



Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Departamento de Engenharia Elétrica

Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

## **Algoritmos de Identificação de Parâmetros e Técnicas Adaptativas**

Campina Grande, Paraíba

Junho 2014

Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

## **Algoritmos de Identificação de Parâmetros e Técnicas Adaptativas**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Campina Grande  
como parte dos requisitos necessários para a  
obtenção do grau de Bacharel em Ciências no  
Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Adaptativos

Orientador: Péricles Rezende Barros

Coorientador: George Acioli Junior

Campina Grande, Paraíba

Junho 2014

Lício Bruno Ribeiro Rodrigues Romão

## **Algoritmos de Identificação de Parâmetros e Técnicas Adaptativas**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Campina Grande  
como parte dos requisitos necessários para a  
obtenção do grau de Bacharel em Ciências no  
Domínio da Engenharia Elétrica.

19 de junho de 2014

---

**Péricles Rezende Barros**  
Orientador

---

**Professor**  
Avaliador

Campina Grande, Paraíba  
Junho 2014

*Este trabalho é dedicado a todos que desejam fazer desse um mundo melhor.*

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e discernimento durante toda minha vida.

Ao meu Pai, Edgar Rodrigues Romão, e a minha Mãe, Edna Ribeiro Rodrigues Romão, pelos ensinamentos proporcionados. Sem eles, certamente, tudo seria muito mais difícil. Agradeço, também, ao meu irmão, Edgar Rodrigues Romão, minha irmã, Maria Marietta de Mello Bisneta e a todos tios, primos, meus avós e avôs (*In Memmorian*).

A minha namorada, Isabela Miranda Gomes, pelo apoio e incentivo durante os momentos mais difíceis.

Aos meus amigos da universidade, pelos momentos experiência trocada e apoio durante todo período de universidade. Em especial, Pachelle, Ademir e Raphael com os quais passei um ano de intercâmbio.

A esta universidade, por ter proporcionado a estrutura para minha qualificação profissional.

A coordenação de Engenharia Elétrica, pelos conselhos e compreensão em todos esses anos.

Aos meu orientador, Professor Péricles Rezende Barros, pela atenção dada durante o desenvolvimento do trabalho, bem como o Professor George Acioli Júnior, pela supervisão e auxílio.

Aos Professores Antônio Marcus Nogueira Lima, Cursino Brandão Jacobina e Osvaldo Maria Grasselli, pelo aprendizado passado em sala de aula e orientações para o desenvolvimento da minha carreira.

E a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação, o meu muito obrigado.

*"Ninguém nasce odiando uma pessoa por sua cor de pele ou religião. Pessoas são ensinadas a odiar. E se elas aprendem a odiar, elas podem ser ensinadas a amar."*

*- Nelson Mandela*

# Resumo

Este trabalho tem o objetivo de fazer um estudo de algoritmos de controle, mínimos quadrados e algoritmo de projeção, utilizados na identificação de parâmetros, fazendo um estudo de suas propriedades e formalizando as condições de convergência dos mesmos. Apresentado os algoritmos, será introduzido o conceito de predição determinística adaptativa, explicitando a predição direta e indireta. Ao final do trabalho, serão revisados conceitos relacionados com o projeto de sistema de controle, identificando os principais pontos a serem levados em consideração.

**Palavras-chaves:** Controle Adaptativo. Predição Adaptativa. Identificação de Parâmetros. Mínimos Quadrados. Algoritmo de Projeção. Alocação de Pólos Adaptativa. Predição Direta. Predição Indireta.

# Abstract

This work aims to introduce two algorithms for parameters identification, such as Least-Squares Algorithms and Projection Algorithm, studying both convergence conditions and establishing a well-based mathematical framework to analyse them. Then, we present what is meant by adaptive prediction. In this context, direct and indirect adaptive prediction will be introduced. Additionally, we shall review the tools for control systems design, point to its most important constraints.

**Key-words:** Adaptive Control. Adaptive Prediction. Parameter Identification. Least-Squares Algorithm. Projection Algorithm. Pole Assignment. Direct Prediction. Indirect Prediction.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Comparação entre as técnicas de controle, tradicional e adaptativa. . .	13
Figura 2 – Interpretação geométrica do Algoritmo de Projeção . . . . .	18
Figura 3 – Definição do operador de projeção . . . . .	33
Figura 4 – Realimentação da saída de um sistema dinâmico. . . . .	36
Figura 5 – Algoritmo de Projeção com vínculo. . . . .	40
Figura 6 – LMS com vínculo. . . . .	41
Figura 7 – Diagrama polos e zeros para (2.108) com $a_1 = -1.3856$ , $a_2 = 0.64$ , $b_1 = 1$ e $b_2 = 0.8$ . . . . .	42
Figura 8 – Entrada (verde) e Saída (azul) usadas para a identificação do modelo 2.108. . . . .	43
Figura 9 – Resultados do processo de identificação de (2.108) usando os algoritmos de projeção e mínimos quadrados, onde os parâmetros $b_1$ , $b_2$ , $a_1$ e $a_2$ são ilustrados, respectivamente, em vermelho, verde, azul e preto. . . .	43
Figura 10 – Entrada (verde) e Saída (azul) na presença de ruídos de medição. . . .	44
Figura 11 – Resultados do processo de identificação de (2.108) usando os algoritmos de projeção e mínimos quadrados, onde os parâmetros $b_1$ , $b_2$ , $a_1$ e $a_2$ são ilustrados, respectivamente, em vermelho, verde, azul e preto. . . .	44
Figura 12 – Resultados da construção de um preditor determinístico para o modelo (3.49). . . . .	57
Figura 13 – Esquema do preditor determinístico no Simulink. . . . .	57
Figura 14 – Técnica de predição adaptativa direta usando o simulink. . . . .	58
Figura 15 – Predição Adaptativa Direta para o modelo (3.49). . . . .	58
Figura 16 – Predição Adaptativa Indireta. . . . .	59
Figura 17 – Técnica de predição adaptativa indireta usando o simulink. . . . .	59
Figura 18 – Sistema de controle por Modelo de Referência. . . . .	69
Figura 19 – Modificação do diagrama a bloco do sistema de controle baseado no modelo de referência. . . . .	69
Figura 20 – Estrutura geral de alocação de polos. . . . .	74
Figura 21 – Estrutura tradicional cuja entrada do controlador é o sinal $e(t)$ . . . . .	74
Figura 22 – Interpretação do controlador de alocação de polos usando realimentação de variáveis de estados. . . . .	76
Figura 23 – Alocação de Polos usando a abordagem de espaço de estados. . . . .	79
Figura 24 – Sistema de controle na presença de perturbações. . . . .	80
Figura 25 – Raízes de um sistema de segunda ordem, mostrando o significado de $\zeta$ e $\omega_0$ . . . . .	83
Figura 26 – Diagrama da implementação do controle preditivo usando o simulink. .	86

Figura 27 – Resultados da aplicação da técnica de controle preditivo a planta (4.95)	87
Figura 28 – Diagrama da implementação do controle preditivo ponderado usando o simulink, usando-se $\lambda = 2$ .	88
Figura 29 – Resultados da aplicação da técnica de controle preditivo ponderado na planta (4.95)	88
Figura 30 – Diagrama da implementação do processo de alocação de polos usando o Simulink.	89
Figura 31 – Comparação da velocidade de resposta do sistema (4.95) com e sem alocação de polos.	89

# Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
LIEC	Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	Objetivos	14
1.2	Motivação	14
<b>2</b>	<b>ALGORITMOS DE ESTIMAÇÃO</b>	<b>15</b>
2.1	Esquema Geral dos Algoritmos de Estimação On-Line	16
2.2	Algoritmo de Projeção	17
2.3	Algoritmo dos Mínimos Quadrados	22
2.3.1	Algoritmo dos Mínimos Quadrados com peso seletivo	28
2.4	Condições de convergência	31
2.4.1	Convergência - Algoritmo dos mínimos quadrados	31
2.4.2	Convergência - Algoritmo de Projeção	32
2.5	Estimação de Parâmetros com perturbação limitada	37
2.5.1	Algoritmo de Projeção com Zona Morta	37
2.6	Estimação de Parâmetros com Restrições	39
2.6.1	Algoritmo de Projeção com Restrições	40
2.6.2	Algoritmo dos Mínimos Quadrados com Restrições	40
2.7	Simulações	42
2.8	Conclusão	45
<b>3</b>	<b>PREDIÇÃO ADAPTATIVA DETERMINÍSTICA</b>	<b>46</b>
3.1	Estrutura dos Preditores	46
3.1.1	Predição com conhecimento do modelo	46
3.1.2	Preditores de Complexidade Restrita	51
3.2	Predição Adaptativa	51
3.2.1	Predição Adaptativa Direta	52
3.2.1.1	Caso sem Restrição	52
3.2.1.2	Caso com Complexidade Restrita	54
3.2.2	Predição Adaptativa Indireta	55
3.2.2.1	Preditor sem restrição de modelo	55
3.3	Simulações	56
3.4	Conclusão	59
<b>4</b>	<b>CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES DETERMINÍSTICOS</b>	<b>61</b>
4.1	Introdução	61
4.2	Controladores com erro de predição mínimo	62

---

4.2.1	Controle Preditivo . . . . .	63
4.2.2	Sistemas de Controle por Modelo de Referência . . . . .	68
<b>4.3</b>	<b>Alocação dos polos . . . . .</b>	<b>70</b>
4.3.1	Introdução . . . . .	70
4.3.2	Algoritmo de Alocação de polos(Abordagem Usando o Operador Diferença)	72
4.3.3	Relação com a Realimentação de Variáveis de Estados . . . . .	74
<b>4.4</b>	<b>Princípio do Modelo Interno . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>4.5</b>	<b>Considerações de Projeto . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>4.6</b>	<b>Simulações . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>4.7</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>92</b>

# 1 Introdução

Neste trabalho serão apresentados algoritmos para estimação de parâmetros e aplicações desses no projeto de sistemas adaptativos. Porém, antes de iniciar com o estudo desses algoritmos, faz-se necessário o domínio do termo adaptativo. Ao contrário das técnicas convencionais em que o modelo matemático é considerado a representação completa de todos os fenômenos que ocorrem no sistema em estudo, o termo adaptativo é o conjunto de técnicas utilizadas para projeto de sistemas dinâmicos onde não é possível, ou não é conveniente que o modelo matemático represente todos os fenômenos físicos presentes no sistema em estudo.

As técnicas adaptativas são utilizadas no projeto de filtros, preditores e controladores adaptativos. Essas técnicas apresentam um ajuste iterativo de parâmetros. Por exemplo, em sistemas de controles adaptativos, o ajuste iterativo de parâmetros é usado para manter o desempenho do sistema de controle em situações nas quais seus parâmetros são desconhecidos ou são variantes no tempo. Na Figura 1 é apresentada uma comparação entre as técnicas de controle tradicional e o controle adaptativo. Na Figura 1a são expostas as técnicas tradicionais, onde o projeto do controlador é baseado a partir do conhecimento das especificações desejadas e de um modelo matemático para o sistema em estudo, resultando em um controlador cujos parâmetros são inalteráveis. Em contraste, como por ser visto na Figura 1b, o controle adaptativo fornece um mecanismo para o ajuste dos parâmetros do controlador, esse mecanismo é o processo de estimação de parâmetros que é feito em tempo real a partir dos dados,  $u$  e  $y$ , obtidos do sistema a ser controlado.

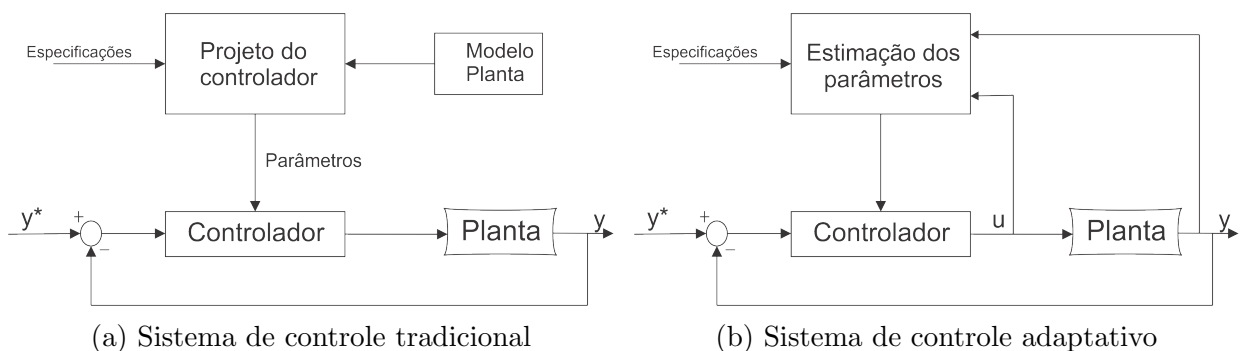


Figura 1 – Comparação entre as técnicas de controle, tradicional e adaptativa.

O tipo de algoritmo utilizado para a estimação dos parâmetros no esquema da Figura 1b definirá as diferentes técnicas adaptativas. Devido ao fato de que os parâmetros do controlador são atualizados em tempo real, o sistema de controle adaptativo é um sistema não linear. Em [6], faz-se a distinção entre o sistema de controle tradicional e o sistema de controle adaptativo, dada a seguir: "Enquanto o sistema de controle tradicional

tem a finalidade de eliminar o efeito de perturbações nas variáveis controláveis, o projeto de um sistema de controle adaptativo tem a finalidade de eliminar o efeito das variações paramétricas no desempenho de um sistema de controle em malha fechada”.

Existe, na teoria de controle, um conjunto de técnicas, chamadas de controle robusto, que são utilizadas no mesmo escopo do sistemas adaptativos, ou seja, tratam-se de sistemas onde existem diferenças entre o modelo no qual se realiza o projeto do controlador e o modelo real, no entanto, essas técnicas não farão parte do escopo desse trabalho.

Seja qual for a área na qual as técnicas adaptativas sejam utilizadas, existirá, sempre, um processo de estimação de parâmetros. De fato, a estimação é essencial na composição de qualquer sistema adaptativo.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo realizar uma revisão bibliográfica dos algoritmos de estimação de parâmetros, predição adaptativa e controle adaptativo apresentado em [5], realizando a análise matemática dos assuntos abordados e visando o aprofundamento do estudos em sistemas adaptativos.

## 1.2 Motivação

A motivação para a realização desse trabalho está na variedade de aplicações onde as técnicas adaptativas podem ser utilizadas, abrangendo áreas como Indústria Automotiva, Robótica, BioInformática, Predição do efeito de drogas no ser humano e Software (segurança, reconhecimento de padrões, jogos de computadores). Resultados de aplicação dessas técnicas no controle de motores DC são reportados em [9]. Além disso, resultados de projetos usando controle adaptativo financiados pela NASA são apresentados em [1] e [4].

## 2 Algoritmos de Estimação

A motivação para o estudo de algoritmos de estimação é a necessidade de se identificar parâmetros do sistema. Essa identificação pode ser feita, muitas vezes, baseados em leis da física, química, economia, e etc. Porém, em alguns casos, pode ser inconveniente a obtenção desses parâmetros através das leis citadas. Uma maneira, portanto, de obtê-los seria o monitoramento de suas entradas e suas saídas e a utilização de algoritmos de estimação. Por isso, como foi dito na introdução, o processo de estimação de parâmetros é essencial para o projeto de um sistema de controle adaptativo. Sabendo disso, esse capítulo tratará de dois algoritmos de estimação, sendo eles: Algoritmo de Projeção e Algoritmo do Mínimos Quadrados (*Least-Squares*, em inglês). Serão tratados, também, variações desse último para a aplicação em sistemas não lineares.

Para a definição do processo de estimação de parâmetros, é necessário a análise dos seguintes fatores:

- *Tipo do modelo*: A escolha de um modelo matemático apropriado é de fundamental importância. Na prática, a descrição completa do sistema é impraticável, dessa forma, deve-se existir um compromisso entre a complexidade do modelo e sua adequação para uma determinada aplicação.
- *Critério de melhor ajuste*: escolha do critério a ser escolhido para a determinação da escolha do modelo (e.g., linear, bilinear, não linear, polinomial, etc), a dimensão do modelo (e.g., número de parâmetros no modelo linear) e o algoritmo de estimação a ser utilizado. Alguns dos critérios utilizados são: minimização da média quadrática do erro de predição, minimização do máximo erro de predição, e etc.
- *Algoritmos de Estimações*: A escolha de algoritmos de estimacões são decididas, geralmente, com base nos seguintes critérios:
  - Algoritmos *on-line* ou algoritmos *off-line*?
  - A saída do modelo utilizado converge para a saída do sistema real?
  - Os parâmetros estimados convergem para os valores "verdadeiros" do sistema?
  - Se sim, com que velocidade se dá essa convergência?
  - Quão robusto é o algoritmo de estimação utilizado?
  - *Uso de conhecimentos específicos sobre o sistema*: Essa etapa é importante pois o projetista pode tomar vantagem se ele tem um conhecimento prévio do sistema em estudo, podendo definir vínculos, faixas aceitáveis de parâmetros



e valores nominais, com a finalidade de melhorar propriedades do algoritmo utilizado.

Ao longo dessa capítulo, serão analisados os algoritmos de estimação *on-line* baseados no erro de predição, essa escolha deve-se ao fato de suas aplicações no processo de filtragem, predição e controle adaptativo.

## 2.1 Esquema Geral dos Algoritmos de Estimação On-Line

Na implementação de um algoritmo de estimação de parâmetros, os algoritmos recursivos assumem carácter importante, devido aos seus reduzidos esforços computacionais quando comparados com algoritmos não recursivos. Na equação (2.1) é apresentada a forma geral para os algoritmos de estimação recursivos. Note que o parâmetro  $\hat{\theta}(t)$  é calculado a partir da estimativa no instante anterior  $\hat{\theta}(t-1)$ .

$$\hat{\theta}(t) = f(\hat{\theta}(t-1), D(t), t) \quad (2.1)$$

onde  $D(t)$  representa os dados no instante  $t$ , e  $f(., ., .)$  representa a função algébrica que determina o algoritmo de estimação. No caso de sistemas dinâmicos, os dados,  $D(t)$ , representam os valores presentes e passados das saída e entradas do sistema, que serão representados por:

$$\mathcal{Y} \triangleq \{y(t), y(t-1), \dots\} \text{ e } \mathcal{U} \triangleq \{u(t), u(t-1), \dots\}$$

Se a expressão (2.1) for linear em relação ao parâmetro  $\hat{\theta}(t-1)$ , usa-se a expressão (2.2).

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + M(t-1)\bar{\phi}(t-d)\bar{e}(t) \quad (2.2)$$

sendo

- $\hat{\theta}$  : representa a estimativa no instante  $t$
- $M(t-1)$  : representa o ganho do algoritmo
- $\bar{\phi}(t-d)$  : representa o vetor de regressão, que é composto pelos elementos de  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{U}$ , e  $d$  é um inteiro.
- $\bar{e}(t)$  : representa o erro de modelagem

Apesar da equação (2.2) parecer simples, ela poderá representar um vasto número de algoritmos, a depender da escolha da matriz  $M(t)$ . A seguir serão estudados algoritmos que são derivados de (2.2).

## 2.2 Algoritmo de Projeção

Nesta seção será apresentado o algoritmo de projeção, bem como suas propriedades as quais serão importantes para uma compreensão desse algoritmo.

A equação que descreve o algoritmo é apresentada em (2.3).

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.3)$$

com condição inicial dada por  $\hat{\theta}(0)$ . A equação (2.3) é um caso especial de (2.2) com:

$$M(t-1) = \frac{1}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)}; \quad \bar{\phi}(t) = \phi(t); \quad d = 1 \quad (2.4)$$

$$\bar{e}(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \quad (2.5)$$

O algoritmo de projeção é o resultado da minimização da função de custo representada pela distância entre duas estimativas consecutivas, esse resultado é apresentado no Lema 1.

**Lema 1.** *O algoritmo de projeção é resultado do seguinte processo de otimização. Conhecido  $\hat{\theta}(t-1)$  e  $y(t)$ , determine  $\hat{\theta}(t)$  de modo que:*

$$J = \frac{1}{2} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 \quad (2.6)$$

*seja minimizada e sujeita a condição,*

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta(t-1) \quad (2.7)$$

Prova: Para a minimização da função de custo apresentada em (2.6), use-se o método do multiplicador de Lagrange. Dessa maneira,

$$J_c = \frac{1}{2} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 + \lambda [y(t) - \phi(t-1)^T \theta] \quad (2.8)$$

As condições para a minimização da função  $J_c$  são:

$$\frac{\partial J_c}{\partial \hat{\theta}(t)} = 0 \implies \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) - \lambda \phi(t-1) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial \lambda} = 0 \implies y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t) = 0 \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) em (2.10) e isolando a variável  $\lambda$ , obtém-se:

$$\lambda = \frac{y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)} \quad (2.11)$$

O algoritmo de projeção é obtido substituindo-se (2.11) em (2.9) e colocando  $\hat{\theta}(t)$  em função de  $\hat{\theta}(t-1)$ .

A interpretação geométrica desse algoritmo é apresentada na Figura 2, onde se pode perceber que a função de custo é minimizada calculando a menor distância entre a estimativa anterior,  $\hat{\theta}(t-1)$ , e o hiperplano caracterizado por  $y(t) = \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)$ .

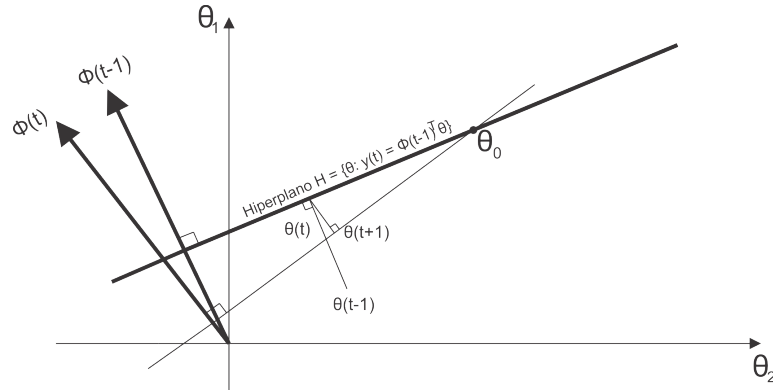


Figura 2 – Interpretação geométrica do Algoritmo de Projeção

Devido a presença do número  $\phi(t-1)^T \phi(t-1)$  no denominador da expressão (2.3), enfrenta-se um problema matemático e computacional quando esse termo é zero ou próximo de zero. Portanto, com a finalidade de eliminar os problemas citados, faz-se a seguinte modificação no algoritmo de projeção:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.12)$$

com condição inicial  $\hat{\theta}(0)$  e  $c > 0$ ;  $0 < a < 2$ .

As propriedades inerentes a esse algoritmo são apresentadas no Lema 2, antes, porém, faz-se necessário a definição dos seguintes parâmetros:

$$\tilde{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta_0 \quad (2.13)$$

$$e(t) \triangleq y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) = -\phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1) \quad (2.14)$$

**Lema 2.** Para o algoritmo

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)]$$

com a restrição

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta(t-1)$$

tem-se as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\| \leq \left\| \hat{\theta}(t-1) - \theta_0 \right\| \leq \left\| \hat{\theta}(0) - \theta_0 \right\|; t \geq 1 \quad (2.15)$$

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} < \infty \quad (2.16)$$

além disso, (2.15) e (2.16) implicam que:

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (2.17)$$

$$(b) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{\phi(t-1)^T \phi(t-1) e(t)^2}{[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]^2} < \infty \quad (2.18)$$

$$(c) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 < \infty \quad (2.19)$$

$$(d) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2 < \infty \quad (2.20)$$

$$(e) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\| < \infty \quad (2.21)$$

para qualquer  $k$  finito.

Prova: (i) Subtraindo  $\theta_0$  de ambos os lados na equação (2.3), obtém-se:

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t-1) - \frac{a\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)} \phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1) \quad (2.22)$$

Prosseguindo com o cálculo de  $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2$ , que será dado por:

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 &= \left(\tilde{\theta}(t-1)^T - \frac{a\tilde{\theta}(t-1)^T\phi(t-1)\phi(t-1)^T}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)}\right) \left(\tilde{\theta}(t-1) - \frac{a\phi(t-1)\tilde{\theta}(t-1)^T\theta(t-1)}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)}\right) \quad (2.23) \\ &= \left\|\tilde{\theta}(t-1)\right\|^2 - 2a \frac{\tilde{\theta}(t-1)^T\phi(t-1)\phi(t-1)^T\tilde{\theta}(t-1)}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)} \\ &\quad + \frac{a^2\tilde{\theta}(t-1)^T\phi(t-1)\phi(t-1)^T\phi(t-1)\phi(t-1)^T\tilde{\theta}(t-1)}{[c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)]^2} \end{aligned}$$

Passando o termo  $\left\|\hat{\theta}(t-1)\right\|^2$  para o lado esquerdo, tem-se:

$$\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 - \left\|\hat{\theta}(t-1)\right\|^2 = \left[-2 + \frac{a\phi(t-1)^T\phi(t-1)}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)}\right] \frac{ae(t)^2}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)} \quad (2.24)$$

Como o termo entre colchetes é sempre negativo, pois  $0 < a < 2$  e  $c > 0$ . Conclui-se que a função  $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2$  é limitada e não crescente. Com isso, prova-se o item (i).

(ii) Observando que  $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2$  é limitada e não crescente, e usando o seguinte artifício:

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\theta}(1)\right\|^2 &= \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2 + \left[-2 + \frac{a\phi(0)^T\phi(0)}{c+\phi(0)^T\phi(0)}\right] \frac{ae(0)}{c+\phi(0)^T\phi(0)} \\ \left\|\tilde{\theta}(2)\right\|^2 &= \left\|\tilde{\theta}(1)\right\|^2 + \left[-2 + \frac{a\phi(1)^T\phi(1)}{c+\phi(1)^T\phi(1)}\right] \frac{ae(1)}{c+\phi(1)^T\phi(1)} \\ &\quad \vdots \\ \left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 &= \left\|\tilde{\theta}(t-1)\right\|^2 + \left[-2 + \frac{a\phi(t-1)^T\phi(t-1)}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)}\right] \frac{ae(t-1)}{c+\phi(t-1)^T\phi(t-1)} \end{aligned}$$

Substituindo recursivamente as expressões acima e tomando o limite quando  $N \rightarrow \infty$ , tem-se a expressão (2.25).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 - \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N a \left[-2 + \frac{a\phi(j-1)^T\phi(j-1)}{c+\phi(j-1)^T\phi(j-1)}\right] \frac{e^2(t)}{c+\phi(j-1)^T\phi(j-1)} \quad (2.25)$$

Devido ao fato de que  $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2$  é limitada e não crescente, prova-se o item (ii) do Lema.

- (a) O resultado segue imediatamente de (2.16).
- (b) Considerando que:

$$\frac{e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} = \frac{[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]e(t)^2}{[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]^2} \implies$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{\phi(t-1)^T \phi(t-1) e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)}$$

Portanto, usando (2.16), prova-se o item b.

(c) Usando (2.12), obtém-se que:

$$\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) = -\frac{a\phi(t-1)\phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \implies$$

$$\left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 = \frac{a^2 \phi(t-1)^T \phi(t-1) e(t)^2}{[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]^2}$$

(d) Para provar esse item, usa-se o seguinte artifício:

$$\left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2 = \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) + \hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2) + \dots + \hat{\theta}(t-k+1) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2$$

Usando a desigualdade de Schwarz:

$$\leq k \left( \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 + \left\| \hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-2) \right\|^2 + \dots + \left\| \hat{\theta}(t-k+1) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2 \right)$$

Dessa maneira, o item (d) segue diretamente da aplicação de (c), pois  $k$  é um número finito.

(e) Imediato da propriedade (d).

Apresentadas as propriedades, existem alguns fatos a serem destacados. Primeiramente, todas as propriedades apresentadas no Lema 2 foram determinadas sem nenhuma restrição com relação ao vetor  $\phi$ , ou seja, para as propriedades serem válidas, não se faz necessário que o vetor  $\phi$  seja limitado. Porém, é importante analisar que essas propriedades não garantem que  $\hat{\theta}(t)$  converge para  $\theta_0$ , de fato, as condições de convergência desse algoritmo serão apresentadas adiante.

A propriedade (i) garante que  $\hat{\theta}(t)$  não está mais distante de  $\theta_0$  do que  $\hat{\theta}(0)$ . Adicionalmente, a propriedade (ii) garante que o quadrado do erro de modelagem, quando devidamente normalizado, é **infinitamente somável**. Finalmente, a propriedade (e) garante que as estimativas são próximas umas das outras quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Algoritmo dos Mínimos Quadrados

O algoritmo dos mínimos quadrados é um dos algoritmos mais importantes na estimação de parâmetros. Tendo, como veremos a seguir, uma maior velocidade de convergência quando comparado com o algoritmo de projeção. Sua forma recursiva é apresentada nas expressões (2.26) e (2.27).

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.26)$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.27)$$

Este algoritmo é obtido a partir da minimização da função de custo quadrática apresentada em (2.28).

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y(t) - \phi(t-1)^T \theta)^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (2.28)$$

A função de custo, apresentada em (2.28) apresenta dois termos, sendo o primeiro relativo ao erro (diferença entre a saída,  $y(t)$ , e a sua predição realizada com o vetor  $\hat{\theta}(t-1)$ ). Antes de provar a conexão de  $J_N$  com as equações (2.26) e (2.27), apresenta-se o seguinte Lema, chamado de lema da inversão de matriz.

**Lema 3.** *Se,*

$$P(t-1)^{-1} = P(t-2)^{-1} + \phi(t-1)\phi(t-1)^T a(t-1) \quad (2.29)$$

onde  $a(t-1) > 0$ , tem-se que  $P(t-1)$  está relacionado com  $P(t-2)$  da seguinte forma:

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)a(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)a(t-1)} \quad (2.30)$$

e também são validas as seguintes relações:

$$P(t-1)\phi(t-1) = \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)a(t-1)} \quad (2.31)$$

$$P(t-2)\phi(t-1) = \frac{P(t-1)\phi(t-1)}{1 - \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)a(t-1)} \quad (2.32)$$

$$\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1) = \frac{\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)a(t-1)} \quad (2.33)$$

$$\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1) = \frac{\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)}{1 - \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)a(t-1)} \quad (2.34)$$

A prova do Lema 3 será omitida, porém é necessário entender sua importância. Basicamente, a vantagem da utilização do Lema 3 é a simplificação no cálculo da inversa de uma matriz que é modificada pela soma de um produto externo, ou seja, ao invés de realizar o cálculo da inversa a partir dos métodos tradicionais, calcula-se a inversa com simples divisões e multiplicações entre escalares. Dito isso, pode-se enunciar o seguinte Lema.

**Lema 4.** *O algoritmo*

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)]$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}$$

minimiza a função de custo

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y(t) - \phi(t-1)^T \theta)^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0))$$

Prova. Note que (2.28) pode ser escrita como:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (y(1) - \phi(0)^T \theta) & (y(2) - \phi(1)^T \theta) & \dots & (y(N) - \phi(N-1)^T \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y(1) - \phi(0)^T \theta) \\ (y(2) - \phi(1)^T \theta) \\ \vdots \\ (y(N) - \phi(N-1)^T \theta) \end{bmatrix} \\ + \frac{1}{2} [\theta^T P_0^{-1} \theta - \hat{\theta}(0)^T P_0^{-1} \theta - \theta^T P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \hat{\theta}(0)^T P_0^{-1} \hat{\theta}(0)]$$

definindo,

$$K \triangleq \dim(\theta)$$

$$Y_N \triangleq \begin{pmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{pmatrix}^T \quad Y_N \in \mathbb{R}^{1 \times N}$$

$$\Phi_{N-1} \triangleq \begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \dots & \phi(N-1) \end{pmatrix}^T \quad \Phi_{N-1} \in \mathbb{R}^{N \times K}$$

pode-se escrever  $J_N$  como:

$$J_N(\theta) = (Y_N - \Phi_{N-1}\theta)^T (Y_N - \Phi_{N-1}\theta) \quad (2.35)$$



Realizando as multiplicações em (2.35):

$$J_N(\theta) = Y_N^T Y_N - Y_N^T \Phi_{N-1} \theta - \theta^T \Phi_{N-1}^T Y_N + \theta^T \Phi_{N-1} \Phi_{N-1}^T \theta \\ + \frac{1}{2} [\theta^T P_0^{-1} \theta - \hat{\theta}(0)^T P_0^{-1} \theta - \theta^T P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \hat{\theta}(0)^T P_0^{-1} \hat{\theta}(0)]$$

Calculando a derivada com relação a  $\theta$  e igualando seu valor a zero, obtém-se:

$$[\Phi_{N-1}^T \Phi_{N-1} + P_0^{-1}] \theta = P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-1}^T Y_N$$

Definindo-se o valor de  $\theta$  que satisfaz essa equação como  $\hat{\theta}(N)$ , escreve-se:

$$\hat{\theta}(N) = [\Phi_{N-1}^T \Phi_{N-1} + P_0^{-1}]^{-1} [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-1}^T Y_N] = P(N-1) [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-1}^T Y_N] \quad (2.36)$$

onde  $P(N-1) = [\Phi_{N-1}^T \Phi_{N-1} + P_0^{-1}]^{-1}$ .

Analisando a expressão  $P(N-1)^{-1}$ , tem-se:

$$P(N-1)^{-1} = P_0^{-1} + \begin{pmatrix} \phi(0) & & \\ & \dots & \\ \phi(0) & \dots & \phi(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \vdots \\ \phi(N-1) \end{pmatrix} = P_0^{-1} + \sum_{j=1}^N \phi(j-1) \phi(j-1)^T$$

Analisando a expressão  $P(N-2)^{-1}$ , tem-se:

$$P(N-2)^{-1} = P_0^{-1} + \begin{pmatrix} \phi(0) & & \\ & \dots & \\ \phi(0) & \dots & \phi(N-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \vdots \\ \phi(N-2) \end{pmatrix} = P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{N-1} \phi(j-1) \phi(j-1)^T$$

Portando, da análise das expressões para  $P(N-1)$  e  $P(N-2)$ , conclui-se que:

$$P(N-1)^{-1} = P(N-2)^{-1} + \phi(N-1) \phi(N-1)^T \quad (2.37)$$

Da equação (2.36), obtém-se a seguinte expressão para  $\hat{\theta}(N-1)$ :

$$\hat{\theta}(N-1) = [\Phi_{N-2}^T \Phi_{N-2} + P_0^{-1}]^{-1} [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-2}^T Y_{N-1}] \\ = P(N-2) [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-2}^T Y_{N-1}] \quad (2.38)$$

Manipulando a expressão (2.36):

$$\hat{\theta}(N) = P(N-1) [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-2}^T Y_{N-1} + \phi(N-1) y(N)] \quad (2.39)$$

Observando (2.38), pode-se explicitar  $\hat{\theta}(N-1)$  em (2.39), obtendo:

$$\hat{\theta}(N) = P(N-1) [P(N-2)^{-1} \hat{\theta}(N-1) + \phi(N-1) y(N)]$$

Usando (2.37) e realizando algumas operações algébricas, obtém-se:

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}(N-1) + P(N-1)\phi(N-1)[y(N) - \phi(N-1)^T\hat{\theta}(N-1)] \quad (2.40)$$

A expressão (2.26) será obtida a partir da substituição de (2.31) em (2.40).

Após a análise das equação do algoritmo dos mínimos quadrados, prossegue-se expondo as principais propriedades inerentes ao algoritmo (2.26)-(2.27). Para isso, defini-se, da mesma maneira que para o algoritmo de projeção,  $e(t)$  e  $\tilde{\theta}(t-1)$  que, por conveniência, são representados a seguir:

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - \phi(t-1)^T\hat{\theta}(t-1) \\ &= -\phi(t-1)^T\tilde{\theta}(t-1) \\ \tilde{\theta}(t-1) &= \hat{\theta}(t-1) - \theta_0 \end{aligned}$$

**Lema 5.** *Para o algoritmo*

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^TP(t-2)\phi(t-1)}[y(t) - \phi(t-1)^T\hat{\theta}(t-1)]$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^TP(t-2)}{1 + \phi(t-1)^TP(t-2)\phi(t-1)}$$

sujeito a

$$y(t) = \phi(t-1)^T\theta(t-1)$$

tem-se:

$$(i) \quad \left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\|^2 \leq k_1 \left\| \hat{\theta}(0) - \theta_0 \right\|^2; \quad t \geq 1 \quad (2.41)$$

onde

$$k_1 \triangleq \frac{\lambda_{\max}P(-1)^{-1}}{\lambda_{\min}P(-1)^{-1}}$$

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{e(t)^2}{1 + \phi(t-1)^TP(t-2)\phi(t-1)} < \infty \quad (2.42)$$

As condições (i) e (ii) implicam em:

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{[1 + k_2\phi(t-1)^TP(t-2)\phi(t-1)]^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{onde } k_2 = \lambda_{\max}P(-1)$$

$$(b) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{\phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1) e(t)^2}{[1 + \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)]^2} < \infty \quad (2.44)$$

$$(c) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 < \infty \quad (2.45)$$

$$(d) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2 < \infty \quad (2.46)$$

$$(e) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\| < \infty \quad (2.47)$$

Prova. (i) Subtraindo  $\theta_0$  da expressão (2.26) e utilizando a expressão (2.31) do Lema 3, obtém-se:

$$\tilde{\theta}(t) = [I - P(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T] \tilde{\theta}(t-1) \quad (2.48)$$

Com os resultados das expressões (2.48) e (2.29), obtém-se a seguinte expressão:

$$\tilde{\theta}(t) = P(t-1)P(t-2)^{-1} \tilde{\theta}(t-1) \quad (2.49)$$

Para provar (i), é necessária verificar que a expressão (2.49) é não crescente e limitada superiormente. Para isso, considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(t) = \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1} \tilde{\theta}(t) \quad (2.50)$$

Calculando a diferença  $V(t) - V(t-1)$ , obtém-se:

$$V(t) - V(t-1) = \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1} \tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}(t-1)P(t-2)^{-1} \tilde{\theta}(t-1)$$

Substituindo a expressão (2.49) no termo  $\tilde{\theta}(t)$  da última expressão, tem-se:

$$\begin{aligned} &= \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1}P(t-1)P(t-2)^{-1} \tilde{\theta}(t-1) - \tilde{\theta}(t-1)P(t-2)^{-1} \tilde{\theta}(t-1) \\ &= \tilde{\theta}(t-1)^T P(t-2)^{-1} [\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}(t-1)] \end{aligned}$$

Usando a equação (2.26), pode-se escrever

$$\begin{aligned} &= -\tilde{\theta}(t-1)^T P(t-2)^{-1} \left[ \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \right] \\ V(t) - V(t-1) &= -\frac{\left\| \phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1) \right\|^2}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.51) \end{aligned}$$

Com o resultado da equação(2.51), conclui-se que a função  $V(t)$  é não crescente e limitada. Portanto, é possível afirmar que:

$$\tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1}\tilde{\theta}(t) \leq \tilde{\theta}(0)P(-1)^{-1}\tilde{\theta}(0) \quad (2.52)$$

Deixando esse resultado a parte por um instante, usa-se, novamente, a expressão (2.29) e realiza-se uma pré-multiplicação e uma pós-multiplicação por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, obtendo:

$$x^T P(t)^{-1}x = x^T P(t-1)^{-1}x + x^T \phi(t)\phi(t)^T x \geq x^T P(t-1)^{-1}x$$

Usando o conceito de autovalores, pode-se escrever as seguintes desigualdades:

$$\lambda_{\min}P(-1)^{-1} \leq \lambda_{\min}P(t-1)^{-1} \leq \lambda_{\min}P(t)^{-1}$$

Como consequência dessa relação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}P(-1)^{-1} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2 &\leq \lambda_{\min}P(t-1)^{-1} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2 \leq \lambda_{\min}P(t)^{-1} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2 \leq \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1}\tilde{\theta}(t) \\ &\leq \tilde{\theta}(0)P(-1)^{-1}\tilde{\theta}(0) \leq \lambda_{\max}P(-1)^{-1} \left\| \tilde{\theta}(0) \right\|^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Usando a primeira e última expressões das desigualdades apresentadas, tem-se:

$$\left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}P(-1)^{-1}}{\lambda_{\min}P(-1)^{-1}} \left\| \tilde{\theta}(0) \right\|^2 \quad (2.54)$$

que representa o item (i) do Lema 4.

(ii) No desenvolvimento do item(i) do Lema 4, obteve-se a seguinte expressão:

$$V(t) - V(t-1) = -\frac{e(t)^2}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.55)$$

Realizando a soma de  $i = 1$  até  $i = N$  e fazendo  $N \rightarrow \infty$ , encontra-se a seguinte expressão:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{e(t)^2}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} = V(0) - \lim_{N \rightarrow \infty} V(N)$$

Como o último termo do lado direito é menor que infinito, pois  $V(t)$  é não crescente e limitada, conclui-se a parte (ii) do Lema 4.

(a) Usando a equação (2.29), obtém-se:

$$x^T P(t)^{-1}x = x^T P(t-1)^{-1}x + x^T \phi(t)\phi(t)^T x \rightarrow x^T P(t-1)^{-1}x \geq x^T P(t-1)^{-1}x$$

Da teoria de álgebra linear, sabe-se que  $\lambda_{\min}P(t)^{-1} = \frac{1}{\lambda_{\max}P(t)}$  e dessa maneira, usando expressão (2.53), tem-se:

$$\lambda_{\max}P(t) \leq \lambda_{\max}P(t-1) \leq \lambda_{\max}P(-1)$$

observando a relação (ii) e a desigualdade dos autovalores máximos, estabelece-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)^2}{1 + \lambda_{max} P(-1) \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \quad (2.56)$$

ou seja, (2.56) prova o item (a) do Lema 4.

(b) Considerando a seguinte expressão:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{e(t)^2}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{[1 + \phi^T(t-1) \phi(t-1)] e(t)^2}{[1 + \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)]^2}$$

dessa forma,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{e(t)^2}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\phi^T(t-1) \phi(t-1) e(t)^2}{[1 + \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)]^2} \quad (2.57)$$

como a somatória do lado esquerdo é finita, a série do lado direita converge e, portanto, prova-se o item (b).

(c) Usando o algoritmo, indicado nas expressões (2.26)-(2.27), tem-se:

$$\left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 = \frac{\phi^T(t-1) P(t-2)^2 \phi(t-1) e(t)^2}{[1 + \phi^T(t-1) \phi(t-1)]^2} \quad (2.58)$$

sabendo que  $x^T P(t-2)^2 x \leq \lambda_{max} \|x\|^2$ , obtém-se a seguinte desigualdade:

$$\left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 \leq \frac{\phi^T(t-1) P(t-2) \phi(t-1) e(t)^2}{[1 + \phi^T(t-1) \phi(t-1)]^2} \quad (2.59)$$

A partir de (2.59), fazendo o limite da soma dos termos e usando a relação (b), prova-se o item (c).

(d) Idêntico à prova do item (d) do Lema 2.

(e) Segue diretamente do item (d).

### 2.3.1 Algoritmo dos Mínimos Quadrados com peso seletivo

O algoritmo dos mínimos quadrados, como foi dito anteriormente, é um dos algoritmos mais importantes no processo de estimação de parâmetros. Porém, na presença de erros de medição, sistemas não lineares e sistemas variantes no tempo, o algoritmo, da maneira que foi apresentada em (2.26)-(2.27), pode não ter as propriedades apresentadas no Lema 2.40. Dessa maneira, existem variações dos métodos dos mínimos quadrados para adequar suas aplicações aos casos citados. Uma dessas modificações é o algoritmo dos mínimos quadrados com peso seletivo, cujas equações são apresentadas em (2.60)-(2.61).

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1) P(t-2) \phi(t-1)}{1 + a(t-1) \phi(t-1)^T P(t-2) \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.60)$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{a(t-1)P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.61)$$

Considerando a medição da saída,  $y(t)$ , sujeita a erros de medição, tem-se uma interpretação feita para o parâmetro  $a(t-1)$ . Pois, tomando  $a(t-1)$  igual ao inverso da média do valor esperado para o erro de medição no instante  $t$ ,  $a(t-1)$  tende a diminuir o efeito desse erro, atribuindo menores pesos aos valores de  $y(t)$  com altas expectativas de erros. Considere o Lema 6.

**Lema 6.** *O Algoritmo dos mínimos quadrados com peso seletivo*

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)P(t-2)\phi(t-1)}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)]$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{a(t-1)P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}$$

é obtido através da minimização da função de custo expressa em (2.62).

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N a(t-1) [y(t) - \phi^T(t-1)\theta]^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (2.62)$$

Prova. Percebe-se que a expressão (2.62) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0))$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a(0)(y(1) - \phi(0)^T \theta) & \dots & a(N-1)(y(N) - \phi(N-1)^T \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0)(y(1) - \phi(0)^T \theta) \\ \vdots \\ a(N-1)(y(N) - \phi(N-1)^T \theta) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\Phi_{N-1} \triangleq \begin{pmatrix} \phi(0)^T \\ \vdots \\ \phi(N-1)^T \end{pmatrix}, \Phi_{N-1} \in \mathbb{R}^{N \times K}, \quad Y_N = \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}, Y_N \in \mathbb{R}^{N \times 1}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} a(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(N-1) \end{pmatrix}, A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

A função de custo pode, dessa forma, ser escrita como:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2}(Y_N - \Phi_{N-1}\theta)^T A_N (Y_N - \Phi_{N-1}\theta) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1}(\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (2.63)$$

Calculando a derivada de (2.63) e resolvendo-a com relação a  $\theta$ , tem-se:

$$\hat{\theta}(N) = [\Phi_{N-1}^T A_N \Phi_{N-1} + P_0^{-1}]^{-1} [P_0^{-1} \hat{\theta}(0) + \Phi_{N-1}^T A_N Y_N]$$

onde  $\hat{\theta}(N)$  é o valor de  $\theta$  que minimiza (2.62) para  $N$  amostras. Definindo

$$P(N-1)^{-1} = P_0^{-1} + \Phi_{N-1}^T A_N \Phi_{N-1} \Rightarrow P(N-1)^{-1} = P(N-2)^{-1} + a(N-1)\phi(N-1)\phi(N-1)^T$$

e manipulando (2.63) da mesma maneira feita para o algoritmo dos mínimos quadrados, pode-se escrever:

$$\hat{\theta}(N) = P(N-1)[P(N-2)^{-1}\hat{\theta}(N-1) + a(N-1)\phi(N-1)y(N)]$$

que, substituindo (2.29) na expressão anterior, obtém-se:

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}(N-1) + a(N-1)P(N-1)\phi(N-1)[y(N) - \phi(N-1)^T \hat{\theta}(N-1)] \quad (2.64)$$

A partir da expressão (2.64) e usando (2.31), encontra-se o algoritmo (2.60)-(2.61).

No que diz respeito as propriedades inerentes a esse algoritmo, considere o Lema

**Lema 7.** *O algoritmo*

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)P(t-2)\phi(t-1)}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)]$$

$$P(t-1) = P(t-2) + \frac{a(t-1)P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}$$

sujeito a

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta(t-1)$$

apresenta as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\|^2 \leq k_1 \left\| \hat{\theta}(0) - \theta_0 \right\|^2; \quad t \geq 1 \quad (2.65)$$

onde  $k_1 = \lambda_{max} P(-1)^{-1}$ .

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{a(t-1)e(t)^2}{1 + a(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} < \infty \quad (2.66)$$

Prova. As provas das expressões (2.65) e (2.66) são similares as apresentadas no Lema 4 e, por isso, serão omitidas.

Além da variação apresentada para o algoritmo dos mínimos quadrados, existem outras com, por exemplo: Mínimos Quadrados com fator de esquecimento e Mínimos quadrados com reinicialização da covariância. Para maiores informações ver [5].

## 2.4 Condições de convergência

Como foi dito anteriormente, os Lemas 2, 5 e 7 não apresentam condições para a convergência dos parâmetros para o seus verdadeiros valores, identificado como sendo  $\theta_0$ . Dessa maneira, faz-se necessário estabelecer condições relativas ao sinal de entrada, de maneira que os parâmetros estimados tendam aos parâmetros verdadeiros. Tal condição é expressa em (2.67).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\| = 0 \quad (2.67)$$

Nesta secção serão analisadas as condições de convergência para os algoritmo abordados, inicia-se com o algoritmo dos mínimos quadrados e, em seguida, trata-se do algoritmo de projeção.

### 2.4.1 Convergência - Algoritmo dos mínimos quadrados

Para mostrar a condição para o sinal de entrada desse algoritmo, faz-se necessário a utilização da função de Lyapunov utilizada na prova do Lema 5, que, por comodidade, será reescrita a seguir:

$$V(t) = \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1}\tilde{\theta}(t)$$

No Lema 5, foi provado que essa função de Lyapunov é limitada e não crescente, portanto, pode-se afirmar que:

$$V(0) \geq V(1) \geq \dots \geq V(t) \Rightarrow$$

$$V(0) \geq \tilde{\theta}(t)P(t-1)^{-1}\tilde{\theta}(t) \geq \lambda_{\min}P(t-1)^{-1} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2 \quad (2.68)$$

Da expressão (2.68), conclui-se que, para que a condição (2.67) seja satisfeita, é necessário que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}P(t-1)^{-1} = \infty \quad (2.69)$$

Usando (2.29), a expressão (2.69) pode ser escrita como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \sum_{j=0}^{t-1} \phi(j)\phi(j)^T = \infty \quad (2.70)$$

Vale ressaltar que para o caso em que o sistema dinâmico é representado por um modelo a média móvel, ou seja,



$$y(t) = \sum_{j=1}^n b_j u(t-j) = \phi(t-1)^T \theta_0$$

a expressão (2.70) já é uma condição explícita do sinal de entrada. Para o caso de sistema dinâmicos representado por seu modelo DARMA pode-se concluir condições semelhantes, porém, essa prova será omitida desse trabalho. Para maiores informações, ver [5].

## 2.4.2 Convergência - Algoritmo de Projeção

Como o objetivo de estabelecer condições do sinal de entrada para garantir a convergência do parâmetros para o algoritmo de projeção, serão feitas algumas considerações a respeito da propagação do erro de estimação,  $\tilde{\theta}(t)$ .

**Lema 8.** Usando o algoritmo de projeção, o erro,  $\tilde{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta_0$  satisfaz:

(i)

$$\tilde{\theta}(t) = F(t-1)\tilde{\theta}(t-1) \quad (2.71)$$

onde  $F(t-1)$  é o operador de projeção definido como se segue:

$$F(t-1) = I - \frac{\phi(t-1)\phi(t-1)^T}{\phi(t-1)^T\phi(t-1)}$$

(ii)

$$\tilde{\theta}(t+j) = \psi(t+j, t)\tilde{\theta}(t) \quad (2.72)$$

onde:

$$\psi(t+j, t) = \prod_{k=0}^{j-1} F(t+k); j \geq 1 \quad (2.73)$$

Prova. (i) Subtraindo ambos os lados de (2.3) por  $\theta_0$  e usando (2.14), tem-se:

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t-1) - \frac{\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T\phi(t-1)}\phi(t-1)^T\tilde{\theta}(t-1) \Rightarrow$$

$$\tilde{\theta}(t) = \left[ I - \frac{\phi(t-1)\phi(t-1)^T}{\phi(t-1)^T\phi(t-1)} \right] \tilde{\theta}(t-1) = F(t-1)\tilde{\theta}(t-1)$$

Antes de continuarmos com a prova do Lema 8, discuti-se brevemente sobre o operador de projeção citado no item (i) desse Lema. Considere a Figura 3, onde é apresentada a definição do operador de projeção. Para isso, considere no espaço  $\mathbb{R}^3$  um vetor,  $\vec{u}$ , e um plano perpendicular a  $\vec{u}$ , denominado de  $u^\perp$ . O operador de projeção, definido como  $P = I - \frac{uu^T}{u^T u}$ , é tal que, quaisquer que seja o vetor  $\theta$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ , o vetor,  $\vec{w} = P\theta$ , é a projeção de  $\theta$  no plano  $u^\perp$  e o vetor,  $\vec{v} = (I - P)\theta$ , é a projeção de  $\theta$  no subespaço que apresenta  $\vec{u}$  como base.

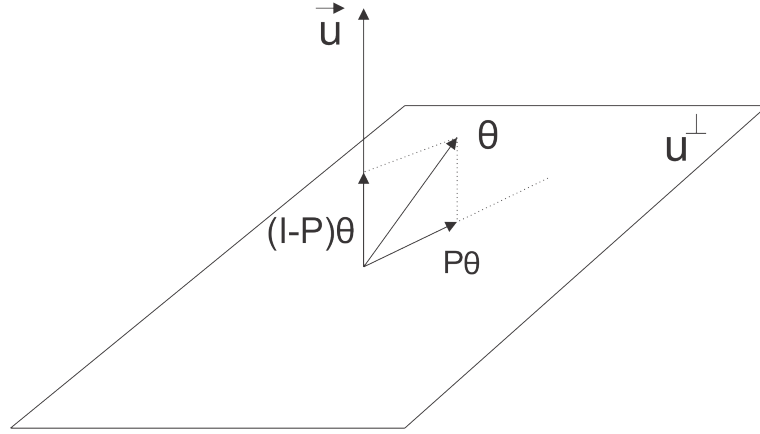


Figura 3 – Definição do operador de projeção

Voltando a prova do item (ii) do Lema 8:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}(t+1) &= F(t)\tilde{\theta}(t) \\
 \tilde{\theta}(t+2) &= F(t+1)\tilde{\theta}(t+1) = F(t+1)F(t)\tilde{\theta}(t) \\
 &\vdots \\
 \tilde{\theta}(t+j) &= F(t+j-1)\tilde{\theta}(t+j-1) = F(t+j-1)\dots F(t+1)F(t)\tilde{\theta}(t) \\
 \tilde{\theta}(t+j) &= \psi(t+j, t)\tilde{\theta}(t)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde

$$\psi(t+j, t) = \prod_{k=0}^{j-1} F(t+k); j \geq 1$$

Na verdade, como será visto em seguida, a condição de convergência desse algoritmo dar-se-á por uma condição do gramiano de observabilidade do sistema formado pelas equações (2.71)-(2.76). Antes disso, considere o seguinte Lema.

**Lema 9.**

$$\sum_{i=0}^{l-1} \epsilon(t+i)^2 = \tilde{\theta}(t)^T G_l(t) \tilde{\theta}(t) \tag{2.75}$$

(i) onde  $\epsilon(t)$  é o erro de predição normalizado, dado por:

$$\epsilon = \frac{1}{\|\phi(t)\|} [y(t+1) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t)] = \phi_n(t) \tilde{\theta}(t) \tag{2.76}$$

$$\phi_n(t) \triangleq \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|}$$

(ii)  $G_l(t)$  é o gramiano de observabilidade do sistema  $\tilde{\theta}(t) = F(t-1)\tilde{\theta}(t-1)$  e (2.76), ou seja,

$$G_l(t) \triangleq \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\psi(t+i, t) \phi(t+1) \phi(t+i)^T \psi(t+i, t)}{\phi(t+1)^T \phi(t+i)} \tag{2.77}$$

Prova. (i) Pela definição:

$$\epsilon(t)^2 = -\frac{\phi(t)^T \tilde{\theta}(t)}{\|\phi(t)\|}$$

Portanto,

$$\epsilon(t)^2 = -\frac{\tilde{\theta}(t)^T \phi(t) \phi(t)^T \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)}$$

Somando os termos de  $t$  até  $l-1$ , obtém-se:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \epsilon(t+i)^2 = \epsilon(t) + \dots + \epsilon(t+l-1) = \frac{\tilde{\theta}(t)^T \phi(t) \phi(t)^T \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)} + \dots + \frac{\tilde{\theta}(t+l-1)^T \phi(t+l-1) \phi(t+l-1)^T \tilde{\theta}(t+l-1)}{\phi(t+l-1)^T \phi(t+l-1)}$$

Usando o Lema 8, escreve-se a equação anterior como:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \epsilon(t+i)^2 = \frac{\tilde{\theta}(t)^T \phi(t) \phi(t)^T \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)} + \frac{\tilde{\theta}(t)^T F(t)^T \phi(t) \phi(t)^T F(t) \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)} + \dots + \frac{\tilde{\theta}(t)^T F(t+l-1)^T \dots F(t)^T \phi(t) \phi(t)^T F(t+l-1) \dots F(t) \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)}$$

Realizando algumas manipulações e usando a definição de gramiano dada em (2.76), pode-se escrever:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \epsilon(t+i)^2 = \tilde{\theta}(t)^T G_l(t) \tilde{\theta}(t) \quad (2.78)$$

Os dois Lemas anteriores, Lema 8 e Lema 9, foram introduzidos pois eles servem como base para o próximo Lema, que trata da convergência do algoritmo de projeção.

**Lema 10.** *O algoritmo de projeção é exponencialmente convergente para  $\theta_0$  se a seguinte "condição de observabilidade" for satisfeita.*

$$G_l(t) \geq cI, \quad c > 0, \quad \forall t \text{ e } l > 0. \quad (2.79)$$

Prova. Definindo a seguinte função de Lyapunov,

$$V(t) = \tilde{\theta}(t)^T \tilde{\theta}(t)$$

e usando (2.71), escrever-se a seguinte expressão para  $V(t+1)$

$$V(t+1) = V(t) - \frac{\tilde{\theta}(t)^T \phi(t) \phi(t)^T \tilde{\theta}(t)}{\phi(t)^T \phi(t)}$$

Com essa expressão e usando o processo de indução,

$$\begin{aligned} V(t+2) &= V(t+1) - \frac{\tilde{\theta}(t)^T F(t)^T \phi(t+1) \phi(t+1)^T F(t) \tilde{\theta}(t)}{\phi(t+1)^T \phi(t+1)} \\ V(t+3) &= V(t+2) - \frac{\tilde{\theta}(t)^T F(t)^T F(t+1)^T \phi(t+2) \phi(t+2)^T F(t+1) F(t) \tilde{\theta}(t)}{\phi(t+2)^T \phi(t+2)} \\ &\vdots \\ V(t+l) &= V(t+l-1) - \frac{\tilde{\theta}(t)^T F(t)^T \dots F(t+l-2)^T \phi(t+l-1) \phi(t+l-1)^T F(t+l-2) \dots F(t) \tilde{\theta}(t)}{\phi(t+l-1)^T \phi(t+l-1)} \end{aligned}$$

obtem-se:

$$V(t+l) = V(t) - \sum_{i=0}^{l-1} \tilde{\theta}(t)^T \frac{\psi^T(t+i, t) \phi(t+i) \phi(t+i+1)^T \psi(t+i, t)}{\phi(t+i)^T \phi(t+i)} \tilde{\theta}(t)$$

que usando a definição do gramiano apresentada em (2.77) e assumindo que  $\exists l > 0 : G_l(t) \geq c$ , escreve-se a seguinte desigualdade:

$$V(t+l) = V(t) - \tilde{\theta}(t)^T G_l(t) \tilde{\theta}(t) \leq V(t) - c \|\tilde{\theta}(t)\|^2 = (1-c)V(t) \quad (2.80)$$

Sabendo que, por definição,  $V(t) > 0$  então,  $c < 1$ . Além disso, usando a expansão de Taylor para  $e^{-c}$ ,

$$e^{-c} = 1 - c + \frac{c^2}{2!} - \frac{c^3}{3!} + \frac{c^4}{4!} - \dots$$

conclui-se que  $(1-c) < e^{-c}$  e, portanto:

$$V(t+l) \leq (1-c)V(t) \leq e^{-c}V(t) \quad (2.81)$$

escolhendo  $t = (N-1)l$ ,

$$V(lN) \leq e^{-Nc}V(0) \quad (2.82)$$

ou seja, conclui-se, pela definição de  $V(t)$ , que  $\tilde{\theta}(t)$  converge para zero exponencialmente.

Ao contrário da relação (2.70), a condição de observabilidade apresentada no Lema 10, ou seja,  $G_l(t) \geq cI$ , é difícil de checar. Com o objetivo de indicar uma relação direta com o vetor  $\phi(t)$ , analisa-se características no que diz respeito ao sistema formado pelas equações (2.71)-(2.76)

- Realimentação com saída limitada não altera as propriedades de observabilidade do sistema.

Prova. Considere um sistema cujo espaço de estado é apresentado a seguir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.83)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Supondo que o sistema é controlável, sabe-se que o teste de Popov é satisfeito, ou seja:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n, \forall \lambda \in \sigma(A)$$

onde  $\sigma(A)$  representa o conjunto de autovalores de  $A$ .

Considere que o sistema (2.83) é realimentado da maneira indicada na Figura 4.

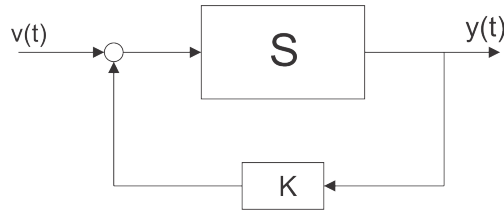


Figura 4 – Realimentação da saída de um sistema dinâmico.

Com essa realimentação, a equação de estado do sistema em malha fechada é dada por:

$$\dot{x} = (A + BKC)x(t) + Bv(t) \quad (2.84)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Aplicando o teste de Popov para o sistema (2.84), tem-se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + BKC - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \left[ \begin{pmatrix} I_n & BK \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n, \forall \lambda \in \sigma(A)$$

A última passagem é verdadeira pois a matriz  $\begin{pmatrix} I_n & BK \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é unimodular.

- Existe uma realimentação na qual a matriz de transição de estado do sistema (2.71)-(2.76) é a matriz identidade.

Prova. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(t+1) &= F(t)\tilde{\theta}(t) \\ \epsilon(t) &= -\phi_N^T \tilde{\theta}(t) \end{aligned}$$

Usando a propriedade da inalterabilidade da observabilidade quando sujeita a realimentação da saída, obtém o seguinte sistema (que apresenta as mesmas características de observabilidade que o sistema anterior):

$$\tilde{\theta}'(t+1) = F(t)\tilde{\theta}'(t) - K(t)\epsilon'(t) = (F(t) + K(t)\phi_N^T)\tilde{\theta}'(t)$$

$$\epsilon'(t) = -\phi_N^T \tilde{\theta}'(t)$$

escolhendo  $K(t) = \phi_N(t)$  e substituindo a expressão do operador de projeção, obtém-se:

$$\tilde{\theta}'(t+1) = \tilde{\theta}'(t) \quad (2.85)$$

O resultado (2.85) e a inalterabilidade da observabilidade mediante a realimentação limitada da saída garantem a seguinte condição de convergência com relação ao vetor  $\phi$  para o algoritmo de projeção.

**Lema 11.** *O algoritmo de projeção apresenta convergência exponencial para  $\theta_0$  se,*

$$\exists l : \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\phi(t+i)\phi(t+i)^T}{\phi(t+i)^T \phi(t+i)} \geq cI, \quad \forall t; \quad c > 0 \quad (2.86)$$

## 2.5 Estimação de Parâmetros com perturbação limitada

O objetivo dessa secção é realizar a análise dos dois algoritmos tratados (algoritmo de projeção e mínimos quadrados) na presença de perturbação limitada na medição de  $y(t)$ , ou seja:

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta_0 + w(t) \quad (2.87)$$

Como será visto no decorrer dessa secção, o desempenho dos algoritmos na presença de perturbação limitada será melhorada adicionando um zona morta nas equações de atualização dos parâmetros. Esta zona morta será responsável por "desligar" o algoritmo de estimação quando o erro de predição for menor que um valor preestabelecido. Portanto, serão definidas e analisadas as propriedades para os algoritmos de projeção e mínimos quadrados com a inserção da zona morta.

### 2.5.1 Algoritmo de Projeção com Zona Morta

Para a estimação de parâmetros de sistema com ruídos limitados na aquisição do sinal  $y(t)$ , como apresentado em (2.87), usando o algoritmo de projeção, considere as seguintes modificações:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.88)$$

dado  $\hat{\theta}(0)$ ,  $c > 0$  e

$$a(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)| > 2\Delta \\ 0 & \text{para os outros casos} \end{cases} \quad (2.89)$$

Apresentado o algoritmo, serão explicitadas as propriedades desse devido a inserção da zona morta. Para isso, considere o Lema

**Lema 12.** *Considere o modelo*

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta_0 + w(t)$$

onde  $w(t)$  representa uma sequência limitada tal que:

$$\sup |w(t)| \leq \Delta \quad (2.90)$$

Nessas condições o algoritmo (2.88)-(2.89) apresenta as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\| \leq \left\| \hat{\theta}(t-1) - \theta_0 \right\| \leq \left\| \hat{\theta}(0) - \theta_0 \right\|; t \geq 1 \quad (2.91)$$

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{a(t-1)[e(t)^2 - 4\Delta^2]}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} < \infty \quad (2.92)$$

onde  $e(t)$  é o erro de modelagem dado por:

$$e(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) = -\phi(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1) + w(t) \quad (2.93)$$

as relações (i) e (ii) implicam nas seguintes propriedades:

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t-1)[e(t)^2 - 4\Delta^2]}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} = 0 \quad (2.94)$$

$$(b) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\| \leq \frac{2\Delta}{\sqrt{c}} \quad (2.95)$$

Prova. (i) Subtraindo  $\theta_0$  da expressão (2.88), obtém-se:

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (2.96)$$

usando (2.87) e a definição do erro apresentada em (2.93), a expressão (2.96) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} e(t) \quad (2.97)$$

Calculando o módulo da expressão (2.97), obtém-se:

$$\|\theta(t)\|^2 = \|\theta(t-1)\|^2 + \left[ -2 + \frac{a(t-1)\phi(t-1)^T \phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \right] \frac{a(t-1)e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} + \frac{2a(t-1)w(t)e(t)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \quad (2.98)$$

Observando o fato de que  $\left[ -2 + \frac{a(t-1)\phi(t-1)^T \phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \right] \leq 1$  e que  $2w(t)e(t) \leq \frac{e(t)^2}{2} + 2w(t)^2$ , tem-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|^2 &\leq \|\theta(t-1)\|^2 - \frac{a(t-1)e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} + \frac{a(t-1)[\frac{e(t)^2}{2} + 2w(t)^2]}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \\ &\leq \|\theta(t-1)\|^2 - \frac{1}{2} \frac{a(t-1)e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} + \frac{2a(t-1)\Delta^2}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \\ &\leq \|\theta(t-1)\|^2 - \frac{a(t-1)[e(t)^2 - 4\Delta^2]}{2[c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)]} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Observando (2.89), conclui-se que o segundo termo do lado direito de (2.99) é sempre maior que zero. Portanto, prova-se o item (i) do Lema 12.

(ii) Usando o seguinte processo de indução:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\theta}(1) \right\|^2 &\leq \left\| \tilde{\theta}(0) \right\|^2 - \frac{1}{2} \frac{a(0)[e(1)-4\Delta^2]}{c+\phi(0)^T\phi(0)} \\ \left\| \tilde{\theta}(2) \right\|^2 &\leq \left\| \tilde{\theta}(1) \right\|^2 - \frac{1}{2} \frac{a(1)[e(2)-4\Delta^2]}{c+\phi(1)^T\phi(1)} \\ &\vdots \\ \left\| \tilde{\theta}(N) \right\|^2 &\leq \left\| \tilde{\theta}(0) \right\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{a(j-1)[e(j)-4\Delta^2]}{c+\phi(j-1)^T\phi(j-1)} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$  e sabendo do fato que  $\left\| \tilde{\theta}(t) \right\|^2$  é limitada e não crescente, conclui o item (ii) do Lema 12.

(a) Segue diretamente de (ii).

(b) Do item (a) do Lema 12, pode-se escrever que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t-1)e(t)^2}{c + \phi(t-1)^T\phi(t-1)} = \frac{4\Delta^2}{c + \phi(t-1)^T\phi(t-1)} \leq \frac{4\Delta^2}{c} \quad (2.101)$$

e do algoritmo (2.88), tem-se:

$$\left\| \tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}(t-1) \right\|^2 = \frac{a(t-1)^2\phi(t-1)^T\phi(t-1)e(t)^2}{[c + \phi(t-1)^T\phi(t-1)]^2} \quad (2.102)$$

Multiplicando e dividindo (2.101) por  $[c + \phi(t-1)^T\phi(t-1)]$ , conclui-se que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t-1)^2\phi(t-1)^T\phi(t-1)e(t)^2}{[c + \phi(t-1)^T\phi(t-1)]^2} \leq \frac{4\Delta^2}{c} \quad (2.103)$$

Usando (2.102) e (2.103), prova-se o item (b).

## 2.6 Estimação de Parâmetros com Restrições

Há casos nos quais o projetista, devido a um conhecimento prévio do sistema em estudo, está interessado em limitar a faixa de valores admissíveis para os parâmetros. Nesta secção, será explicitado o comportamento dos algoritmos de projeção e mínimos quadrados quando existem restrições na estimação dos parâmetros.

As restrições serão representadas como sendo uma região fechada e convexa no espaço dos parâmetros e representada por  $\zeta$ . Por exemplo, se o primeiro elemento do parâmetro  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  é sabido ser positivo, tem-se que  $\zeta$  será definida como:

$$\zeta = \left\{ \theta : \theta_1 \geq b > 0 \right\}$$



### 2.6.1 Algoritmo de Projeção com Restrições

Pelo que foi dito até o momento, é intuitivo notar que o algoritmo de projeção, apresentado nas expressões (2.4)-(2.5), não será alterado se a nova estimativa estiver dentro da região definida por  $\zeta$ . Porém, se o algoritmo levar a uma nova estimativa que não pertence a região definida por  $\zeta$ , deve-se fazer a projeção ortogonal da nova estimativa na superfície definida por  $\zeta$ . Esse processo é ilustrado na Figura 5.

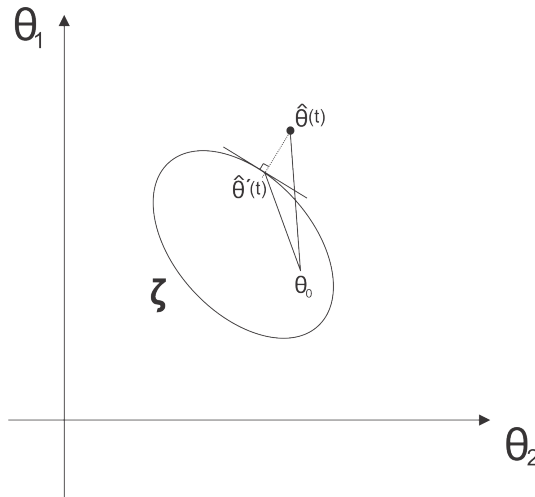


Figura 5 – Algoritmo de Projeção com vínculo.

O ponto chave desse algoritmo é que a projeção de  $\hat{\theta}(t)$  na superfície  $\zeta$ ,  $\hat{\theta}'(t)$ , é mais próxima de  $\theta_0$  do que  $\hat{\theta}(t)$ . Dessa maneira, a função de Lyapunov,  $V(t) = \tilde{\theta}(t)^T \tilde{\theta}(t)$ , usada para a análise de convergência desse algoritmo mantém sua propriedade de ser limitada e não crescente, isso garante que os resultados de convergência não sejam modificados.

### 2.6.2 Algoritmo dos Mínimos Quadrados com Restrições

Para análise do algoritmo dos mínimos quadrados com vínculo, será feito procedimento análogo aquele apresentado para o algoritmo de projeção, ou seja, deve-se encontrar uma forma de projetar qualquer estimativa que não pertence à região de interesse no subespaço definido por  $\zeta$  de maneira que a função de Lyapunov -usada para justificar as propriedades expressas no Lema 5- calculada em  $\hat{\theta}'(t)$  seja menor que o valor dessa para  $\hat{\theta}(t)$ . Em outras palavras, o objetivo é manter a propriedade de  $V(t)$  ser não crescente, mesmo após feita a projeção de  $\tilde{\theta}(t)$  sobre o subespaço definido por  $\zeta$ .

Dito isso, considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(t) = \tilde{\theta}(t)^T P(t-1)^{-1} \tilde{\theta}(t)$$

O algoritmo seguirá da maneira explicitada em (2.26)-(2.27), se a estimativa atual,  $\hat{\theta}(t)$ , pertencer ao subespaço  $\zeta$ . Caso contrário, deve-se realizar as seguintes modificações:

- Transforme o espaço de coordenadas de  $\theta$  para  $\rho$  usando a seguinte transformação:

$$\rho = P(t-1)^{-1/2}\theta \quad (2.104)$$

onde,

$$P(t-1)^{-1} \triangleq P(t-1)^{-T/2}P(t-1)^{-1/2}$$

e definindo  $\bar{\zeta}$  como a transformação de  $\zeta$  no novo espaço de coordenadas.

- Calcule  $\hat{\rho}'(t)$ , que é a projeção ortogonal de  $\hat{\rho}(t)$  sobre  $\bar{\zeta}$ . Onde,

$$\hat{\rho}(t) = P(t-1)^{-1/2}\hat{\theta}(t)$$

- Coloque

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}'(t) \triangleq P(t-1)^{1/2}\hat{\rho}'(t)$$

e continue o algoritmo.

As modificações necessárias são ilustradas na Figura 6.

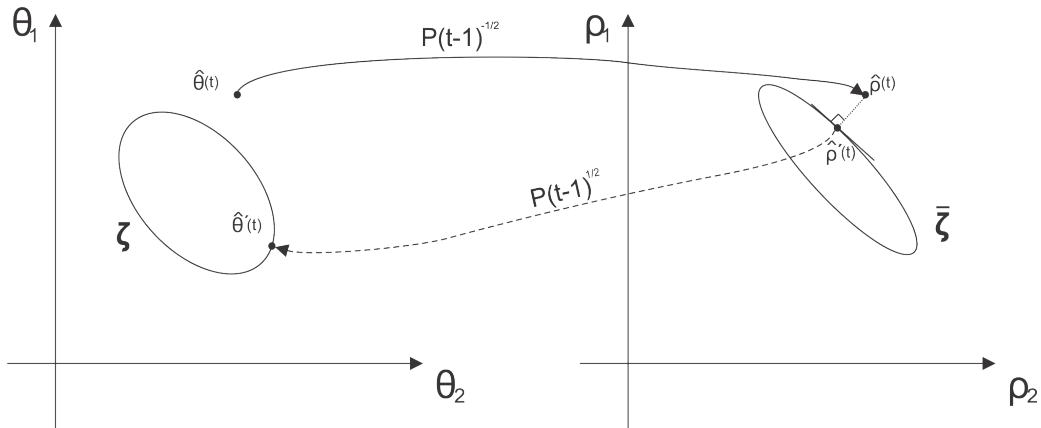


Figura 6 – LMS com vínculo.

Da transformação  $\rho = P(t-1)^{-1/2}\theta$ , pode-se perceber:

$$\begin{aligned} V(t) &= [\hat{\theta}(t) - \theta_0]^T P(t-1)^{-1} [\hat{\theta}(t) - \theta_0] \\ &= [\hat{\rho}(t) - \rho_0]^T [\hat{\rho}(t) - \rho_0] \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde

$$\rho_0 = P(t-1)^{-1/2}\theta_0 \in \bar{\zeta}$$

Como  $\hat{\rho}'(t)$  é a projeção ortogonal de  $\hat{\rho}(t)$  no subespaço  $\bar{\zeta}$  e  $\rho_0 \in \bar{\zeta}$ , usa-se o mesmo artifício do algoritmo de projeção para concluir que a expressão (2.106) é verdadeira.

$$\|\hat{\rho}'(t) - \rho_0\|^2 \leq \|\hat{\rho}(t) - \rho_0\|^2 \quad (2.106)$$

Portanto,

$$(\hat{\theta}'(t) - \theta_0)^T P(t-1)^{-1} (\hat{\theta}'(t) - \theta_0) \leq (\hat{\theta}(t) - \theta_0)^T P(t-1)^{-1} (\hat{\theta}(t) - \theta_0) \quad (2.107)$$

A partir da expressão (2.107), conclui-se que o objetivo exposto no início desse parágrafo foi realizado, sendo encontrado uma projeção de  $\hat{\theta}(t)$  em  $\zeta$  e, ao mesmo tempo, garantindo que a função de Lyapunov (2.105) seja não crescente. Baseado nesse resultado, pode-se afirmar que todas as propriedades expostas no Lema 5 continuam válidas, bem como a condição de convergência apresentada em (2.70).

## 2.7 Simulações

Com a finalidade de avaliar algumas das características dos algoritmos de identificação estudados nesse capítulo, foram feitas simulações usando o software MatLab. A simulação consiste na identificação dos parâmetros de um sistema discreto de segunda ordem apresentado na expressão a seguir:

$$H(z) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} \quad (2.108)$$

sendo  $a_1 = -2r \cos \theta$  e  $a_2 = r^2$ .

A justificativa para a parametrização dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  é que, dessa maneira, os dois polos do sistema de segunda ordem serão situados em  $\cos \theta \pm j \sin \theta$ . Por outro lado, seu zero será situado em  $-b_2/b_1$ .

Dito isso, foram utilizados os valores 0.8 e  $\pi/6$  para  $r$  e  $\theta$ , respectivamente, enquanto que, para parâmetros  $b_1$  e  $b_2$ , foram escolhidos os valores de 1 e 0.2, respectivamente. O diagrama de localização dos polos e zeros para a função de transferência (2.108) com os valores dos parâmetros definidos anteriormente é ilustrado na Figura 7.

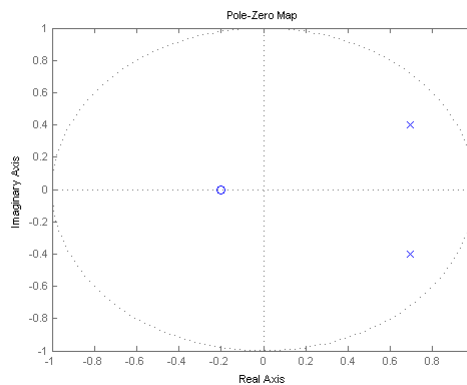


Figura 7 – Diagrama polos e zeros para (2.108) com  $a_1 = -1.3856$ ,  $a_2 = 0.64$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 0.8$ .

Definido o sistema a ser identificado, aplica-se uma entrada quadrada com frequência igual a  $1.67 \text{ Hz}$  e usa-se os dados da entrada e da saída para o processo de identificação. Para a identificação, foram utilizados os dois algoritmos, projeção e mínimos quadrados. Os resultados desse experimento são apresentados nas Figuras 8 e 9. Na Figura 8 é apresentado o sinal de entrada (verde) aplicado ao sistema com a sua saída (azul) correspondente, é importante notar que a escolha da frequência do sinal de entrada foi escolhida de maneira que em cada meio período o sistema alcance o regime permanente. Na Figura 9a é ilustrado o resultado da estimação dos parâmetros para o algoritmo de projeção, enquanto que na Figura 9b apresenta-se o resultado para o algoritmo dos mínimos quadrados. Em ambas as figuras os valores do verdadeiro parâmetro é representada por uma linha pontilhada de cor correspondente.

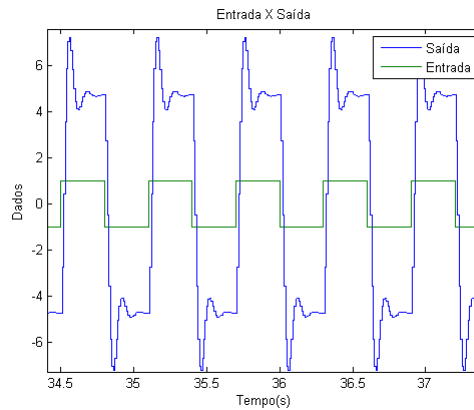
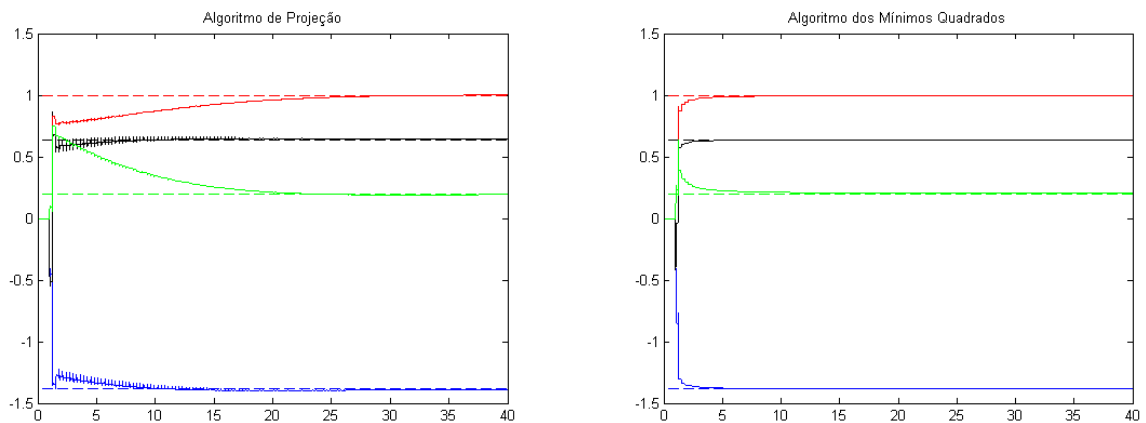


Figura 8 – Entrada (verde) e Saída (azul) usadas para a identificação do modelo 2.108.



(a) Algoritmo de Projeção.

(b) Algoritmo dos Mínimos Quadrados.

Figura 9 – Resultados do processo de identificação de (2.108) usando os algoritmos de projeção e mínimos quadrados, onde os parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são ilustrados, respectivamente, em vermelho, verde, azul e preto.

Com os resultados, conclui-se que a convergência dos parâmetros foi satisfatória para ambos os algoritmos. Porém, vale ressaltar que foram consideradas condições ideais

para a realização desse experimento. Apenas a título de demonstração, adiciona-se à saída do sistema um ruído gaussiano com potência igual a 0.01 e repete-se o experimento. Os resultados dessa modificação são apresentados nas Figura 10 e 11. Em 10 é ilustrada o sinal de entrada e saída, observando que, diferentemente do cenário anterior, a saída apresenta um sinal ruidoso. Os resultados da identificação são apresentados na Figura 11. O resultado obtido com o algoritmo de projeção é ilustrado na Figura 11a, onde se percebe que, na presença de ruídos, esse algoritmo não fornece bons resultados. Prosseguindo a análise, na Figura 11b é apresentado o resultado do algoritmo dos mínimos quadrados, que apesar de apresentar convergência em seus parâmetros, esses não convergem para os seus valores verdadeiros.

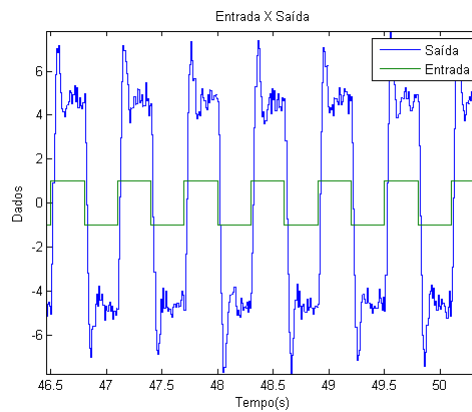
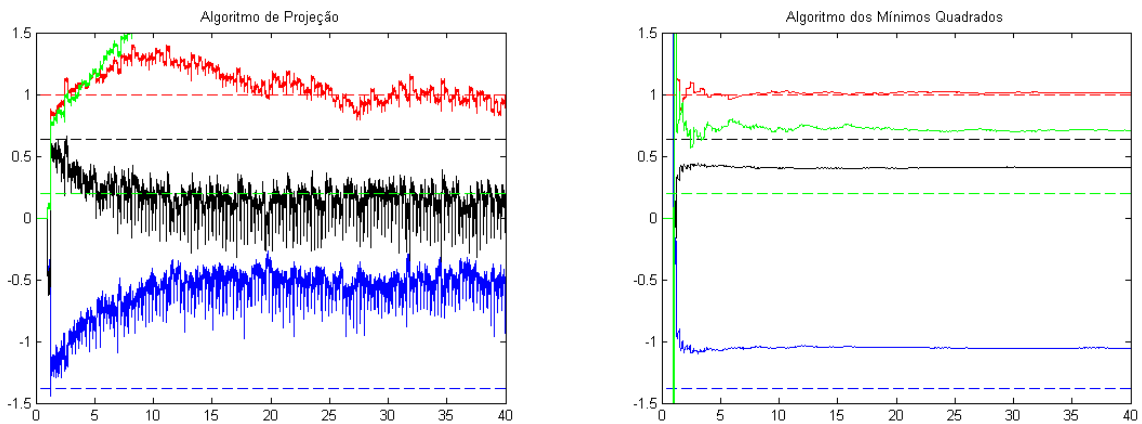


Figura 10 – Entrada (verde) e Saída (azul) na presença de ruídos de medição.



(a) Algoritmo de Projeção na presença de ruídos. (b) Algoritmo dos Mínimos Quadrados na presença de ruídos de medição.

Figura 11 – Resultados do processo de identificação de (2.108) usando os algoritmos de projeção e mínimos quadrados, onde os parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são ilustrados, respectivamente, em vermelho, verde, azul e preto.

De fato, a análise desses algoritmos na presença de sinais ruidosos estão fora do escopo de desse trabalho. Os resultados foram apresentados apenas para provocar o leitor a pensar sobre o problema. Para maiores informações, ver [5].

## 2.8 Conclusão

Ao final desse capítulo foram analisados dois algoritmos de identificação de parâmetros, são eles: algoritmo de projeção e algoritmo dos mínimos quadrados. Para ambos os algoritmos, foram demonstradas matematicamente algumas de suas propriedades, identificando as restrições no sinal de entrada para que haja a convergência dos parâmetros para seus valores verdadeiros.

Adicionalmente, são apresentadas as modificações necessárias para a aplicação desses algoritmos na presença de perturbações limitadas, ou seja, são apresentados os algoritmos com zona morta. Logo após, considera-se a situação na qual se tem um conhecimento a priori do modelo, criando uma região de pertencimento para os parâmetros. Com isso, foi demonstrado tanto para o algoritmo de projeção, quanto para o algoritmo dos mínimos quadrados como modificar-los de maneira que esses algoritmos nunca deem estimativas fora da região de restrição. Finalmente, foi apresentado uma aplicação de ambos os algoritmo no processo de estimação de parâmetros para um sistema discreto de segunda ordem.

## 3 Predição Adaptativa Determinística

### 3.1 Estrutura dos Preditores

O processo de predição tem o objetivo de extrapolar um série com a finalidade de prever o comportamento de uma variável física no futuro. Por exemplo, na previsão do tempo é realizada um processo de predição, pois, baseado em conhecimentos de outras variáveis, como umidade e temperatura, faz-se uma estimativa da possibilidade de chuva em um determinado local. Basicamente, existem duas maneiras de se encontrar a estrutura de um preditor, são elas: manipular o modelo do processo, dito como conhecido, de forma apropriada para a obtenção deste na forma de preditor; ou prescindir do modelo matemático do sistema.

#### 3.1.1 Predição com conhecimento do modelo

A construção de um modelo de predição pode ser construída a partir do modelo matemático que descreve o sistema de interesse. No caso no qual o modelo é linear e finito dimensional, pode-se obter o modelo de predição com algumas manipulações algébricas. Esse processo, para o caso de sistemas lineares, é exposto no Lema 13.

**Lema 13.** *Considere um sistema SISO (do inglês, single-input single-output) descrito por seu modelo DARMA:*

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (3.1)$$

onde

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \quad (3.2)$$

$$B(q^{-1}) = q^{-d}(b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_lq^{-l}) = q^{-d}B'(q^{-1}) \quad (3.3)$$

A saída do sistema no instante  $t + d$  pode ser expressa na seguinte forma de preditor:

$$y(t + d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (3.4)$$

onde,

$$\alpha(q^{-1}) = G(q^{-1}), \quad \beta(q^{-1}) = F(q^{-1})B'(q^{-1}) \quad (3.5)$$

e  $F(q^{-1})$ ,  $G(q^{-1})$  polinômios únicos, tais que:

$$1 = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (3.6)$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{d-1}q^{-d+1} \quad (3.7)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + \dots + g_{n-1}q^{-n+1} \quad (3.8)$$

com,

$$f_0 = 1$$

$$f_i = -\sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j} \quad (3.9)$$

$$g_i = -\sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i+d-j}$$

*Obs: Defina-se os valores de  $a_{n+1}$ ,  $a_{n+2}$ , ... como sendo zero, sempre que esses compuserem as equações da expressão (3.9).*

Prova: Primeiramente, considere a expressão (3.6) válida e multiplique-se a expressão (3.1) por  $F(q^{-1})$ , obtendo-se:

$$F(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = q^{-d}F(q^{-1})B'(q^{-1})u(t) \Rightarrow y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t)$$

com  $\alpha(q^{-1})$  e  $\beta(q^{-1})$  expressos em (3.5). Para provar que a expressão (3.9) é verdadeira, utiliza-se do seguinte processo de indução:

- Considere  $d = 1$  e expanda a expressão  $F(q^{-1})A(q^{-1})$ :

$$F(q^{-1})(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}) = f_0(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}) \Rightarrow$$

$$f_0 - q^{-1}(-a_1 - a_2q^{-1} - \dots - a_{n-1}q^{-n+1}) \quad (3.10)$$

Para que (3.6) seja válida, tem-se que:

$$f_0 = 1$$

$$g_i = -a_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

- Considere  $d = 2$  e realize a mesma expansão anterior:

$$F(q^{-1})(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}) = (f_0 + f_1q^{-1})(1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}) \Rightarrow$$

$$f_0 + (a_1 + f_1)q^{-1} - q^{-2} \left[ -(f_0a_2 + f_1a_1) - (f_0a_3 + f_1a_2)q^{-1} - \dots - f_1a_nq^{-n+1} \right] \quad (3.12)$$



Da mesma forma, para que (3.6) seja válida, tem-se:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1 \\
 f_1 &= -a_1 \\
 &\Rightarrow f_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j}, \quad i = 1 \\
 g_1 &= -f_0 a_2 - f_1 a_1 \\
 &\quad \vdots \\
 g_{n-2} &= -a_n - f_1 a_{n-1} \\
 g_{n-1} &= -f_0 a_{n+1} - f_1 a_n = -f_1 a_n
 \end{aligned} \Rightarrow g_i = \sum_{j=0}^1 f_j a_{i+2-j} \tag{3.13}$$

onde foi considerado  $a_{n+1} = 0$ , de acordo com a observação do Lema.

- Repetindo o processo para  $d = 3$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 F(q^{-1})(1 + a_1 q^{-1} + \dots a_n q^{-n}) &= (f_0 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2})(1 + a_1 q^{-1} + \dots a_n q^{-n}) \Rightarrow \\
 & f_0 + (f_0 a_1 + f_1) q^{-1} + (f_0 a_2 + f_1 a_1 + f_2) q^{-2} - \\
 & q^{-3} \left[ -(f_0 a_3 + f_1 a_2 + f_2 a_1) - (f_0 a_4 + f_1 a_3 + f_2 a_2) q^{-1} - \dots - f_2 a_n q^{-n+1} \right]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para que (3.6) seja válida:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1 \\
 f_1 &= -f_0 a_1 \\
 f_2 &= -f_0 a_2 - f_1 a_1 \\
 &\Rightarrow f_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j}, \quad i = 1, 2 \\
 g_0 &= -f_0 a_3 - f_1 a_2 - f_2 a_1 \\
 &\quad \vdots \\
 g_{n-2} &= -f_0 a_{n+1} - f_1 a_n - f_2 a_{n-1} \\
 g_{n-1} &= -f_0 a_{n+2} - f_1 a_{n+1} - f_2 a_n = -f_2 a_n
 \end{aligned} \Rightarrow g_i = \sum_{j=0}^2 f_j a_{i+2-j}, \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{3.15}$$

Generalizando as expressões (3.11), (3.13) e (3.15), obtém-se a expressão (3.9), finalizando, dessa forma, a prova do Lema 13.

Com o resultado do Lema 13, percebe-se que a forma de preditor em (3.5) é, na realidade, uma alternativa em se escrever o modelo sistema na forma expressa (3.16)

$$y(t+d) = \theta_0^T \phi(t) \tag{3.16}$$

onde,

$$\phi^T(t) = \left( y(t), \dots, y(t-n+1), u(t), \dots, u(t-l-d+1) \right) \tag{3.17}$$

e  $\theta_0^T(t)$  é uma matriz composta pelos elementos dos coeficientes de  $\alpha(q^{-1})$  e  $\beta(q^{-1})$ .

Note que da expressão (3.16), pode-se pensar em um preditor com a seguinte estrutura:

$$\hat{y}(t+d, \theta) = \theta^T \phi(t) \quad (3.18)$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros. Observe que, quando  $\theta = \theta_0$ , tem-se  $\hat{y}(t+d, \theta) = y(t+d)$  para todo  $t$ . Dito isso, deve-se pensar em algoritmos que façam a estimativa de  $\theta$  de maneira que  $\hat{y}(t+d, \theta)$  se aproxime de  $y(t+d)$  na ausência do conhecimento sobre  $\theta_0$ .

Uma das características do preditor (3.18) é que o valor da saída,  $y(t)$ , no instante  $t+d$  depende dos valores da saída e entrada até o instante  $t$ . Em algumas aplicações, essa característica é adequada. Porém, existem aplicações nas quais é desejado que o valor da predição da saída no instante  $t+d$  seja função apenas dos valores das entradas até o instante  $t$ .

Devido a necessidade exposta no parágrafo anterior, é necessário estabelecer critérios para que o modelo de predição, (3.18), seja função apenas dos valores passados da entrada,  $u(t), u(t-1), \dots$ . Com essa finalidade, considere o Lema

**Lema 14.** *Se, na expressão*

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t)$$

*assume-se que  $A(q^{-1})$  é assintoticamente estável, então é possível construir um preditor dependente apenas de  $u(t)$  com a seguinte estrutura:*

$$A(\theta, q^{-1})\hat{y}(t, \theta) = B(\theta, q^{-1})u(t) \quad (3.19)$$

*onde  $A(\theta, q^{-1})$  e  $B(\theta, q^{-1})$  têm a mesma estrutura que  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$ .*

Prova. Considere que  $\theta$  é tal que:

$$A(\theta, q^{-1}) = A(q^{-1})$$

$$B(\theta, q^{-1}) = B(q^{-1})$$

Dessa maneira, o error de predição,  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t, \theta)$ , satisfaz:

$$A(q^{-1})e(t) = 0$$

e como  $A(q^{-1})$  é estável, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Conclui-se, então, que o preditor (3.19) terá uma convergência assintótica para o valor da saída,  $y(t)$ .

Sendo o preditor (3.19) usado para predições longas (por exemplo, predição do consumo de água de uma cidade em dois anos), é intuitivo relacioná-lo com o preditor definido em (3.18). Em outras palavras, o preditor (3.19) será o caso limite do preditor (3.18) quando o intervalo de predição,  $d$ , torna-se grande.

Com a finalidade de formalizar o que foi dito no parágrafo anterior, utiliza-se o método apresentado no Lema 13 na expressão do preditor (3.18). Dessa maneira, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d'} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.20)$$

De (3.21), percebe-se que  $F(q^{-1})$  representa os primeiros  $d'$  termos da expansão de  $\frac{1}{A(q^{-1})}$ . Como, por hipótese,  $A(q^{-1})$  é considerado estável, a série  $F(q^{-1})$  convergirá quando  $d \rightarrow \infty$  e  $G(q^{-1})$  tenderá a zero. Portanto, para valores grandes de  $d'$ , é válida a seguinte expressão:

$$\frac{1}{A(q^{-1})} \approx F(q^{-1}) \quad (3.21)$$

Usando as expressões (3.4)-(3.5), tem-se:

$$y(t) = G(q^{-1})y(t - d') + F(q^{-1})B(q^{-1})u(t) \quad (3.22)$$

Portanto, a expressão (3.21) pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} y(t) &\approx F(q^{-1})B(q^{-1})u(t) \\ &\approx \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) \quad \text{usando (3.21)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim sendo, com o resultado obtido em (3.23), conclui-se que o preditor (3.19), assumindo que o polinômio  $A(q^{-1})$  é estável, é o caso limite do preditor (3.16) quando o intervalo de predição é grande.

Existe, também, algoritmos de predição para sistemas que são representados por modelos não lineares. Nestes casos, ao invés de utilizar a expressão (3.16), usa-se a forma geral apresentada na expressão a seguir

$$\hat{y}(t + d) = f(t, \theta, D(t)) \quad (3.24)$$

sendo  $f(., ., .)$  representa um função não linear ou linear na qual  $\hat{y}(t)$  é igual a  $y(t)$  (para todo  $t$ ) para um determinado  $\theta$ , diga-se  $\theta_0$ , e  $D(t)$  representa os valores nos quais  $\hat{y}(t, \theta)$  é calculado. Se (3.24) é linear em  $\theta$ , usa-se o seguinte o modelo para o preditor:

$$\hat{y}(t + d) = \theta^T \phi(t)$$

sendo  $\phi(t)$  uma função (possivelmente não linear) de  $D(t)$ .

### 3.1.2 Preditores de Complexidade Restrita

Na secção anterior foram analisados modelos de preditores no quais é necessário o conhecimento do modelo do sistema em estudo. Neste tópico, será tratado o problema de predição que se prescinde do modelo. A forma geral desses tipos de preditores é exposta na expressão (3.25).

$$\hat{y}(t) = g(t, \theta, D(t)) \quad (3.25)$$

onde,

- $\theta$  representa os parâmetros
- $g(., ., .)$  representa uma função, linear ou não linear, arbitrária
- $D(t)$  representa os dados nos quais  $\hat{y}(t, \theta)$  é computado

O preditores que não são baseados no modelo do sistema e que apresentam a forma expressa em (3.25) são chamados de preditores de complexidade restrita. Uma consequência da hipótese para esses tipos de preditores é que pode não existir um valor de  $\theta$  tal que  $\hat{y}(t, \theta)$  seja igual a  $y(t)$ . No entanto, tem-se uma vantagem no que se trata o vetor  $D(t)$ , que pode ser escolhido de maneira intuitiva, onde sua escolha é baseada na hipótese de uma determinada variável influenciar a grandeza na qual deseja-se realizar a predição. Se deseja-se prever o consumo de água de uma cidade, é muito provável que a temperatura e precipitação sejam bons indicadores para se realizar a predição do consumo de água, ao mesmo tempo que é improvável que essas variáveis estejam relacionadas com o consumo da maneira expressa em (3.2).

Na próxima secção serão apresentados como os algoritmos de estimação de parâmetros, discutidos no Capítulo 2, podem ser usados para determinar o valor de  $\theta$  de maneira que a saída  $\hat{y}(t, \theta)$  corresponda a uma "boa" predição de  $y(t)$ .

## 3.2 Predição Adaptativa

A ideia principal da predição adaptativa é realizar uma estimação recursiva dos parâmetros presentes no modelo de predição, baseados em dados obtidos do processo, de maneira a diminuir o erro entre as predições passadas e os verdadeiros valores observados. Estes parâmetros são utilizados para prever saídas futuras. Dito isso, é importante pensar nas seguintes questões:

- Como ajustar esses parâmetros?
- Qual os limites que serão impostos à região de estimação?

- É possível estimar os parâmetros diretamente, ou é necessário um processo de modelagem e só assim achar um modelo de predição a partir de manipulações algébricas nesse modelo?

Há, basicamente, duas maneiras de realizar a predição adaptativa. A primeira, conhecida como predição adaptativa direta, os parâmetros dos preditores são estimados diretamente, ou seja, utiliza-se a saída do preditor no processo de estimação dos parâmetros. A segunda, conhecida como predição adaptativa indireta, faz-se, primeiramente, um processo de estimação de parâmetros no modelo da maneira visto no Capítulo 2 e, em seguida, aplica-se o Lema 13 para obter o modelo do preditor e conseqüentemente o valor da predição.

Nas próximas duas secções serão discutidos com mais detalhes esses dois processos de predição adaptativa.

### 3.2.1 Predição Adaptativa Direta

Para a análise da predição adaptativa direta, será considerado o modelo para o preditor na qual a sua saída é uma função linear dos parâmetros  $\theta$ , como apresentado a seguir:

$$\hat{y}(t+d, \theta) = \phi(t)^T \theta \quad (3.26)$$

onde  $\phi(t)$  é um função linear ou não linear dos dados,

$$D(t) \triangleq \{y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots\}$$

Será considerado o uso do preditor (3.26) em duas situações. A primeira situação será aquela na qual sabe-se que existe um valor para  $\theta$  (diga-se  $\theta_0$ ) tal que a saída do preditor,  $\hat{y}(t)$ , seja igual a saída do sistema,  $y(t)$ . A segunda situação é quando não é garantido que exista um valor de  $\theta$  tal que  $\hat{y}(t) = y(t)$ .

#### 3.2.1.1 Caso sem Restrição

Assumindo que existe um valor de  $\theta$  (diga-se  $\theta_0$ ) tal que para todo  $t$ ,

$$\hat{y}(t+d, \theta_0) = \phi(t)^T \theta_0 = y(t+d) \quad (3.27)$$

Pode-se considerar o preditor como o modelo DARMA de um sistema e utilizar as técnicas apresentadas no Capítulo 2 para a estimação de  $\theta$ . Por exemplo, a utilização do algoritmo de projeção implica no seguinte preditor adaptativo:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\phi(t-d)}{c + \phi(t-d)^T \phi(t-d)} [y(t) - \phi(t-d)^T \hat{\theta}(t-1)]. \quad c > 0 \quad (3.28)$$

A predição no instante  $t$  será dada por:

$$\hat{y}(t) = \phi(t-d)^T \hat{\theta}(t-d) \quad (3.29)$$

e como  $\theta(t-d)$  é função de  $y(t-d), y(t-d-1), \dots$ , o preditor adaptativo apresentado em (3.28) é um sistema causal. Dito isso, considere o seguinte Lema.

**Lema 15.** *Se a sequência  $y(t)$  tem a representação apresentada em*

$$\hat{y}(t+d, \theta_0) = \phi(t)^T \theta_0 = y(t+d)$$

e ainda que,

- A dimensão de  $\phi(\cdot)$  é escolhida condizente com a ordem do sistema, e
- ambos os vetores,  $y(t)$  e  $u(t)$ , são limitados, então o preditor adaptativo (3.28)-(3.29) apresenta a seguinte propriedade

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t))^2 < \infty \quad (3.30)$$

que implica em,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0 \quad (3.31)$$

Prova. Usando as propriedades (ii) e (d) do Lema 2, pode-se mostrar que o algoritmo (3.28)-(3.29) tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \frac{[\phi(t-d)^T \tilde{\theta}(t-1)]^2}{1 + \phi(t+d)^T \phi(t+d)} < \infty \quad (3.32)$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=k}^{N+k} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-k) \right\|^2 < \infty \quad (3.33)$$

para  $k$  finito.

Definindo

$$\tilde{\theta}(t-d) = \hat{\theta}(t-d) - \theta_0,$$

o erro de predição será dado por,

$$\begin{aligned} e(t) &\triangleq y(t) - \hat{y}(t) \\ &= -\phi(t-d)^T \tilde{\theta}(t-d) \end{aligned} \quad (3.34)$$

adicionando e subtraindo  $-\phi(t-d)^T \hat{\theta}(t-1)$  na expressão (3.34), obtém-se:

$$e(t) = -\phi(t-d)^T \tilde{\theta}(t-1) - \phi(t-d)^T \left[ \hat{\theta}(t-d) - \hat{\theta}(t-1) \right] \quad (3.35)$$

Dessa maneira, usando a desigualdade de Schwarz e a desigualdade triangular, pode-se escrever:

$$e(t)^2 \leq 2 \left[ \phi(t-d)^T \tilde{\theta}(t-1) \right]^2 + 2\phi(t-d)^T \phi(t-d) \left\| \hat{\theta}(t-1) - \hat{\theta}(t-d) \right\|^2 \quad (3.36)$$

Portanto, a aplicação de (3.32)-(3.33) em (3.36), bem como a suposição de que  $y(t)$  e  $u(t)$  são limitados implicam em (3.30). A expressão (3.31) segue diretamente de (3.30).

Note que, para que haja convergência de  $\hat{y}(t)$  para  $y(t)$ , no Lema 15 não foi dita nenhuma restrição de realimentação de  $y(t)$  e  $u(t)$ .

Propriedades semelhantes às aquelas apresentadas no Lema 15 podem ser estabelecidas para o preditor baseado no algoritmo dos mínimos quadrados, cuja implementação é apresentada nas equações (3.37)-(3.38). A demonstração, porém, não será feita nesse trabalho, para maiores informações ver [5].

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t-d)\phi(t-d)[y(t) - \phi(t-d)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (3.37)$$

$$P(t-d) = P(t-d-1) - \frac{P(t-d-1)\phi(t-d)\phi(t-d)^T P(t-d-1)}{1 + \phi(t-d)^T P(t-d-1)\phi(t-d)} \quad (3.38)$$

### 3.2.1.2 Caso com Complexidade Restrita

Neste caso, não se sabe se existe um valor de  $\theta$  tal que  $\hat{y}(t) = y(t)$ . Por isso, o valor de  $\theta$  será encontrado com a minimização de uma função de custo que usa erros de predição passados.

Quando se considera o preditor linear no parâmetro  $\theta$  e escolhe-se o critério quadrático, o valor de  $\theta$  será determinado pela minimização da função

$$J_t(\theta) = \sum_{j=1}^t [y(j) - \phi(j-d)^T \theta]^2 + (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (3.39)$$

onde o segundo termo foi incluído para levar em conta a estimativa inicial,  $\hat{\theta}(0)$ .

Como foi visto do Capítulo 2, como o Lema 4, a minimização da função (3.39) dá-se pelo algoritmo (3.37)-(3.38). É importante perceber que, nesse caso, pode não existir um único valor de  $\theta$  que minimize (3.39). Portanto, faz-se necessário usar algoritmos que, de alguma maneira "esqueçam" os dados passados. Isso pode ser feito, por exemplo, com a modificação do métodos dos mínimos quadrados com fator de esquecimento ou reiniciando a matriz P periodicamente. Para conhecimento de detalhes sobre essa modificação do algoritmo dos mínimos quadrados, ver [5].

### 3.2.2 Predição Adaptativa Indireta

Como dito anteriormente, a predição adaptativa indireta consiste em, primeiramente, fazer a estimação dos parâmetros do modelo e, em seguida, manipular o modelo para a obtenção do preditor. Nesta secção, serão estudados os casos sem restrição e com restrição.

#### 3.2.2.1 Preditor sem restrição de modelo

Nessa situação assuma que o modelo do sistema é apresentado em sua forma DARMA,

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B'(q^{-1})u(t) \quad (3.40)$$

aplicando a estimação de parâmetros a (3.40) seguido do procedimento apresentado no Lema 13, obtém-se o seguinte algoritmo para a predição indireta(usando o algoritmo de projeção):

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\phi(t-d)}{c + \phi(t-d)^T\phi(t-d)}[y(t) - \phi(t-d)^T\hat{\theta}(t-1)] \quad c > 0 \quad (3.41)$$

onde,

$$\phi(t-1)^T = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-d), \dots, u(t-d-m)] \quad (3.42)$$

Dado  $\hat{\theta}(t)$ , define-se  $\hat{A}(t, q^{-1})$  e  $\hat{B}(t, q^{-1})$  como segue:

$$\hat{A}(t, q^{-1}) = 1 + \hat{a}_1(t)q^{-1} + \dots + \hat{a}_n(t)q^{-n} \quad (3.43)$$

Feito isso, aplica-se o procedimento do Lema 13 para a determinação de  $\hat{F}(t, q^{-1})$  e  $\hat{G}(t, q^{-1})$ , ou seja,

$$\hat{F}(t, q^{-1})\hat{A}(t, q^{-1}) + q^{-d}\hat{G}(t, q^{-1}) = 1 \quad (3.44)$$

Finalmente, como os polinômios obtidos da expressão (3.44), define-se  $\alpha(t, q^{-1})$  e  $\beta(t, q^{-1})$  da maneira a seguir,

$$\begin{aligned} \alpha(t, q^{-1}) &= \hat{G}(t, q^{-1}) \\ \beta(t, q^{-1}) &= \hat{F}(t, q^{-1})\hat{B}'(t, q^{-1}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

e o preditor adaptativo será descrito por

$$\hat{y}(t+d) = \alpha(t, q^{-1})y(t) + \beta(t, q^{-1})u(t) \quad (3.46)$$

Visto o algoritmo de predição indireta, aborda-se, no Lema 16, as propriedades de convergência com a utilização do algoritmo descrito anteriormente.

**Lema 16.** *Se a sequência  $y(t)$  obedece a equação*

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B'(q^{-1})u(t)$$



e ainda se ambos,  $y(t)$  e  $u(t)$ , são limitados, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t))^2 < \infty \quad (3.47)$$

e isto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0 \quad (3.48)$$

O prova do lema 16 será omitida, sua prova está demonstrada em [5].

### 3.3 Simulações

Com o objetivo de se consolidar as técnicas de predição descritas neste capítulo, será ilustrado o processo de predição para o sistema apresentado a seguir:

$$(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2})y(t) = q^{-1}(b_0 + b_1 q^{-1}) \quad (3.49)$$

com  $a_1 = -1.3856$ ,  $a_2 = 0.64$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 0.2$ .

Usando o lema 13, construiu-se o modelo de preditor do sistema (3.49), obtendo-se:

$$F(q^{-1}) = f_0 = 1 \quad G(q^{-1}) = -a_1 - a_2 q^{-1} \quad (3.50)$$

No modelo de simulação foi aplicado ao sistema um sinal de onda quadrada com frequência igual a 1.66 Hz e amplitude igual a um. O resultado de simulação para esse preditor é ilustrado na Figura 12 e o seu esquemático feito no simulink na Figura 13, onde o bloco MatLab function implementa a equação (3.4). Da Figura 12, conclui-se que a saída predita (vermelha) é igual a saída do sistema (azul) com um avanço de um passo de cálculo(deve-se ao fato de  $d = 1$ , no modelo (3.49)). Na Figura 12b, pode-se observar detalhes da Figura 12a.

Normalmente, no processo de predição, não se conhece o modelo matemático do sistema em estudo, o que torna o exemplo anterior sem sentido. Para evitar esse problema, supõe-se que temos um caso de predição adaptativa sem restrição, ou seja, é satisfeita a condição (3.27), e utiliza-se os processos de predição adaptativa direta e indireta, apresentados anteriormente no capítulo. Nos dois exemplos seguintes será utilizado o mesmo modelo apresentado na equação (3.49).

Implementando, primeiramente, o processo de predição adaptativa direta, cujo diagrama a blocos é apresentado na Figura 14. Nesse diagrama, foi utilizado o algoritmo dos mínimos quadrados em sua implementação, sendo o primeiro bloco MatLab function utilizado para realizar o cálculo iterativo da matriz P, o segundo bloco implementando o cálculo das estimativas e as expressões (3.27)-(3.29), fornecendo a saída predita. O

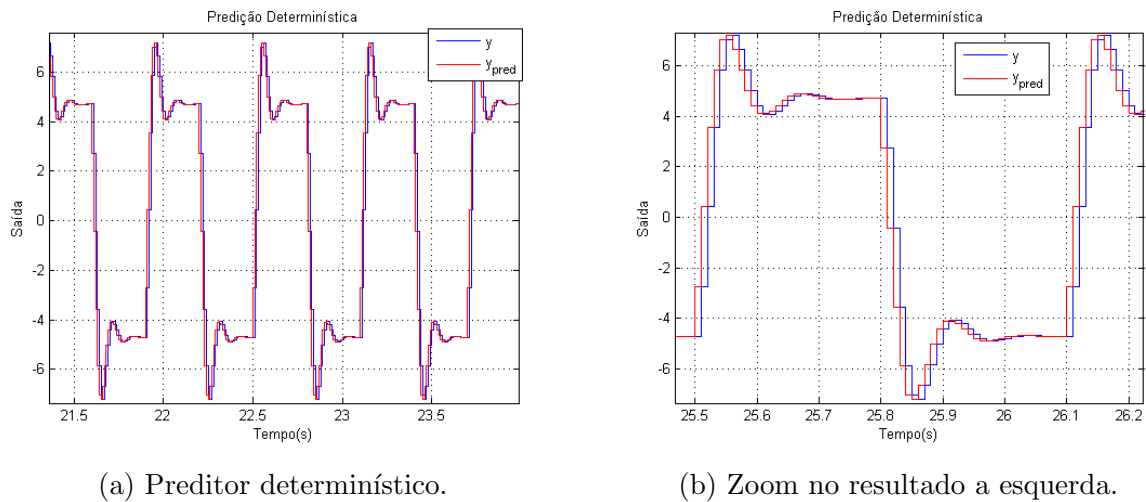


Figura 12 – Resultados da construção de um preditor determinístico para o modelo (3.49).

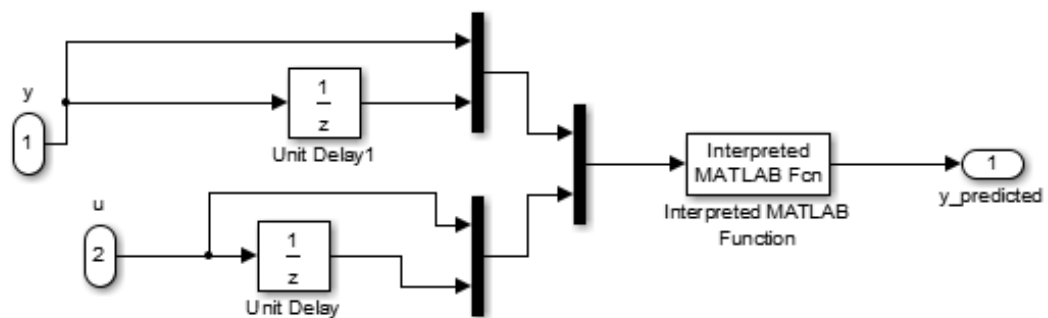


Figura 13 – Esquema do preditor determinístico no Simulink.

resultado desse sistema de predição é ilustrado na Figura 15, onde em 15a são apresentadas a saída predita (vermelho) e a saída do sistema (azul). Com o auxílio da Figura 12b, percebe-se que o sinal em vermelho é, de fato, uma predição do sinal em azul, ou seja, foi realizado um processo de predição prescindindo do conhecimento do modelo.

Como uma alternativa ao processo de predição adaptativa direta, foi construído o modelo de predição adaptativa indireta, cujo diagrama é apresentado na Figura 17. Neste método, foi utilizado o algoritmo de projeção ao invés do algoritmo dos mínimos quadrados no processo de estimação de parâmetros. Do diagrama, percebe-se que a saída do algoritmo de estimação é usada como entrada para o bloco MatLab function. Esse bloco implementará as equações (3.41)-(3.46). O resultado obtido com a aplicação dessa técnica é ilustrado na Figura 16, onde, apenas a título de demonstração, o algoritmo de projeção foi ativado após dez segundos de simulação (como se pode observar na Figura

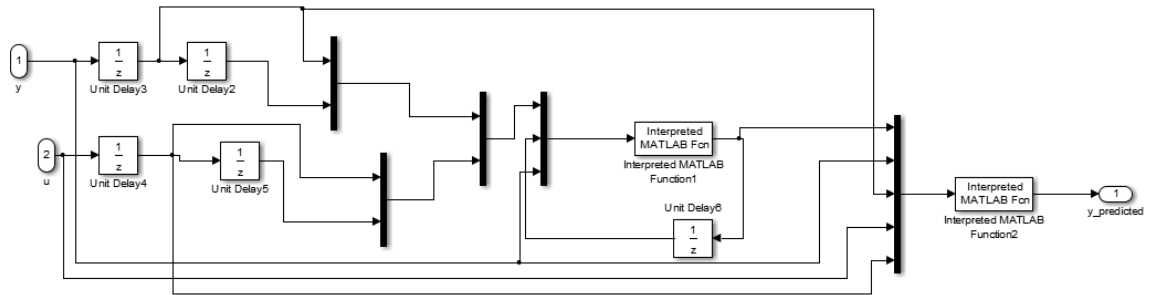
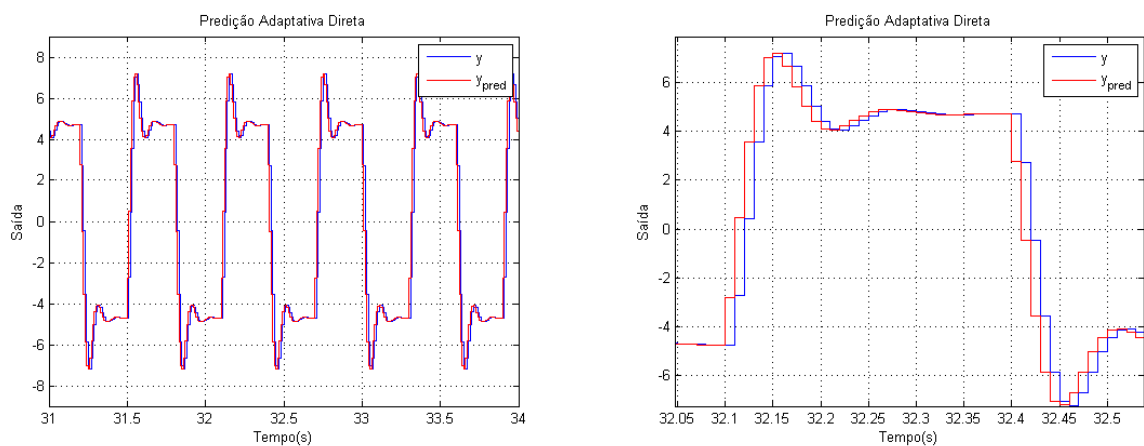


Figura 14 – Técnica de predição adaptativa direta usando o simulink.



(a) Predição Adaptativa Direta.

(b) Zoom no resultado a esquerda.

Figura 15 – Predição Adaptativa Direta para o modelo (3.49).

16a). A partir da observação na Figura 16b, conclui-se que, da mesma forma que para os casos anteriores, a saída predita (vermelho) é igual ao sinal de saída do sistema (azul) com o avanço de um passo de cálculo.

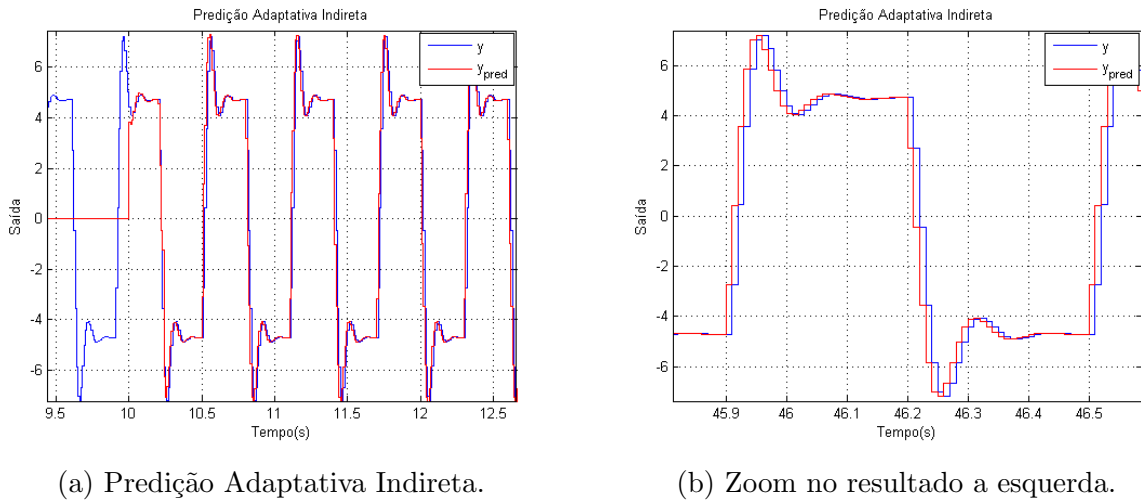


Figura 16 – Predição Adaptativa Indireta.

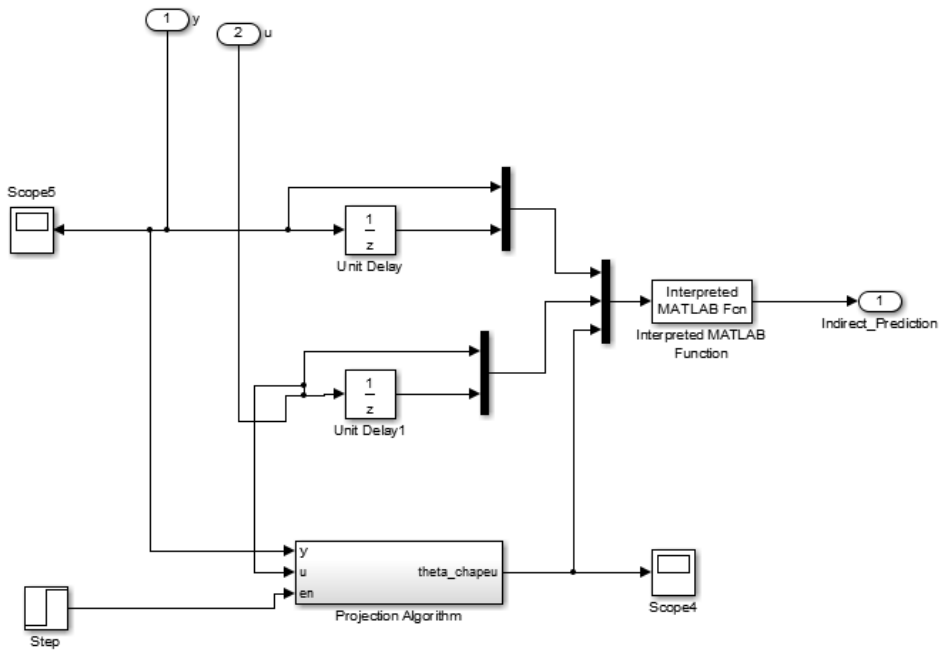


Figura 17 – Técnica de predição adaptativa indireta usando o simulink.

### 3.4 Conclusão

Nesse capítulo, foi apresentado o conceito de predição para um sistema dinâmico linear. Primeiramente, definiu-se como obter um modelo de preditor para um sistema dinâmico linear em sua forma DARMA. Como essa técnica apresenta a restrição do conhecimento do modelo do sistema, apresentou-se as técnicas de predição adaptativa direta e indireta, identificando a diferenças entre essas. Nas técnicas adaptativas direta os algoritmos de estimação são utilizados para identificar os parâmetros do modelo do preditor, apresentado na equação (3.26). Por outro lado, nas técnicas de predição adaptativa indireta, estima-se os parâmetros do modelo e, com o resultado dessa estimativa, usa-se a

equação do preditor para se realizar a predição da saída do sinal.

Ao final do capítulo, são apresentados exemplos dessas técnicas com a utilização do simulink, no programa MatLab.

# 4 Controle de Sistemas Lineares Determinísticos

## 4.1 Introdução

Neste capítulo, serão revisados os principais aspectos no controle de sistemas lineares determinísticos, pois esses são importantes no projeto de sistemas de controle adaptativos. Sabe-se que, no projeto de um sistema de controle, devem ser considerados os seguintes aspectos:

- **Estabilidade.** O conceito de estabilidade é o requisito mais importante no projeto de um sistema de controle. Este conceito pode ser resumido a exigência de que as entradas, saídas e estados tenham respostas temporais limitadas. Por exemplo, no caso de sistema lineares e invariantes no tempo descrito por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

onde,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}$  e  $n$  a dimensão do espaço de estados, a condição de estabilidade resume-se a

$$re(\lambda_i) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, v \text{ e se } re(\lambda_i) = 0 \text{ para qualquer índice } i, \text{ tem-se } m_i = 1. \quad (4.1)$$

onde,  $v$  representa o número de autovalores distintos na matriz  $\mathbf{A}$ ;  $m_i$  representa o números de blocos de Jordan associado ao autovalor  $i$ .

- **Resposta Transitória.** A resposta transitória está associado com a velocidade na qual o sistema atinge o regime permanente. Para sistemas lineares, a resposta transitória está relacionado no domínio no tempo com o tempo de subida, o overshoot, tempo de acomodação, entre outros, e no domínio da frequência com a largura de banda, amortecimento, ressonância, entre outros.
- **Seguimento da referência.** Muitas vezes é um requisito que a saída de um sistema de controle siga um determinado sinal de referência [Ver [8], para um tratamento formal a respeito desse assunto] que pode ser caracterizado pelas mais variadas dinâmicas. O caso tradicional desse tipo de especificação é o seguimento de sinais de referência constante, neste caso costuma-se utilizar o termo regulação da saída (em inglês, *output regulation*).
- **Restrições.** As restrições no projeto de uma sistema de controle estão associadas com as limitações no sinal de controle (devido à características físicas do atuador);

limites da taxa de variação do sinal de controle; limites de variáveis internas inerentes ao processos, tais como temperatura, pressão, vazão, entre outras; e limites na complexidade máxima do controlador. Todos esses fatores devem ser levados em consideração, pois eles influenciam na máxima performance que pode ser atingida no sistema de controle.

- **Robustez.** Representa o grau de degradação do desempenho de um sistema de controle na presença de dinâmicas não modeladas como, por exemplo, perturbações, variação paramétrica, falhas físicas, entre outras.

Na primeira parte do capítulo será introduzido o controlador preditivo passo avante (do inglês, *one-step-ahead controller*). Com esse controlador, o valor da variável de controle é calculado de maneira que a saída do sistema em um instante futuro siga um valor desejado. Apesar de simples, há aplicações desse tipo de controlador em sistemas não lineares e em sistema cujos parâmetros são variantes no tempo. Porém, o controlador preditivo pode gerar sinais de controle com norma muito elevada o que pode tornar inviável sua implementação. Para superar essa dificuldade, faz-se necessário realizar modificações no controlador com a finalidade de alcançar os objetivos de controle e diminuir a norma do sinal de controle e o resultado será o controlador preditivo com ponderação. Como em todo sistema de controle, esse último controlador apresentará desvantagens que serão sinalizadas a seguir nesse capítulo.

Para superar as dificuldades do controlador preditivo com ponderação, introduz-se a ideia de sistemas de controle com a utilização de modelos de referência, o termo em inglês para esses sistemas de controle é *Model Reference Control*, onde se utiliza um modelo para gerar a saída desejada. Finalmente, serão apresentados algoritmos mais complicados que, pelo menos para os casos de controle de sistemas lineares, superam as dificuldades das estratégias citadas anteriormente. Esses algoritmos são baseados na alocação dos polos de malha fechada. Será apresentada a ligação entre a posição dos polos e o tipo de resposta do sistema, como também se demonstrará que o sistema de controle com modelo de referência é um caso especial de alocação de polos. Para maiores informações a respeito desse assunto ver [3],[2] e [7].

## 4.2 Controladores com erro de predição mínimo

Como foi dito na introdução do capítulo, inicia-se o estudo de sistemas de controle para sistemas lineares com a apresentação do controlador preditivo, cuja ação de controle é calculada de maneira a trazer a saída futura para um valor desejado. Para tanto, considere os casos nos quais o predição da saída é uma função linear da ação de controle presente.

Inicialmente, considera-se o caso dos sistemas dinâmicos lineares cujos modelos são apresentados na forma DARMA, como apresentado a seguir:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (4.2)$$

sendo,

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \\ B(q^{-1}) &= q^{-d}(b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_i}q^{-n_i}) \\ &= q^{-d}B'(q^{-1}) \end{aligned}$$

Sabe-se, do resultado do Lema 13 que esse modelo pode ser escrito na forma de preditor que é apresentada a seguir:

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (4.3)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1q^{-1} + \dots + \alpha_{n-1}q^{-n+1} = G(q^{-1}) \\ \beta(q^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1q^{-1} + \dots + \beta_{n_i+d-1}q^{-(n_i+d-1)} = F(q^{-1})B'(q^{-1}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Neste capítulo será abordado o caso SISO, para a abordagem do caso MIMO, ver [5].

### 4.2.1 Controle Preditivo

Para a construção do controlador preditivo, o atraso,  $d$ , é escolhido de maneira que o coeficiente,  $b_0$ , na equação (4.4) seja diferente de zero. Dito isso, considere o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.1.** (Controle Preditivo) *Considere o sistema descrito por seu modelo DARMA apresentado em (4.2),*

(a) *A lei de realimentação que leva a saída no instante  $t+d$ ,  $y(t+d)$ , para seu valor de referência  $y^*(t+d)$  será,*

$$\beta(q^{-1})u(t) = y^*(t+d) - \alpha(q^{-1})y(t); \quad t \geq 0 \quad (4.5)$$

(b) *O sistema de malha fechada será descrito por,*

$$y(t) = y^*(t); \quad t \geq d \quad (4.6)$$

$$B(q^{-1})u(t) = A(q^{-1})y^*(t); \quad t \geq d+n \quad (4.7)$$

(c) *O sistema de controle de malha fechada é estável se*



(i) Todos os polos do modelo "inverso",  $z_{i_s}$ , (4.7) [i.e, zeros do polinômio  $z^d B(z^{-1})$ ] satisfazem a condição,  $|z_i| \leq 1$ .

(ii) Todos os modos controláveis do modelo "inverso" (4.7) [i.e, os zeros da função de transferência  $z^d B(z^{-1})/A(q^{-1})$ ] apresentam módulo menor que 1.

(iii) Se existe um modo do modelo "inverso" tal que  $|z_i| = 1$ , este deve ter um bloco de Jordan de dimensão um.

Prova. (a) Imediata da expressão (4.3) definindo  $y(t+d)$  como  $y^*(t+d)$  e colocando  $u(t)$  em função dos termos  $u(t-1), \dots, y(t), y(t-1), \dots$ . É importante notar que essa manipulação é válida pois  $\beta_0 \neq 0$  por definição.

(b) Substituindo (4.5) em (4.2), obtém-se:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1}) \frac{y^*(t+d) - \alpha(q^{-1})y(t)}{\beta(q^{-1})} \quad (4.8)$$

De (4.8) e usando a relação (3.6), obtém-se (4.6). A restrição na variável  $t$  é devido ao fato de que a primeira predição, considerando o tempo inicial nulo, será em  $t = d$ . A expressão (4.7) segue de (4.2) usando a relação (4.6).

(c) Ver Apêndice B de [5].

É importante observar que a lei de controle (4.5) minimiza a função,  $J_1(t+d)$ , que representa o erro de predição quadrático.

$$J_1(t+d) = \frac{1}{2} \left[ y(t+d) - y^*(t+d) \right]^2 \quad (4.9)$$

De fato, o leitor pode notar que calculando a derivada de  $J_1(t+d)$  com relação a  $u(t)$  e igualando-a a zero, obtém-se a lei de controle (4.5).

Como já comentado anteriormente, o sinal de controle que leva  $y(t+d)$  a  $y^*(t+d)$  pode resultar em um sinal com grande amplitude. Para superar esse inconveniente, considere o controlador no qual o sinal de controle minimiza a função  $J_2(t+d)$ , cuja expressão é apresentada em (4.10).

$$J_2(t+d) = \left\{ \frac{1}{2} (y(t+d) - y^*(t+d))^2 + \frac{\lambda}{2} u(t)^2 \right\} \quad (4.10)$$

O controlador que minimiza a função  $J_2(t+d)$  é chamado de controlador preditivo ponderado (do inglês, *weighted one-step-ahead controller*). Com isso, faz-se necessário estender a aplicação do Teorema 4.2.1 a esse controlador. Portanto,

**Teorema 4.2.2.** (Controle Preditivo Ponderado)

(a) A lei de controle que minimiza  $J_2(t+d)$  é

$$u(t) = \frac{\beta_0 \left\{ y^*(t+d) - \alpha(q^{-1})y(t) - \beta'(q^{-1})u(t-1) \right\}}{\beta_0^2 + \lambda} \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} B'(q^{-1}) &= q(\beta(q^{-1}) - \beta_0) \\ &= \beta_1 + \beta_2 q^{-1} + \dots + \beta_{n_1+d-1} q^{-(n_1+d-2)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(b) O sistema de malha fechada será dado por:

$$\left[ B'(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1}) \right] y(t+d) = B'(q^{-1}) y^*(t+d) \quad (4.13)$$

$$\left[ B'(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1}) \right] u(t) = A(q^{-1}) y^*(t+d) \quad (4.14)$$

onde  $B'(q^{-1})$  é apresentado em (4.12).

(c) O sistema de controle de malha fechada terá entrada e saídas limitadas se,

(i) Todos os modos do modelo "inverso" (4.13) e (4.14) [i.e, zeros do polinômio  $[B'(z^{-1}) + (\lambda/\beta_0)A(z^{-1})]$ ] tem módulo menor ou igual a um.

(ii) Todos os modos controláveis do modelo "inverso" (4.13) e (4.14) (i.e, os zeros das funções de transferências

$$\frac{1}{B(z^{-1})} \left[ B'(z^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(z^{-1}) \right]$$

e

$$\frac{1}{A(z^{-1})} \left[ B'(z^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(z^{-1}) \right]$$

tenham módulo menor que 1.

(iii) Qualquer modo do modelo "inverso" (4.13) e (4.14) com módulo igual a um, devem ter apenas um bloco de Jordan de dimensão igual a um.

Prova. (a) Levando em consideração a função de custo,

$$J_2(t+d) = \left\{ \frac{1}{2} (y(t+d) - y^*(t+d))^2 + \frac{\lambda}{2} u(t)^2 \right\} \quad (4.15)$$

e a forma do preditor,

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (4.16)$$

Substitui-se (4.16) em (4.15) e calcula-se a derivada de  $J_2(t+d)$  com relação ao sinal de controle,  $u(t)$ , obtendo-se,

$$\frac{\partial J_2(t+d)}{\partial u} = \beta_0 \left\{ \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) + \lambda u(t) - y^*(t+d) \right\} \quad (4.17)$$

expandindo  $\beta(q^{-1})$ , usando a relação (4.12) e igualando a derivada a zero, obtém-se a lei de controle (4.11).

(b) Durante o cálculo da derivada, chega-se a seguinte expressão:

$$\beta_0 \left\{ y(t+d) - y^*(t+d) + \frac{\lambda}{\beta_0} u(t) \right\} = 0 \quad (4.18)$$

Multiplicando (4.18) por  $B'(q^{-1})$  e usando as relações em (4.2), obtém-se (4.13). Da mesma forma, para a obtenção de (4.14), multiplica-se (4.18) por  $A(q^{-1})$  e usam-se as relações em (4.2).

(c) Da mesma maneira que o item (c) do Teorema 4.2.1.

Neste ponto, é importante perceber que a condição apresentada do Teorema 4.2.2, ou seja, que as raízes do polinômio  $B'(q^{-1}) + (\lambda/\beta_0)A(q^{-1})$  tenham módulo menor que a unidade, representa um aumento no grau de liberdade quando comparado com a condição apresentada no Teorema 4.2.1, que requer que as raízes do polinômio  $z^d B(z^{-1})$  sejam estáveis (apresentem módulo menor que 1). Com uma análise do lugar das raízes do sistema de malha fechada é possível afirmar que, a depender da escolha do parâmetro  $\lambda$ , pode-se estabilizar todos os sistemas que apresentam inversa estável e alguns sistemas que não são estável nem possuem inversa estável, além de continuar a ser aplicada para sistemas estáveis.

Como foi visto no parágrafo anterior, o controlador preditivo ponderado não apresenta grau de liberdade suficiente para estabilizar diversos tipos de sistemas (por exemplo, sistemas a fase não mínima). Para aumentar o grau de liberdade do controlador preditivo, utiliza-se a função de custo exposta em (4.19), que visa manter a simplicidade do princípio do controle preditivo, ao mesmo tempo em que incorpora grau de liberdade para o projeto do controlador, com a finalidade de garantir a estabilidade para todos os sistemas.

$$J_3(t+d) = \left\{ \frac{1}{2}(y(t+d) - y^*(t+d))^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{u}(t)^2 \right\} \quad (4.19)$$

onde  $\bar{u}(t)$  está relacionado com  $u(t)$  pela seguinte função de transferência linear:

$$\begin{aligned} P(q^{-1})\bar{u}(t) &= R(q^{-1})u(t) \\ P(q^{-1}) &= 1 + p_1q^{-1} + \dots + p_lq^{-l} \\ R(q^{-1}) &= 1 + r_1q^{-1} + \dots + r_lq^{-l} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Devido a introdução da função de transferência relacionando  $u(t)$  com  $\bar{u}(t)$ , tem-se a seguinte generalização do Teorema 4.2.2.

**Teorema 4.2.3.** (Generalização do controle preditivo ponderado)

(a) A lei de controle que minimiza (4.19) é

$$u(t) = \frac{\beta_0 \left\{ y^*(t+d) - \alpha(q^{-1})y(t) - \beta'(q^{-1})u(t-1) \right\} + \lambda \left[ P'(q^{-1})\bar{u}(t) - R'(q^{-1})u(t-1) \right]}{\beta_0^2 + \lambda} \quad (4.21)$$

onde,

$$\beta'(q^{-1}) = q \left[ \beta(q^{-1}) - \beta_0 \right]$$

$$P'(q^{-1}) = q \left[ P(q^{-1}) - 1 \right]$$

$$R'(q^{-1}) = q \left[ R(q^{-1}) - 1 \right]$$

e  $\bar{u}(t)$  é definida em (4.20).

(b) O sistema de malha fechada será descrito por

$$\left[ P(q^{-1})B'(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0}R(q^{-1})A(q^{-1}) \right] u(t) = P(q^{-1})A(q^{-1})y^*(t+d) \quad (4.22)$$

$$\left[ P(q^{-1})B'(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0}R(q^{-1})A(q^{-1}) \right] y(t+d) = P(q^{-1})B'(q^{-1})y^*(t+d) \quad (4.23)$$

(c) O sistema terá entrada e saída limitadas com condições nos modelos (4.22)-(4.23) similares aquelas dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2. Observe que os modos do sistema serão os zeros de

$$\left[ P(z^{-1})B' + \frac{\lambda}{\beta_0}R(z^{-1})A(z^{-1}) \right]$$

Prova. Similar aos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2.

Da forma que foi apresentado, não é claro o procedimento para a obtenção de  $R(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  de maneira que o sistema de malha fechada seja estável. De fato, o procedimento de obtenção completo desses polinômios serão apresentados a seguir neste capítulo, porém, a título de esclarecimento, são apresentados dois comentários a respeito dos controladores preditivos.

- Com a restrição de que  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  não apresentem modos instáveis em comum (não há cancelamento de zeros e polos instáveis), existe sempre uma solução para  $\lambda$ ,  $P(q^{-1})$  e  $R(q^{-1})$  tal que o sistema de controle de malha fechada seja estável. Se  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são conhecidos, então é possível encontrar uma solução para  $\lambda$ ,  $P(q^{-1})$  e  $R(q^{-1})$  usando o método do lugar das raízes, ou seja, projetar a dinâmica da seguinte equação característica:

$$P(z^{-1})B'(z^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0}R(z^{-1})A(z^{-1}) = 0$$

- É importante notar que, da maneira como foi definido, o controlador preditivo ponderado não garante erro de regime permanente para entradas constantes. De fato, o erro nulo para entradas constantes seria alcançado fosse introduzido na função  $J_2(t + d)$ , adicionalmente ao controle em si, uma ponderação na taxa de variação do sinal de controle. No caso generalizado, esse objetivo pode ser alcançado com a introdução do termo  $(1 - q^{-1})$  no polinômio  $R(q^{-1})$ .

Para maiores considerações a respeito do controle preditivo, como aplicação em sistemas não lineares e variações desse método, ver [5].

#### 4.2.2 Sistemas de Controle por Modelo de Referência

Como usado nas seções anteriores, o modelo do sistema dinâmico utilizado nesse seção é o modelo DARMA que, por comodidade, é apresentado a seguir. A especificação para o sistema de controle é que a saída,  $y(t)$ , siga um sinal de referência, diga-se  $y^*(t)$ . Porém, esse último sinal é obtido através de um outro sistema dinâmico que apresenta como entrada a entrada de referência,  $r(t)$ , e tem função de transferência conhecida, definida como sendo  $G(z)$ .

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t)$$

O sistema dinâmico que gera o sinal  $y^*(t)$  será chamado de agora em diante de modelo de referência. Sua caracterização é dada pela definição seguinte.

**Definição** *Caracterização do modelo de referência*

- A saída de referência  $y^*(t)$  satisfaz o seguinte modelo,

$$E(q^{-1})y^*(t) = q^{-d'} gH(q^{-1})r(t) \quad (4.24)$$

com a função de transferência  $G(z) = z^{-d'} H(z^{-1})/E(z^{-1})$ , onde  $g$  é uma constante que representa o ganho do modelo e

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_l z^{-l}; & h_0 &= 1 \\ E(z^{-1}) &= e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_l z^{-l}; & e_0 &= 1 \end{aligned}$$

- $E(z^{-1})$  é estável
- O atraso no modelo,  $d'$ , deve ser escolhido maior que o atraso do sistema,  $d$ . Por simplicidade, será escolhido  $d' = d$ .

O objetivo do sistema de controle é que a saída do sistema  $y(t)$ , com  $r(t)$  como entrada, seja igual a  $y^*(t)$ , que representa a saída do modelo de referência com a mesma

entrada. Esse objetivo é ilustrado na Figura 18. Com o objetivo de realizar um comparação com as técnicas preditivas vistas anteriormente, considere no diagrama o sinal  $z(t) = y^*(t + d)$  disponível no instante de tempo  $t$  e utilize-o, ao invés da entrada  $r(t)$ , como entrada no sistema de controle. Essa modificação é ilustrada na Figura 19. Dessa maneira, o sistema de referência pode ser tido como uma maneira de especificar ao sistema de controle o sinal  $y^*(t + d)$ .

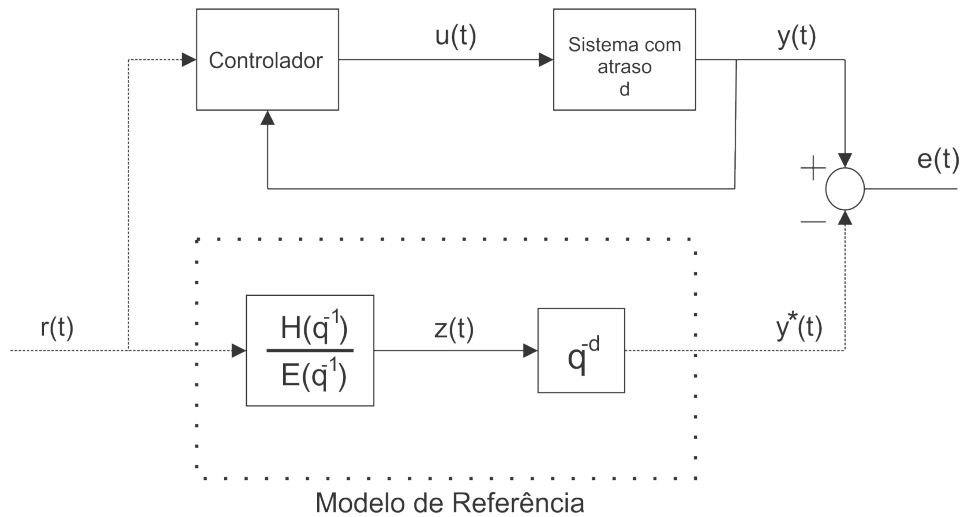


Figura 18 – Sistema de controle por Modelo de Referência.

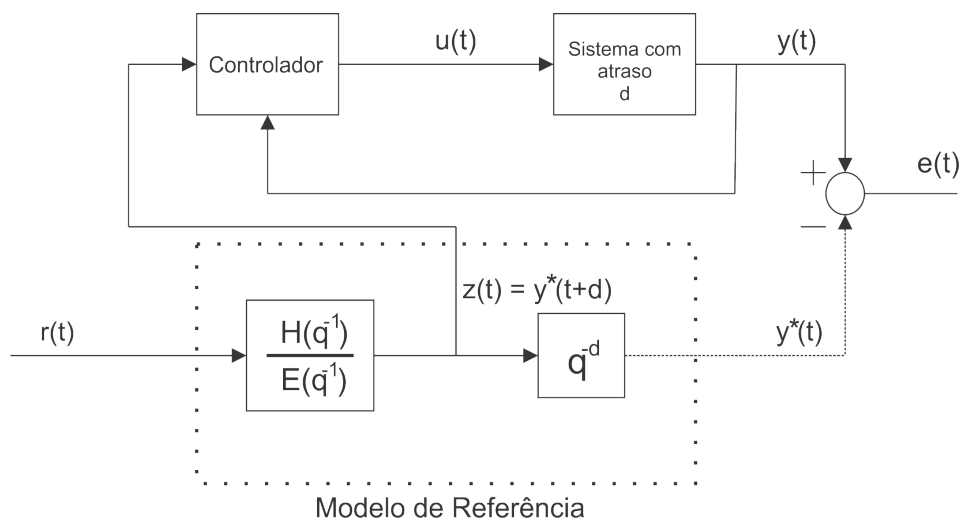


Figura 19 – Modificação do diagrama a bloco do sistema de controle baseado no modelo de referência.

Portanto, uma vez que o modelo de referência é responsável por gerar o sinal  $y^*(t)$ , usando o controle preditivo, faz-se com que a saída seja igual a  $y(t)$  quando o sinal  $y^*(t + d)$  for aplicado na entrada do sistema. Uma alternativa a utilização do controle preditivo é usando alocação de polos, fazendo, simplesmente, que os polos do sistema sejam iguais aos polos do modelo de referência. Essa alternativa tem a vantagem (dependendo da localização dos polos do sistema de referência) de que o controlador gerado é mais

robusto, ou seja, seu desempenho é melhor na presença de dinâmicas não modeladas, variações paramétricas, entre outras. De fato, quando o modelo de referência tem todos os polos na origem, as duas técnicas equivalem-se.

Com a finalidade de se mostrar como correlacionar os sistemas com modelo de referência técnica de controle preditivo, considera-se o seguinte lema:

**Lema 17.** *O sistema*

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t)$$

*pode ser escrito na seguinte forma de preditor*

$$E(q^{-1})y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (4.25)$$

*onde,*

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= G(q^{-1}) \\ \beta(q^{-1}) &= F(q^{-1})B'(q^{-1}) \end{aligned}$$

*e  $F(q^{-1})$  e  $G(q^{-1})$  são os únicos polinômios de ordens  $d-1$  e  $r-1$ , respectivamente, que satisfazem,*

$$E(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (4.26)$$

Prova. Multiplicando-se (4.2) por  $F(q^{-1})$  e usando a expressão (4.26), obtém-se (4.25).

Usando o resultado do Lema 17, o objetivo de controle é alcançado usando a seguinte lei de controle,

$$\alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) = gH(q^{-1})r(t) \quad (4.27)$$

pois, com aplicação desta, o sistema de malha fechada resultará em:

$$E(q^{-1})y(t+d) = gH(q^{-1})r(t) \quad (4.28)$$

## 4.3 Alocação dos polos

### 4.3.1 Introdução

Inicia-se a discussão sobre alocação dos polos do sistema de malha fechada, mostrando que o controlador preditivo apresentado pelo Teorema 4.2.1 é um caso especial de alocação de polos. Para isso, lembre-se que na secção anterior a lei de controle foi obtida

de maneira que  $y(t) = y^*(t)$  que, na sua forma mais simples, resulta na lei de controle apresenta em (4.5). Baseando-se nesse fato, essa lei de controle tem a seguinte estrutura:

$$L(q^{-1})u(t) = -P(q^{-1})y(t) + M(q^{-1})y^*(t + d) \quad (4.29)$$

onde  $L(q^{-1}), P(q^{-1})$  e  $M(q^{-1})$  são definidos como mostrado a seguir.

$$L(q^{-1}) = \beta(q^{-1}) \triangleq F(q^{-1})B'(q^{-1}); \quad P(q^{-1}) = \alpha(q^{-1}) \triangleq G(q^{-1}); \quad M(q^{-1}) = 1 \quad (4.30)$$

Mais um vez, considerando o sistema descrito na sua forma DARMA, ou seja,

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t); \quad B(q^{-1}) \triangleq q^{-d}B'(q^{-1}) \quad (4.31)$$

Multiplicando (4.31) por  $L(q^{-1})$  e usando a relação (4.29), obtém-se:

$$L(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1}) \left[ -P(q^{-1})y(t) + M(q^{-1})y^*(t + d) \right]$$

Após algumas manipulações algébricas, é obtido o seguinte modelo para o sistema de malha fechada:

$$\left[ L(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})P(q^{-1}) \right] y(t) = B'(q^{-1})M(q^{-1})y^*(t) \quad (4.32)$$

Com isso, observando (4.32) e tendo em mente que o objetivo requerido é a obtenção de  $y(t) = y^*(t)$ , é intuitivo definir  $M(q^{-1}) = 1$  e alocar os polos de malha fechada de maneira que esses sejam iguais aos zeros de malha aberta, ou seja,

$$\left[ L(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})P(q^{-1}) \right] = B'(q^{-1}) \quad (4.33)$$

A questão agora é: É possível resolver (4.33), ou seja, é possível encontrar dois polinômios,  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$ , que satisfaçam (4.33)?

Analisando (4.33), percebe-se que  $B'(q^{-1})$  é um fator comum para o termo do lado direito da equação e para o segundo termo do lado esquerdo. Por isso, é coerente supor que  $L(q^{-1})$  tenha o fator  $B'(q^{-1})$  em sua constituição, ou seja:

$$L(q^{-1}) = F(q^{-1})B'(q^{-1}) \quad (4.34)$$

Substituindo (4.34) em (4.33) e cancelando os termos  $B'(q^{-1})$ , obtém-se a seguinte expressão

$$F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}P(q^{-1}) = 1 \quad (4.35)$$

Se  $F(q^{-1})$  tem ordem  $d - 1$  a solução da equação (4.33) apresentam solução única e igual aquela apresentada no Lema 13, com  $P(q^{-1})$  ao posto de  $G(q^{-1})$ .

Usando o resultado descrito no parágrafo anterior, percebe-se que a lei de controle (4.29) é a mesma da lei de controle definida no Teorema 4.2.1, portanto, o projeto de um controlador preditivo pode ser pensado como um técnica de alocação dos polos na qual os polos de malhas fechadas são alocados no lugar dos zeros de malha aberta. É importante notar que o sistema de controle será estável se e somente as condições do Teorema 4.2.2, item (c), são satisfeitas.



### 4.3.2 Algoritmo de Alocação de polos (Abordagem Usando o Operador Diferença)

Baseado na discussão precedente, fica-se a seguinte pergunta: É possível alocar os polos do sistema de malha fechada em posições diferente que não seja os zeros de malha aberta? Para responder essa pergunta, deve-se escolher os polinômios  $P(q^{-1})$  e  $L(q^{-1})$  de maneira que a lei de controle (4.29) satisfaça (4.33), com o polinômio desejada,  $A^*(q^{-1})$ , posto no lugar de  $B'(q^{-1})$ , ou seja, é necessário resolver a expressão:

$$L(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})P(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) \quad (4.36)$$

Se isso for possível, fica claro que os polos de malha fechada podem ser alocados arbitrariamente. Note que, da expressão (4.36), se  $A(q^{-1})$  e  $B'(q^{-1})$  tem fatores em comum, então o polinômio  $A^*(q^{-1})$  deverá ter esse fator. No entanto, para simplificar a apresentação, considere, no momento, que  $A(q^{-1})$  e  $B'(q^{-1})$  sejam primos entre si. O caso no qual  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  apresentam fatores em comum será estudada adiante nesse capítulo. Voltando a alocação arbitrária de polos, considere o seguinte Teorema:

**Teorema 4.3.1.** (*Alocação de Polos*) Se  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são primos entre si e  $n = dg_{\max}(A(q^{-1}), B(q^{-1}))$ , um polinômio arbitrário  $A^*(q^{-1})$  de grau  $(2n-1)$  pode ser obtido da expressão

$$A(q^{-1})L(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) \quad (4.37)$$

sendo  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  soluções únicas de grau  $n-1$ .

Prova. Dada a condição,

$$A(q^{-1})L(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1}) = A^*(q^{-1})$$

onde

$$A^*(q^{-1}) = a_0^1 + a_1^1 q^{-1} + \dots + a_{2n-1}^1 q^{-2n+1} \quad (4.38)$$

e definindo  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$ , ambos de grau  $n-1$ , como:

$$L(q^{-1}) = l_0 + l_1 q^{-1} + \dots + l_{n-1} q^{-n+1} \quad (4.39)$$

$$P(q^{-1}) = p_0 + p_1 q^{-1} + \dots + p_{n-1} q^{-n+1}$$

Expandido (4.37) com a utilização de (4.38) e as definições de  $A(q^{-1})$ , dada em (3.2), e  $B(q^{-1})$  sendo:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n} \quad (4.40)$$

considerou-se, para  $B(q^{-1})$ , a condição limite, que é quando seu grau é igual ao grau de  $A(q^{-1})$ . Dessa forma, com as definições (4.38) e (4.39) e (4.40), escreve-se (4.37) da

seguinte forma:

$$M_e \begin{bmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^1 \\ \vdots \\ a_{n-1}^1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

sendo,

$$M_e = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & b_n & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_n & & \vdots & 0 & b_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Um vez que  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são, por hipótese, primos, então conclui-se que  $\det M_e \neq 0$  e, com isso, determina-se a partir de (4.41) os coeficientes de  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$ , da maneira ilustrada a seguir:

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = M_e^{-1} \begin{bmatrix} a_0^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1}^1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

A consequência do Teorema 4.3.1 é que, com a condição de que  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são primos entre si, os polinômios  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  podem ser determinados independentemente da posição dos polos de malha fechada, em outras palavras, está garantido que existe  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  independente da escolha do polinômio  $A^*(q^{-1})$ . Um caso especial será quando  $A^*(q^{-1})$  tiver todos os polos de malha fechada na origem, onde, nesse caso, o controlador é chamado de controlador *dead-beat*.

Na Figura 20 é ilustrado a forma geral, apresentada na expressão (4.29), de um sistema de controle com alocação de polos. Ao considerar-se  $M(q^{-1}) = P(q^{-1})$  o sistema de controle se resume a forma tradicional, com a entrada do controlador sendo o erro entre a referência e a saída, que é ilustrada na Figura 21.

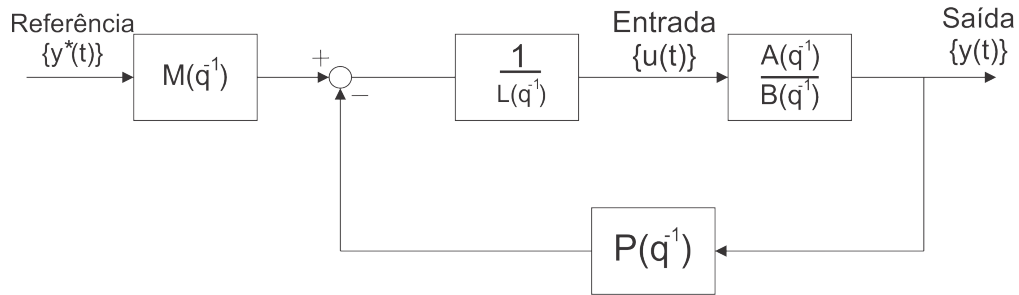
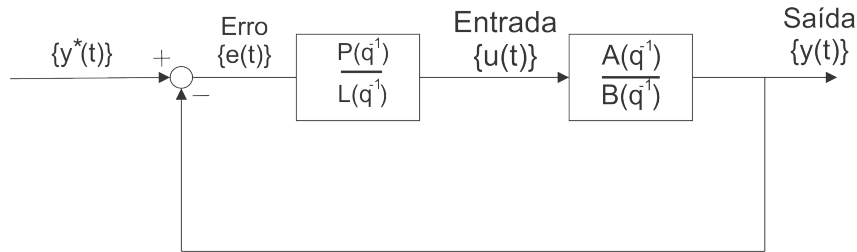


Figura 20 – Estrutura geral de alocação de polos.


 Figura 21 – Estrutura tradicional cuja entrada do controlador é o sinal  $e(t)$ .

### 4.3.3 Relação com a Realimentação de Variáveis de Estados

Visto a interpretação polinomial da alocação de polos, nesta secção, tratar-se-á da interpretação via realimentação de variáveis de estados. Na realidade, será mostrado que o processo de alocação de polos pode ser resumido a um estimador de estado, chamado na literatura de observador de estados, mais uma realimentação de variáveis de estados. Para a realização de como isso é possível considere as seguintes observações:

- Primeiramente, será desenvolvido o algoritmo de alocação de polos em termos de realimentação de estados usando o operador de diferença. Para isso, o polinômio  $A^*(q^{-1})$  é decomposto no produto de dois polinômios, ou seja,  $A^*(q^{-1}) = Q(q^{-1})\bar{A}(q^{-1})$  sendo  $Q(q^{-1})$  de ordem  $n - 1$  e  $\bar{A}(q^{-1})$  de ordem  $n$ . Além disso, o polinômio  $\bar{A}(q^{-1})$  pode ser expresso como a soma de dois termos,  $\bar{A}(q^{-1}) = A(q^{-1}) + K(q^{-1})$ , sendo  $K(q^{-1}) = 1 + k_1q^{-1} + \dots + k_nq^{-n}$  (os motivos dessas fatorações serão explicitados mais adiante), portanto:

$$A^*(q^{-1}) = Q(q^{-1}) \left[ A(q^{-1}) + K(q^{-1}) \right] \quad (4.44)$$

Define-se, então, um filtro,  $R(q^{-1})$ , em termos de  $L(q^{-1})$ , definido na lei de controle (4.29), e  $Q(q^{-1})$  definido em (4.44), obtendo:

$$R(q^{-1}) \triangleq L(q^{-1}) - Q(q^{-1}) \quad (4.45)$$

onde foi assumido que  $L(q^{-1})$  e  $Q(q^{-1})$  são ambos mônicos e, conseqüentemente,  $R(q^{-1})$  não tem o coeficiente da potência em  $q$  nula. Dito isso, a lei de controle (4.29) pode ser reescrita como:

$$Q(q^{-1})u(t) = M(q^{-1})y^*(t+d) - (R(q^{-1})u(t) + P(q^{-1})y(t)) \quad (4.46)$$

O motivo de se escrever a nova lei de controle como em (4.46) é que, usando a representação direita do operador de diferença do sistema (4.31)[Ver Capítulo 2 [5]]:

$$A(q^{-1})z(t) = u(t) \quad (4.47)$$

$$y(t) = B(q^{-1})z(t) \quad (4.48)$$

a lei de controle pode ser escrita em termo do novo vetor de estados,  $z(t)$ , como na expressão a seguir:

$$Q(q^{-1})u(t) = M(q^{-1})y^*(t+d) - \left[ R(q^{-1})A(q^{-1}) + P(q^{-1})B(q^{-1}) \right] z(t) \quad (4.49)$$

na qual foi usada a seguinte relação, consequência das expressões (4.47) e (4.48).

$$\left[ R(q^{-1})A(q^{-1}) + P(q^{-1})B(q^{-1}) \right] z(t) = R(q^{-1})u(t) + P(q^{-1})y(t) \quad (4.50)$$

Note que, mesmo quando  $z(t)$  não é disponível, o segundo termo do lado direito da expressão (4.49) pode ser obtido através dois sinais,  $u(t)$  e  $y(t)$ , com a utilização da expressão (4.50). A interpretação da expressão (4.46) como uma realimentação de variáveis de estados torna-se evidente ao se observar a equação de alocação de polos (4.37) e a decomposição do polinômio de malha fechada dada em (4.44), ou seja:

$$L(q^{-1})A(q^{-1}) + P(q^{-1})B(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) = Q(q^{-1}) \left[ A(q^{-1}) + K(q^{-1}) \right] \quad (4.51)$$

Portanto, usando (4.45), obtém-se:

$$R(q^{-1})A(q^{-1}) + P(q^{-1})B(q^{-1}) = Q(q^{-1})K(q^{-1}) \quad (4.52)$$

sendo

$$Q(q^{-1}) = 1 + Q_1q^{-1} + \dots + Q_{n-1}q^{-n+1}, \quad K(q^{-1}) = k_1q^{-1} + \dots + k_nq^{-n}$$

Com isso, a lei de controle (4.46) pode ser escrita como,

$$Q(q^{-1})u(t) = M(q^{-1})y^*(t+d) - Q(q^{-1})K(q^{-1})z(t) \quad (4.53)$$

Com a condição de que  $Q(q^{-1})$  seja estável, (4.53) é assintoticamente equivalente a seguinte expressão:

$$u(t) = \left[ \frac{M(q^{-1})}{Q(q^{-1})} \right] y^*(t+d) - K(q^{-1})z(t) \quad (4.54)$$

$Q(q^{-1})$  é chamada de dinâmica do observador e essa garante um meio de se realizar a estimativa para o vetor  $z(t)$ , como mostrado na expressão (4.50).

O sistema de malha fechada resultante, usando a lei de controle (4.46), é encontrado substituindo (4.54) em (4.47), obtendo-se:

$$\begin{aligned} Q(q^{-1}) \begin{bmatrix} A(q^{-1}) + K(q^{-1}) \\ y(t) \end{bmatrix} z(t) &= M(q^{-1})y^*(t+d) \\ &= B(q^{-1})z(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Note que os polos de malha fechadas podem ser escolhidos arbitrariamente, dependendo da escolha de  $Q(q^{-1})$  e  $K(q^{-1})$ . É importante notar que se  $M(q^{-1})$ , na lei de controle (4.46), for escolhido como

$$M(q^{-1}) = Q(q^{-1}) \quad (4.56)$$

então, a expressão (4.54) tende assintoticamente a

$$u(t) = y^*(t+d) - K(q^{-1})z(t) \quad (4.57)$$

ou seja, com a escolha (4.56), a dinâmica do observador é anulada no sistema de malha fechada. No entanto, é mais comum a escolha de  $M(q^{-1}) = P(q^{-1})$ , que resulta no sistema ilustrado na Figura 21. Na Figura 22 está ilustrada o diagrama que representa a alocação de polos de um sistema de controle usando realimentação de variáveis de estados.

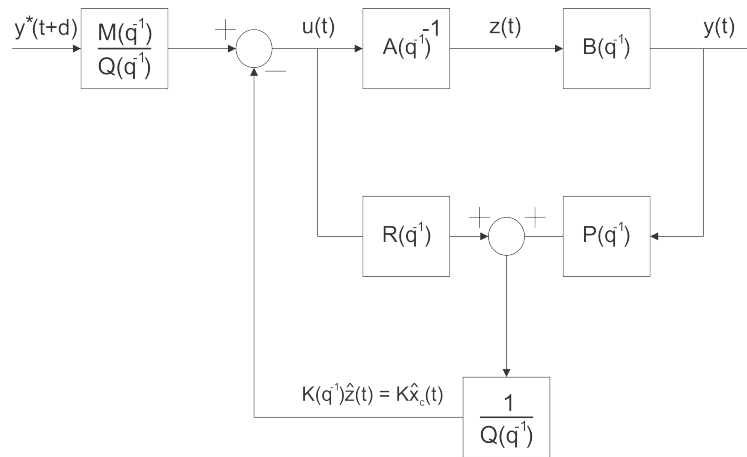


Figura 22 – Interpretação do controlador de alocação de polos usando realimentação de variáveis de estados.

- Nessa observação, o foco será voltado em dar a interpretação anterior usando a representação em espaço de estados do sistema. Para isso, note que a representação (4.47)-(4.48) é uma maneira compacta de se escrever o sistema na forma canônica de controlador [Ver [5]], como apresentado abaixo:

$$x_c(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.58)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} x_c(t) \quad (4.59)$$

sendo,

$$x_c = \begin{bmatrix} z(t-1) & z(t-2) & \dots & z(t-n) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Se o vetor  $z(t)$  estiver disponível, então a lei de controle (4.57) torna-se:

$$u(t) = -Kx_c(t) + y^*(t+d) \quad (4.61)$$

onde  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$ . Substituindo (4.61) em (4.58), obtém-se:

$$x_c(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & \dots & \dots & -a_n - k_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} y^*(t+d) \quad (4.62)$$

$$\triangleq \bar{A}x_c(t) + \bar{b}y^*(t+d)$$

Observe que o polinômio característico do sistema apresentado em (4.62) é definido por:

$$p_c(z) = \det(zI - \bar{A}) = z^n + (a_1 + k_1)z^{n-1} + \dots + (a_n + k_n) \quad (4.63)$$

e, portanto, os polinômios de malha fechada podem ser escolhidos arbitrariamente com a escolha de  $k_1, \dots, k_n$ . Esta conclusão nos permite um conhecimento maior a respeito da importância do polinômio  $K(q^{-1})$  na decomposição polinomial feita anteriormente. Se o estado  $x_c(t)$  não estiver disponível, aplica-se o seguinte procedimento. Primeiramente, assume-se que o sistema é observável, ou seja, o espaço de estados representado em (4.58)-(4.59) pode ser transformado na seguinte forma de observador.

$$x_o(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} x_o(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (4.64)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x_o(t) \quad (4.65)$$

Realiza-se uma estimativa para  $\hat{x}_0(t)$  usando o observador,

$$\hat{x}_o(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_o(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} (y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_o(t)) \quad (4.66)$$

Subtraindo (4.64) de (4.66) e definindo o erro de estimação como  $\tilde{x}_o(t) = \hat{x}_o(t) - x_o(t)$ , obtém-se:

$$\tilde{x}_o(t+1) = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n - l_n & & & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_o(t) \quad (4.67)$$

Baseando-se na expressão (4.67), percebe-se que é possível controlar a taxa de decrescimento do erro de estimação escolhendo os valores de  $l_1, \dots, l_n$ . Como os sistemas (4.58) e (4.64) foram considerados controlável e observável, então existe uma transformação no espaço de estados,  $x_o(t) = Px_c(t)$ , tal que o observador de  $x_o(t)$  é transformado no observado de  $x_c(t)$ , com

$$\hat{x}_c(t) = A'x_c(t) + B'u(t) + L'y(t) \quad (4.68)$$

sendo

$$A' = P^{-1} \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_n - l_n & & & 0 \end{bmatrix} P \quad (4.69)$$

$$B' = P^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$L' = P^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

- Finalmente, nessa última observação será abordado como o operador diferença e o modelo em espaço de estados estão relacionados no problema de alocação de polos. No caso da realimentação da variáveis de estados, interessa-se apenas em combinações lineares da estimativa do estado do controlador,  $\hat{x}_c(t)$ , ou seja

$$f(t) = K\hat{x}_c(t) \quad (4.72)$$

Observe, então, que o escalar  $f(t)$ , pode ser escrito da seguinte forma compacta:

$$Q(q^{-1})f(t) = R(q^{-1})u(t) + P(q^{-1})y(t) \quad (4.73)$$

ou,

$$Q(q^{-1}) \left[ K\hat{x}_c(t) \right] = R(q^{-1})u(t) + P(q^{-1})y(t) \quad (4.74)$$

Com o resultado apresentado em (4.74), o diagrama a blocos desse sistema é o mesmo daquele ilustrada na Figura 20, ou pode ser visto como o diagrama equivalente apresentado na Figura 23. Portanto, a relação existente entre a abordagem em espaços de estado e a aquela polinomial no processo de alocação de polos é biunívoca.

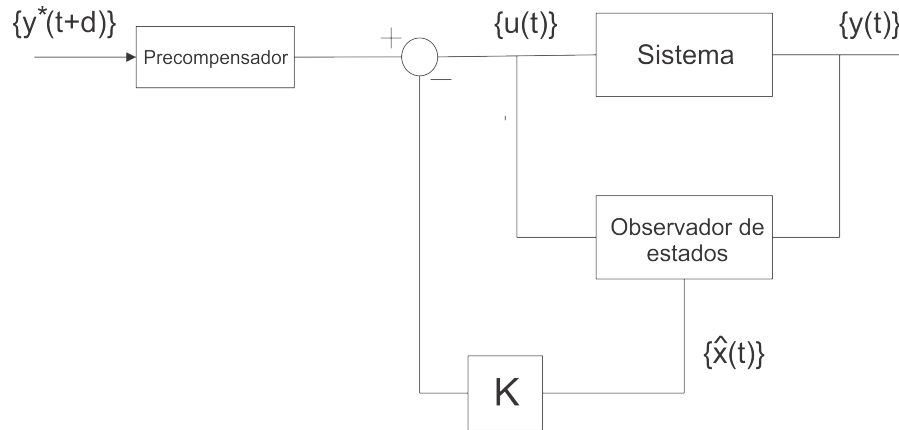


Figura 23 – Alocação de Polos usando a abordagem de espaço de estados.

Com o que foi dito nessa secção, sabe-se que os polos de malha fechada de um sistema de controle, considerando o sistema controlável e observável, podem ser alocados de maneira arbitrária. Porém, uma pergunta factível seria: Que restrições devo considerar no momento da alocação de polos? Uma consideração padrão é aquela na qual os polos do sistema devem estar dentro do círculo unitário. No entanto, além dessas restrições, existem outras como, por exemplo, resposta transitória, erro de seguimento, robustez, entre outras. Pequenas observações a respeito dessas outras condições serão feitas na última secção desse capítulo.

## 4.4 Princípio do Modelo Interno

Com a discussão feita até momento sobre alocação de polos, foram desconsiderados os efeitos das perturbações determinística no sistema de controle. Nesta secção, será apresentado uma maneira de projetar um sistema de controle no qual o erro de seguimento,  $e(t) = y(t) - y^*(t)$ , tenda assintoticamente a zero, ou seja, como tornar inobservável o efeito da perturbação na saída do sistema de controle.

Com esse objetivo, considere o diagrama do sistema de controle ilustrado na Figura 24, onde foi somada a perturbação,  $d(t)$ , à saída do sistema de controle.

Aplicando o princípio da superposição e usando a transformada-z, a saída,  $Y(z)$ , pode ser escrita em função das duas entradas do sistema,  $Y^*(z)$  e  $D(z)$ , como mostrado na expressão a seguir:

$$Y(z) = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)}Y^*(z) + \frac{1}{1 + G(z)H(z)}D(z) \quad (4.75)$$



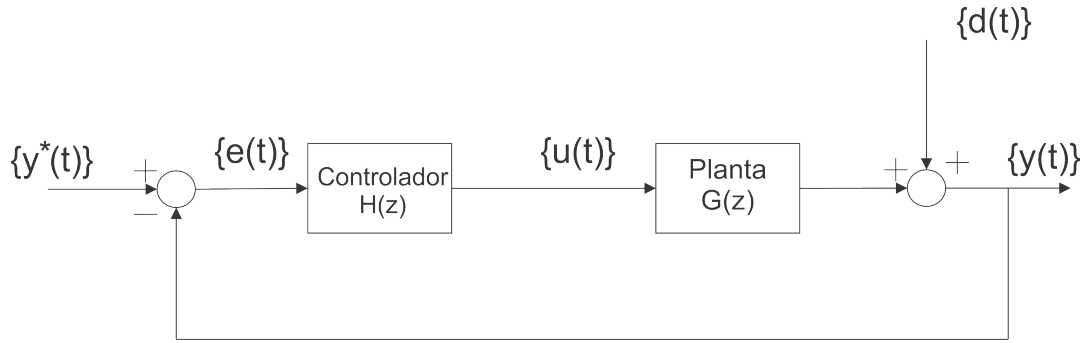


Figura 24 – Sistema de controle na presença de perturbações.

De (4.75), obtém-se a resposta em frequência, fazendo  $z = e^{j\omega}$ , ou seja:

$$Y(z) = \frac{G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})}{1 + G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})}Y^*(e^{j\omega}) + \frac{1}{1 + G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})}D(e^{j\omega})$$

Conclui-se que o efeito da perturbação,  $D(e^{j\omega})$ , será reduzido e saída será igual a  $Y^*(e^{j\omega})$  na faixa de frequência em que o termo  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  tiver norma grande. Na realidade, ao colocar-se polos em determinadas frequências, o valor da função  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  torna-se infinito. Essa ideia é comumente chamada de princípio do modelo interno (do inglês, *internal model principle*). Para o caso de perturbações constantes, inclui-se o termo  $1 - z^{-1}$  na função de transferência  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  o que, conseqüentemente, leva a uma ação integral.

Para a generalização do princípio do modelo interno, com a sua conseqüente aplicação para outras classes de perturbações, considere o modelo do sistema apresentado da seguinte forma:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (4.76)$$

sendo,

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &\triangleq \tilde{A}(q^{-1})D(q^{-1}) \\ B(q^{-1}) &\triangleq \tilde{B}(q^{-1})D(q^{-1}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

e  $D(q^{-1})$  tem raízes no círculo unitário, na frequência que caracteriza a perturbação determinística. Assume-se, também, que os polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são primos entre si.

Definindo a classe do sinal de referimento como sendo a saída do sistema dinâmico expresso por

$$S(q^{-1})y^*(t) = 0 \quad (4.78)$$

e assumindo que  $S(q^{-1})D(q^{-1})$  e  $\tilde{B}(q^{-1})$  são primos entre si, ou seja, que modos que caracterizam o sinal de referência e as perturbações não sejam presentes nas raízes do polinômio  $\tilde{B}(q^{-1})$ . Considerando a lei de controle

$$L(q^{-1})u(t) = -P(q^{-1})y(t) + M(q^{-1})y^*(t) \quad (4.79)$$

e escolhendo  $M(q^{-1})$  e  $L(q^{-1})$  de acordo com o princípio do modelo interno, ou seja,

$$M(q^{-1}) = P(q^{-1}); \quad L(q^{-1}) = L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1}) \quad (4.80)$$

Resolvendo a seguinte equação para a alocação dos polos de malha fechada, para a determinação de  $L'(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$ ,

$$L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + P(q^{-1})\tilde{B}(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) \quad (4.81)$$

resulta em um controlador que tem em sua construção os modos da referência,  $S(q^{-1})$ , e da perturbação,  $D(q^{-1})$ , que é condizente com o princípio do modelo interno.

Observe que existe solução para  $L'(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$  em (4.81) se os polinômios  $S(q^{-1})D(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})$  e  $\tilde{B}(q^{-1})$  são primos entre si. As propriedades do sistema de malha fechada resultante são apresentadas no seguinte lema:

**Lema 18.** *O sistema de controle resultante da aplicação da lei de controle*

$$L(q^{-1})u(t) = -P(q^{-1})y(t) + M(q^{-1})y^*(t)$$

$$M(q^{-1}) = P(q^{-1}); \quad L(q^{-1}) = L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1})$$

tem as seguintes propriedades:

(i)

$$A^*(q^{-1})y(t) = \tilde{B}(q^{-1})P(q^{-1})y^*(t) \quad (4.82)$$

(ii)

$$A^*(q^{-1})D(q^{-1})u(t) = \tilde{A}(q^{-1})D(q^{-1})P(q^{-1})y^*(t) \quad (4.83)$$

(iii)

$$A^*(q^{-1})[y(t) - y^*(t)] = 0 \quad (4.84)$$

(iv)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y^*(t)] = 0 \quad (4.85)$$

(v) Se  $D(q^{-1})$  não tem raízes repetidas, então  $u(t)$  e  $y(t)$  são limitados.

Prova: (i) Multiplicando (4.76) por  $L'(q^{-1})S(q^{-1})$ , tem-se:

$$L'(q^{-1})S(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = L'(q^{-1})S(q^{-1})B(q^{-1})u(t)$$

ou

$$L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) = L(q^{-1})\tilde{B}(q^{-1})$$

usando a lei de controle (4.79)-(4.80), obtém-se

$$\left[ L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + \tilde{B}(q^{-1})P(q^{-1}) \right] y(t) = \tilde{B}(q^{-1})P(q^{-1})y^*(t) \quad (4.86)$$

Com o resultado apresentado em (4.86) e usando (4.81), obtém-se (4.82).

(ii) É obtida de maneira análoga ao item (i), multiplica-se (4.76) por  $P(q^{-1})$  e usa-se a lei de controle (4.79)-(3.44).

(iii) Usando (4.82),

$$A(q^{-1}) \left[ y(t) - y^*(t) + y^*(t) \right] = \tilde{B}(q^{-1})P(q^{-1})y^*(t)$$

ou

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) \left[ y(t) - y^*(t) \right] &= - \left[ A^*(q^{-1}) - \tilde{B}(q^{-1})P(q^{-1}) \right] y^*(t) \\ &= -L'(q^{-1})S(q^{-1})D(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})y^*(t) \\ &= 0 \quad \text{usando (4.78)} \end{aligned}$$

(iv) Consequência do resultado (iii).

(v) Consequência de (i) e (ii).

É importante observar que os resultados obtidos nessa secção foram feitos com a assunção de condições ideais. Quando a entrada e saída entra em saturação, deve-se evitar o efeito conhecido como integral *wind-up*.

Uma interessante interpretação dos resultados obtidos é que as dinâmicas das perturbações que são não controláveis são feitas inobserváveis pela a ação de realimentação.

## 4.5 Considerações de Projeto

Nesta secção serão discutidos algumas considerações a respeito do projeto de sistemas de controle.

1. *Estabilidade*: Do que foi visto na secção de alocação de polos, conclui-se que usando essa técnica é possível estabilizar qualquer sistema linear (com a suposição de que os polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  não apresentem raízes instáveis em comum). De outra forma, com os controladores preditivos, em sua forma mais simples, requer que o sistema inverso seja estável, pois, como foi visto, os polos de malha fechada são alocados na posição dos zeros de malha aberta.

2. *Resposta Transitória*: A resposta transitória de uma sistema de controle depende da posição dos polos de malha fechada, como explicado em detalhes a seguir.

Nos sistema a tempo contínuo, a resposta transitória é caracterizada a partir do amortecimento,  $\zeta$ , e da frequência natural,  $\omega_0$  dos polos dominantes de malha fechada. A Figura RR ilustra a representação gráfica do significado de  $\zeta$  e  $\omega_0$  com respeito a localização dos polos.

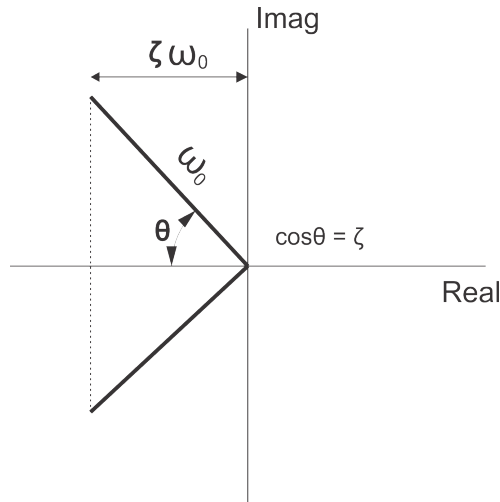


Figura 25 – Raízes de um sistema de segunda ordem, mostrando o significado de  $\zeta$  e  $\omega_0$ .

Para o caso de sistemas contínuos considere as seguintes equação que relacionam parâmetros importantes de sua resposta transitória.

- a. Sobressinal(do inglês, *overshoot*) devido à aplicação de um degrau unitário

$$\simeq \left(1 - \frac{\zeta}{0.6} 100\right) \quad (4.87)$$

- b. Tempo de subida(do inglês, *Rise Time*)(tempo para atingir 90% de seu valor final, partindo de 10%)

$$\simeq \frac{2.5}{\omega_0} \quad (4.88)$$

- c. Tempo de acomodação(do inglês, *Settling time*)(tempo para seu ficar em torno de 1% de seu valor final)

$$\simeq \frac{4.6}{\zeta\omega_0} \quad (4.89)$$

Da teoria de circuitos digitais, sabe-se que usando o método de segurador de ordem zero, ZOH (do inglês, *zero-order hold*), com tempo de amostragem  $\Delta$ , o polo discreto,  $\bar{z}$ , está relacionado com o polo contínuo,  $\bar{s}$ , de acordo com a seguinte equação

$$\bar{z} = e^{\bar{s}\Delta} \quad (4.90)$$

Dessa maneira, as especificações podem ser realizadas como se o sistema fosse tempo contínuo, gerando a localização dos polos, e usando a relação (4.90) traz-se essas especificações para o domínio discreto.

3. *Seguimento de Referência* Analisando o diagrama a blocos da Figura 21, obtém-se a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$G_c(z) = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (4.91)$$

sendo  $G(z)$  e  $H(z)$  as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente, e dadas por

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{L(z^{-1})}$$

Colocando-se  $z = e^{j\omega}$ , tem-se a resposta em frequência do sistema que será

$$G_c(e^{j\omega}) = \frac{G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})}{1 + G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})} \quad (4.92)$$

Levando em consideração a discussão feita anteriormente, um seguimento ideal seria obtido se  $G_c(e^{j\omega}) = 1$  para todos os valores de  $\omega$ , o que não é possível de se obter. No entanto, sabe-se que o valor de  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  pode ser feito igual a 1 em uma faixa de frequência específica, chamada de banda passante. Além disso, é sabido que para se obter um erro permanente nulo para entradas constantes, basta-se introduzir um polo em  $z = 1$  na função de transferência de malha aberta,  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ . Em outras palavras, para fazer  $|G(e^{j\omega_1})H(e^{j\omega_1})| = \infty$  em uma determinada frequência, obtendo, dessa maneira, um seguimento perfeito para sinais de frequência  $\omega_1$ , introduz-se um polo em  $z = e^{j\omega_1}$ .

**4. Robustez** Para a investigação do sistema de controle da Figura 24, considera-se a seguinte função de transferência com relação ao erro  $e(t)$ :

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} [Y^*(z) - D(z)] \quad (4.93)$$

A partir da expressão (4.93), conclui-se que para que se tenha um erro nulo em uma faixa de frequência, é necessário que a função  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  tenha módulo grande, ou seja, aplica-se a mesma regra para o seguimento da referência.

Levando em consideração as variações paramétricas, considere que a função de transferência de malha fechada mudou de  $G(z)$  para  $G'(z)$ , devido a variações nos parâmetros. Dessa maneira, tem-se a seguinte mudança na função de transferência:

$$\begin{aligned} \Delta G_c(z) &= \frac{G'(z)}{1+G'(z)H(z)} - \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)} \\ &= \frac{G'(z)-G(z)}{[1+G(z)H(z)][1+G'(z)H(z)]} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Com isso, pode ser percebido que para haver sensibilidade baixa a variação paramétrica, faz-se necessária que o módulo de  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  seja alto, ou seja, a mesma condição para os casos anteriores.

No entanto, ao se analisar o comportamento do sistema devido ao efeito de dinâmica não modeladas, prefere-se que o valor do módulo de  $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$  seja pequeno. Isto

devido ao fato de que as dinâmicas não modeladas introduzem uma indeterminação na fase do sistema, por isso é necessário que o sistema tenha um ganho pequeno na faixa de frequência na qual a dinâmica do sistema não foi corretamente modelada ou foi simplificada, que geralmente ocorre em altas frequências. Percebe-se, dessa maneira, as escolhas e os limites que um projetista de controle deve enfrentar, ou seja, um bom projetista deve ter em mente os limites da sua modelagem (banda passante do sistema) e a partir dessa informação, deverá projetar um sistema de controle robusto contra variações paramétricas e contra as dinâmicas não modeladas, com a maior banda passante possível e atendendo as especificações de projeto.

## 4.6 Simulações

Para avaliação de algumas das técnicas demonstradas nesse capítulo, serão feitas simulações usando o programa MatLab. Para tanto, foi utilizado o modelo de segunda ordem discreto cuja forma DARMA é apresentada na expressão (4.95).

$$(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2})y(t) = q^{-1}(b_0 + b_1q^{-1})u(t) \quad (4.95)$$

Os valores dos parâmetros foram escolhidos como sendo:  $a_1 = -1.3856$ ,  $a_2 = 0.64$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 0.2$  (Note que esse modelo foi utilizado para demonstração dos algoritmos de estimação no capítulo 2). Observa-se que o atraso,  $d$ , é igual a 1.

Usando-se (4.3) e (4.4) para  $d = 1$ , obtém-se a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\beta(q^{-1})}y^*(t+1) - \frac{\alpha(q^{-1})}{\beta(q^{-1})}y(t) \\ &= \frac{1}{b_0+b_1q^{-1}}y^*(t+1) - \frac{a_1+a_2q^{-1}}{b_1+b_2q^{-1}}y(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

O diagrama do circuito no simulink é apresentado na Figura 26. O sinal de entrada tem amplitude 1 e frequência 1 Hz. O passo de simulação foi 10 ms. Os resultados de simulação são apresentados na Figura 27. Em 27a e 27b, são ilustrados os sinais de entrada (azul) e saída (verde) sendo a última um zoom em torno do instante de transição, destacando que a saída é igual a entrada no instante de tempo seguinte (pois  $d = 1$ ), enquanto que em 27c, é apresentado o sinal de controle.

Note que na Figura 27c o sinal de controle apresenta variações bruscas nos instantes de transição do sinal de entrada. Como dito nesse capítulo, para diminuir a variação do sinal de controle nesses instantes críticos, usa-se o controlador preditivo ponderado. No caso do sistema (4.95) a lei de controle (4.11) resulta em:

$$u(t) = \frac{b_0}{b_0^2 + \lambda} \left( y^*(t+1) - b_2u(t-1) - a_1y(t) - a_2y(t-1) \right) \quad (4.97)$$

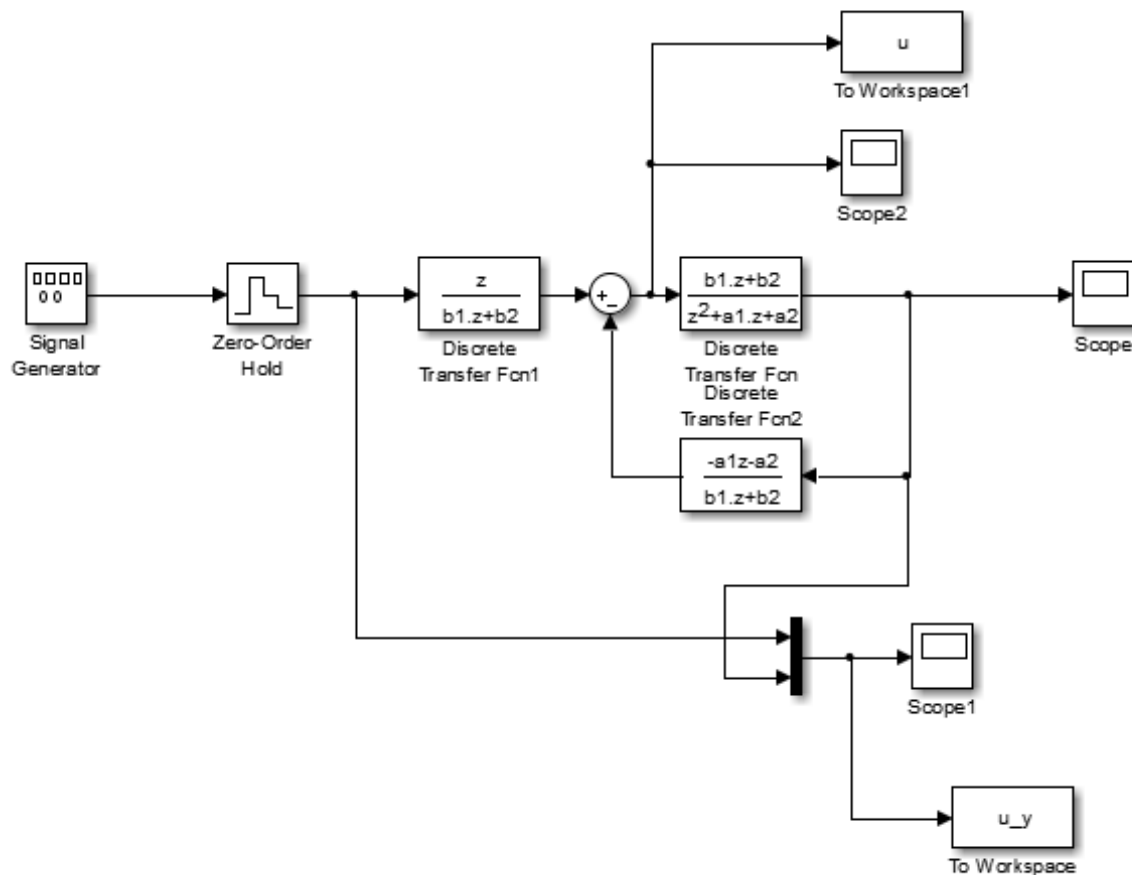


Figura 26 – Diagrama da implementação do controle preditivo usando o simulink.

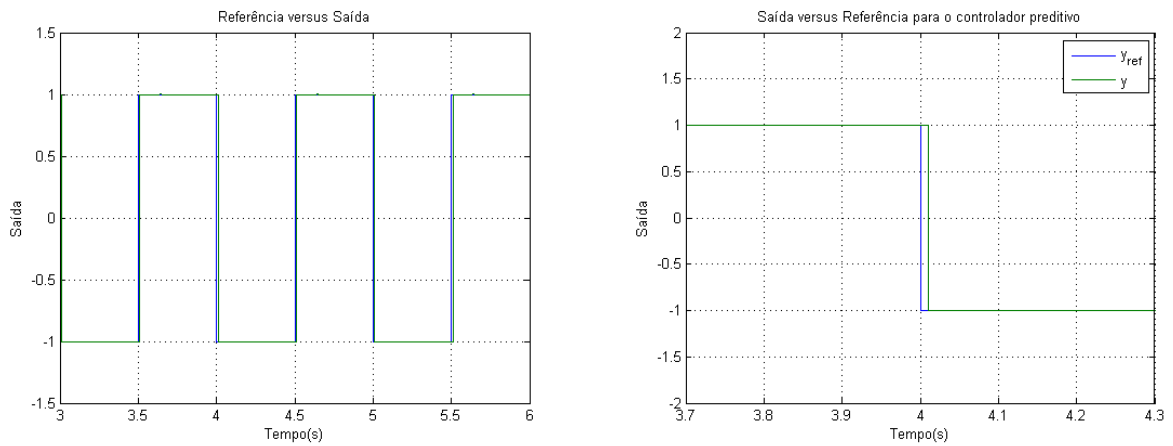
O diagrama do circuito no Simulink é apresentado na Figura 28 e os resultados obtidos com a aplicação dessa técnica são apresentados na Figura 29. Nesse experimento, foi utilizado o valor de  $\lambda = 2$ .

Mostrado o desempenho dos controladores preditivos, no próximo exemplo, será abordado o processo de alocação de polos do sistema (4.95). Como foi visto nesse capítulo, o primeiro passo no processo de alocação de polos é a definição do polinômio de malha fechada, de grau  $2n - 1$ . Dito isso, considere o seguinte polinômio:

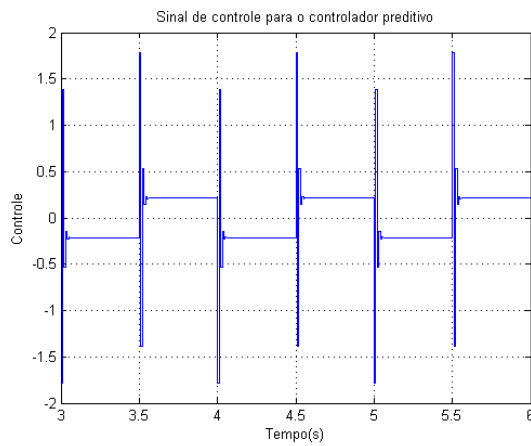
$$A^*(q^{-1}) = 1 - 0.3q^{-1} + 0.3q^{-2} - 0.001q^{-3} \quad (4.98)$$

no qual suas raízes são todas iguais a 0.1, ou seja, deseja-se que a dinâmica do sistema (4.95) seja aquela apresentada em (4.98).

Usando (4.43), obtém-se os coeficientes dos polinômios  $L(q^{-1})$  e  $P(q^{-1})$ . Com esses, usa-se a lei de controle expressa em (4.29), com  $M(q^{-1}) = P(q^{-1})$ , para a obtenção do sistema de malha fechada desejado. O diagrama de blocos do circuito feito no simulink é apresentado na Figura MM, enquanto que seus resultados de simulação são ilustrados na



(a) Sinal de referência e saída para o controle (b) Zoom na transição do sinal de referência e saída.



(c) Sinal de controle.

Figura 27 – Resultados da aplicação da técnica de controle preditivo a planta (4.95)

Figura 31. Nessa, pode-se observar que a velocidade de resposta do sistema sem alocação de polos (azul) é mais lenta que a resposta após a alocação de polos (vermelho) para o polinômio (4.98). A resposta em verde representa a resposta com o controlador *dead beat*, ou seja, quando todos os polos são alocados na origem.



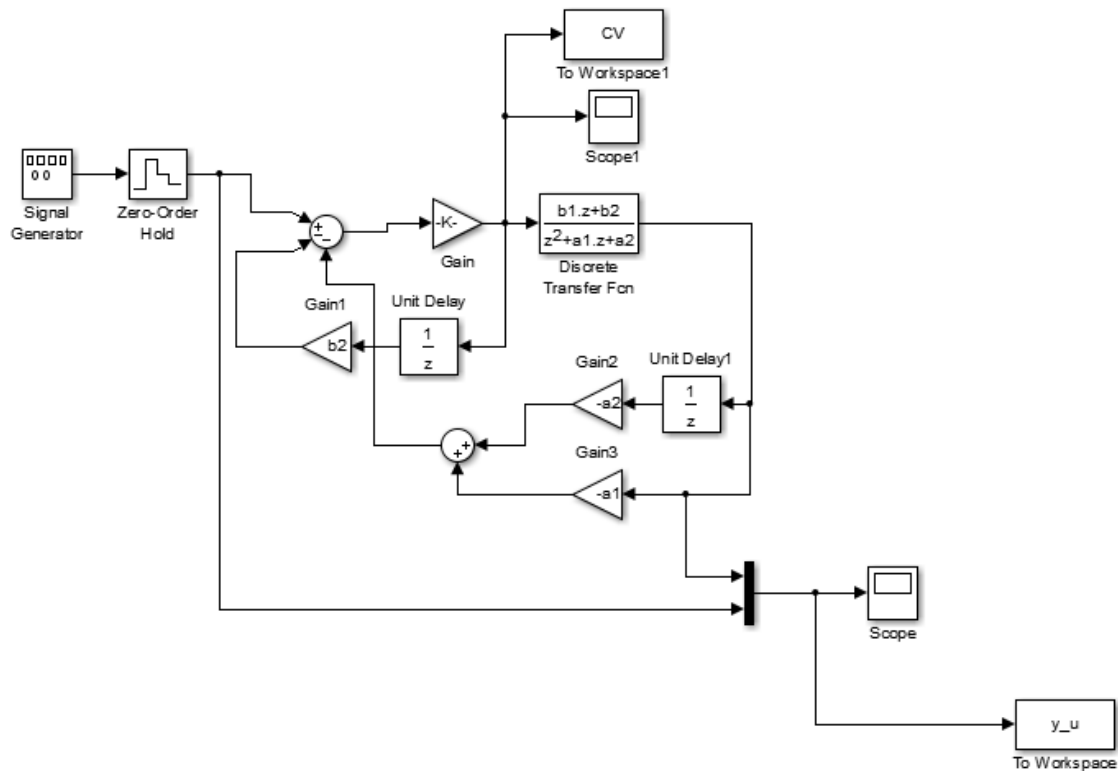
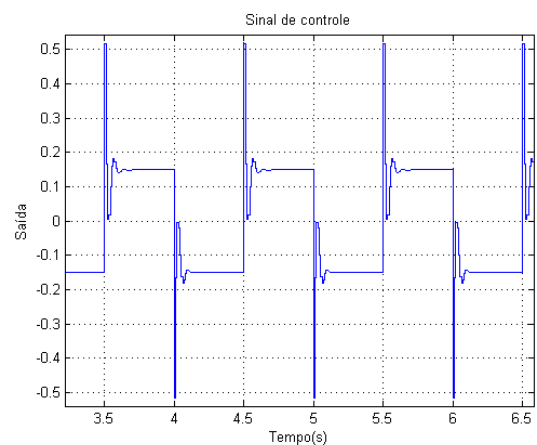
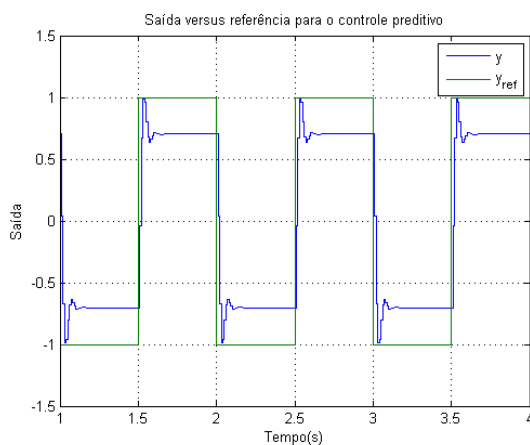


Figura 28 – Diagrama da implementação do controle preditivo ponderado usando o simulink, usando-se  $\lambda = 2$ .



(a) Sinal de entrada e saída para o controle preditivo ponderado. (b) Sinal de controle com a técnica de controle preditivo ponderado.

Figura 29 – Resultados da aplicação da técnica de controle preditivo ponderado na planta (4.95)

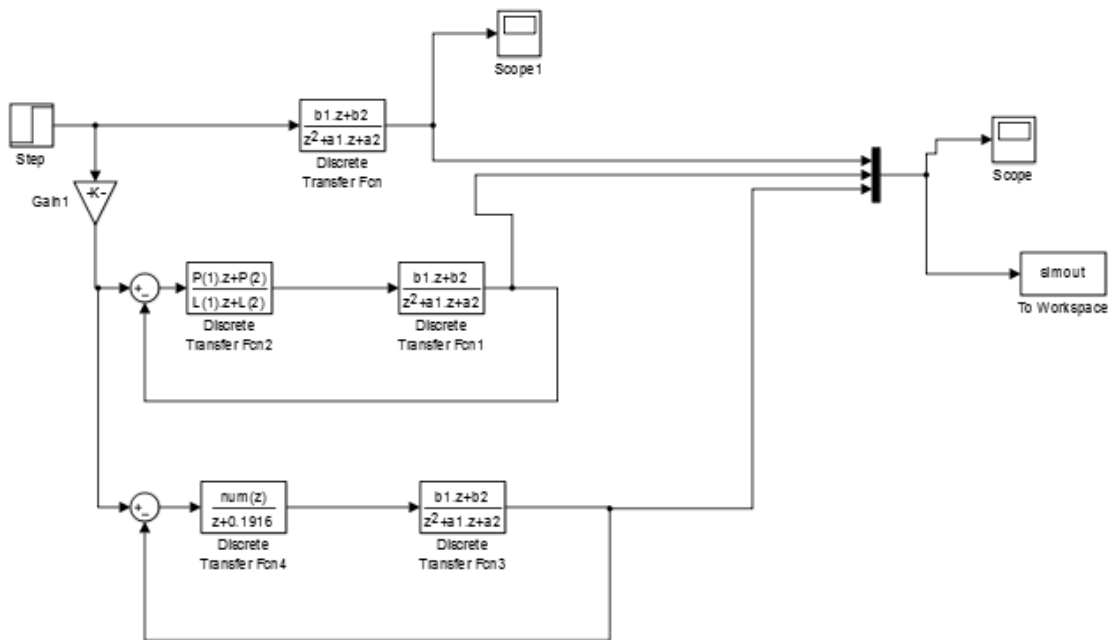


Figura 30 – Diagrama da implementação do processo de alocação de polos usando o Simulink.

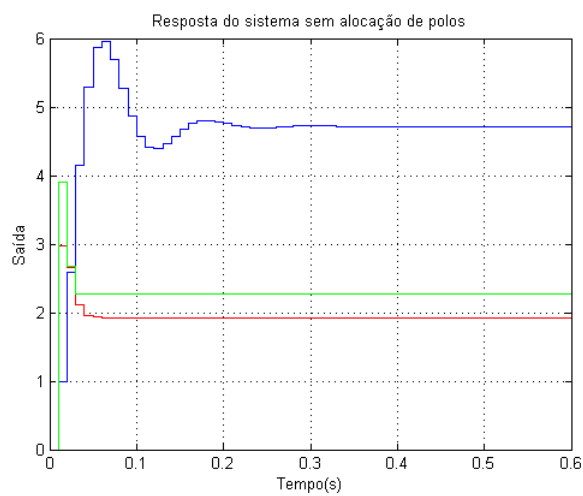


Figura 31 – Comparação da velocidade de resposta do sistema (4.95) com e sem alocação de polos.

## 4.7 Conclusão

Iniciou-se esse capítulo com a apresentação de algumas características que um projetista de sistema de controle deve ter em mente. Estabilidade, resposta transitória, restrições físicas e robustez do sistema de controle foram destacadas, explicitando a importância de cada uma. Posteriormente, apresentou-se a técnica de projeto de controladores preditivos, identificando as restrições de aplicação da mesma. Com o objetivo de expandir a classe de sistemas sujeito a aplicação de técnicas preditivas, foram mostradas a técnica de controle preditivo ponderando e o processo de projeto de controladores baseando-se em modelo de referência.

Outro tópico abordado nesse capítulo foi o processo de alocação de polos, definindo-a como a técnica mais generalista no projeto de sistemas de controle. Primeiramente, foi provado que as técnicas preditivas são, na verdade, um caso especial do processo de alocação de polos quando os polos de malha fechada são alocados na posição dos zeros de malha aberta. Em seguida, foi analisado o algoritmo geral de alocação de polos, ressaltando que esse pode ser visto como um processo de realimentação de estados.

Finalmente, foram construídos modelos no simulink com a finalidade de solidificar alguns dos conceitos apresentados nesse capítulo.

## 5 Conclusão

Com o desenvolvimento desse trabalho, foram aprofundados os conhecimentos da área de controle adaptativo, usando como referência o livro [5]. Estudou-se dois algoritmos de identificação de parâmetros (algoritmo dos mínimos quadrados e algoritmo de projeção), destacando as propriedades matemáticas existentes e definindo as suas condições de convergência.

No Capítulo 3, foi apresentado como transformar um modelo de um sistema linear apresentado na forma DARMA na expressão de um preditor. Além disso, mostrou-se os tipos de predição direta e indireta para ambos os casos, com ou sem restrição, com maior enfoque para os casos sem restrições. As técnicas de identificação estudadas no Capítulo 2 foram aplicadas na construção dos preditores.

Em seguida, prosseguiu-se com o estudo dos controladores preditivos, iniciando-se com o controlador preditivo que minimiza o erro quadrático entre a saída e o valor predito. Para esse controlador foram destacados os pontos críticos, como a possibilidade do sinal de controle ter uma norma muito grande, bem como a limitação da classe de sistemas na qual essa técnica poderá ser aplicada. Visando eliminar essas dificuldades, apresentou-se o controlador preditivo ponderado, no qual se introduz na função de custo um peso no sinal de controle aplicado. Os resultados obtidos mostram que esse controlador é aplicado a uma classe de sistemas maior que o primeiro controlador, porém, não é aplicada para sistemas a fase não mínima. Para finalizar, foi apresentado o sistema de controle baseado no modelo de referência, identificando-o como uma generalização da técnica de controle preditivo.

Ao final do Capítulo 4, apresenta-se o algoritmo de alocação de polos, ressaltando sua importância no projeto de controladores para sistemas lineares. Na verdade, mostrou-se que todas as técnicas de controle preditivo podem ser resumidas a um processo de alocação de polos. Além do mais, foi mostrada a correspondência biunívoca entre o processo de alocação e o processo de realimentação de estados.

# Referências

- [1] Ahmed-Zaid, F., Ioannou, P., Gousman, K., and Rooney, R. Accommodation of failures in the flight control system of the f-16 aircraft using adaptive control. In *American Control Conference, 1990* (May 1990), pp. 764–769. Citado na página 14.
- [2] Astrom, K. J., and Murray, R. M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2008. Citado na página 62.
- [3] BONIVENTO C., M. C., and R., Z. *Sistemi di Controllo Digitale*. Esculapio, 2012. Citado na página 62.
- [4] Butler, H., Honderd, G., and Van Amerongen, J. Model reference adaptive control of a direct-drive dc motor. *Control Systems Magazine, IEEE 9*, 1 (Jan 1989), 80–84. Citado na página 14.
- [5] Goodwin, G. C., and Sin, K. S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Dover Publications, Inc., New York, NY, USA, 2009. Citado 12 vezes nas páginas 14, 30, 32, 44, 54, 56, 63, 64, 68, 75, 76 e 91.
- [6] Landau, Y. D. *Adaptive Control: The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 1979. Citado na página 13.
- [7] O., G., L, M., and S, G. *SISTEMI DINAMICI*. Hoepli, MILANO – ITA, 2008. 438 pagine. Citado na página 62.
- [8] O., G., and S, G. *Controllo di sistemi a più ingressi e più uscite - Volume 2*, vol. 2. Aracne, ROMA – ITA, 2013. Citado na página 61.
- [9] Valeri, F. Model reference adaptive speed control of a dc motor drive. 1994. Citado na página 14.