UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Classificação de Cônicas e Quádricas Utilizando Álgebra Linear

Jakcney Luan Azevedo de Sousa

CUITÉ - PB
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Classificação de Cônicas e Quádricas Utilizando Álgebra Linear

Jakcney Luan Azevedo de Sousa

CUITÉ - PB
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S725c Sousa, Jakcney Luan Azevedo de.

Classificação de cônicas e quádricas utilizando álgebra linear. / Jakcney Luan Azevedo de Sousa – Cuité: CES, 2011.

69 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde – UFCG, 2011.

Orientadora: Msc Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Msc Márcia Cristina Silva Brito.

1. Álgebra Linear. 2. Formas Lineares 3. Cônicas - classificação. 4. Quádricas - classificação. I. Título.

CDU 512.64

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Classificação de Cônicas e Quádricas Utilizando Álgebra Linear

Jakcney Luan Azevedo de Sousa

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 08 de dezembro de 2010.

Banca Examinadora

Maria Gisélia Vasconcelos

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Márcia Cristina Silva Brito

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Co-Orientadora)

Severino Horácio da Silva

Prof. Severino Horácio da Silva

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus pelos momentos de luz e paciência nas horas em que precisei.

Agradeço aos meus pais e irmãos, por todo apoio e dedicação que me dão.

Agradeço aos meus amigos, Thayse, Everson, Júlio, Raquel, Marcinho, Tácia, Adenilza, Aline, Milena, Fabiana, Cida, entre outros que sempre estão ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço aos meus amigos e colegas de TCC, Jarbas e Brito, pelo auxílio e apoio que sempre tivemos para com outro.

Agradeço ao professor Horácio por toda disponibilidade e gentileza.

De maneira especial, quero agradecer às professoras Gisélia e Márcia, pela paciência e confiança que têm para comigo.

"O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação de um círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito."

Aristóteles

Resumo

Neste trabalho faremos uso da álgebra linear no processo de classificação de cônicas e quádricas através do estudo de formas lineares. Para isto, introduziremos noções importantes da álgebra linear tais como, espaços vetoriais euclidianos, transformações lineares e diagonalização de operadores lineares, entre outros conceitos que serão indispensáveis para o nosso estudo. Faremos um estudo revelando algumas propriedades e particularidades das Cônicas e Quádricas.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Formas Lineares; Classificação de Cônicas e Quádricas.

Abstract

In this paper we use linear algebra in the process of classification of conics and quadrics through the study of linear forms. For this, we will introduce important concepts such as linear algebra, Euclidean vector spaces, linear transformations and diagonalization of linear operators, among other concepts that will be indispensable for our study. We will do a study that showed some properties and particularities of conics and quadrics.

Keywords: Linear Algebra; Linear forms; Classification of Conics and quadrics.

Sumário

Introdução

Ao longo deste trabalho, apresentaremos a importância do estudo da álgebra linear no processo de classificação de cônicas e quádricas. Veremos como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas e quádricas cujas equações não estão na forma padrão.

Alguns nomes importantes na história da matemática são mencionados no nosso trabalho, exautando suas contribuições, principalmente, para o estudo da álgebra linear e das cônicas.

O nosso objetivo principal é classificar uma cônica ou uma quádrica a partir de uma equação quadrática do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Após utilizarmos como motivação alguns fatos históricos envolvendo as cônicas e a álgebra linear iremos introduzir alguns conceitos envolvendo as cônicas e as quádricas tais como suas particularidades.

Capítulo 1

Aspectos Históricos da Geometria e Álgebra Linear

Começaremos a parte histórica utilizando como motivação a contribuíção de alguns estudiosos em relação às cônicas, daremos maior destaque ao astrônomo e matemático Apolônio de Perga, que ficou conhecido como "o pai das cônicas"por seus estudos e contribuições nessa área.

Apolônio de Perga (260-200 a.C.)

O primeiro estudo sistemático sobre as cônicas em geral deve-se ao Astrônomo e Matemático grego Apolônio de Perga. Nasceu em Perga na Ásia Menor, estudou em Alexandria na escola dos sucessores de Euclides. Pouco é comentado sobre a sua vida, no entanto o seu trabalho teve uma grande influência no desenvolvimento da matemática, em particular pela sua mais célebre obra "As Cônicas", composta por oito volumes. Esta obra constitui um estudo quase exaustivo das secções planas de um cone de revolução. É motivo de admiração a mestria com que Apolônio demonstra centenas de teoremas recorrendo apenas aos métodos puramente geométricos de Euclides.

Foi chamado o "Pai das Cônicas"pois atribuiu às cônicas as designações ainda hoje utilizadas - elipse, parábola e hipérbole, apresentando-as como secções produzidas numa mesma superfície cônica, onde a natureza da cônica depende apenas da inclinação do plano secante relativamente às geratrizes da superfície cônica. Foi Apolônio que apresentou pela primeira vez muitas das propriedades das cônicas como por exemplo: *Se um ramo de uma hipérbole intersecta os dois ramos de uma outra hipérbole, o ramo oposto da primeira hipérbole não encontrará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos.* Apolônio foi contemporâneo de Arquimedes e considerado um dos mais originais e profundos matemáticos gregos, foi mesmo categorizado como o sexto homem da lista dos doze homens mais notáveis do seu tempo. A Matemática dos nossos dias deve-se em grande parte a ele.

Menaecmus(380-320 a.C.)

Foi o primeiro matemático a considerar a parábola e a hipérbole como ferramentas de resolução do problema da duplicação do cubo. Este estudo levou-o a perceber que a parábola se obtém através do corte efetuado em um cone reto por um plano perpendicular à geratriz, e que se cortasse um cone obtusângulo por um plano perpendicular à geratriz se obtinha uma certa curva: a hipérbole.

Arquimedes (287-212 a.C.)

Arquimedes foi um célebre cientista, matemático e inventor grego que é muitas vezes lembrado pelo Príncipio de Arquimedes. É atribuído a Arquimedes a notável determinação da área de um segmento parabólico. Provou que a área da figura formada por um arco de parábola e um segmento de reta é igual a 4/3 da área de um triângulo cuja base seja o mesmo segmento e cujo terceiro vértice seja a intersecção de uma tangente à parábola que seja paralela ao segmento dado. Um fatal golpe de espada, em uma batalha, colocou fim á vida deste grande sábio. Terminando assim uma das mais brilhantes carreiras científicas.

Piero della Francesca (1412-1492)

Piero della Francesca foi um dos mais importantes pintores do Renascimento que inventou a perspectiva cônica por meio da qual representava sobre uma tela plana com rigor quase fotográfico objetos de vista tridimensionais.

Galileu (1564-1642)

Galileu foi um Astrônomo e Matemático italiano que entre muitas outras descobertas científicas provou que a Terra se move em volta do Sol. Galileu usou a parábola para descrever o movimento dos projectéis. Durante a sua vida foi fortemente perseguido pela inquisição.

Kepler (1517-1630)

Kepler foi um brilhante Astrônomo e Matemático alemão cujo trabalho ficou particularmente conhecido como as leis de Kepler. Ele verificou pela primeira vez que os planetas se moviam em volta do sol em órbitas elípticas . Também introduziu a palavra foco pela primeira vez .

Fermat (1601-1665)

Fermat foi o primeiro Matemático a estudar sistematicamente as cônicas a partir das equações de 2º grau em duas variáveis.

Até o final do século XIX, não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas que se pudesse dar o nome de álgebra linear. Havia apenas uma certa intuição por parte de alguns matemáticos, especialmente nos séculos XVII e XVIII, que perceberam que deveria existir alguma forma de conexão da álgebra com a geometria.

A teoria axiomática dos espaços vetoriais é um desenvolvimento recente na matemática e teve uma de suas origens na resolução de sistemas lineares.

Giuseppe Peano (1858 - 1952)

Giuseppe Peano deu a primeira definição axiomática de espaço vetorial em 1888, mas, a teoria de espaços vetoriais não foi desenvolvida antes de 1920. Até a metade do século XVIII nada de substancial ocorreu com a álgebra linear.

Um assunto relevante cujas questões levaram ao desenvolvimento da teoria de sistemas lineares que por sua vez levaram ao desenvolvimento da teoria de espaços vetoriais é o estudo das curvas algébricas.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Euler publicou em 1770 um tratado intitulado Problema Algebricum ob Affectiones Prorsus Singulares Memorabile onde estudava quadrados de números similares aos quadrados mágicos. Ele escreveu:

Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I, que verificam as seguintes condições:

$$\begin{array}{lll}
1)\ A^2+B^2+C^2=1 & 2)\ D^2+E^2+F^2=1 & 3)\ G^2+H^2+I^2=1 \\
4)\ AB+DE+GH=0 & 5)\ AC+DF+GI=0 & 6)\ AB+DE+GH=0 \\
7)\ A^2+D^2+G^2=1 & 8)\ B^2+E^2+H^2=1 & 9)\ C^2+F^2+I^2=1 \\
10)\ AD+BE+CF=0 & 11)\ AG+BH+CI=0 & 12)\ DG+EH+FI=0
\end{array}$$

Ele então percebeu que estas 12 condições são equivalentes a seguinte transformação ortogonal:

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
X & = & Ax & + & By & + & Cz \\
Y & = & Dx & + & Ey & + & Fz \\
Z & = & Gx & + & Hy & + & Iz
\end{array}\right.$$

O que é equivalente a afirmação:

$$X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2$$

Então ele mostrou que as seis primeiras relações implicam nas seis últimas. Euler não se preocupou com a questão da independência destas equações, pois seu raciocínio era intuitivo, mas mostrou que n^2 coeficientes têm $n(n+1)/2$ condições e que essa transformação ortogonal depende de $n(n-1)/2$ parâmetros. Assim sendo, Euler caracterizou as transformações ortogonais para $n=2$ e 3, mas, a principal contribuição de Euler para o avanço deste conceito foi que ele não se limitou a $n = 3$. Seu raciocínio puramente algébrico permitiu que ele obtivesse soluções para $n = 4$ e 5 e generalizasse para todo valor de n. Isto não ocorria na geometria, pois resolver essas equações para n maior que três significa se aventurar por espaços de dimensão maior que três.

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)

Lagrange entre 1773 e 1775, em seu Recherche dArithmétique enquanto estudava as propriedades dos números que são a soma de dois quadrados, foi levado a estudar o efeito de transformações lineares com coeficientes inteiros numa forma quadrática de duas variáveis. Ele estabeleceu o fato de que o discriminante da nova forma quadrática é o produto do antigo discriminante pelo quadrado de uma quantidade que era conhecida como o determinante da transformação linear.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Gauss publicou em 1798 Disquisitiones Arithmeticae, estudou a mesma questão com duas e três variáveis. Ele apresentou uma notação similar a da matriz que caracteriza a transformação linear. Além disso, estabeleceu a fórmula e uma notação simbólica para a composição de duas transformações lineares e também para o produto, o que marca um passo fundamental em direção ao conceito de matriz.

Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 - 1852)

Ferdinand Gotthold Max Eisenstein em 1844 fez uma das mudanças mais importantes no tratamento de operações com matrizes, que foi usar uma letra para se referir a matrizes e para descrever suas relações algébricas. Além disso, ele assinalou a não-comutatividade do produto que era conhecida mas era tratada como um processo local, não como uma operação algébrica. O que permitiu essa mudança foi a conexão das matrizes com vários objetos e também descobertas recentes como os quatérnios que alargaram o campo da álgebra.

Arthur Cayley (1821 - 1895)

Cayley em 1858 publicou um tratado famoso intitulado Memoir on the Theory of Matrices, muitos autores atribuem a este trabalho de Cayley a definição de matriz, mas segundo Jean-Luc Dorier, neste trabalho Cayley detalhou e cuidadosamente reuniu todos os resultados descobertos nas duas décadas anteriores, fazendo assim o estudo das operações algébricas com matrizes alcançarem o primeiro estágio de amadurecimento.

Em 1846, Cayley publicou um outro tratado intitulado Sur Quelques Résultats de Géometrié de Position onde ele deu um passo decisivo na direção de generalizar os espaços de dimensão maior que três, pois neste trabalho ele mostrou que se podem obter resultados em geometria tridimensional trabalhando-se com espaços de dimensão maior que três. Esse resultado poderia ter sido obtido por Möbius, mas ele adotou uma postura comum à sua época e descartou essa possibilidade.

Capítulo 2

Cônicas e Quádricas

2.1 Cônicas

Definição 2.1.1 *Uma equação quadrática nas variáveis x e y tem a forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A, B, C, D, E e F são números reais, com A, B e C não simultaneamente nulos. Esta equação representa uma (seção) cônica, por poder ser obtida da interseção de um cone circular com um plano. As cônicas mais importantes são ***elipses***, ***hipérboles*** *e* ***parábolas***, *que são chamadas de cônicas não degeneradas. As outras que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas cônicas degeneradas.*

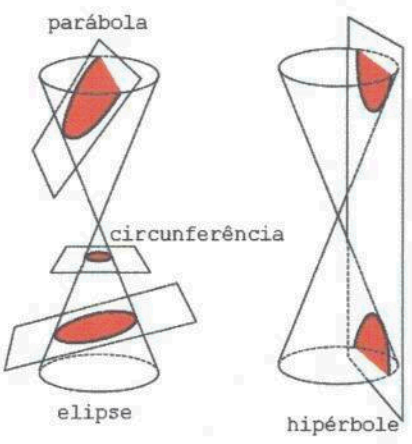

Figura 2.1: Ilustração

Quando o plano intercepta todas as geratrizes do cone, a curva obtida é chamada elipse. O círculo é um caso particular de elipse, quando o plano é perpendicular ao eixo de rotação do cone. Quando o plano é paralelo a uma das geratrizes do cone, a curva obtida é chamada parábola. Quando o plano intercepta as duas folhas do cone, a curva obtida é chamada hipérbole.

Casos degenerados: note que a interseção de um cone por um plano pode também ser uma reta, um par de retas concorrentes ou um ponto (basta que o plano passe pelo vértice do cone).

Definição 2.1.2 *A* ***elipse*** *é o conjunto dos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2* ***(focos)*** *é constante, ou seja, se $dist(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos P tais que*

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a,$$

em que $a > c$.

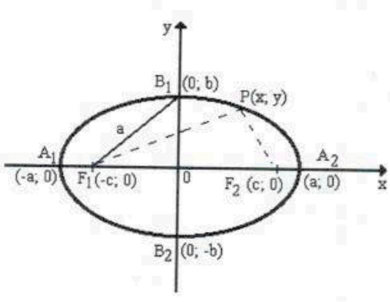

Figura 2.2: Elipse

A elipse pode ser desenhada se fixarmos as extremidades de um barbante de comprimento $2a$ nos focos e esticarmos o barbante com uma caneta. Movimentando-se a caneta, mantendo o barbante esticado, a elipse será traçada.

Os pontos A_1 e A_2 são chamados vértices da elipse. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados eixos da elipse.

A **excentricidade** da elipse é o número $e = \frac{c}{a}$. Como, $c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, então a elipse reduz-se ao círculo de raio a. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície.

Proposição 2.1.1 *(a) A equação da elipse cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(b) A equação da elipse cujos focos são $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$ é

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Em ambos os casos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Demonstração.

a) A elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a$$

ou seja,

$$\|\overrightarrow{F_1P}\| + \|\overrightarrow{F_2P}\| = 2a$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir a equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Demonstração de forma análoga ao item a). □

Definição 2.1.3 *A* ***hipérbole*** *é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $dist(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que*

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a,$$

em que $a < c$.

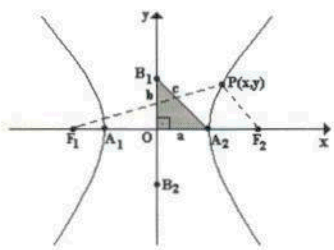

Figura 2.3: Hipérbole

Podemos desenhar uma parte de um ramo da hipérbole da seguinte forma. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada.

Os pontos A_1 e A_2 são chamados vértices da hipérbole. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \frac{c}{a}$. Como, $c > a$, a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior que 1.

A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não á paralelo a uma reta geratriz e que corta as duas folhas da superfície.

Proposição 2.1.2 *(a) A equação da hipérbole cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$) são

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

(b) A equação da hipérbole cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

e das assíntotas são

$$y = \pm \frac{a}{b} x,$$

Em ambos os casos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Demonstração.

a) A hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = \pm 2a$$

ou seja,

$$\|\overrightarrow{F_1 P}\| + \|\overrightarrow{F_2 P}\| = \pm 2a$$

que neste caso é,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividir a equação acima por $-a^2 b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Demonstração de forma análoga ao item a). □

Definição 2.1.4 *Uma **parábola** é o conjunto dos pontos P no plano equidistantes de uma reta d (diretriz) e de um ponto F (**foco**), não pertencente a d, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos P tais que*

$$dist(P, F) = dist(P, d).$$

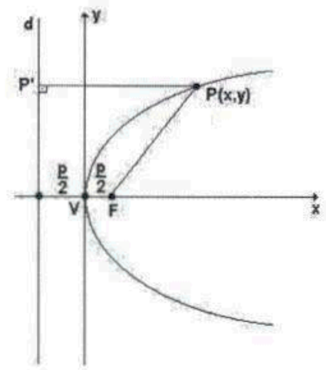

Figura 2.4: Parábola

Podemos desenhar uma parte de uma parábola da seguinte forma. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada.

O ponto V é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice** da parábola. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma reta geratriz do cone.

Proposição 2.1.3 *(a) A equação de uma parábola com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz $d : x = -p$ é*

$$y^2 = 4px.$$

(b) A equação de uma parábola com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $d : y = -p$ é

$$x^2 = 4py.$$

Demonstração.

a) A parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F) = dist(P, d).$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + d|,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$y^2 = 4px.$$

b) Demonstração de forma análoga ao item a). □

Caracterização das cônicas

Proposição 2.1.4 *Seja s uma reta fixa (diretriz) e F um ponto fixo (foco) não pertencente a s. O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que*

$$dist(P, F) = e\ dist(P, s), \tag{2.1}$$

em que $e > 0$ é uma constante fixa, é uma cônica.

(a) Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola.

(b) Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse.

(c) Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma (2.1).

Demonstração.

Se $e = 1$, a equação (2.1) é a própria dfinição da parábola. Vamos considerar o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $d = dist(F, s)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $s : x = \frac{p}{e^2}$, em que $p = \frac{de^2}{1-e^2}$ se a reta s estiver à direita do foco F e $p = \frac{de^2}{1-e^2}$ se a reta s estiver à esquerda do foco F.

Assim o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F) = e\ dist(P, s),$$

pode ser descrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x - \frac{p}{e^2}|,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = p^2(\frac{1}{e^2} - 1)$$

que ainda pode ser escrito como

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1 \qquad (2.2)$$

Se $0 < e < 1$, esta é a equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole.

Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos em $F = (p, 0)$. É fácil verificar que (2.2) é a equação desta cônica e portanto (2.1) também o é, com a reta diretriz sendo $s : x = \frac{p}{e^2}$. □

2.2 Quádricas

Definição 2.2.1 *O gráfico de uma equação quadrática nas variáveis x, y e z, ou seja, da forma*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

em que $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos é uma superfície quádrica(salvo em casos degenerados). Vamos nos limitar ao estudo de casos especiais da equação acima.

Elipsóide

Um elipsóide é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.3}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

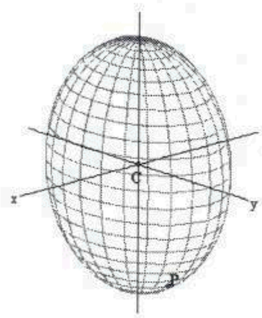

Figura 2.5: elipsóide

Observe que se (x, y, z) satisfaz (2.3), então $(x, y, -z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao plano xy. Também $(x, -y, z)$ satisfaz (2.3), por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao plano xz. O mesmo acontece com $(-x, y, z)$, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao plano yz. Se (x, y, z) satisfaz (2.3), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao eixo z. O mesmo acontece com $(-x, y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao eixo y. O mesmo acontece com $(x, -y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação ao eixo x. Finalmente se (x, y, z) satisfaz (2.3), então $(-x, -y, -z)$ também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (2.3) é simétrico em relação à origem.

Se $|k| < c$, o plano $z = k$ intercepta o elipsóide (2.3) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{k^2}{c^2})} = 1, \text{ com } z = k$$

Observe que os eixos da elipse diminuem à medida que $|k|$ aumenta.

As interseções do elipsóide (2.3) com o plano $x = k$, para $|k| < a$ e com o plano $y = k$, para $|k| < b$, são também elipses. Se $a = b = c$, o elipsóide é uma esfera de raio $r = a = b = c$.

Hiperbolóide

- **Hiperbolóide de Uma Folha**

Um **hiperbolóide de uma folha** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas que satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.4}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

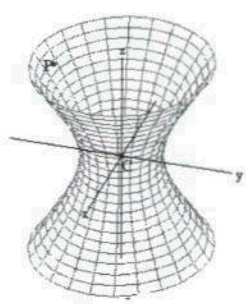

Figura 2.6: hiperboloide de uma folha

Observe que o hiperbolóide de uma folha (2.4) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2.4), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (2.4) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} = 1, \text{ com } z = k$$

Observe que os eixos da elipse aumentam à medida que $|k|$ cresce.

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (2.4) segundo uma curva cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}, \text{ com } y = k$$

Se $|k/b| \neq 1$, então a interseção é uma hipérbole e se $|k/b| = 1$, então a interseção é um par de retas concorrentes.

Considerações semelhantes são válidas para a interseção do hiperbolóide de uma folha (2.4) com o plano $x = k$.

As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperbolóides de uma folha.

- **Hiperbolóide de Duas Folhas**

Um **hiperbolóide de duas folhas** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.5)$$

em que a, b e c são números reais positivos.

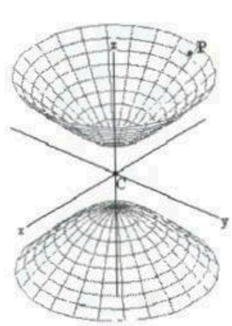

Figura 2.7: hiperbolóide de duas folhas

Observe que o hiperbolóide de duas folhas (2.5) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2.5), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$, para $|k| > c$, intercepta o hiperbolóide de duas folhas (2.5) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{k^2}{c^2} - 1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{k^2}{c^2} - 1)} = 1, \text{ com } z = k$$

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de duas folhas (2.5) segundo a hipérbole

$$-\frac{x^2}{a^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 + \frac{k^2}{c^2})} = 1, \text{ com } z = k$$

A interseção do hiperbolóide de duas folhas (2.5) com o plano $x = k$ é também uma hipérbole. As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperbolóides de duas folhas.

Parabolóide

- **Parabolóide Elíptico**

Um **parabolóide elíptico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{2.6}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

Figura 2.8: parabolóide elíptico

O parabolóide elíptico (2.6) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2.6), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (2.6), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

A interseção do parabolóide elíptico (2.6) com o plano $z = k$, para k tal que $ck > 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, \text{ com } z = k$$

A interseção do parabolóide elíptico (2.6) com plano $x = k$ é a parábola

$$z = \frac{k^2}{ca^2} + \frac{y^2}{cb^2}, \text{ com } x = k$$

A interseção do parabolóide elíptico (2.6) com plano $y = k$ também é uma parábola.

As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam parabolóides elípticos.

- **Parabolóide Hiperbólico**

Um **parabolóide hiperbólico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \tag{2.7}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

O parabolóide hiperbólico (2.7) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2.7), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (2.7), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

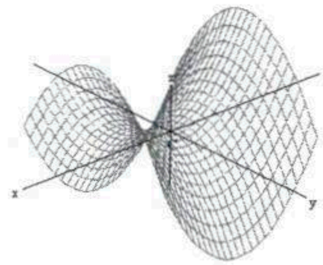

Figura 2.9: Parabolóide Hiperbólico

A interseção do plano $z = k$ com o parabolóide hiperbólico (2.7) é dada por

$$\frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2} = 1, \text{ com } z = k,$$

que representa uma hipérbole, se $k \neq 0$ e um par de retas, se $k = 0$.

A interseção do parabolóide hiperbólico (2.7) com plano $y = k$ é a parábola

$$z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{k^2}{cb^2}, \text{ com } y = k,$$

que tem concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$.

A interseção do parabolóide hiperbólico com plano $x = k$ é a parábola

$$z = -\frac{y^2}{cb^2} + \frac{k^2}{ca^2}, \text{ com } x = k,$$

que tem concavidade para baixo se $c > 0$ e concavidade para cima se $c < 0$.

O parabolóide hiperbólico é também chamado **sela**. As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, \text{ com } x = k.$$

também representam parabolóides hiperbólicos.

Cone Elíptico

Um **cone elíptico** é um conjunto de pontos que satisfaz a equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{2.8}$$

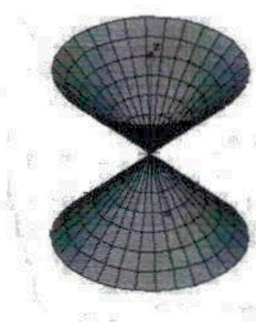

Figura 2.10: cone eliptico

em que a e b são números reais positivos, em algum sistema de coordenadas. Se $a = b$, o cone é chamado **cone circular**.

Observe que o cone elíptico (2.8) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (2.8), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem. A interseção do cone elíptico (2.8) com o plano $z = k$, para $k \neq 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1, \text{ com } z = k.$$

Observe que os eixos da elipse crescem à medida que $|k|$ aumenta.

Os planos xz e yz cortam o cone elíptico (2.8) segundo as retas

$$x = az, y = 0 \text{ e } y = bz, x = 0,$$

respectivamente.

A interseção do cone elíptico (2.8) com o plano $y = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/b^2} - \frac{y^2}{a^2k^2/b^2} = 1, \text{ com } y = k.$$

A interseção do cone elíptico (2.8) com o plano $x = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/a^2} - \frac{y^2}{b^2k^2/a^2} = 1, \text{ com } x = k.$$

As equações

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \text{ e } y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam cones elípticos.

Capítulo 3

Conceitos Básicos de Álgebra Linear

3.1 Espaço Vetorial

Definição 3.1.1 *Seja V um conjunto não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, istó é:*

$$\forall u, v \in V, \quad u + v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \quad \alpha u \in V$$

O conjunto V com essas operações é chamado ***espaço vetorial real*** *(ou* ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{R}$*) se forem satisfeitos os seguintes axiomas: $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Em relação à adição:

1) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v \in V$

2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$

3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u + 0 = u$

4) $\forall u \in V, \exists (-u) \in V, u + (-u) = 0$

Em relação a multiplicação por escalar:

5) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

8) $1u = u$

Os elementos do espaço vetorial V serão chamados **vetores**, independetemente de sua natureza.

Exemplo 3.1.1 *Seja*

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Se $u = (x_1, \dots x_n)$ *e* $v = (y_1, \dots y_n) \in V$, *então* V, *com as operações de adição*

$$u + v = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha u = (\alpha x_1, \dots \alpha x_n),$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.2 *Seja* V *o conjunto de todas as matrizes* $m \times n$, *isto é,*

$$V = \{A : A \in \mathbb{R}^{m\times n}\}.$$

Se $A = [a_{ij}] \in V$ *e* $B = [b_{ij}] \in V$, *então* V, *com as operações de adição*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}],$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}],$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3.1.2 *Um subconjunto* S, *não vazio, de um espaço vetorial* V *é um* **subespaço vetorial** *de* V *se estiverem satisfeitas as condições:*

1) $u + v \in S$, *para quaisquer* $u, v \in S$.

2) $\alpha u \in S$, *para quaisquer* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in S$.

Definição 3.1.3 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Um vetor* v *em* V *é uma* **combinação linear** *dos vetores* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *em* V *se existirem escalares* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Teorema 3.1.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores fixados em V. Então o conjunto*

$$S = \{v \in V | v = x_1v_1 + ... + x_nv_n, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{v \in V | v = \sum_{n=0}^{n} x_iv_i : x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

é um subspaço de V.

Demonstração.

Claramente $S \neq \emptyset$, pois $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \in S$.

Dados $u, v \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $u, v \in S$ temos que existem

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

tais que

$$u = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \text{ e } v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) + (y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) \\ &= (x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (x_n + y_n)v_n \in S \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) \\ &= (\alpha x_1) + \cdots + (\alpha x_n)v_n \in S. \end{aligned}$$

Portanto, S é um subespaço de V. $\square$

O subspaço

$$S = \{v \in V | v = x_1v_1 + ... + x_nv_n, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{v \in V | v = \sum_{n=1}^{n} x_iv_i : x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

de V é chamado o **subspaço gerado** por $v_1, v_2, ..., v_n$. Mais geralmente, seja A um subconjunto não vazio de V. Então

$$S = \left\{\sum_{n=1}^{n} x_iv_i : x_i \in \mathbb{R}, v_i \in A\right\}$$

é **subspaço gerado** por A, onde A é o conjunto de **geradores** de V, e será denotado por

$$S = [A]$$

quando $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, denotamos $[A]$ por $[v_1, v_2, ..., v_n]$.

Definição 3.1.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são* **linearmente dependentes (LD)** *se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos iguais a 0, tais que*

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0. \tag{3.1}$$

Ou, equivalentemente, a equação vetorial (3.1) admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são **linearmente independentes (LI)** *ou, equivalentemente, a equação vetorial (3.1) admite apenas a solução nula.*

Definição 3.1.5 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores em V é uma* **base** *de V se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I.*
2. *$V = [\beta] = [v_1, \ldots, v_n]$.*

Exemplo 3.1.3 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. É fácil ver que o conjunto*

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$$

é uma base finita de V, a qual é chamada de ***base canônica*** *de V.*

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A **dimensão** de V é o número de elementos em alguma base de V e será denotado por $dimV$.

Teorema 3.1.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ordenada de V. Então todo vetor v pode ser escrito de modo único sob a forma:*

$$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n.$$

Demonstração.

(Existência) Como $v \in V = [\beta]$ temos que existem escalares $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

(Unicidade) Suponhamos, também, que

$$v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n.$$

Então

$$0 = v - v = (x_1 - y_1)v_1 + \cdots + (x_n - y_n)v_n.$$

Como β é L.I temos que $x_i - y_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Portanto, $x_i = y_i,\ i = 1, \ldots, n$. □

Definição 3.1.6 *Sejam $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$. Chamamos estes números $x_1, ..., x_n$ de **coordenadas** de v em relação à base β e denotamos por*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.1.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$,*

$$\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \quad e \quad \beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

duas bases de V. Então

$$[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

Demonstração.

Pelo teorema (3.1.2), todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\begin{cases} v &= x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \\ v &= y_1v_1 + \cdots + y_nv_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Assim,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ e\ [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $v_j \in V$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}v_i \end{aligned}$$

Logo, por (3.2), temos que

$$\begin{aligned} v &= y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j)v_i. \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade das coordenadas, temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'}[v]_{\beta'}.$$

□

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada a **matriz de mudança de base** da base β' para a base β.

Exemplo 3.1.4 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{e_1, e_2\}$ *a base ordenada canônica de* V *e* $\beta' = \{f_1, f_2\}$ *uma base de* V *pela rotação de um ângulo* θ. *Determine* $[v]_{\beta'}$.

Considere a figura

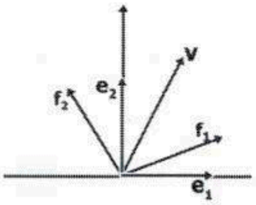

Figura 3.1: Gráfico

Temos que

$$e_1 = \cos\theta f_1 - \sin\theta f_2$$
$$e_2 = \sin\theta f_1 + \cos\theta f_2$$

Logo,

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim, se $v = (x, y)$, então

$$[v]_\beta = [I]^{\beta'}_{\beta}[v]_{\beta'}.$$

Dai temos que,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta x + \sin\theta y \\ -\sin\theta x + \cos\theta y \end{bmatrix}$$

3.2 Espaços com Produto Interno

Definição 3.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é um* ***produto interno*** *sobre V se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1) $\langle v, v\rangle \geq 0$ para todo vetor $v \in V$, e $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se $v = 0$.

2) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, com $u, v, w \in V$.

4) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

Exemplo 3.2.1 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in V$. Então*

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

é um produto interno sobre V o qual é chamado de produto interno usual(canônico).

Note que

$$\langle u, v\rangle = X^tY$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Um **espaço vetorial euclidiano** é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno.

Definição 3.2.2 *Sejam V um espaço vetorial euclidiano e $u, v \in V$. Dizemos que u e v são* ***ortogonais*** *se $\langle u, v\rangle = 0$ e denotamos por $u \perp v$.*

Definição 3.2.3 *Seja V um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é ortogonal se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$.*

Teorema 3.2.1 *Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto ortogonal, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Então $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente (LI).*

Demonstração.

Sejam $v_1, v_2, \ldots v_n$ vetores distintos e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_j\rangle = \langle x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, v_j\rangle \\ &= x_1\langle v_1, v_j\rangle + \cdots + x_n\langle v_n, v_j\rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, se $i \neq j$. Como $\langle v_j, v_j\rangle > 0$ temos que $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente. □

Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

é uma **base ortogonal** de V se $v_i \perp v_j$, quando $i \neq j$.

Corolário 3.2.1 *Seja V um espaço vetorial euclidiano com $dimV = n$. Se*

$$\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

é um conjunto de vetores não-nulos ortogonais aos pares de V, então β é uma ***base ortogonal*** *de V.*

Definição 3.2.4 *Seja V um espaço euclidiano. A* ***norma*** *(ou* ***comprimento*** *) de um vetor $v \in V$ é o número não-negativo, indicada por $\|v\|$, definido por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Obs.:

Se $v \in V$, é um vetor qualquer. Dizemos que v é um **vetor unitário** se

$$\|v\| = 1.$$

Definição 3.2.5 *Seja V um espaço euclidiano. para quaisquer $u, v \in V \ \{0\}$ o* ***ângulo*** *entre u e v é definido como o ângulo θ tal que*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$.

Definição 3.2.6 *Seja V um espaço euclidiano e*

$$\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

uma base de V. Dizemos que β é uma base ***ortonormal*** *ou sistema de coordenadas cartesianas para V se β é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é,*

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & para \quad i \neq j \\ 1 & para \quad i = j \end{cases}$$

Exemplo 3.2.2 *Seja $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Então*

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$$

é uma base ortonormal de V.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base qualquer $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ desse espaço é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

De fato, supondo que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não são ortogonais, considera-se:

1. $w_1 = v_1$

2. $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

3. $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

Pode-se concluir por indução admitindo que, por esse processo, tenham sido obtidos $(n-1)$ vetores $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ e considerar o vetor:

$$w_n = v_n - a_{n-1}w_{n-1} - \ldots - a_2 w_2 - a_1 w_1$$

sendo $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tais que o referido vetor w_n seja ortogonal aos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$.

Os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ que aparecem em w_n são:

$$a_1 = \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle},\ a_2 = \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle},\ a_3 = \frac{\langle v_n, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle}, \ldots, a_{n-1} = \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle},$$

Assim, a partir de $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, obtemos a base ortogonal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

O processo que permite a determinação de uma base ortogonal a partir de uma base qualquer chama-se **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**.

Para se obter uma base ortonormal, basta normalizar cada w_i.

3.3 Transformações Lineares

Definição 3.3.1 *Se $T : V \to W$ é uma função de um espaço vetorial V em outro espaço vetorial W, então T é chamada uma **Transformação Linear** de V em W se, $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é chamada um **Operador linear** de V.

Exemplo 3.3.1 *Sejam $V = \mathbb{R}^{n \times 1}$, $W = \mathbb{R}^{m \times 1}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz fixada. A função $T_A : V \to W$ definida por*

$$T_A(X) = AX,$$

para todo $X \in V$, é uma transformação linear, pois

$$T_A(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = T_A(X) + T_A(Y),\ \forall X, Y \in V.$$

e

$$T_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha T_A(X),\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } X \in V.$$

Exemplo 3.3.2 *(**Rotação de um ângulo** θ) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Determine a transformação linear $R_\theta : V \to V$, onde $R_\theta(v)$ é uma rotação anti-horária de um ângulo $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi$, do vetor $v \in \mathbb{R}$.*

Sejam $v = (x, y)$ e $R_\theta = (u, v)$. Temos que

$$u = r\cos(\alpha + \theta),\ x = r\cos\alpha \text{ e } y = r\sin\alpha$$

Logo,

$$u = x\cos\theta - y\sin\theta$$

De modo análogo

$$v = x\sin\theta - y\cos\theta$$

Assim,

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)$$

Exemplo 3.3.3 *(**Operador Translação**) Seja $V = \mathbb{R}^n$. A função $T_t : V \to V$ definida por $T_t(u) = u + t$ onde $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $t = (a_1, \ldots, a_n)$, não é uma transformação linear, a menos que $t \equiv 0$, pois*

$$T_t(0, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 3.3.2 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear.*

*A **imagem** de T é o conjunto*

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{w \in W : w = T(u) \text{ para algum } u \in V\} \\ &= \{T(u) : u \in V\} \\ &= \{T(u)\}. \end{aligned}$$

*O **Núcleo** de T é o conjunto*

$$\begin{aligned} KerT &= \{u \in \mathbb{R} : T(u) = 0\} \\ &= T^{-1}(0). \end{aligned}$$

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Dizemos que T é **injetora** se

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v, \forall u, v \in V$$

ou equivalentemente,

$$u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v), \forall u, v \in V$$

Dizemos que T é **sobrejetora** se dado $w \in W$, existir $u \in V$ tal que $T(u) = w$, isto é, $Im(T) = W$.

Finalmente, dizemos que T é **bijetora** se T é injetora e sobrejetora. Neste caso,

$$w = T(u) \Leftrightarrow u = T^{-1}(w).$$

Obs.:

Quando uma transformação linear T admite a inversa T^{-1}, diz-se que T é **inversível, invertível, regular ou não-singular**.

Teorema 3.3.1 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linar bijetora. Então a transformação inversa $T^{-1} : W \to V$ é linear.*

Demonstração.

Como T é bijetiva, então T é inversível.

Sejam $w_1, w_2 \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sejam $v_1 = T^{-1}(w_1)$ e $v_2 = T^{-1}(w_2)$. Então

$$\begin{aligned}
T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= T^{-1}(\alpha T(v_1) + \beta T(v_2)) \\
&= T^{-1}(T(\alpha v_1 + \beta v_2)) \\
&= \alpha v_1 + \beta v_2 \\
&= \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2)
\end{aligned}$$

Portanto T^{-1} é linear. $\square$

Matriz de uma transformação Linear

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, ..., w_n\}$ à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A : \ \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^m \\ v & \mapsto T_A(v) \end{aligned}$$

Seja

$$X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

assim,

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + ... + y_m w_m$ onde $y_i = A_i \cdot X$ e A_i é a i-ésima linha de A. Em geral dada uma matriz $A_{m \times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Teorema 3.3.2 *Seja $T : \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}^{m \times 1}$ uma aplicação linar. Mostre que existe uma única matriz $m \times n$ tal que*

$$T(v) = Av, \forall v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Demonstração.

Dado
$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$
temos que
$$v = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$
Logo,
$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)$$
Assim, fazendo $C_i = T(e_i), i = 1, \ldots, n$, temos que
$$T(u) = Au,$$
onde A é a matriz $m \times n$ cujas colunas são os vetores $C_1, \ldots, C_n$. □

Exemplo 3.3.4 *O operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido por*
$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$
é uma rotação do espaço em torno do eixo z *e sua matriz canônica é:*
$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e
$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\},\ \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$
bases ordenadas de V e W, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então
$$T(v_1), \ldots, T(v_n) \in W.$$
Como β é uma base de W temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que
$$T(v_j) = \sum_{n=1}^{m} a_{ij} w_i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema será chamada a **representação matricial** de T em relação às bases α e β e denotada por

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Teorema 3.3.3 *O operador linear $T : V \to V$ é invertível se, e somente se $detA \neq 0$.*

Demonstração. Ver [3].

Teorema 3.3.4 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $dimV = n$ e $dimW = m$. Sejam*

$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ e } \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha, \ \forall v \in V.$$

Demonstração.

Pela a equação (3.3), temos que

$$T(v_j) = \sum_{n=1}^{m} a_{ij} w_i, j = 1, \ldots, n$$

Dado $v \in V$, existem únicos $x_j \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(u) &= T\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) w_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T(u)]_\beta = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha, \ \forall v \in V.$$

$\square$

3.4 Autovalores e Autovetores

Definição 3.4.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um* **autovalor** *de T se existir $v \in V$, $v \neq 0$, tal que*

$$T(v) = \lambda v$$

O vetor v é chamado um **autovetor** *de T associado a λ.*

Teorema 3.4.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $dimV = n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então*

$$det(T - \lambda I) = 0.$$

Demonstração.

Seja $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Como

$$[T(u)]_\beta = [T]^\beta_\beta [v]_\beta,$$

para alguma base ordenada β de V, temos que

$$\lambda X = AX \Leftrightarrow (T - \lambda I_n)X = 0, \tag{3.4}$$

onde $A = [T]^\beta_\beta$ e $X = [u]_\beta$. Assim, para que o sistema homogêneo (3.4) admita uma solução não-nula $X \neq 0$ se, $A - \lambda I_n$ é singular, isto é, deve-se ter:

$$det(T - \lambda I) = 0,$$

onde $I = I_n$ é a matriz identidade de ordem n. $\square$

Como

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow det(\lambda I_n - A) = 0$$

temos que $det(\lambda I_n - A) = 0$ é uma equação polinomial de grau n em λ, a saber

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
b_1 &= (-1)^1 tr(A),\\
b_2 &= (-1)^2 \sum_{i<j} det\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix} \right)\\
b_3 &= (-1)^3 \sum_{i<j<k} det\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{bmatrix} \right)\\
&\vdots\\
b_n &= (-1)^n det(A).
\end{aligned}$$

O polinômio $f_A = det(A - \lambda I)$ será chamado o **polinômio característico** de A. A equação polinomial

$$det(A - \lambda I) = 0$$

será chamada a **equação característica** de A e as raízes desta equação são os autovalores de A.

Duas matrizes são ditas **semelhantes** quando definem, em V um mesmo operador linear T, em duas bases diferentes. Mais precisamente, duas matrizes A e B são semelhantes se existe uma matriz invertível P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Lema 3.4.1 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Demonstração.

Sejam $T : V \to V$ um operador linear e β e α duas bases de V,

$$T_\alpha = \varphi^{-1} T_\beta \varphi$$

subtraindo λI em ambos os membros e aplicando o determinante, temos

$$
\begin{aligned}
det(T_\alpha - \lambda I) &= det((\varphi^{-1}T_\beta\varphi) - \lambda I) \\
&= det(\varphi^{-1}T_\beta\varphi - \lambda\varphi^{-1}I\varphi) \\
&= det(\varphi^{-1}(T_\beta - \lambda I)\varphi) \\
&= det\varphi^{-1} \cdot det(T_\beta - \lambda I) \cdot det\varphi \\
&= det(\varphi^{-1} \cdot \varphi) \cdot det(T_\beta - \lambda I) \\
&= det(T_\beta - \lambda I)
\end{aligned}
$$

□

3.5 Operadores Diagonalizáveis

Teorema 3.5.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ outovalores distintos aos pares de T. Se $v_1, ..., v_n$ são os autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, então o conjunto*

$$\{v_1, ..., v_n\}$$

é linearmente independente.

Demonstração.

(Indução sobre n). Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0. \tag{3.5}$$

Se $n = 1$, então $x_1v_1 = 0$. Logo, $x_1 = 0$, pois $v_1 \neq 0$. Suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para todo k com $1 \leq k \leq n-1$. Aplicando T a equação (3.5) e usando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, temos que

$$x_1\lambda_1v_1 + \cdots + x_n\lambda_nv_n = 0. \tag{3.6}$$

Multiplicando a equação (3.5) por λ_n e subtraindo da equação (3.6), temos que

$$(\lambda_n - \lambda_1)x_1v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1}v_{n-1} = 0.$$

Logo, pela a hipótese de indução,

$$(\lambda_n - \lambda_i)x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Como $\lambda_n - \lambda_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n-1$, temos que $x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n-1$. Assim,

$$x_n v_n = 0$$

mas isto implica que $x_n = 0$. Portanto o conujunto

$$\{v_1, \ldots, v_n\}$$

é linearmente independente. □

Corolário 3.5.1 *Se $T : V \to V$ é linear, $dimV = n$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$, formado pelos autovetores correspondentes, é uma base de V.*

Teorema 3.5.2 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $dimV = n$, cuja representação matricial em relação a alguma base ordenada α de V é $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ e*

$$X_j = [v]_\alpha = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

as coordenadas de um autovetor v de T associado ao autovalor $\lambda_j, j = 1, ..., n$. Se os vetores $X_1, ..., X_n$ geram $\mathbb{R}^{n\times 1}$, então a matriz $P = [x_{ij}]$ é tal que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

Demonstração.

Como os vetores $X_1, \ldots, X_n$ geram $\mathbb{R}^{n\times 1}$ temos pelo teorema (3.5.1), que a matriz P é não-singular. Sendo

$$AX_j = \lambda_j X_j$$

temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj},\ i = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$PA = \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj}\Big] = [\lambda_j x_{ij}] = DP.$$

Portanto, $PAP^{-1} = D$. □

Seja $T : V \to V$ um operador linear com $dimV = n$. Dizemos que T é **diagonalizável** se existir uma base de V formada de autovetores de T.

Exemplo 3.5.1 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3$ possui uma base de autovetores.

Solução

Temos que o polinômio característico de A é:

$$f_A = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Logo os autovetores de A são $\lambda_1 = 3$ de multiplicidade algébrica 2 e $\lambda_2 = -1$.

O sistema linear homogêneo que permite a determinação dos autovetores é

$$(A - \lambda I)v = 0$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} (3-\lambda)x & & - & 4z & = 0 \\ & (3-\lambda)y & - & 5z & = 0 \\ & & & (-1-\lambda)z & = 0 \end{array} \right.$$

Para $\lambda_1 = 3$; $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$.

Para $\lambda_2 = -1$; $v_3 = (4, -5, 4)$.

Temos então que o conjunto dos autovetores de A é

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (4, -5, 4)\}$$

é um conjunto linearmente independente e que gera o $\mathbb{R}^3$. Portanto temos uma base formada pelos autovetores de A.

3.6 Operadores Lineares

Definição 3.6.1 *Seja A uma matriz $n \times n$ real e A^t sua transposta.*

*1) Se $A = A^t$ dizemos que A é uma matriz **simétrica**.*

*2) Se $A.A^t = A^t.A = I$(ou seja, a inversa de A é A^t), dizemos que A é uma matriz **ortogonal**.*

Teorema 3.6.1 *Seja A uma matriz ortogonal. Então $det A = \pm 1$.*

Demonstração.

Temos que $A \cdot A^t = I$, pois A é ortogonal. Então

$$det(A.A^t) = det(I) \quad \text{e} \quad det A.det A^t = 1.$$

Mas,

$$det A = det A^t.$$

Assim,

$$(det A)^2 = 1 \Rightarrow det A = \pm 1.$$

□

Teorema 3.6.2 *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, as colunas (ou linhas) são vetores ortonormais.*

Demonstração. Ver [2].

Teorema 3.6.3 *Se V é um espaço vetorial com produto interno e α e β são bases ortonormais de V, então a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\beta}$ é uma matriz ortogonal.*

Demosntração. Ver [2].

Definição 3.6.2 *Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T : V \to V$ um operador linear. Então*

*1) T é chamado de **operador auto-adjunto** se $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ é uma matriz simétrica.*

*2) T é chamado um **operador ortogonal** se $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ é uma matriz ortogonal.*

Definição 3.6.3 *Seja V um espaço vetorial euclidiano e $T : V \to V$ linear. Dizemos que T é ortogonal se*

$$TT^t = T^tT = I,$$

isto é, T é invertível com $T^{-1} = T^t$.

Teorema 3.6.4 *Seja V um espaço vetorial euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1) T é ortogonal.

2) $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, paa todos $u, v \in V$.

3) $\|T(u)| = |u|$ para todo $u \in V$.

4) T leva base ortonormal de V em alguma base ortonormal de V.

Demonstração.

$(1 \Leftrightarrow 2)$ Basta observar que

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^tT(v)\rangle, \ \forall u, v \in V.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Basta notar que

$$||T(u)||^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = ||u||^2.$$

$(3 \Rightarrow 4)$ Seja

$$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

uma base ortonormal de V. Então

$$\begin{aligned} \langle T(u_i), T(u_j)\rangle &= \frac{1}{4}(||T(u_i) + T(u_j)||^2 - ||T(u_i) - T(u_j)||^2) \\ &= \frac{1}{4}(||u_i + u_j||^2 - ||u_i - u_j||^2) \\ &= \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(\beta) = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$$

é uma base ortonormal de V.

$(4 \Rightarrow 2)$ Seja

$$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

uma base ortonormal de V. Então

$$T(\beta) = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$$

é uma base ortonormal de V. Dados $u, v \in V$, existem únicos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \text{ e } v = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle T(u_i), T(u_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u_i, v_j \rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3.6.1 *Seja $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial com produto interno usual. Determine todos os operadores ortogonais sobre $\mathbb{R}^2$.*

Solução.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador ortogonal. Então toda base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é da forma

$$\{T(e_1), T(e_2)\},$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Seja $T(e_1) = (a, b)$. Então

$$|a|^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = ||T(e_1)||^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1.$$

Como a função $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ é sobrejetora temos que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$.

Logo, $b = \sin\theta$ e

$$T(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Sendo

$$||T(e_2)|| = 1 \text{ e } \langle T(e_1), T(e_2) \rangle = 0,$$

obtemos

$$T(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) \text{ ou } T(e_2) = (\sin\theta, -\cos\theta)$$

Portanto a representação matricial de T em relação a qualquer base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ou } [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

isto é, qualquer operador ortogonal sobre $\mathbb{R}^2$ é uma rotação sobre a origem ou uma reflexão em torno de uma reta passando pela origem.

Definição 3.6.4 *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é **auto-adjunto** ou **simétrico** se $T^t = T$.*

Teorema 3.6.5 *Seja V um espaço vetorial euclidiano. Se $T : V \to V$ é um operador simétrico, então para quaisquer $u, v \in V$, tem-se:*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$$

Demonstração. Ver [7].

Diagonalização de Matrizes Simétricas

Propriedades

1) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.
2) Se $T : V \to V$ é um operador simétrico com autovalores distintos, então os autovetores associados aos autovalores são ortogonais.
3) Uma matriz A é diagonalizável pela matriz P dos autovetores através de:

$$D = P^{-1}AP$$

Assim, os autovetores ortonormais de P formarão uma matriz ortogonal e tem-se $P^{-1} = P^t$. Portanto:

$$D = P^tAP$$

e, nesse caso dizemos que P diagonaliza A ortogonalmente.

Obs.: Seja $A \in M(n \times n)$ uma matriz simétrica. Então existe uma matriz ortogonal P tal que

$$P^{-1}AP$$

seja uma matriz diagonal.

3.7 Formas Lineares, Bilineares e Quadráticas

Definição 3.7.1 *Seja V um espaço vetorial real. Uma* ***forma linear*** *é uma transformação linear $f : V \to \mathbb{R}$.*

Obs.: Numa forma linear, todas as variáveis aparecem na primeira potência e não há produto de variáveis na expressão.

Exemplo 3.7.1 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x + y$ é uma forma linear.*

Se $f : V \to \mathbb{R}$ é uma forma linear, $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ é base de V e $\beta = \{w\}$ é base de $\mathbb{R}$, então

$$[f]_{\beta}^{\alpha} = [a_1\, a_2 \ldots a_n]_{1 \times n}.$$

Se $v \in V$ é tal que

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então

$$[f(v)]_{\beta} = [f]_{\beta}^{\alpha} [v]_{\alpha}.$$

Definição 3.7.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $v, w \in V$ e $a \in \mathbb{R}$. Uma* ***forma bilinear*** *é uma aplicação $B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $(v,w) \mapsto B(v,w)$ tal que:*
1) Para todo w fixado, $B(v,w)$ é uma forma linear em v, isto é,

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + (v_2, w)$$

e

$$B(av, w) = aB(v, w)$$

2) Para todo v fixado, $B(v,w)$ é uma forma linear em w, isto é,

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$$

e

$$B(v, aw) = aB(v, w)$$

Exemplo 3.7.2 *O produto usual de números reais*

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por $p(x, y) = xy$ é uma forma bilinear.

Definição 3.7.3 *A forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ é **simétrica** se $B(v, w) = B(w, v)$ para todo $v, w \in V$.*

Teorema 3.7.1 *Uma forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ é simétrica se, se somente se $[B]^{\alpha}_{\alpha}$ é uma matriz simétrica.*

Demonstração. Ver [2].

Definição 3.7.4 *seja V um espaço vetorial e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \to \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = B(v, v)$ é chamada **forma quadrática** associada a B.*

Em geral, uma forma quadrática genérica $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Tem como forma matricial

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

No caso de $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, onde

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

A forma matricial é

$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Teorema 3.7.2 *Se $Q(v) = B(v,v)$ uma forma quadrática em V. Existe uma base ortonormal β de V tal que se*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

então $Q(v) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$.

Demonstração.

Seja α uma base ortonormal qualquer de V. Então $Q(v) = B(v,v) = [v]_\alpha^t][B]_\alpha^\alpha[v]_\alpha$. Logo, a matriz $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica e, portanto, corresponde a um operador auto-adjunto $T : V \to V$ que tem como matriz $[T]_\alpha^\alpha = [B]_\alpha^\alpha$. Como um operador auto-adjunto pode ser diagonalizado mediante uma base β de autovetores ortonormais, então

$$\begin{aligned}
[B]_\alpha^\alpha &= [T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha = ([I]_\beta^\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha \\
&= ([I]_\beta^\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha
\end{aligned}$$

pois α e β são bases ortonormais e, portanto, $[I]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal. Então,

$$\begin{aligned}
Q(v) &= [v]_\alpha^t \cdot ([I]_\beta^\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha = ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha) \\
&= [v]_\beta^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [v]_\beta = [y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.7.3 *Seja a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ dada por:*

$$
\begin{aligned}
Q(v) &= x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

onde $v = (x_1, x_2, x_3)$.

Calculemos os autovalores e autovetores da matriz simétrica da forma quadrática

$$
f_A = det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)
$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 3$.

Resolvendo o sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Os autovetores, já normalizados, associados aos autovalores são

$$
v_1 = (2/3, 1/3, 2/3), v_2 = (-1/3, -2/3, 2/3) \text{ e } v_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)
$$

que formam a nova base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Portanto, pelo teorema anterior, nesta nova base, a forma quadrática se reduz a

$$
Q(v) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
$$

isto é:

$$
Q(v) = -3y_2^2 + 3y_3^2
$$

Capítulo 4

Classificação de Cônicas e Quádricas

Neste capítulo mostraremos o procedimento geral para classficação de uma cônica ou de uma quádrica, alguns exemplos serão feitos de modo que fique claro todo o procedimento. Além disso introduziremos a idéia de movimento rígido que será essencial para que o nosso trabalho seja concluído.

4.1 Classificação de Cônicas e Quádricas

Definição 4.1.1 *Seja $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Uma aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um **movimento rígido** ou uma **isometria** se preserva norma, ou seja, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$,*

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|.$$

Os movimentos rígidos são as transformações que preservam distância entre pontos e, como tal, preservam o tamanho e a forma das figuras.

Exemplo 4.1.1 *Se $t \in \mathbb{R}^3$, então a função $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$T_t(u) = u + t, \forall u \in \mathbb{R}^3$$

é um movimento rígido, chamado translação à direita por t.

De fato,

$$\begin{aligned} \|T_t(u) - T_t(v)\| &= \|u + t - (v + t)\| \\ &= \|u + t - v - t\| \\ &= \|u - v\|. \end{aligned}$$

Portanto, T_t preserva norma. Logo é um movimento rígido.

Proposição 4.1.1 .

1) Se T e H são movimentos rígidos, então $T \circ H$ é um movimento rígido.

2) Se T e H são translações, então $T \circ H = H \circ T$ é uma translação.

3) Se T é uma tranlação por t, então T é inversível e T^{-1} é uma translação por $-t$.

4) Dados $t, v \in \mathbb{R}^3$, existe uma única translação de T tal que $T(t) = v$.

Demonstração. Ver [8].

Definição 4.1.2 *Uma transformção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que preserva produto interno, isto é,*

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Proposição 4.1.2 *Todo operador ortogonal sobre $\mathbb{R}^3$ é um movimento rígido.*

Demonstração.

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador ortogonal

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\|^2 &= \|T(u - v)\|^2 \\ &= \langle T(u - v), T(u - v)\rangle \\ &= \langle u - v, u - v\rangle \\ &= \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Daí concluimos que

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|.$$

Portanto T é um movimento rígido. □

Proposição 4.1.3 *Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido tal que $T(0) = 0$, então T é um operador ortogonal.*

Demonstração.

Provemos que T preserva produto interno. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. então, como consequência das propriedades de produto interno, temos que

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \frac{1}{2}(\|T(u)\|^2 + \|T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2).$$

Como T é uma isometria e $T(0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v)\rangle &= \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \\
&= \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - (\|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2)) \\
&= \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle - \|v\|^2) \\
&= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Provemos que T é uma aplicação linear, isto é,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^3$. Consideremos,

$$\begin{aligned}
\|T(\alpha u + \beta v) - \alpha T(u) - \beta T(v)\|^2 &= \|T(\alpha u + \beta v)\|^2 + \alpha^2\|T(u)\|^2 + \beta^2\|T(v)\|^2 \\
&- 2\alpha\langle T(\alpha u + \beta v), T(u)\rangle - 2\beta\langle T(\alpha u + \beta v), T(v)\rangle \\
&+ 2\alpha\beta\langle T(u), T(v)\rangle \\
&= \|\alpha u + \beta v\|^2 + \alpha^2\|u\|^2 + \beta^2\|v\|^2 \\
&- 2\alpha\langle \alpha u - \beta v, u\rangle - 2\beta\langle \alpha u + \beta v, v\rangle + 2\alpha\beta\langle u, v\rangle \\
&= \|\alpha u + \beta v - \alpha u - \beta v\|^2 = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que T preserva norma e preserva produto interno. Mas

$$\|T(\alpha u + \beta v) - \alpha T(u) - \beta T(v)\|^2 = 0 \Leftrightarrow T(\alpha u + \beta v) - \alpha T(u) - \beta T(v) = 0.$$

Logo,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

que implica que T é linear. □

Teorema 4.1.1 *Todo movimento rígido em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito de modo único sob a forma*

$$L \circ S,$$

onde L é uma translação em $\mathbb{R}^3$ e S é um operador ortogonal em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração.

Existência: Seja L a translação por $T(0)$, então segue da **proposição 4.1.1** que L^{-1} é a translação por $-T(0)$ e a aplicação $L^{-1} \circ T$ é um movimento rígido. Como $L^{-1} \circ T(0) = 0$, pela **proposição 4.1.3** $L^{-1} \circ T$ é um operador ortogonal que denotamos por S. Portanto, $T = L \circ L^{-1} \circ T = L \circ S$.

Unicidade: Sejam L e L' translações, S e S' operadores ortogonais tais que $T = L \circ S = L' \circ S'$. Então, $L^{-1} \circ L \circ S = L^{-1} \circ L' \circ S' \Rightarrow S = L^{-1} \circ L' \circ S'$ e $0 = S(0) = L^{-1} \circ L'(0)$. Segue da **proposição 4.1.1** que $L^{-1} \circ L'$ é a translação por 0, isto é, $L^{-1} \circ L' =$ identidade, logo, $L' = L$. Portanto $L \circ S = L \circ S'$, e $S = S'$. □

4.2 Cônicas no plano

Uma **cônica** em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas as coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde pelo menos um entre A, B e C é não-nulo. Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

uma forma linear

$$L(x, y) = Dx + Ey$$

e um termo constante F.

Isto é, a equação que define a cônica é

$$Q(x, y) + L(x, y) + F = 0$$

Exemplo 4.2.1 *A equação quadrática*

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7$$

tem como forma quadrática associada

$$3x^2 + 5xy - 7y^2$$

A presença dos termos mistos na equação de uma cônica indica que o gráfico que representa a equação está rotacionada de sua posição padrão. por sua vez, a presença dos termos lineares na equação indica que o gráfico está transladado de sua posição padrão.

Procedimento Geral de Classificação das cônicas

Dada a equação(em coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^2$)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \;\; (A \text{ ou } B \text{ ou } C \neq 0).$$

Para achar que figura ela representa no plano, devemos proceder da seguinte maneira:

Passo 1. Escrevemos a equação na forma matricial;

Passo 2. Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos;

Passo 3. Obtemos as novas coordenadas;

Passo 4. Substituimos as novas coordenadas na equação, obtendo a equação na nova base $\{v_1, v_2\}$;

Passo 5. Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não-nulos;

Exemplo 4.2.2 *Dada a equação na base canônica α de $\mathbb{R}^3$,*

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$$

nosso objetivo será determinar que figura esta cônica representa no plano.

Para isso, precisamos inicialmente eliminar os termos mistos, do tipo xy, através da diagonalização da forma quadrática.

Passo 1: Escrevemos a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & -16\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 4.$$

Passo 2: Vamos calcular os autovalores e autovetores ortonormais da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4).$$

Então os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$.

Para $\lambda_1 = 4$, $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Para $\lambda_2 = 9$, $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $v_1 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Sabemos do teo. 3.7.2 que nesta nova base de autovetores $\beta = \{v_1, v_2\}$, a forma quadrática

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ onde } [v]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se reduz à

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ se } [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Devemos determinar a relação que existe entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e substituir o resultado na parte linear da equação dada,

$$L(v) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & -16\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tendo em vista que queremos determinar uma rotação, então escrevemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Passo 4: A equação original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & -16\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 4 = 0$$

assim temos,

$$4x_1^2 + 9y_1^2 - 8x_1 - 36y_1 + 4 = 0. \qquad (4.1)$$

Esta nova equação representa a cônica em relação ao novo referencial formado pelas retas suporte de v_1 e v_2.

Vamos introduzir uma nova mudança de coordenadas para identificar a cônica. Ela será dada por uma translação do referencial acima.

Passo 5: Para "eliminar"os termos lineares onde isso é possível ($\lambda \neq 0$), agrupamos os termos de $4x_1^2 + 9y_1^2 - 8x_1 - 36y_1 + 4 = 0$ convenientemente.

$$4(x_1^2 - 2x_1 + 1) + 9(y_1^2 - 4y_1 + 4) = -4 + 4 + 36$$

ou

$$4(x_1 - 1)^2 + 9(y_1 - 2)^2 = 36.$$

Utilizando as fórmulas de translação, temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 1, \\ y_2 &= y_1 - 2. \end{aligned}$$

A equação (4.1) passa a ser

$$4x_2^2 + 9y_2^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1$$

que é o gráfico de uma elipse.

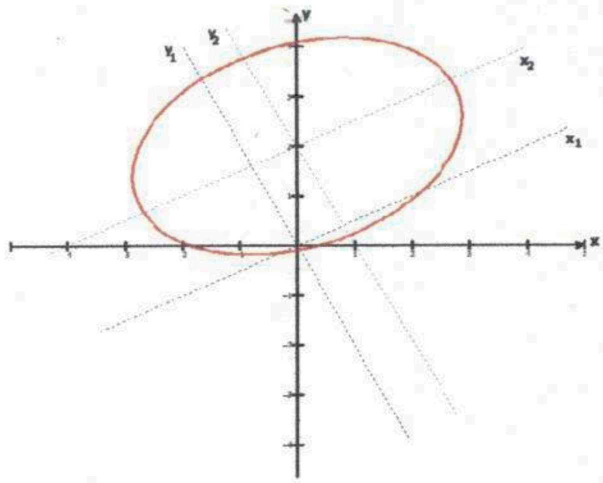

Figura 4.1: Esboço

Muitas vezes, entretanto, estaremos interessados apenas em classificar a cônica dada por uma equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

sem determinar suas dimensões e localização. Vamos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Teorema 4.2.1 *Dada uma cônica definida pela equação*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Sejam λ_1, λ_2 os autovalores associados à sua forma quadrática, então:

1. *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações.*
2. *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole, ou suas degenerações.*
3. *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenareções.*

Demonstração. Ver [2].

Exemplo 4.2.3 *Seja $\mathbb{R}^2$ com produto interno usual. Classifique a cônica*

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 - 1 = 0\}.$$

Temos que a cônica na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 1 = 0$$

O polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ é

$$f_A = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Logo, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ são autovalores de A.

Como $\lambda_1.\lambda_2 < 0$, esta equação representa uma hipérbole, ou suas degenerações.

4.3 Quádricas em $\mathbb{R}^3$

Dada uma equação do $\mathbb{R}^3$ do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

que representa uma quádrica, para classificarmos que figura quádrica ela representa procedemos de maneira análoga ao procedimento da classificação das cônicas.

Exemplo 4.3.1 *Descreva a superfície quádrica cuja equação é*

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

Devemos resolver

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3.$$

Calculando os autovalores e os autovetores respectivos (já normalizados) da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obtemos:

Para $\lambda_1 = 2; v_1 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $v_2 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$

Para $\lambda_2 = 8; v_3 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$

Temos ainda $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$.

Tendo em vista que queremos determinar uma rotação, então escrevemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Então, a equação original torna-se

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 3$$

ou $2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2 = 3$, portanto

$$\frac{x_1^2}{3/2} + \frac{y_1^2}{3/2} + \frac{z_1^2}{3/8} = 1$$

que é um elipsóide.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. *Álgebra Linear Com Aplicações.* 8ª ed. Porto Alegre, Bookman, 2001.

[2] BOLDRINI, Jose Luiz. *Álgebra Linear I.* 3ª ed. São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear.* 8ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[4] MUNEM, Mustafa A. E Foulis, *Cálculo Com Geometria Analítica.* , vol 2. Rio De Janeiro, Guanabara Dois Swokowski, 1982.

[5] SANTOS, Reginaldo J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica.*, Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 2010.

[6] SILVA, Antônio De Andrade. *Introdução à Álgebra Linear.* , 3ªed. João Pessoa, Universitária/UFPB, 2007.

[7] STEINBRUCH, Alfredo. *Álgebra Linear I.* 2ª ed. São Paulo, Pearson Makron Books, 1987.

[8] TENENBLAT, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial.* , 3ªed. Brasília, Universidade De Brasília, 1988.

[9] WEARDEN, B. L. Vander. *A history of algebra.* , Berlim, Verlay, 1985.