



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Jonas Jorge Diogo Pinheiro da Silva

**Dinâmica métrico-afim em Gravidade
modificada – Soluções exatas via
correspondência RBG-RG**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

5 de fevereiro de 2021

Jonas Jorge Diogo Pinheiro da Silva

**Dinâmica métrico-afim em Gravidade modificada –
Soluções exatas via correspondência RBG-RG**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Victor Afonso, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em completamento aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Victor Afonso

Campina Grande, Paraíba, Brasil

5 de fevereiro de 2021

S586d

Silva, Jonas Jorge Diogo Pinheiro da.

Dinâmica métrico-afim em gravidade modificada - soluções exatas via correspondência RBG-RG / Jonas Jorge Diogo Pinheiro da Silva. - Campina Grande, 2021.

90 f. : il. Color

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso".

Referências.

1. Métrico-Afim. 2. Objetos Compactos. 3. Gravidade Modificada. 4. Mapeamento - Cosmologia e Gravitação. I. Afonso, Victor Ignácio. III. Título.

CDU 528.27(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

JONAS JORGE DIOGO PINHEIRO DA SILVA

Dinâmica métrico-afim em Gravidade modificada – Soluções exatas via correspondência RBG-RG

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 05/02/2021

Victor Ignácio Afonso
Presidente da Comissão e Orientador

Amílcar Rabelo de Queiroz
Examinador Interno

Gonzalo J. Olmo
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **AMILCAR RABELO DE QUEIROZ, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/02/2021, às 16:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gonzalo Olmo Alba, Usuário Externo**, em 05/02/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 05/02/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1221056** e o código CRC **054256F6**.



Referência: Processo nº 23096.000679/2021-53

SEI nº 1221056



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 05 DE FEVEREIRO DE 2021

Aos cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **JONAS JORGE DIOGO PINHEIRO DA SILVA** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Victor Ignácio Afonso** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Amílcar Rabelo de Queiroz** – Doutor em Física, o professor **Gonzalo J. Olmo** – Doutor em Física, sendo os dois primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente do Depto. de Física Teórica & IFIC - U. de Valencia, Espanha. HORA DE INÍCIO: **14h00** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFCG decorrente do corona vírus**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Victor Ignácio Afonso**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **JONAS JORGE DIOGO PINHEIRO DA SILVA**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado **“Dinâmica métrico-afim em Gravidade modificada – Soluções exatas via correspondência RBG-RG”**. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 05 de fevereiro de 2021.

Hélio Pereira de Oliveira
Secretário

Victor Ignácio Afonso
Presidente da Comissão e Orientador

Amílcar Rabelo de Queiroz
Examinador Interno

Gonzalo J. Olmo
Examinador Externo

Jonas Jorge Diogo Pinheiro da Silva
Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **JONAS JORGE DIOGO PINHEIRO DA SILVA**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **AMILCAR RABELO DE QUEIROZ, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/02/2021, às 16:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 05/02/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gonzalo Olmo Alba, Usuário Externo**, em 05/02/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jonas Jorge Diogo Pinheiro da Silva, Usuário Externo**, em 08/02/2021, às 13:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1221053** e o código CRC **A39991F4**.

À minha filha, Ana Bela.

Agradecimentos

- À CAPES pelo suporte financeiro durante todo o Programa.
- Aos excelentes Professores, Francisco Brito, João Rafael L. Santos, Victor Afonso, que além de contribuírem para a minha formação, de forma indireta, contribuíram significativamente para o início e fim do presente trabalho.
- Ao meu Orientador, pelos intensos conselhos e atenção, além dos sermões e críticas construtivas, que moldaram o Perfil de Pesquisador que pretendo construir.
- Aos meus Colegas de Pesquisa José Grimário (Gandalf) & Renato Ordonho (Sephrot), pelas batalhas travadas e companheirismo.
- Ao meu Pai, Diogo, minha Mãe, Ruth e aos meus irmãos, pelo carinho, incentivo e suporte.
- À minha companheira Brenda, pelo incentivo e apoio para o ingresso no Programa.

*(...) mãe inteligência em casa de quem a dor escoava,
qual é essa negligência que deixa deteriorar o leite?
(VALERY, Paul, Poésie, 1929).*

Resumo

Uma questão bastante pertinente na Física Teórica é da viabilidade da Relatividade Geral (RG) no regime de altas curvaturas, relacionada a vários fatores como a presença de singularidades inevitáveis, com o conseqüente problema de perda de informação e a impossibilidade de renormalização da versão quantizada da teoria. Por outro lado, para acordar a previsão teórica com os resultados inerentes às observações cosmológicas e astrofísicas, a RG requer a inclusão de fontes exóticas (Energia e Matéria escura). A falta de comprovação experimental da existência dessas componentes exóticas em forma direta, ou indireta por meios além dos efeitos puramente gravitacionais, abre a possibilidade de considerar caminhos alternativos para a descrição desses fenômenos. Entre eles, modificações e extensões da descrição da interação gravitacional. O presente trabalho traz uma classe de teorias de Gravidade Modificada, as *Ricci-based gravities* (RBGs), cuja dinâmica é descrita no formalismo métrico-afim (ou Palatini). Estas teorias servem como rotas de investigação dos fenômenos mencionados, evitando ou reduzindo a necessidade de invocar fontes exóticas. Dentro dessa classe de teorias, fazemos uma descrição detalhada das chamadas gravidades $f(R)$, $EiBI$ e $f(R, R^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$. Na sequência, e como estratégia de trabalho, construímos todo o arcabouço teórico de um método de Mapeamento (ou Correspondência) entre as RBGs e a RG, aplicando ao caso de matéria descrita por campos escalares. Isto nos permite o tratamento do modelo quadrático de gravidade $f(R) = R + \alpha R^2$, no qual aplicamos o método apresentado, para obtermos soluções dessa RBG, a partir de uma solução conhecida para campos escalares com simetria esférica na RG. Finalmente, analisamos profundamente os resultados obtidos, discutindo suas características e apontando o caráter compacto desses novos objetos.

Palavras-chave: Métrico-afim. Objetos Compactos. Gravidade Modificada. Mapeamento.

Abstract

A very pertinent question in Theoretical Physics is the viability of General Relativity (GR) in the high curvature regime, related to several factors such as the presence of unavoidable singularities, with the consequent problem of loss of information and the impossibility of renormalizing the quantized version of theory. On the other hand, in order to agree the theoretical forecast with the results inherent to cosmological and astrophysical observations, GR requires the inclusion of exotic sources (Energy and Dark Matter). The lack of experimental proof of the existence of these exotic components in a direct or indirect way by means other than purely gravitational effects, opens the possibility of considering alternative ways to describe these phenomena. Among them, modifications and extensions of the description of the gravitational interaction. The present work brings a class of Modified Gravity theories, the *Ricci-based gravities* (RBGs), whose dynamics are described in the metric-affine (or Palatini) formalism. These theories serve as routes of investigation of the mentioned phenomena, avoiding or reducing the need to invoke exotic sources. Within this class of theories, we make a detailed description of the so-called gravities $f(R)$, *EiBI* and $f(R, R^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$. As a work strategy, we built the entire theoretical framework of a Mapping (or Correspondence) method between the RBGs and the GR, applying to the case of matter described by scalar fields. This allows us to treat the quadratic model of gravity $f(R) = R + \alpha R^2$, in which we apply the presented method, to obtain solutions of this RBG, from a known solution for scalar fields with spherical symmetry in the GR. Finally, we deeply analyze the results obtained, discussing their characteristics and pointing out the compactness of these new objects.

Keywords: Metric-affine. Compact Objects. Modified Gravity. Mapping.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comportamento da função radial $r(y)^2$ para a gravidade $f(R)$ quadrática com deformação $f_R = 1 - 2\alpha\kappa^2 Z$, caracterizando uma solução tipo “buraco de minhoca” (<i>wormhole</i>). $\kappa^2 = 1$, $ \alpha = 10^{-1}$, e $\sigma_{\text{verde}} = -40$, $\sigma_{\text{laranja}} = -20$ e $\sigma_{\text{azul}} = -10$. Obtido de [1] com anuência dos autores.	70
Figura 2 – Comportamento da função de forma $r(y)^2$ para a gravidade $f(R)$ com deformação $f_R = 1 - 2\alpha\kappa^2 Z$, associada ao modelo quadrático, com $\alpha > 0$. Para $\kappa^2 = 1$ e $\sigma = -10$, e três diferentes valores de $ \alpha $: $ \alpha _{\text{azul}} = 10^{-1}$, $ \alpha _{\text{laranja}} = 10^{-3}$ e $ \alpha _{\text{verde}} = 10^{-5}$. Se $ \alpha \rightarrow 0$, voltamos a RG.	72
Figura 3 – Comportamento das funções $r(y)^2$, g_{tt} e g_{rr} para $\sigma = -10$ e $ \alpha = 10^{-3}$	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação do setor de Matéria	56
Tabela 2 – Propriedades gerais	89

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Manifestação e indícios de Energia e Matéria Escura	23
1.2	Expansão acelerada e Energia Escura	25
1.3	Materia escura	29
1.3.1	Dinâmica das galáxias	29
1.3.2	Lentes gravitacionais	30
1.3.3	A natureza da Matéria Escura	30
2	ABORDAGENS DAS COMPONENTES ESCURAS	33
2.1	Aspectos essenciais para um modelo atualmente viável	33
2.2	O universo descrito por Λ CDM	34
2.3	Gravidade Modificada	36
2.3.1	Gravidade $f(R)$ (formalismo métrico)	36
3	TEORIAS DE GRAVIDADE BASEADAS NO TENSOR DE RICCI (RBGS)	41
3.1	Dinâmica das RBGs	41
3.1.1	O papel da torsão.	45
3.1.2	Equações de campo para a conexão	45
3.1.3	Métrica auxiliar e matriz deformação	47
3.2	Teoria <i>EiBI</i> (<i>Eddington-inspired Born-Infeld</i>)	50
3.3	Teoria $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$	51
4	CORRESPONDÊNCIA RBG-RG	55
4.1	Conceitos fundamentais	56
4.2	Mapeamento com campos escalares	57
5	MAPEAMENTO ENTRE $f(R)$ E R	61
5.1	Modelo $f(R) = R + \alpha R^2$	61
5.1.1	Mapa $f(R)$ em RG	62

5.1.2	Mapeamento inverso: da RG para a $f(R)$	63
5.2	Gravidade $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$	64
6	OBJETOS COMPACTOS EM GRAVIDADE $f(R) = R + \alpha R^2$	67
6.0.1	Propriedade das Soluções	68
6.0.1.1	$\alpha < 0$	69
6.0.1.2	$\alpha > 0$	72
6.0.2	Densidade de Energia e Curvatura	74
7	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICES	85
	APÊNDICE A – MAPEAMENTO DE $f(R, Q)$	87
A.1	Mapping em gravidade $f(R, Q)$	87
A.1.1	Relações $f(R)$ - $f(R, Q)$	89
A.1.2	Soluções para a matéria do <i>Einstein-frame</i>	89

1 Introdução

Após o advento da teoria da Relatividade Geral, em especial entre as décadas de 1930 e 1970, constatou-se através de observações astronômicas, a existência de sistemas cuja dinâmica parece fugir das previsões da física newtoniana (ou pós-newtoniana, a aproximação da Relatividade Geral de Einstein no regime de baixas curvaturas e energias). Posteriormente, sobre o final dos anos 1990s, novos fenômenos que não se encaixam na descrição puramente da Relatividade Geral foram observados, e isto trouxe à tona a ideia de um “universo desconhecido”. Este universo desconhecido, é descrito através de componentes denominadas de Matéria e Energia Escura; as quais poderiam compor $\sim 95\%$ da massa-energia total do Universo [2, 3, 4]. Embora não existam comprovações empíricas, no sentido de testes experimentais executados em laboratório ou observações diretas que lhes deem sustento, as componentes escuras passaram a ser levadas em consideração no âmbito da Astrofísica e da Cosmologia Moderna, devido aos fortes argumentos teóricos desenvolvidos ao longo das últimas décadas. Como veremos, matéria e energia escura estão ligadas aos problemas da taxa de expansão e de distribuição da matéria do Universo.

1.1 Manifestação e indícios de Energia e Matéria Escura

Cosmologia

Na descrição básica do nosso Universo como um todo, a primeira regra é o chamado Princípio Cosmológico, que supõe isotropia e homogeneidade em larga escala [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Do ponto de vista geométrico, isotropia implica na invariância do tensor de Riemann na variedade pseudo-riemanniana (M, g) representando o espaço-tempo. Isto é, as propriedades físicas são independentes da direção considerada. E, assumindo que (M, g) admite bijeção métrica do espaço (homogeneidade)[3, 11, 12, 13], para qualquer ponto coordenado x^μ devemos ter

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x') \quad (1.1)$$

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x'). \quad (1.2)$$

$g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento. Como as equações de Einstein estabelecem uma relação entre a distribuição de energia e matéria, e a geometria do espaço-tempo, através dos tensores energia-momento, $T_{\mu\nu}$, e de Einstein, $G_{\mu\nu}$, respectivamente; é de se esperar que as soluções dessas equações apresentem dependência com a densidade de matéria e pressão [4, 14]. Como o Universo possui uma energia *total* (constante no sistema), bem como uma densidade de massa visível (planetas, estrelas, poeira cósmica entre outros corpos celestes), surgem três possibilidades a respeito da quantidade de massa total do Universo e a aceleração, que estão ligadas à sua geometria global (topologia), e discriminadas pela sua curvatura espacial κ .

Decorrentemente, a métrica proposta por Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker para descrever o Universo, em coordenadas (t, r, θ, ϕ) , tem a forma

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.3)$$

Esta métrica caracteriza uma solução das equações de Einstein que incorpora as simetrias de isotropia e homogeneidade. A curvatura escalar em \mathbb{R}^3 , correspondente a (1.3), é dada por^a

$$K(t) = ka^{-2}(t). \quad (1.4)$$

Nessas expressões, $a(t)$ é o chamado fator de escala^b, que é variável no tempo; enquanto k descreve a curvatura (normalizada) das seções espaciais do Universo e é constante no tempo [13, 15, 16], podendo assumir os valores: -1, 0 e 1; que correspondem à topologia do Universo ser aberta (geometria espacial hiperbólica, expansão eterna), plana ou crítica (geometria espacial euclidiana, expansão atinge o equilíbrio assintoticamente e para em um tempo infinito), ou fechada (geometria espacial esférica, colapso futuro o ‘*Big Crunch*’).

^a Para uma revisão detalhada, ler capítulo 14 de [13] e capítulo 7 de [3]

^b Na literatura se encontra também a notação $S(t)$, inicialmente interpretado como uma função desconhecida

Os dados observacionais mais precisos e confiáveis obtidos até o momento indicam que o nosso Universo é Plano. Por outro lado, veremos mais a frente que as observações das curvas de luz das Supernovas Ia^c fornecidas pelo satélite astronômico HST (*Hubble Space Telescope*) [18, 19], apontam fortemente para um estágio atual de expansão *acelerada* do nosso Universo. E isto nos conduz a investigar a natureza e origem dessa aceleração.

1.2 Expansão acelerada e Energia Escura

Admitindo a isotropia e homogeneidade do espaço (Princípio Cosmológico), em acordo com os dados observacionais de Hubble [5, 9, 20], a distância radial entre dois pontos quaisquer $r(t)$ deve considerar a expansão do Universo, levando em conta o fator de escala $a(t)$ na forma

$$r(t) = a(t)r(t_0) , \quad (1.5)$$

onde $r(t_0)$ descreve a distância entre os dois pontos quando $a(t) = 1$. Observe que a distância radial $r(t)$ depende do tempo. Isto é, diante da distribuição de massa investigada, o desvio para o vermelho (*redshift*) detectado pelas observações de Edwin Hubble (1889-1953) [20], da luz emitida pelas galáxias distantes, indicou que todas as galáxias estavam se afastando umas das outras (o Universo não era estático)^d. Percebeu também que, quanto mais distantes do referencial da Terra, com maior velocidade se afastavam, sendo esta velocidade diretamente proporcional à distancia o que deu lugar à chamada lei de Hubble (na forma vetorial),

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}; \quad (1.6)$$

onde H_0 é a constante de proporcionalidade na época atual (parâmetro de Hubble ou taxa de expansão).

À vista do exposto, a distribuição de matéria e energia deve caracterizar a geometria do Universo, isto é, o tipo de curvatura, a uma taxa de expansão

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.7)$$

^c A princípio, as evidências para a aceleração do Universo não eram suficientes para alguns pesquisadores da época que acreditavam em uma explicação alternativa: extinção de poeira (cf. [17])

^d As galáxias mais próximas apresentavam um desvio para o azul

que está relacionada com a densidade de matéria e energia do Universo, ρ_0 [5, 8].

Partindo de argumentos de simetria (número máximo de vetores de Killing associado ao princípio cosmológico), pode se ver[13] que a densidade de matéria e energia correspondente a uma distribuição em larga escala, útil à nossa descrição do Universo, tem a forma

$$\rho_0 = \frac{1}{G} \left(H^2 + \frac{\kappa}{r^2} \right) \frac{r^3}{2V} = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{\kappa}{r^2} \right), \quad (1.8)$$

onde V define o volume da esfera e G é a constante gravitacional.

Acatando a descrição da métrica plana[13], a conexão – objeto geométrico sobre a variedade riemanniana que possibilita a diferenciação covariante – em termos da curvatura (1.4),

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = K(t)x^\mu g_{\nu\lambda}, \quad (1.9)$$

fornece, por meio da equação da geodésica, um conjunto de soluções que caracteriza o tipo de Universo em termos da curvatura:

$$K(t) = \kappa a(t)^{-2} \rightarrow \begin{cases} < 0, & \sinh(\tau\sqrt{-K}) \\ = 0, & 0 \\ > 0, & \sin(\tau\sqrt{K}) \end{cases} \quad (1.10)$$

Isto significa que, assumindo o Princípio Cosmológico, a teoria da Relatividade Geral fornece três modelos de Universo possíveis classificados pelo valor de κ .

A respeito da distribuição de matéria e energia do Universo, além de (1.8), é útil considerar a taxa de expansão atual e determinarmos a densidade crítica do Universo; escrita como

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.11)$$

Quando relacionamos a densidade de matéria é conveniente trabalharmos com o seu valor relativo à densidade crítica do Universo [21, 22]; então definimos

$$\Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c}. \quad (1.12)$$

Um dos indícios que direciona os cientistas a avaliarem a hipótese de existência da Matéria Escura, é o fato de a matéria visível apresentar uma densidade menor

do que ρ_c . Se $\rho_0 < \rho_c$, o Universo é tipo aberto e continuará em expansão. Mas, nos estudos da radiação cósmica de fundo, o WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), entre outras fontes, apresentou resultados que apontam fortemente para a planicidade do Universo[21, 23], ou seja, $\Omega = 1$. Resultado condizente com o previsto pela teoria inflacionária. Fisicamente, isto nos diz que o Universo (em expansão) sofrerá uma desaceleração suficientemente grande como para frear a expansão e manter o equilíbrio estacionário.

Isto só é possível se supomos que a densidade total de matéria-energia é constituída por, além das componentes visíveis, uma outra parte de componentes “escuras”:

$$\rho_0 = \rho_V + \rho_E. \quad (1.13)$$

De acordo com as observações, a densidade de matéria-energia escura ρ_E é bem maior do que a das componentes visíveis ($\rho_V \ll \rho_E$).

Como vimos, os dados observacionais mais recentes dão indícios sobre a geometria global ou topologia do Universo. E isto enaltece a importância de compreendermos como a gravidade está relacionada com a planicidade do Universo. Nesse sentido, em virtude da força gravitacional ser predominante na escala cosmológica, até o final dos anos 1990s, acreditava-se que a atração gravitacional fosse suficiente para desacelerar a expansão do Universo; o que indicava que o Universo era dominado por matéria[5]. A grandeza que descreve o quanto a expansão do Universo está mudando, denominado de “parâmetro de desaceleração” $q(t)$, é dado por

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2}, \quad (1.14)$$

Utilizando (1.7), podemos relacionar o parâmetro de desaceleração com a taxa de expansão do Universo:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{H^2 a(t)}. \quad (1.15)$$

Das equações de Friedmann, explicitamos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right), \quad (1.16)$$

considerando a taxa de expansão atual ($H \rightarrow H_0$) para relacionarmos a densidade de matéria com a densidade crítica do Universo, e obtermos o parâmetro de desaceleração atual (q_0); substituindo (1.16) em (1.15), temos que

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3H_0^2} \left(\rho_0 + \frac{3P}{c^2} \right) \simeq \frac{4\pi G}{3H_0^2} \rho_0, \quad (1.17)$$

onde a aproximação corresponde a um universo predominantemente constituído por matéria não-relativista, que, em termos do parâmetro de densidade de matéria toma a forma:

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2}. \quad (1.18)$$

A pressão material positiva influencia para que a atração gravitacional aumente[5, 21] e, conseqüentemente, possa desacelerar a expansão do Universo. Isto significa que o parâmetro de densidade explicitado em (1.18) (parâmetro de densidade atual) deve fornecer as informações necessárias para à análise teórica da interação entre a força gravitacional e a expansão do Universo.

A Constante Cosmológica como Energia Escura

Esta evidência, assim como a suposta abundância de Matéria Escura em aglomerados de galáxias, possível detecção por lentes gravitacionais e até por Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO) (vide Seções 1.3.1 e 1.3.2 mais adiante), induziram a comunidade científica a interpretar a origem da expansão acelerada[24, 25] no sentido de que o Universo seria dominado por uma componente exótica de energia que exerce pressão contra a força gravitacional[14] (pressão negativa): a chamada Energia Escura. Esta hipótese, havia sido explorada por Einstein sob a forma da Constante Cosmológica (Λ) com o objetivo de estabilizar o modelo de Universo, que o mesmo acreditava ser estático. A utilização da constante cosmológica, na perspectiva de Einstein, passou a ser descartada logo após a aceitação, mediante às observações de Hubble, de que o Universo expandia-se. De fato, a introdução da Constante cosmológica implica na implementação de um termo extra nas equações de estado satisfazendo a condição de planicidade do Universo ($k = 0$), ou seja [26]

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad (1.19)$$

onde o parâmetro de densidade da constante cosmológica pode ser escrito na forma

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (1.20)$$

Note que a dimensão de Λ se restringe somente ao tempo ($[T]^{-2}$). Desta forma, o parâmetro de desaceleração descrito em (1.18) deve apresentar valores inferiores em razão da expansão acelerada do Universo:

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda. \quad (1.21)$$

O cenário da expansão acelerada do Universo descrito acima, incitou a construção de diversos modelos buscando explicar as observações, que apontam que a Cosmologia encontra-se em um estágio de mudança paradigmática: embora a natureza das componentes escuras ainda seja desconhecida, o Universo observado necessita da existência destas, ou de alguma explicação alternativa. Nesse sentido, diversos modelos propõem-se explicar a expansão acelerada do Universo excluindo a hipótese da existência da Energia Escura.

1.3 Materia escura

1.3.1 Dinâmica das galáxias

O primeiro e um dos principais argumentos que fometaram a hipótese de Matéria Escura surgiram a partir dos estudos da dinâmica das Galáxias. Nesse sentido, as proeminentes observações feitas inicialmente por Zwicky[5, 8, 14, 27, 25], e mais tarde por Vera Rubin [8, 27], mostraram (mais claramente no caso das galáxias espirais) o efeito chamado de “planicidade das curvas de rotação das galáxias”[28], onde a velocidade de rotação da matéria que compõe a galáxia na sua região mais externa permanece constante com relação à distancia radial ao centro, o que está em flagrante desacordo com a quantidade de massa (visível) mensurada, se a lei de Newton for válida.

Ainda com relação a galáxias, uma outra evidência para a Matéria Escura, em uma escala maior, é a dispersão dos aglomerados devido a magnitude da

energia cinética das galáxias constituintes que é, aparentemente, superior à atração gravitacional entre elas. Contudo, isso não é verificado. É de se imaginar então que os aglomerados permaneçam localizados por existir uma certa distribuição de matéria não-visível proporcionando essa atração gravitacional, denominada de Matéria Escura.

1.3.2 Lentes gravitacionais

As lentes gravitacionais (fracas ou fortes) são fenômenos oriundos da curvatura do espaço-tempo nas regiões em torno de objetos muito massivos, como por exemplo, aglomerados de galáxias (*clusters*), que permitem detectar, indiretamente, a existência da Matéria Escura. Quanto mais denso for o aglomerado (lentes gravitacionais fortes), maiores desvios da luz podem ser observados, formando inúmeras imagens distorcidas (arcos gravitacionais) do objeto original. Estas imagens nos fornecem dados a respeito da curvatura, associada à distribuição de matéria-energia na região, o que possibilita traçar o perfil de dispersão luminosa[29]. Quando comparado com a matéria visível, permite determinar a provável região em que há concentração de Matéria Escura e estabelecer “mapas” com esses dados[30].

1.3.3 A natureza da Matéria Escura

No cenário atual, outras fortes evidências estabelecem a necessidade da existência de Matéria Escura e algumas delas preveem uma possível interação entre a Matéria Escura e a matéria bariônica no início da formação das estrelas[31]. Ainda, o estudo da nucleossíntese primordial do Universo e as observações provenientes da Radiação Cósmica de Fundo (CMB, pelas suas siglas em inglês) indicam que a Matéria Escura é um elemento essencial que deve ser considerado para a construção de um modelo cosmológico que satisfaça as condições impostas pela estrutura do Universo como o conhecemos hoje.

Tendo em mente que a Matéria Escura não interage, ou interage em forma extremamente fraca, tanto eletromagneticamente quanto nuclearmente (salvo os MACHOs^e), a discrepância apresentada no parâmetro de densidade de matéria

^e *Massive Compact Halo Objects*, é uma classe específica da parte que compõe a Matéria Escura

do Universo[18, 5, 4, 23, 32], além de indicar a existência da Matéria Escura, nos permite supor que esta não é bariônica, o que está de acordo com o processo de formação de estruturas do Universo. Se a matéria é bariônica, as estruturas só podem ser formadas na época da recombinação, isto é, quando a matéria desacopla da radiação e se recombina^f[8, 21, 31]. O verificado pelas observações da CMB é que as perturbações apresentam um valor inferior[2] ao de um universo constituído por perturbações vinculadas à matéria bariônica; indicando que a Matéria Escura torna-se a componente essencial para a formação de galáxias, por poder formar estruturas antes da recombinação. Ainda sobre a Matéria Escura, podemos classificá-la em função da velocidade das “partículas” constituintes e a assinatura das flutuações geradas no processo de formação. Assim, a chamada Matéria Escura Fria (*Cold Dark Matter - CDM*) é não-relativista e acumularia pequenos vestígios das flutuações estruturais da época de formação do Universo, enquanto que a Matéria Escura quente é relativista e apaga estas mesmas flutuações (de baixa escala).

que interage eletromagneticamente.

^f Este período é marcado pelo fato de que os átomos de hidrogênio passam a estar neutralizados em virtude dos fótons não possuírem energia suficiente para manter o processo de ionização. Para uma revisão mais detalhada consulte[14]

2 Abordagens das componentes escuras

Dada às circunstâncias, a Cosmologia Moderna encontrou-se propensa a descrever o Universo considerando a existência (mesmo não elucidada) das componentes escuras. No geral, os modelos alternativos buscam ampliar a física teórica em relação ao tratamento das componentes escuras [33] com o objetivo de conciliar os resultados observacionais que estão em desacordo com o previsto na teoria.

2.1 Aspectos essenciais para um modelo atualmente viável

Para um quadro geral de modelos que expliquem as componentes escuras, algumas considerações ou “requisitos” devem ser levados em conta. A viabilidade irá existir se o modelo

1. Prever a expansão acelerada do Universo atual;
2. Acordar as observações cosmológicas (Universo plano);
3. Explicar a dinâmica e formação das galáxias no contexto observacional;
4. For descrito por uma teoria de gravidade que seja efetiva para escalas astrofísicas e cosmológicas.
5. Harmonizar (ou modificar) a previsão teórica e observacional nas escalas e contextos bem testados da Teoria da Relatividade Geral;

Dentro dessas orientações, no tocante à Matéria escura, em especial a fria, passou a ser aceita com bastante facilidade, já que resulta necessária para explicar a dinâmica e a formação das galáxias[34, 35], o que gerou diversas propostas de modelos baseados nesta componente.

Com respeito à Energia Escura, na literatura pode-se encontrar diversos modelos com características bem específicas. Entre eles há manifestação da energia escura por meio da constante cosmológica Λ , energia do vácuo[26, 36, 37]; a variação

da energia do vácuo, consistente com o modelo inflacionário $\Lambda(t)$, pois a densidade de energia do vácuo diminui com a expansão do Universo[38, 39, 40]; , o modelo x-matéria[41]; e destacam-se os modelos que possuem o campo escalar mínima ou não-minimamente acoplado à gravidade: quintessência, gás de Chaplyging, campos fantômicos (*phantom*), entre tantos outros[14, 35, 41, 42, 43, 44].

Esses modelos, *a priori*, assumem fontes exóticas para acordar a Gravidade de Einstein em escala cosmológica. Porém, a falta de comprovações empíricas sólidas da existência de tais fluidos ou partículas exóticas é comprometedora. E por esta razão torna-se razoável considerar rotas alternativas de trabalho. Isto é, modelos que não incluam componentes exóticas (escuras) para explicar, parcial ou totalmente, o setor escuro. Em particular, mudanças na própria descrição da gravidade é considerada. [45, 46, 47].

Assim, podemos afirmar que existem, essencialmente, dois paradigmas plausíveis na tentativa de explicar os vários comportamentos inesperados descritos acima:

- I) modelos que consideram a existência de componentes escuras e,
- II) teorias de gravidade que estendem (ou modificam) a Relatividade Geral de Einstein.

Para o presente trabalho, nos interessa a análise profunda dos modelos na segunda classe. No entanto, a seguir descreveremos brevemente o modelo paradigmático da classe que inclui componentes escuras, o chamado modelo “padrão” da cosmologia (ou Λ CDM).

2.2 O universo descrito por Λ CDM

Em concordância com a teoria do Big Bang, o modelo cosmológico padrão considera como elementos essenciais para sua construção e previsões cosmológicas a Matéria Escura Fria e a constante cosmológica (Λ), que dá sustento à Energia Escura. Nesse modelo, o perfil de densidade de energia associado à constante

cosmológica é descrito como

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.1)$$

que, naturalmente, satisfaz às condições para que o Universo se encontre em uma fase de expansão acelerada, isto é, $\rho_\Lambda + p_\Lambda = 0$.^a

Em razão disso, a utilização da constante cosmológica nos permite inferir que o tensor de energia-momento pode ser descrito considerando que o Universo é permeado por um fluido perfeito satisfazendo a equação de estado

$$p = \omega\rho \quad (2.2)$$

com $\omega = -1$. A rigor, como Λ é responsável por exercer a pressão negativa no Universo, compreender a natureza física de tal constante ainda é um problema, assim como a existência da Energia escura. Baseados no Efeito Casimir no espaço curvo e conceitos de gravitação quântica, se propõe em [48], que a constante cosmológica está intrinsecamente associada às flutuações quânticas do vácuo (estado de mínima energia), o que possibilita comparar os resultados teóricos (previsão) e cosmológicos (observações) do limite observacional em relação a densidade de energia do vácuo.

Embora o modelo Λ CDM esteja de acordo com os dados observacionais coletados até o presente, este modelo apresenta algumas inconsistências teóricas como, por exemplo, a densidade de energia do vácuo. Se a densidade de energia está muito próxima da densidade crítica do Universo, como apontam os dados observacionais, a relação (1.19) nos induz a inferir que a densidade de energia do vácuo possa ser estimada calculando a diferença entre a densidade crítica e a densidade de matéria. Este resultado, quando comparado com a interpretação da Teoria Quântica de Campos para a constante cosmológica[36, 43], dispõe que existe uma discrepância $\sim 1,2 \times 10^2$ vezes maior, adotando o limite da escala de Planck para a densidade de energia do vácuo estimada observacionalmente segundo o modelo Λ CDM. No limite Cromodinâmico a prática teórica-observacional ainda é

^a O motivo dessa relação é de origem termodinâmico: se temos uma certa quantidade de energia contida num volume V , um aumento dV desse volume requer que o sistema entregue trabalho ao meio, diminuindo sua energia em $dU = -PdV$. Agora, se esse volume estiver “cheio de vazio”, com densidade de energia ρ_Λ , a quantidade de energia total contida *umenta* com o aumento de volume (passa de $\rho_\Lambda V$ para $\rho_\Lambda(V + dV)$). Assim, $-PdV > 0$ e, portanto, a pressão deverá ser negativa. De fato $P = -\rho$.

inconsistente; apresentando uma discrepância ~ 40 vezes maior que as previsões observacionais. Este problema bem como a relevância (ou não) das componentes exóticas, passam a “filtrar” o modelo ideal para o atual cenário cosmológico.

2.3 Gravidade Modificada

Diversos modelos generalizam a teoria gravitacional incorporando novos graus de liberdade de origem geométrica como, por exemplo, quando – no contexto da Relatividade Geral – considera-se um campo escalar não-minimamente acoplado à gravidade (modelo de quintessência). Essa generalização não afeta em nada a Teoria de Gravidade de Einstein, pois a gravidade possui a mesma patologia física, ou melhor, segue com a mesma dinâmica. Todavia, podemos encontrar diversos tipos de teorias gravitacionais[49, 50], além da teoria de Einstein, que podem ser classificadas como teorias métricas e não-métricas.

De essas alternativas, entre as teorias métricas mais bem citadas na literatura se destacam: I) Bi-métrica e Escalar-Tensor, que admitem a existência de campos extras para descrever a dinâmica gravitacional; e Branans e Kaluza-Klein, que estendem as dimensões do espaço-tempo. E entre as não-métricas, podemos citar: II) Einstein-Cartan, que propõe uma conexão linear compatível com a métrica e não necessariamente simétrica; e métrico-afim, que admite que a conexão e a métrica são entidades independentes uma da outra. Neste formalismo, a torção pode ser considerada diferente de zero.

O formalismo métrico-afim é o de mais interesse para este trabalho, principalmente porque, para descrever a dinâmica gravitacional, trataremos com teorias construídas a partir do tensor de Ricci (*Ricci-based gravities* - RBGs) que são baseados nessa formulação.

2.3.1 Gravidade $f(R)$ (formalismo métrico)

Em Relatividade Geral a dinâmica do campo gravitacional é descrita pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, relacionado à curvatura do espaço-tempo, o escalar de Ricci

R . A ação correspondente^b é descrita por uma densidade escalar no quadrivolume, linear em R , a conhecida ação de Einstein-Hilbert

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.3)$$

que descreve o setor gravitacional puro. Para obtermos equações de campo que descrevam a dinâmica incluindo as fontes, consideraremos a ação completa: $S = S_G + S_M$.

Quando passamos de uma densidade lagrangeana linear no escalar de curvatura R para uma função arbitrária desse mesmo invariante ($R \rightarrow f(R)$), modificamos o funcional gravitacional expresso em (2.3), obtendo

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (2.4)$$

Logo, ao aplicarmos o princípio variacional ($\delta S_G = 0$) variando com respeito à métrica e fazendo algumas manipulações algébricas, tendo em mente que

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\beta (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta), \quad (2.5)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right. \\ \left. + f_R g^{\mu\nu} [\nabla_\beta (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde $f_R \equiv \frac{\partial f(R)}{\partial R}$, e a constante de acoplamento κ^2 (constante de Einstein), tem dimensões específicas para cada teoria gravitacional (na RG, $\kappa^2 = 8\pi G$).

Como passo seguinte nos interessa explicitar a dependência da conexão com a métrica. Após manipulações algébricas e renomear alguns índices, o segundo termo do lado direito da expressão (2.6) assume a forma mais simples

$$g^{\mu\nu} [\nabla_\beta (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta)] = (\nabla_\beta \nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_\beta \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} g^{\beta\alpha} \quad (2.7)$$

Para finalmente escrevermos a variação com respeito à métrica, iremos ignorar o termo nulo da equação. Para isto, devemos levar em conta as características que a

^b Observe que o termo acelerativo Λ não está sendo considerado.

métrica possui quando é descrita na forma covariante ou contravariante. Perceba que $\delta g^{\beta\alpha} = -g^{\beta\alpha}\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ e também que $-g^{\beta\alpha}\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -g^{\beta\alpha}(-g_{\mu\nu}\delta g^{\beta\alpha}g_{\beta\alpha})g^{\mu\nu}$. Introduzindo estas duas relações em 2.7, atentando-se aos índices, nos reduzimos a

$$\begin{aligned}\nabla_\beta\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}g^{\beta\alpha} - \delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}g^{\beta\alpha}) &= -\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g^{\beta\alpha} - g^{\beta\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha(-g_{\mu\nu}\delta g^{\beta\alpha}g_{\beta\alpha})g^{\mu\nu} \\ &= -\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g^{\beta\alpha} + g^{\beta\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha g_{\mu\nu}\delta g^{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}g^{\mu\nu} \\ &= -\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g^{\beta\alpha} + \nabla_\beta\nabla_\alpha g_{\beta\alpha}g^{\beta\alpha}\delta g^{\beta\alpha}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Definindo $\square = g^{\beta\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha$ e $\Delta_{\beta\alpha} = \nabla_\beta\nabla_\alpha - g_{\beta\alpha}\square$, concluímos que

$$g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) = -\Delta_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\quad (2.9)$$

Ao substituímos (2.7) por (2.9) em (2.6), temos que

$$\delta S_G = \frac{1}{\kappa^2} \int \sqrt{-g} d^4x \left[f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f_R \right] \delta g^{\mu\nu}\quad (2.10)$$

E como o princípio variacional deve ser satisfeito para qualquer variação da métrica, expressamos uma equação dinâmica:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f_R = 0\quad (2.11)$$

A equação (2.11) governa a dinâmica do sistema no vácuo. O caso com fontes requer incorporar o setor da matéria, descrito por uma ação da forma

$$\delta S_M = \int d^4x \delta(\sqrt{-g} L_M)$$

com o correspondente tensor energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Finalmente, obtemos a equação de campo completa para $f(R)$:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f_R = \kappa^2 T_{\mu\nu}.\quad (2.12)$$

Note que se substituimos $f(R) = R$, recuperamos as equações de campo da Relatividade Geral.

Por outro lado, enquanto na Teoria de Einstein

$$-R = \kappa^2 \text{tr}(T_{\mu\nu}), \quad (2.13)$$

onde o escalar de curvatura se relaciona linearmente com o tensor de energia momento, a equação (2.12) admite outras soluções se consideramos uma função arbitrária do escalar de curvatura.

No capítulo a seguir, iremos explorar o formalismo métrico-afim. Em particular, nos debruçaremos sobre duas teorias que pertencem a uma família de modelos baseados no tensor de Ricci (*Ricci-based Gravities* ou simplesmente, RBGs). Mais adiante, estudaremos detalhadamente suas equações de campo para mostrar que, mesmo quando a RG admite apenas a métrica como variável dinâmica, é possível efetuar uma transição (ou mapeamento) entre as RBGs e a RG. [51, 52]

3 Teorias de gravidade baseadas no tensor de Ricci (RBGs)

Observe que o transporte paralelo descrito na seção anterior, é implementado pela conexão de Levi-Civita, uma vez que existe apenas uma única escolha natural (ou compatível) com a métrica numa variedade riemanniana, onde a torsão ($S_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$) é considerada nula. Porém, se considerarmos que

$$(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) \delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \neq 0, \quad (3.1)$$

estamos alterando, nitidamente, a variação do tensor de Ricci. Diante disto, a expressão (2.5) passa a ser escrita como

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\beta} (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta}) - \nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\beta}) - 2S_{\mu\nu}^{\lambda} \delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \quad (3.2)$$

Nesta dissertação, trabalharemos com casos bastante gerais, pois estudaremos teorias gravitacionais nas quais assumiremos que a conexão e o tensor métrico são variáveis dinâmicas independentes. Nessa perspectiva, por possuírem propriedades geométricas bem distintas uma da outra, a análise das equações de campo deverá fornecer relações para a determinação de soluções tanto da métrica quanto da conexão.

3.1 Dinâmica das RBGs

Assim como no caso $f(R)$, ver-se-á que as teorias *EiBI* e $f(R, Q)$ são baseadas no tensor de curvatura de Ricci e que, em razão da conexão ser determinada dinamicamente (devido a independência entre as estruturas afins e a métrica), devemos definir claramente o seu papel no acoplamento com a matéria. Nos modelos que iremos considerar, é assumido que não existe acoplamento direto entre a conexão e os campos de matéria. Essa restrição tem o importante objetivo de preservar o Princípio de Equivalência de Einstein e evitar instabilidades na teoria. [53].

Ainda sobre essa classe de teorias, nos interessa fornecer uma “visão geral” acerca da estrutura métrico-afim utilizada, e de como esse formalismo se reflete nas equações de campo associadas à métrica e a conexão; (caso geral de teorias no formalismo de Palatini).

Consideremos a família de lagrangeana descrita por uma função arbitrária da métrica e o tensor de Riemann

$$L(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}) = (2\kappa^2)^{-1} f(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}). \quad (3.3)$$

Para o caso geral, a ação S é escrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(g_{\mu\nu}, R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi_M), \quad (3.4)$$

onde ψ_M representa os campos de matéria que agregam a contribuição de matéria nas equações de campo por meio da ação S_M .

Variando a ação (3.4), encontramos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \right] + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \psi_M). \quad (3.5)$$

O tensor de Ricci é determinado mediante contrações do tensor de Riemann ($R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}^{\alpha}$). Substituindo (3.2) na variação da ação (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \left[\nabla_{\mu} (\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) + 2S_{\mu\nu}^{\lambda} \delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \right] \right\} + \delta S_M \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como a variação com respeito a métrica fica evidente por ser $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrária, nos resta apenas trabalhar com o segundo termo de (3.6) (que diz respeito à variação da conexão). Por simplicidade notacional, definimos o tensor: $P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}}$, e então observamos que

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}} \delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \left[\nabla_{\mu} (\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \nabla_{\nu} (\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) + 2S_{\mu\nu}^{\lambda} \delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dado que $\delta\Gamma$ é um tensor e que, por Leibniz,

$$\left(\nabla_\mu \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha\right) \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu}\right) + \nabla_{\mu\nu} \left(\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu}\right),$$

a parte da ação que corresponde à variação da conexão, a expressão (3.7), é tal que

$$\begin{aligned} I_\Gamma = \int d^4x \left\{ \nabla_\mu \left(J^\mu \sqrt{-g} \right) - \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} \left[-\nabla_\mu \left(\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \right) + 2S_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que consideramos $J^{\mu\nu} \equiv P_\alpha^{\beta\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha$.

Tendo em vista que a derivada covariante de $(J^\mu \sqrt{-g})$ assume a forma

$$\nabla \left(J^\mu \sqrt{-g} \right) = \partial_\mu \left(\sqrt{-g} J^\mu \right) + 2S_{\sigma\mu}^\sigma \sqrt{-g} J^\mu, \quad (3.9)$$

reescrevemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} \left[-\nabla_\mu \left(\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \right) + 2S_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \right] = -\partial_\mu \left(\sqrt{-g} J^\mu \right) - 2S_{\mu\sigma}^\sigma P_\alpha^{\beta\mu\nu} + \\ + \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} \right) + 2S_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta\mu\nu} \end{aligned}$$

Introduzindo este resultado em (3.8), e considerando as propriedades de simetria dos índices, ficamos com

$$I_\Gamma = 2 \int d^4x \sqrt{-g} \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \left[2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} + S_{\sigma\lambda}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\lambda} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} \right) \right] \quad (3.10)$$

Portanto, a variação da ação geral com respeito a métrica e a conexão, expressão (3.6), nos leva a

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + 2\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha \left[2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} + S_{\sigma\lambda}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\lambda} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu \left(\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} \right) \right] \right\} + \delta S_M \end{aligned} \quad (3.11)$$

Com isto, discutiremos as equações de campo para métrica, onde a variação do setor de matéria aporta o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

bem como as equações correspondentes à conexão, para as quais o setor de matéria arbitrário aportará um tensor advindo da presença da conexão nesse setor, que denominamos $H_\alpha^{\nu\beta}$

$$\begin{aligned}\kappa^2 H_\alpha^{\nu\beta} &= -(\sqrt{-g})^{-1} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha} \\ &= -(\sqrt{-g})^{-1} \nabla_\mu (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) + S_{\sigma\gamma}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\gamma} + 2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Notando agora que a conexão pode ser descrita em função de sua parte simétrica $C_{\mu\nu}^\alpha$ e anti-simétrica $S_{\mu\nu}^\alpha$, segundo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = C_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) = C_{\mu\nu}^\alpha + S_{\mu\nu}^\alpha \quad (3.14)$$

Sendo assim, a derivada covariante da parte simétrica para um vetor qualquer A_ν é $\nabla_\mu^C A_\nu = \nabla_\mu A_\nu + S_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha$, se e somente se, $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - C_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha - S_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha$. Consequentemente, isto nos permite modificar o tensor de acoplamento conexão-matéria (3.13):

$$\begin{aligned}\kappa^2 H_\alpha^{\nu\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) + S_{\sigma\gamma}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\gamma} + 2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\nabla_\mu^C \sqrt{-g} - S_{\mu\alpha}^\alpha \sqrt{-g}) P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} + \sqrt{-g} (\partial_\mu P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} - C_{\mu\alpha}^\nu P_\nu^{\beta\mu\nu} - \right. \\ &\quad - S_{\mu\alpha}^\nu P_\nu^{\beta\mu\nu} + C_{\mu\alpha}^\nu P_\nu^{\beta\nu\mu} + S_{\mu\alpha}^\nu P_\nu^{\beta\nu\mu} + C_{\mu\nu}^\beta P_\alpha^{\nu\mu\nu} + S_{\mu\nu}^\beta P_\alpha^{\nu\mu\nu} - C_{\mu\nu}^\beta P_\alpha^{\nu\nu\mu} - \\ &\quad - S_{\mu\nu}^\beta P_\alpha^{\nu\nu\mu} + C_{\mu\gamma}^\mu P_\alpha^{\beta\gamma\nu} + S_{\mu\gamma}^\mu P_\alpha^{\beta\gamma\nu} - C_{\mu\gamma}^\nu P_\alpha^{\beta\gamma\mu} - S_{\mu\gamma}^\nu P_\alpha^{\beta\gamma\mu} + C_{\mu\eta}^\nu P_\alpha^{\beta\mu\eta} + \\ &\quad \left. + S_{\mu\eta}^\nu P_\alpha^{\beta\mu\eta} - C_{\mu\eta}^\mu P_\alpha^{\beta\nu\eta} - S_{\mu\eta}^\mu P_\alpha^{\beta\nu\eta}) \right] + S_{\sigma\gamma}^\nu P_\alpha^{\beta\sigma\gamma} + 2S_{\sigma\mu}^\sigma P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as propriedades de simetria, alguns termos anulam-se; e com isto chegamos a uma expressão mais simplificada para o termo de acoplamento conexão-matéria:

$$\kappa^2 H_\alpha^{\nu\beta} = -(\sqrt{-g})^{-1} \nabla_\mu^C (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) + S_{\mu\alpha}^\lambda P_\lambda^{\beta[\mu\nu]} - S_{\mu\lambda}^\beta P_\alpha^{\lambda[\mu\nu]}. \quad (3.15)$$

Observe que se assumirmos que a matéria não está acoplada à conexão, a relação (3.15) nos leva a ($\kappa^2 H_\alpha^{\nu\beta} = 0$):

$$(\sqrt{-g})^{-1} \nabla_\mu^C (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) = S_{\mu\alpha}^\lambda P_\lambda^{\beta[\mu\nu]} - S_{\mu\lambda}^\beta P_\alpha^{\lambda[\mu\nu]} \quad (3.16)$$

Isto nos permite trabalhar com o caso em que admitimos que a matéria está acoplada à conexão ou com o caso em que não admitimos o acoplamento. Uma revisão mais detalhada acerca das implicações que o acoplamento de matéria mínimo e não-mínimo oferecem a conexão pode ser feita em [54].

3.1.1 O papel da torsão.

Claramente, a conexão afim Γ não é do tipo Levi-Civita, isto é, suas componentes não são dadas pelos símbolos de Christoffel, além de não ser necessariamente simétrica.

Porém, como mostrado em [54] e, mais recentemente em [53], teorias cuja densidade lagrangiana não respeite a simetria projetiva (semelhante a transformações de calibre na conexão), estão sujeitas a instabilidades acarretadas pelos chamados “campos fantasmas” (*ghosts*). Portanto, as chamadas teorias RBGs, na verdade, são construídas com a parte *simétrica* do tensor de Ricci, para garantir essa simetria, essencial para uma descrição consistente.

Portanto, em todos os casos consideraremos o tensor de Ricci simetrizado $R_{(\mu\nu)}$ (mesmo que, por simplificar a notação, não coloquemos os parênteses em algumas derivações)

Convenientemente, a invariância projetiva garante que possamos sempre escolher um “calibre” no qual a torção se anula ($S_{\mu\nu}^\lambda = 0$), o qual nos permite trabalhar com mais facilidade, pois nos livra de algumas mazelas de cunho algébrico. Sendo assim, essa será nossa escolha padrão para trabalhar com as teorias da classe RBG. Contudo, na próxima seção, consideraremos a derivação no tratamento mais geral possível, isto é, não faremos qualquer escolha com relação à torção.

3.1.2 Equações de campo para a conexão

Exposto o caso geral, será conveniente trabalhar com a dependência explícita no tensor de Ricci, pois possibilitará desenvolver uma relação direta para as teorias RBG no tratamento e análise das equações de campo da conexão. Nesse sentido, como o tensor de Ricci é determinado pela contração do tensor de Riemann,

podemos reescrever o objeto definido em (3.5) na forma:

$$P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial f}{\partial R_{\beta\nu}} \delta_{\alpha}^{\mu}. \quad (3.17)$$

Assim, definimos $P^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial f}{\partial R_{\mu\nu}}$. Tendo em vista que o tensor $P^{\mu\nu}$ corresponde a derivada da densidade lagrangeana em função do tensor de Ricci vemos que

$$P_{\alpha}^{\beta[\mu\nu]} = P^{[\beta\nu]} \delta_{\alpha}^{\mu}, \quad (3.18)$$

e com isto, a expressão (3.16) assume a forma:

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{-1} \nabla_{\mu}^C \left(\sqrt{-g} P^{[\beta\nu]} \delta_{\alpha}^{\mu}\right) = S_{\mu\alpha}^{\lambda} P^{[\beta\nu]} \delta_{\lambda}^{\mu} - S_{\mu\lambda}^{\alpha} P^{[\beta\nu]} \delta_{\alpha}^{\mu} \quad (3.19)$$

Traçando em $\mu\alpha$ e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\frac{\nabla_{\mu}^C \left(\sqrt{-g} P^{[\beta\nu]}\right)}{\sqrt{-g}} = S_{\alpha\lambda}^{\nu} P^{\beta\lambda} - S_{\alpha\lambda}^{\beta} P^{\nu\lambda} - S_{\alpha\lambda}^{\lambda} P^{[\beta\nu]} + \frac{S_{\lambda\sigma}^{\sigma}}{3} \left(\delta_{\alpha}^{\nu} P^{\beta\lambda} - \delta_{\alpha}^{\beta} P^{\nu\lambda}\right) \quad (3.20)$$

ou, semelhantemente, para a parte simétrica do tensor P:

$$\frac{\nabla_{\mu}^C \left(\sqrt{-g} P^{\beta\nu}\right)}{\sqrt{-g}} = S_{\alpha\lambda}^{\nu} P^{[\beta\lambda]} - S_{\alpha\lambda}^{\beta} P^{[\nu\lambda]} - S_{\alpha\lambda}^{\lambda} P^{\beta\nu} + \frac{S_{\lambda\sigma}^{\sigma}}{3} \left(\delta_{\alpha}^{\nu} P^{\beta\lambda} - \delta_{\alpha}^{\beta} P^{\nu\lambda}\right) \quad (3.21)$$

As expressões (3.20) e (3.21) sugerem que podemos considerar uma descrição alternativa para a conexão em que esta é escrita em termos de uma nova variável: $\tilde{\Gamma}$. Por considerarmos a torsão, a simetria de $\tilde{\Gamma}$ se relaciona com Γ , de tal forma que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3} \left(\delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma}\right)$. Isto implica que

$$\tilde{C}_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{3} \left(\delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = S_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3} \left(\delta_{\nu}^{\lambda} S_{\sigma\mu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\lambda} S_{\sigma\nu}^{\sigma}\right)$$

Desta forma, introduzindo as propriedades de simetria da conexão $\tilde{\Gamma}$ em (3.20), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{\mu}^{\tilde{C}} \left(\sqrt{-g} P^{[\beta\nu]}\right)}{\sqrt{-g}} &= \left(\tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\nu} g^{\beta\kappa} - \tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\beta} g^{\nu\kappa}\right) g^{\lambda\rho} P_{\kappa\rho} \\ &+ \frac{2}{3} \delta_{\lambda}^{\lambda} S_{\sigma\alpha}^{\sigma} \left(g^{\beta\nu} - g^{\nu\beta}\right) \left(g^{\kappa\rho} - g^{\rho\kappa}\right) P_{[\kappa\rho]} \\ &= \left(\tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\nu} g^{\beta\kappa} - \tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\beta} g^{\nu\kappa}\right) g^{\lambda\rho} P_{\kappa\rho}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analogamente, para a expressão (3.21) concluímos que

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{-1} \nabla_{\mu}^{\tilde{C}} \left(\sqrt{-g} P^{\beta\nu}\right) = \left(\tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\nu} g^{\beta\kappa} - \tilde{S}_{\alpha\lambda}^{\beta} g^{\nu\kappa}\right) g^{\lambda\rho} P_{[\kappa\rho]}. \quad (3.23)$$

Como a dependência das equações é referente apenas à conexão, quando simetizamos o tensor de Ricci ($R_{[\beta\nu]} = 0$), garantimos a existência de um volume associado à conexão Γ [55]; por consequência, o volume deve ser definido por um tensor cuja solução de (3.23) é não-nula. Recorde que para o presente caso consideramos que $\tilde{C}_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda}$ e, como garantimos a simetrização do tensor de Ricci, $P_{[\kappa\rho]} = 0$ e a torsão $\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda}$ desaparece. Desse modo, $\nabla_{\mu}^{\tilde{C}} \rightarrow \nabla_{\mu}^{\Gamma} = \nabla_{\mu}^C$, logo:

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{-1} \nabla_{\mu}^{\Gamma} \left(\sqrt{-g} P^{\beta\nu}\right) = 0 \quad (3.24)$$

Uma vez concluído o caso geral, podemos determinar a forma do tensor $P^{\beta\nu}$ dos casos mais relevantes das classes de teorias RBG e obtermos as equações de campo para as lagrangeanas em questão, de acordo com as equações de campo gerais

$$\frac{\partial L_G}{\partial g^{(\mu\nu)}} - \frac{L_G}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

$$\nabla_{\mu}^{\Gamma} \left(\sqrt{-g} P^{\beta\nu}\right) = 0 \quad (3.26)$$

3.1.3 Métrica auxiliar e matriz deformação

Para estabelecermos uma relação de volume com (3.26), a princípio, devemos associá-la a um tensor simétrico. Optando pela escrita

$$\nabla_{\mu}^{\Gamma} \left(\sqrt{-g} g^{\beta\lambda} P_{\lambda}^{\nu}\right) = 0 \quad (3.27)$$

e considerando um tensor simétrico de *rank*-2 $q_{\mu\nu}$ satisfazendo

$$\nabla_{\mu} \left(\sqrt{-q} q^{\beta\nu}\right) = 0 \quad (3.28)$$

Logo, de acordo com (3.28), ficamos com

$$\sqrt{-g} g^{\beta\lambda} P_{\lambda}^{\nu} = \sqrt{-q} q^{\beta\nu}, \quad (3.29)$$

A grande vantagem da introdução do tensor $q_{\mu\nu}$ é que, segundo (3.28), a conexão Γ será do tipo Levi-Civita com respeito a q , isto é, suas componentes serão dadas pelos símbolos de Christoffel contruídos com uma métrica $q_{\mu\nu}$.

Isto soluciona formalmente a equação da conexão. Porém, na prática não temos a relação explícita entre a conexão Γ e a métrica física $g_{\mu\nu}$. Portanto, é conveniente propor uma relação entre as métricas $g_{\mu\nu}$ e $q_{\mu\nu}$; nesse sentido, consideramos a relação que segue:

$$q_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha} \Omega^\alpha{}_\nu, \quad (3.30)$$

onde $\Omega^\alpha{}_\nu$ é uma matriz que deverá ser determinada a partir das equações. É importante destacarmos aqui o grande avanço desse passo: de temos transformado uma equação diferencial para Γ em uma equação algébrica para entre g e q que, como veremos, será resolvida através de uma equação também algébrica para a matriz de deformação Ω .

Será útil mais tarde percebermos que o determinante da matriz $\Omega^\alpha{}_\nu$ vem dado pela razão dos determinantes em (3.29) de tal forma que $\frac{g}{q} = |\hat{\Omega}|^{-1/2}$.

Por questões de completeza, se faz necessário descrever o tensor de Ricci associado as métricas g - q . Recorde que a parte simétrica de $\tilde{\Gamma}$ coincide com a conexão Levi-Civita

$$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma} = q^{\alpha\rho} [\beta\gamma, \rho] \quad (3.31)$$

e no caso em que seja viável trabalhar com a métrica $g_{\mu\nu}$, relacionamos os símbolos de Christoffel do tensor $q_{\mu\nu}$ (também conhecido como *métrica auxiliar*) com a conexão de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$ pelo tensor (de projeção livre)

$$A^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}, \quad (3.32)$$

para obtermos

$$A^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{q^{\alpha\rho}}{2} \left(\nabla_\mu^{\tilde{C}} q_{\rho\nu} + \nabla_\nu^{\tilde{C}} q_{\rho\mu} - \nabla_\rho^{\tilde{C}} q_{\mu\nu} \right). \quad (3.33)$$

Como consequência direta desse resultado, o tensor de Riemann com respeito aos símbolos de Christoffel é descrito por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\tilde{C}) + \nabla_\mu^{\tilde{C}} A^\alpha{}_{\nu\beta} - \nabla_\nu^{\tilde{C}} A^\alpha{}_{\mu\beta} + A^\lambda{}_{\nu\beta} A^\alpha{}_{\mu\lambda} - A^\lambda{}_{\mu\beta} A^\alpha{}_{\nu\lambda}, \quad (3.34)$$

o que nos permite descrever o tensor de Ricci, se assim for conveniente, na métrica $g_{\mu\nu}$ com a derivada covariante da conexão de Levi-Civita.

Descrito o tensor de Riemann, basta contrairmos a relação para determinarmos o tensor de Ricci, tal que

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(\tilde{C}) + \nabla_{[\mu}^{\tilde{C}} A_{\nu]} + A_{\nu\gamma}^{\lambda} A_{\mu\lambda}^{\gamma} - A_{\mu\rho}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho} \quad (3.35)$$

Por outro lado, em acordo com (3.24) e (3.31), quando $\tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, o tensor de Ricci simetrizado em Christoffel coincide com a conexão de Levi-Civita

$$R_{(\mu\nu)}(\Gamma) = R_{(\mu\nu)}(\tilde{C}) \quad (3.36)$$

3.2 Teoria *EiBI* (*Eddington-inspired Born-Infeld*)

A Teoria da Relatividade Geral apresenta, a grosso modo, um problema teórico de extrema importância; prevê a singularidade do espaço-tempo para altas curvaturas[56]. Nesta temática, a teoria de gravidade modificada inspirada na gravidade de Eddington “*Eddington-inspired Born-Infeld*” (*EiBI*) propõe soluções atraentes que, em certos casos, resolvem a singularidade. Isto é, apresenta soluções de objetos compactos sem a existência de singularidade. Tais soluções só aparecem na medida em que consideramos o acoplamento de campos de matéria não-lineares[57], mesmo que a gravidade *EiBI*, no vácuo, seja equivalente à teoria de Einstein.

Para obtermos as equações de campo para a teoria *EiBI*, dentro do formalismo métrico-afim, consideremos a ação

$$S_{EiBI} = \frac{1}{\epsilon\kappa^2} \int d^4x \left(\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda\sqrt{-g} \right), \quad (3.37)$$

onde $\kappa^2 \equiv 8\pi G/c^4$ é a constante de acoplamento no regime da teoria de Einstein, ϵ é um parâmetro pequeno com dimensões de comprimento ao quadrado, que determina o quanto se afasta a teoria *EiBI* da RG; enquanto o parâmetro λ define uma constante cosmológica efetiva dada por $\Lambda_{eff} = (\lambda - 1)/\epsilon$.

Como destacado na seção anterior, resulta ser conveniente introduzir uma métrica auxiliar q , tal que a conexão satisfaça a equação de Levi-Civita (3.28), ou seja, que q seja compatível com a conexão Γ . No caso da teoria *EiBI*, a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ coincide com o argumento da raiz quadrada da ação (3.37) [58]. Assim,

$$q_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \epsilon R_{(\mu\nu)}. \quad (3.38)$$

Introduzindo a deformação matricial $\Omega_\nu^\rho \equiv \delta_\nu^\rho + g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu}$, tendo em vista que $q_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \Omega_\nu^\rho$, resulta que

$$\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|} = \sqrt{-|q_{\mu\nu}|} = \sqrt{-|g_{\mu\rho}|} \sqrt{|\Omega^\rho{}_\nu|}. \quad (3.39)$$

Daí, segue que $\det \Omega^\rho{}_\nu = \hat{\Omega}$, logo, da equação (3.37), ficamos com

$$S_{EiBI} = \frac{1}{\epsilon\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda \right). \quad (3.40)$$

Desta forma, identificamos que

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda \equiv \frac{\partial f}{\partial R_{\mu\nu}} \equiv P^{\mu\nu},$$

o que nos permite reproduzir os resultados do caso geral.

Recorde que não nos interessa o caso em que existe o acoplamento de matéria à conexão; variando a ação (3.40), vemos que as equações de campo para a lagrangeana em questão, de acordo com (3.25) e (3.26) são

$$\sqrt{-q}q^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = -\epsilon\kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (3.41)$$

$$\nabla_\alpha (\sqrt{-q}q^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.42)$$

Note que a deformação referente a métrica auxiliar e a métrica é determinada pelo tensor energia-momento, como destaca (3.41). No que segue, considerando (3.38) e (3.41), ao modo que $R^\mu{}_\nu(q) \equiv q^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$, escrevemos o tensor de Ricci

$$R^\mu{}_\nu(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left(\frac{|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda}{\epsilon\kappa^2} \delta^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu \right) \quad (3.43)$$

em termos da métrica q . Tomando a relação para o tensor de Ricci descrito em termos da conexão de Levi-Civita de q , (3.36) e traçando (3.43), “fabricamos” uma relação similar para o tensor de Einstein, obtendo:

$$q^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} \equiv G^\mu{}_\nu(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^\mu{}_\nu - \left(L_G + \frac{T}{2} \right) \delta^\mu{}_\nu \right], \quad (3.44)$$

onde, para o presente caso, $L_G = (|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda)/\epsilon\kappa^2$ representa a lagrangiana para a gravidade *EiBI*. Por complemento, observe que $T^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}$, uma vez que a matéria deverá seguir a geodésica da métrica g .

3.3 Teoria $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$

Na literatura podemos encontrar diversos trabalhos sobre gravidade modificada, que dão especial atenção à Gravidade $f(R)$. Contudo, podemos explorar teorias mais gerais, por exemplo, um modelo descrito por uma ação da forma

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, Q) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M), \quad (3.45)$$

Sua variação no formalismo métrico-afim apresenta os seguintes termos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[f(R, Q) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (f_R \delta R + f_Q \delta Q) \right] + \delta S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M), \quad (3.46)$$

onde vamos considerar que

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{(\mu\nu)} \quad \text{e} \quad Q \equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)}, \quad (3.47)$$

onde $R_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha})$. E, então, podemos escrever as variações de forma explícita:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = +\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.48)$$

$$\delta R = R_{(\mu\nu)} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{(\mu\nu)} \quad (3.49)$$

$$\delta Q = 2g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)} \delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{(\nu\beta)} \delta R_{(\mu\alpha)} \quad (3.50)$$

Substituindo essas relações, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(R, Q) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (f_R \delta R + f_Q \delta Q) = & \sqrt{-g} \left[f_R g^{\mu\nu} + 2f_Q g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{(\alpha\beta)} \right] \delta R_{(\mu\nu)} \\ & + \sqrt{-g} \left[f_R R_{(\mu\nu)} + 2f_Q g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Note que, pela forma da contração dos índices μ e ν e a simetria do $R_{\alpha\beta}$, podemos escrever

$$\left[f_R g^{\mu\nu} + 2f_Q g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{(\alpha\beta)} \right] \delta R_{(\mu\nu)} = \left[f_R g_{\alpha\beta} + 2f_Q R_{(\alpha\beta)} \right] g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\mu\nu} \quad (3.52)$$

Para termos a variação explícita do setor gravitacional em termos das variáveis $g_{\mu\nu}$ e Γ nos resta explicitarmos $\delta R_{\mu\nu}(\Gamma)$. Da relação (3.2) a variação da ação fica

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left[f_R R_{(\mu\nu)} + 2f_Q g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \left[f_R g_{\alpha\beta} + 2f_Q R_{(\alpha\beta)} \right] g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(\delta_\rho^\lambda \delta_\nu^\theta - \delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\theta \right) \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\theta\mu}^\rho) \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$ é o aporte da variação do setor de matéria, δS_m .

Integrando por partes a derivada da conexão (e desprezando termos de superfície) obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left[-\frac{f}{2} g_{\mu\nu} + f_R R_{(\mu\nu)} + 2f_Q g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. - \nabla_\lambda \left(\sqrt{-g} \left(\delta_\rho^\lambda \delta_\nu^\theta - \delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\theta \right) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[f_R g_{\alpha\beta} + 2f_Q R_{(\alpha\beta)} \right] \right) \delta \Gamma_{\theta\mu}^\rho \right\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

Portanto, as equações de movimento para a Gravidade $f(R, Q)$ que obtemos ao impor $\delta S = 0$ assumem a forma

$$f_R R_{(\mu\nu)} + 2f_Q g^{\alpha\beta} R_{(\mu\alpha)} R_{(\nu\beta)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.55)$$

$$-\nabla_\lambda \left(\sqrt{-g} \left(\delta_\rho^\lambda \delta_\nu^\theta - \delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\theta \right) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[f_R g_{\alpha\beta} + 2f_Q R_{(\alpha\beta)} \right] \right) = 0 \quad (3.56)$$

Aplicando o traço em θ e ρ na equação (3.56) chegamos a

$$\nabla_\rho \left[\sqrt{-g} g^{\nu\beta} \left(f_R \delta_\beta^\mu + 2f_Q g^{\mu\alpha} R_{(\alpha\beta)} \right) \right] = 0 \quad (3.57)$$

Nesse ponto, como no caso geral, é conveniente definir o tensor

$$\sqrt{-q} q^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\nu\beta} \left[f_R \delta_\beta^\mu + 2f_Q g^{\mu\alpha} R_{(\alpha\beta)} \right] \quad (3.58)$$

de tal modo que $\nabla_\rho \left(\sqrt{-q} q^{\nu\beta} \right) = 0$. Comparando (3.58) com (3.29), identificamos que

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} (\Omega^{-1})^\mu{}_\beta = f_R \delta_\beta^\mu + 2f_Q g^{\mu\alpha} R_{(\alpha\beta)}. \quad (3.59)$$

Contraindo a equação da métrica (3.55) com a métrica inversa $g^{\mu\sigma}$ temos

$$f_R g^{\mu\sigma} R_{(\sigma\nu)} + 2f_Q g^{\mu\sigma} R_{(\sigma\alpha)} g^{\alpha\beta} R_{(\nu\beta)} - \frac{f}{2} \delta_\nu^\mu = \kappa^2 T_\nu^\mu \quad (3.60)$$

Invertendo a definição (3.30) vemos que $g^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\rho q^{\rho\nu}$, logo $g^{\mu\sigma} R_{(\sigma\nu)} = \Omega^\mu{}_\rho q^{\rho\sigma} R_{(\sigma\nu)}$.

Substituindo essa expressão no lado esquerdo de (3.60) obtemos

$$f_R R_\nu^\beta + 2f_Q R_\alpha^\beta \Omega^\alpha{}_\theta R_\nu^\theta = (\Omega^{-1})^\beta{}_\mu \left(\kappa^2 T_\nu^\mu + \frac{f}{2} \delta_\nu^\mu \right) \quad (3.61)$$

Onde $R_\nu^\rho(q) \equiv q^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu}(q)$. Calculamos o traço dessa última expressão

$$f_R R + 2f_Q \Omega^\alpha{}_\theta R_\beta^\theta R_\alpha^\beta = (\Omega^{-1})^\beta{}_\mu \left(\kappa^2 T_\beta^\mu + \frac{f}{2} \delta_\beta^\mu \right) \quad (3.62)$$

Por outro lado, ao considerarmos o produto $(R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha})$ em (3.58), nos atentando ao resultado de (3.59), estamos na verdade explicitando o tensor de Ricci em função da métrica auxiliar (a correspondente para o mapeamento); o que nos permite inferir que $q^{\mu\beta} R_{\beta\nu} \equiv R_\nu^\mu(q)$. Com isto, note que

$$(R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha}) (\Omega^{-1})^\mu{}_\beta = q^{\mu\nu} g_{\beta\nu} (R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha}) = q^{\mu\beta} R_{\beta\nu} = R_\nu^\mu(q) \quad (3.63)$$

Este resultado nos permite relacionar (3.59) com (3.61) desde que descritos pela métrica auxiliar e a matriz correspondente (como feito anteriormente para obter (3.60)). Isto é, tomando o produto

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} \left(R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha} \right) (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} = |\hat{\Omega}|^{1/2} R_{(\alpha\nu)} \Omega_{\sigma}^{\beta} q^{\sigma\alpha} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu},$$

a relação (3.59) fica como

$$\begin{aligned} f_R \delta_{\beta}^{\mu} \left(R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha} \right) + 2f_Q g^{\mu\alpha} R_{(\alpha\beta)} \left(R_{(\alpha\nu)} g^{\beta\alpha} \right) &= |\hat{\Omega}|^{1/2} R_{(\alpha\nu)} \Omega_{\sigma}^{\beta} q^{\sigma\alpha} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} \\ f_R \delta_{\beta}^{\mu} R_{(\alpha\nu)} \Omega_{\sigma}^{\beta} q^{\sigma\alpha} + 2f_Q \Omega_{\theta}^{\mu} q^{\theta\alpha} R_{(\alpha\beta)} R_{(\alpha\nu)} q^{\sigma\alpha} \Omega_{\sigma}^{\beta} &= |\hat{\Omega}|^{1/2} R_{(\alpha\nu)} \Omega_{\sigma}^{\beta} q^{\sigma\alpha} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} \\ f_R \Omega_{\sigma}^{\mu} R_{\nu}^{\sigma}(q) + 2f_Q \Omega_{\theta}^{\mu} R_{\beta}^{\theta}(q) \Omega_{\sigma}^{\beta} R_{\nu}^{\sigma}(q) &= |\hat{\Omega}|^{1/2} R_{\nu}^{\sigma}(q) \Omega_{\sigma}^{\beta} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} \\ \Rightarrow \Omega_{\beta}^{\mu} \left(f_R R_{\nu}^{\beta}(q) + 2f_Q R_{\alpha}^{\beta}(q) \Omega_{\theta}^{\alpha} R_{\nu}^{\theta}(q) \right) &= |\hat{\Omega}|^{1/2} R_{\nu}^{\sigma}(q) \Omega_{\sigma}^{\beta} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} \quad (3.64) \end{aligned}$$

Observe que relacionando (3.63) e (3.64), concluímos que

$$R_{\nu}^{\mu}(q) = \frac{\Omega_{\beta}^{\mu}}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left(f_R R_{\nu}^{\beta}(q) + 2f_Q R_{\alpha}^{\beta}(q) \Omega_{\theta}^{\alpha} R_{\nu}^{\theta}(q) \right) = R_{\nu}^{\sigma}(q) \Omega_{\sigma}^{\beta} (\Omega^{-1})_{\beta}^{\mu} \quad (3.65)$$

Desta forma, relacionamos o tensor de Ricci (modificado) com o tensor energia-momento expresso em (3.61), tal que

$$R_{\nu}^{\mu}(q) = \frac{\Omega_{\beta}^{\mu}}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left(f_R R_{\nu}^{\beta}(q) + 2f_Q R_{\alpha}^{\beta}(q) \Omega_{\theta}^{\alpha} R_{\nu}^{\theta}(q) \right) \quad (3.66)$$

$$= |\hat{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \left(\kappa^2 T_{\nu}^{\mu} + \frac{f}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \right). \quad (3.67)$$

Note que $G_{\nu}^{\mu}(q) \equiv q^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu}$ e, em virtude desse último resultado, como a forma da equação de Einstein é bem conhecida, é fácil obter $G_{\nu}^{\mu}(q)$. Assim,

$$G_{\nu}^{\mu}(q) = \frac{\kappa^2}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T_{\nu}^{\mu} - \left(L_G + \frac{T}{2} \right) \delta_{\nu}^{\mu} \right], \quad (3.68)$$

O que temos conferido nessa seção é que nossa expressão satisfaz a equação geral para as teorias da classe RBG, com setor geométrico com a lagrangeana $L_G = f(R, Q)/2\kappa^2$.

4 Correspondência RBG-RG

Das equações gerais do formalismo métrico-afim, (3.25) e (3.26), percebe-se ainda que, mesmo que a função seja específica à teoria, a forma das equações gerais não mudam. O mesmo acontece com o tensor de Einstein descrito em função da métrica auxiliar q – como destacado nas teorias *EiBI* e $f(R, Q)$. A importância de se obter a forma geral das equações do movimento e tensor de Einstein reside na questão de que as RBGs são descritas por uma família específica de lagrangeanas.

Mediante as equações do formalismo métrico-afim é possível estabelecer uma relação de correspondência entre as teorias cuja família de lagrangeanas dependem do tensor de Ricci simetrizado e, por construção, com dependência somente da conexão, como nos assegura (3.35) e (3.36). Isto é, a lagrangeana das teorias RBG assume a forma $L_G [g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma)]$ e, como mostraremos, a dinâmica destas se relacionam com a dinâmica da RG de tal modo que possa ser feita uma transição entre essas classes de teorias.

Assim, podemos encontrar trabalhos[51, 52, 1] que executam o mapeamento de campos para as teorias $f(R)$ e *EiBI*, e fazem a devida análise das soluções. Tais trabalhos consistem, principalmente, na aplicação do método de mapeamento no caso de simetria esférica, da RG para as RBG (teorias $f(R)$ e *EiBI* com distintos tipos de matéria), para a obtenção de novas soluções. Nas teorias de Gravidade $f(R)$ e *EiBI* foi possível obter novos objetos compactos com características, a grosso modo, similar aos Buracos Negros (Buracos de minhoca, membranas de buraco de minhoca, bolas compactas, etc), em muitos dos casos, sem a presença de horizontes.

Nos interessa aqui apresentar uma visão detalhada dos conceitos básicos do método de mapeamento, bem como discutir os pontos principais do método aplicado às teorias $f(R)$ e *EiBI* para que possamos construir o arquétipo desejado e em seguida reproduzir, mais detalhadamente, o mapeamento em gravidade $f(R)$ e fazer comparações com a gravidade $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$ para uma perspectiva futura de aplicação.

4.1 Conceitos fundamentais

Como produzimos o tensor de Einstein, (3.44) e (3.68), e este é descrito em função da métrica- q , nos interessa remover a dependência da métrica- g em L_G , T^μ_ν e $\hat{\Omega}$, de tal forma que todo o lado direito da expressão possa ser interpretado como um tensor energia-momento de um outro campo escalar acoplado à gravidade descrita por q . Assim, fixando a dependência na métrica auxiliar, inferimos que deveremos ter

$$\tilde{T}^\mu_\nu(q) \equiv q^{\mu\alpha}\tilde{T}_{\alpha\nu} = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^\mu_\nu - \left(L_G + \frac{T}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right], \quad (4.1)$$

para, convenientemente, obtermos

$$G^\mu_\nu(q) = \kappa^2 \tilde{T}^\mu_\nu. \quad (4.2)$$

Por consistência, a identidade de Bianchi deverá ser satisfeita para $\nabla^\Gamma_\mu G^\mu_\nu(q) = 0$, o que de fato ocorre em fontes de matéria minimamente acopladas, como por exemplo, campos escalares[52], os fluidos anisotrópicos[51] e/ou em campos de matéria eletromagnética[59].

As equações (4.1) e (4.2) sugerem que existe uma relação entre a dinâmica do setor de matéria das RBG com RG da forma:

Tensor energia-momento	Teoria
$T^\mu_\nu(g)$	RBG (não-métrica)
$\tilde{T}^\mu_\nu(q)$	RG (métrica)

Tabela 1 – Relação do setor de Matéria

A relação descrita na tabela só é possível devido a deformação matricial definida outrora em (3.30), que a métrica e a métrica auxiliar ($q_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^\alpha_\nu$). E ainda, pelo fato de que a matriz de deformação depende essencialmente do conteúdo de matéria, sua estrutura estará relacionada com a do tensor energia-momento. Logo, para a implementação do mapeamento, nos é de fundamental importância obter uma solução de Ω^μ_ν que, naturalmente, dependerá da teoria RBG considerada.

4.2 Mapeamento com campos escalares

Para abordarmos o procedimento do mapeamento, consideraremos o caso de um campo escalar real descrito por uma lagrangiana arbitrária $P(X, \phi)$, onde o termo cinético $X = g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi$ e pode existir um potencial escalar $V(\phi)$, de tal forma que o setor de matéria é descrito pela ação

$$S_m(X, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} P(X, \phi). \quad (4.3)$$

Note que essa ação é independente da conexão, como proposto para as teorias de gravidade tipo RGB. Assim, variando a ação (4.3), ficamos com uma equação relativa à métrica:

$$\delta S_m(X, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} P(X, \phi) + \sqrt{-g} P_X \delta g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi \right) \quad (4.4)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\nu} g_{\alpha\nu} \left(P_X g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \frac{P(X, \phi)}{2} \right), \quad (4.5)$$

que nos leva ao tensor energia-momento

$$T^\mu{}_\nu = P_X X^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} P(X, \phi) \delta^\mu{}_\nu. \quad (4.6)$$

Onde $P_X \equiv dP/dX$ e $X^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi$. Recorde que $\Omega^\mu{}_\nu$ pode ser escrito como uma função (não linear) do tensor $T^\mu{}_\nu$ – o que possibilita o mapeamento entre as RBGs e a RG. Deste modo, assumimos que a matriz $\Omega^\mu{}_\nu$ possa ser escrita em uma série de potências do tensor energia-momento descrito em (4.6):

$$\Omega^\mu{}_\nu = a_0(X, \phi) \delta^\mu{}_\nu + a_1(X, \phi) T^\mu{}_\nu + a_2(X, \phi) T^\mu{}_\alpha T^\alpha{}_\nu + \dots, \quad (4.7)$$

onde $a_{1,2,\dots,n}(X, \phi)$ são funções dos campos de matéria, no presente caso, do campo escalar.

Uma grande simplificação dessa expressão é possível graças a uma propriedade característica do termo cinético, que é idempotente. Isto é, a aplicação de $X^\mu{}_\nu$ em si mesmo, no sentido que $\hat{X}^n = X^{n-1} \hat{X}$, onde $\hat{X} \equiv X^\mu{}_\nu$ é o traço. Logo, qualquer potência do tensor energia-momento em (4.6) pode ser escrita como uma combinação linear do objeto $X^\mu{}_\nu$ e $\delta^\mu{}_\nu$ [52, 60]. Daí, podemos reescrever (4.7) como uma combinação linear mais simples

$$\Omega^\mu{}_\nu = C(X, \phi) \delta^\mu{}_\nu + D(X, \phi) X^\mu{}_\nu. \quad (4.8)$$

As funções $C(X, \phi)$ e $D(X, \phi)$ dependem, explicitamente, do modelo utilizado para descrever a dinâmica gravitacional.

Agora, nos interessa eliminar, completamente, a dependência em $g_{\mu\nu}$ a favor da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria. Tendo em mente a relação (3.30), é possível escrever uma relação similar para os campos escalares: $g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi = q^{\mu\alpha}\Omega_\alpha^\lambda\partial_\lambda\phi$. Isto implica que a deformação matricial associada às métricas $g_{\mu\nu}$ e $q_{\mu\nu}$, têm a forma

$$\Omega_\alpha^\lambda\partial_\lambda\phi = (C + DX)\partial_\alpha\phi. \quad (4.9)$$

Com isto, da equação (4.8), relacionamos o objeto X^μ_ν à métrica $q_{\mu\nu}$, com o propósito de substituímos pelo lado direito de (4.9) e assim

$$g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi = (C + DX)q^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi, \quad (4.10)$$

mas como definimos $X^\mu_\nu \equiv g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi$, e por sua vez, definiremos um objeto Z^μ_ν para o campo associado a métrica- q , tal que $Z^\mu_\nu \equiv q^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi$, obtemos

$$X^\mu_\nu = (C + DX)Z^\mu_\nu \rightarrow Z = (C + DX)^{-1}X \quad (4.11)$$

$Z \equiv Z^\mu_\nu$ é o traço. Note que de (4.11) podemos ter $X = X(Z, \phi)$ como também $Z = Z(X, \phi)$.

Neste ponto, observando o suposto da relação (4.2) isto é, que existe um campo escalar acoplado à RG, descrito por uma densidade lagrangeana, $K = K(Z, \phi)$, minimamente acoplada à métrica $q_{\mu\nu}$, na forma da

$$\tilde{S}_m(Z, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-q} K(Z, \phi), \quad (4.12)$$

que, aplicando o princípio variacional, nos leva a

$$\begin{aligned} \delta\tilde{S}_m(Z, \phi) &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ [\delta\sqrt{-q}]K(Z, \phi) + \sqrt{-q}[\delta K(Z, \phi)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-q}}{2} q_{\mu\nu} \delta q^{\mu\nu} K(Z, \phi) + \sqrt{-q} K_Z \delta Z \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

com $K_Z \equiv dK/dZ$. E como $\delta Z^\mu_\nu \delta^\nu_\mu \equiv \delta q^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi \delta^\nu_\mu$; fazendo $\nu \rightarrow \alpha$ no primeiro termo de (4.13), obtemos

$$\delta\tilde{S}_m(Z, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-q} q_{\mu\alpha} \delta q^{\mu\alpha} \left[K_Z q^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi \delta^\nu_\mu - \frac{K(Z, \phi)}{2} \right]. \quad (4.14)$$

Logo, o tensor energia-momento referente a $\tilde{S}_m(Z, \phi)$, e que deverá vir satisfazer (4.1), é escrito como

$$\tilde{T}^\mu_\nu = K_Z Z^\mu_\nu - \frac{K(Z, \phi)}{2} \delta^\mu_\nu, \quad (4.15)$$

portanto, para explicitar a correspondência (o mapeamento) entre as RBG acoplada à ação de matéria escalar $S_m(X, \phi)$ e RG acoplado a outro campo escalar descrito pela ação $\tilde{S}_m(Z, \phi)$, basta introduzirmos a relação $T = T(\tilde{T})$ em (4.2). Assim, recorrendo a equação (4.6), vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\mu_\nu &= \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[T^\mu_\nu - \left(L_G + \frac{T}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right] \\ &= \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[P_X X^\mu_\nu - \frac{P(X, \phi)}{2} \delta^\mu_\nu - \left(L_G + \frac{X P_X - 2P}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right] \\ &= \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left[P_X X^\mu_\nu - \left(L_G + \frac{X P_X - P}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Isto implica que, de acordo com (4.11) e (4.16), podemos descrever a forma da correspondência entre o setor de matéria das densidades $P(X, \phi)$ e $K(Z, \phi)$. Para isso, nos interessa agora verificar a evolução das equações de campo com respeito a matéria associada a $P(X, \phi)$ e a $K(Z, \phi)$, que no caso da RG, deverá cumprir as equações de Bianchi. Das eqs. (4.6) e (4.15), encontramos

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} T^\mu_\nu) = 0 = \partial_\mu (\sqrt{-g} P_X g^{\mu\alpha} \partial_{\alpha\phi}) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} P_\phi, \quad (4.17)$$

e também

$$\partial_\mu (\sqrt{-q} \tilde{T}^\mu_\nu) = 0 = \partial_\mu (\sqrt{-q} K_Z q^{\mu\alpha} \partial_{\alpha\phi}) - \frac{1}{2} \sqrt{-q} K_\phi, \quad (4.18)$$

respectivamente. Com estes resultados, identificamos que as derivadas associadas as densidades P e K , tendo em vista que

$$\sqrt{-g} P_X g^{\mu\alpha} \partial_{\alpha\phi} = \sqrt{-g} \frac{P(X, \phi)}{K(Z, \phi)} K_Z q^{\mu\alpha} \partial_{\alpha\phi} = \sqrt{-q} K_Z q^{\mu\alpha} \partial_{\alpha\phi},$$

nos levam às seguintes relações de correspondência

$$K(Z, \phi) = |\hat{\Omega}|^{-1/2} (2L_G + X P_X - P), \quad (4.19)$$

$$K_Z = |\hat{\Omega}|^{-1/2} P_X (C + DX), \quad (4.20)$$

e

$$K_\phi = |\hat{\Omega}|^{-1/2} P_\phi. \quad (4.21)$$

Note que, em consistência com o mapeamento, podemos trabalhar com o caso em que $K = K(Z, \phi)$ ou para $K = K(X, \phi)$, basta manipularmos a relação (4.11). Dando continuidade, isto significa que podemos escrever (4.21) em termos de $K(X, \phi)$ e $K(Z, \phi)$. Observe que introduzindo (4.11) em (4.20) chegamos a

$$P(X, \phi) = K(X, \phi) |\hat{\Omega}|^{1/2}, \quad (4.22)$$

o que nos permite escrever K_Z como uma soma de $K(Z, \phi)$ e $K(X, \phi)$. Por fim, obtemos

$$\partial_\phi K(Z, \phi) = \partial_\phi K(X, \phi) - K_Z Z_\phi, \quad (4.23)$$

onde $\partial_\phi K(Z, \phi) = K_\phi$. Concluimos que (4.21) e (4.23) são equivalentes.

Uma abordagem mais detalhada acerca do método de mapeamento para um número arbitrário de campos escalares reais, como complemento, é feita na seção 4 de [52]. Esta abordagem também é válida para campos escalares complexos.

5 Mapeamento entre $f(R)$ e R

Com o procedimento do mapeamento descrito, nos interessa agora obter as soluções específicas de $\Omega^\mu{}_\nu$. Considerando a densidade lagrangeana $L_G = f(R)/2\kappa^2$, identificamos que $\Omega^\mu{}_\nu = f_R \delta^\mu{}_\nu$, onde $f_R \equiv df/dR$. Nesse caso, os coeficientes de (4.8)

$$C(X, \phi) = f_R \quad e \quad D(X, \phi) = 0. \quad (5.1)$$

E inserindo a densidade $f(R)$ na equação de campo (3.25), vemos que o traço corresponde a

$$Rf_R - 2f(R) = \kappa^2 T, \quad (5.2)$$

que de acordo com a ação de matéria $S_M(X, \phi)$, nos leva a

$$Rf_R - 2f = \kappa^2 (XP_X - 2P). \quad (5.3)$$

Nos interessa agora explicitar a dependência de K em $K = K(X, \phi)$. Da equação (4.20), tendo em vista que $|\hat{\Omega}|^{1/2} = f_R^2$, obtemos

$$K(X, \phi) = \frac{1}{f_R^2} \left(\frac{f}{\kappa^2} + XP_X - P \right). \quad (5.4)$$

Note que a partir da relação $X = Zf_R$, descrevemos $K = K(X(Z), \phi)$ (nosso objetivo final), imediatamente.

5.1 Modelo $f(R) = R + \alpha R^2$

Como modelo concreto de trabalho no contexto das teorias $f(R)$, consideremos o modelo quadrático de gravidade $f(R) = R + \alpha R^2$. Assim, $f_R = 1 + 2\alpha R$, e nesse ponto, de (5.3) vemos que

$$Rf_R - 2f = -R = \kappa^2 (XP_X - 2P), \quad (5.5)$$

onde α é uma constante com dimensões de comprimento ao quadrado (importante para a análise das soluções).

5.1.1 Mapa $f(R)$ em RG

Para aplicarmos as relações de mapeamento, consideremos uma lagrangeana simples, com a forma canônica $P(X, \phi) = X - 2V(\phi)$. Consequentemente, escrevemos (5.5) na forma

$$R = -\kappa^2[X - 2(X - 2V(\phi))] = \kappa^2(X - 4V(\phi)), \quad (5.6)$$

e, como $(C + DX)/|\hat{\Omega}|^{1/2} = f_R^{-1}$,

$$X = Z[1 + 2\alpha\kappa^2(X - 4V(\phi))] \quad (5.7)$$

$$= Z(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)) + 2\alpha\kappa^2XZ; \quad (5.8)$$

atentando-se ao fato de que $Z = X/f_R$, temos que

$$X \left(1 - \frac{X}{f_R} 2\alpha\kappa^2\right) = X(1 - 2\alpha\kappa^2Z) = Z(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)), \quad (5.9)$$

logo,

$$X = Z(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi))(1 - 2\alpha\kappa^2Z)^{-1} \quad (5.10)$$

Agora, introduzindo este último resultado e $P(X, \phi)$ em (5.4) é possível encontrar a forma da densidade lagrangeana para $K = K(Z, \phi)$,

$$\begin{aligned} K(Z, \phi) &= \frac{1}{f_R^2} \left\{ \frac{\kappa^2(X - 4V(\phi)) + \alpha[\kappa^2(X - 4V(\phi))]^2}{\kappa^2} + XP_X - P \right\} \\ &= \frac{1}{f_R^2} \left\{ \frac{Z[1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)]}{1 - 2\alpha\kappa^2Z} - \alpha\kappa^2 \left[\frac{Z(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi))}{1 - 2\alpha\kappa^2Z} - 4V(\phi) \right]^2 - 2V(\phi) \right\} \\ &= \frac{(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi))}{f_R^2} \left\{ \frac{Z}{1 - 2\alpha\kappa^2Z} \left(1 + \frac{\alpha\kappa^2Z(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi))}{(1 - 2\alpha\kappa^2Z)} - 8\alpha\kappa^2V(\phi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\kappa^2 16V(\phi)^2 - 2V(\phi)}{1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)} \right\}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} f_R^2 &= [1 + 2\alpha\kappa^2X - 8\alpha\kappa^2V(\phi)]^2 \\ &= \left[(1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)) \left(1 + \frac{2\alpha\kappa^2Z}{1 - 2\alpha\kappa^2Z} \right) \right]^2 \\ &= \left(\frac{1 - 8\alpha\kappa^2V(\phi)}{1 - 2\alpha\kappa^2Z} \right)^2, \quad (5.12) \end{aligned}$$

após algumas simplificações, determinamos a forma mais simples de $K(Z, \phi)$:

$$K(Z, \phi) = \frac{Z(1 - \alpha\kappa^2 Z)}{1 - 8\alpha\kappa^2 V(\phi)} - \frac{2V(\phi)}{1 - 8\alpha\kappa^2 V(\phi)}. \quad (5.13)$$

Note que para um campo escalar livre, $V(\phi) = 0$, a equação (5.13) se reduz a

$$K(Z, \phi) = Z(1 - \alpha\kappa^2 Z), \quad (5.14)$$

que é a densidade lagrangeana de matéria escalar correspondente à teoria de Einstein.

Assim, temos completado o conjunto de transformações, que nos mostram as relações que podem ser construídas entre uma RBG com matéria escalar canônica, e a Relatividade Geral com lagrangiana de campo escalar não-canônica (5.14).

5.1.2 Mapeamento inverso: da RG para a $f(R)$

Uma das possibilidades mais interessantes do mapeamento é o chamado “problema inverso” ou mapeamento inverso, que propõe pensar a transformação partindo da RG acoplada a uma matéria $K(Z)$, para obtermos uma teoria RBG acoplada a alguma descrição de matéria $P(X)$. Esse sentido do mapa habilita a reinterpretação das componentes escuras através de uma degenerescência entre a gravidade usual acoplada a matéria não canônica, e uma gravidade alternativa (no caso uma RBG) acoplada à matéria usual.

De (4.22) e (5.4), temos que

$$P(Z, \phi) = K(X, \phi) |\hat{\Omega}|^{1/2} \quad (5.15)$$

$$= |\hat{\Omega}|^{1/2} f_R^{-2} (f\kappa^{-2} + X P_X - P) \quad (5.16)$$

$$= f\kappa^{-2} + f_R^2 (Z K_Z - K). \quad (5.17)$$

Deste último resultado, para conseguirmos mapear $P(X, \phi)$, precisamos expressar o escalar de curvatura em termos da densidade $K(Z, \phi)$. Com $K(Z, \phi)$ dado, é possível encontrar a densidade lagrangeana, $P(X, \phi)$, associada à gravidade $f(R)$. Assim, da relação de deformação matricial das métricas g - q e da relação (5.6), para o campo escalar canônico

$$K(Z, \phi) = Z - 2V(\phi), \quad (5.18)$$

escrevemos

$$R(q) = f_R q^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\kappa^2 \tilde{T} \quad \rightarrow \quad \frac{R}{f_R} = \kappa^2 (2K - ZK_Z). \quad (5.19)$$

Com isto, a dinâmica do setor de matéria associado a gravidade de Einstein pode ser mapeada para $Z = Z(X)$.

Por fim, atendendo a (5.17) e (5.19), encontramos a densidade lagrangeana para o setor de matéria associado a $f(R)$:

$$P(X, \phi) = \frac{X(1 + \alpha\kappa^2 X)}{1 + 8\alpha\kappa^2 V(\phi)} - \frac{2V(\phi)}{1 + 8\alpha\kappa^2 V(\phi)}. \quad (5.20)$$

Note que, além da dependência explícita em X (não mais em Z), o sinal que acompanha a constante α muda com relação ao obtido em (5.13). É este termo que nos permite controlar as não-linearidades associadas ao setor gravitacional.

Um ponto interessante que fica evidente nesse exemplo é uma característica bastante peculiar da correspondência descrita: No presente caso vemos que uma gravidade $f(R) = R + \alpha R^2$, quadrática em R , com matéria $P(X, \phi) = X - 2V(\phi)$ linear em X , resulta mapeada em uma gravidade linear em R (a RG), com setor de matéria $K(Z, \phi)$ dado em (5.14), que apresenta a mesma estrutura quadrática, mas agora em Z . O mesmo observamos no mapeamento inverso: quando partimos de uma lagrangeana canônica $K(Z, \phi)$ (5.18) acoplada à RG, chegamos em uma Lagrangiana quadrática acoplada à lagrangiana quadrática $P(X)$ (5.20).

Esse fenômeno se repete ao aplicar o mapa em distintas RBGs e com distintos tipos de matéria: as não-linearidades no escalar de curvatura do setor gravitacional aparecem mapeadas ao setor de matéria da RG [52].

5.2 Gravidade $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$

Com o objetivo de se obter soluções exatas e extrair informações mais detalhadas sobre o comportamento dos objetos compactos nas RBGs, consideramos trabalhar com o método de mapeamento na Gravidade quadrática, $f(R, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$. A descrição dessa teoria foi previamente trabalhada no Capítulo 3.

Para explicitarmos as relações de correspondência entre os campos escalares RBG-RG na gravidade quadrática, precisamos encontrar soluções para (3.59), que ao contrário do caso $f(R)$, a matriz $\hat{\Omega}$ não é proporcional a matriz de identidade \hat{I} ($\hat{\Omega} = f_R \hat{I}$).

Recorde que da definição do tensor \tilde{T}^μ_ν , eq. (4.1), concluímos que este representa o conteúdo de matéria no ‘Einstein frame’, onde é possível identificar que o determinante da matriz $\hat{\Omega}$ aparece. Logo, para que a definição seja válida, devemos poder exprimir $|\hat{\Omega}|$ em termos dos campos de matéria. Para tanto, observe primeiro que, de (3.59), trivialmente temos que

$$g^{\mu\alpha} R_{(\alpha\nu)} = \Omega^\mu_\beta q^{\beta\alpha} R_{(\alpha\nu)} = \Omega^\mu_\beta R^\beta_\nu(q). \quad (5.21)$$

Isto permite eliminar a presença explícita de $g_{\mu\nu}$ da equação, obtendo

$$|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}} (\Omega^{-1})^\mu_\nu = f_R \delta^\mu_\nu + 2f_Q \Omega^\mu_\beta R^\beta_\nu(q). \quad (5.22)$$

Que podemos escrever na forma

$$\delta^\alpha_\mu = f_R |\hat{\Omega}|^{-1/2} \Omega^\alpha_\nu + 2f_Q |\hat{\Omega}|^{-1/2} (\Omega)^\alpha_\mu \Omega^\mu_\beta R^\beta_\nu(q). \quad (5.23)$$

Note que é possível identificar a dificuldade de ser obter as relações de mapeamento para a gravidade $f(R, Q)$ observando que a equação (5.22) é quadrática em Ω .

Foram feitas algumas tentativas, no sentido de obter as soluções, mas não conseguimos chegar a uma solução consistente. Mais Recentemente, poucos dias antes de finalizarmos o presente trabalho, através de comunicação privada[61], ficamos sabendo que esse problema foi resolvido, obtendo-se as relações de mapeamento para a Gravidade quadrática aplicando uma abordagem “híbrida”, trabalhando sobre a expressão (3.59) em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ no lado direito, junto com a equação (3.67) escrita para um objeto construído com o tensor de Ricci e a métrica $g_{\mu\nu}$. Tudo indica que novos objetos compactos poderão ser encontrados.

Ressalta-se que embora não tenhamos obtido resultados consistentes, o passo-a-passo da nossa abordagem está disponível apenas para simples conferência no Apêndice A.

6 Objetos compactos em gravidade

$$f(R) = R + \alpha R^2$$

Como destacado anteriormente, o método de mapeamento nos permite fazer uma transição entre as teorias RBGs e a RG. Por equanto, nossa abordagem se limitou, essencialmente, apenas a estrutura analítica do método. Ou seja, não nos detemos a explorar ainda a física envolvida. Agora, com as relações de correspondência para a gravidade $f(R)$ explicitadas, em especial para o modelo quadrático $f(R) = R + \alpha R^2$, podemos descrever o elemento de linha associado a gravidade $f(R)$ a partir dos termos métricos da teoria de Einstein, e obter novas soluções para o quadro $f(R)$.

Trabalharemos com o modelo de campo escalar livre e estático com simetria esférica, originalmente obtido para a RG por Max Wyman[62]. Este tipo de solução é obtida usando o fato de que a equação para o campo escalar resulta extremamente simples, $\phi_{yy} = 0$, o que facilita resolver as equações de Einstein para o presente caso, utilizando uma engenhosa escolha de coordenadas, isto é, tomando $\phi = y$, o que pode ser feito sem sofrermos perda de generalidade. O elemento de linha assim obtido por Wyman tem a forma

$$ds_{RG}^s = -e^\nu dt^2 + e^\nu W^{-4} dy^2 + W^{-2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2), \quad (6.1)$$

onde ν e W são funções métricas que dependem da coordenada radial y , cuja solução, no caso assintoticamente plano, tem a forma

$$e^\nu = e^{\sigma y} \quad (6.2)$$

$$W = \frac{e^{\sigma y/2} \sinh(\gamma y)}{\gamma}, \quad (6.3)$$

no qual a constante σ está relacionada a massa newtoniana da solução no limite assintótico (M), $\sigma = -2M$ e a constante γ é definida como $\gamma \equiv \sqrt{\sigma^2 + 2\kappa^2}/2$. Note que o limite adotado para obtermos as equações (6.2) e (6.3), implica que o campo escalar desaparece quando a coordenada radial tende a zero $y \rightarrow 0$, na

medida em que no centro da solução esférica $y \rightarrow \infty$. Nesse sentido, analisaremos as propriedades das soluções da densidade (5.20), que por sua vez, está acoplada a gravidade $f(R)$.

6.0.1 Propriedade das Soluções

Respeitando os limites assintóticos, para o campo escalar real e livre, de (5.20) podemos verificar que

$$P(X, \phi) = X(1 + \alpha\kappa^2 X), \quad (6.4)$$

e, como existe uma relação entre a métrica $g_{\mu\nu}$ e a métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$, podemos explicitar f_R para obtermos o elemento de linha associado a gravidade $f(R)$. Da relação (5.3), vemos que

$$f_R = (1 - 2\alpha\kappa^2 Z)^{-1}, \quad (6.5)$$

e como Z relaciona o perfil da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$ ao campo escalar, para o presente caso, Z corresponde a

$$Z = q^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = q^{yy} \phi_y^2 = W^4 e^{-\nu}. \quad (6.6)$$

Em consistência com o método de mapeamento, o elemento de linha para $f(R) = R + \alpha R^2$ (gravidade $f(R)$), ou seja, os elementos diagonais do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ assume a forma

$$ds_{f(R)}^2 = f_R^{-1} ds_{RG}^2 \quad (6.7)$$

$$= (1 - 2\alpha\kappa^2 W^4 e^{-\nu}) \left[-e^\nu dt^2 + W^{-4} e^\nu dy^2 + W^{-2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) \right]. \quad (6.8)$$

Observe que mesmo com um elemento de linha associado a gravidade $f(R)$ e outro associado a gravidade de Einstein, a geodésica associada a essas soluções continua seguindo a métrica $g_{\mu\nu}$.^a

No contexto da gravidade $f(R)$, analisaremos o impacto que a deformação (descrita por f_R^{-1}) confere às soluções da teoria de Einstein. Isto significa que

^a Justamente com esse objetivo é que se escolhe o setor de matéria independente da conexão.

partiremos do elemento de linha modificado, (6.8), e faremos uma devida análise das características da solução que, como veremos, corresponde a objetos compactos.

Nosso primeiro foco se reduz a analisar o comportamento e as propriedades do setor esférico de (6.8), ou seja, nos interessa as soluções para a métrica descrita $g_{\theta\theta}$, que está relacionada a uma função da coordenada radial y ; definimos $r(y)^2 \equiv g_{\theta\theta}$. Nesse sentido, de acordo com os limites assintóticos adotados, assim como na RG, quando $y \rightarrow 0$, a função de forma $r(y)^2$ tem um comportamento inversamente proporcional para o centro da solução: $r(y)^2 \approx y^{-2} \rightarrow \infty$. Contudo, próximo ao centro da solução esférica, para altos valores de y , podemos encontrar diferentes efeitos na geometria, que estarão modulados pelo sinal da constante α ; em outras palavras, analisaremos os efeitos na geometria para $\alpha = s|\alpha|$, onde $s = \pm 1$.

6.0.1.1 $\alpha < 0$

No caso em que $s = -1$, a função $r(y)^2$ assume a forma

$$r(y)^2 = \left(1 + 2|\alpha|\kappa^2 e^{2My} W^4\right) W^{-2}. \quad (6.9)$$

Note que essa função está definida em um intervalo coordenado de y entre os limites $(0, \infty($, e é sempre positiva. Além disso, o produto $|\alpha|e^{2My}$, com W sendo uma função crescente, cresce com $y \rightarrow \infty$. Isto implica que o termo (de correção) $|\alpha|$ estará dominando em grandes valores de y , e, conseqüentemente, a função $r(y)^2$ crescerá no limite em que $|\alpha|$ domina. Para um melhor entendimento, iremos considerar o gráfico extraído da Ref.[1] que atribui valores específicos para as constantes κ^2 , $|\alpha|$ e σ .

Como é possível verificar na Figura 1, assim como y^{-2} , a função $r(y)^2$ primeiro diminui na medida em que y cresce e em seguida aumenta conforme $y \rightarrow \infty$. Esse comportamento da função radial é característico dos objetos chamados de “buraco de minhoca”.

Observe que a garganta do buraco de minhoca está no mínimo de $r(y)^2$ e que pode ser fechada, retornando a gravidade de Einstein, quando $\alpha \rightarrow 0$ ($f(R) = R$).

Embora a localização do buraco de minhoca varie conforme α , ele é mais sensível a σ (como pode ser observado na Figura 1). E por esse motivo, nos

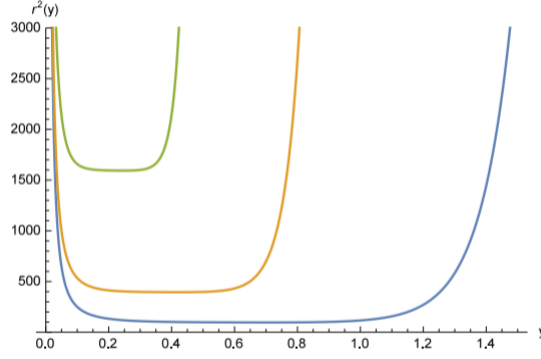


Figura 1 – Comportamento da função radial $r(y)^2$ para a gravidade $f(R)$ quadrática com deformação $f_R = 1 - 2\alpha\kappa^2 Z$, caracterizando uma solução tipo “buraco de minhoca” (*wormhole*). $\kappa^2 = 1$, $|\alpha| = 10^{-1}$, e $\sigma_{\text{verde}} = -40$, $\sigma_{\text{laranja}} = -20$ e $\sigma_{\text{azul}} = -10$. Obtido de [1] com anuência dos autores.

é conveniente estabelecer a localização do mínimo; considerando que a função hiperbólica métrica pode ser aproximada pela função exponencial $\sinh(\gamma y) \approx e^{\gamma y}/2$, na região em que $\gamma^{-1} < y$, identificamos que

$$y_{\min} \approx \frac{\log\left(\frac{(\sigma^2 + 2\kappa^2)^{3/2}(\sqrt{\sigma^2 + 2\kappa^2} + \sigma)}{|\alpha|\kappa^2}\right)}{2\sqrt{\sigma^2 + 2\kappa^2} + \sigma}, \quad (6.10)$$

que pode ser simplificada, para baixas curvaturas, no limite astrofísico ($|\sigma|^2 \gg \kappa^2$):

$$y_{\min} \approx \log\left(\frac{\sigma^2}{|\alpha|}\right) |\sigma|^{-1}. \quad (6.11)$$

Consequentemente, quando a coordenada radial y tende a y_{\min} , a equação (6.9) pode ser escrita como sendo

$$\lim_{y \rightarrow y_{\min}} r(y)^2 \approx \sigma^2 + \kappa^2 \left[3 - \log\left(\frac{\sigma^2}{|\alpha|}\right) \right] + \mathcal{O}(\kappa^4). \quad (6.12)$$

Esta última expressão indica que a área da garganta do buraco de minhoca é menor do que o horizonte de eventos, comparada à solução esférica de Schwarzschild ($r = 2M$). Portanto, mesmo que para o nosso caso a massa seja a mesma, não se observa a formação de um horizonte de eventos. Ou seja, nossa solução não admite região ou limite em que a matéria possa ser atraída forçadamente. Um

outro ponto importante é que não há presença de singularidades[63] (entende-se que a singularidade física ou geométrica é um problema teórico) e isto atribui extremo interesse acerca do movimento no interior da garganta.

Movimento geodésico no interior do Buraco de Minhoca

De fato, a deformação imposta pela modificação da densidade lagrangiana, se $\alpha \neq 0$, altera as estruturas geométrica e física com relação as da teoria de Einstein. E isto implica que as geodésicas associadas a métrica do espaço-tempo podem, ou não, ser incompletas, como na RG. Para tanto, precisamos analisar as propriedades internas do Buraco de Minhoca. Como o elemento de linha para a geometria esférica, simétrica e estática é dada como $ds^2 = -C(y)dt^2 + B(y)^{-1}dy^2 + r(y)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$, a equação da geodésica para partículas pontuais, no âmbito da gravidade $f(R)$ é

$$f_R^{-2} \left(\frac{dy^2}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - \frac{A(y)}{f_R} \left(\frac{L^2}{r(y)^2} - k \right), \quad (6.13)$$

onde λ é um parâmetro afim (ou tempo afim), pois mede o tempo ao longo da geodésica, e k caracteriza o tipo de geodésica, podendo assumir três valores, $k = (-1, 0, 1)$, correspondentes a geodésicas temporais, nulas e espaciais, respectivamente.

A função $A(y)$, além de depender da coordenada radial, está associada à massa do sistema e a descrição do horizonte[64]. E é a energia por unidade de massa, e L o momento angular por unidade de massa (para mais detalhes *vide* seções 5, 7, 8 e subseção 8.3 da ref.[63]).

Da Eq.(6.13) é possível observar que, assim como no caso Reissner-Nordström em RG[1, 63], quando o momento angular é nulo ($L = 0$), ou quando a geodésica é do tipo tempo ($k = -1$), verificamos que a geodésica é incompleta, pois não alcança a garganta do Buraco de Minhoca, similarmente a o que acontece na RG. Isto quer dizer que a região assintótica

$$\lim_{y \rightarrow \infty} r(y)^2 \rightarrow \infty,$$

caracteriza o infinito interno assintótico, com tempo afim finito, assim como para a RG ($y \rightarrow \infty$), e não existe continuação da geodésica no espaço-tempo além desse limite.

No caso em que a geodésica é nula ($k = 0$), a solução coincide com o encontrado para a RG, pois os raios nulos da solução não são sensíveis a deformação f_R [1].

6.0.1.2 $\alpha > 0$

A geometria do espaço-tempo é tão sensível a α , que quando consideramos $s = +1$, já não encontramos a estrutura de Buraco de Minhoca. Por outro lado, a função radial $r(y)^2$ atinge um comportamento quase plano quando perpassa a região em torno do raio de Schwarzschild. Neste ponto, não é possível determinar o mínimo, pois a função não o atinge, e continua decrescendo até se anular quando y atinge o valor finito $y = y_{\text{máx}}$. O $y_{\text{máx}}$ para o centro da solução é dado por

$$y_{\text{máx}} = \frac{\log\left(\frac{(\sigma^2 + 2\kappa^2)^2}{|\alpha|}\right)}{2\sqrt{\sigma^2 + 2\kappa^2 + \sigma}}. \quad (6.14)$$

Podemos visualizar a dependência da função de forma $r(y)^2$ com o parâmetro $|\alpha|$ no *plot* retirado da ref.[1], Figura 2. Mais adiante analisaremos o *plot* do comportamento da função de forma com as funções métricas g_{tt} e g_{rr} .

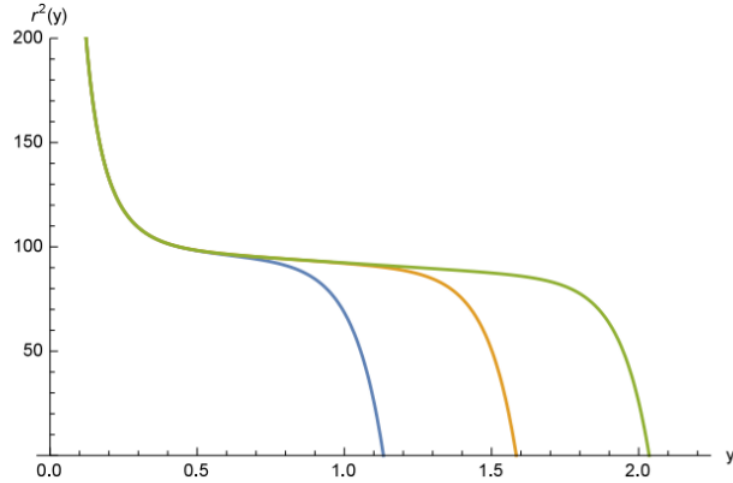


Figura 2 – Comportamento da função de forma $r(y)^2$ para a gravidade $f(R)$ com deformação $f_R = 1 - 2\alpha\kappa^2 Z$, associada ao modelo quadrático, com $\alpha > 0$. Para $\kappa^2 = 1$ e $\sigma = -10$, e três diferentes valores de $|\alpha|$: $|\alpha|_{\text{azul}} = 10^{-1}$, $|\alpha|_{\text{laranja}} = 10^{-3}$ e $|\alpha|_{\text{verde}} = 10^{-5}$. Se $|\alpha| \rightarrow 0$, voltamos a RG.

Para um melhor entendimento do gráfico acima (Figura 2), consideremos o *plot* da função de forma e as funções métricas no limite assintótico. Pois, nesse caso, são as funções métricas que nos possibilitarão verificar a existência (ou não) de horizonte, bem como a estrutura do possível objeto. Idem ref.[1].

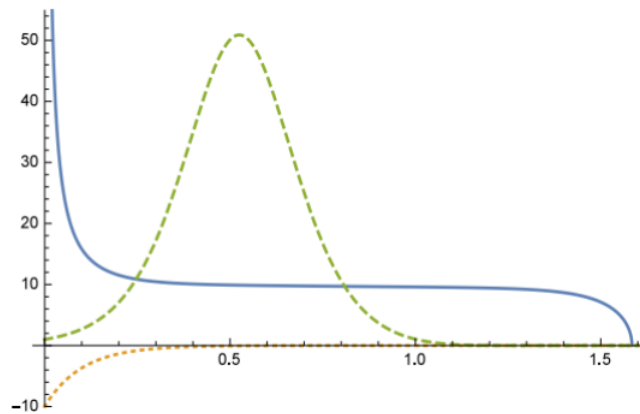


Figura 3 – Comportamento das funções $r(y)^2$, g_{tt} e g_{rr} para $\sigma = -10$ e $|\alpha| = 10^{-3}$.

A função de forma $r(y)^2$ tem o comportamento descrito pela linha azul e as funções métricas g_{tt} (linha pontilhada laranja) e g_{rr} (linha pontilhada verde) partem de 10 e 1, respectivamente, respeitando a assinatura adotada, $-, +, +, +$.

A Figura 3 configura uma bola compacta de matéria escalar, cuja área é praticamente a mesma esperada para a solução de Schwarzschild quando se considera a mesma massa[1]. Note que a função métrica g_{rr} , no regime assintoticamente plano, em que $g_{rr} \rightarrow 1$ quando $y = 0$, atinge o pico máximo do campo (na região em que $r(y)^2$ é achatado) e em seguida relaxa a zero, ou seja, $r = 0$ e $y = y_{\text{máx}}$. E a componente métrica g_{tt} cresce até o centro da solução quando $g_{tt} \rightarrow -1$ em $y = 0$.

Esse caso traz uma informação importante em relação a estrutura geodésica. Para coordenadas radiais nulas, encontramos geodésicas semelhantes ao caso em que se considera o ramo positivo na RG. Este resultado está associado ao fato de que o movimento geodésico dos fótons é invariante perante a deformação f_R , que é do tipo conforme, como em todas as teorias tipo $f(R)$ [1, 64].

Ressalto que assim como para o caso $\alpha < 0$, também não foi encontrado

horizonte de eventos.

6.0.2 Densidade de Energia e Curvatura

Até o presente momento, verificamos que novos objetos compactos podem ser configurados, teóricamente, além da Gravidade de Einstein (Figuras 1 e 3), e ainda podemos extrair informações importantes acerca da geometria no interior dos objetos encontrados. E para isso, recorde que, como destacado no capítulo anterior, o método de mapeamento nos permite fazer uma transição, sempre que conveniente, entre as RBG e a RG. Isto significa que podemos analisar as soluções encontradas para $f(R) = R + \alpha R^2$ tanto no contexto da teoria $f(R)$ quanto no da teoria de Einstein.

Em decorrência da contribuição do fator conforme α , para podermos obter uma previsão teórica sobre a curvatura na região interna dos objetos, nos interessa determinar o escalar de curvatura associado a teoria de Einstein, pois, no quadro geral do método de mapeamento, α pode assumir três valores: $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$. Existirá solução para $f(R)$ se, e somente se, $\alpha < 0$ e/ou $\alpha > 0$. Para tanto, no intuito de obter relações mais compactas, aproximamos as funções hiperbólicas à funções exponenciais novamente, para quando $\alpha = 0$. Nesse regime, o escalar de curvatura para o centro da solução da RG tem a forma

$$\lim_{y \rightarrow \infty} R_{RG} = R_{\alpha=0} \approx \frac{\kappa^2 e^{(2\sqrt{\sigma^2+2\kappa^2}+\sigma)y}}{(\sigma^2 + 2\kappa^2)^2}, \quad (6.15)$$

que diverge exponencialmente para o centro da solução.

No limite astrofísico, $|\sigma|^2 \gg \kappa^2$, as contribuições quadráticas de $f(R)$, nos levam as seguintes curvaturas:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} R_{\alpha < 0} \approx -\frac{3\sigma^2}{2\alpha} \quad (6.16)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow y_{m\acute{a}x}} R_{\alpha > 0} \approx -\frac{3}{2|\alpha|\sigma(y - y_{m\acute{a}x})^3}. \quad (6.17)$$

Assim, vemos que existe divergência para densidade de energia e curvatura para $\alpha \geq 0$, Eqs. (6.15), (6.17), e que para o caso $\alpha < 0$, em que existe estrutura

de Buraco de Minhoca, a curvatura (6.16) nos indica que a geometria interna é semelhante ao caso de Sitter (veja a Figura 4 da seção III da ref. [1]), com o tensor energia-momento de poeira, como pode ser observado analisando o tensor de Einstein, com o elemento de linha associado a curvatura $R_{\alpha < 0}$

$$G^\mu{}_\nu = \text{diag}\left(\frac{3\sigma^2}{4\alpha}, \frac{\sigma^2}{4\alpha}, \frac{\sigma^2}{4\alpha}, \frac{\sigma^2}{4\alpha}\right) = \frac{\sigma^2}{4\alpha}\delta^\mu{}_\nu + \rho_{\text{dust}}u^\mu u_\nu, \quad (6.18)$$

onde a densidade de energia da poeira é tal que $\rho_{\text{dust}} = -\sigma^2/2\alpha > 0$.

O caso $\alpha < 0$, traz consigo uma informação bastante pertinente: mesmo que no interior do Buraco de Minhoca o espaço-tempo seja geodesicamente incompleto, isto é, as geodésicas nulas alcançam $r \rightarrow \infty$ em um tempo finito, a densidade de energia, bem como a curvatura são finitas (não divergem) em todos os pontos[64]. Para se compreender esta diferença de divergência entre o Buraco de Minhoca e a bola compacta, os próprios autores de ref.[1], afirmam que para se tirar quaisquer conclusões, seria necessário uma análise mais detalhada acerca do impacto sobre observadores físicos.

7 Conclusão

No contexto da gravidade de Einstein, os buracos de minhoca são considerados objetos exóticos cuja solução é obtida definindo uma geometria simples e bem comportada para depois, determinar as fontes de matéria que geram a geometria utilizada, *a priori*[65]. Algumas dessas fontes de matéria são de natureza exótica do tipo que viola a condição de energia nula. A saber,

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu < 0, \quad (7.1)$$

onde v^μ é qualquer vetor nulo. Ainda nesse sentido, mesmo que a violação da condição de energia nula esteja presente em sistemas quânticos, onde por exemplo, ocorrem o efeito Casimir ou a evaporação contínua, numa perspectiva para altos níveis de energia (ou curvatura), considerar teorias que ao menos satisfaçam as condições de energia ou que minimizem a violação citada, é pertinente[66].

As RBGs, construídas no formalismo métrico-afim, são alternativas viáveis para resolver e minimizar alguns problemas (como o citado no parágrafo anterior) e além disso, apresentam características gerais, em contraste com a RG, que valorizam ainda mais a possibilidade de se trabalhar com essa classe de teorias. Tais como,

- Modificam a RG no limite ultravioleta;
- As equações do movimento são de segunda ordem;
- Não apresentam instabilidades com campos fantasmas;
- As soluções no vácuo recaem na RG.

No geral, podemos pensar que as RBGs são teorias promissoras e como descrito nos capítulos anteriores, percebe-se que o método de mapeamento contribui, sig-

nificativamente, para que se considere trabalhar com tal classe da Gravidade modificada.

Além da aplicação do mapeamento nos possibilitar efetuar uma transição entre as RBGs-RG, vimos que as não-linearidades concernentes ao setor gravitacional são mapeadas no setor de matéria do '*Einstein-frame*'. E ainda, observamos que novos objetos compactos podem ser encontrados no contexto das teorias RBGs e quando viável, também é possível analisar as soluções dentro do contexto da RG, explorando as possibilidades do mapeamento apresentado.

Além disso, quando aplicado o mapeamento inverso, da RG para a RBG, surge uma 'degenerescência' entre a gravidade usual acoplada a matéria exótica (descrita por uma lagrangeana não-canônica), e a RBG acoplada a matéria usual, descrita por uma lagrangeana canônica.

Portanto, além do próprio formalismo métrico-afim, o método de mapeamento é uma potente ferramenta para se trabalhar no âmbito da Astrofísica e/ou Cosmologia moderna. E tal tratamento nos permitirá enxergar problemas teóricos em uma outra perspectiva e até mesmo romper alguns paradigmas.

Dito isto, o grande marco para as RBGs é a possibilidade de nos fornecer informações sobre novos objetos compactos, por enquanto no terreno teórico, mas que talvez possam vir a ser verificados mediante observações ou analisados por simulação com base em dados reais.

Referências

- 1 AFONSO, V. I. et al. New scalar compact objects in ricci-based gravity theories. 2019. Citado 8 vezes nas páginas 17, 55, 69, 70, 71, 72, 73 e 75.
- 2 KOMATSU, E. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 31.
- 3 CHOQUET-BRUHAT, Y. *Introduction to General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014. ISBN 9780199666454, 9780199666461. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 4 Spiro, M. Dark Matter. In: Paul, J.; Montmerle, T.; Aubourg, E. (Ed.). *19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 262. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 31.
- 5 LIDDLE, A. R. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado 7 vezes nas páginas 23, 25, 26, 27, 28, 29 e 31.
- 6 PEEBLES, P. J. E. *The Standard Cosmological Model*. 1998. Citado na página 23.
- 7 BONOMETTO, S.; GORINI, V.; MOSCHELLA, U. *Modern cosmology*. [S.l.: s.n.], 2001. 1-473 p. Citado na página 23.
- 8 PEACOCK, J. A. *Cosmological Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 23, 26, 29 e 31.
- 9 RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- 10 DODELSON, S. *Modern cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1282338>>. Citado na página 23.
- 11 PEEBLES, P. J. E. *Principles of physical cosmology*. [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 23.
- 12 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. Citado na página 23.

- 13 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 0471925675, 9780471925675. Disponível em: <http://www-spines.fnal.gov/spines/find/books/www?cl=QC6.W431>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 26.
- 14 TURNER, M. Dark matter, dark energy and fundamental physics. 01 2000. Citado 5 vezes nas páginas 24, 28, 29, 31 e 34.
- 15 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521200165, 9780521099066, 9780511826306, 9780521099066. Citado na página 24.
- 16 Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*. [S.l.: s.n.], 1973. Citado na página 24.
- 17 AGUIRRE, A. Dust versus cosmic acceleration. *The Astrophysical Journal*, v. 512, 11 1998. Citado na página 25.
- 18 FRIEMAN, J.; TURNER, M.; HUTERER, D. Dark energy and the accelerating universe. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 31.
- 19 COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15, p. 1753–1936, 2006. Citado na página 25.
- 20 MARTINS, R. d. A. *O universo: teorias sobre sua origem e evolução*. [S.l.]: Editora Moderna, 1994. ISBN 9780199666454, 9780199666461. Citado na página 25.
- 21 PAPANTONOPOULOS, E. *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 31.
- 22 CHENG, T.-P. *Relativity, Gravitation, and Cosmology - A basic Introduction*. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. Citado na página 26.
- 23 CLINE, D. B. (Ed.). *Sources and detection of dark matter and dark energy in the universe. Proceedings, 4th International Symposium, DM 2000, Marina del Rey, USA, February 23-25, 2000*. [s.n.], 2001. Disponível em: <http://www.slac.stanford.edu/spines/find/books/www?cl=QB461:I57:2000>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- 24 ASTIER, P.; PAIN, R. Observational evidence of the accelerated expansion of the universe. *Comptes Rendus Physique*, v. 13, 04 2012. Citado na página 28.

- 25 WEINBERG, D. et al. Observational probes of cosmic acceleration. *Physics Reports*, v. 530, 01 2012. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- 26 CARROLL, S. M. The Cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, v. 4, p. 1, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.
- 27 LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. *The primordial density perturbation - Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 29.
- 28 MATARRESE, S. et al. *Dark Matter and Dark Energy: A Challenge for Modern Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 370. Citado na página 29.
- 29 SAND, D. J.; TREU, T.; ELLIS, R. S. The dark matter density profile of the lensing cluster ms2137-23: a test of the cold dark matter paradigm. 2002. Citado na página 30.
- 30 NEWMAN, A. B. et al. The distribution of dark matter over 3 decades in radius in the lensing cluster abell 611. 2009. Citado na página 30.
- 31 BARKANA, R. Possible interaction between baryons and dark-matter particles revealed by the first stars. *Nature*, Macmillan Publishers Limited, part of Springer Nature. All rights reserved. SN -, v. 555, p. 71 EP -, Feb 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature25791>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 32 FARRAR, G. R.; PEEBLES, P. J. E. Interacting dark matter and dark energy. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 604, n. 1, p. 1–11, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F381728>>. Citado na página 31.
- 33 STRAUMANN, N. Dark Energy: Recent Developments. *Mod. Phys. Lett.*, A21, p. 1083–1098, 2006. Citado na página 33.
- 34 DODELSON, S.; GATES, E.; TURNER, M. S. Cold dark matter models. 1996. Citado na página 33.
- 35 LIDDLE, A. R. et al. Open cold dark matter models. 1995. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 36 WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, p. 1–23, 1989. [,569(1988)]. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- 37 PADMANABHAN, T. Dark energy: the cosmological challenge of the millennium. *Current Science*, v. 88, 12 2004. Citado na página 33.
- 38 BEESHAM, A. Cosmological models with a variable cosmological term and bulk viscous models. *Phys. Rev.*, D48, p. 3539–3543, 1993. Citado na página 34.

- 39 OVERDUIN, J. M.; COOPERSTOCK, F. I. Evolution of the scale factor with a variable cosmological term. 1998. Citado na página 34.
- 40 OZER, M.; TAHA, M. O. A Solution to the Main Cosmological Problems. *Phys. Lett.*, B171, p. 363–365, 1986. Citado na página 34.
- 41 CHIBA, T.; SUGIYAMA, N.; NAKAMURA, T. Cosmology with x-matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 289, 05 1997. Citado na página 34.
- 42 SAHNI, V.; WANG, L. New cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 62, p. 103517, Oct 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.103517>>. Citado na página 34.
- 43 SAHNI, V. The cosmological constant problem and quintessence. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- 44 PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 75, p. 559–606, Apr 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.559>>. Citado na página 34.
- 45 PAUL, B. C.; DEBNATH, P. S.; GHOSE, S. Accelerating universe in modified theories of gravity. 2009. Citado na página 34.
- 46 CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V.; TROISI, A. Reconciling dark energy models with $f(r)$ theories. *Physical review D: Particles and fields*, v. 71, 01 2005. Citado na página 34.
- 47 AMENDOLA, L.; POLARSKI, D.; TSUJIKAWA, S. Are $f(r)$ dark energy models cosmologically viable? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, p. 131302, Mar 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.131302>>. Citado na página 34.
- 48 DEWITT, B. S. Quantum Field Theory in Curved Space-Time. *Phys. Rept.*, v. 19, p. 295–357, 1975. Citado na página 35.
- 49 CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. 2011. Citado na página 36.
- 50 OLMO, G. J. Palatini approach to modified gravity: $f(r)$ theories and beyond. 2011. Citado na página 36.

- 51 AFONSO, V. I.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. *Phys. Rev.*, D97, n. 2, p. 021503, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 39, 55 e 56.
- 52 AFONSO, V. I. et al. A correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. 2018. Citado 6 vezes nas páginas 39, 55, 56, 57, 60 e 64.
- 53 JIMÉNEZ, J. B.; DELHOM, A. Instabilities in metric-affine theories of gravity with higher order curvature terms. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 6, p. 585, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 45.
- 54 AFONSO, V. I. et al. *The role of torsion in projective invariant theories of gravity with non-minimally coupled matter fields*. 2017. Citado na página 45.
- 55 OLMO, G. Introduction to palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies. 12 2012. Citado na página 47.
- 56 DELSATE, T.; STEINHOFF, J. New insights on the matter-gravity coupling paradigm. 2012. Citado na página 50.
- 57 PANI, P.; SOTIRIOU, T. P. Surface singularities in eddington-inspired born-infeld gravity. 2012. Citado na página 50.
- 58 JIMENEZ, J. B. et al. Born-infeld inspired modifications of gravity. 2017. Citado na página 50.
- 59 DELHOM, A.; OLMO, G. J.; ORAZI, E. Ricci-based gravity theories and their impact on maxwell and nonlinear electromagnetic models. 2019. Citado na página 56.
- 60 AFONSO, V. I. Compact scalar field solutions in eibi gravity. 2020. Citado na página 57.
- 61 MAGALHÃES, R. B.; OLMO, G. J.; CRISPINO, L. C. B. Comunicação privada. Ainda em Processo de publicação. Citado na página 65.
- 62 WYMAN, M. Static Spherically Symmetric Scalar Fields in General Relativity. *Phys. Rev. D*, v. 24, p. 839–841, 1981. Citado na página 67.
- 63 OLMO, G. J. Nonsingular Black Holes in Palatini Extensions of General Relativity. *Springer Proc. Phys.*, v. 176, p. 183–219, 2016. Citado na página 71.
- 64 RUBIERA-GARCIA, D. From fundamental physics to tests with compact objects in metric-affine theories of gravity. 2020. Citado 3 vezes nas páginas 71, 73 e 75.

-
- 65 BEJARANO, C. et al. Palatini wormholes and energy conditions from the prism of general relativity. 2016. Citado na página [77](#).
- 66 OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Geons in Palatini Theories of Gravity. *Fundam. Theor. Phys.*, v. 189, p. 161–190, 2017. Citado na página [77](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Mapeamento de $f(R, Q)$

A.1 *Mapping* em gravidade $f(R, Q)$

Ao contrário da Teoria $f(R)$, a matriz de deformação $\hat{\Omega}$ não é proporcional a matriz de identidade ($\hat{\Omega} = f_R \hat{I}$). Para obter as relações de correspondência para a gravidade quadrática, nos interessa soluções para

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} (\Omega^{-1})^\mu_\nu = f_R \delta^\mu_\nu + 2f_Q R^\mu_\nu(g), \quad (\text{A.1})$$

onde $R^\mu_\nu(g)$, dispõe que a equação (A.1) deve ser interpretada como uma equação híbrida, pois, ao invés de escrevermos o tensor de Ricci satisfazendo as condições de mapeamento ($R^\mu_\nu(q)$), como destaca a eq. (5.22), optamos por trabalhar com a métrica g implícita. No que segue, precisamos explicitar a matriz Ω^μ_ν de tal forma que todo o lado direito da equação (A.1) dependa explicitamente da métrica auxiliar $q_{\mu\nu}$. E para isto, iremos propor uma forma de solução análoga a abordagem feita para a gravidade *EiBI*. Partindo deste pressuposto, escrevemos

$$|\hat{\Omega}|^{1/2} (\Omega^{-1})^\mu_\nu = A(X, \phi) \delta^\mu_\nu + B(X, \phi) X^\mu_\nu \equiv f_R \delta^\mu_\nu + 2f_Q R^\mu_\nu, \quad (\text{A.2})$$

e

$$\Omega^\mu_\nu = C(X, \phi) \delta^\mu_\nu + D(X, \phi) X^\mu_\nu \equiv [f_R (f_R + 2f_Q X)]^{1/2} - 2f_Q \left(\frac{f_R}{f_R + 2f_Q X} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.3})$$

Cujo determinante associado e com dependência explícita em X é: $\hat{\Omega} = f_R^3 (f_R + 2f_Q X)$. Por agora, iremos eliminar a dependência na métrica $g_{\mu\nu}$ e escrever a matriz de deformação com dependência na métrica auxiliar. Desta forma, temos

$$(\Omega^{-1})^\mu_\nu = \tilde{A}(Z, \phi) \delta^\mu_\nu + \tilde{B}(Z, \phi) Z^\mu_\nu \equiv |\hat{\Omega}|^{-1/2} (f_R \delta^\mu_\nu + 2f_Q Z^\mu_\nu) \quad (\text{A.4})$$

e também

$$\Omega^\mu_\nu = \tilde{C}(Z, \phi) \delta^\mu_\nu + \tilde{D}(Z, \phi) Z^\mu_\nu \equiv |\hat{\Omega}|^{-1/2} \left[\frac{1}{f_R} \delta^\mu_\nu - \frac{2f_Q}{f_R (f_R + 2f_Q Z)} Z^\mu_\nu \right]. \quad (\text{A.5})$$

Recorde que a existência do objeto Z anula a dependência na métrica $q_{\mu\nu}$. Sobre esta última equação, identificamos que $|\hat{\Omega}|^{-1/2} = [f_R^3 (f_R + 2f_Q Z)]^{1/2}$. De (A.5), concluímos que

$$Z_\nu^\mu = (\tilde{C} + \tilde{D}Z)X_\nu^\mu \rightarrow X = \frac{Z}{\tilde{C} + \tilde{D}Z}. \quad (\text{A.6})$$

Observe que para explicitarmos a matriz Ω_ν^μ , em decorrência da dependência na métrica- q , foi necessário descrever nossas equações em termos do objeto Z_ν^μ e não em X_ν^μ (como é feito na teoria $f(R)$).

Da relação (A.6), após algumas simplificações, temos que^a

$$Z = \frac{\sqrt{f_R^3 (f_R + 2f_Q Z)}}{f_R + 2f_Q Z} X \rightarrow X = \frac{(f_R + 2f_Q Z)}{\sqrt{f_R^3 (f_R + 2f_Q Z)}} Z. \quad (\text{A.7})$$

Para assegurar consistência com a matriz (A.5), as derivadas f_R e f_Q , devem ser descritas com respeito a lagrangeana de matéria canônica $K(Z, \phi) = Z - 2V(\phi)$. Ou seja, devemos adotar $R = \kappa^2(Z - 4V(\phi))$ na descrição das derivadas. Nesse sentido, as expressões prescritas para o mapeamento devem satisfazer a forma quadrática de Ω_ν^μ . Da relação de correspondência (*vide* seções de *mapping* geral), no contexto de $f(R, Q)$, temos que

$$R|\hat{\Omega}|^{-1/2} = \kappa^2(2P - XP_X), \quad (\text{A.8})$$

e com isto, as relações de correspondência para as densidades lagrangeanas estabelecidas anteriormente (no capítulo anterior), têm a forma

$$XP_X = ZK_Z|\hat{\Omega}|^{-1/2} \rightarrow P(X, \phi) = K(Z, \phi)|\hat{\Omega}|^{-1/2}. \quad (\text{A.9})$$

Note que o sinal do expoente do determinante segue a construção da matriz descrita em (A.5) e, conseqüentemente, segue a relação entre os objetos Z - X , (A.7).

Por fim, concluímos que

$$P(X, \phi) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} \left(\frac{f(R, Q)}{\kappa^2} + ZK_Z - K \right) \quad \text{e} \quad P_X = \frac{(\tilde{C} + \tilde{D}Z)}{|\hat{\Omega}|^{1/2}} K_Z. \quad (\text{A.10})$$

^a Neste caso, a relação das métricas com os campos escalares se dá por $q^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi = g^{\mu\alpha}(\Omega^{-1})^\lambda_\alpha\partial_\lambda\phi \rightarrow (\Omega^{-1})^\lambda_\alpha\partial_\lambda\phi = (\tilde{C} + \tilde{D}Z)\partial_\alpha\phi$.

No que segue, nos interessa obter uma solução para a densidade de matéria $K = K(Z, \phi)$, onde

$$K(Z, \phi) = \frac{f(R, Q)}{\kappa^2} + |\hat{\Omega}|^{1/2}(XP_X - P) \quad (\text{A.11})$$

A.1.1 Relações $f(R)$ - $f(R, Q)$

Como nossa matriz foi construída em termos da métrica $q_{\mu\nu}$ de forma direta, para podemos mapear a matéria $P(X, \phi)$ basta introduzirmos a deformação inerente a curvatura; a curvatura que em $f(R)$ correspondia a matéria original, passa a ser a nossa curvatura secundária. Pois, no presente caso, nossa curvatura original é aquela correspondente a matéria $K(Z, \phi)$. Considere a Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades gerais

<i>Ricci-based gravity</i>	Relação com $\hat{\Omega}$	Curvatura	Matéria original
$f(R)$	$\Omega_\nu^\mu = f_R \delta_\nu^\mu$	$R = \kappa^2(2P - XP_X)$	$P(X, \phi)$
$f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$	$ \hat{\Omega} ^{1/2}(\Omega^{-1})_\nu^\mu = f_R \delta_\nu^\mu + 2f_Q R_\nu^\mu$	$R(q) = \kappa^2(2K - ZK_Z)$	$K(Z, \phi)$

A.1.2 Soluções para a matéria do *Einstein-frame*

Por questões de simplicidade iremos obter primeiro uma solução para a matéria original. Tendo em vista que o escalar de curvatura associado a X , é dado como

$$R = |\hat{\Omega}|^{1/2} \kappa^2 [(f_R + 2f_Q Z)|\hat{\Omega}|^{1/2} Z - 4V(\phi)], \quad (\text{A.12})$$

para o modelo gravitacional $f(R, Q) = R + \alpha R^2 + \beta Q$, a equação (A.11) nos leva a

$$\begin{aligned} K(Z, \phi) &= (f_R + 2f_Q Z)|\hat{\Omega}|Z + (\alpha + \beta)|\hat{\Omega}|^{1/2} \kappa^2 [(f_R + 2f_Q Z)|\hat{\Omega}|^{1/2} Z - 4V(\phi)]^2 - |\hat{\Omega}|^{1/2} 2\mathcal{A}(\phi) \\ &= [1 - (\alpha + \beta)\kappa^2 8V(\phi)] \left\{ |\hat{\Omega}|(f_R + 2f_Q Z) \left[Z + \frac{(\alpha + \beta)\kappa^2 |\hat{\Omega}|^{1/2} (f_R + 2f_Q Z) Z^2}{1 - (\alpha + \beta)\kappa^2 8V(\phi)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + |\hat{\Omega}|^{1/2} \frac{[(\alpha + \beta)\kappa^2 16V(\phi)^2 - 2V(\phi)]}{1 - (\alpha + \beta)\kappa^2 8V(\phi)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde

$$f_R + 2f_Q Z = 1 - 8\alpha\kappa^2 V(\phi) + 2Z(\alpha\kappa^2 + \beta) \quad (\text{A.15})$$

e

$$|\hat{\Omega}|^{-1/2} = \left\{ (1 - 8\alpha\kappa^2 V(\phi) + 2\alpha\kappa^2 Z)^3 [1 - 8\alpha\kappa^2 V(\phi) + 2Z(\alpha\kappa^2 + \beta)] \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Campo escalar livre: Como *ansatz*, ao considerarmos o campo escalar $V(\phi) = 0$, identificamos a forma de uma possível solução

$$K(Z, \phi) = Z + (\alpha + \beta)\kappa^2 \Sigma Z^2, \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\Sigma = \sqrt{\frac{1 + 2Z(\alpha\kappa^2 + \beta)}{(1 + 2\alpha Z\kappa^2)^3}}.$$