- [24] A. E. O. Vásques, “Férmions em campos externos em $1 + 1$ e $2 + 1$ dimensões,” dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2012.
- [25] A. Das, *Lectures of Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing Company, 2008.
- [26] L. H. Ryder, *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2nd ed., 1996.
- [27] M. Kaku, *Quantum field theory: a modern introduction*. Oxford University Press, 1st ed., 1993.
- [28] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Frontiers in Physics, Addison-Wesley Pub. Co, 1995.