



Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Engenharia Elétrica e Informática

Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

DINART DUARTE BRAGA

*DETERMINAÇÃO COMPUTACIONAL DAS CURVAS DE
PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO DAS MODULAÇÕES
PSK E QAM EM CANAIS DE COMUNICAÇÃO AWGN*

Campina Grande, Paraíba
Julho de 2011

DINART DUARTE BRAGA

*DETERMINAÇÃO COMPUTACIONAL DAS CURVAS DE
PROBABILIDADES DE ERRO DE SÍMBOLO DAS MODULAÇÕES
PSK E QAM EM CANAIS DE COMUNICAÇÃO AWGN*

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Campina Grande
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do grau de Bacharel em Ciências no
Domínio da Engenharia Elétrica.*

Área de Concentração: Telecomunicações

Orientador:

Prof. Dr. Edmar Candeia Gurjão

Campina Grande, Paraíba
Julho de 2011

DINART DUARTE BRAGA

*DETERMINAÇÃO COMPUTACIONAL DAS CURVAS DE
PROBABILIDADES DE ERRO DE SÍMBOLO DAS MODULAÇÕES
PSK E QAM EM CANAIS DE COMUNICAÇÃO AWGN*

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade
Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade
Federal de Campina Grande como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do grau de Bacharel em
Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Telecomunicações

Aprovado em / /

Professor Avaliador
Universidade Federal de Campina Grande
Avaliador

Professor Dr. Edmar Candeia Gurjão
Universidade Federal de Campina Grande
Orientador, UFCG

Dedico este trabalho à minha mãe, Elita, que sempre esteve ao meu lado nos momentos em que precisei.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família como um todo, por ter proporcionado alicerce para a minha formação pessoal e intelectual. Em especial, agradeço a minha mãe, Elita, que sempre me serviu como exemplo de humanidade, caráter, perseverança e profissionalismo, além de ter dado todo o apoio necessário para que eu concluísse o curso de engenharia elétrica.

Agradeço também a todos aqueles que fazem parte do Departamento de Engenharia Elétrica da UFCG, especialmente aos professores que exercem a atividade de docência com paixão, que entram na sala de aula com entusiasmo de ensinar algo novo aos seus alunos.

Dentre estes professores, agradeço particularmente ao professor Edmar Candeia Gurjão, que foi meu orientador, no sentido mais amplo da palavra, desde o meu primeiro ano de curso até a conclusão.

Gostaria também de agradecer a todos os colegas de curso que compartilharam comigo os muitos momentos de dificuldades e também de alegrias que o curso proporcionou.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram positivamente para a construção da pessoa que sou hoje.

Poeminha do Contra

*Todos estes que aí estão
Atravancando o meu caminho,
Eles passarão.
Eu passarinho!*

-Mario Quintana

RESUMO

Um dos modelos comumente utilizados no estudo teórico de canais de comunicação digital é o canal AWGN. Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica dos assuntos relevantes ao estudo deste modelo, assim como um estudo dos esquemas de modulação digital Phase Shift Keying (PSK) e Quadrature Amplitude Modulation(QAM). Também foram mostrados detalhes de implementação de simuladores de transmissão de informação digital em um canal AWGN utilizando-se modulações PSK de ordem arbitrária ou então modulações QAM retangulares. Quando comparados aos valores previstos pela teoria, os resultados obtidos a partir da simulação, curvas de probabilidade de erro de símbolo e diagramas de constelação, apresentaram um alto grau de concordância, validando o modelo computacional simulado.

Palavras-chave: Canal, AWGN, Digital, PSK, QAM, Probabilidade de Erro.

ABSTRACT

One of the most used models in theoretical studies of digital communication channels is the AWGN channel. In this work, a bibliographic review on relevant topics regarding the study of the model referred above, as well as a review of the digital modulation schemes Phase Shift Keying (PSK) and Quadrature Amplitude Modulation(QAM). Implementation details of an AWGN channel simulator that performs digital information transmission using arbitrary order PSK modulations or rectangular QAM are shown. If compared to the theoretical results, the simulation results obtained from simulation, probability of symbol error curves and noisy constellation diagrams, present high degree of agreement, validating the developed computer model.

Keywords: Channel, AWGN, Digital, PSK, QAM, Error Probability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital. | 2 |
| Figura 2 – Conversão de sinal para vetor. | 7 |
| Figura 3 – Conversão de vetor para sinal. | 7 |
| Figura 4 – Modelo de canal AWGN. | 10 |
| Figura 5 – Densidade espectral de potência do ruído Térmico (Normalizado). | 12 |
| Figura 6 – Diagrama de constelação BPSK. | 16 |
| Figura 7 - Diagrama de constelação QPSK. | 17 |
| Figura 8 - Diagrama de constelação 8PSK. | 17 |
| Figura 9 - Diagrama de constelação 16QAM retangular. | 20 |
| Figura 10 – Regiões de decisão de constelação 16QAM retangular. | 21 |
| Figura 11 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação BPSK. | 31 |
| Figura 12 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 0dB$ | 32 |
| Figura 13 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 5dB$ | 32 |
| Figura 14 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 10dB$ | 33 |
| Figura 15 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação QPSK. | 33 |
| Figura 16 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 0dB$ | 34 |
| Figura 17 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 5dB$ | 34 |
| Figura 18 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 10dB$ | 35 |
| Figura 19 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 8PSK. | 35 |
| Figura 20 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 5dB$ | 36 |
| Figura 21 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 10dB$ | 36 |
| Figura 22 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 15dB$ | 37 |
| Figura 23 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 3PSK. | 37 |
| Figura 24 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 0dB$ | 38 |
| Figura 25 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 5dB$ | 38 |
| Figura 26 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 10dB$ | 39 |
| Figura 27 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 16QAM. | 39 |

| | |
|---|----|
| Figura 28 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 5dB$ | 40 |
| Figura 29 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 10dB$ | 40 |
| Figura 30 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 15dB$ | 41 |
| Figura 31 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 64QAM. | 41 |
| Figura 32 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 15dB$ | 42 |
| Figura 33 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 20dB$ | 42 |
| Figura 34 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 25dB$ | 43 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AWGN – Additive White Gaussian Noise

PSK – Phase Shift Keying

QAM – Quadrature Amplitude Modulation

PCM – Pulse Coding Modulation

LAPS – Laboratório de Automação e Processamento de Sinais

E_b/N_0 – Relação Sinal Ruído de Bit

BPSK – Binary Phase Shift Keying

QPSK – Quaternary Phase Shift Keying

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 3 |
| 2 | Revisão Bibliográfica | 4 |
| 2.1 | Espaço de Sinais | 4 |
| 2.2 | Decomposição de Processos Estocásticos | 8 |
| 2.3 | Modelo do Canal AWGN | 9 |
| 2.3.1 | Ruído AWGN..... | 12 |
| 2.4 | Modulação Digital | 13 |
| 2.4.1 | Aspectos Gerais..... | 14 |
| 2.4.2 | Phase Shift Keying (PSK)..... | 15 |
| 2.4.3 | Quadrature Amplitude Modulation (QAM) | 19 |
| 3 | Implementação..... | 22 |
| 3.1 | Phase Shift Keying (PSK)..... | 22 |
| 3.1.1 | Parâmetros de Entrada..... | 22 |
| 3.1.2 | Criação da constelação | 23 |
| 3.1.3 | Geração de Sequência e Mapeamento (Modulação)..... | 23 |
| 3.1.4 | Geração do Ruído AWGN | 24 |
| 3.1.5 | Transmissão, Demodulação e Cálculo do Número de Erros..... | 24 |
| 3.1.6 | Cálculo da Probabilidade de Erro Teórica | 25 |
| 3.1.7 | Plote das Curvas de P_e versus E_b/N_0 | 26 |
| 3.1.8 | Plote dos Diagramas de Constelação na Recepção | 27 |
| 3.2 | Quadrature Amplitude Modulation (QAM)..... | 27 |
| 3.2.1 | Parâmetros de Entrada..... | 27 |
| 3.2.2 | Cálculo de Parâmetros Úteis | 27 |
| 3.2.3 | Criação da constelação | 28 |
| 3.2.4 | Geração de Sequência e Mapeamento (Modulação)..... | 28 |
| 3.2.5 | Geração do Ruído AWGN | 29 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.2.6 | Transmissão, Demodulação e Cálculo do Número de Erros..... | 29 |
| 3.2.7 | Cálculo da Probabilidade de Erro Teórica | 30 |
| 3.2.8 | Plote das Curvas de P_e versus E_b/N_0 | 30 |
| 3.2.9 | Plote dos Diagramas de Constelação na Recepção | 30 |
| 4 | Resultados..... | 31 |
| 4.1 | Phase Shift Keying (PSK)..... | 31 |
| 4.1.1 | BPSK..... | 31 |
| 4.1.2 | QPSK..... | 33 |
| 4.1.3 | 8PSK..... | 35 |
| 4.1.4 | 3PSK..... | 37 |
| 4.2 | Quadrature Amplitude Modulation (QAM)..... | 39 |
| 4.2.1 | 16QAM..... | 39 |
| 4.2.2 | 64QAM..... | 41 |
| 5 | Considerações Finais | 44 |
| | Bibliografia..... | 45 |
| | APÊNDICE A – Código do Simulador PSK..... | 46 |
| | APÊNDICE B – Código do Simulador QAM..... | 48 |

1 INTRODUÇÃO

Desde a criação do telefone, informação é transmitida por meio de sinais eletromagnéticos analógicos, essa classe de sinais tem dominado as telecomunicações e esse domínio foi fortalecido pelo desenvolvimento de aplicações como rádio e televisão.

No entanto, ao contrário do que muitas vezes se imagina, as primeiras transmissões de informação por meios eletrônicos, realizadas ainda no século XIX, eram digitais, que é o caso das transmissões feitas por equipamentos como telégrafos e teletipos.

Com o advento de técnicas que permitiam a conversão de sinais analógicos em sinais digitais, notadamente o Pulse Coding Modulation (PCM), um interesse renovado pelas comunicações digitais surgiu, levando a construções teóricas importantíssimas, com contribuições fundamentais de Nyquist, Hartley, Shannon[1] e outros.

Desde então, as comunicações digitais vêm conquistando espaço cada vez maior no mundo das telecomunicações, inclusive, substituindo muitas das aplicações que utilizavam transmissões digitais, como difusão televisiva.

Uma versão simplificada de um sistema comunicações digital moderno pode ser representada por um diagrama de blocos, dado na Figura 1.

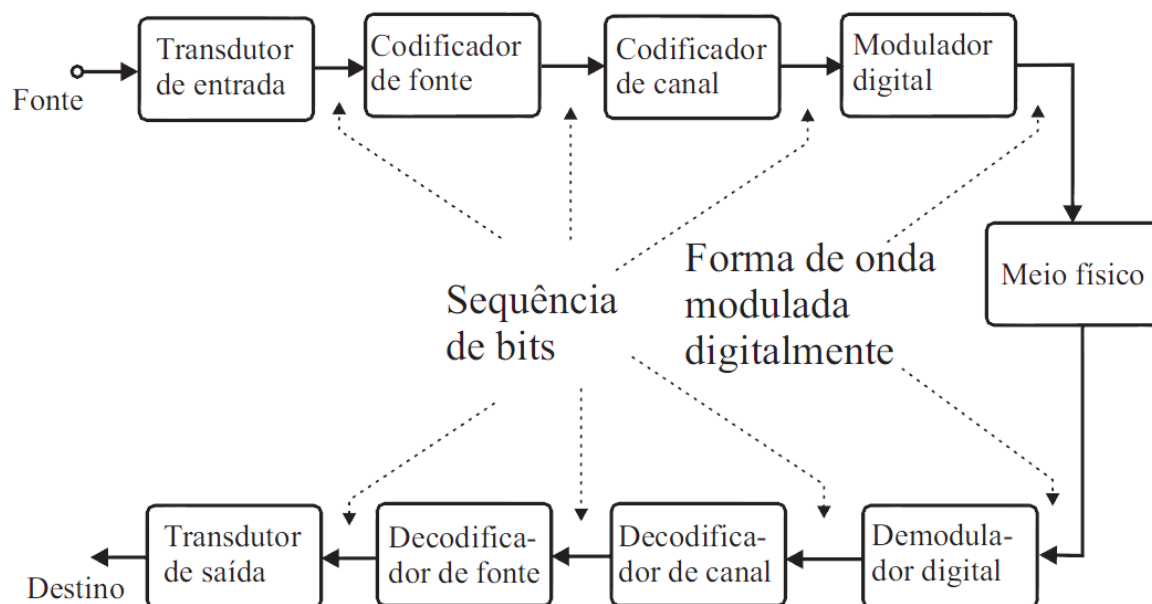


Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital.

FONTE: Apostila de Comunicações Digitais do Prof. José Ewerton.

Esta versão simplificada não mostra blocos que representam técnicas muito comuns nos sistemas digitais modernos, como criptografia, multiplexação, espalhamento espectral, uso de protocolos de múltiplo acesso, etc.

Muito embora o diagrama de blocos da Figura 1 omita alguns blocos presentes nos sistemas modernos, o sistema simplificado obtido ainda possui uma complexidade suficiente para que seja necessário um estudo isolado de cada uma desses blocos.

Neste trabalho, é feita uma revisão bibliográfica da teoria que envolve três destes blocos: o modulador, demodulador e o meio físico. Para tanto será lançada mão da representação de sinais modulados digitalmente por uma base finita de funções ortogonais e de um modelo probabilístico que descreve a influência do canal sobre o sinal transmitido.

Uma vez apresentada a teoria, é descrita a implementação de dois simuladores de transmissão digital por canais AWGN utilizando modulação por chaveamento de fase (PSK) e modulação de amplitude em quadratura (QAM).

O simulador desenvolvido é utilizado para determinação de como a probabilidade de erro de símbolo evolui com a mudança da relação sinal ruído de bit (E_b/N_0), os resultados obtidos são comparados com as expressões teóricas.

Gráficos mostrando a diferença dos diagramas de constelação recebidos para diferentes valores de E_b/N_0 também são apresentados. Por fim, são feitas as considerações finais sobre o projeto.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos principais deste trabalho foram a revisão bibliográfica do assunto abordado, uma vez que esta foi de grande utilidade no desenvolvimento do estágio curricular realizado em paralelo no Laboratório de Automação e Processamento de Sinais (LAPS), e a concepção de simuladores de transmissão digital em canais AWGN, com objetivo de desenvolver uma maior intimidade com o assunto estudado por meio da verificação da teoria.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é feita uma revisão bibliográfica dos pontos mais importantes da teoria, necessários para o desenvolvimento do simulador.

2.1 ESPAÇO DE SINAIS

A definição e propriedades de espaços vetoriais geralmente são vistos no primeiro ano do curso de Engenharia Elétrica, mas aplicações dessa teoria são utilizadas em praticamente todas as disciplinas.

A utilização dessa ferramenta em diferentes campos da Engenharia Elétrica, assim como outras engenharias, se deve ao fato dela simplificar o tratamento de sistemas lineares, possuindo resultados bastante fortes.

Uma das aplicações dos espaços vetoriais na Engenharia Elétrica está relacionada ao fato de que uma função no tempo pode ser decomposta em uma base de funções, de forma similar a qual um vetor é decomposto em uma base de vetores. Isso é feito constantemente por engenheiros eletricitas ao calcular os coeficientes da série de Fourier de uma função, mas em geral o tratamento teórico da maioria dos livros introdutórios não utiliza a abordagem de espaço de sinais.

Essa decomposição permite tratar funções como vetores e aplicar os resultados da teoria de espaços vetoriais no estudo de funções, ou no contexto da engenharia de transmissão: no estudo de sinais.

O produto interno de dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é denotado por $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle$ é definido como

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt . \quad (1)$$

De forma similar aos vetores, se o valor do produto interno de dois sinais for nulo, eles são ditos ortogonais, isto é

$$x_1(t) \perp x_2(t) \Leftrightarrow \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0. \quad (2)$$

A norma de um sinal é dada por

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\varepsilon_x}, \quad (3)$$

em que ε_x é a energia de $x(t)$.

Um conjunto de m sinais é dito ortonormal se eles forem ortogonais entre si e se a norma de cada um deles for unitária. Um conjunto é dito linearmente independente se nenhum dos sinais do conjunto puder ser expresso como uma soma ponderada (combinação linear) dos outros sinais.

A norma de um sinal tem a seguinte propriedade

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|. \quad (4)$$

Esta relação é comumente conhecida como desigualdade triangular e está intimamente relacionada ao fato de o espaço de sinais ser um espaço métrico, isto é, pode-se definir uma função distância, $d(x, y)$ entre elementos do conjunto.

Em um espaço de funções, essa função é definida como

$$d(x, y) = \|x(t) - y(t)\|. \quad (5)$$

Esta definição é muito importante, pois permite que sejam calculadas distâncias entre sinais, o que é de bastante interesse no estudo da detecção de sinais, pois distância pode ser interpretada como dissimilaridade.

Como dito anteriormente, da mesma forma que um vetor pode ser decomposto em uma combinação linear de vetores de uma base ortogonal, um sinal também pode ser decomposto em uma base de sinais ortogonais.

Seja $s(t)$ um sinal com energia finita ε_s e suponha a existência de um conjunto de sinais $\{\phi_n(t)\}_{(n=1,2,\dots,K)}$, que sejam ortonormais, isto é

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}. \quad (6)$$

O sinal $s(t)$ pode ser aproximado por uma combinação linear destes sinais, isto é

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k \phi_k(t). \quad (7)$$

Pode ser demonstrado que a energia do sinal erro $e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$ é minimizada quando os valores s_i são dados pela projeção (produto interno) de $s(t)$ e $\phi_i(t)$, que é dada por

$$s_i = \langle s(t), \phi_i(t) \rangle. \quad (8)$$

Isto implica que o sinal erro não possui nenhuma projeção no espaço de funções gerado pela base $\{\phi_n(t)\}$.

Dessa forma, um sinal $s(t)$ pode ser representado por um vetor contendo os coeficientes da decomposição, isto é, $s(t)$ pode ser representado pelo vetor $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_K]^T$.

É interessante notar que a representação em forma de sinal no tempo, $s(t)$, e na forma de vetor, \mathbf{s} , são isomórficas, de tal sorte que operações podem ser feitas em um sinal em qualquer uma das suas representações que os resultados serão os mesmos. As operações de soma, subtração, produto interno e norma dos vetores são definidas da forma usual. Um exemplo dessa propriedade é dado a seguir

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle. \quad (9)$$

Um diagrama de blocos mostrando a operação de conversão do sinal no tempo para os coeficientes do vetor é mostrado na Figura 2. Já a operação inversa é mostrada na Figura 3.

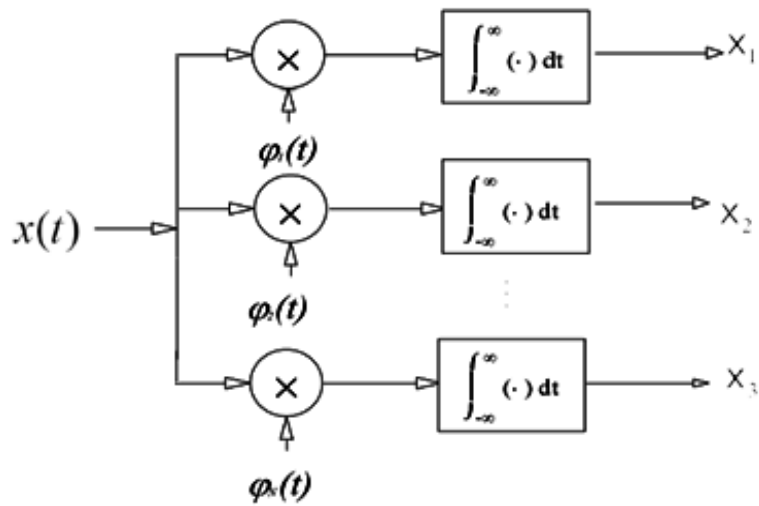


Figura 2 – Conversão de sinal para vetor para uma base de cardinalidade 3.

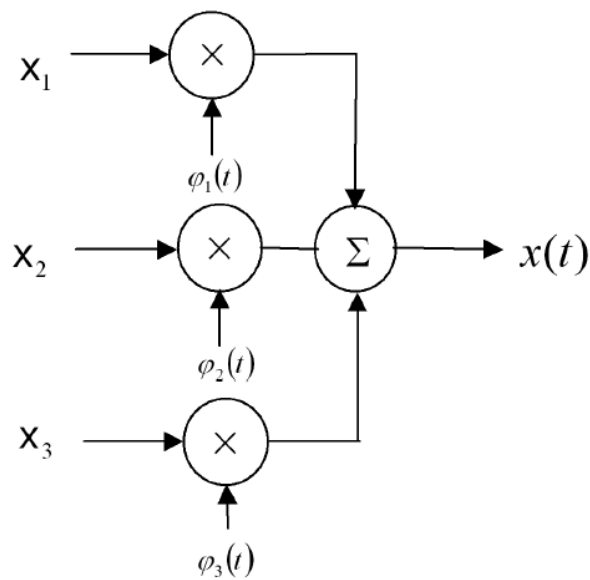


Figura 3 – Conversão de vetor para sinal a partir de uma base de cardinalidade 3.

As Figuras 2 e 3 podem ser facilmente generalizadas para maiores cardinalidades de base adicionando-se novos ramos ao diagrama.

2.2 DECOMPOSIÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Da mesma forma que uma função determinística pode ser decomposta em uma soma ponderada de funções de uma base ortogonal, um processo estocástico também possui essa propriedade. No entanto, enquanto os pesos da decomposição da função determinística são escalares (reais ou complexos), os pesos da decomposição de um processo estocástico são variáveis aleatórias.

Essa decomposição pode ser feita utilizando-se a expansão de Karhunen-Loève, cujos resultados são mostrados a seguir. Uma demonstração detalhada de como esses resultados são obtidos encontra-se em [2].

Existem muitas formas pelas quais um processo estocástico pode ser expandido em uma soma ponderada de funções $\{\phi_n(t)\}$ com pesos $\{X_n\}$. No entanto, caso seja feita a restrição de que as variáveis aleatórias $\{X_n\}$ sejam mutualmente decorrelacionadas, então a base ortonormal terá de ser formada pelas soluções de um problema de autofunções dado por uma equação integral em que o núcleo da equação é a função de autocovariância do processo estocástico.

A solução desse problema de autofunções resulta nas funções de base $\{\phi_n(t)\}$, em seguida o processo estocástico deve ser projetado nas funções base para determinar as variáveis aleatórias $\{X_n\}$, que são os coeficientes da combinação linear.

O teorema da expansão de Karhunen-Loève afirma que um processo estocástico $X(t)$ com função de autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ pode ser expandido em um intervalo de interesse $[a, b]$ em termos de um conjunto de funções ortonormais $\{\phi_n(t)\}$ de tal sorte que os coeficientes da expansão sejam decorrelacionados. Os $\phi_n(t)$'s são dados pela solução do problema de autofunção que é dado pela seguinte equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_X(t_1, t_2) \phi_n(t_2) dt_2 = \lambda_n \phi_n(t_1) \quad a < t_1 < b. \quad (10)$$

As variáveis aleatórias $\{X_n\}$ são determinadas da seguinte forma

$$X_n = \langle X(t), \phi_n(t) \rangle. \quad (11)$$

Desta forma, o processo estocástico $X(t)$ pode ser expresso pela seguinte combinação linear

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t) \quad a < t < b. \quad (12)$$

Esta decomposição apresenta algumas propriedades interessantes, uma delas diz respeito da variância de X_n que é igual a λ_n , isto é:

$$COV[X_n, X_M] = \begin{cases} \lambda_n, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}. \quad (13)$$

Outra propriedade diz respeito à esperança de $\hat{X}(t)$, que é

$$E(\hat{X}(t)) = E(X(t)). \quad (14)$$

Outra propriedade fundamental da expansão de Karhunen-Loève diz respeito à natureza das variáveis $\{X_n\}$ caso o processo $X(t)$ seja Gaussiano. Caso $X(t)$ seja um processo gaussiano, então as variáveis aleatórias $\{X_n\}$ também serão gaussianas. Esse resultado é essencial para o desenvolvimento de um modelo de canal de comunicação, que será deduzido mais adiante.

2.3 MODELO DO CANAL AWGN

Na introdução deste trabalho, um diagrama de blocos de um sistema de comunicação moderno foi apresentado, mais especificamente na Figura 1. Para efeito de estudo da influência do canal de comunicação no sistema, considera-se somente o canal de comunicação, o sinal transmitido e o sinal recebido.

Sabe-se que um canal de comunicação impõe alguns tipos de degradação ao sinal de entrada, tais como ruído, atenuação, seletividade em frequência, desvanecimento e interferência. As características de cada canal que determinam quais os tipos de degradação ocorrem naquele canal em particular e quais delas são importantes para determinação do desempenho do canal.

O ruído, em particular, está presente em todos os sistemas de comunicação e é a degradação determinante para muitos tipos de canal, como enlaces de comunicação espacial.

Um modelo simplificado para canais de comunicação que só leva em conta a presença de ruído é o modelo do canal de ruído aditivo gaussiano branco (AWGN), na qual o sinal de saída é considerado igual ao sinal de entrada somado a um processo ruído gaussiano branco. Isso pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$r(t) = s_m(t) + n(t) . \quad (15)$$

em que $s_m(t)$ é o sinal transmitido, $n(t)$ é um processo gaussiano de média nula e densidade espectral de potência constante (branco) e igual $N_0/2$ e $r(t)$ é o sinal recebido no receptor. Esse modelo é representado graficamente na Figura 4.

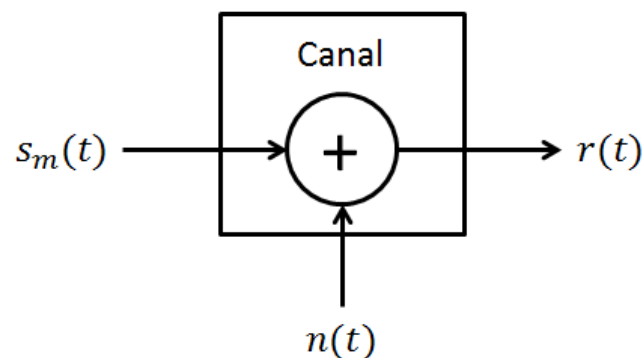


Figura 4 – Modelo de canal AWGN.

A Equação (15) pode ser expressa na forma vetorial por meio da decomposição dos seus termos em uma base ortonormal. A transformação do sinal transmitido $s_m(t)$ em um vetor é função do tipo de modulação utilizada e será tratada com detalhes na próxima seção. Já a decomposição do processo $n(t)$ independe do tipo de modulação utilizada, quando este é um processo gaussiano de média nula e densidade espectral de potência constante.

Foi visto na seção anterior que um processo estocástico pode ser decomposto em uma base $\{\phi_n(t)\}$ a partir de uma soma ponderada por variáveis aleatórias $\{X_n\}$ das funções desta base.

Uma base $\{\phi_n(t)\}$ para decomposição de $n(t)$ deve ser encontrada a partir da Equação (10). Para que essa equação seja aplicada, deve-se determinar a função de autocovariância do processo $n(t)$, que é dada por:

$$\begin{aligned}
C_N(t_1, t_2) &= R_N(t_1, t_2) - E_N(t_1) \cdot E_N(t_2) \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{N_0}{2} \right\} - 0.0 \\
&= \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \\
&= \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{16}$$

Portanto, a função de autocovariância do ruído gaussiano branco de média nula é dada por um impulso em $t_1 = t_2$, esta propriedade facilitará bastante a solução do problema de autofunção da Equação (10), dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) \phi_n(t_2) dt_2 = \lambda_n \phi_n(t) \quad a < t_1 < b. \tag{17}$$

Utilizando a propriedade de filtragem do impulso, obtém-se:

$$\frac{N_0}{2} \phi_n(t_1) = \lambda_n \phi_n(t_1) \quad a < t_1 < b. \tag{18}$$

Desta equação, percebe-se que $\phi_n(t)$ pode ser qualquer função arbitrária. Portanto, pode-se concluir que qualquer base ortonormal pode ser utilizada para expansão de um processo branco de média nula, pois a integral em (11) não altera a gaussianidade de $X(t)$.

O desenvolvimento da equação (18) pode ser utilizado para calcular a variância dos coeficientes $\{X_n\}$:

$$\lambda_n = \frac{N_0}{2}. \tag{19}$$

Portanto, todos os coeficientes terão variância $N_0/2$. Como comentado anteriormente, se o processo que está sendo decomposto é gaussiano de média nula, então todos os coeficientes também serão gaussianos de média nula.

Este resultado é bastante forte, uma vez que independente da base sendo utilizada para decomposição do sinal $s_m(t)$, o ruído AWGN sempre terá o mesmo efeito: soma de uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$ em cada uma das componentes do vetor \mathbf{s}_m , decomposição de $s_m(t)$ em uma base $\{\phi_n(t)\}$ adequada.

Isto permite que a Equação (15) seja escrita na sua forma vetorial, dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}. \quad (20)$$

em que \mathbf{r} é a decomposição em vetor do sinal recebido, \mathbf{s}_m é a decomposição em vetor do sinal enviado e \mathbf{n} é um vetor de variáveis aleatórias com distribuição $\mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$ e de mesma dimensão que \mathbf{s}_m .

2.3.1 RUÍDO AWGN

A escolha de um modelo de ruído branco com distribuição gaussiana não foi baseada simplesmente em uma simplificação matemática para possibilitar deduções analíticas, embora esta seja uma grande vantagem deste modelo de ruído.

Uma das maiores fontes de ruído é o ruído térmico, que é gerado pela agitação térmica dos elétrons dentro de um condutor em equilíbrio, que ocorre independente da aplicação de tensão elétrica.

A densidade espectral desse ruído é função unicamente da temperatura e da frequência [3-4] e é dada por

$$P(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}, \quad (21)$$

em que h é a constante de Planck, f é a frequência, k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura em Kelvin e $P(f)$ é a densidade de potência.

Na Figura 5 é mostrado um gráfico da densidade espectral de potência normalizada, que é dada por $P(f)/(kT)$.

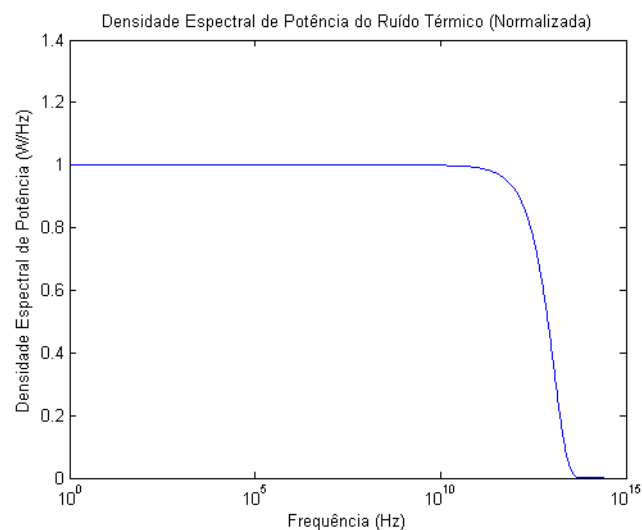


Figura 5 – Densidade espectral de potência do ruído Térmico (Normalizada).

Fica bastante evidente a partir da análise da Figura 5 que $P(f)/(kT)$ pode ser aproximada como constante e igual a 1 para frequências de até algumas dezenas de GHz. Portanto, uma boa aproximação para $P(f)$ é

$$P(f) = kT, f < 10^{11} \text{ Hz}. \quad (22)$$

Como na maioria das vezes o ruído de maior influência é o térmico e a maioria dos sistemas de comunicação operam em frequências inferiores a 100GHz, a aproximação de um canal como possuindo ruído branco é bastante válida.

Além do ruído térmico, outros tipos de ruído contribuem com parcelas menores para o ruído total, entre eles o ruído balístico e radiação de corpos negros/cinzas. Como pelo teorema central do limite, a soma de muitas variáveis aleatórias tende a uma distribuição gaussiana, é natural considerar que a distribuição do ruído branco é gaussiana.

2.4 MODULAÇÃO DIGITAL

Informação digital pode ser representada por uma sequência numérica, que se expressa em uma base binária, consistindo em uma sucessão de 0s e 1s. Essa sequência pode ter origem intrinsecamente discreta, como por exemplo, um texto em um mensageiro instantâneo, ou então ser originada de um processo de amostragem e quantização de um sinal analógico, como, por exemplo, a sequência de bits originadas da amostragem de uma música.

Independente da origem é de interesse prático que essa informação seja transferida entre a fonte e o destino, que se encontram separados espacialmente. Isso é feito por meio da transmissão, à distância, da informação contida na sequência de dígitos binários.

No entanto, a informação contida na sequência binária é uma grandeza intangível e não pode ser transmitida sem antes ser mapeada em alguma grandeza mensurável, como a intensidade de uma onda eletromagnética.

O processo de mapeamento dessa sequência discreta em uma forma de onda, um sinal, é chamado de modulação. Como existe um número finito de dígitos discretos diferentes (1 e 0, para uma sequência binária), o número de formas de onda distintas que

o modulador produz também é finito, esta propriedade caracteriza um sinal modulado digitalmente [5].

Outro aspecto importante da modulação é que ela deve se adequar às características do canal, permitindo um maior desempenho dos sistemas de comunicação.

2.4.1 ASPECTOS GERAIS

Em um esquema de modulação digital sem memória, a sequência de dígitos binários é dividida em subseqüências de k dígitos, cada uma dessas subseqüências é chamada de símbolo. Ao todo, existem $M = 2^k$ símbolos e cada símbolo é mapeado pelo modulador em um sinal $s_m(t)$, onde $m = 1, 2, \dots, 2^k$.

Considerando que cada um desses sinais $s_m(t)$ é transmitido a cada T_s segundos, em que T_s é o intervalo de sinalização, pode-se afirmar que a taxa com que os símbolos são gerados pela fonte é dada por

$$R_s = \frac{1}{T_s} . \quad (23)$$

Uma vez que cada símbolo carrega k bits da sequência digital binária, o intervalo em que um bit é “sinalizado” é dado por

$$T_b = \frac{T_s}{k} = \frac{T_s}{\log_2 M} , \quad (24)$$

e R , a taxa de bit é dada por

$$R = \frac{1}{T_b} = kR_s . \quad (25)$$

O intervalo de bit não deve ser interpretado no sentido estrito da palavra, uma vez que em geral um bit não é sinalizado isoladamente e sim em um conjunto de k bits. Dessa forma, T_b deve ser entendido como uma grandeza estatística.

Seja ε_m a energia de $s_m(t)$, e p_m a probabilidade do símbolo m , a energia média do sinal é dada por

$$\varepsilon_{med} = \sum_{m=1}^M p_m \varepsilon_m . \quad (26)$$

Já a energia média por bit é

$$\varepsilon_{bmed} = \frac{\varepsilon_{med}}{k}. \quad (27)$$

Essa medida é bastante importante para determinação teórica das probabilidades de erro das mais diversas modulações, como será visto a seguir.

A fim de simplificar a notação a ser utilizada nas próximas seções, define-se

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, T) \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}. \quad (28)$$

2.4.2 PHASE SHIFT KEYING (PSK)

A modulação PSK é um esquema de modulação digital na qual a informação de uma fonte é mapeada na fase de uma onda portadora, a qual pode assumir um número finito, M , de valores.

Cada um dos sinais $s_m(t)$ é uma senóide de mesma frequência e amplitude, mas com a fase indexada pelo símbolo a qual ela está codificando. Na maioria dos casos, essas fases encontram-se uniformemente espaçadas no intervalo $[0, 2\pi]$ e M é uma potência de 2.

As formas de onda utilizadas por um modulador M-PSK são dadas por

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) \cos(2\pi f_c t) \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) \sin(2\pi f_c t) \right] \Pi_T(t) \\ &= \cos\left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right] \Pi_T(t), \end{aligned} \quad (29)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$. Em que f_c é a frequência da portadora.

A energia de todas as formas de onda $s_m(t)$ é constante e igual a 1/2, logo, a energia por bit é

$$\varepsilon_{bmed} = \frac{\varepsilon_{med}}{k} = \frac{1}{2k}. \quad (30)$$

Uma representação vetorial de $s_m(t)$ pode ser obtida utilizando-se como funções base

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \sqrt{2} \cos(2\pi f_c t) \Pi_T(t) \text{ e} \\ \phi_2(t) &= -\sqrt{2} \sin(2\pi f_c t) \Pi_T(t)\end{aligned}\quad (31)$$

Utilizando esta base ortonormal, os vetores enviados pela fonte são representados por

$$\mathbf{s}_m = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) \right] \quad (32)$$

para $m = 1, 2 \dots M$.

As modulações PSK mais usuais são BPSK ($M = 2$), QPSK ($M = 4$) e 8PSK ($M = 8$) [6]. O conjunto de vetores $\{\mathbf{s}_m\}$ de um determinado tipo de modulação pode ser representado graficamente no plano $\phi_1(t) \phi_2(t)$ (ou então $Q \times I$) e a esse gráfico se dá o nome de diagrama de constelação. Abaixo são mostrados os diagramas de constelação das três modulações discutidas. Em virtude do nome, os conjunto de vetores $\{\mathbf{s}_m\}$ são comumente chamado de estrelas.

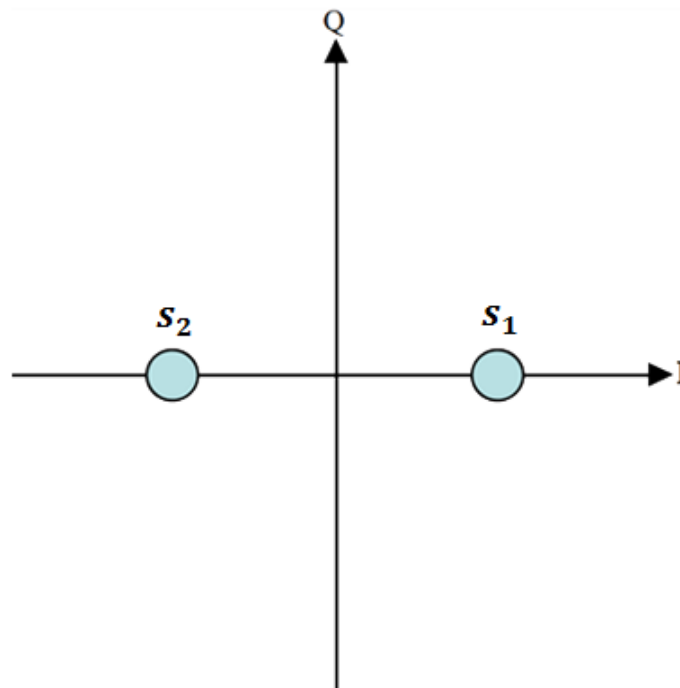


Figura 6 – Diagrama de constelação BPSK.

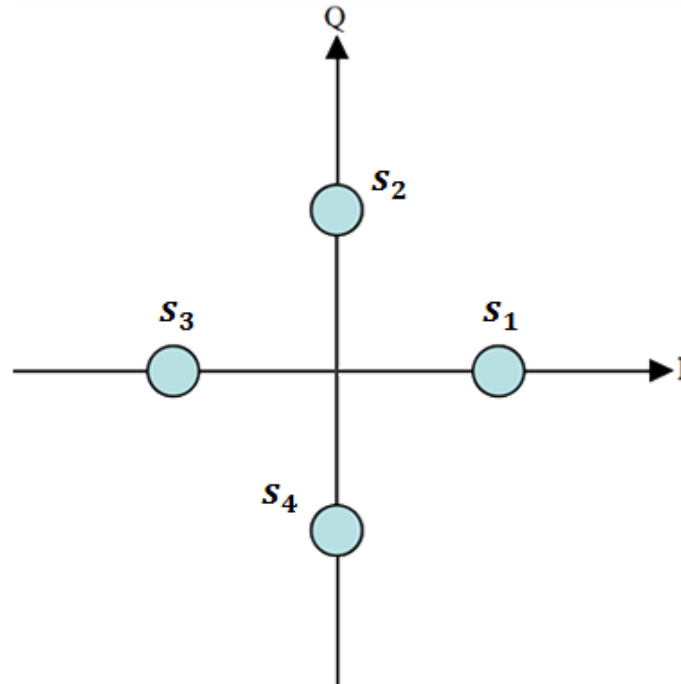


Figura 7 - Diagrama de constelação QPSK.

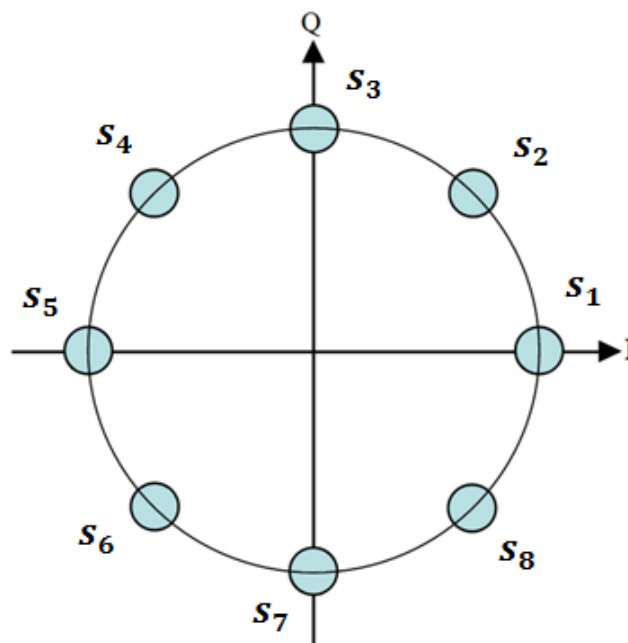


Figura 8 - Diagrama de constelação 8PSK.

Como visto em seção anterior, o efeito do ruído AWGN nos pontos da constelação é deslocá-los por um valor aleatório de distribuição $\mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$ em cada uma das direções possíveis, no caso das modulações PSK, nas direções I e Q.

Portanto, considerando que os símbolos são gerados de forma equiprovável pela fonte, quando um vetor \mathbf{r} chega ao receptor, ele deve ser decodificado no símbolo correspondente ao vetor \mathbf{s}_m mais próximo.

A região R_m no plano $Q \times I$, na qual os pontos nela contidos estão mais próximos de \mathbf{s}_m que qualquer outro vetor da constelação, é dita uma região de decisão do vetor \mathbf{s}_m , uma vez que qualquer vetor recebido \mathbf{r} recebido nessa região deve ser demodulado em \mathbf{s}_m . Por exemplo, na Figura 6 a região R_1 é o semiplano direito e a região R_2 é o semiplano esquerdo. Em geral, a região de decisão de \mathbf{s}_m em modulação M-PSK é dada por

$$R_m = \left\{ (I, Q) \mid \frac{2\pi(m-1)}{M} - \frac{\pi}{M} < \tan^{-1}\left(\frac{Q}{I}\right) < \frac{2\pi(m-1)}{M} + \frac{\pi}{M} \right\}, \quad (33)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$.

Caso esta regra seja utilizada, é possível demonstrar que a probabilidade de erro de símbolo para diferentes cardinalidades de modulação [5]. Para BPSK, ela é

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_{bmed}}{N_0}}\right), \quad (34)$$

em que $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

Já a probabilidade de erro para modulação QPSK é dada por

$$P_e(QPSK) = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_{bmed}}{N_0}}\right) \right]^2, \quad (35)$$

Probabilidades de erro de símbolo de modulações PSK de ordem diferente de 2 e 4 não podem ser determinadas analiticamente, mas uma boa aproximação pode ser alcançada utilizando-se a Equação (36), especialmente quando M e SNR são elevados.

$$P_e(MPSK) \cong 2Q\left(\sqrt{2k \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{\varepsilon_{bmed}}{N_0}}\right). \quad (36)$$

2.4.3 QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION (QAM)

A modulação de amplitude em quadratura (QAM) é um esquema de modulação na qual informação é escrita nas amplitudes de duas portadoras de mesma frequência e deslocadas de 90° entre si. As formas de onda utilizadas por um modulador QAM são dadas por

$$s_m(t) = [A_{mi} \cos(2\pi f_c t) - A_{mq} \text{sen}(2\pi f_c t)] \Pi_T(t) . \quad (37)$$

em que $m = 1, 2, \dots, M$.

A equação acima pode ser escrita na seguinte forma

$$s_m(t) = r_m \cos(2\pi f_c t + \theta_m) \Pi_T(t) , \quad (38)$$

na qual $r_m = \sqrt{A_{mi}^2 + A_{mq}^2}$, $\theta_m = \tan^{-1} \frac{A_{mq}}{A_{mi}}$ e $m = 1, 2, \dots, M$. De tal sorte que o QAM pode ser entendido como uma modulação de fase e de amplitude.

O sinal da Equação (37) pode ser convertido em vetor utilizando os mesmos vetores de base da modulação PSK, dados pela Equação (31), resultando em

$$\mathbf{s}_m = \left[\frac{A_{mi}}{\sqrt{2}} , \frac{A_{mq}}{\sqrt{2}} \right] , \quad (39)$$

em que $m = 1, 2, \dots, M$.

Existem infinitas formas de se organizar os M vetores de uma constelação M-QAM no plano $Q \times I$, uma das mais utilizadas é a organização retangular que consiste em uma malha quadrada de $\sqrt{M} \times \sqrt{M}$ pontos [6].

Essa organização não é a solução ótima e também restringe a ordem das constelações QAM a valores de M tais que $\log_2 M$ seja par, como por exemplo: 4, 16, 64, 256 e 1024. No entanto, a sua implementação é simples e ela não é muito pior que as soluções ótimas, sendo uma boa escolha de arranjo dos vetores da constelação.

Na Figura 9 - Diagrama de constelação 16QAM retangular. é mostrado o diagrama de constelação de uma modulação 16QAM.

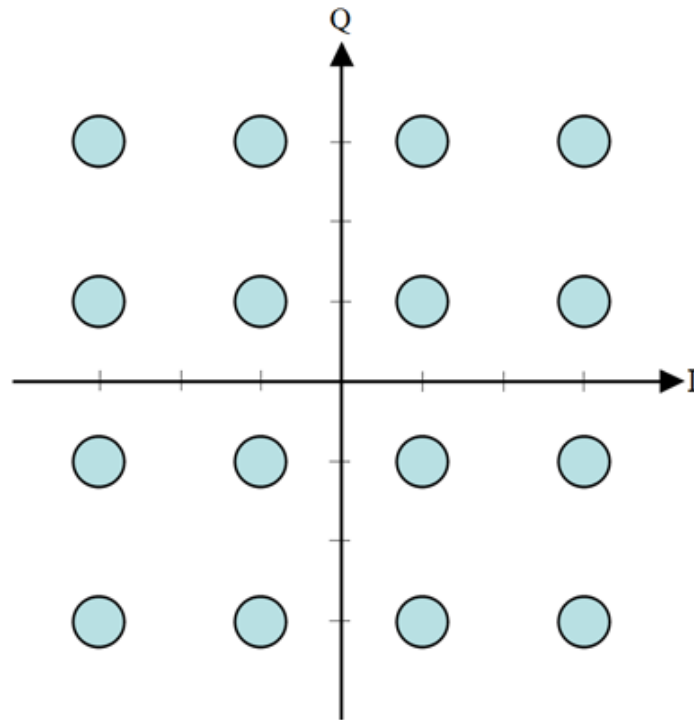


Figura 9 - Diagrama de constelação 16QAM retangular.

A divisão das diferentes regiões de decisão da modulação 16QAM retangular é mostrada na Figura 10. Note que sendo d a distância entre dois pontos vizinhos da constelação, as regiões de decisão dos quatro pontos internos são dadas por quadrados de lado d centrados em cada um dos pontos. As regiões dos 4 pontos laterais contêm um quadrado de lado d centrado nos pontos assim como uma extensão semi-infinita em uma das dimensões. Já as regiões do 4 pontos de canto contém o mesmo quadrado e uma extensão semi-infinita em duas dimensões.

Embora essa divisão seja subótima, sua implementação é fácil e escalável para modulações QAM de ordem superior, sendo uma das mais utilizadas [6].

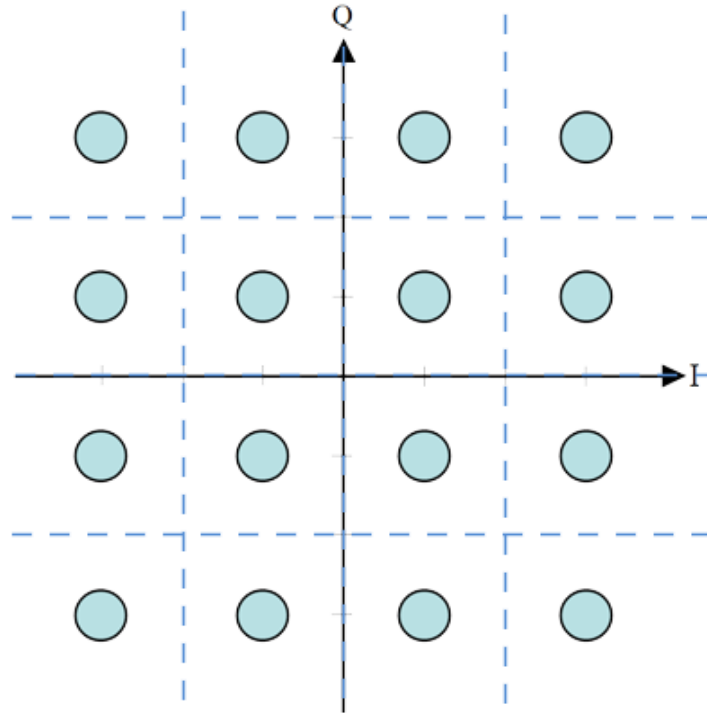


Figura 10 – Regiões de decisão de constelação 16QAM retangular.

Pode ser demonstrado [5] que a probabilidade de erro de símbolo de uma modulação QAM retangular com regiões de decisão no formato das mostradas na Figura 10 é dada por

$$P_e(MQAM_{ret}) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3kM}{M-1} \frac{\varepsilon_{bmed}}{N_0}} \right) \times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3kM}{M-1} \frac{\varepsilon_{bmed}}{N_0}} \right) \right). \quad (40)$$

Para modulações M-QAM de ordem arbitrária e de formato e de formato não retangular pode se usar um limitante superior para elevados valores de M e de ε_{bmed}/N_0 , que é dado por

$$P_e(MQAM) \leq 4Q \left(\sqrt{\frac{3kM}{M-1} \frac{\varepsilon_{bmed}}{N_0}} \right). \quad (41)$$

3 IMPLEMENTAÇÃO

O estudo realizado na seção 2 serviu como base para o desenvolvimento de simuladores de transmissão digital em um canal AWGN utilizando a representação vetorial do modelo.

Foram implementados simuladores para modulação MPSK de ordem arbitrária e para modulação MQAM retangulares utilizando o MATLAB® devido a sua sintaxe compacta e grande gama de ferramentas de visualização dos resultados obtidos, que são a curva P_e x E_b/N_0 e diagramas de constelação no receptor.

Em seguida é feita uma descrição detalhada dos pontos mais importantes dos dois programas. O código completo dos dois programas encontra-se no apêndice deste documento.

3.1 PHASE SHIFT KEYING (PSK)

3.1.1 PARÂMETROS DE ENTRADA

Código:

```
%Parâmetros da entrada da simulação
N = 1e6;           % Número de símbolos
M = 4;           % Cardinalidade da Modulação PSK
EbN0= [0:20];    %Relação sinal ruído de bit em dB
EbN0_int = [0 5 10 15 20]; %Eb/N0 de interesse.
```

Comentários:

Os parâmetros de entrada da simulação são N , número de símbolos a serem utilizados na simulação; M , ordem da modulação; $EbN0$, vetor contendo as relações sinal ruído de bit que devem ser simuladas e $EbN0_int$ que são os valores de E_b/N_0 que devem ter o diagrama de constelação no receptor plotados.

3.1.2 CRIAÇÃO DA CONSTELAÇÃO

Código:

```
%Criação da Constelação
fase=linspace(0,2*pi,M+1);
fase=fase(1:end-1);
estrelas=exp(j*fase);
```

Comentários:

As fases de interesse são geradas no intervalo $[0, 2\pi]$ de acordo com a Equação (29), e em seguida os valores de fase são convertidos em vetores de módulo unitário e fase igual às geradas.

Embora os pontos em uma constelação PSK sejam vetores bidimensionais com coeficientes reais, preferiu-se utilizar números complexos para representar estes valores, uma vez que existe um isomorfismo entre os dois conjuntos para as operações de soma e multiplicação por escalar real. Além disso, essa escolha evitou a utilização de mais uma dimensão nas matrizes do programa, facilitando o entendimento do código.

3.1.3 GERAÇÃO DE SEQUÊNCIA E MAPEAMENTO (MODULAÇÃO)

Código:

```
%Geração de símbolos equiprováveis
nums = rand(1,N)*M;
simbs = floor(nums);

%Mapeamento de símbolos em estrelas (Modulação)
mod=estrelas(simbs+1);
```

Comentários:

Os símbolos são gerados a partir de um gerador de números pseudo-aleatórios de distribuição uniforme que retorna valores float entre 0 e 1, por esse motivo a necessidade de uma normalização por M e conversão para inteiro por truncamento.

Os símbolos, em seguida, são usados para indexar o vetor contendo as estrelas, isto gera um vetor de tamanho de simbs onde cada valor deste novo vetor é um elemento de estrelas indexado por um valor de simbs. Isso equivale à modulação.

3.1.4 GERAÇÃO DO RUÍDO AWGN

Código:

```
%Geração do ruído branco
k=log2(M); %Número de bits por símbolo
Eb=1/k; %Energia do bit
EbN0l= 10.^(EbN0/10); %Relação sinal ruído de bit em escala
linear
N0=(EbN0l).^-1*Eb; %N0 do ruído
ruído=zeros(length(N0),N);

for i=1:length(N0)
    ruído(i,:) = sqrt(N0(i)/2)*([randn(1,N) + j*randn(1,N)]);
end
```

Comentários:

O primeiro passo é calcular a energia de bit, E_b , a partir da energia dos símbolos que sempre é 1, devido a construção da constelação. Em seguida os valores de E_b/N_0 de interesse são convertidos para uma escala linear e os ruídos para cada valor de E_b/N_0 é calculado.

A matriz *ruído* é previamente alocada e em seguida um vetor de ruído para cada valor de E_b/N_0 é determinado. Note que a função para geração de distribuição normal do MATLAB® retorna um valor gerado a partir de uma distribuição $\mathcal{N}(0,1)$, sendo necessária a multiplicação pelo desvio padrão para que o ruído possua a potência desejada.

3.1.5 TRANSMISSÃO, DEMODULAÇÃO E CÁLCULO DO NÚMERO DE ERROS

Código:

```
for i = 1:length(N0)
    %Adição de ruído à constelação
    rec(i,:) = mod + ruído(i,:);

    %Demodulação
    fase_rec=angle(rec(i,:));
    fase_rec_norm=fase_rec/(2*pi)*M;
    simbs_estim=round(fase_rec_norm);
    simbs_estim=rem(simbs_estim+M,M);
end
```

```

    %Contagem dos erros
    num_erros(i) = size(find([simbs - simbs_estim]),2);
end

sim_pb = num_erros/N; % Probabilidade de Erro de Símbolo

```

Comentários:

O laço for itera sobre os diferentes valores de E_b/N_0 que devem ser simulados. Para cada um desses valores o sinal enviado é somado ao ruído gerado anteriormente.

Em seguida, é recuperada a fase do símbolo recebido, os valores de fase passam por uma transformação de escala que leva o intervalo $[0, 2\pi]$ em $[0, M]$, os valores que são distribuídos de forma quase-contínua neste intervalo são arredondados para valores inteiros no intervalo $[0, M]$.

Como na verdade a função `angle()` do MATLAB® retorna um valor entre $[-\pi, \pi]$, a transformação de escala descrita mapeia este intervalo em $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$. Por esta razão, é feita uma soma de M aos valores arredondados obtidos seguindo por uma operação módulo- M , mapeando corretamente o intervalo $[-\pi, \pi]$ em $[0, M]$.

Com os símbolos demodulados, é feita uma contagem do número de erros. O número de erros dividido pelo número de símbolos enviados é uma boa estimativa da taxa de erro de símbolos sempre sim_pb for maior que $10N^{-1}$.

3.1.6 CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO TEÓRICA

Código:

```

%Calculo da probabilidade de erro teórica
if(M==2 || M==4)
    %Prob de erro de símbolo teórica para M=2
    teo_pb = qfunc(sqrt(2*EbN01));
    if(M==4)
        %Prob de erro de símbolo teórica para M=4
        teo_pb = 1-(1-teo_pb).^2
    end
else
    %Nos outros casos, usa-se uma aproximação
    teo_pb=2*qfunc(sqrt(2*k*sin(pi/M)^2*EbN01));
end

```

Comentários:

Este trecho do código simplesmente calcula as probabilidades de erro a partir das expressões teóricas apresentadas na seção 4.1, utilizando uma expressão exata quando possível e uma aproximação, bastante precisa, quando uma expressão exata não existir.

3.1.7 PLOTE DAS CURVAS DE P_e VERSUS E_b/N_0

Código:

```
%Plot da curva de probabilidade de erro
figure(1)
semilogy(EbN0,sim_pb,'mx-');
hold on
semilogy(EbN0,teo_pb,'b.-');
grid on
if(M==2 || M==4)
    legend('Simulação', 'Teoria');
else
    legend('Simulação', 'Teoria (Aproximação)');
end

%Localização automática da parte significativa da curva
lim = find((sim_pb==0),1)-1;
if isempty(lim)
    lim=length(EbN0)
end
axis([EbN0(1) EbN0(lim) sim_pb(lim) 1])
xlabel('Eb/No, dB');
ylabel('Probabilidade de Erro de Símbolo');
title(['Probabilidade de Erro de Símbolo de modulação ',num2str(M),'-PSK']);
```

Comentários:

Este trecho do código plota a curva de probabilidade de erro de símbolo teórica e simulada versus a relação sinal ruído de bit. A rotina adiciona na legenda um aviso se a curva teórica for apenas uma aproximação. Além disso, o programa também detecta automaticamente o trecho da curva simulada de interesse, não mostrando valores onde a probabilidade de erro simulada foi nula devido a um baixo valor de N .

3.1.8 PLOTE DOS DIAGRAMAS DE CONSTELAÇÃO NA RECEPÇÃO

Código:

```
%Plote dos diagramas de constelação
for i = 1:length(EbN0_int)
    figure(i)
    scatterplot(rec(EbN0_int(i)+1,:),500);
    xlabel('Em fase');
    ylabel('Quadratura');
    title(['Diagrama de constelação ', num2str(M), '-PSK para Eb/No
de', num2str(EbN0_int(i)), ' dB']);
end
```

Comentários:

Este trecho plota todos os diagramas de constelação na recepção para os valores de E_b/N_0 que o usuário inseriu inicialmente como de interesse.

3.2 QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION (QAM)

3.2.1 PARÂMETROS DE ENTRADA

Idêntico ao simulador PSK.

3.2.2 CÁLCULO DE PARÂMETROS ÚTEIS

Código:

```
%Parâmetros úteis
raiz_M=sqrt(M);
raiz_M=round(raiz_M);
if(abs(raiz_M-sqrt(M))>0.1)
    error('Erro, M invalido');
end
k=log2(M);
```

Comentários:

São calculados parâmetros úteis para o restante do código, como \sqrt{M} e k .

3.2.3 CRIAÇÃO DA CONSTELAÇÃO

Código:

```
%Criação da Constelação
dim=[[-raiz_M+1:2:-1] [1:2:raiz_M-1]];

for i=1:raiz_M
    for l=1:raiz_M
        estrelas(i,l)=dim(i)+j*dim(l);
    end
end

e_med= sum(abs(estrelas(:).^2))/M;
estrelas=estrelas/sqrt(e_med);
dim=dim/sqrt(e_med);
```

Comentários:

O trecho de código mostrado inicialmente gera uma sequência de modulação \sqrt{M} PAM com pontos situados em $-\sqrt{M} + 1, -\sqrt{M} + 3, \dots, -3, -1, 0, 1, 3, \sqrt{M} - 3, \sqrt{M} - 1$. Em seguida, o laço for realiza o produto cartesiano desta sequência com ela mesma, dando origem a uma constelação MQAM retangular.

A constelação obtida é normalizada para que a energia média das estrelas seja unitária, da mesma forma que no simulador PSK.

3.2.4 GERAÇÃO DE SEQUÊNCIA E MAPEAMENTO (MODULAÇÃO)

Código:

```
%Geração de símbolos equiprováveis
simbs=floor(rand(1,N)*M);
numsv=floor(simbs/raiz_M);
numsh=rem(simbs,raiz_M);

%Mapeamento de símbolos em estrelas (Modulação)
for i=1:N
    mod(i)=estrelas(numsh(i)+1,numsv(i)+1);
end
```

Comentários:

A geração dos N símbolos é feita da mesma forma que no caso PSK. Os valores dos símbolos gerados que podem variar de 0 a $(M - 1)$ são mapeados em duplas que variam de $(0,0)$ a $(\sqrt{M} - 1, \sqrt{M} - 1)$.

Os índices de cada dupla são utilizados para indexar o vetor de estrelas, realizando, desta forma, a modulação do sinal.

3.2.5 GERAÇÃO DO RUÍDO AWGN

Idêntico ao simulador PSK.

3.2.6 TRANSMISSÃO, DEMODULAÇÃO E CÁLCULO DO NÚMERO DE ERROS

Código:

```
%For que itera as diferentes Eb/N0
for i = 1:length(EbN0)
    %Adição de ruído à constelação
    rec(i,:) = mod + ruido(i,:);

    %Demodulação da parte em fase
    for l=1:N
        %Demodulação da parte em fase
        dist = real(rec(i,l))-dim;
        [y,numh_estim(l)] = min(abs(dist));

        %Demodulação da parte em quadratura
        dist = imag(rec(i,l))-dim;
        [y,numv_estim(l)] = min(abs(dist));

        %Estimava do símbolo recebido
        simbs_estim(l)=raiz_M*(numv_estim(l)-1)+numh_estim(l)-1;
    end

    %Contagem dos erros
    num_erro(i) = size(find([simbs - simbs_estim]),2);
end

sim_pb = num_erro/N; % Probabilidade de Erro de Símbolo
```

Comentários:

O for itera sobre os diferentes valores de E_b/N_0 que devem ser simulados. Para cada um destes valores o sinal enviado é somado ao ruído gerado anteriormente.

As demodulações das componentes em fase e em quadratura do sinal recebido são feitas de forma isolada. Inicialmente é isolada a parte real(em fase) do sinal recebido e a distância para cada um dos \sqrt{M} valores das partes reais das estrelas da constelação são calculadas, o valor mínimo de distância é utilizado para estimar o primeiro índice da dupla do símbolo.

O mesmo procedimento é repetido para a parte imaginária (em quadratura) do sinal recebido para determinar o valor do segundo índice. Com o valor dos dois índices, a sequência de símbolos é reconstruída, comparada com os símbolos enviados e a probabilidade de erro é estimada.

3.2.7 CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO TEÓRICA

Código:

```
%Probabilidade de erro símbolo teórica
teo_pb=4*(1-1/raiz_M)*qfunc(sqrt(3*k/(M-1).*EbN01)).*(1-(1-
1/raiz_M)*qfunc(sqrt(3*k/(M-1).*EbN01)));
```

Comentários:

Este trecho do código simplesmente calcula as probabilidades de erro a partir da expressão teórica exata apresentada na seção 4.1 para constelações QAM retangulares.

3.2.8 PLOTE DAS CURVAS DE P_e VERSUS E_b/N_0

Idêntico ao simulador PSK.

3.2.9 PLOTE DOS DIAGRAMAS DE CONSTELAÇÃO NA RECEPÇÃO

Idêntico ao simulador PSK.

4 RESULTADOS

Em seguida são mostradas para cada simulação realizada as curvas de probabilidade de erro de símbolo teórica e simulada versus relação sinal ruído de bit, assim como os diagramas de constelação no receptor para diferentes relações sinais ruído de bit.

Para a classe de modulação PSK, foram utilizadas as modulações BPSK, QPSK e 8PSK por serem as constelações mais empregadas, assim como a modulação 3PSK para comprovar a capacidade do software de utilizar modulações PSK de ordem arbitrária, até mesmo quando estas não são potência 2.

Para a classe de modulações QAM retangulares, foram utilizadas as modulações 16QAM e 64QAM, por serem as duas modulações mais empregadas, dentre a classe de modulações QAM retangulares.

Os comentários das figuras abaixo são feitos ao final da seção.

4.1 PHASE SHIFT KEYING (PSK)

4.1.1 BPSK

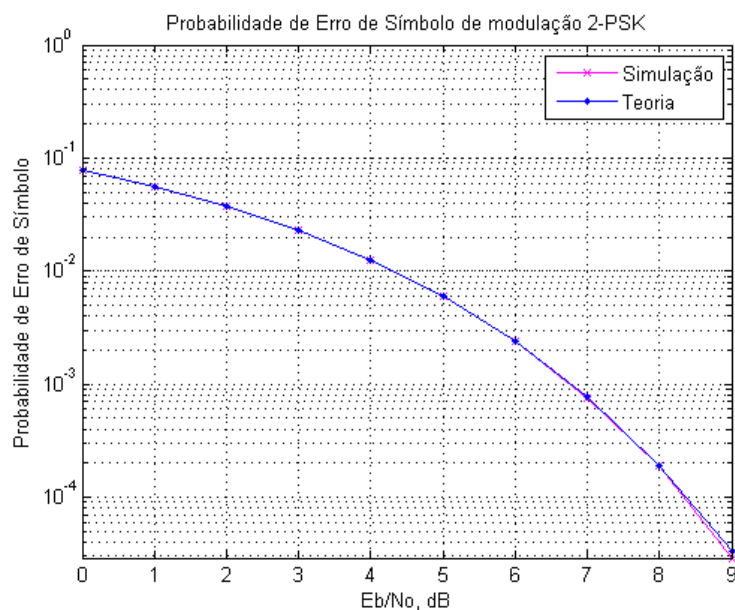


Figura 11 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação BPSK.

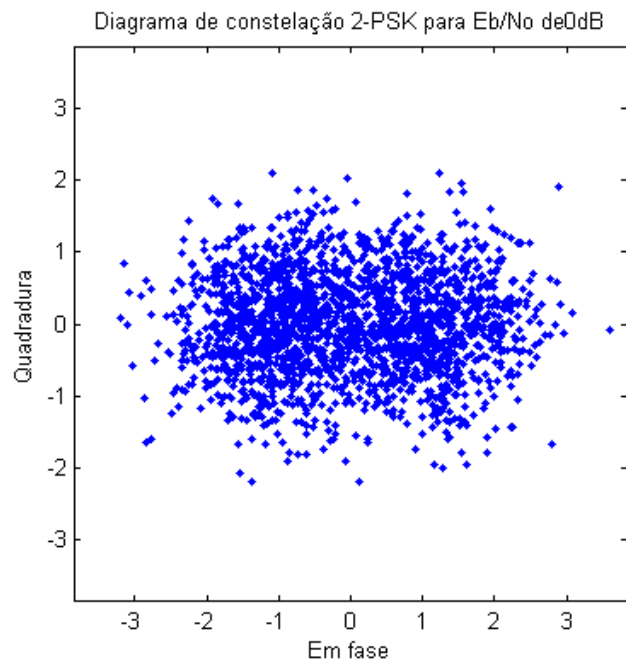


Figura 12 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 0dB$.

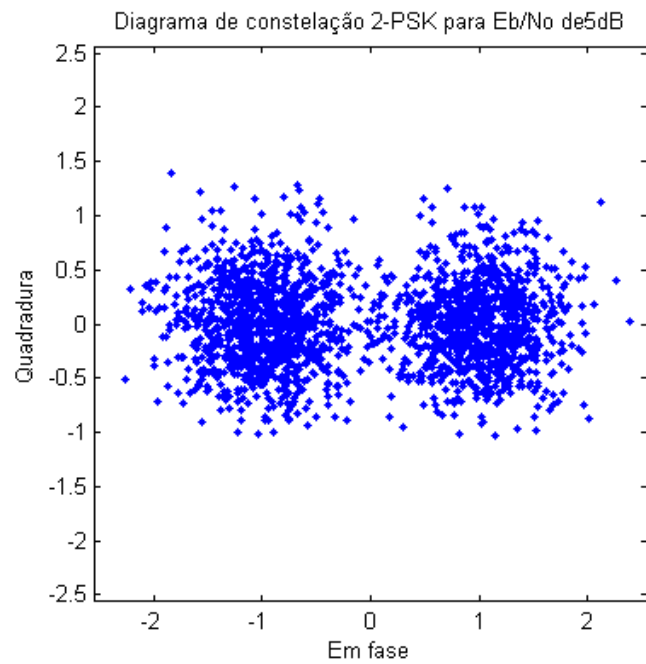


Figura 13 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 5dB$.

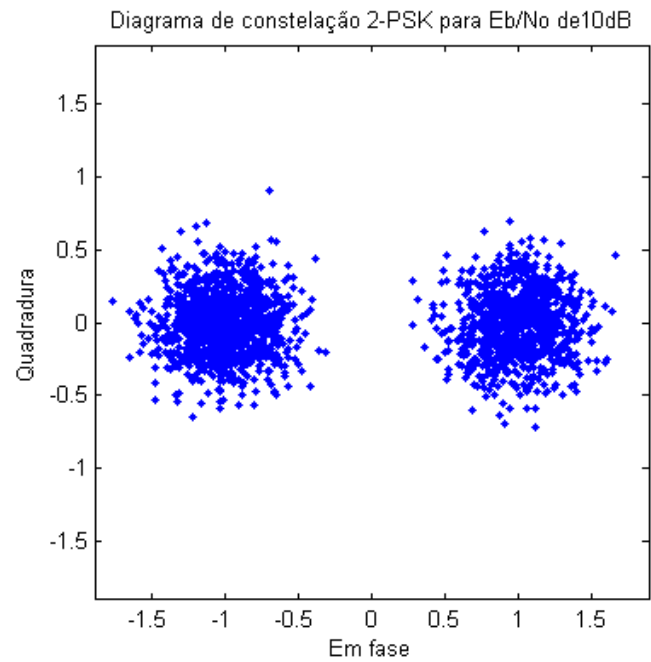


Figura 14 – Diagrama de constelação no receptor para modulação BPSK com $E_b/N_0 = 10dB$.

4.1.2 QPSK

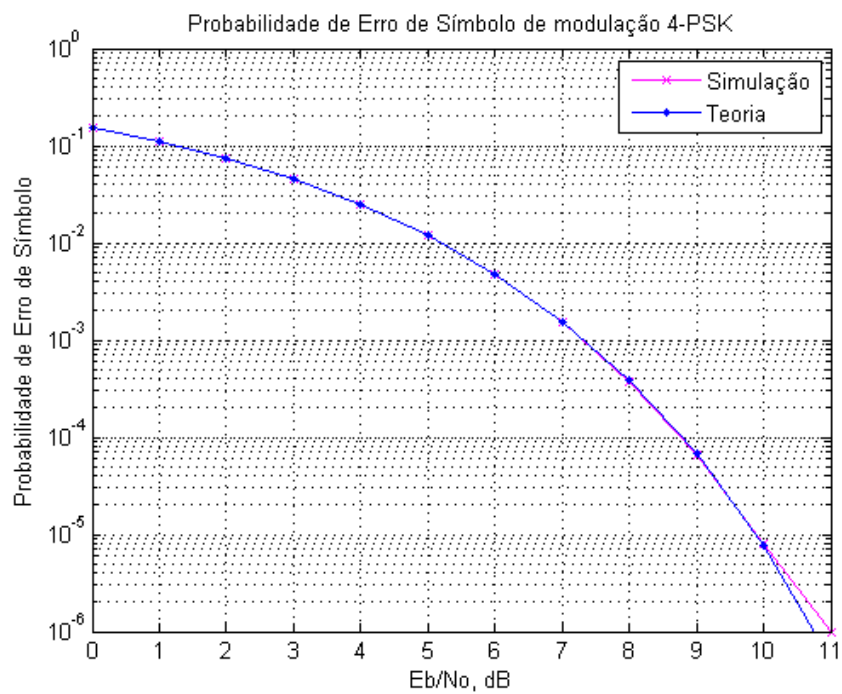


Figura 15 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação QPSK.

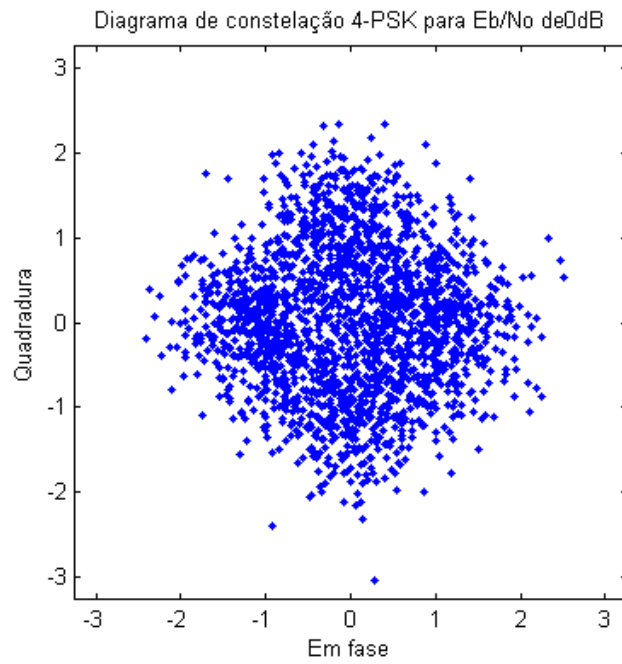


Figura 16 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 0dB$.

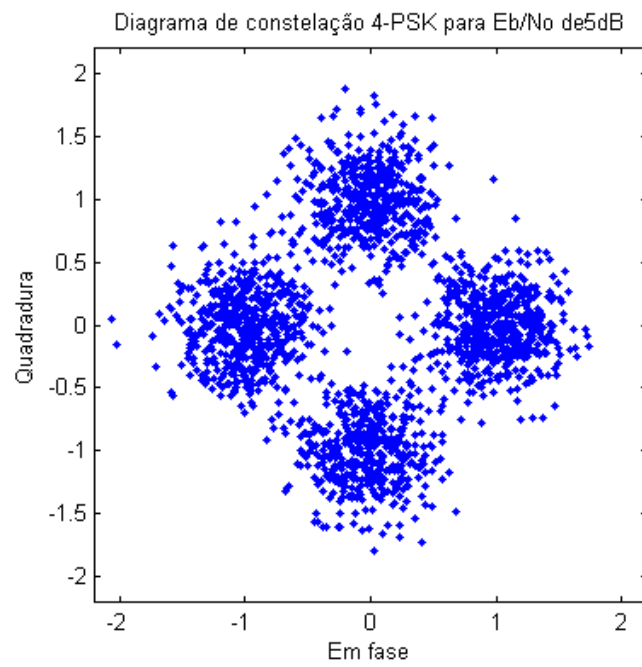


Figura 17 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 5dB$.

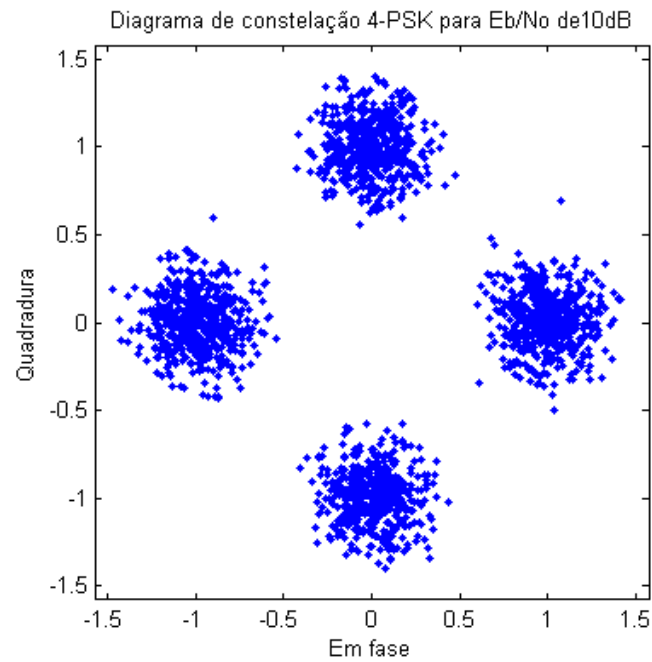


Figura 18 – Diagrama de constelação no receptor para modulação QPSK com $E_b/N_0 = 10dB$.

4.1.3 8PSK

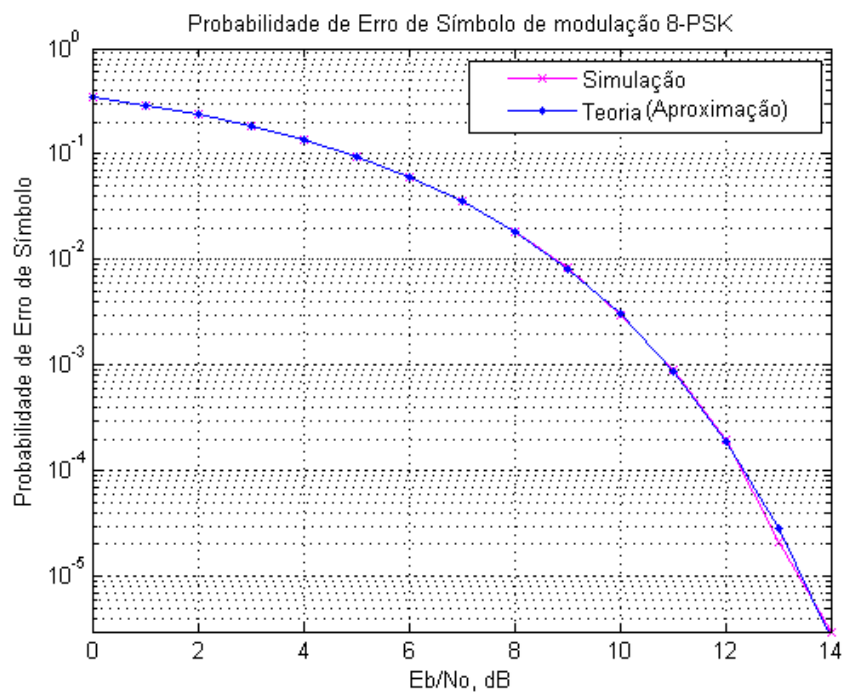


Figura 19 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 8PSK.

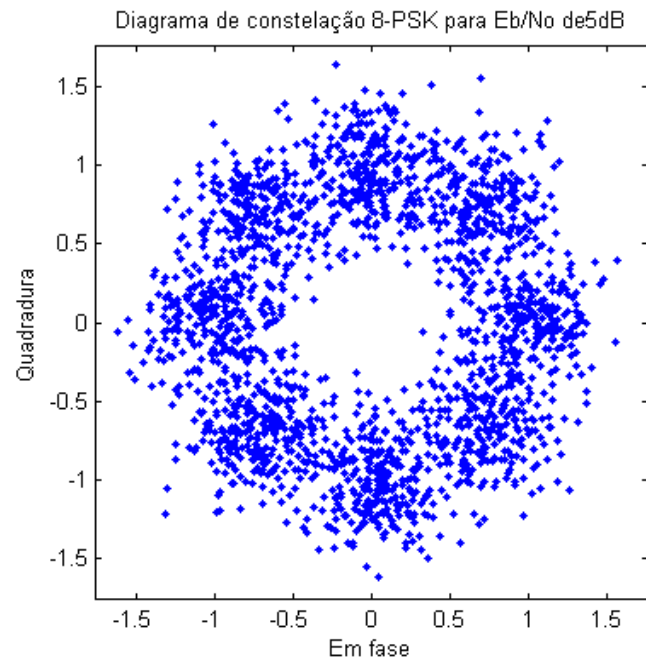


Figura 20 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 5dB$.

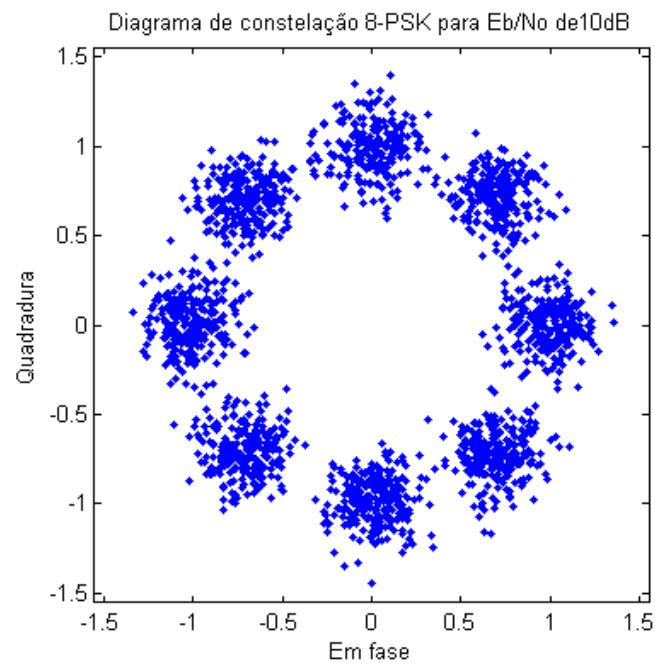


Figura 21 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 10dB$.

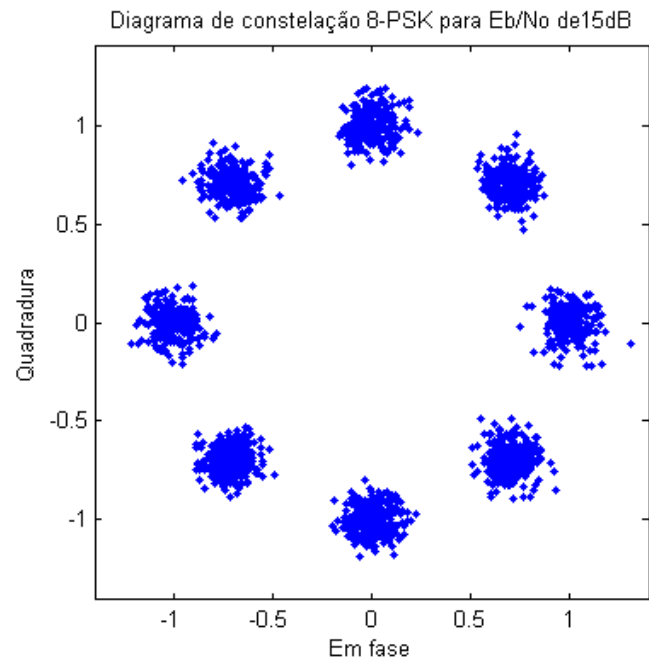


Figura 22 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 8PSK com $E_b/N_0 = 15dB$.

4.1.4 3PSK

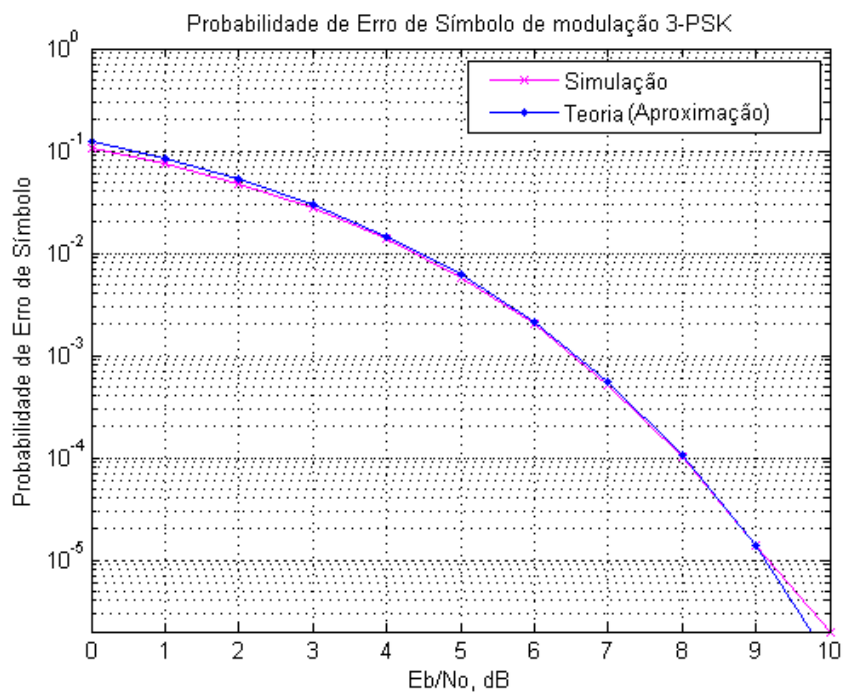


Figura 23 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 3PSK.

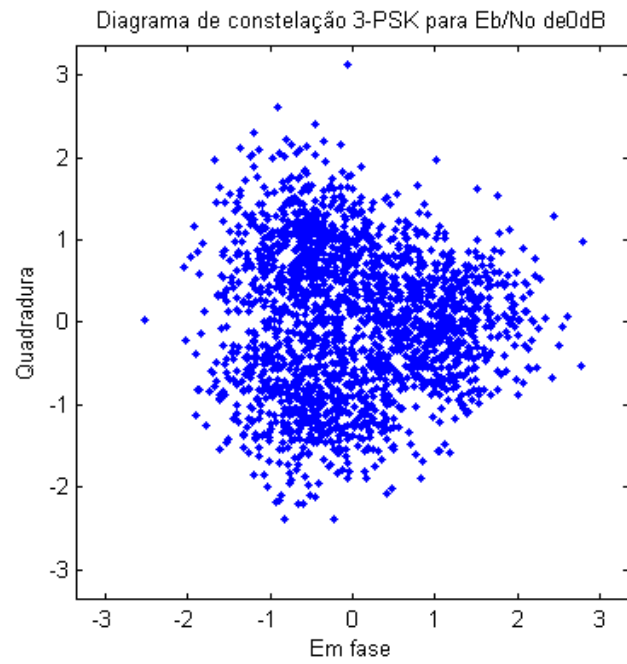


Figura 24 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 0dB$.

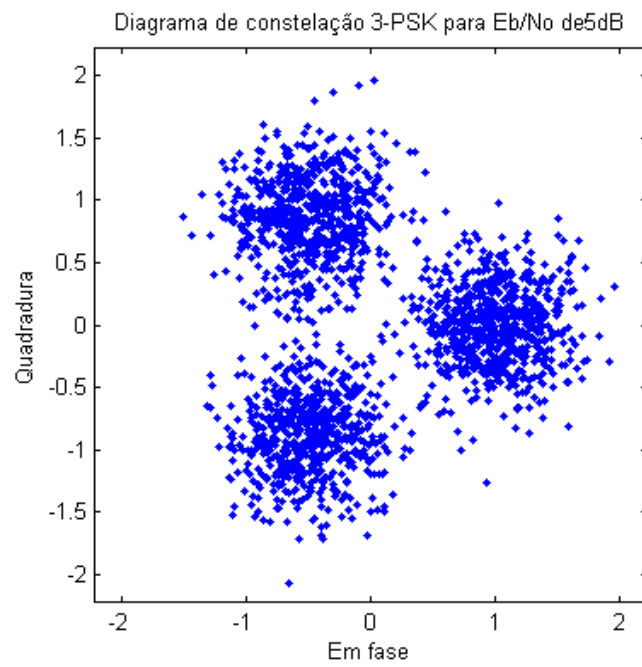


Figura 25 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 5dB$.

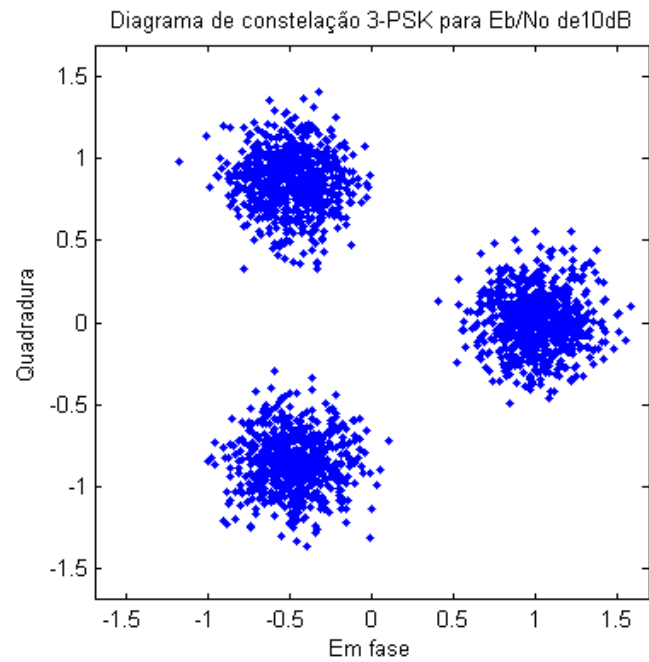


Figura 26 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 3PSK com $E_b/N_0 = 10dB$.

4.2 QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION (QAM)

4.2.1 16QAM

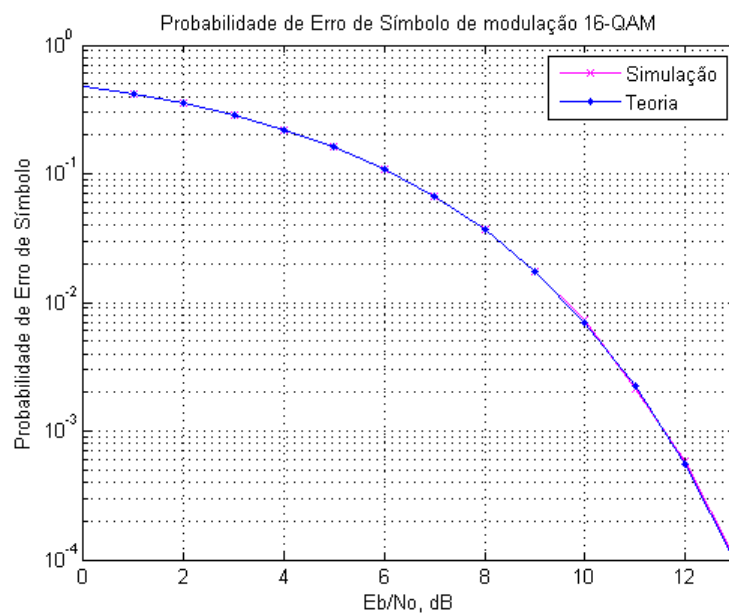


Figura 27 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 16QAM.

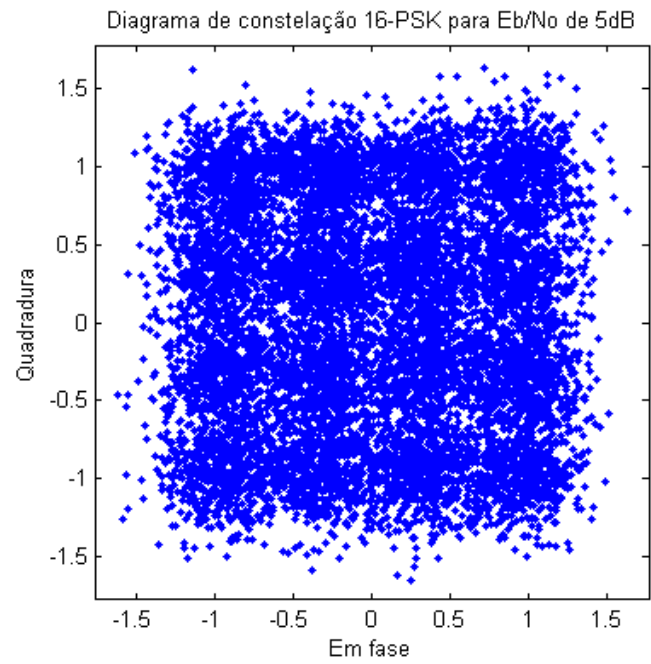


Figura 28 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 5dB$.

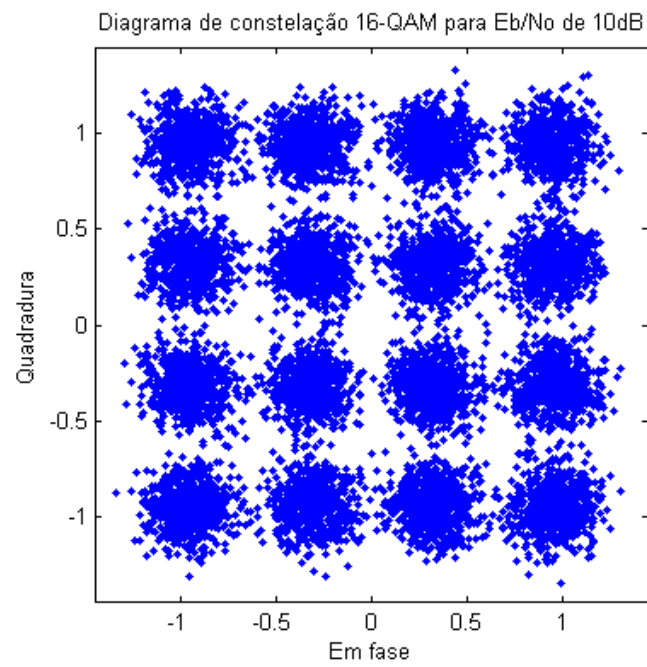


Figura 29 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 10dB$.

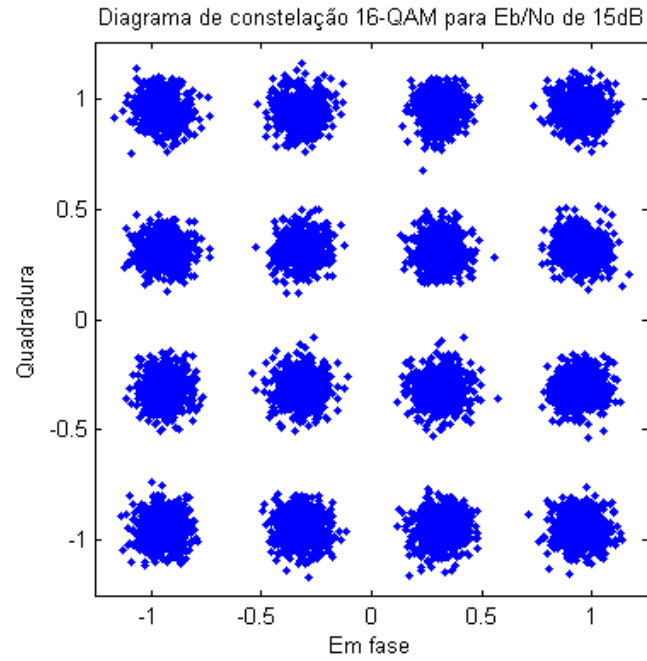


Figura 30 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 16QAM com $E_b/N_0 = 15dB$.

4.2.2 64QAM

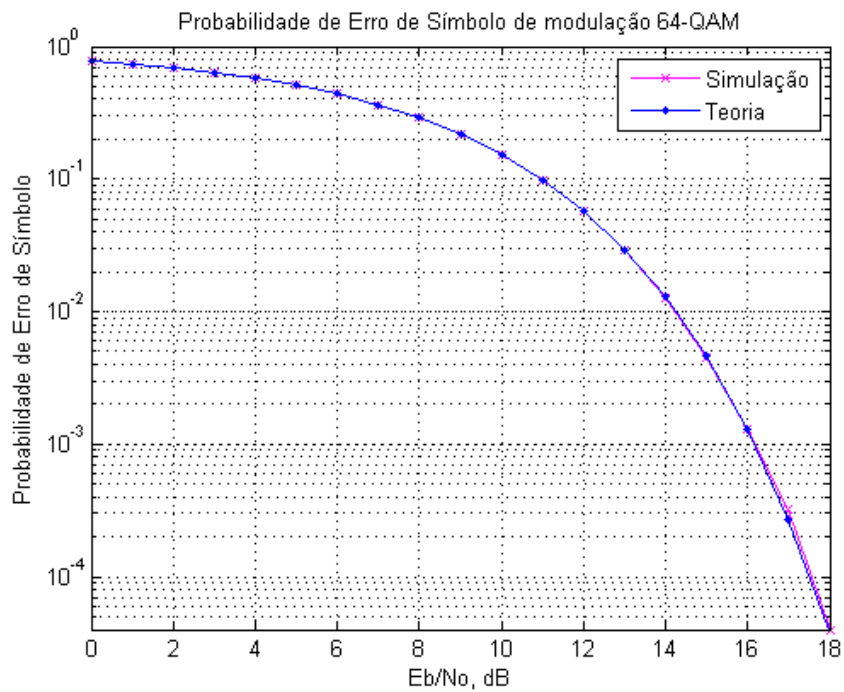


Figura 31 – Curva de probabilidade de erro de símbolo para modulação 64QAM.

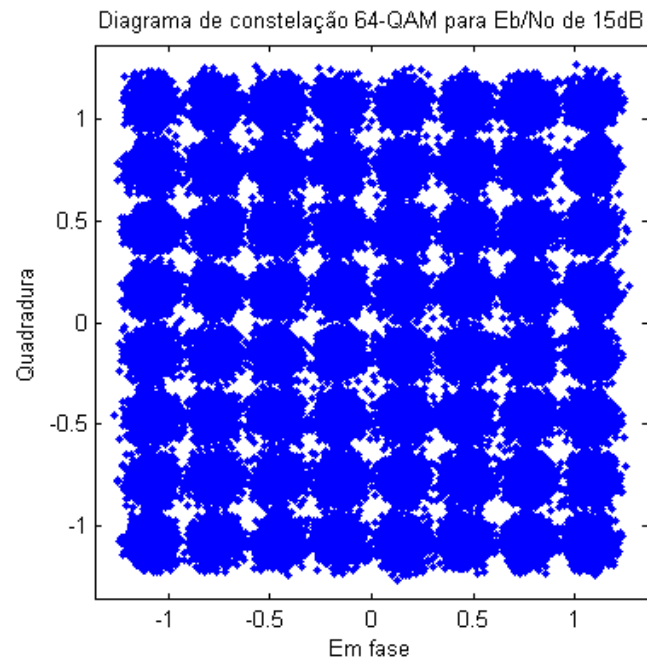


Figura 32 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 15dB$.

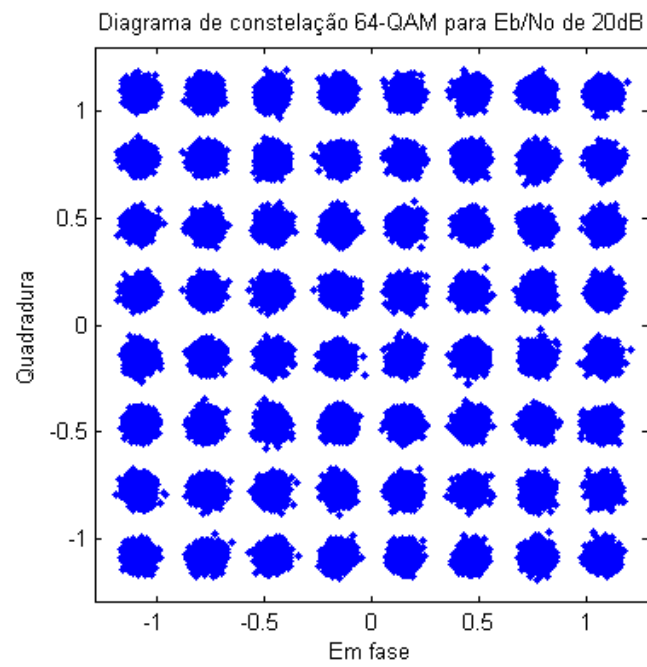


Figura 33 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 20dB$.

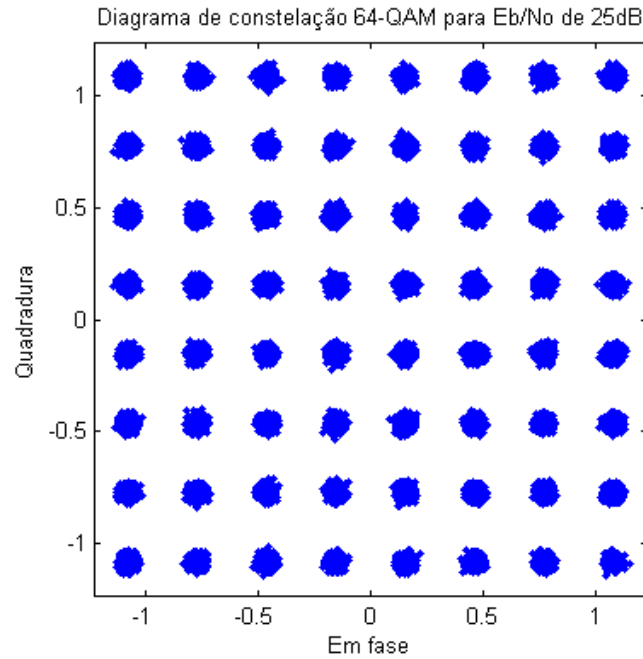


Figura 34 – Diagrama de constelação no receptor para modulação 64QAM com $E_b/N_0 = 25dB$.

4.3 COMENTÁRIO DOS RESULTADOS

Todas as curvas $BER \times E_b/N_0$ possuíram um grau de concordância excelente com a teoria, muitas vezes só desviando da previsão teórica quando as probabilidades ficaram muito pequenas e a estimação deixa de ser confiável devido ao valor finito de N .

O comportamento dos diagramas de constelação foi o esperado, com as nuvens diminuindo o seu raio conforme a relação sinal ruído é aumentada. É interessante notar que constelações de ordem alta como 64QAM só ficaram aceitáveis para E_b/N_0 da ordem de 20dB, enquanto o BPSK já apresentava característica semelhante para E_b/N_0 de 10dB. Essa padrão é uma constante, quanto maior a cardinalidade, maior a exigência de E_b/N_0 para que as nuvens fiquem separadas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada a teoria básica das comunicações digitais, com ênfase dos resultados envolvendo modelo de canais AWGN, espaço de sinais e modulações PSK e QAM. A revisão desse assunto além de permitir a implementação com maior embasamento teórico dos simuladores também foi útil no desenvolvimento do estágio curricular, que está sendo realizado em paralelo a esse trabalho de conclusão de curso no Laboratório de Automação e Processamento de Sinais (LAPS)

Os simuladores implementados apresentaram resultados excepcionais, com divergência dos valores previstos praticamente desprezíveis, somente diferindo minimamente da previsão teórica quando estas eram apenas aproximações e não valores exatos, o que indica que o resultado das simulações podem ser considerado mais confiáveis que as aproximações.

Devido à capacidade de aproximar tão bem a probabilidade de erro de símbolo, simulações desse gênero podem ser utilizadas em situações onde expressões analíticas para determinação dessa probabilidade não existem.

Por fim, é importante ressaltar que o modelo vetorial utilizado não considera muitos dos fatores que geram erros em sistemas de comunicação digital, como necessidade de sincronização. Devido a este fato, simulações que consideram um demodulador que necessita realizar sincronização a partir de um sinal recebido terão resultado mais próximos das probabilidades de erro de bit de sistemas reais.

BIBLIOGRAFIA

[1] Shannon, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication, Bell Systems Technology Journal. vol 27.

[2] Loève, M. (1955) Probability Theory. Van Nostrand, Princenton.

[3] Johnson, J. B. (1928) “Thermal Agitation of Electricity in Conductors”, The American Physical Society.

[4] Nyquist, H. (1928) “Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors”, Phys. Rev. 32.

[5] Proakis, J. G., Selehi, M. (2008) “Digital Communications 5th Edition”. New York, USA: McGraw-Hill Higher Education.

[6] Haykin, S. (1998) “Digital Communications 1st Edition”. New Yor, USA: IE-Wiley.

APÊNDICE A – CÓDIGO DO SIMULADOR PSK

```

%Simulador de Canais de Comunicação AWGN com Modulação PSK de ordem
arbitrária
%Programa realizado no TCC de Dinart Duarte Braga.
%Instituição: Universidade Federal de Campina Grande
%Autor: Dinart Duarte Braga

clear
clc
close('all')

%Parâmetros da entrada da simulação
N = 1e5;           % Número de símbolos
M = 3;           % Cardinalidade da Modulação PSK
EbN0= [0:20];    % Relação sinal ruído de bit em dB
EbN0_int = [0 5 10 15 20]; % Eb/N0 de interesse.

%Criação da Constelação
fase=linspace(0,2*pi,M+1);
fase=fase(1:end-1);
estrelas=exp(j*fase);

%Geração de símbolos equiprováveis
nums = rand(1,N)*M;
simbs = floor(nums);

%Mapeamento de símbolos em estrelas (Modulação)
mod=estrelas(simbs+1);

%Geração do ruído branco
k=log2(M);           %Número de bits por símbolo
Eb=1/k;             %Energia do bit
EbN0l= 10.^(EbN0/10); %Relação sinal ruído de bit em escala
linear
N0=(EbN0l).^(-1*Eb); %N0 do ruído
ruído=zeros(length(N0),N);

for i=1:length(N0)
    ruído(i,:) = sqrt(N0(i)/2)*([randn(1,N) + j*randn(1,N)]);
end

rec=zeros(length(N0),N);

%For que itera as diferentes Eb/N0
for i = 1:length(N0)
    %Adição de ruído à constelação
    rec(i,:) = mod + ruído(i,:);

    %Demodulação
    fase_rec=angle(rec(i,:));
    fase_rec_norm=fase_rec/(2*pi)*M;
    simbs_estim=round(fase_rec_norm);
    simbs_estim=rem(simbs_estim+M,M);

```

```

    %Contagem dos erros
    num_erro(i) = size(find([simbs - simbs_estim]),2);
end

sim_pb = num_erro/N; % Probabilidade de Erro de Símbolo

%Calculo da probabilidade de erro teórica
if(M==2 || M==4)
    %Prob de erro de símbolo teórica para M=2
    teo_pb = qfunc(sqrt(2*EbN0));
    if(M==4)
        %Prob de erro de símbolo teórica para M=4
        teo_pb = 1-(1-teo_pb).^2
    end
else
    %Nos outros casos, usa-se uma aproximação
    teo_pb=2*qfunc(sqrt(2*k*sin(pi/M)^2*EbN0));
end

%Plot da curva de probabilidade de erro
figure(1)
semilogy(EbN0,sim_pb,'mx-');
hold on
semilogy(EbN0,teo_pb,'b.-');
grid on
if(M==2 || M==4)
    legend('Simulação', 'Teoria');
else
    legend('Simulação (Aproximação)', 'Teoria');
end

%Localização automática da parte significativa da curva
lim = find((sim_pb==0),1)-1;
if isempty(lim)
    lim=length(EbN0)
end
axis([EbN0(1) EbN0(lim) sim_pb(lim) 1])
xlabel('Eb/No, dB');
ylabel('Probabilidade de Erro de Símbolo');
title(['Probabilidade de Erro de Símbolo de modulação ',num2str(M),'-PSK']);

%Plote dos diagramas de constelação
for i = 1:length(EbN0_int)
    figure(i)
    scatterplot(rec(EbN0_int(i)+1,:),500);
    xlabel('Em fase');
    ylabel('Quadratura');
    title(['Diagrama de constelação ',num2str(M),'-PSK para Eb/No de',num2str(EbN0_int(i)),' dB']);
end

```

APÊNDICE B – CÓDIGO DO SIMULADOR QAM

```

%Simulador de Canais de Comunicação AWGN com Modulação QAM Retangular
%Programa realizado no TCC de Dinart Duarte Braga.
%Instituição: Universidade Federal de Campina Grande
%Autor: Dinart Duarte Braga

clear
clc
close('all')

%Parâmetros da entrada da simulação
N = 1e5;           % Número de símbolos
M = 16;           % Cardinalidade da Modulação PSK
EbN0= [0:20];     % Relação sinal ruído de bit em dB
EbN0_int = [0 5 10 15 20]; % Eb/N0 de interesse.

%Parâmetros úteis
raiz_M=sqrt(M);
raiz_M=round(raiz_M);
if(abs(raiz_M-sqrt(M))>0.1)
    error('Erro, M invalido');
end
k=log2(M);

%Criação da Constelação
dim=[[-raiz_M+1:2:-1] [1:2:raiz_M-1]];

for i=1:raiz_M
    for l=1:raiz_M
        estrelas(i,l)=dim(i)+j*dim(l);
    end
end

e_med= sum(abs(estrelas(:).^2))/M;
estrelas=estrelas/sqrt(e_med);
dim=dim/sqrt(e_med);

%Geração de símbolos equiprováveis
simbs=floor(rand(1,N)*M);
numsv=floor(simbs/raiz_M);
numsh=rem(simbs,raiz_M);

%Mapeamento de símbolos em estrelas (Modulação)
for i=1:N
    mod(i)=estrelas(numsh(i)+1,numsv(i)+1);
end

%Geração do ruído branco
Eb=1/k;           %Energia do bit
EbN0l= 10.^(EbN0/10); %Relação sinal ruído de bit em escala linear
N0=(EbN0l).^(-1)*Eb; %N0 do ruído
ruído=zeros(length(N0),N);

```

```

for i=1:length(N0)
    ruido(i,:) = sqrt(N0(i)/2)*([randn(1,N) + j*randn(1,N)]);
end
rec=zeros(length(N0),N);

%For que itera as diferentes Eb/N0
for i = 1:length(EbN0)
    %Adição de ruído à constelação
    rec(i,:) = mod + ruido(i,:);

    %Demodulação da parte em fase
    for l=1:N
        %Demodulação da parte em fase
        dist = real(rec(i,l))-dim;
        [y,numh_estim(l)] = min(abs(dist));

        %Demodulação da parte em quadratura
        dist = imag(rec(i,l))-dim;
        [y,numv_estim(l)] = min(abs(dist));

        %Estimava do símbolo recebido
        simbs_estim(l)=raiz_M*(numv_estim(l)-1)+numh_estim(l)-1;
    end

    %Contagem dos erros
    num_erros(i) = size(find([simbs - simbs_estim]),2);
end

sim_pb = num_erros/N; % Probabilidade de Erro de Símbolo

%Probabilidade de erro símbolo teórica
teo_pb=4*(1-1/raiz_M)*qfunc(sqrt(3*k/(M-1).*EbN01)).*(1-(1-1/raiz_M)*qfunc(sqrt(3*k/(M-1).*EbN01)));

%Plot da curva de probabilidade de erro
figure(1)
semilogy(EbN0,sim_pb,'mx-');
hold on
semilogy(EbN0,teo_pb,'b.-');
grid on
legend('Simulação', 'Teoria');

%Localização automática da parte significativa da curva
lim = find((sim_pb==0),1)-1;
if isempty(lim)
    lim=length(EbN0)
end
axis([EbN0(1) EbN0(lim) sim_pb(lim) 1])
xlabel('Eb/No, dB');
ylabel('Probabilidade de Erro de Símbolo');
title(['Probabilidade de Erro de Símbolo de modulação ',num2str(M),'-QAM']);

%Plote dos diagramas de constelação
for i = 1:length(EbN0_int)
    scatterplot(rec(EbN0_int(i)+1,:),10);
    xlabel('Em fase');
    ylabel('Quadratura');
end

```

```
title(['Diagrama de constelação ', num2str(M), '-QAM para Eb/No de  
, num2str(EbN0_int(i)), 'dB']);  
end
```