UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

# APLICAÇÕES DE DERIVADAS

ELIAS SOUTO DOS SANTOS

Cuité - PB

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

# APLICAÇÕES DE DERIVADAS

ELIAS SOUTO DOS SANTOS

Cuité - PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237a Santos, Elias Souto dos.

Aplicações de derivadas. / Elias Souto dos Santos – Cuité: CES, 2012.

37 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2012.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Derivada. 2. Problemas de otimização. 3. Reflexão da luz. I. Título.

CDU 517

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

# Aplicações de Derivada

Elias Souto dos Santos

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 07 de dezembro de 2011.

**Banca Examinadora**

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Co-Orientadora)

Prof. Daniel Cordeiro de Morais Filho

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força que me proporcionou durante esta grande etapa de minha vida.

Agradeço a minha Orientadora Professora Maria Gisélia Vasconcelos pela orientação e pelo apoio incondicional que me proporcionou durante a realização deste trabalho.

Agradeço a professora Márcia Cristina Silva Brito pelas contribuições durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao professor Daniel Cordeiro de Morais Filho por sua disponibilidade e gentileza em participar da banca bem como pelas suas valiosas sugestões.

Agradeço a Jailson pela sua colaboração durante todo o percurso.

À todos os meus amigos da UFCG do Centro de Educação e Saúde, Campus de Cuité, pelas palavras motivadoras e preocupação, em especial Sebastiana de Fátima, Jailson, Ana Cristina e "Sabrina".

É com satisfação que agradeço aos professores da UFCG, Campus Cuité, por contribuírem no meu aprendizado.

A todos os meus amigos que direto ou indiretamente me incentivaram em meus estudos, meu muito obrigado.

A minha esposa maravilhosa Rosiane Silva Ramos, pois sempre esteve presente nas diversas situações. Eu te amo.

Um grande agradecimento à minha família pelo incentivo no meu crescimento acadêmico e profissional, em especial à meu pai Matias José dos Santos e à minha mãe Vera Neyde de Souto.

Agradeço à minha filha Elisiane.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos a definição de derivada de funções de uma variável real, suas interpretações geométrica e analítica e os principais teoremas relacionados. Desenvolvemos aplicações cujas ferramentas básicas são as derivadas. Utilizamos a derivada primeira e segunda para analisar funções. Incluem-se também, técnicas para modelagem e resolução de problemas de otimização, ou seja, problemas nos quais intervém a procura de máximos ou de mínimos. Foi mostrado que a lei da reflexão da luz pode ser deduzida por um argumento de modelagem.

**Palavras-chave:** Derivada. Problemas de Otimização. Reflexão da Luz.

## Abstract

In this work, we present the definition of a derivative of functions of a variable real, its geometric and analytic interpretations and the main related theorems.

We develop applications whose basic tools are derived. We use the first and second derivative to analyze functions. Also included are techniques for modeling and solving optimization problems, that is, problems in which it intervenes the search for maximums or minimums. It was shown that the law of reflection of light can be deduced by a modeling argument.

# Sumário

# Introdução

Iniciamos este trabalho considerando dois problemas aplicados. O primeiro consiste em determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, e o segundo, em definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo. É digno de nota o fato que estas duas aplicações, aparentemente tão diversas, conduzam ao mesmo conceito de derivada. Nosso estudo proporciona uma visão do poder e da generalidade da matemática. Abandonaremos os aspectos físicos e geométrico dos dois problemas e definiremos a derivada como o limite de uma expressão que envolve uma função f. Isto permite, aplicar o conceito de derivada a qualquer quantidade, ou grandeza, que possa ser representada por uma função. Como grandezas desse tipo ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, as aplicações de derivadas são numerosas e variadas mas, em cada caso, está sempre em jogo uma taxa de variação.

Vamos Introduzir o conceito de derivada e estabelecer regras para o respectivo cálculo sem apelar para limites. Utilizaremos derivadas para obter detalhes importantes sobre valores funcionais de uma dada função quando ela varia em um intervalo. Tais dados nos permitirão traçar o gráfico de uma função e descrever com precisão onde ele cresce ou decresce algo que em geral não pode ser obtido com os métodos do pré-cálculo. A determinação desses valores extremos desempenha papel relevante em aplicações que envolvem tempo, temperatura, volume, pressão, consumo de gasolina, poluição do ar e, de modo geral, qualquer quantidade que possa ser representada por uma função. Tais problemas de otimização são considerados, após termos desenvolvido a teoria que relaciona derivadas e valores extremos. Este relacionamento se obtém com o emprego de um dos mais importantes resultados do cálculo: o teorema do valor médio.

# Capítulo 1

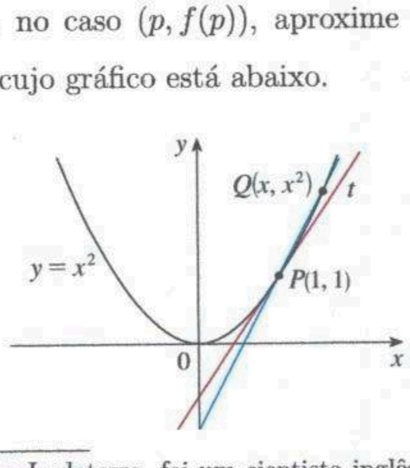
# Motivação

## 1.1 Cálculo Diferencial

As idéias que levam à introdução do conceito de derivada aparecem nos trabalhos de vários autores, num longo período de tempo. Mas foi com Newton[1] e Leibniz[2] trabalhando independentemente um do outro que esse conceito se consolidou. Na obra de Leibniz, a derivada está asssociada ao problema da tangente a uma curva. Já Newton preocupado, com seus estudos de Mecânica, foi levado a introduzir a derivada para caracterizar a velocidade instantânea de um móvel.

**Problema:**

Sendo dada a função $f(x)$. Queremos achar uma função que seja linear e que próxima a um dado ponto, no caso $(p, f(p))$, aproxime a dada função. Para fixar idéias, tomemos $f(x) = x^2$, cujo gráfico está abaixo.




[1]Newton(1643-1727) nasceu na Inglaterra, foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático

[2]Leibniz(1646-1716) foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão.

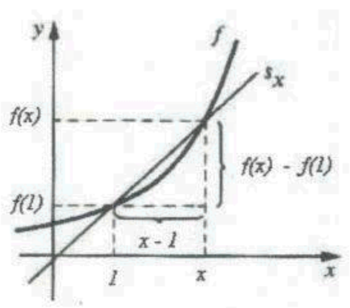
Queremos aproximar localmente, isto é, próximo a um ponto sobre o gráfico, que para ilustração escolhemos $(1, f(1))$, a função dada por uma função linear, isto é, uma função do tipo $h(x) = ax + b$.

Esta função $h(x)$ que queremos encontrar vai depender de $f(x)$ e também do ponto $(1, f(1))$ na vizinhança do qual fazemos a tal da aproximação. Como $f(1)$ fica automaticamente determinado quando fixamos a variável independente 1, podemos dizer que $h(x)$ depende do ponto fixado, no nosso caso 1, e da função dada, no nosso caso $f(x)$.

O cálculo diferencial, inventado por Newton e Leibniz, nos dá a solução para o problema, de maneira prática e elegante, dizendo que a tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(1, f(1))$ é precisamente a função $h(x)$ que estamos procurando.

Consideremos o problema de definir a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1, f(1))$. Evidentemente, tal reta passa pelo ponto $(1, f(1))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular.

Consideremos a reta $s_x$ que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$.




O coeficiente angular é evidentemente o valor limite dos coeficientes angular das secantes que tendem à tangente.

Como o ponto $(x, f(x))$ também está sobre o gráfico de $f(x) = x^2$, sua ordenada é $f(x) = x^2$. Então, o coeficiente angular da secante $s_x$ é dada pela expressão

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

e esta é uma função de $x$. O que devemos calcular é o limite desta função quando $x \to 1$. Em outros termos, para valores de $x$ bem próximos de 1, que valores toma esta função quociente?

No ponto 1, isto é, para $x = 1$, a função não é definida, pois neste caso temos $\frac{0}{0}$, que não é definido em matemática, isto é, um símbolo desprovido de significado.

Mas por outro lado, podemos observar que

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1),\ x \neq 1$$

e agora podemos fazer $x = 1$, obtendo 2. Assim, quando $x$ esta próximo de 1, o valor da função coeficiente angular estará próximo de 2.

De fato, podemos tomar o valor da função coeficiente angular tão próximo de 2 quanto quisermos, bastando para isto tomar $x$ próximo de 1. Se indicarmos a função coeficiente angular como $m(x)$, o resultado acima se exprime dizendo que "o limite de $m(x)$ é 2 quando $x \to 1$"e com a notação

$$\lim_{x\to 1} m(x) = 2$$

Estamos em condições de escrever a equação da tangente, como a reta que passa pelo ponto $(1,1)$, e tem coeficiente angular 2, e obtemos $y = 2x - 1$. Isto quer dizer que a função linear $h(x)$, que procurávamos como solução do problema de aproximar a função $f(x) = x^2$ por uma função linear nas proximidades do ponto $(1,1)$, é dada por $h(x) = 2x - 1$.

Em uma vizinhaça de 1, isto é, para qualquer valor da variável independente $x, f(x)$ e $h(x)$ diferem por uma quantidade que naturalmente depende de $x$ e que representamos por $E(x)$, tal que

$$\lim_{x\to 1} \frac{E(x)}{x-1} = 0.$$

Notemos que, quando $x \to 1$, tanto $E(x)$ quanto $x - 1$ tendem a zero; é o que evidentemente se deveria esperar nesta situação. Ocorre que, num certo sentido, $E(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $x-1$. Ambas as quantidades $E(x)$ e $x-1$ que tendem a zero quando $x \to 1$ são denominadas infinitésimos no ponto 1, que é para onde tende $x$. A condição

$$\lim_{x\to 1} \frac{E(x)}{x-1} = 0$$

é comumente referida como "$E(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a $x - 1$."

Notemos, que tudo acontece bem próximo a 1. Embora possamos utilizar qualquer vizinhança de $x$ e tomar qualquer valor da variável independente $x$, obviamente dentro do domínio da função, o que interessa é o que acontece próximo de 1. Toda a discussão anterior é essencialmente local. Embora a função $h(x)$ seja definida no conjunto de todos os números reais (claro, pois é uma função linear, e o que pode haver de menos complicado?), para valores de $x$ que não estejam bem próximos de 1, o seu valor pode ser enormemente diferente do valor correspondente de $f(x)$. Mas o importante para nós é que quanto mais próximo estiver de 1 melhor a aproximação.

**Exemplo 1.1.1** *Dada $f(x) = x^3 - x$ encontre $h(x)$ linear e que aproxima $f(x)$ no sentido de ser*

$$\lim_{x \to 2} \frac{E(x)}{x-2} = 0,$$

*onde $E(x) = f(x) - h(x)$.*

Devemos, encontrar a declividade da reta secante onde $P = (2, 6)$. O coeficiente angular da reta secante $s_x$ é dada pela expressão, $s_x = \frac{x^3-x-6}{x-2}$ que é uma função de $x$. Calculando o limite desta função quando $x \to 2$, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 3) = 11.$$

Assim, a função linear $h(x)$, que procurávamos como solução do problema de aproximação da função $f(x) = x^3 - x$ por uma função linear nas proximidades do ponto $P = (2, 6)$, é dada por $h(x) = 11x - 16$.

O exemplo acima nos permite encontrar uma função linear que aproxima $f(x)$ conforme desejámos.

Será que não existem outras funções lineares que aproximam $f(x)$ da mesma maneira e que sejam, no entanto, diferentes da que obtivemos. A resposta é negativa, isto é, a função linear que aproxima $f(x)$ na vizinhança de um dado ponto conforme o critério que adotamos, isto é, por um infinitésimo de ordem superior, é única.

A questão da existência de uma tal função de aproximação é particulamente importante. Em outros termos, põe-se a questão da existência do limite que nos dá a declividade. No caso dos polinômios tal limite sempre existe, mas em geral nada se pode afirmar quanta a existência do limite. De fato, há funções para as quais tal limite não existe.

## Derivada de uma função num ponto

Dada uma função $f(x)$, a função linear que aproxima $f(x)$ nas proximidades de um ponto $p$, que denotamos $h(x)$, onde "aproxima"quer dizer:

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0$$

e $E(x) = f(x) - h(x)$, e $x$ deve estar numa "vizinhança "de $p$, obtém-se calculando o coeficiente angular através da fórmula:

$$m_f(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p}.$$

Chamamos $m_f(p)$ **derivada de** $f(x)$ **no ponto** $p$ e a notação usual é $f'(p)$. Observemos que derivada é um número, obtido como o limite acima. Naturalmente, este número depende não só da função $f(x)$ mas também do ponto $p$, perto do qual se quer aproximar a função. Portanto, para cada $p$ temos um valor $f'(p)$, isto é, temos uma função $f'(x)$ com o mesmo campo de definição da $f(x)$ e que chamamos também **derivada de** $f(x)$. No caso de uma função admitir uma derivada num ponto $p$, como é o caso dos polinômios, por exemplo, diremos que a função é **diferenciável no ponto** $p$.

Uma função $f(x)$ é diferenciável no ponto $p$ se existe uma função linear $h(x)$ tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{1}{x-p}(f(x) - h(x)) = 0$$

ou se escrevemos $h(x) = f'(p)x + b$ e lembramos que $b = f(p) - f'(p)p$ então a diferenciabilidade de $f(x)$ no ponto $p$ é a existência de um número $f'(p)$ tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{1}{x-p}\left[f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)\right] = 0.$$

Observemos que tudo se passa nas proximidades de $p$, e que o número $x - p$ que aparece na última expressão é um infinitésimo em $p$. Representamos este número com a notação $dx$ e chamamos **diferencial de** $f(x)$ **no ponto** $p$ **a função** $f'(p)dx$. Notemos que a variável independente aqui é $dx$ e que esta notação tem o mérito de nos relembrar que $dx$ é "pequeno e próximo de $p$"e só!

Observe que $f'(p)dx$ é uma função linear da variável independente $dx$, isto é, uma função do tipo $L(dx) = adx$, onde o coeficiente real $a$ é neste caso $f'(p)$, derivada de $f$ no ponto $p$, às vezes chamamos também **coeficiente diferencial**.

Uma notação frequente para esta função linear é $df(p)$. Assim,

$$df(p) = f'(p)dx.$$

É importante notar que esta notação tem o grave incoveniente de não deixar claro que a variável independente é $dx$.

Podemos repetir a discussão anterior para outros pontos $p$, nos quais a função seja definida e diferenciável, o que quer dizer que o limite do quociente

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

para $x \to p$ existe e é finito.

Então, associado a cada ponto $x$ nestas condições temos uma função, a diferencial de $f$ no ponto $x$, que nada mais é do que a função linear $f'(x)dx$, cuja variável independente é $dx$. Com a notação acima, esta função seria representada por $df(x) = f'(x)dx$.

Uma outra notação bastante usada para função é a seguinte: se representarmos $f(x)$ por $y$, isto é, $y = f(x)$, a diferencial desta função num ponto qualquer $x$ é representada por $dy = f'(x)dx$.

Motivado por essas considerações podemos introduzir uma outra notação para derivada de uma função $f(x)$ num ponto $p$, e que é a seguinte:

$$\frac{df(p)}{dx}$$

ou se escrevemos $y = f(x)$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_p \qquad ou \qquad \frac{dy}{dx}(p).$$

Embora bastante usada e certamente prática, esta notação atribuída a Leibniz, tem o grave incoviniente de "tentar "a pessoa que começa o estudo do cálculo a "simplificar "as coisas e tratar $\frac{dy}{dx}$ como "$dy$ dividido por $dx$ ", o que não faz sentido!

## Diferencial como uma função linear aproximando a função dada

O que fazemos com a diferenciação é substituir a função dada $f$ por uma função que seja simples, isto é, que seja linear e que aproxime a dada função num sentido que já precisamos, ou seja que a diferença entre a função e a aproximante deve ser um infinitésimo de ordem superior.

Dada $f(x)$, procuramos

$$h(x) = f'(p)(x - p) + f(p)$$

tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x - p} = 0,$$

onde

$$E(x) = f(x) - h(x)$$

ou

$$E(x) = f(x) - f'(p)(x - p) - f(p).$$

Qual o objetivo desta aproximação? O que se ganha com isto? Naturalmente, as funções lineares são muito mais manejáveis. Além do mais, elas guardam uma relação de proporcionalidade extremamente conveniente. Isto é, bem ilustrado com um exemplo da mecânica, que era a preocupação de Newton ao inventar o cálculo diferencial.

## Movimento Uniforme

Suponhamos que um automóvel percorra a distância de 150 $km$ em 3 horas. A velociade média do automóvel é obviamente 50 $km/h$.

Mas suponhamos que quiséssemos a velocidade do automóvel num certo instante, por exemplo, quando ele estivesse passando por um ponto $P$ da sua rota. Se o automóvel estiver em "movimento uniforme "durante toda a viagem, então naturalmente a velocidade no instante em que ele passa por $P$ é 50 $km/h$. Mas em geral a velocidade é variável durante o percurso, isto é, temos acelerações e desacelerações ou aceleração negativas (quando se breca, por exemplo).

Uma pessoa, provida de um cronômetro, pode observar o automóvel no ponto $P$ e depois num ponto $Q$, distante 1 $km$ de $P$, e notar que o automóvel levou 1 minuto e meio para percorrer o trajeto de $P$ a $Q$, concluindo que a velocidade em $P$ era de 40 $km/h$. Naturalmente, isto é apenas uma aproximação, e o que se faz é assumir que por um certo instante, no caso 1 minuto e meio, o automóvel estava em movimento uniforme. Quanto menor o tempo em que se "assume "isto, melhor a aproximação. Na prática, podemos proceder do seguinte modo.

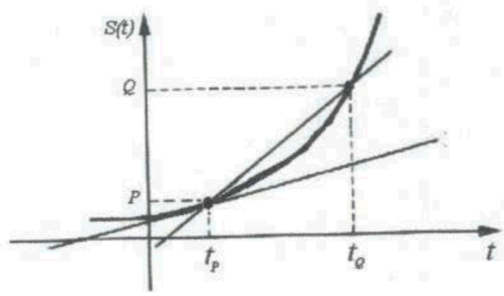
Fazendo um gráfico da distância percorrida em relação o tempo e admitindo que fizemos a "leitura "num número grande de pontos, podemos traçar um gráfico do percurso, que é uma função

$$s = s(t).$$

No caso de movimento uniforme, a curva obtida é uma reta, e o coeficiente angular da reta é a velocidade (uniforme) do automóvel, isto é,

$$s(t) = vt$$

Em geral, a função obtida não é linear. Então para calcular a velocidade no instante $t_P$, que é quando o automóvel se encontra no ponto $P$,




o que se faz é ver quanto tempo o automóvel levou para atingir $Q$ e calcular a velocidade média

$$\frac{Q - P}{t_Q - t_P}.$$

Em outos termos, substituímos a trajetória por uma corda e tratamos o movimento como uniforme. Se fizermos os dois pontos bem próximos, a corda tende à posição tangente e temos uma aproximação "muito boa"do movimento real do automóvel naquele instante $t_P$.

Esse foi essencialmente o modo como raciocinou Newton (naturalmente sem pensar em automóvel!) e que corresponde ao nosso artifício de aproximar $s(t)$ por uma função linear, isto é, um movimento uniforme, nas proximidades do instante $t_P$.

O segredo do cálculo diferencial é aproximar uma dada função por uma função linear nas proximidades de um ponto. O resto é pura técnica, métodos para conseguir esta aproximação e como utilizá-la para os problemas práticos que temos necessidade de resolver em engenharia, física, economia e etc.

# Capítulo 2

# O Cálculo Formal de Derivadas

## 2.1 Derivada

**Definição 2.1.1** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Para $p \in I$, dizemos que $f$ é derivável em $p$ quando existir e é finito o limite, chamado de derivada de $f$ em $p$,*

$$f'(p) : = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

*Dizemos que $f$ é derivável em $I$ quando ela é derivável em todos os pontos de $I$.*

A derivada de $f$ em $p$ também é denotada por

$$\frac{df}{dx}(p) = f'(p)$$

Segue das propriedades dos limites que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \qquad \text{ou} \qquad f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

**Exemplo 2.1.1** *Se $f(x) = k$ uma função constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x$. ( A derivada de uma constante é zero).*

De fato, por definição temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

**Exemplo 2.1.2** *Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$ para todo $x$.*

De fato, por definição temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x-h) - x}{h} = 1$$

**Exemplo 2.1.3** *Se $f(x) = \sqrt{x}$, encontre a derivada de $f$. Estabeleça o domínio de $f'$.*

De fato, por definição temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x-h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x-h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

O domínio de $f$ é dado por: $D(f') = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

- Uma função $f$ é derivável no ponto p se, e somente se, existem e são iguais as derivadas à direita e à esquerda com $f'(p) = f'_+(p) = f'_-(p)$.

**Teorema 2.1.1** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Se $f$ é derivável em $p \in I$, então $f$ é contínua em $p$.*

**Prova:**

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p);\ x \neq p$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to p} [f(x) - f(p)] &= \lim_{x\to p} \left[ \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \cdot (x-p) \right] \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \cdot \lim_{x\to p} (x-p) = f'(p) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f$ é contínua em $p$.

□

O teorema mostra que a diferenciabilidade em um ponto implica a continuidade no mesmo ponto. Porém a recíproca da proposição é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis.

**Exemplo 2.1.4** *A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável em $x = 0$.*

De fato, vejamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h},$$

não existe.

Calculemos os limites laterais

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad e \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Portanto, não existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h},$$

ou seja, não existe $f'(0)$.

**Definição 2.1.2** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e seja $p \in I$. Dizemos que uma função $f$ é $n$ vezes derivável quando podemos derivar sucessivamente $f$ por $n$ vezes. Nesse caso, a $n$-ésima derivada ( ou derivada de ordem $n$ ) de $f$ é denotada por*

$$f^n(p) = \left(f^{n-1}(p)\right)'$$



## 2.1.1 Interpretações Geométrica e Analítica da Derivada

Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e derivável em $p \in I$.

### Significado Analítico da Derivada

A derivada $f'(p)$ é o fator de proporcionabilidade aproximado entre as variações da função $f$ e de seu argumento nas vizinhanças do ponto $p$.

Para caracterizar essa interpretação, definimos a função

$$E(x) := f(x) - f(p) - f'(p) \cdot (x - p), \; x \in I.$$

Então,

$$f(x) = f(p) - f'(p) \cdot (x - p) + E(x), \ \lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x - p} = 0$$

Para $x \in I \setminus \{p\}$ suficintemente próximo de $p$ o valor de $\frac{E(x)}{x-p}$ passa ser desprezível, temos

$$f(x) - f(p) \simeq f'(p)(x - p).$$

$E(x)$ será o erro que se comete na aproximação de $f$ pela reta tangente em $(p, f(p))$.

**Significado Geométrico de Derivada**

A derivada $f'(p)$ é a inclinação da reta secante ao gráfico de $f$ em $(p, f(p))$.

Para caracterizar essa interpretação, definimos a função

$$m : I \setminus \{p\} \to \mathbb{R}, \ m(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Para $x \in I \setminus \{p\}$, $m(x)$ é a inclinação da reta secante ao gráfico de $f$ que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$, a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $p$ é a reta limite de tais secantes quando $x \in I \setminus \{p\}$ tende para $p$, portanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $p$ é dada pelo limite de $m(x)$ quando $x$ tende para $p$, donde

$$f'(p) = \lim_{x \to p} m(x).$$

- As duas interpretações acima significam que a derivada da função $f$ no ponto $p \in I$ define uma aproximação linear dessa função em torno desse ponto:

  $$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$$

  Então:

  (i) o gráfico de $T$ é tangente ao gráfico de $f$ em $(p, f(p))$;

  (ii) os valores de $T(x)$ aproximam os valores de $f(x)$ para $x \in I$ suficientemente próximo do ponto $p$.

### 2.1.2 Linearização e Diferencial

**Definição 2.1.3** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, e derivável em $p \in I$.* **A diferencial de $f$ em $p$** *é o operador linear definido por*

$$df(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ df(p)x := f'(p)x$$

A diferencial de $f$ num ponto $p$ define a relação entre as variações da função e de sua variável em torno de $p$ se escrevemos $y = f'(x)$, então as variações médias de $y$ decorrentes de variação finitas de $x$ em torno de $p$ são dadas por:

$$\triangle y = f(p + \triangle x) - f(p) \approx f'(p) \triangle x = df(p) \triangle x$$

Intuitivamente, essa aproximação torna-se uma igualdade quando as variações são infinitésimais: se $dx$ denota uma variação infinitesimal da variável $x$ e $dy$ uma variação infinitesimal da função $y$, então

$$dy = f'(p)dx$$

Essa é notação usual para diferencial de uma função.

- Diferencial é um operador linear e a derivada é um número:
- A linearização de uma função define sua melhor aproximação linear possível:

### 2.1.3 Regras de Derivação

**Teorema 2.1.2** *Se $n$ for um inteiro positivo, então $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.*

**Prova:**

Seja,

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})$$

Daí,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} \\ &= \lim_{y \to x} \frac{(y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y - x} \\ &= \lim_{y \to x} \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})}_{n \text{ vezes}} \\ f'(x) &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

□

Como vemos essa análise só se aplica quando $n$ é inteiro positivo. Não obstante, essa regra é verdadeira, qualquer que seja o número $n$, positivo, negativo, racional ou irracional.

**Exemplo 2.1.5** .

1. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

2. $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}$

3. $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$

Daqui por diante usaremos a regra em todos os casos, com $n$ real qualquer.

**Teorema 2.1.3 (Propriedades Algébricas da Derivada)** *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $f$ e $g$ são deriváveis em $p \in \mathbb{R}$ então:*

1. *Para toda constante $c \in \mathbb{R}, cf$ é derivável em $p$ e vale*

$$(cf)'(p) = cf'(p).$$

2. *$f + g$ é derivável em $p$ e vale*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$$

3. *$f \cdot g$ é derivável em $p$ e vale*

$$(f\cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

4. *Se $g(p) \neq 0, \frac{f}{g}$ é derivável em $p$ e vale*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

**Prova:**

1.

$$\begin{aligned}(cf)'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(p+h) - cf(p)}{h} = \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(p-h) - f(p)}{h}\right]\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = cf'(p)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(f+g)'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(p+h)+g(p+h)]-[f(p)+g(p)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(p+h)-f(p)]+[g(p+h)-g(p)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(p+h)-f(p)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(p+h)-g(p)]}{h}\\ &= f'(p)+g'(p).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)\cdot g(p+h)-f(p)\cdot g(p)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)\cdot g(p+h)-f(p+h)\cdot g(p)+f(p+h)\cdot g(p)-f(p)\cdot g(p)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[f(p+h)\cdot\frac{g(p+h)-g(p)}{h}+g(p)\cdot\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}f(p+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h}+\lim_{h\to 0}g(p)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\\ &= \left[\lim_{h\to 0}f(p+h)\right]\cdot g'(p)+\left[\lim_{h\to 0}g(p)\right]\cdot f'(p)\\ &= f(p)\cdot g'(p)+g(p)\cdot f'(p)\end{aligned}$$

Como $f$ é derivável em $p$ segue do Teorema 2.1.1, que $f$ é contínua em $p$, daí $f(p+h)\to f(p)$ quando $h\to 0$.

4.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(p+h)}{g(p+h)}-\frac{f(p)}{g(p)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)\cdot g(p)-f(p)\cdot g(p+h)}{h\cdot[g(p)\cdot g(p+h)]}.\end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se ao numerador o termo $f(p)\cdot g(p)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)\cdot g(p)-f(p)\cdot g(p)+f(p)\cdot g(p)-f(p)\cdot g(p+h)}{h\cdot g(p)\cdot g(p+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(p)\cdot\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\right]-\left[f(p)\cdot\frac{g(p+h)-g(p)}{h}\right]}{g(p)\cdot g(p+h)}\\ &= \frac{g(p)\cdot f'(p)-f(p)\cdot g'(p)}{[g(p)]^2}.\end{aligned}$$

Como $g$ é derivável em $p$ segue do Teorema 2.1.1, que $g$ é contínua em $p$, daí $g(p+h)\to g(p)$ quando $h\to 0$. $\square$

**Teorema 2.1.4 (Regra da Cadeia)** *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ função definidas em intervalos tais que $f(I) \subset J$. Se $f$ é derivável em $p \in I$ e $g$ é derivável em $f(p)$, então $g \circ f$ é derivável em $p$ e vale*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p))\, f'(p)$$

*Na notação de Leibniz*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}.$$

**Prova:**

Suponhamos inicialmente que $f'(p) \neq 0$. Neste caso temos que $f(x) \neq f(p)$ para todo $x$ suficientemente próximo de $p$. Logo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{f(x) - f(p)} \frac{f(x) - f(p)}{x-p}.$$

Aplicando o $\lim\limits_{x \to p}$ obtemos

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p))\, f'(p).$$

Por outro lado, se for $f'(p) = 0$ então, para $x$ próximo de $p$, ou ocorre que $f(x) = f(p)$, e neste caso $g(f(x)) = g(f(p))$, e daí,

$$\lim_{x \to p} \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = 0 = g'(f(p)) \cdot 0 = g'(f(p))\, f'(p),$$

ou ocorre $f(x) \neq f(p)$, portanto, vale

$$\frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{f(x) - f(p)} \frac{f(x) - f(p)}{x-p}.$$

Teremos

$$\lim_{x \to p} \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = \lim_{x \to p} \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{f(x) - f(p)} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} = 0.$$

Assim, em qualquer situação temos a validade da fórmula

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p))\, f'(p).$$

É importante observar que na passagem ao limite usamos o fato de que, quando $x \to p$, temos $f(x) \to f(p)$, pela continuidade de $f$ em $p$. $\square$

## Máximos e Mínimos

**Definição 2.1.4** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$; seja $p \in I$.*

1. Dizemos que $f(p)$ é valor **máximo absoluto** de $f$ ou que $p$ é um **ponto de máximo absoluto** de $f$ se $f(x) \leq f(p)$; $\forall x \in I$

2. Dizemos que $f(p)$ é valor **mínimo absoluto** de $f$ ou $p$ é um **ponto de mínimo absoluto** de $f$ se $f(x) \geq f(p)$; $\forall x \in I$

**Teorema 2.1.5 (Teorema de Weiesrstrass)** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo fechado. Então $f$ possui pontos de mínimo absoluto e máximo absoluto em $[a, b]$, isto é:*

$$\exists\ x_0, x_1 \in [a, b] \mid f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1),\ \forall x \in [a, b],$$

**Prova:** Ver [6]

**Definição 2.1.5** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$; seja $p \in I$.*

1. *$p$ é chamado* **ponto de mínimo local** *de $f$ quando $f(p)$ é o valor mínimo de $f$ numa vizinhança de $p$, isto é:*

$$\exists\ \epsilon > 0 \mid x \in I, \mid x - p \mid < \epsilon \Rightarrow f(x) \geq f(p)$$

2. *$p$ é chamado* **ponto de máximo local** *de $f$ quando $f(p)$ é o valor máximo de $f$ numa vizinhança de $p$, isto é:*

$$\exists\ \epsilon > 0 \mid x \in I, \mid x - p \mid < \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(p)$$

3. *$p$ é chamado* **extremo local ou relativo** *de $f$ se $p$ for um ponto de máximo local ou mínimo local.*

**Teorema 2.1.6** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que é derivável no interior de $I$. Se $p \in I$ é um extremo local de $f$. Então $f'(p) = 0$.*

**Prova:**

Suponhamos que $f$ tenha máximo local em $p$.

Então, $f(p) \geq f(x)$ se $x$ estiver suficientemente próximo de $p$, o que implica que se $h$ estiver suficientemente próximo de 0, $h$ sendo positivo ou negativo, então $f(p) \geq f(p+h)$ e, portanto,

$$f(p+h) - f(p) \leq 0 \tag{2.1}$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e $h$ for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Como $f$ é derivável , temos

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(p) \leq 0$.

Se $h < 0$, então inverte-se o sentido da desigualdade (2.1) quando dividimos por $h$:

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \geq 0$$

Logo, tomando o limite esquerdo, temos

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \geq 0$$

Mostramos que $f'(p) \geq 0$ e também que $f'(p) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(p) = 0$. Provamos o Teorema para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser provado de forma análoga.

$\square$

- O teorema garante que se a primeira derivada de uma função existe em um ponto interior que seja extremo local (máximo ou mínimo local), então ela se anula.

Assim, os únicos pontos onde uma função $f$ pode ter valores extremos (locais ou globais) são:

1. pontos interiores onde $f' = 0$
2. pontos interiores onde $f'$ não existe
3. extremidades do domínio de $f$.

**Definição 2.1.6** *Um ponto $p \in D_f$ onde $f'(p) = 0$ ou $f'(p)$ não existe é dito* **ponto crítico** *de $f$.*

- Os extremos relativos de uma função se houver ocorrem em pontos críticos.

**Diretrizes para determinar os extremos absolutos de uma função contínua $f$ em $[a, b]$**

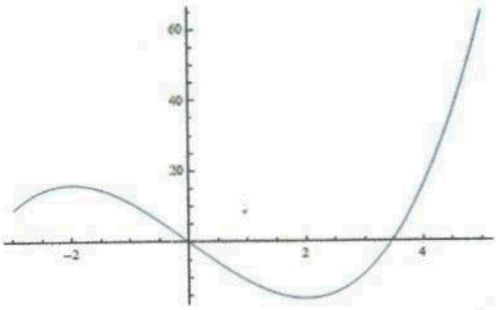
1. Calcule $f$ em todos os pontos críticos e extremos do intervalo.
2. Tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

**Exemplo 2.1.6** *Se $f(x) = x^3 - 12x$, determinar os valores máximos e mínimos de $f$ no intervalo fechado $[-3, 5]$ e esboçar o gráfico de $f$.*

Observe que $f$ é contínua em toda parte e, portanto, o Teorema de Weierstrass garante que $f$ tem um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[-3, 5]$.
Derivando $f$, obtemos $f'(x) = 3x^2 - 12$.
Assim, $f'(x) = 0$ em $x = 2$ e $x = -2$. Calculando o valor de $f$ nesses pontos críticos e nos extremos do intervalo, obtemos

$$\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16 \\
f(-3) &= (-3)^3 - 12 \cdot (-3) = 9 \\
f(2) &= 2^3 - 12 \cdot 2 = -16 \\
f(5) &= 5^3 - 12 \cdot 5 = 65
\end{aligned}$$

do que concluímos que o valor mínimo absoluto de $f$ em $[-3,5]$ é $-16$ e ocorre em $x=2$, e o valor máximo absoluto de $f$ em $[-3,5]$ é 65 e ocorre em $x=5$.



- Embora os valores extremos de uma função possam ocorrer em pontos críticos e extremidades nem todo ponto crítico ou extremidade indica a presença de um valor extremo.

### 2.1.4 O Teorema do Valor Médio

O teorema de Rolle e o teorema do Valor Médio são teoremas de existência isto é, teoremas que garantem que "sob certas condições existem certos elementos satisfazendo certas propriedades"; esses teoremas não dizem como calcular aquilo que garantem que existe, mas há algoritmos gerais que realizam isso.

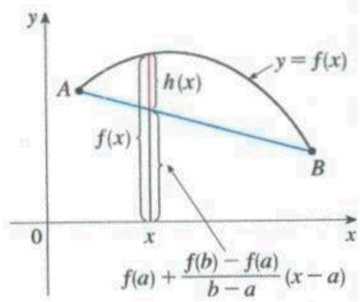
**Teorema 2.1.7 (Teorema de Rolle)** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $(a,b)$. Se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

**Prova:**

Pelo teorema de Weierstrass, $f$ atinge seu valor máximo $M$ e seu valor mínimo $m$ em pontos de $[a,b]$. Se esses pontos forem $a$ e $b$ então $m = M$ e $f$ será constante, daí $f(x) = 0$ para qualquer que seja $x \in (a,b)$. Se um desses pontos, digamos $c$ estiver em $(a,b)$ então $f'(c) = 0$ . □

Geometricamente, para uma função derivável que se anula nos extremos do intervalo em que está definida, o teorema de Rolle garante que seu gráfico possui um ponto cuja reta tangente é paralela ao eixo-x.

**Teorema 2.1.8 (Teorema do Valor Médio)** *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* $(a,b)$. *Então existe um número* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}$.




A figura acima sugere que o teorema do Valor Médio será válido em um ponto $c$ no qual a distância entre a curva e a reta secante for máxima. Assim, para provar o teorema, é natural começar por uma fórmula para a distância vertical $h(x)$ entre a curva $y = f(x)$ e a reta secante ligando os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

**Prova:**

Como a equação da reta secante que passa por $A$ e $B$ é $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a)$ ou, de forma equivalente,

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a) + f(a)$$

a diferença $h(x)$ entre a altura do gráfico de $f$ e a reta secante é

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a) + f(a)\right] \tag{2.2}$$

Como $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $(a,b)$, $h(x)$ também o é. Além disso, $h(a) = 0$ e $h(b) = 0$.

Logo, $h(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a,b]$. Portanto, existe um ponto $c$ em $(a,b)$ tal que $h'(c) = 0$. Mas, a partir da equação (2.2),

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Assim,

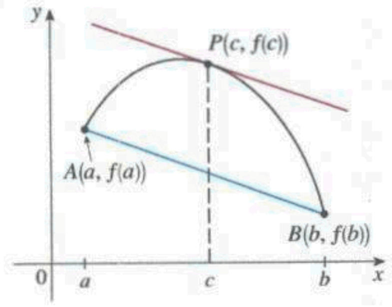
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Como $h'(c) = 0$, temos

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

□

Geometricamente, para uma função contínua num intervalo fechado e derivável no interior deste intervalo, o Teorema do Valor Médio garante que o gráfico desta função possui um ponto cuja reta tangente é paralela à secante que une os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.




**Definição 2.1.7** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num subconjunto $I \subset \mathbb{R}$.*

1. *$f$ é* **crescente** *em $I$, se quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ em $I$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. *$f$ é* **decrescente** *em $I$, se quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ em $I$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

**Teorema 2.1.9** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então*

1. *$f$ é crescente nos subintervalos de $I$ onde sua derivada $f'$ é positiva.*

2. *$f$ é decrescente nos subintervalos de $I$ onde sua derivada $f'$ é negativa.*

**Prova:**

1. Seja $[a, b]$ um subintervalo de $I$ e sejam $x_1$ e $x_2$ pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. Precisamos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Como as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas em todo o intervalo $[a, b]$, também estão no subintervalo $[x_1, x_2]$. Assim, há algum ponto $c$ no intervalo aberto $(x_1, x_2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.3}$$

ou, de forma equivalente,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $c$ está no intervalo aberto $(x_1, x_2)$, tem-se que $a < c < b$; portanto, $f'(c) > 0$. Porém como $x_1 < x_2$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$ segue, a partir de (2.3) que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou, equivalente, $f(x_1) < f(x_2)$, que é o que queríamos provar.

2. Seja $[a, b]$ um subintervalo de $I$ e sejam $x_1$ e $x_2$ pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. Precisamos mostrar que $f(x_1) > f(x_2)$. Como as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas em todo o intervalo $[a, b]$, também estão no subintervalo $[x_1, x_2]$. Assim, há algum ponto $c$ no intervalo aberto $(x_1, x_2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.4}$$

ou, de forma equivalente,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $c$ está no intervalo aberto $(x_1, x_2)$, tem-se que $a < c < b$; portanto, $f'(c) < 0$. Porém como $x_1 < x_2$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$. Segue, a partir de (2.4), que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ ou, equivalente, $f(x_1) > f(x_2)$, que é o que queríamos provar.

□

## Classificação dos pontos críticos

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$; seja $p \in I$ um ponto crítico de $f$.

### Teste da Primeira Derivada

1. Se $f'$ é negativa numa vizinhança à esquerda de $p$ e positiva numa vizinhança à direita de $p$, então $p$ é um ponto de mínimo local de $f$;

2. Se $f'$ é positiva numa vizinhança à esquerda de $p$ e negativa numa vizinhança à direita de $p$, então $p$ é um ponto de máximo local de $f$;

3. Se $f'$ tem o mesmo sinal numa vizinhança à esquerda e à direita de $p$, então $p$ não é extremo local de $f$.

**Teste da Segunda Derivada**

Considerando que $f$ seja duas vezes derivável em $p$, então:

1. $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local de $f$

2. $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local de $f$

3. $f'(p) = 0$ e $f''(p) = 0 \Rightarrow$ o teste é inconclusivo.

Como o teorema considera apenas as derivadas da função nas vinzinhanças de um ponto, ele só pode nos dar informações locais; portanto, para determinar extremos globais é necessário fazer uma análise mais ampla da função, além de simplesmente caracterizar seus pontos críticos.

## Concavidade e Ponto de Inflexão

**Teorema 2.1.10** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então,*

1. *A concacidade de $f$ está voltada para cima nos subintervalos de $I$ onde sua derivada é crescente se $f$ for duas vezes derivável, essa condição equivale à propriedade da derivada segunda $f''$ ser positiva.*

2. *A concacidade de $f$ está voltada para baixo nos subintervalos de $I$ onde sua derivada é decrescente se $f$ for duas vezes derivável, essa condição equivale a propriedade da derivada segunda $f''$ ser negativa.*

**Definição 2.1.8** *Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in I$.*

*Dizemos que $p$ é um* **ponto de inflexão** *de $f$ se existem números reais $a$ e $b$ com $p \in (a, b) \subset I$ tais que $f$ tenha concavidade de nomes contrários nos intervalos $(a, p)$ e $(p, b)$.*

# Capítulo 3

# Modelagem e Otimização

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximos ou mínimos de uma função.

1. **Compreenda o problema.** Leia o problema atentamente. Identifique as informações necessárias para resolvê-lo. O que é desconhecido? O que é dado? O que é pedido?

2. **Desenvolva um Modelo Matemático para o problema.** Desenhe figuras e indique as partes que são importantes para o problema. Introduza uma variável para representar a quantidade a ser maximinizada ou minimizada. Utilizando essa variável, escreva uma função cujo o valor extremo forneça a informação pedida.

3. **Determine o Domínio de função.** Determine quais valores da variável tem sentido no problema. Se possível, esboce o gráfico de função.

4. **Identifique os Pontos Críticos e as Extremidades.** Determine onde a derivada é zero ou não existe. Utilize aquilo que você sabe sobre a forma de gráficos de uma função e sobre a física do problema. Use a primeira e a segunda derivada para identificar a classificar os pontos críticos (onde $f' = 0$ ou $f'$ não existe).

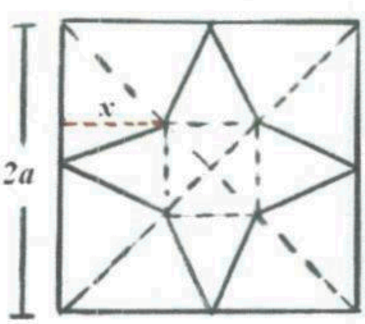
5. **Resolva o Modelo Matemático.** Se não estiver seguro sobre o resultado, utilize outro método para confirmar ou embasar sua solução.

6. **Interprete a Solução.** Traduza seu resultado matemático de volta para a linguagem original do problema e decida se o resultado tem sentido ou não.

# 3.1 Aplicações

## Otimização

**Problema 3.1.1** *Dado um quadrado de cartolina de lado 2a, traçamos as diagonais e marcamos sobre ela quatro pontos equidistantes do centro. A seguir ligamos estes quatro pontos aos pontos médios dos lados vizinhos.*




*Como devem ser escolhidos os quatro pontos para que, cortando o cartão ao longo das linhas e colando os triângulos assim obtidos, a pirâmide que resulta tenha volume máximo?*

Temos que o volume de uma pirâmide qualquer é dada por,

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h,$$

Vamos tomar $x$ como sendo a distância do lado do quadrado de lado $2a$ aos pontos pertencentes às diagonais e que são equidistantes do centro e considerando o volume da pirâmide $V$ como uma função de $x$. Observando a figura vemos que a área da base da pirâmide ($A_b$) é igual a área de um quadrado de lado $l = 2(a-x)$ e assim $A_b = 4(a-x)^2$, vemos também que o apótema da base da pirâmide, o apótema da pirâmide e a altura $h$ da pirâmide forma um triângulo retângulo e assim,

$$h = \sqrt{2ax - a^2}$$

e portanto,

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{4}{3}(a-x)^2 \cdot \sqrt{2ax - a^2}$$

A variável $x$ satisfaz a função acima no seguinte intervalo, $\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a$. Dessa forma, reduzimos nosso problema ao de encontrar o valor de $x$ no intervalo $[\frac{a}{2}, a]$ para qual o volume é máximo. Daí temos,

$$V'(x) = \frac{4}{3} \frac{a(a-x)(3a-5x)}{\sqrt{2ax - a^2}}$$

Igualando $V'$ a zero temos, $x = a$ e $x = \frac{3a}{5}$.
O único candidato é portanto $\frac{3a}{5}$ e neste ponto a função $V(x)$ toma o seu valor máximo, pois nos extremos $a$ e $\frac{a}{2}$ o volume da pirâmide é zero.

## Modelagem Matemática

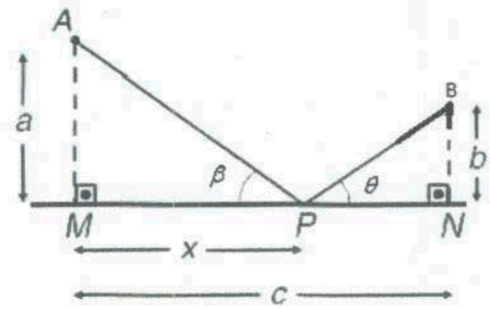
## O Princípio de Fermat [1]

O Princípio de Fermat, da Ótica Geométrica, afirma que o caminho seguido por um raio de luz que vai de um ponto $A$ até um ponto $B$ é aquele que torna mínimo o tempo de percurso entre esses pontos. Em outras palavras dentre todos os caminhos possíveis ligando $A$ a $B$, a Natureza escolhe aquele que o raio de luz pode percorrer no menor tempo possível.

**Problema 3.1.2** *(O Princípio de Fermat na ótica) O princípio de Fermat da ótica diz que a luz sempre se propaga de um ponto a outro por um trajeto que minimiza o tempo de propagação. A luz emitida por uma fonte $A$ é refletida por um espelho plano para um observador em um ponto $B$, como se vê na figura a seguir: Para que a luz obedeça o princípio de Fermat, demonstre que o ângulo de incidência deve ser igual ao*

[1] Fermat(1601-1665) nasceu na França. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas suas horas de lazer, e mesmo assim, foi considerado por Blaise Pascal o maior matemático de seu tempo.

*ângulo de reflexão, ambos medidos a partir da linha normal até a superfície refletora do espelho.*




Sejam $a, b$ e $c$ as distâncias indicadas na figura, com $a > 0$, $b > 0$, e $c > 0$. Consideremos que o ponto $P$ assuma várias posições no espelho, sendo cada posição determinada por um valor $x$. Os ângulos $\beta$ e $\theta$ são respectivamente os ângulos de incidência e de reflexão. Desejamos considerar o comprimento $L$ do percurso $AP + PB$ como uma função de $x$. A partir da figura, fica claro que essa função tem a seguinte expressão:

$$L(x) = AP + PB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

Essa função expressa $L$ como uma função derivável de $x$ cujo domínio é $[0, c]$ e o que queremos determinar é o valor mínimo absoluto de $L$ nesse intervalo fechado.

Derivando $L$ duas vezes temos,

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \\ L''(x) &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + (c - x)^2)^3}} \end{aligned}$$

Claramente $L''(x) > 0$ para todo $x$ real. Então, para aplicar o teste da segunda derivada, basta verificar que a equação $L'(x) = 0$ tem uma raiz real. Esta equação equivale à seguinte:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \tag{3.1}$$

Como $c > 0$, os numeradores não se anulam. Ainda mais, $x$ e $c - x$ devem ter mesmo sinal, pois os denominadores são positivos, ou seja, $x(c - x) > 0$, o que implica $0 < x < c$.

Daí, a equação (3.1) pode ser colocada sob a forma seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{c-x} \\
\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1} &= \sqrt{\left(\frac{b}{c-x}\right)^2+1} \\
\frac{a}{x} &= \frac{b}{c-x}
\end{aligned}$$

onde usamos que $a, x, b, c-x$ são positivo. Daí resulta facilmente que $x = \frac{ac}{a+b}$, que é, ponto de minimo da função $L$. Para concluirmos, observemos que,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x}.$$

implica na semelhança dos triângulos $AMP$ e $BNP$, e consequentemente a congruência dos ângulos $\beta$ e $\theta$, respectivamente de incidência e reflexão.

# Referências Bibliográficas


[1] ÁVILA, Geraldo. *Cálculo 1: Funções de Uma Variável.* 6ªed. Rio de Janeiro, L.T.C., 1993.

[2] ANTON, Howard. *Cálculo/ Howard Anton* 8ªed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

[3] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide, 2ªed. São Paulo, Edgard blucher, 1996.

[4] D'AMBOSIO, Ubiratan. *Cálculo e introdução à análise.* 1ªed. São Paulo, Nacional, 1975.

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol.1, 5ª ed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2008.

[6] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.1. 2ª ed. Rio de Janeiro, CNPq, 1993.