



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

**COORDENAÇÃO DE GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**



TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ELABORAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO PARA TEORIA E EXPERIMENTOS EM CONTROLE PREDITIVO

George Acioli Júnior

Campina Grande – Paraíba – Brasil
Junho de 2005



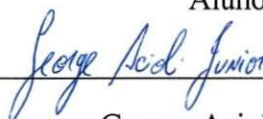
Biblioteca Setorial do CDSA. Fevereiro de 2021.

Sumé - PB

ELABORAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO PARA TEORIA E EXPERIMENTOS EM CONTROLE PREDITIVO

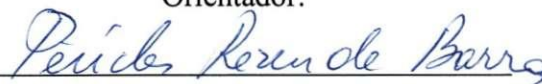
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento parcial às exigências para obtenção do Grau de Engenheiro Eletricista.

Aluno:



George Acioli Junior

Orientador:



Péricles Rezende Barros

Campina Grande – Paraíba – Brasil

Junho de 2005

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos dessa caminhada, a meus pais, pelo esforço feito para que eu tivesse a oportunidade de chegar até aqui, a minha avó, meu avô (in memoriam) e a meu irmão.

Ao amigo e professor Péricles, pela instrução, tolerância, incentivo e bom senso.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	6
2. Objetivos.....	8
3. Proposta de Experimentos.....	9
3.1. Experimento1: Controle Baseado na Predição do Modelo.....	9
3.1.1. Objetivos.....	9
3.1.2. Interface para a Realização dos Experimentos.....	9
3.1.3. Práticas.....	12
3.2. Experimento2: Controle Preditivo Generalizado.....	13
3.2.1. Objetivos.....	13
3.2.2. Realização das Práticas.....	13
3.2.3. Simulação do Bloco de Controle.....	15
3.2.4. Práticas.....	17
3.2.5. Relatório.....	20
4. Conclusões.....	21
Referências Bibliográficas.....	22
Anexos.....	23

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estrutura básica do MPC.....	7
Figura 2: Interface para a realização do experimento	10
Figura 3: Medição do distúrbio e do ruído.....	11
Figura 4: Diagrama dos blocos do controlador GPC.....	15
Figura 5: Esquema básico para simulação.....	16
Figura 6: Tela do bloco de parâmetros do processo.....	16
Figura 7: Adição de um ruído branco (sem filtro) na medição da saída.....	19

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi elaborado um material didático para a apresentação da teoria de controle preditivo, o qual está dividido em duas partes. A primeira contempla a introdução dessa teoria mostrando a sua estratégia básica, seus principais componentes e alguns algoritmos de controle preditivo. Na segunda parte é tratado o controle preditivo generalizado (GPC), mostrando a sua formulação, e relações de malha fechada. Além do material didático, o trabalho compreende a proposta de experimentos em controle preditivo, sendo um para cada parte do material didático elaborado. Os experimentos são propostos através de guias de laboratório, que auxiliam na realização das simulações.

Durante a realização do trabalho, foram ainda apresentados seminários sobre a teoria de controle preditivo utilizando o material didático objeto desse trabalho, o qual na oportunidade encontrava-se em processo de elaboração. Na elaboração dos experimentos utilizou-se o Matlab como ferramenta de projeto e simulação de controladores preditivos.

Nos anos recentes, o Controle Preditivo tem sido um esquema de controle avançado bastante estudado nos cursos de engenharia de controle. Dentre os vários algoritmos de controle preditivo, o Controle Preditivo Generalizado (GPC) recebeu atenção particular. Foi extensamente usado e estudado por engenheiros de controle de processos e pesquisadores.

Model Predictive Control (MPC) é uma família de técnicas de controle que otimiza um determinado critério, definido pela função objetivo e as restrições, usando um modelo do processo para prever a evolução do sistema e computar uma sucessão de ações de controle futuras. Assim, o termo MPC não se refere a uma estratégia de controle específica, e sim a vários métodos de controle que fazem uso do modelo do processo para obter um sinal de controle que minimiza uma função objetivo. MPC aceita uma variedade de modelos, funções objetivas, e restrições, provendo flexibilidade para lidar com os vários critérios operacionais presentes em processos industriais. MPC é indicado para o controle de processos onde os operadores possuem um limitado conhecimento de controle porque os conceitos são intuitivos e é relativamente fácil sintonizar, ou seja, determinar os seus parâmetros [2]. O MPC segue a estrutura mostrada na Figura 1.

O método GPC foi proposto por Clarke et al. [4] e se tornou um dos métodos de MPC mais populares tanto na indústria como academicamente. Foi implementado com sucesso em muitas aplicações industriais, mostrando bom desempenho e certo grau de robustez.

Uma variedade de processos, desde os com dinâmica simples, até os processos com atrasos longos, ou de dinâmica instável, podem ser controlados usando MPC. A extensão para tratar com plantas multivariáveis é simples, a compensação do tempo de atraso é intrínseca. Lidar com restrições é conceitualmente simples e pode ser introduzido sistematicamente durante o projeto do controlador. Para sistemas lineares na ausência de restrições, o controlador segue uma lei de controle linear. Quando restrições estão presentes, um problema QP (Quadratic Programming) precisa ser resolvido. Para o caso geral de sistemas não-lineares com restrições, um problema NLP (NonLinear Programming) aparece.

O texto está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta os objetivos do trabalho; o capítulo 3 apresenta a proposta de experimentos em controle preditivo, através dos guias de laboratório elaborados; o capítulo 4 apresenta as conclusões sobre o trabalho; e por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para a execução deste trabalho, bem como o material didático elaborado, que segue em anexo ao texto.

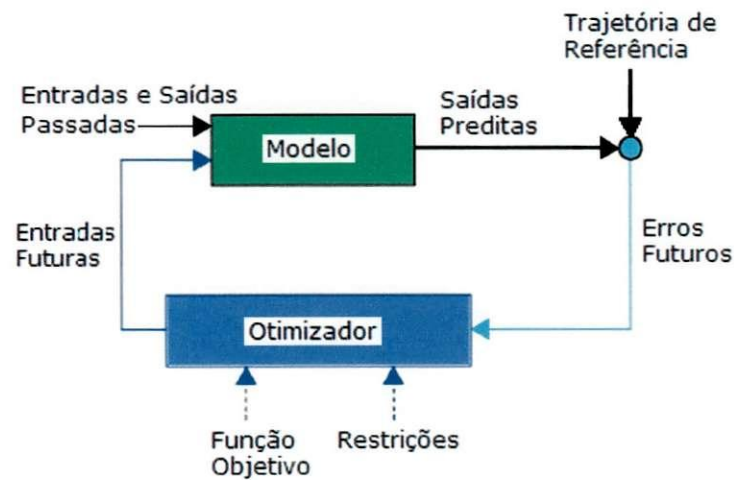


Figura 1: Estrutura básica do MPC

2. OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo elaborar material didático em Controle Preditivo na forma de aulas teóricas, que servirão à introdução deste tópico na disciplina Controle Digital do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande. E, além disso, propor experimentos relativos às aulas teóricas, os quais poderão ser incluídos na disciplina Laboratório de Controle Digital, disciplina esta ministrada como co-requisito da disciplina referida acima.

Este trabalho tem por objetivo também servir como Trabalho de Conclusão de Curso, habilitando a colação de grau de George Acioli Junior, como Engenheiro Eletricista.

3. PROPOSTA DE EXPERIMENTOS

A seguir, será mostrado os experimentos propostos na forma de guias de laboratório, sendo um para cada parte do material didático teórico elaborado. Para o primeiro experimento foi desenvolvida uma interface no Matlab na qual o aluno pode realizar as simulações propostas para os exemplos disponíveis na interface. No segundo experimento o guia propõe o uso da função `calcugpc` para o projeto do controlador GPC, que é disponibilizada ao aluno, bem como as funções utilizadas por esta. Assim, o aluno realizar as simulações propostas através do diagrama de blocos que deve ser montado no Simulink.

3.1 Experimento 1: Controle Baseado na Predição do Modelo

3.1.1 Objetivos

No material didático teórico, vimos que o controle baseado na predição do modelo utiliza o modelo do processo para prever a saída do processo, e as entradas de controle são calculadas de forma a atender um comportamento desejado dessa saída, esse comportamento por sua vez é definido por uma trajetória de referência pela qual a saída do processo de seguir o set-point, e para essa trajetória é definida uma constante de tempo.

Por meio da realização deste experimento pretende-se observar a aplicação dessa estratégia básica do controle preditivo em alguns exemplos propostos.

3.1.2 Interface para a Realização dos Experimentos

Para a realização deste experimento foi desenvolvida uma interface no Matlab, na qual o aluno pode realizar as práticas propostas. A interface consiste de dois *axes* onde são mostrados os gráficos a saída da planta e a entrada de controle, temos também 4 grupos de *radiobuttons*, um *editbox* para a entrada do parâmetro constante de tempo

para a simulação e o botão simular que faz a simulação a partir das opções escolhidas pelo usuário. A interface é mostrada na figura a seguir:

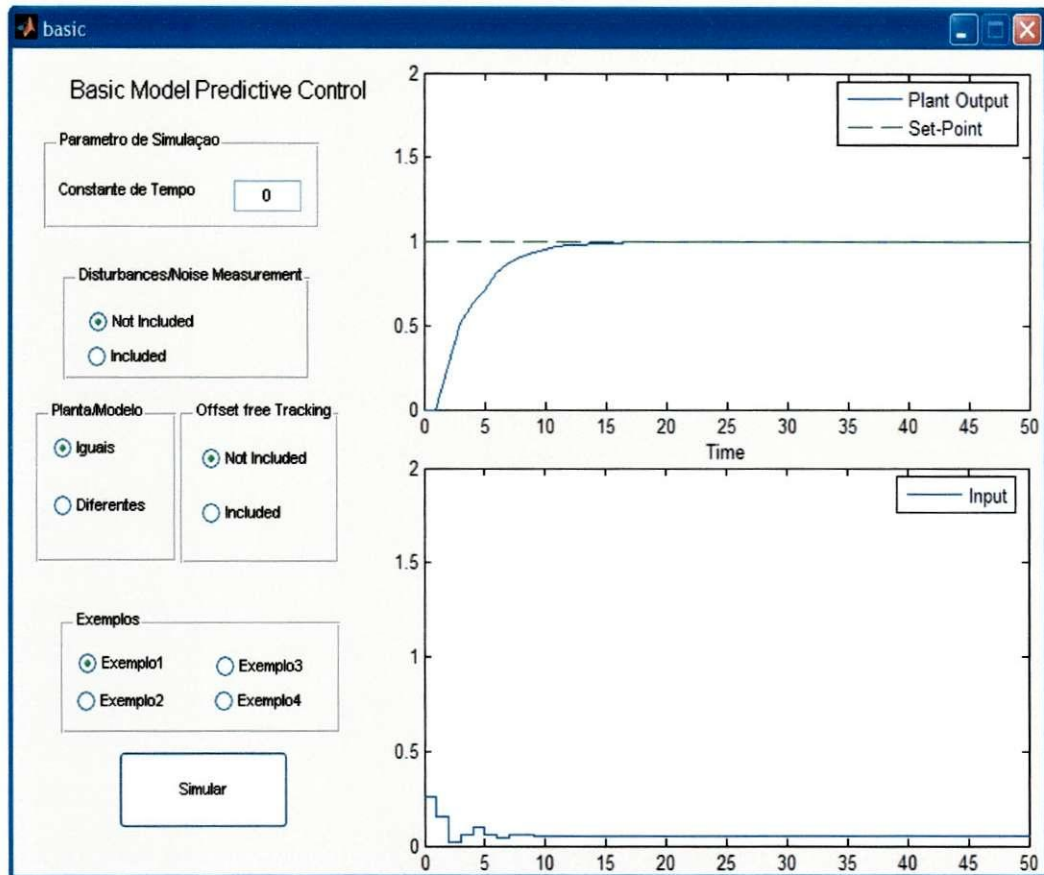


Figura 2: Interface para a realização do experimento

Na figura, podemos observar os 4 grupos de radiobuttons, são eles: Disturbances/Noise Measurement, Planta/Modelo, Offset free Tracking e Exemplos. Cada um destes será descrito a seguir:

- **Disturbances/Noise Measurement:** Tem as opções de incluir ou não a medição dos distúrbios e do ruído, esses são como mostrados na figura 2.
- **Planta/Modelo:** Neste grupo temos dois radiobuttons, que dão as opções de que o modelo seja igual ou diferente a planta.
- **Offset free Tracking:** Neste temos a opção ou não de incluir a compensação do erro de ganho de regime permanente. Quando temos o modelo diferente da planta a saída só vai acompanhar o set-point com a compensação do erro de ganho de regime permanente.

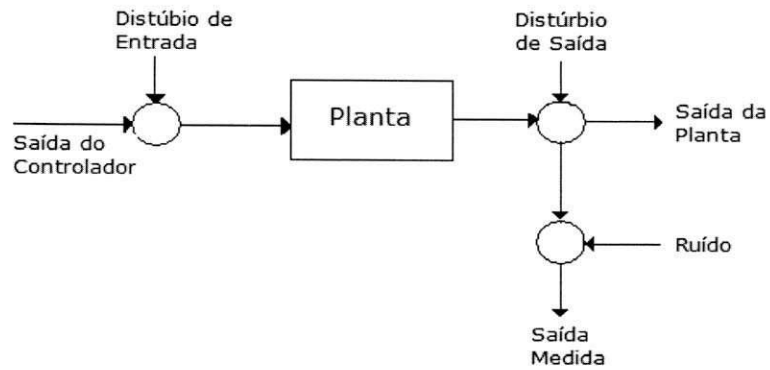


Figura 3: Medição do distúrbio e do ruído

- **Exemplos:** Neste grupo, tem-se a opção de escolher dentre os 4 exemplos disponíveis. Os exemplos são os seguintes:

$$\text{Exemplo 1: } G(z) = \frac{1}{z^2 - 1.4z + 0.45}$$

$$\text{Exemplo 2: } G(z) = \frac{0.2713}{z^2 - 0.8351z}$$

$$\text{Exemplo 3: } G(z) = \frac{0.5}{z^2 - 1.003z + 0.5488}$$

$$\text{Exemplo 4: } G(z) = \frac{0.1368z + 0.118}{z^2 - 1.003z + 0.5488}$$

Feita a escolha para a simulação com o modelo diferente da planta, os modelos utilizados para cada exemplo são:

$$\text{Exemplo 1: } G(z) = \frac{1}{z^2 - 1.4z + 0.46}$$

$$\text{Exemplo 2: } G(z) = \frac{0.2713}{z^2 - 0.8z}$$

$$\text{Exemplo 3: } G(z) = \frac{1}{z^2 - 1.003z + 0.5}$$

$$\text{Exemplo 4: } G(z) = \frac{0.1z + 0.12}{z^2 - 0.7z + 0.5}$$

3.1.3 Práticas

As práticas que deverão ser realizadas pelo aluno neste experimento compreendem a simulação dos 4 exemplos disponíveis para as seguintes opções de simulação:

- 1) **Disturbance/Noise Measurement** – Not Included, **Planta/Modelo** – Iguais e **Offset free Tracking** – Not Included.
- 2) **Disturbance/Noise Measurement** – Not Included, **Planta/Modelo** – Diferentes e **Offset free Tracking** – Not Included.
- 3) **Disturbance/Noise Measurement** – Not Included, **Planta/Modelo** – Diferentes e **Offset free Tracking** – Included.
- 4) **Disturbance/Noise Measurement** – Included, **Planta/Modelo** – Iguais e **Offset free Tracking** – Not Included.
- 5) **Disturbance/Noise Measurement** – Included, **Planta/Modelo** – Diferentes e **Offset free Tracking** – Not Included.
- 6) **Disturbance/Noise Measurement** – Included, **Planta/Modelo** – Diferentes e **Offset free Tracking** – Included.

Para cada uma das simulações dos exemplos o aluno deve variar o valor do parâmetro *Constante de Tempo* e observar as respostas obtidas, fazendo os comentários que julgar necessário.

3.2 Experimento2 : Controle Preditivo Generalizado

3.2.1 Objetivos

O cálculo do Controlador Preditivo Generalizado (GPC), é realizado com base em alguns parâmetros de projeto: horizontes de predição e controle, parâmetros de ponderação no índice de custo, etc. E esses parâmetros condicionam o comportamento do mesmo.

Por meio da realização deste experimento pretende-se tratar os seguintes aspectos:

- **Projeto:** deduzir como cada um destes parâmetros influencia no controlador e qual é o seu efeito na ação de controle e na variável de saída controlada do sistema. Estes dois aspectos são muito importantes ao projetar este tipo de controlador.
- **Simulação:** poder observar o comportamento do controlador projetado, e como este se comporta incluído os fenômenos que acontecem nos processos reais (discrepância entre modelo e real processo).

3.2.2 Realização das Práticas

Para o cálculo o Controlador Preditivo Generalizado, será utilizado pelo aluno uma função do Matlab descrita como:

Function calcugpc

```
[H,R,S,TpRDelta]=calcugpc(BB,AA,T,params_gpc)
```

Essa função é um script do Matlab, que será disponibilizado ao aluno, sendo:

- **BB:** vetor que contém os coeficientes do numerador do processo em potências crescentes de z^{-1} (incluindo o atraso do processo).
- **AA:** vetor que contém os coeficientes do denominados do processo em potências crescentes de z^{-1} .
- **T:** vetor que contém os coeficientes do polinômio $T(z^{-1})$ em potências crescentes de z^{-1} .
- **Param_gpc:** vetor que contém:

params_gpc(1) = N1 – limite mínimo do horizonte de custo.

params_gpc (2) = N2 – limite máximo do horizonte de custo.

params_gpc(3) = Nu – horizonte de controle.

params_gpc(4) = coeficiente α_i de ponderação dos erros.

params_gpc(5) = coeficiente λ_j de ponderação do esforço de controle.

params_gpc(6): se for igual a 0, é assumido que as referências futuras não são conhecidas ($w(k) = w(k+1) = w(k+2) = \dots = w(k+N)$). No caso de ser igual a 1, assume-se que as referências futuras são conhecidas.

Os três últimos parâmetros não são obrigatórios e no caso de omissão dos mesmos assume-se:

oparam_gpc(4) = 1

oparam_gpc(5) = 0

oparam_gpc(6) = 0

Os valores de retorno da função são:

- **H:** que é um escalar no caso das referências futuras não serem conhecidas. Caso contrário é um vetor que contém os coeficientes de um polinômio em potências crescentes de z .
- **R:** vetor que contém os coeficientes do polinômio $R(z^{-1})$ em potências crescentes de z^{-1} .
- **S:** vetor que contém os coeficientes do polinômio $S(z^{-1})$ em potências crescentes de z^{-1} .
- **TpRDelta:** vetor do que contém os coeficientes de $(T(z^{-1}) + R(z^{-1}))\Delta$

EXEMPLO DE PROJETO

Dado o modelo do processo:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.1368z^{-1} + 0.1180z^{-2}}{1 - 1.003z^{-1} + 0.5488z^{-2}}$$

Calcular o controlador GPC para um horizonte de predição de $N_1 = 3$ até $N_2 = 20$ e horizonte de controle $N_u = 5$. Os coeficientes de ponderação serão: $\alpha_i = 0.1$ e $\lambda_j = 2$. O polinômio $T(z^{-1})$ terá $1 - 0.85z^{-1}$, e as referências futuras não são conhecidas.

Em Matlab temos:

```
>> B=[0 0.1368 0.1180];  
>> A=[1 -1.003 0.5488];  
>> T=[1 -0.85];  
>> param=[3 20 5 0.1 2 0];  
>> [H,R,S,TpRDelta]=calcugpc(B,A,T,param)
```

3.2.3 Simulação do Bloco de controle

Para a simulação do bloco de controle é necessário construir o diagrama de blocos do controlador (ver figura 1) em um diagrama Simulink no qual o resto do sistema será acrescentado (ver figura 2).

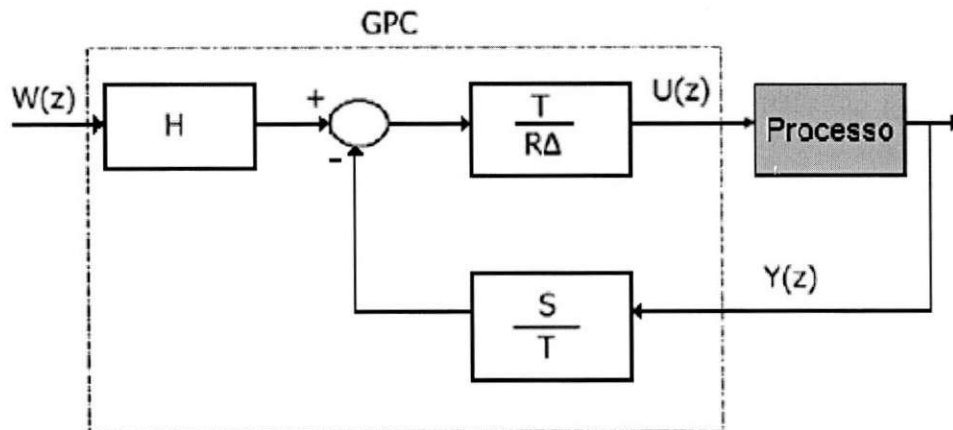


Figura 4. Diagrama dos blocos do controlador GPC

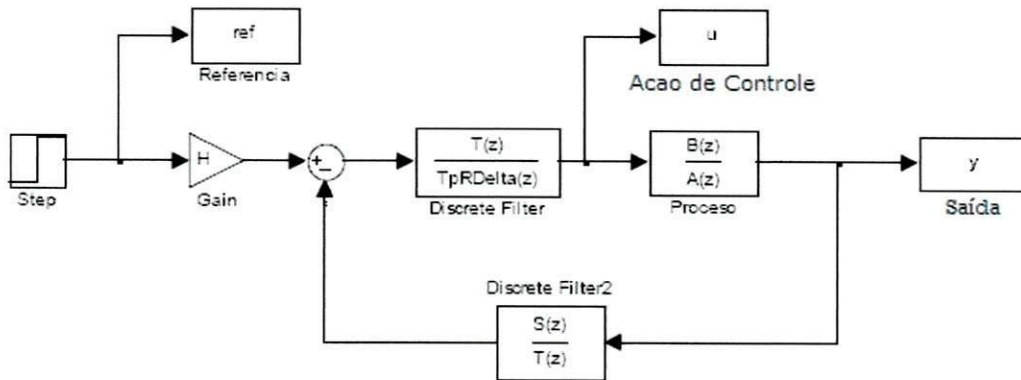


Figura 5. Esquema básico para simulação

Para preencher cada um dos parâmetros que são pedidos nos diferentes blocos do diagrama Simulink: numerator, denominador, período de amostragem, etc., podemos usar os nomes de variáveis que nós definimos no workspace do Matlab. Deste modo, as variáveis que contêm os polinômios de saída da função `calcugpc`, serão escritas nas janelas de parâmetros dos blocos do Simulink tal como é mostrado na figura a seguir:

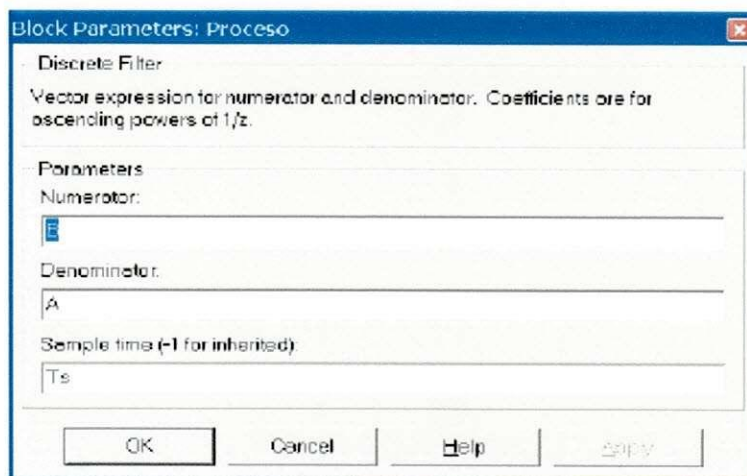


Figura 6. Tela do bloco de parâmetros do processo

3.2.4. Práticas

Prática 1

Dado o modelo do processo definido por:

$$G(s) = \frac{0.6(s+2)}{(s+0.507)(s+0.968)}$$

Discretizar esta função de transferência para um período de amostragem de 0.5 seg. Calcular e simular um controlador GPC com o modelo do processo para cada um dos casos seguintes (assume-se que as referências futuras não são conhecidas e $T(z^{-1}) = 1$):

Caso	N_1	N_2	N_u	α_i	λ_j
1	1	40	1	1	0
2	1	40	3	1	0
3	1	40	1	1	1
4	1	20	1	1	1500
5	1	20	1	0.001	1

Obs.: Para a discretização da função de transferência utilizar a função **c2dm** do Matlab, usando como método de discretização o Zero Order Hold (ZOH). Para mais informações digitar help c2dm na janela principal do Matlab.

Utilize a **filt** obter a função de transferência em potencias crescentes de z^{-1} , para informações digitar help filt na janela principal do Matlab.

Questões

Do ponto de vista da ação de controle gerada e da saída do processo:

- 1) Qual é o efeito de aumentar o horizonte de controle N_u ?
- 2) Qual seria o efeito de variar os parâmetros de ponderação?

Prática 2

Dado o modelo do processo definido por:

$$G(s) = \frac{8}{0.0484s^2 + 0.66s + 9}$$

Discretizar esta função de transferência com um período de amostragem de 10 ms. Calcular e simular o controlador GPC com o modelo do processo para os parâmetros de projeto seguintes, assuma que as referências futuras não são conhecidas:

$T(z^{-1})$	N_1	N_2	N_u	α_i	λ_j
1	1	10	1	1	0

Suponha agora o processo real não está identificado corretamente por meio da função de transferência $G(s)$, e que o real comportamento do sistema vem definido pela função de transferência seguinte:

$$G^*(s) = \frac{7.3e^{-0.008s}}{0.0361s^2 + 0.55s + 9.4}$$

Simular a malha fechada agora para o controlador previamente projetado, mas com o processo real $G^*(s)$ em vez de $G(s)$. Para incluir o atraso contínuo use o bloco *Transport Delay*. Observar como o controle é afetado pelas diferenças significativas que aparecem quando em vez de controlar o modelo do processo, para o qual o controlador foi projetado, controla-se o processo real.

Agora, Projete e simule um GPC para $G(s)$, com os mesmos parâmetros de projeto, mas colocando $T(z^{-1})$ da forma:

$$T(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1}$$

Observar o comportamento da saída do processo.

Questões

Observando-se os resultados obtidos:

1) Qual é o principal objetivo do polinômio $T(z^{-1})$?

Prática 3

Supondo que $G(s)$ modela perfeitamente o processo, e tendo-se um distúrbio de medição no sensor e como é mostrado na figura 3, comparar as respostas que simulam os dois controladores previamente calculados (para valores diferentes de $T(z^{-1})$) e observar como a perturbação na saída influencia na resposta. Utilize um período de amostragem de 0.3s.

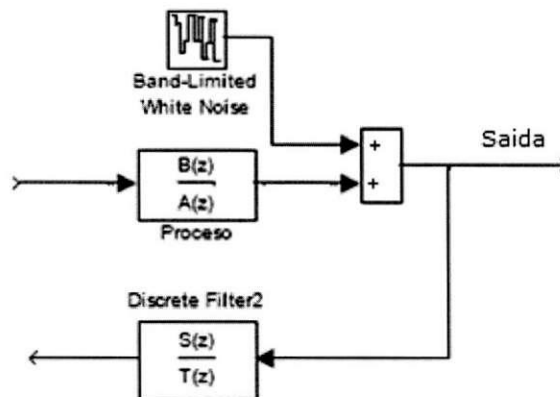


Figura 7. Adição de um ruído branco (sem filtro) na medição da saída

Obs.: Para o parâmetro *Noise power* do bloco *Band-Limited White Noise* deve ser nomeado o valor 0.00001.

Prática 4

Considere agora que tem-se uma interferência senoidal de frequência aproximada 100 rad/seg. e de amplitude 0.25. Este tipo de interferência, muito usual, pode ser apresentado à saída do processo. Por exemplo, em um sistema de controle de altura líquido dentro de um depósito, onde um motor gira a velocidade constante e que este se localize suficientemente próximo do processo, produziria um campo eletromagnético, que influenciaria na leitura da saída do processo.

Simular o bloco de controle com os dois controladores projetados anteriormente (para os dois valores de $T(z^{-1})$) e observar o comportamento da saída.

Projete e simule agora um novo controlador GPC para o modelo $G(s)$ com os seguintes parâmetros:

$T(z^{-1})$	N_1	N_2	N_u	α_i	λ_j
$(1 - 0.99z^{-1})(1 - 0.95z^{-1})$	1	10	1	1	0

Questões

- 1) Qual seria outro dos principais objetivos do polinômio $T(z^{-1})$?

3.2.5. Relatório

Deve-se entregar um relatório com todos os valores dos controladores calculados e com os gráficos obtidos nas simulações. O relatório deve contemplar também as respostas das questões propostas e todos os aspectos notados pelo aluno durante a realização das práticas.

4. CONCLUSÕES

A realização desse trabalho possibilitou o estudo da teoria de controle preditivo, sua estratégia básica, os modelos utilizados e em especial o algoritmo de controle preditivo generalizado (GPC), além do uso do Matlab como ferramenta de projeto e simulação de controladores preditivos.

Além disso, com o trabalho foi possível experimentar a realização de seminários sobre o assunto estudado, sendo um desses ministrado na turma de Controle Digital do período 2004.2, o que se mostrou uma boa experiência.

Pode-se então, concluir que com o material didático teórico elaborado é possível a inclusão deste tópico na disciplina anteriormente referida, bem como a inclusão dos experimentos propostos relativos à parte teórica do trabalho na disciplina Laboratório de Controle Digital. Em trabalhos futuros, a base teórica e a experiência na realização de projeto e simulação de controladores preditivos através do Matlab podem ser aplicadas na implementação do algoritmo GPC numa planta piloto real disponível no Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle (LIEC), o módulo Peltier, por exemplo. Além disso, pode-se estender a implementação do algoritmo GPC para tratar com restrições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. F. Camacho e C. Bordons, *Model Predictive Control*, New York: Springer, 2004.
- [2] J.A. Rossiter, *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*, Boca Raton, FL: CRC Press, 2003
- [3] J. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002
- [4] D.W. Clarke, C. Mohtadi. Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica*, 25(6):859-875, 1989
- [5] Guzman, J.L.; Berenguel, M.; Dormido, S., *Interactive Teaching of constrained generalized predictive control*. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(2):52-66, 2005

ANEXOS

Model Predictive Control - MPC

Aluno: George Acioli Junior
Professor: Péricles Rezende de Barros
Universidade Federal de Campina Grande UFCG
Centro de Ciências e Tecnologia – CCT
Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle – LIEC
georgeacioli@yahoo.com.br

Sumário

- Motivação
- Introdução
- Estratégia do MBPC
- Principais Componentes do MBPC
- Predição do modelo
- Função Custo
- Matriz Dinâmica de Controle
- Modelo do Algoritmo de Controle

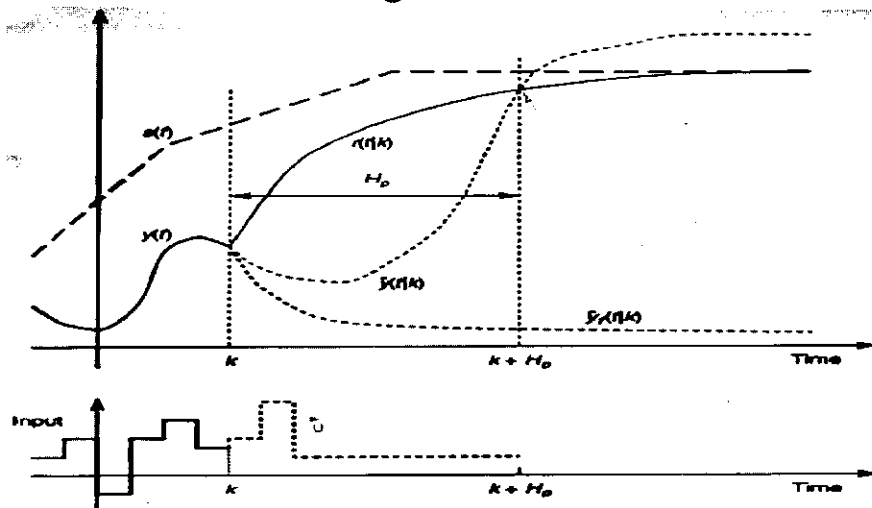
Motivação

- Tem sido aplicado principalmente na indústria de petroquímica, mas vem sendo crescentemente aplicado em outros setores da indústria.
- O MPC apresenta uma série de vantagens sobre outros métodos, os quais podemos citar:
 - Ele pode ser usado para controlar uma grande variedade de processos;
 - Ele permite a operação junto das restrições, o que frequentemente conduz para uma operação mais lucrativa;
 - Sua extensão para o tratamento de restrições é simples e pode ser sistematicamente incluída durante o projeto;
 - Lida com problemas de Controle Multivariável naturalmente;
 - Ele é muito usado quando referências futuras são conhecidas;

Introdução

- Seleciona-se a ação de controle, que conduzirá a melhor saída em algum horizonte limitado.
- O controle baseado em predição de modelo (MBPC ou MPC) são métodos de controle que usam explicitamente o modelo do processo para obter o sinal de controle pela minimização de uma função de custo.
- As idéias que aparecem na maioria desses métodos de controle são:
 - A ação de controle depende do comportamento da saída;
 - A estimação da saída é computada usando um modelo do processo;
 - Receding Horizon: a entrada de controle é atualizada todo instante de amostragem;
- Os vários algoritmos de MPC diferem unicamente no modelo usado para representar o processo e os distúrbios, e na função custo a ser minimizada.

Estratégia do MBPC



$y(t)$ -> Saída da Planta

$s(t)$ -> Trajetória do Set-Point

$r(t/k)$ -> Trajetória de Referência - define a ideal trajetória que a planta deve seguir para retornar a $s(t)$

Estratégia do MBPC

$$\epsilon(k) = s(k) - y(k)$$

$$\epsilon(k+i) = e^{-i \frac{T_s}{T_{ref}}} \epsilon(k)$$

Assim, temos:

$$r(k+i/k) = s(k+i) - \epsilon(k+i) = s(k+i) - e^{-i \frac{T_s}{T_{ref}}} \epsilon(k)$$

- O controlador preditivo tem um modelo interno que é usado para prever o comportamento da planta. Esse comportamento depende da trajetória de entrada assumida $u(k+i/k)$, e a idéia é selecionar as entradas que nos dá o melhor comportamento.
- Assuma que você tem a medida da saída $y(k)$ quando da decisão do valor da entrada $u(k)$. $y(k)$ depende apenas das entradas passadas.

Estratégia do MBPC

- Para o caso mais simples nós temos apenas um ponto de coincidência no tempo (horizonte de previsão $k + H_p$ edição).

$$\hat{y}(k + H_p/k) = r(k + H_p/k)$$

$$\hat{u}(k/k) = \hat{u}(k + 1/k) = \dots = \hat{u}(k + H_p - 1/k)$$

A saída predita no tempo $k + H_p$:

$$\hat{y}(k + H_p/k) = \hat{y}_f(k + H_p/k) + S(H_p) \Delta \hat{u}(k/k)$$

$$\Delta \hat{u}(k/k) = \hat{u}(k/k) - u(k - 1)$$

Logo,

$$\Delta \hat{u}(k/k) = \frac{r(k + H_p/k) - \hat{y}_f(k + H_p/k)}{S(H_p)}$$

Estratégia do MBPC

- Suponha que nós temos c pontos de coincidência, com correspondentes valores de trajetória de referência.

$$r(k + P_1/k), r(k + P_2/k), \dots, r(k + P_c/k) \quad P_c \leq H_p$$

$$\check{r}(k + P_1/k) = \hat{y}_f(k + P_1/k) + S(P_1) \Delta \hat{u}(k/k)$$

$$\check{r}(k + P_2/k) = \hat{y}_f(k + P_2/k) + S(P_2) \Delta \hat{u}(k/k)$$

.....

$$\check{r}(k + P_c/k) = \hat{y}_f(k + P_c/k) + S(P_c) \Delta \hat{u}(k/k)$$

$$\Delta \hat{u}(k/k) = S^{-1}(Y - Y_f)$$

Estratégia do MBPC

- Agora suponha uma trajetória de entradas futuras mais complicada, onde assume-se que as entradas podem mudar apenas num horizonte

definido (Horizonte de Controle - H_u)

$$\hat{u}(k + H_u - 1/k) = \hat{u}(k + H_u/k) = \dots = \hat{u}(k + H_p - 1/k)$$

- Agora a predição da saída no tempo $k + P_i$ é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + P_i/k) = & \hat{y}_f(k + P_i/k) + H(P_i)\hat{u}(k/k) + H(P_i - 1)\hat{u}(k + 1/k) + \dots \\ & + H(P_i - H_u + 2)\hat{u}(k + H_u - 2/k) + \\ & + S(P_i - H_u + 1)\hat{u}(k + H_u - 1/k) \end{aligned}$$

Onde:

$$H(j) = S(j) - S(j - 1)$$

Estratégia do MBPC

$$\Psi = Y_f + \Theta \Delta U$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \hat{y}(k + P_1/k) \\ \hat{y}(k + P_2/k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k + P_c/k) \end{bmatrix} \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k/k) \\ \Delta \hat{u}(k + 1/k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k + H_u - 1/k) \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} S(P_1) & S(P_1 - 1) & \dots & S(1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S(P_2) & S(P_2 - 1) & \dots & \dots & \dots & \dots & S(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S(P_c) & S(P_c - 1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & S(P_c - H_u + 1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta U = \Theta \backslash (Y - Y_f)$$

Offset-free Tracking

- Se o modelo não corresponde a planta, teremos um erro de ganho de regime permanente, que levará a saída da planta para um valor final incorreto.
- Para fazer o controlador preditivo insensível a erros de ganho de regime permanente, é necessário medir a discrepância entre a última saída da planta e a última saída do modelo, subtraindo essa diferença da trajetória de referência nos pontos de coincidência.

$$d(k) = y(k) - \hat{y}(k/k - 1)$$

$$\Delta U = \Theta(\Psi - 1d(k) - Y_f)$$

Offset-free Tracking

- Isso funciona para plantas e modelos assintoticamente estáveis.

$S_p(\infty)$ -> ganho de regime permanente da planta.

$S_m(\infty)$ -> ganho de regime permanente do modelo.

Assume-se que a malha fechada é assintoticamente estável e o set-point é constante.

$$\begin{array}{ll} u(k) \rightarrow u_\infty & y_{p\infty} = S_p(\infty)u_\infty \\ y_p(k) \rightarrow y_{p\infty} & y_{m\infty} = S_m(\infty)u_\infty \\ y_m(k) \rightarrow y_{m\infty} & d(k) \rightarrow d(\infty) = [S_p(\infty) - S_m(\infty)]u_\infty \end{array}$$

Principais Componentes do MBPC

- Ações Dependentes das Predições;
- Predições são baseadas no Modelo;
 - Deve-se usar o modelo mais simples possível de acordo com o propósito.
- Seleção da entrada atual
 - São selecionadas de forma a minimizar uma função custo(Performance).
- Horizonte de Predição
 - Precisa incluir todas as dinâmicas significativas do processo.
- Desempenho
 - Você pode controlar tão precisamente quanto você pode modelar.

Predição do modelo

- Resposta ao impulso

A saída é relacionada com a entrada pela equação:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(n-i)$$

Truncando o somatório em N valores, temos:

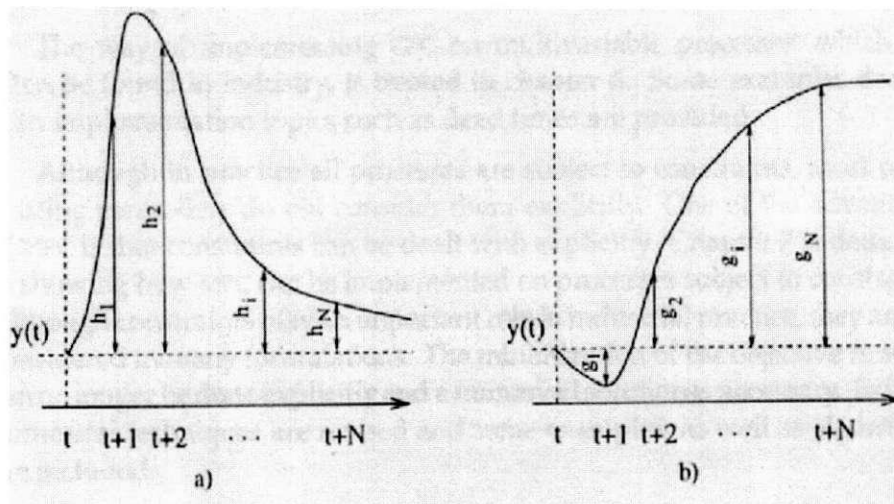
$$y(n) = \sum_{i=1}^N h_i u(n-i) = H(z^{-1})u(n)$$

$$H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_N z^{-N}.$$

A predição será dada por:

$$\hat{y}(n+k|n) = \sum_{i=1}^N h_i u(n+k-i|n) = H(z^{-1})u(n+k|n)$$

Predição do modelo



Predição do modelo

- Resposta ao degrau

Para sistemas estáveis a resposta truncada é dada por:

$$y(n) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(n-i) = G(z^{-1})(1-z^{-1})u(n)$$

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

O preditor será:

$$\hat{y}(n+k|n) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(n+k-i|n)$$

Predição do modelo

- Espaço de estados

Na representação em espaço de estados o processo possui a seguinte representação:

$$x(n) = Mx(n-1) + Nu(n-1)$$

$$y(n) = Qx(n)$$

A predição para este modelo é dada por:

$$\hat{y}(n+k|n) = Q\hat{x}(n+k|n) = Q \left[M^k x(n) + \sum_{i=1}^k M^{i-1} Nu(n+k-i|n) \right]$$

Predição do modelo

- Função de transferência

A função de transferência da saída pela entrada, $G=B/A$, é dada por:

$$A(z^{-1})y(n) = B(z^{-1})u(n)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}$$

Assim a predição é dada por:

$$y(n+k|n) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(n+k|n)$$

Função Custo

- O objetivo principal é que a saída futura (y), no horizonte considerado, siga um determinado sinal de referência (w) e, ao mesmo tempo, o esforço de controle (Δu) necessário para fazê-lo não seja penalizado. A expressão geral para tal função de custo será:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [y(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1|t)]^2$$

Na função de custo podemos considerar:

- Parâmetros: N_1 , N_2 são os horizontes de custo, e N_u horizonte de controle. Os coeficientes $\delta(j)$, $\lambda(j)$ são seqüências que consideram o comportamento futuro.

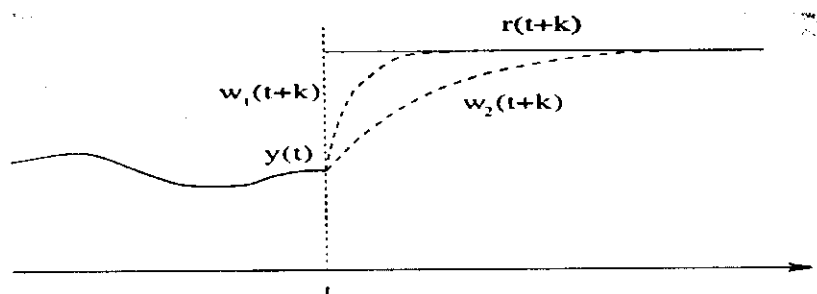
Função Custo

- Trajetória de referência: é normalmente uma aproximação mais suave da referência real. Ela é dada por:

$$w(t) = r(t)$$

$$w(t+k) = \alpha w(t+k-1) + (1-\alpha)r(t+k) \quad k = 1 \dots N$$

onde α é um parâmetro entre 0 e 1. Na figura a forma da trajetória é mostrada, quando a referência $r(t+k)$ é constante.



Matriz de controle dinâmica

- A resposta ao degrau do modelo é:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

a predição do distúrbio é: $\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t) = y_m(t) - \hat{y}(t|t)$

A predição da saída no horizonte será:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i|t) + \hat{n}(t+k|t)$$

$$= \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i|t) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i|t) + y_m(t) - \hat{y}(t|t)$$

Matriz de controle dinâmica

- Podemos escrever:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i|t) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i|t) + y_m(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i|t) + f(t+k)$$

onde $f(t+k)$ é a resposta livre do sistema (não depende de ações futuras de controle), que é igual a:

$$f(t+k) = y_m(t) - \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_i) \Delta u(t-i)$$

Para um processo é assintoticamente estável

$$g_{k+1} - g_i \approx 0, \quad i > N$$

Matriz de controle dinâmica

- A resposta livre pode ser calculada como:

$$f(t+k) = y_u(t) - \sum_{i=1}^N (g_{k+1} - g_i) \Delta u(t-i)$$

Considerando o horizonte de predição ($k=1, \dots, p$) e o horizonte de controle igual a m , temos:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1|t) &= g_1 \Delta u(t) + f(t+1) \\ \hat{y}(t+2|t) &= g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+p|t) &= \sum_{i=1}^m g_i \Delta u(t+p-i) + f(t+p) \end{aligned}$$

Matriz de controle dinâmica

- Definindo a matriz dinâmica do sistema G como:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \cdots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

Então a predição da saída pode ser escrita como:

$$\hat{y} = Gu + f$$

Matriz de controle dinâmica

- A função de custo do DMC é:

$$J = \sum_{j=1}^p [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^m \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2$$

Se o sistema não possui limitações, a solução da função custo, $J = ee^T + \lambda uu^T$
 Onde e é o vetor dos erros futuros no horizonte de predição e o vetor u é composto dos futuros incrementos de controle.
 Pode ser obtida analiticamente pelo cálculo da derivada de J e igualando a Zero.

$$u = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f)$$

Modelo do algoritmo de controle

- A saída do sistema no instante t é relacionada com a entrada como segue:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N h_j u(t-j) = H(z^{-1})u(t)$$

O preditor de k passos, pode ser escrito como:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{j=1}^N \hat{h}_j u(t+k-j) + \hat{n}(t+k|t)$$

onde o somatório pode ser dividido em dois termos:

$$f_r(t+k) = \sum_{j=k+1}^N h_j u(t+k-j) \quad f_o(t+k) = \sum_{j=1}^k h_j u(t+k-j)$$

onde f_r representa a resposta livre e f_o resposta forçada.

Modelo do algoritmo de controle

- Assumindo que o distúrbio permanece constante no horizonte futuro, e com o mesmo valor do instante t , então $\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t)$ e é igual a saída medida menos a predição da saída pelo modelo nominal:

$$\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t) = y(t) - \sum_{j=1}^N h_j u(t-j)$$

Então o preditor é dado por:

$$\hat{y}(t+k|t) = f_o + f_r + \hat{n}(t|t)$$

Modelo do algoritmo de controle

- Se M é o horizonte de predição, u_+ o vetor de ações de controle futura, u_- as ações de controle passada, y as predições da saída, n o distúrbio e w o vetor de referência:

$$y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+M) \end{bmatrix} \quad u_+ = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+M-1) \end{bmatrix} \quad u_- = \begin{bmatrix} u(t-N+1) \\ u(t-N+2) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} \hat{n}(t+1) \\ \hat{n}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{n}(t+M) \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w(t+1) \\ w(t+2) \\ \vdots \\ w(t+M) \end{bmatrix}$$

Modelo do algoritmo de controle

- Definindo as matrizes

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_M & h_{M-1} & \dots & h_1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_N & \dots & h_1 & \dots & h_2 \\ 0 & \dots & h_j & \dots & h_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_N & \dots & h_{M+1} \end{bmatrix}$$

Então o preditor pode ser escrito como:

$$y = H_1 u_+ + H_2 u_- + n$$

Modelo do algoritmo de controle

- Seja a trajetória de referência da forma :

$$w(t) = y(t)$$

$$w(t+k) = \alpha w(t+k-1) + (1-\alpha)r(t+k) \quad k = 1 \dots N$$

- A função de custo minimiza o erro bem como o esforço de controle. Os erros podem ser expressos como:

$$e = w - y = w - H_1 u_+ - H_2 u_- - n = w - f - H_1 u_+$$

onde f representa os valores conhecidos (entradas passadas, saída atual e referência). Então a função de custo pode ser escrita como:

$$J = e^T e + \lambda u_+^T u_+$$

Se nenhuma limitação for considerada, a solução pode ser obtida como:

$$u_+ = (H_1^T H_1 + \lambda I)^{-1} H_1^T (w - f)$$

Bibliografia

- [1] CAMACHO, Eduardo F. – Model Predictive Control
- [2] J.M. Maciejowski – Predictive Control with Constraints
- [3] J.A. Rossiter – Model-Based Predictive Control

Generalized Predictive Control - GPC

Aluno: George Acioli Junior
Professor: Péricles Rezende de Barros
Universidade Federal de Campina Grande UFCG
Centro de Ciências e Tecnologia – CCT
Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle – LIEC
georgeacioli@yahoo.com.br

Sumário

- Introdução
- Formulação do GPC
- Relações de Malha Fechada

Introdução

- A idéia básica do GPC é calcular a seqüência futura de sinais de controle na medida em que minimiza uma função custo definida no horizonte de predição.
- A função custo é uma função quadrática que mede a distância entre a saída do sistema predita e a seqüência da referência no horizonte de predição mais uma função quadrática que mede o esforço de controle.

Formulação do GPC

• Modelos

Considere o seguinte modelo(CARMA) para descrever plantas SISO, quando operando entorno de um set-point em particular e linearizada.

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})e(k)$$

Onde : $A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_nz^{-n}$$

Para muitas aplicações industriais onde os distúrbios são não-estacionários o modelo CARIMA é mais apropriado.

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\frac{e(k)}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - z^{-1}$$

Formulação do GPC

• Função Custo

- A função custo a ser minimizada é da forma apresentada a seguir:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [y(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(k+j-1|k)]^2$$

O objetivo é calcular a seqüência futura de controle $u(k), u(k+1), \dots$ de tal modo que a saída futura da planta $y(k+j)$ acompanhe a referência $w(k+j)$. Isso é realizado minimizando a função custo. Para isso, a predição ótima de $y(t+j)$ para $j \geq N_1$ and $j \leq N_2$ precisa ser obtida.

Formulação do GPC

• Obtenção da Predição Ótima

- Considere a seguinte equação de Diophantine

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad \tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$$

Os polinômios E_j e F_j são unicamente definidos com graus $j-1$ e n respectivamente.

Se multiplicarmos $\Delta E_j(z^{-1})z^j$ pelo modelo CARIMA, temos:

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(k+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(k+j)$$

Reescrevendo, temos:

$$(1 - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(k+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(k+j)$$

$$y(k+j) = F_j(z^{-1})y(k) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(k+j)$$

Formulação do GPC

• Obtenção da Predição Ótima

Como o grau do polinômio $E_j(z^{-1}) = j - 1$ os termos de distúrbio estão todos no futuro.

$$\hat{y}(k+j|k) = F_j(z^{-1})y(k) + G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-d-1)$$

Onde: $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$

$$\hat{y}(k+d+1|k) = G_{d+1}\Delta u(k) + F_{d+1}y(k)$$

$$\hat{y}(k+d+2|k) = G_{d+2}\Delta u(k+1) + F_{d+2}y(k)$$

.....

$$\hat{y}(k+d+N|k) = G_{d+N}\Delta u(k+N-1) + F_{d+N}y(k)$$

$$y = Gu + F(z^{-1})y(k) + G'(z^{-1})\Delta u(k-1)$$

Formulação do GPC

• Obtenção da Predição Ótima

$$y = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1|k) \\ \hat{y}(k+d+2|k) \\ \dots \\ \hat{y}(k+d+N|k) \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \dots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix}$$

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1})z^2 \\ \dots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1} - \dots - g_{N-1}z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix}$$

$$F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \dots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

Formulação do GPC

• Obtenção da Predição Ótima

- Como os dois últimos termos da equação: $y = Gu + F(z^{-1})y(k) + G'(z^{-1})\Delta u(k-1)$
Só dependem do passado temos: $y = Gu + f$

A função de custo pode ser reescrita como: $J = (Gu + f - w)^T(Gu + f - w) + \lambda u^T u$

Onde:

$$w = \begin{bmatrix} w(k+d+1) \\ w(k+d+2) \\ \dots \\ w(k+d+N) \end{bmatrix}$$

Formulação do GPC

• Obtenção da Predição Ótima

A função custo pode ser escrita ainda como: $J = \frac{1}{2} u^T H u + b^T u + f_0$

Onde: $H = 2(G^T G + \lambda I)$

$b^T = 2(f - w)^T G$

$f_0 = (f - w)^T (f - w)$

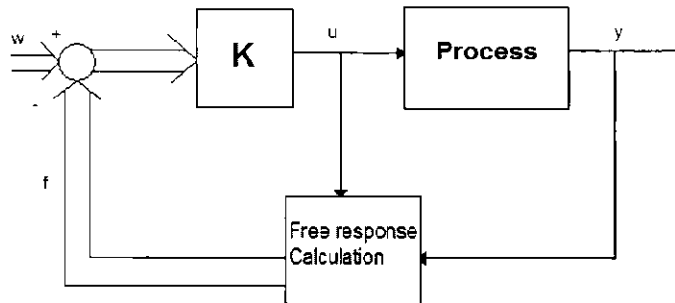
O mínimo de J, assumindo que não há restrições no sinal de controle, pode ser obtido fazendo o gradiente de J igual a zero. Assim, temos:

$$u = -H^{-1} b = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f)$$

$$\Delta u(k) = K(w - f)$$

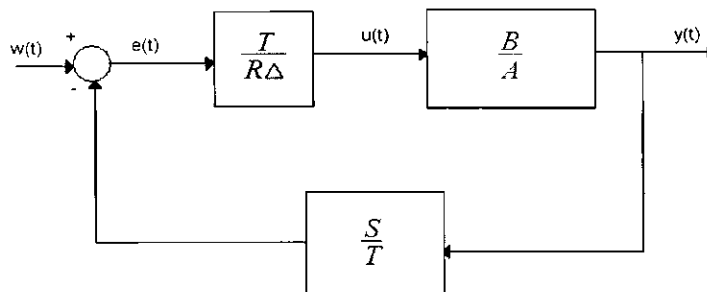
Formulação do GPC

- Lei de Controle GPC



Relações de Malha Fechada

- Relações de malha fechada podem ser obtidas para GPC sem restrições. Essas relações podem ser colocadas na estrutura clássica de alocação de pólos:



- A lei de controle é dada por:

$$R(z^{-1})\Delta u(t) = T(z^{-1})w(t) - S(z^{-1})y(t)$$

Relações de Malha Fechada

A ação de controle é dada por:
$$\Delta u(t) = K(w - f) = \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i [w(t+i) - f(t+i)]$$

Onde K é a primeira coluna da matriz $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$

O modelo da planta é dado por:
$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + T(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta}$$

A equação de Diophantine que precisa ser resolvida, inclui agora o polinômio T

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1})$$

Assim, usando essa equação e o modelo da planta, a saída futura é dada por:

$$y(t+j) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t+j-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) + \frac{F_j(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta}e(t)$$

Relações de Malha Fechada

- Reescrevendo a equação anterior, a saída predita pode ser dada por:

$$y(t+j) = \frac{F_j}{T}y(t) + \frac{E_j B}{T}\Delta u(t+j-1) + E_j e(t+j)$$

A melhor predição é obtida fazendo $e(t+j)$ igual a zero

$$\hat{y}(t+j/t) = \frac{F_j}{T}y(t) + \frac{E_j B}{T}\Delta u(t+j-1)$$

Essa expressão é função de valores conhecidos e ações de controle futuras. As ações de controle podem ser separadas em passadas e futuras utilizando a equação de Diophantine a seguir:

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = H_j(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-j}I_j(z^{-1})$$

Relações de Malha Fechada

- Usando essa equação a predição é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+j|t) &= H_j \Delta u(t+j) + \frac{I_j}{T} \Delta u(t-1) + \frac{F_j}{T} y(t) = \\ &= H_j \Delta u(t+j) + I_j \Delta u^f(t-1) + F_j y^f(t)\end{aligned}$$

Agora a resposta livre é dada por: $f = I_j \Delta u^f(t-1) + F_j y^f(t)$

$$\begin{aligned}\Delta u(t) &= K(w - f) = \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i [w(t+i) - f(t+i)] = \\ &= \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i w(t+i) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i \frac{I_i(z^{-1})}{T(z^{-1})} \Delta u(t-1) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i \frac{F_i(z^{-1})}{T(z^{-1})} y(t)\end{aligned}$$

Relações de Malha Fechada

- Omitindo o termo z^{-1} e reordenando a equação, temos:

$$\left[T + z^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i \right] \Delta u(t) = T \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i w(t) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i F_i y(t)$$

Os valores de R e S podem ser obtidos comparando a equação com a mostrada a seguir, que é a da lei de controle:

$$R(z^{-1}) \Delta u(t) = T(z^{-1}) w(t) - S(z^{-1}) y(t)$$

$$R(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1}) + z^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i}$$

$$S(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i F_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i}$$

Relações de Malha Fechada

- A equação característica de malha fechada vem da inclusão da lei de controle no modelo do processo.

$$A\Delta y(t) = Bz^{-1}\left(\frac{T}{R}w(t) - \frac{S}{R}y(t)\right) + Te(t)$$

$$y(t) = \frac{BTz^{-1}}{RA\Delta + BSz^{-1}}w(t) + \frac{TR}{RA\Delta + BSz^{-1}}e(t)$$

O polinômio característico é dada por: $RA\Delta + BSz^{-1} = 0$

E pode ser reescrito da forma:

$$RA\Delta + BSz^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i} \left(T\tilde{A} + T \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i z^{i-1} (B - \tilde{A}H_i) \right) = TP_c$$

Relações de Malha Fechada

- Assim, temos: $y(t) = \frac{Bz^{-1}}{P_c}w(t) + \frac{R}{P_c}e(t)$

Onde mostra-se que o polinômio T é cancelado na função de transferência de malha fechada entre a saída e a referência, e que a estabilidade e o desempenho são definidos pelas raízes do polinômio P_c .

Relações de Malha Fechada

- O Polinômio T

Embora o polinômio não apareça na função de transferência entre a saída e a referência, ele aparece na função de transferência entre a saída e o distúrbio.

Na equação: $\hat{y}(t+j/t) = H_j \Delta u(t+j) + \frac{I_j}{T} \Delta u(t-1) + \frac{F_j}{T} y(t) =$

Podemos observar que $y(t)$ e $\Delta u(t)$ aparecem filtrados por $1/T$. Escolhendo um T de suficientemente grande, este elimina a componente do erro de predição causado pelo erro de modelagem, o que é particularmente importante nas altas frequências.

Relações de Malha Fechada

- O Polinômio T

Os distúrbios de alta frequência aparecem principalmente devido à presença de dinâmicas de alta frequência não modeladas e distúrbios não medidos.

Por outro lado, T é usado como um parâmetro de projeto que influencia na estabilidade robusta. Nesse caso, o preditor não será ótimo, mas sim robusto, no que diz respeito as incertezas que pode alcançar.

Bibliografia

- [1] CAMACHO, Eduardo F. – Model Predictive Control
- [2] J.M. Maciejowski – Predictive Control with Constraints
- [3] J.A. Rossiter – Model-Based Predictive Control