



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

**GEOMETRIA: ÁREA E VOLUME ATRAVÉS DE
EMBALAGENS**

MARIA DE FÁTIMA PONTES DOS SANTOS

Julho de 2010

UFCG
BIBLIOTECA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

**GEOMETRIA: ÁREA E VOLUME ATRAVÉS DE
EMBALAGENS**

MARIA DE FÁTIMA PONTES DOS SANTOS

Julho de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE



Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237g Santos, Maria de Fátima Pontes dos.

Geometria: área e volume através das embalagens. / Maria de Fátima Pontes dos Santos – Cuité: CES, 2010.

92 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde – UFCEG, 2010.

Orientadora: Msc Márcia Cristina Silva Brito.

Co-orientadora: Msc Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Geometria - aprendizagem. 2. Área – embalagens. 3. Medidas - embalagens. I. Título.

CDU 514



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Geometria: Área e Volume Através das Embalagens

Maria de Fátima Pontes dos Santos

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 05 de julho de 2010.

Banca Examinadora



Prof.^a Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)



Prof.^a Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)



Prof. José Urânio das Neves

A toda minha família e amigos.

Agradecimentos

A Deus, que tornou esse momento possível.

Ao meu esposo José Nilson dos Santos Araújo que me apoiou, incondicionalmente, sendo compreensivo e paciente em todos os momentos difíceis.

Aos meus filhos Camila Fernandes Pontes dos Santos e Lucas Fernandes Pontes dos Santos que superaram com bravura minha ausência, dando-me carinho e apoio.

Aos meus pais Severina Edvan de Pontes Silva e Aurino Fernandes da Silva, por acreditarem na minha capacidade e me darem força para superar as dificuldades.

Aos meus irmãos Maria Cleide Pontes Silva de Sá, Sandra Vilásia Pontes Silva e Aurino Fernandes das Silva Júnior, que me deram apoio incentivando-me a continuar e não fraquejar.

Aos meus sobrinhos Rodrigo Pontes Silva Sá, Amanda Pontes Silva Sá e Nataly Palmeira Fernandes que abrilhantaram minha vida durante essa jornada.

A minha comadre Rosana Andrade de Araújo, que teve um papel importantíssimo no decorrer do meu curso, dando-me suporte pedagógico e psicológico.

A minha orientadora Márcia Cristina Silva Brito e co-orientadora Maria Gisélia Vasconcelos, por acreditarem na minha capacidade, tendo paciência e discernimento para o desenvolvimento do trabalho; e pela amizade construída no decorrer do curso.

Aos meus novos amigos Jocássia Emanuelle da Silva Casado e Renato Pereira Silva que tornaram possível esse momento, ajudando-me e incentivando-me nessa jornada.

Enfim, a todos os professores da banca: Professor José Urânio das Neves, Professoras Márcia Cristina Silva Brito e Maria Gisélia Vasconcelos; aos professores que tive o prazer de estudar nesse campus: Anselmo Lopes, Angelo Roncalli, Aluizio Freire, Lucas Pereira, Glageane Sousa, Gleidson, José Fernando, Heron, José Justino, Ramilton Marinho, Daniel, Marcelo, Vladimir Catão, Lauro Xavier, Caroline, Letícia, Vivian, Denise; aos funcionários que presenciaram nossa luta; aos alunos da matemática e a todos que direta e indiretamente contribuíram para tornar esse momento possível.

“Bom mesmo é ir à luta com determinação, abraçar a vida e viver com paixão, perder com classe e viver com ousadia. Pois o triunfo pertence a quem se atreve e a vida é muito bela para ser insignificante.”

Charles Chaplin

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal explorar o uso de embalagens para o ensino de geometria. Estimular professores a trabalhar com elementos de mediação que facilitem o processo de ensino/aprendizagem da geometria, tornando-a de fácil acesso a todos, levando o aluno a compreender conceitos geométricos de forma clara e objetiva através das embalagens com formas tridimensionais. Através desse suporte pedagógico, o educador proporcionará ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos estimulando-os a vivenciarem a geometria. Dessa forma, os conteúdos estudados, através das embalagens, propiciarão uma compreensão mais abrangente, interessante e estimulante. O uso das embalagens, no processo de ensino/aprendizagem é viável para se ter noções de área, volume e, além disso, compreender com clareza a planificação de objetos tridimensionais.

Palavras - Chave: APRENDIZAGEM - ÁREA - VOLUME - MEDIDAS - MEDIAÇÃO - EMBALAGENS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Abstract

The present work has as main objective to explore the use of packages for the teaching of geometry. Encourage teachers to work with elements of mediation to facilitate the teaching / learning of geometry, making it easily accessible to all, leading the student to understand geometric concepts clearly and objectively through the packages with three-dimensional shapes. Through this teaching support, the teacher will provide students with a better understanding of the concepts by encouraging them to experience geometry. Thus, the contents studied by means of packaging, foster a broader understanding, interesting and stimulating. The use of packaging in the teaching / learning is feasible to have notions of area, volume and, furthermore, to understand clearly the planning of three-dimensional objects.

KEYWORDS: LEARNING - AREA - VOLUME - MEASURES - MEDIATION - PACKAGING

Sumário

Introdução	10
1 Fundamentos Metodológicos da Proposta	13
2 Aspectos Históricos da Geometria	18
3 Conceitos Básicos da Geometria Euclidiana	24
3.1 Noções Primitivas e Axiomas	24
3.1.1 Posição de Retas	26
3.1.2 Posição Relativa de Reta e Plano	28
3.1.3 Posição Relativa de Dois Planos	29
3.1.4 Projeção Ortogonal	30
3.1.5 Ângulos	32
3.1.6 Paralelismo e Perpendicularismo	34
3.2 Tópicos de Geometria Plana	41
3.2.1 Polígonos	41
3.2.2 Polígonos Regulares	46
3.2.3 Áreas de algumas figuras planas	49
3.3 Poliedros Convexos	51
3.4 Prismas	54
3.4.1 Elementos	55
3.4.2 Classificação	56
3.5 Área da Superfície de um Prisma	58

	9
3.5.1 Área da superfície de um prisma	58
3.6 Volume de Superfície	61
3.6.1 Volume do paralelepípedo retângulo	61
3.7 Cilindros	64
3.7.1 Elementos	65
3.7.2 Cilindro circular reto	65
3.7.3 Área da superfície de um cilindro	66
3.7.4 Volume do cilindro	67
4 Aplicações e Contextualizações	68
Considerações Finais	88
Referências Bibliográficas	90

UFPA

Introdução

O processo de ensino/aprendizagem da matemática é algo que vem preocupando pesquisadores, professores e educadores. O alto índice de reprovação e a baixa aceitação da disciplina tornam o problema ainda maior.

O ensino da geometria vem sendo deixado de lado ao longo dos anos. A falta de compreensão do conteúdo, por parte dos professores e alunos, dificulta a aplicação de conceitos geométricos.

Durante os quatro anos que estive como aluna envolvida no curso de Licenciatura em Matemática, percebi o quanto é falha a nossa educação básica. Teoria e prática andam separadas no decorrer do processo de ensino/aprendizagem nas escolas. Professores atropelam os conteúdos de geometria como se os mesmos não tivessem importância para o futuro acadêmico e no cotidiano dos alunos.

Diante dessas problemáticas, estamos propondo um trabalho diferenciado para a geometria através do uso de embalagens. A facilidade, de aquisição do material, possibilita expandir o leque de aplicações, dessa forma os alunos poderão compreender melhor o conceito de área e volume, através das planificações das figuras tridimensionais tornando os conceitos mais claros e objetivos.

Desenvolver meios que facilitem essa compreensão, por parte dos alunos, é nosso dever. Trabalhar com embalagens é de extrema importância para se compreender os aspectos geométricos envolvidos em sua construção. Mostrar aos alunos objetos que fazem parte do seu dia a dia, faz com que o estímulo seja aguçado e a curiosidade se torne mais acentuada.

O ensino de geometria pode ser feito na escola básica de forma mais acessível ao

aluno, desde que se tenha um domínio razoável dos conceitos básicos. Esta compreensão levará o aluno a um maior envolvimento com o conhecimento matemático. Desta forma, ele poderá perceber que as formas geométricas estão presentes em todos os espaços que vivemos. Esse estímulo faz com que eles vejam a geometria com outros olhos, compreenderão que ela está presente no cotidiano de cada um, independente do lugar em que vive, ela pode ser trabalhada e analisada “facilmente”.

A exploração de embalagens usadas no dia a dia, mostra aos alunos a importância da matemática no cotidiano. Ao se fazer o estudo de área e volume é possível distinguir a diferença entre os dois conceitos a partir das formas das embalagens.

O aluno será capaz de distinguir alguns problemas existentes em torno de algumas embalagens que contém o mesmo produto, a mesma gramatura, mas formas geométricas diferentes.

Este trabalho, ora iniciado, tem como objetivo estimular os professores a usar embalagens como material didático para o ensino da geometria, principalmente na escola básica. O importante é aguçar a compreensão por parte dos alunos dos conceitos envolvidos nas formas tridimensionais.



Objetivos

Objetivo Geral

Trabalhar com embalagens de formas geométricas variadas, estimulando o aluno a gostar de matemática e, como consequência, desenvolver uma melhor formação de pensamento.

Objetivos Específicos

- Despertar o interesse pela geometria espacial;
- Possibilitar a visualização e a compreensão dos elementos existentes nas formas geométricas;
- Mostrar a importância das aplicações do conhecimento geométrico no dia a dia.

Capítulo 1

Fundamentos Metodológicos da Proposta

A matemática, ao longo dos tempos, vem despertando “medos” e “traumas” para muitos. Sua extensa variedade de conceitos, teoremas e definições; contribuiu para mistificar que a matemática foi “feita pra poucos”. Diante dessa problemática, estamos propondo nesse trabalho, contribuir para uma melhor compreensão da geometria, através das formas geométricas das embalagens.

Sabemos que a matemática, através de aplicações específicas que envolvam problemas que fazem parte do cotidiano das pessoas, torna-se mais fácil de ser compreendida. O fato de mostrá-la de forma concreta, sem muitas abstrações, possibilita ao aluno questionar e manipular com simplicidade e sabedoria os objetos que lhes são apresentados.

A qualidade do ensino da matemática é algo que nos últimos anos tem estimulado pesquisadores a buscar explicações para o alto índice de reprovação e o baixo nível de compreensão dos seus conceitos. Entre as inúmeras explicações, encontramos aquelas que apontam para necessidade da existência de instrumentos motivadores da aprendizagem matemática, como relata D’Ambrósio:

“Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções matemáticas e intelectuais mais imediatas.” (D’Ambrósio: 1996, p. 31)

Quando se fala sobre percepções imediatas, não se tem em mente retirar da matemática o desafio intelectual, mas desafiar a elaboração de mecanismo que possa facilitar, de forma não apenas abstrata, a compreensão dos conceitos matemáticos. Entre estes mecanismos, podemos destacar os instrumentos de mediação, que tem como exemplo as atividades com materiais concretos como os sólidos geométricos apresentados através de embalagens. A falta de criatividade e motivação dos professores gera uma situação problema no processo de ensino/aprendizado da matemática. Preocupado com essa problemática, Paulo Freire defendia a contextualização do conteúdo e a busca pelo novo. Vygotsky propunha o uso de instrumentos de mediação que facilitem o processo de ensino/aprendizagem.

A matemática vem sendo vista como uma disciplina difícil de ser compreendida e “feita” para poucos. As dificuldades existentes para se compreender a complexidade e a magnitude da matemática, estão presentes no dia a dia do ser humano. Destaca-se a incompreensão existente nas salas de aula e a falta de entusiasmo em buscar métodos e meios para se desenvolver um trabalho com maior precisão. A matemática não pode mais ser vista como difícil de ser compreendida, essa concepção deve ser mudada através de trabalhos contextualizados e uso de materiais didáticos pedagógicos. O processo de ensino/aprendizado deve ser dinâmico e expressivo, capaz de possibilitar ao aluno uma busca por conhecimentos mais específicos, levando-o a raciocinar com mais veracidade.

Entender matemática e compreender a sua importância no dia a dia é encontrar intercâmbios que possam facilitar a sua compreensão e o seu ensino. Para Marta Kohl, o uso dos signos, elementos de mediação proposto por Vygotsky, é de extrema importância para o processo de ensino/aprendizagem. Para ele, o ser humano, ao contrário dos animais, é capaz de pensar, imaginar, planejar e executar ações posteriores e que o funcionamento psicológico se dá através da mediação, que é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação. Segundo Marta Kohl, Vygotsky afirma que o aprendizado deixa de ser direto, e passa a ser mediado através de instrumentos e de signos que estabelecerão uma relação do homem com o mundo.



Esses elementos mediadores são fundamentais para o processo de ensino-aprendizagem do ser humano em suas diferentes fases de desenvolvimento.

A tarefa do educador é buscar conhecimentos diferenciados para a prática do ensino, é levantar questões que desperte a curiosidade do aluno. A mediação através de instrumentos é importante para estimular o interesse de se aprender com mais entusiasmo a matemática.

“A grande tarefa do sujeito que pensa certo não é transferir, depositar, oferecer, doar ao outro, tomado como paciente de seu pensar, a inteligibilidade das coisas, dos fatos, dos conceitos. A tarefa coerente do educador que pensa certo é, exercendo como ser humano a irrecusável prática de entender, desafiar o educando com quem se comunica e a quem comunica, produzir sua compreensão do que vem sendo comunicado.” (Paulo Freire: 1996, p.38)

O processo de ensino/aprendizagem da matemática deve ser contextualizado, integrando o sujeito com situações cotidianas, levando-o a compreender sua importância no dia a dia. Interagir com essa realidade é uma responsabilidade do professor. Ser persistente na busca pelo novo e compreender as mudanças diárias, são necessárias para levar conhecimentos com mais competência e organização. Segundo Edgar Morin, por mais difícil que seja a compreensão do mundo e suas limitações, essa busca deve ser incessante e necessária.

“O conhecimento dos problemas-chave, das informações-chave relativas ao mundo, por mais aleatório e difícil que seja, deve ser tentado sob pena de imperfeição cognitiva, mais ainda quando o contexto atual de qualquer conhecimento político, econômico, antropológico, ecológico é o próprio mundo.” (Edgar Morin: 2006, p.35).

Estudar geometria é mergulhar no fascínio das formas existentes nos objetos, nas construções, nas obras de arte, na natureza; enfim em tudo que é belo e transforma o meio para fascinar e aguçar a busca por conhecimentos matemáticos que fazem parte do dia a dia de todos.

A geometria vem sendo vista como menos importante e difícil de ser aplicada. Na maioria das escolas, os professores, ou por falta de conhecimento ou por simples comodismo, descartam o estudo da geometria do programa escolar. Esse descarte traz conseqüências catastróficas para a compreensão de problemas geométricos enfrentados pelos alunos quando buscam cursar o ensino superior. Diante de tantas interjeições, nota-se que os elementos de mediação são necessários para uma melhor compreensão dos conteúdos ensinados.

Diante de tantas problemáticas, torna-se necessário a escolha e estudo de elementos mediadores que facilitem a compreensão e o desenrolar do conteúdo da geometria. Vários estudiosos trabalham com o intuito de colaborar com o saber matemático. Saberes que se tornam esquecidos e desvinculados da sociedade. Atentos a desmistificar o fato de a matemática ter sido feita para poucos, estuda-se meios que facilitem a compreensão da geometria euclidiana através de suas aplicações.

Trabalhar com o lúdico é construtivo e prazeroso, mas compreendê-lo de forma pedagógica é de extrema importância para não complicar ainda mais o que está sendo aplicado. Capacitar professores para que possam desenvolver trabalhos junto aos alunos é necessário para que o ensino se torne digno e satisfatório. Nota-se uma urgência em trabalhar com elementos de mediação para o ensino e aprendizagem da geometria. As formas geométricas tridimensionais, não são visualizadas com facilidade na lousa. Ensinar geometria escolar sem recorrer a instrumentos mediadores é tarefa árdua e propícia a muito insucesso.

O ensino da geometria deve ser iniciado, com ênfase, nas séries iniciais, facilitando a compreensão dos alunos na formalização dos conteúdos a serem estudados posteriormente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) defendem o ensino da geometria no início da escolarização das crianças.

Uma formação qualificada de professores é fundamental para que o ensino e aprendizagem da geometria seja eficaz.

“Todavia, mesmo tais recomendações fazendo parte das propostas curriculares há já alguns anos, o que se constata é que os próprios docentes que atuam nas séries iniciais ingressavam no Magistério sem a adequada formação em geometria. Mesmo os cursos de formação diferenciados, como CEFAM, davam prioridade, nas aulas de Metodologia de Ensino da Matemática, à formação em aritmética.”(Adair Nacarato: 2003, p.32)

A intervenção pedagógica, feita de forma responsável e segura, é de extrema importância para que o aluno possa construir conceitos matemáticos comuns nas formas geométricas. Instigar os alunos a compreender e firmar conceitos matemáticos em objetos, que possuem formas geométricas tridimensionais, faz com que eles enxerguem a beleza geométrica existente ao seu redor, facilitando a compreensão, tendo em vista que o que está sendo estudado serve de base para compreender o desenvolvimento arquitetônico do meio em que vivem.

Mostrar a magnitude geométrica aos alunos, através de situações do cotidiano, facilita o entendimento do conteúdo dado. Muitas vezes a matemática é mal compreendida por não se saber onde vai ser aplicado o que está sendo estudado. Possibilitar ao aluno essa visualização de problemas que envolvem o dia a dia de cada um, desenvolve uma curiosidade pelo que vai ser estudado, estimulando-o a pesquisar e enxergar as formas e belezas geométricas em cada espaço vivenciado.

Fazer o aluno criar uma perspectiva (melhor representação plana de um objeto tridimensional), ver, interpretar e produzir desenhos é um desafio constante para os professores. Esse entendimento só pode acontecer através de intervenção pedagógica. Para que isso ocorra, o professor tem que estar bem preparado e seguro do trabalho, compreendendo com precisão o objeto a ser planejado.

Capítulo 2

Aspectos Históricos da Geometria

Sabemos que a geometria é a mais antiga das ciências e que sua origem vem das civilizações egípcias. Parte do conhecimento da geometria que se tem até hoje, baseia-se em registros feitos em documentos denominados papiros. Dentre os principais podemos citar o “papiro de Rhind” (apresenta informações sobre trigonometria, aritmética, equações, progressões e cálculo de área e volume) e o “papiro de Moscou” (apresenta uma forma de cálculo do tronco de pirâmide quadrada). Sabe-se que as representações geométricas estão presentes no nosso mundo. Não se sabe ao certo quanto tempo tem a geometria, como ciência, mas muitos matemáticos ocuparam-se em entender a magia presente em cada figura ou forma existente na terra.

Compreender a magnitude da geometria é viajar num mundo de imaginação. A imaginação que nos vislumbra com as formas impressionantes encontradas nas pirâmides do Egito, na magnitude do céu, na beleza da lua; e tantas outras belezas naturais existentes no nosso meio. O estudo da geometria tornou-se necessário para a compreensão de problemas existentes no cotidiano. Uma das necessidades foi à medição de terra, feita pelos agrimensores, que teve influência direta no desenrolar da história do homem.

Em tempos remotos a geometria era uma ciência empírica, era utilizada para obter resultados aproximados de determinados estudos. Mesmo assim, foi utilizada para construção de vários monumentos, como as pirâmides e templos Babilônicos e Egípcios.

O interessante, na história da geometria, é que o seu estudo teve início baseado em hipótese falsa. Acreditava-se que a Terra era plana, portanto todas as pesquisas foram feitas baseadas nessa crença, apesar de tudo isso o desenvolvimento da geometria não ficou limitado a esta visão.

Destaquemos alguns matemáticos importantes para o desenvolvimento da geometria:

Tales de Mileto (624-548 a.C.)

Tales de Mileto teve um papel crucial para a compreensão geométrica de alguns fatos geométricos, objetos e monumentos da época. Suas descobertas e fascinação pelo incompreensível, fez com que o desenvolvimento geométrico tomasse dimensões extraordinárias para a época, estendendo-se até os dias atuais.

Atribui-se a Tales as seguintes afirmações:

- Os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais;
- Teorema: se dois triângulos tem dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais;
- Todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;
- Ao unir qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo em C.

Tales também fez a seguinte observação: se duas retas se cortam, então os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Esse grande matemático deu início às demonstrações, também calculou a altura da Pirâmide de Queops, no Egito, usando semelhança de triângulos. Infelizmente, suas obras não sobreviveram ao tempo. O que se sabe, diz respeito a antigas referências gregas à história da matemática que o atribui um número significativo de descobertas.

Platão (427 - 347 a.C.)

Platão foi um importante filósofo grego, nasceu provavelmente em 427 a.C. Foi considerado um grande pensador por sua influência na filosofia ocidental. Era fascinado pela matemática, dizia que a filosofia era responsável em descobrir a verdade para além da opinião e da aparência, das mudanças e ilusões do mundo, enquanto a Matemática é um exemplo de conhecimento de verdades eternas e necessárias independente da experiência dos sentidos. Ele sempre considerou que a ciência dos números ou aritmética se encontra acima de muitas outras que eram tidas como essenciais para as artes profissionais.

Platão não deu tantas contribuições específicas a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época, guiava e inspirava seu desenvolvimento. O seu entusiasmo pela geometria fez com que ele se tornasse conhecido, não como matemático, mas como “o criador de matemáticos”. Ele foi convertido a uma visão matemática por Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília em 388 a.C. Provavelmente foi dessa forma que ele teve conhecimento dos cinco sólidos regulares, que eram associados aos quatro elementos de Empédocles (fogo - tetraedro, terra - cubo, ar - octaedro, água - icosaedro) num esquema cósmico que surpreendeu os homens por séculos. Platão considerou o dodecaedro como o quinto elemento, talvez por veneração dos Pitagóricos por esse sólido.

Os poliedros regulares foram chamados “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos” devido à maneira pela qual Platão os aplicou à explicação de fenômenos científicos.

Euclides (séc. III a.C.)

Foi no período grego, entre 600 a 300 a.C., que a geometria se firmou como um sistema organizado, e muito disso se deve a Euclides, mestre na escola de Alexandria (Cidade do Egito, famosa por seu farol), que publicou por volta de 325 a.C. Os Elementos, uma obra com treze volumes, propondo um sistema inédito no estudo da Geometria.

Esse trabalho de Euclides é tão extenso que alguns historiadores não acreditaram que fosse obra de apenas um homem. Mas essas desconfianças não foram suficientes

para tirar o mérito de Euclides o primeiro a organizar metodicamente o conhecimento geométrico da época.

Arquimedes (287 - 212 a.C.)

Durante toda a Idade Helenística o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas Arquimedes - maior matemático da época - não nasceu nessa cidade; nasceu na Sicília, era matemático e geômetra, foi considerado o primeiro grande engenheiro da Antiguidade. Ele adquiriu uma reputação em astronomia, provavelmente por influência do pai que era um astrônomo. Foi o criador de vários engenhos mecânicos. Seu maior interesse era por princípios gerais em aplicações simples.

Esse matemático tinha uma capacidade de invenção extraordinária. Foi o primeiro a demonstrar que “a reta é o caminho mais curto entre dois pontos”, a dar o valor aproximado de π , a calcular o volume e a área da superfície da esfera, a área da elipse, o volume do conóide e dos esferóides.

Arquimedes introduziu na geometria a noção de movimento. Assim pôde construir a espiral a partir do círculo e, através de um método idêntico, construir os volumes que posteriormente se deu o nome de “sólidos de revolução”.

Algumas descobertas de Arquimedes:

- Medida do círculo;
- Área de um segmento parabólico;
- Volume de segmento de parabolóide;
- Segmento de esfera;
- Volume de uma esfera.

Entre outras descobertas importantíssimas que contribuíram para o desenvolvimento da geometria.

Cavalieri Bonaventura (1598 - 1647)

Outro grande matemático que contribuiu para o desenvolvimento da geometria foi Cavalieri Bonaventura. Cavalieri nasceu em Milão na Itália, foi um sacerdote jesuíta e matemático italiano discípulo de Galileu. Estudou astronomia, trigonometria esférica e cálculo logarítmico. É considerado um dos precursores do cálculo integral. Ele descobriu que se duas figuras planas podem ser comprimidas entre linhas retas paralelas de tal forma que tenham seções verticais idênticas em cada segmento, então as figuras têm a mesma área.

Cavalieri deu sua contribuição com grande ênfase para o desenvolvimento da geometria. Suas deduções foram fundamentais para fundamentar o cálculo de área e volume de sólidos geométricos.

Leonard Euler (1707 - 1783)

Leonard Euler nasceu em Basil na Suíça, foi um dos grandes matemáticos do século dezoito. Publicou 886 trabalhos, praticamente todos no final da sua vida. Euler teve grande influência na matemática, física, engenharia e astronomia.

Euler era um homem surpreendente. Sua facilidade de concentração e percepção foi crucial para que ele pudesse continuar o desenvolvimento dos seus estudos, mesmo depois da cegueira total que custou seus últimos 17 anos de vida. Sua deficiência engrandeceu ainda mais seus trabalhos, que continuaram sendo publicados durante 30 anos após sua morte.

Uma das grandes contribuições de Euler para a geometria foi o seguinte teorema (chamado teorema de Euler):

Em todo poliedro convexo o número de aresta mais dois é igual ao número de faces mais o número de vértices.

Isto é,

$$A + 2 = V + F$$

sendo, A , F e V o número de arestas, faces e vértices de um poliedro convexo.

A matemática continua despertando interesses e descobertas, mas nada se compara aos grandes “gênios” matemáticos que, sem ajuda tecnológica, conseguiram con-

tribuir de forma precisa e coerente com o desenrolar da geometria.

Capítulo 3

Conceitos Básicos da Geometria Euclidiana

Sistematizando os conhecimentos que outros povos antigos haviam adquiridos de forma desordenada através do tempo, Euclides deu-lhes ordem lógica, estudando a fundo as propriedades das figuras geométricas, as áreas e os volumes.

Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva cujo desenvolvimento partia de certas hipóteses básicas: os axiomas ou postulados. O grande trabalho de Euclides foi reunir em 13 volumes, sob o título “*Elementos*”, tudo o que se sabia sobre Geometria em seu tempo.

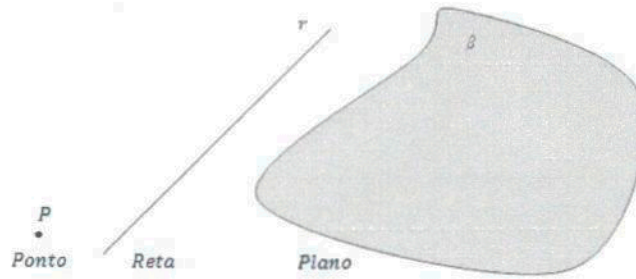
3.1 Noções Primitivas e Axiomas

Os conceitos de **ponto**, **reta**, **plano** e **espaço** são intuitivos. Eles são chamados **conceitos primitivos** e são representados convencionalmente da seguinte forma:

- Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas; ex: A, B, C, \dots
- Retas serão representados por letras latinas minúsculas; ex: a, b, c, \dots
- Planos serão representados por letras gregas minúsculas; ex: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

O **espaço** é pois, o conjunto de todos os pontos. E é nesse conjunto que desenvolveremos a Geometria Espacial.

Representação gráfica



Diremos que dois ou mais pontos são *coplanares* ou *colineares*, respectivamente, se pertencem ao mesmo plano ou a uma mesma reta.

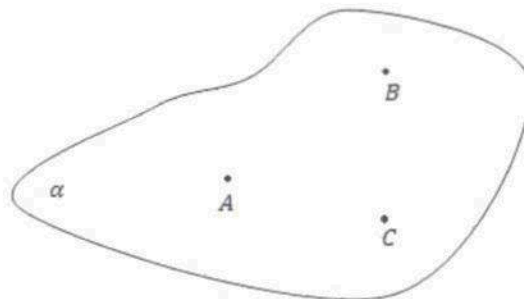
Algumas das propriedades essenciais relacionadas as noções do ponto, reta, plano e espaço, e que podem ser utilizadas como postulados da Geometria Espacial:

Postulado 1. Dados dois pontos distintos do espaço existe uma, e somente uma, reta que os contém.

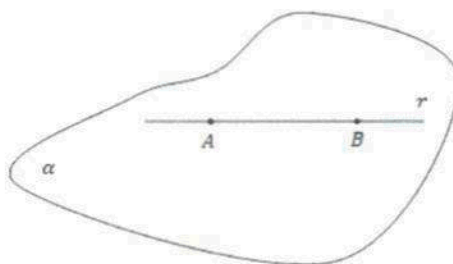


Se A e B são pontos distintos pertencentes à reta r , denotaremos $r = \overleftrightarrow{AB}$ ou $r = \overleftrightarrow{BA}$.

Postulado 2. Dados três pontos não colineares do espaço existe um, e somente um, plano que os contém.



Postulado 3. Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

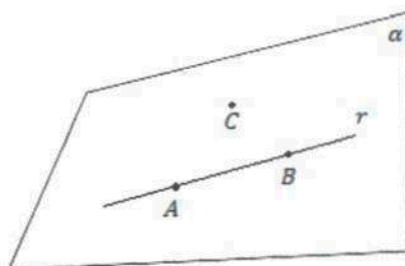


Postulado 4. (Postulado de Euclides) Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

Teorema 3.1.1 *Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.*

Prova:

Seja C um ponto não pertencente à reta r . Tomemos, sobre r , dois pontos distintos A e B .



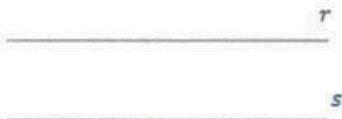
Os pontos A , B e C não são colineares (de fato, pelo Postulado 1, r é a única reta que passa por A e B e, por hipótese, C não pertence a r). Pelo Postulado 2, sabemos que existe um único plano α contendo A , B e C . Como a reta r tem dois de seus pontos (A e B) em α , o Postulado 3 estabelece que r está contida em α . Logo, de fato existe um plano contendo r e C . Como este é o único plano que contém A , B e C , ele é o único que contém C e r .

□

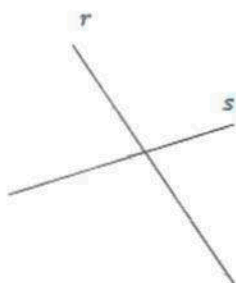
3.1.1 Posição de Retas

Definição 3.1.1 *Duas ou mais retas são coplanares quando existe um plano que contém todas elas.*

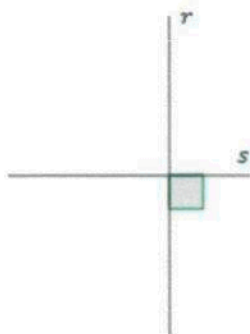
1. Retas coplanares que não tem ponto comum são chamadas de **retas paralelas distintas**. Usaremos a notação $r \parallel s$ para indicar que uma reta r é paralela a uma reta s .



2. Retas que têm um único ponto comum são chamadas de **retas concorrentes** e sempre determinam um plano.

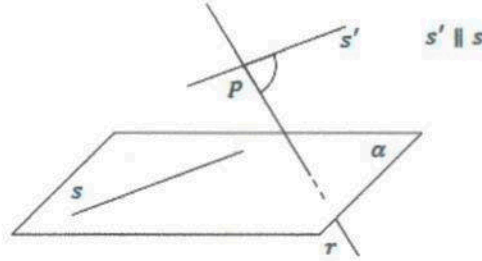


Quando duas retas concorrentes formam entre si um ângulo de 90° , são chamadas **perpendiculares**. Indicamos: $r \perp s$.



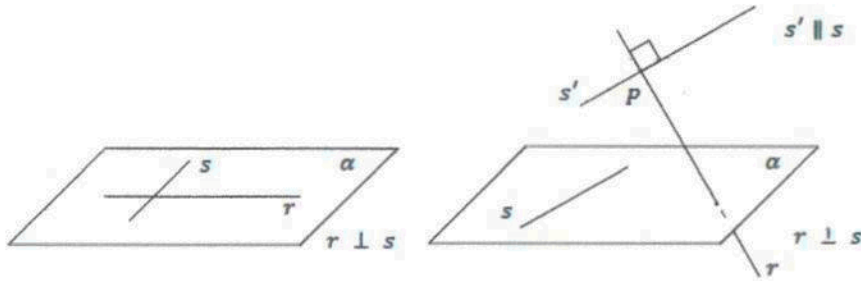
3. Dadas duas retas, quando não existe um plano que contém as duas, elas são chamadas de **retas reversas** (ou não coplanares).

Sejam r e s duas retas reversas. Consideremos sobre a reta r , um ponto P e por ele tracemos a reta s' , paralela à reta s . O ângulo formado pelas retas concorrentes r e s' é, por definição, o ângulo formado pelas retas reversas r e s .



Quando duas retas reversas formam um ângulo de 90° , são chamadas **ortogonais**.

Denotamos por: $r \perp s$

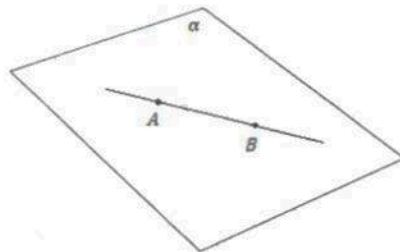


Obs. Tanto as retas perpendiculares como as retas ortogonais formam ângulos de 90° ; a distinção entre elas está no fato de que as retas perpendiculares são coplanares e as ortogonais, não.

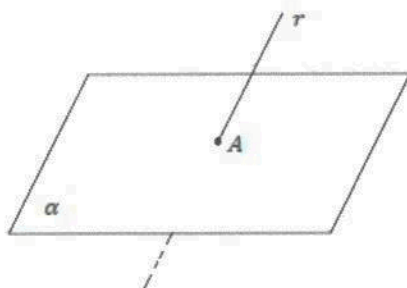
3.1.2 Posição Relativa de Reta e Plano

Uma reta e um plano podem ocupar as seguintes posições:

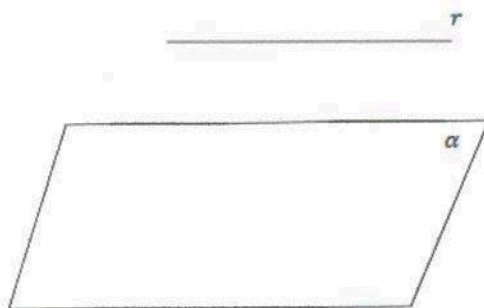
- (i) Se uma reta r possui dois ou mais pontos pertencentes a um plano α , todos os seus pontos estarão em α ; isto é r está **contida** em α .



- (ii) Se uma reta r tem apenas um ponto em comum com o plano α , dizemos nesse caso que r é **secante** a α .



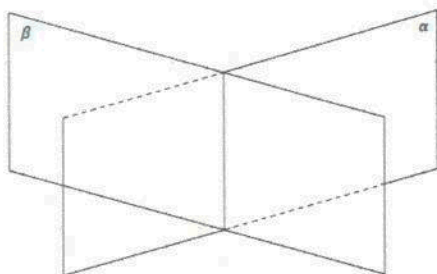
- (iii) Uma reta pode não ter pontos em comum com um plano dizemos que a reta e o plano são **paralelos**. Adotaremos a notação $r \parallel \alpha$ para indicar que uma reta r é paralela a um plano α .



3.1.3 Posição Relativa de Dois Planos

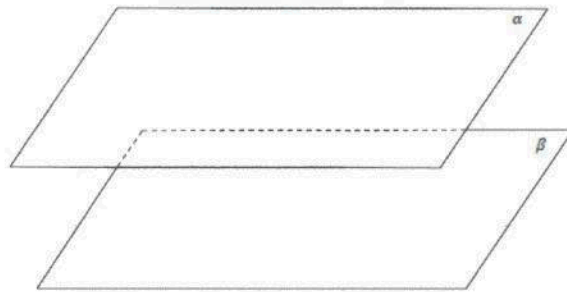
A interseção de dois planos distintos α e β pode ser ou não vazia.

- i. Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta, neste caso, dizemos que os planos são **secantes**.



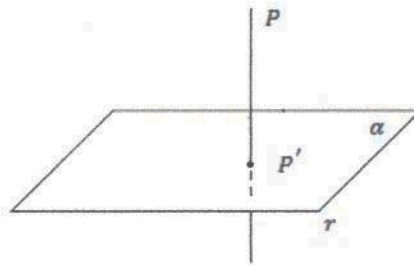
Postulado 5. Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.

ii. Dois planos que não têm ponto comum são chamados **paralelos** distintos e escreveremos $\alpha \parallel \beta$

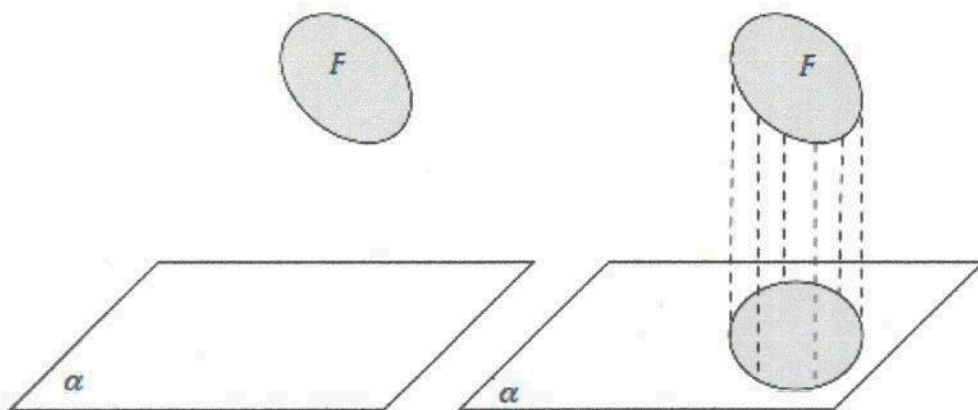


3.1.4 Projeção Ortogonal

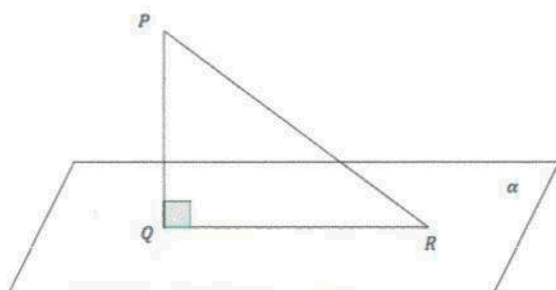
Definição 3.1.2 A **projeção ortogonal** de um ponto P do espaço sobre um plano α é o ponto P' em que a perpendicular a α traçada por P corta α .



Definição 3.1.3 Consideremos, uma figura F e um plano α . A figura F' , que é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos de F sobre α , denomina-se **projeção ortogonal** da figura F sobre o plano α .

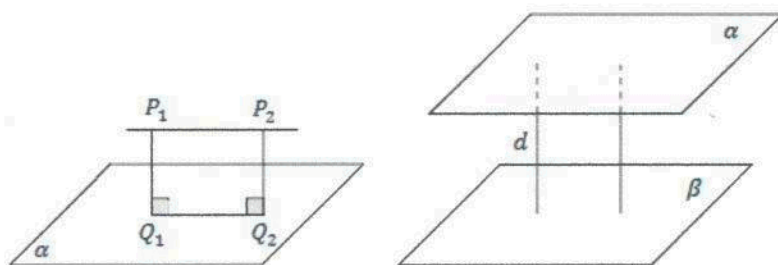


Definição 3.1.4 *Sejam α um plano e $P \notin \alpha$ um ponto. Definimos a **distância** de P a α , denotada por $d(P, \alpha)$, como sendo a distância de P ao pé da perpendicular a α passando por P . Se $P \in \alpha$ a distância de P a α é definida como sendo zero.*

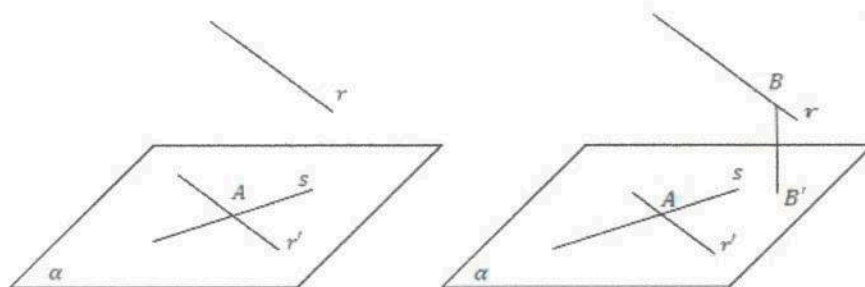


Observe que a distância de P a α , nos dois casos, é a menor das distâncias de P aos pontos de α .

Definição 3.1.5 *Sejam α e β dois planos paralelos. Definimos a **distância** entre α e β , denotada por $d(\alpha, \beta)$, como sendo a distância de um ponto qualquer de um dos dois planos ao outro plano.*



Definição 3.1.6 *Chama-se **distância** entre duas retas reversas r e s , à distância entre um ponto qualquer da reta r e o plano α que contém s e é paralelo à reta r .*



3.1.5 Ângulos

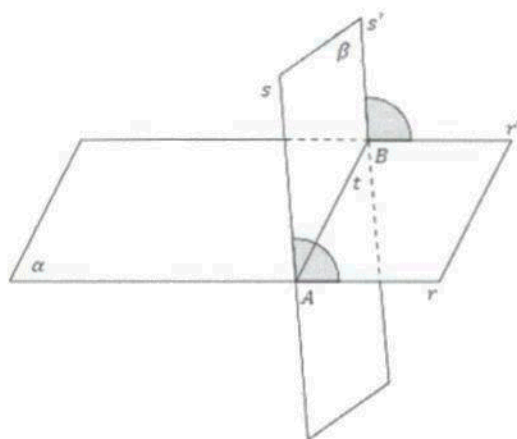
Sejam r e s retas.

1. Se elas são coincidentes ou paralelas dizemos que o ângulo entre elas é zero.
2. Se são concorrentes, elas formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice (que tem a mesma medida) sendo que dois desses ângulos não opostos pelo vértice são suplementares. Neste caso, o ângulo entre elas é, por definição, o menor dos quatro ângulos.

Definição 3.1.7 Definimos o ângulo entre uma reta e um plano α como sendo 90° se r é perpendicular a α e se r não é perpendicular a α como sendo o ângulo que r faz com sua projeção sobre α .

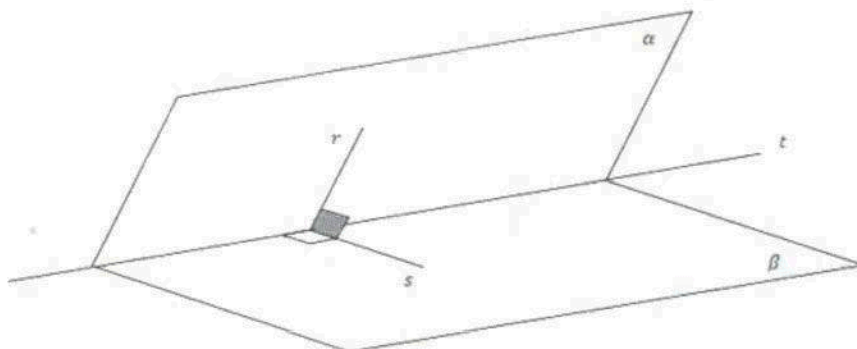
Definição 3.1.8 Se dois planos são coincidentes ou paralelos dizemos que o ângulo entre eles é zero.

Suponhamos que dois planos α e β são concorrentes. Seja $t = \alpha \cap \beta$. Sejam $A, B \in t$, distintos, r e r' as perpendiculares a t em α passando, respectivamente, por A e B , e s e s' as perpendiculares a t em β passando, respectivamente, por A e B .



Assim, temos r e s e r' e s' pares de retas concorrentes tais que $r \parallel r'$ e $s \parallel s'$. Logo, $\angle(r, s) = \angle(r', s')$. Este será por definição, o ângulo entre os planos α e β (o qual independe da escolha dos pontos A e B).

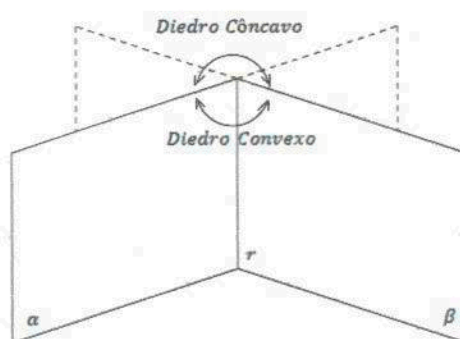
Definição 3.1.9 Diremos que dois planos são perpendiculares se o ângulo entre eles mede 90° .



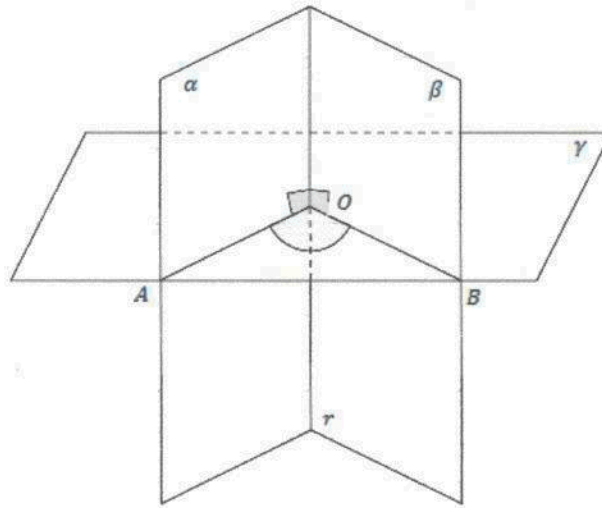
Postulado 6: Uma reta de um plano divide-o em duas regiões denominadas **semiplanos**.



Definição 3.1.10 Chama-se **diedro** ou **ângulo diedral** a reunião de dois semiplanos com mesma origem. Os semi-planos são chamados de **faces** do diedro e a origem comum chama-se **aresta**.



Seccionando um diedro de aresta r por um plano γ perpendicular a r , obtemos um ângulo \widehat{AOB} denominado **secção normal** do diedro.

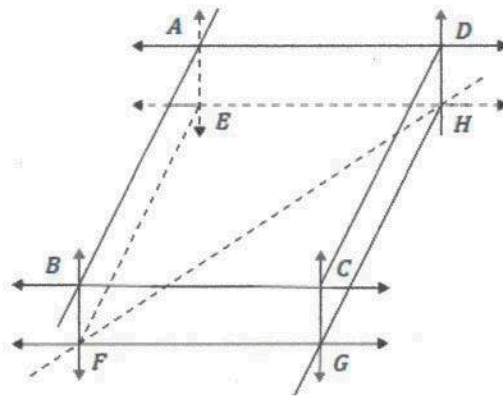


A medida de um diedro é a medida de sua secção normal.

Note que se as faces de um ângulo diedral são semi-planos **coincidentes ou opostos** a medida do ângulo diedral é, por definição, respectivamente, zero ou 180° .

3.1.6 Paralelismo e Perpendicularismo

Podemos ter, em dois planos paralelos, retas que não sejam paralelas.



Podemos ter retas paralelas contidas em dois planos que não sejam paralelos.

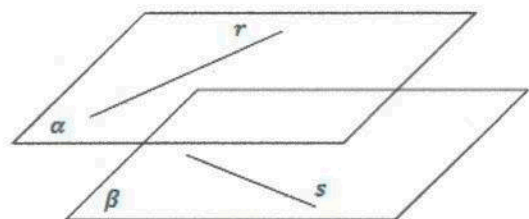
$$\alpha \parallel \beta$$

r está em α

s está em β

r e s não são paralelas

r e s são reversas



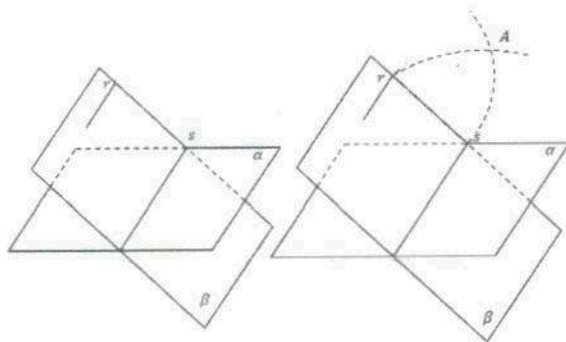
Teorema 3.1.2 *Se uma reta r é paralela a um plano α , e se um plano β contém r e é secante a α segundo uma reta s , então as retas r e s são paralelas.*

Demonstração:

De fato, se r e s não fossem paralelas, por estarem contidas no plano β , deveriam ter um ponto A comum.

Esse ponto A , naturalmente, pertenceria à reta r e ao plano α , o que contraria a hipótese.

Logo, $r \parallel s$.

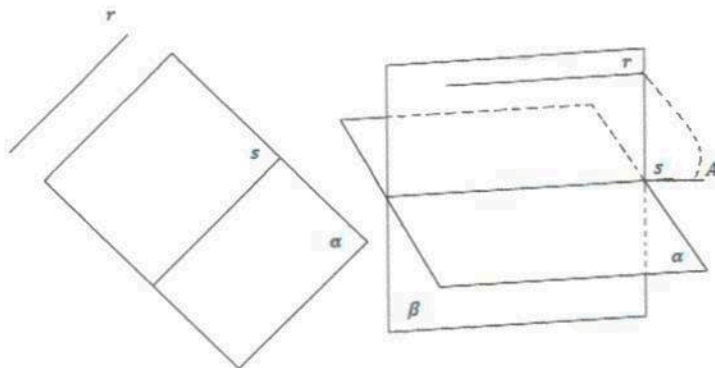


□

Teorema 3.1.3 *Se uma reta r , não contida num plano α , é paralela a uma reta s , contida em α , então as retas r e s são paralelas.*

Demonstração:

As retas r e s determinam um plano β , que é secante a α , segundo uma reta que só pode ser s .



Se r e α tivessem um ponto comum A , ele pertenceria aos plano α e β ; como consequência, o ponto A pertenceria à reta r e à reta s , o que contraria a hipótese. Logo, $r \parallel \alpha$.

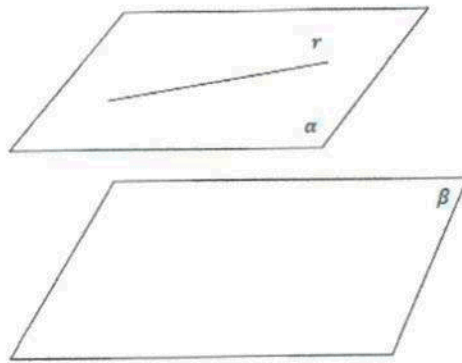
□

Teorema 3.1.4 *Se α e β são planos paralelos, então qualquer reta r contida em α é paralela ao plano β .*

Demonstração:

Se r não fosse paralela ao plano β , teria um ponto em β , o qual seria comum a α e β , contrariando, pois, a hipótese.

Logo, $r \parallel \beta$.

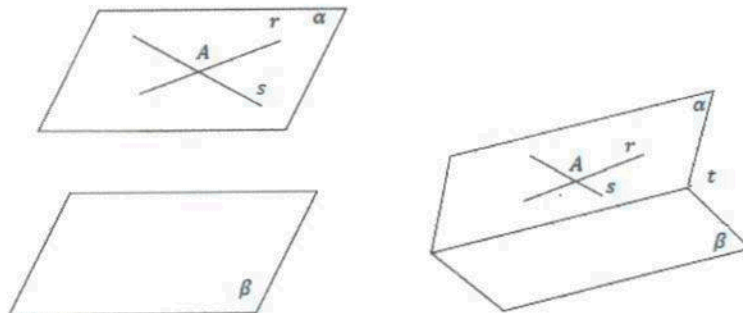


□

Teorema 3.1.5 *Se um plano α contém duas retas r e s concorrentes e ambas paralelas a um outro plano β , então α e β são paralelos.*

Demonstração:

Se α e β não são paralelos, então se interceptam, segundo uma reta t .

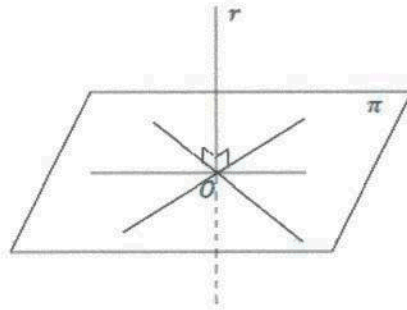


Como r e s seriam paralelas à reta t , então, pelo ponto A , interseção de r e s , teríamos duas paralelas a t , o que é um absurdo. Logo, $\alpha \parallel \beta$.

□

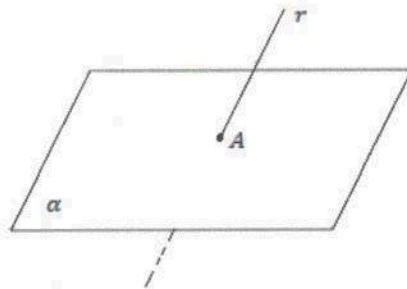
Retas e Planos Perpendiculares

Definição 3.1.11 Diremos que uma reta r que fura um plano π num ponto O é **perpendicular** a π em O ou, simplesmente, perpendicular a π se toda reta contida em π passando por O é perpendicular a r . Nesse caso, diremos ainda que O é o pé da perpendicular r em π .

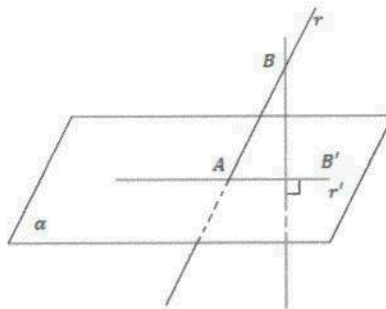


Usaremos a seguinte notação $r \perp \pi$.

Definição 3.1.12 Se uma reta intersecta um plano e não é perpendicular a ele, dizemos que ela é **oblíqua** ao plano.



Quando uma reta é oblíqua a um plano, o ângulo agudo que a reta forma com a sua projeção ortogonal sobre ele é o **ângulo da reta com o plano**.

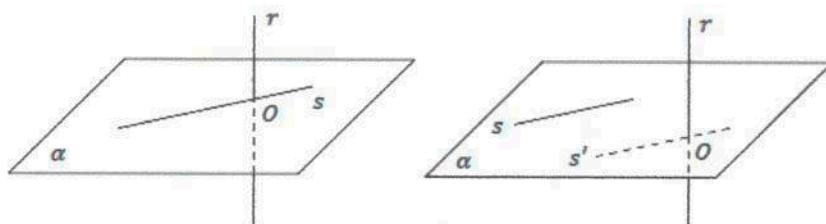


Teorema 3.1.6 *Se uma reta r é perpendicular a um plano α , então r faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em α .*

Demonstração:

Se s é uma reta do plano α e que passa pelo o ponto O , onde r fura α , então, pela a definição, $r \perp s$.

Supondo que s não passe pelo o ponto O , vamos considerar uma reta s' de α que passa por O e é paralela à reta s .



Então, se r é perpendicular a α , é, também, perpendicular a todas as retas de α que passam pelo o ponto O ; logo $r \perp s'$ e $s' \parallel s$, então $r \perp s$.

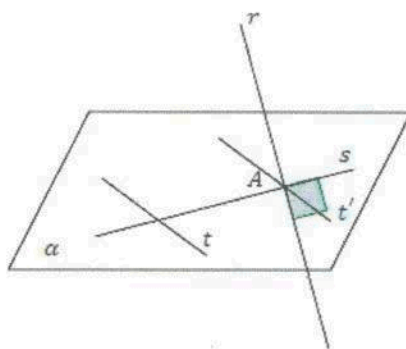
□

Teorema 3.1.7 *Se uma reta r , faz um ângulo reto com duas retas concorrentes s e t de um plano α , então a reta r é perpendicular ao plano α .*

Demonstração:

Caso 1. Sendo $r \perp s$ e $r \perp t$, vamos traçar a reta t' de α passando por O e tal que $t' \parallel t$. Se $r \perp t$ e $t' \parallel t$, então $r \perp t'$.

Logo $r \perp \alpha$, pois r é perpendicular a duas retas s e t' de α que passam por O .

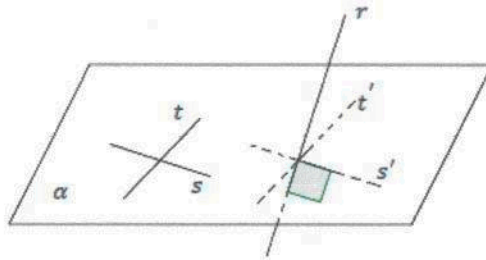


Caso 2. Sendo $r \perp s$ e $r \perp t$, vamos traçar as retas s' e t' de α passando por O e tais que $s' \parallel s$ e $t' \parallel t$.

Se $r \perp s$ e $s' \parallel s$, então $r \perp s'$.

Analogamente, concluímos que $r \perp t'$.

Logo $r \perp \alpha$, pois r é perpendicular a duas retas s' e t' de α que passam por O .

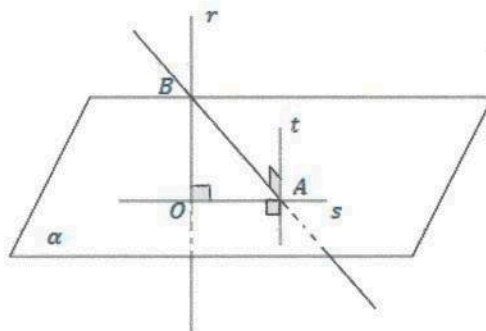


□

Teorema 3.1.8 *Sejam dados uma reta r e um plano α tais que $r \perp \alpha$ no ponto O . Sendo s uma reta de α que passa pelo o ponto O e t uma reta de α perpendicular a s e concorrente com esta num ponto $A \neq O$, então qualquer reta que passa pelo o ponto A e por um ponto de r é perpendicular à reta t .*

Demonstração:

Como $t \perp s$ (por hipótese) e $r \perp \alpha$, então $t \perp r$, e, pelo o teorema anterior, t é perpendicular ao plano (OAB) .



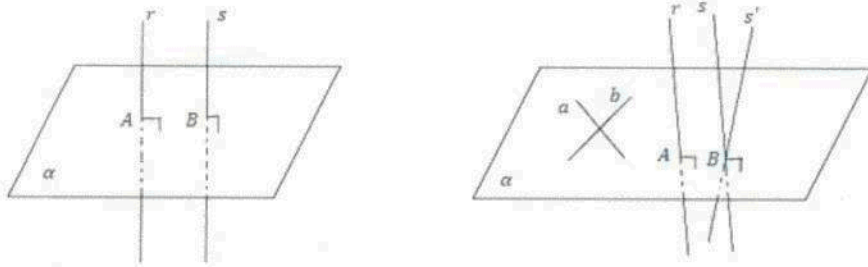
Como a reta \overleftrightarrow{AB} está contida no plano (OAB) , podemos dizer que as retas t e \overleftrightarrow{AB} são perpendiculares, ou seja, $\overleftrightarrow{AB} \perp t$.

□

Teorema 3.1.9 *Duas retas r e s perpendiculares a um mesmo plano α são paralelas.*

Demonstração:

Vamos traçar a reta s' passando por B e tal que $s' \parallel r$. Pelo o postulado de Euclides, s' é única.



Se $r \perp \alpha$, então r forma ângulo reto com duas concorrentes a e b , contidas em α .
 Se $s' \parallel r$, então r forma um ângulo reto com as mesmas retas a e b de α ; logo $s' \perp \alpha$.

Como pelo ponto B do plano α passa uma única perpendicular a esse plano resulta que $s' \equiv s$. Daí, $s \parallel r$.

□

Teorema 3.1.10 *Se dois planos α e β são perpendiculares segundo uma reta t , e se uma reta r , contida em α , é perpendicular à reta t , então r é perpendicular a β .*

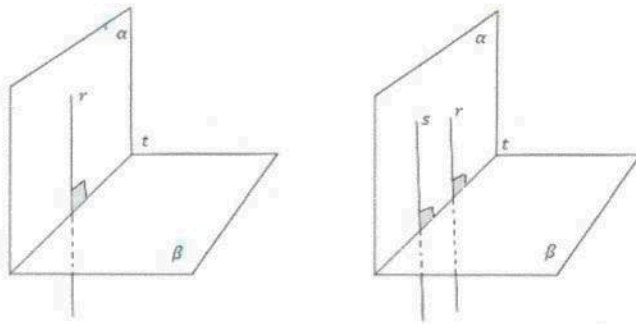
Demonstração:

Se α e β são perpendiculares, então α deve conter uma reta s tal que $s \perp \beta$.

Logicamente, a reta s é perpendicular à interseção t , ou seja, $s \perp t$.

Como $r \perp s$ e $s \perp t$, temos, pelo teorema anterior $r \parallel s$.

Como $r \parallel s$ e $s \perp \beta$, logo $r \perp \beta$.



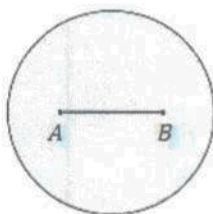
□

3.2 Tópicos de Geometria Plana

Vamos recordar o cálculo de áreas de figuras planas, com especial atenção aos polígonos regulares.

3.2.1 Polígonos

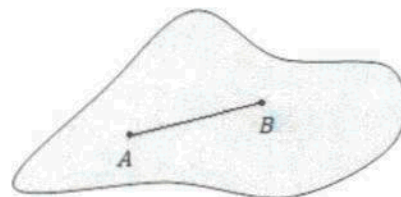
Definição 3.2.1 *Uma região do plano é **convexa** quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela.*



Círculo

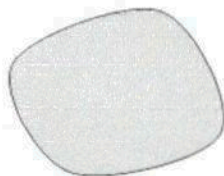


Reta

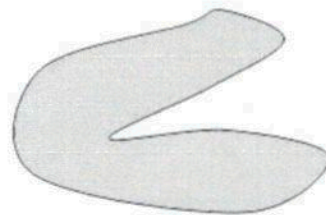


Plano

Se uma região não é convexa dizemos que ela é uma região **côncava**.



Região Convexa



Região Côncava

Definição 3.2.2 *Chama-se **polígono** a região de um plano delimitado por um número finito de segmentos de reta, contidos nesse plano, que satisfazem às seguintes condições:*

- (i) cada extremidade de qualquer segmento é extremidade de exatamente dois segmentos;
- (ii) dois segmentos consecutivos quaisquer nunca são colineares;
- (iii) dois segmentos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.

*Um polígono é **convexo** se satisfaz à seguinte condição:*

- (iv) fixado cada lado, os demais se encontram num mesmo semi-plano (em relação ao fixado).

Os segmentos são chamados de **lados** e suas extremidades de **vértices** do polígono. A reunião dos lados chama-se **linha poligonal fechada, bordo ou fronteira** do polígono. Adotaremos a notação ∂P para denotar o bordo de um polígono P .



Nas figuras anteriores, o polígono da esquerda é convexo ao passo que o da direita é côncavo.

Alguns polígonos recebem nomes especiais, de acordo com o número de lados os de vértices que apresentam.

- **Triângulo** é um polígono que possui três lados.
- **Quadrilátero** é um polígono que possui quatro lados.
- **Pentágono** é um polígono que possui cinco lados.
- **Hexágono** é um polígono que possui seis lados.

Em geral, um polígono com n lados é chamado **n -látero** ou **n -ágono**.

Chama-se **perímetro** de um polígono a soma das mediadas de seus lados.

Chama-se **diagonal** de um polígono, qualquer segmento que une dois vértices não consecutivos do polígono.

Chama-se **ângulo interno** ou simplesmente **ângulo** de um polígono convexo qualquer ângulo formado por dois lados adjacentes.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a

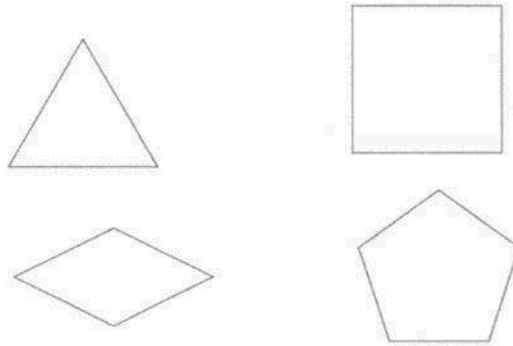
$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Cada ângulos internos de um polígono equiângulo de n lados, isto é, um polígono cujos ângulos têm mesma medida, vale

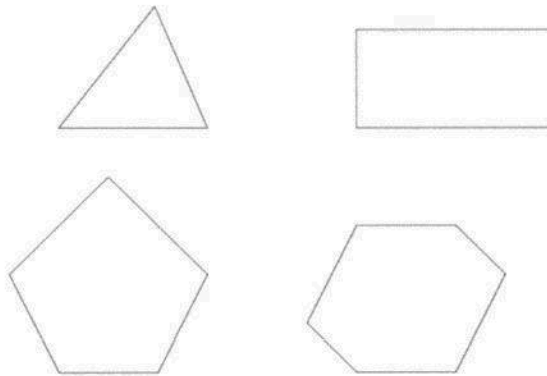
$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Definição 3.2.3 Um polígono chama-se **equilátero** se seus lados têm mesma medida.

Alguns polígonos equiláteros:



Alguns polígonos equiângulos:

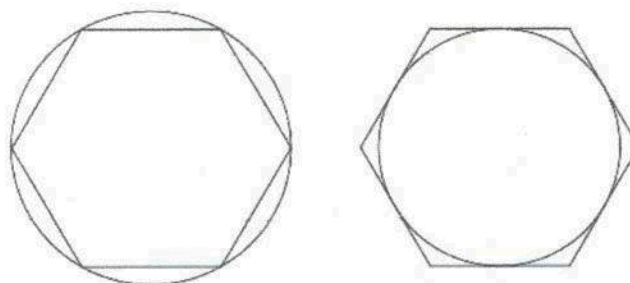


Definição 3.2.4 Quando um polígono é equilátero e equiângulo, dizemos que ele é *regular*.

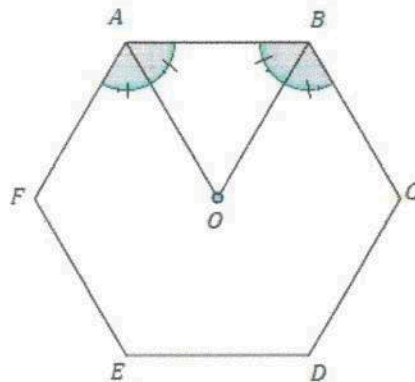
Note que:

1. Nem todo polígono equilátero é equiângulo e vice-versa.
2. Todo triângulo equilátero é equiângulo e todo triângulo equiângulo é equilátero.

Teorema 3.2.1 Todo polígono regular é inscritível e circunscritível, ou seja, há uma circunferência que contém seus vértices e há outra que tangencia seus lados.

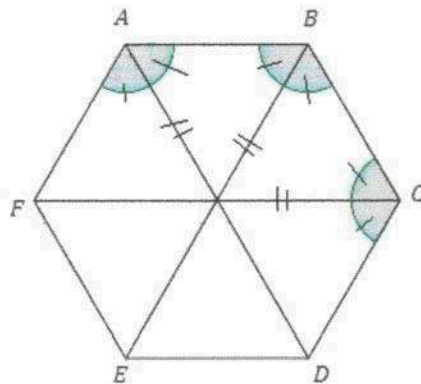


O argumento que utilizaremos é aplicável a qualquer polígono regular.
 Considere um hexágono regular de vértices A, B, C, D, E e F .



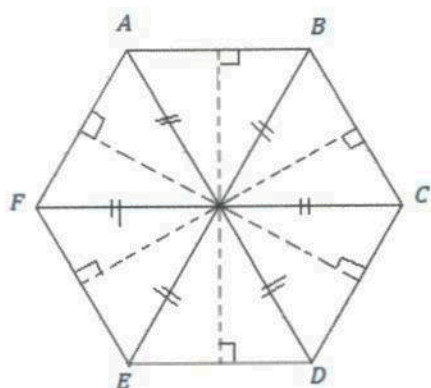
Seja O o encontro das bissetrizes dos ângulos \widehat{A} e \widehat{B} . Como os ângulos \widehat{A} e \widehat{B} têm mesma medida, segue-se que os ângulos \widehat{OAF} , \widehat{OAB} , \widehat{OBA} e \widehat{OBC} são congruentes. Conseqüentemente, o triângulo, OAB é isósceles e, portanto, $OA = OB$.

Tracemos agora os segmentos \overline{OC} , \overline{OD} , \overline{OE} e \overline{OF} .

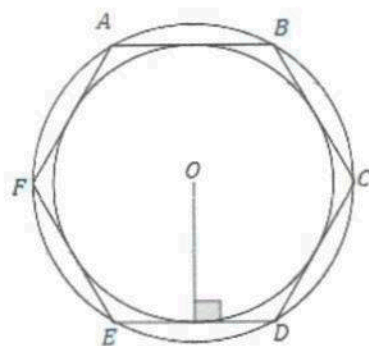


Pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos decorre que os triângulos OAB e OBC são congruentes, pois \overline{OB} é lado comum, $AB = BC$ e $\widehat{OBA} = \widehat{OBC}$. Como consequência, temos que $OC = OA$ e $\widehat{OCB} = \widehat{OAB}$. Sendo os ângulos do polígono congruentes, segue-se que $\widehat{OCD} = \widehat{OCB}$.

Pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos, decorre que os triângulos OBC e OCD são congruentes. Enfim, prosseguindo com o mesmo argumento anterior, chegaremos que os triângulos OAB, OBC, OCD, OEF e OFA são congruentes entre si e são isósceles.



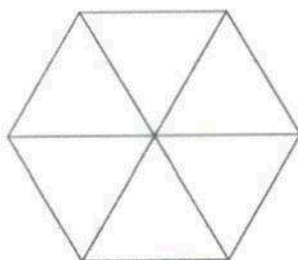
Assim, O é equidistante dos vértices A, B, C, D, E e F do polígono. Logo, é centro de uma circunferência que passa nos vértices do polígono. Outra consequência é que esses seis triângulos isósceles têm alturas relativas, respectivamente, aos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ e \overline{FA} com mesma medida. Portanto, O também é centro de uma circunferência que tangencia os lados do polígono.



□

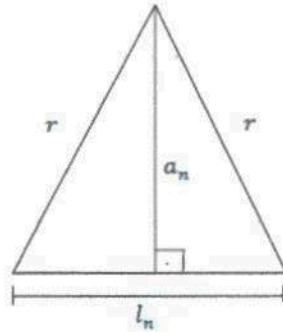
Definição 3.2.5 Chamaremos de **centro do polígono** o centro O das duas circunferências e de **apótema do polígono** o raio da circunferência inscrita nele, isto é, o raio da circunferência que tangencia seus lados.

Todo polígono regular de n lados se decompõe em n triângulos isósceles e congruentes entre si.



Eles tem um vértice em comum, que é o centro do polígono, e os outros vértices são os vértices do polígono. Assim, a área do polígono é igual a n vezes a área de um desses triângulos.

Denotamos por a_n , l_n e r , respectivamente, o apótema, o lado e o raio da circunferência circunscrita ao polígono, então cada um desses triângulos tem dois lados medindo r e um lado medindo l_n , sendo a_n a altura relativa ao lado l_n .



A área de cada triângulo da decomposição é igual

$$A_{\Delta} = \frac{l_n \cdot a_n}{2}.$$

A área do polígono é igual a

$$S_n = \frac{n \cdot l_n \cdot a_n}{2}.$$

O semiperímetro do polígono é dado por

$$p_n = \frac{n \cdot l_n}{2}$$

A área do polígono é igual a seu semiperímetro vezes seu apótema, isto é, seu semiperímetro multiplicado pelo raio da circunferência inscrita nele.

$$S_n = p_n \cdot a_n$$

3.2.2 Polígonos Regulares

Um polígono é regular quando apresenta todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes entre si. Um fato bastante significativo é que todo polígono regular é inscritível numa circunferência.

Elementos de um polígono regular inscrito

O centro O e o raio r da circunferência na qual o polígono regular está inscrito são denominados, respectivamente, *centro* e *raio* do polígono.

Um ângulo α , cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono regular, chama-se **ângulo central**.

Sua medida é dada por $\frac{360^\circ}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.

Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados **ângulos internos**. A medida de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

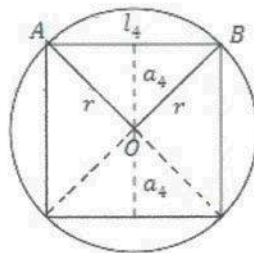
A distância m do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular denomina-se **apótema** do polígono.

Relações métricas nos polígonos regulares

Quando consideramos a medida l do lado de um polígono regular, a medida m do apótema do mesmo polígono e o comprimento r do raio da circunferência na qual o polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

Exemplo 3.2.2.1 Lado e apótema do quadrado inscrito

Vamos calcular o lado (l_4) e o apótema (a_4) de um quadrado inscrito numa circunferência de raio r conhecido.



- Cálculo do lado: l_4

Aplicando a relação de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$l_4^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow l_4^2 = 2r^2 \Rightarrow l_4 = r\sqrt{2}$$

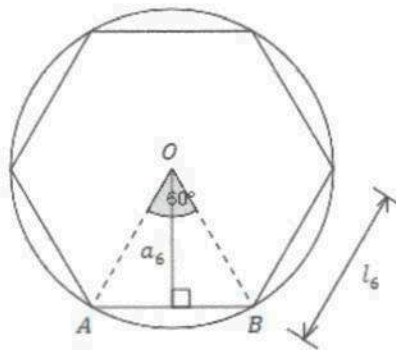
- Cálculo do apótema: a_4

$$a_4 + a_4 = l_4 \Rightarrow 2a_4 = l_4 \Rightarrow a_4 = \frac{l_4}{2}$$

Substituindo o l_4 , vem: $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Exemplo 3.2.2.2 Lado e apótema do hexágono regular inscrito

Vamos calcular o lado (l_6) e o apótema (a_6) de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio r conhecido.



- Cálculo do lado: l_6

No $\triangle ABC$, temos:

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

Logo, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{O} = 60^\circ$ e o $\triangle OAB$ é equilátero.

Então, o lado é igual ao raio: $l_6 = r$

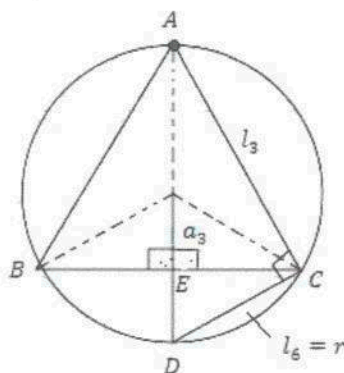
- Cálculo do apótema: a_6

O apótema do hexágono é a altura do triângulo equilátero $\triangle OAB$ de lado r .

Portanto: $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

Exemplo 3.2.2.3 Lado e apótema do triângulo equilátero inscrito

Vamos calcular o lado (l_3) e o apótema (a_3) de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r conhecido.



- Cálculo do lado: l_3

Traçemos o diâmetro \overline{AD} .

Se \overline{BC} é o l_3 , então \overline{CD} é o l_6 e, como $l_6 = r$, vem $\overline{CD} = r$.

Por estar inscrito numa semicircunferência, o $\triangle ACD$ é retângulo em C .

Aplicando a relação de Pitágoras no $\triangle ACD$, vem:

$$l_3^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow l_3^2 = 3r^2 \Rightarrow l_3 = r\sqrt{3}$$

- Cálculo do apótema: a_3

$$B\hat{A}C = 60^\circ \Rightarrow B\hat{O}C = 120^\circ \Rightarrow B\hat{O}E = 60^\circ$$

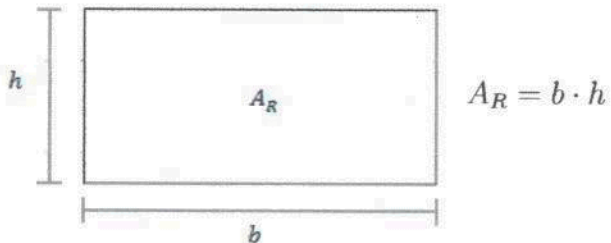
$$\frac{OE}{OB} = \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{a_3}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}$$

3.2.3 Áreas de algumas figuras planas

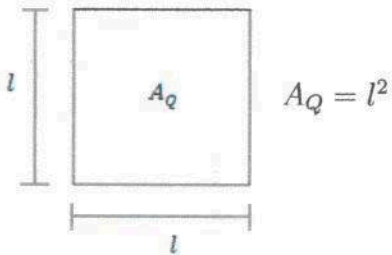
Medir áreas das figuras geométricas planas consiste, precisamente, em determinar quantas vezes uma figura contém um quadrado de lado unitário. Essa quantidade de vezes é o que definimos por *área* de um figura geométrica plana.

Área do Retângulo

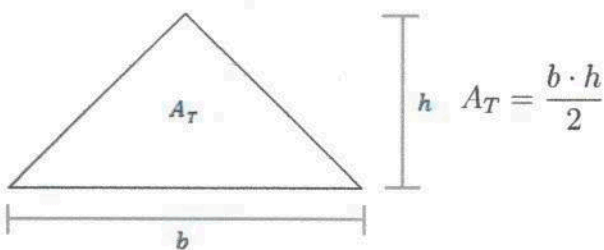
A área de um retângulo é o produto da medida do lado pela medida da altura.

**Área do Quadrado**

A área de um quadrado é igual ao produto da medida do lado por ela mesma.

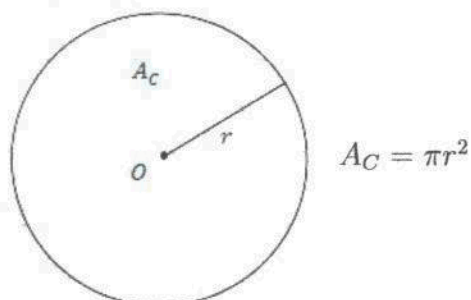
**Área do Triângulo**

A área do triângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base dividido por dois.



Área do Círculo

A área do círculo com raio de medida r é



3.3 Poliedros Convexos

No estudo da forma dos corpos e das suas propriedades, a geometria reduz os corpos a conjuntos de pontos cujas posições relativas são invariáveis, com os quais constrói símbolos das mesmas formas, a que chama **Sólidos Geométricos**.

Definição 3.3.1 *Dois polígonos P e Q são chamados de consecutivos se $\phi \neq P \cap Q \subset \partial P \cap \partial Q$*

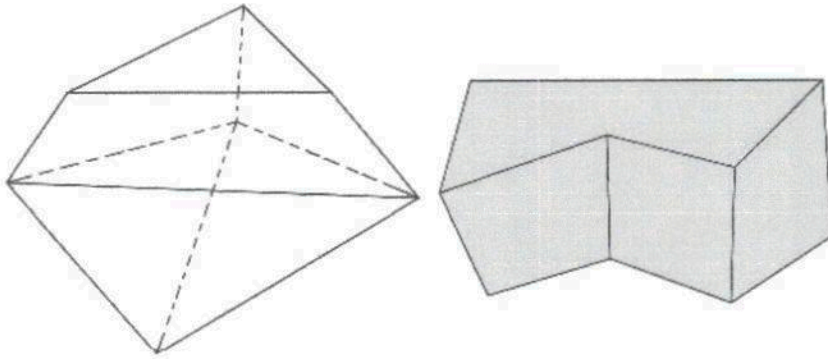
Definição 3.3.2 (Poliedro) *Chama-se poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:*

- (i) *cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;*
- (ii) *dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;*
- (iii) *dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.*

Um poliedro é convexo se satisfaz a seguinte condição:

- (iv) *fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço (em relação à fixada)*

Os polígonos são chamados de **faces**, os lados das faces são chamados de **arestas** e os vértices das faces de **vértices** do poliedro. A reunião das faces chama-se **superfície, bordo ou fronteira** do poliedro.



Todo poliedro, limita uma região do espaço chamada de **interior** desse poliedro. Dizemos que um poliedro é **convexo** se o seu interior é convexo.

Nas figuras anteriores, o poliedro da esquerda é convexo ao passo que o da direita é côncavo.

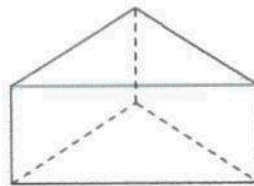
Relação de Euler

Um dos teoremas mais importantes da geometria euclidiana espacial é o que estabelece uma relação existente entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, conhecida por Relação de Euler.

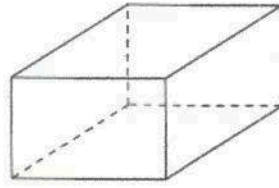
Teorema 3.3.1 *Se V , A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então*

$$V - A + F = 2$$

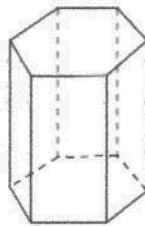
Exemplo 3.3.0.1 *Observe que nos seguintes poliedros vale a relação de Euler.*



$$\bullet \left. \begin{array}{l} V = 6 \\ F = 5 \\ A = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V - A + F = 2 \\ 6 - 9 + 5 = 2 \end{array}$$

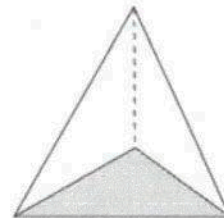
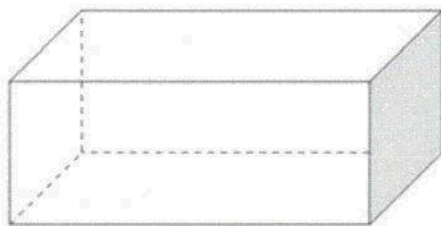


$$\bullet \left. \begin{array}{l} V = 12 \\ F = 8 \\ A = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V - A + F = 2 \\ 12 - 18 + 8 = 2 \end{array}$$



$$\bullet \left. \begin{array}{l} V = 8 \\ F = 6 \\ A = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V - A + F = 2 \\ 8 - 12 + 6 = 2 \end{array}$$

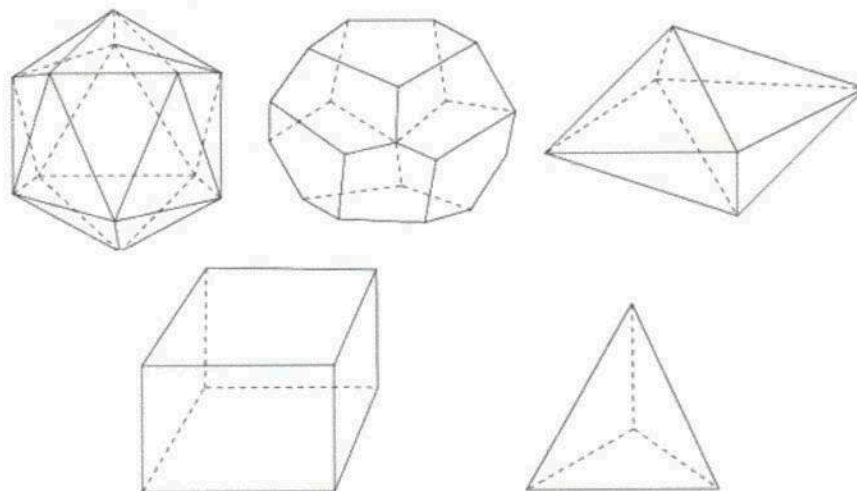
Um poliedro convexo chama-se **poliedro de Platão** se suas faces têm o mesmo número n de arestas e se cada vértice partem o mesmo número m de aresta. Veja a seguir dois exemplos.



Teorema 3.3.2 *Quanto ao número de faces, há, no máximo, cinco poliedros de Platão.*

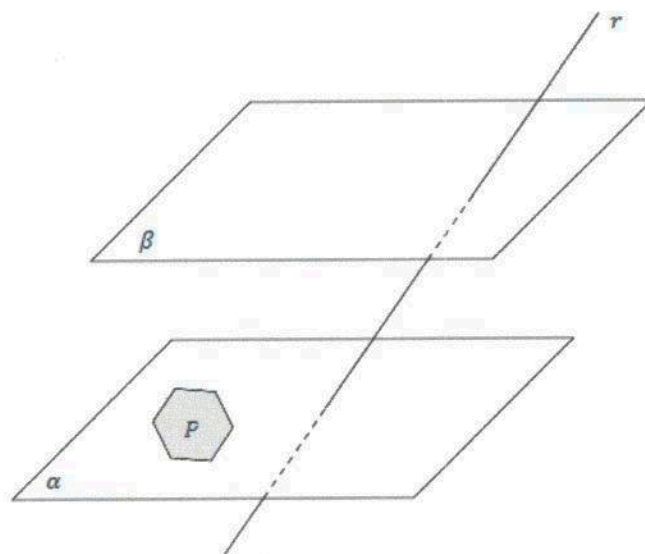
Definição 3.3.3 *Um poliedro de Platão chama-se **regular** se todas suas faces são polígonos regulares.*

Veja a seguir os cinco poliedros regulares existentes, quanto ao número de faces.

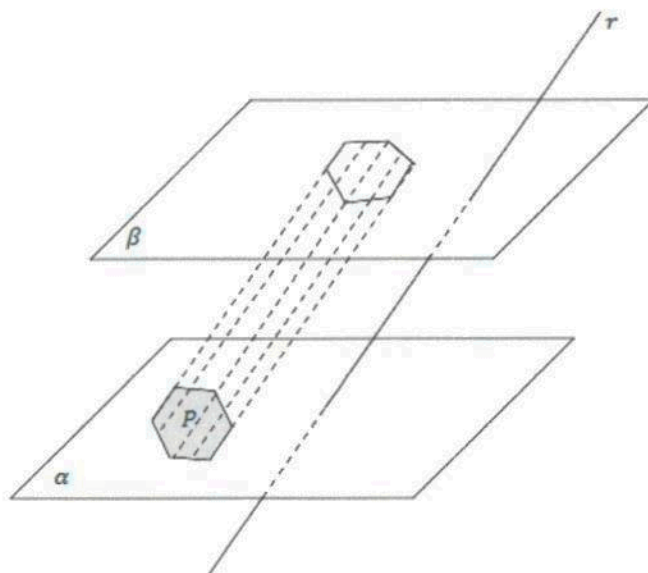


3.4 Prismas

Definição 3.4.1 Consideremos dois planos paralelos α e β , um polígono P contido em α e uma reta r que intercepta α e β , mas não intercepta P .

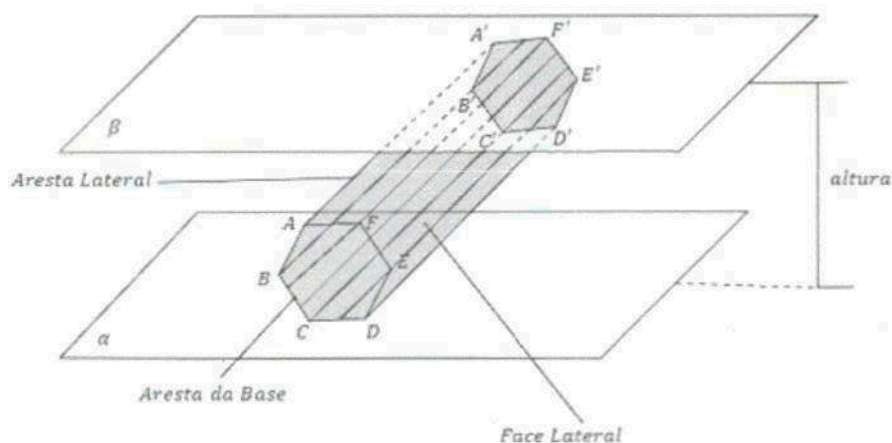


A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta r , com uma extremidade num ponto do polígono P e a outra no plano β , denomina-se **prisma**.



3.4.1 Elementos

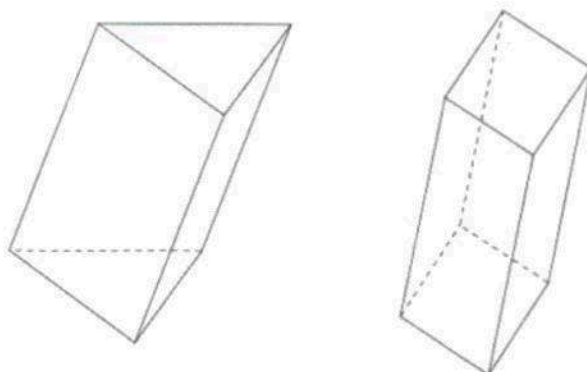
Num prisma, convém destacar os seguintes elementos:



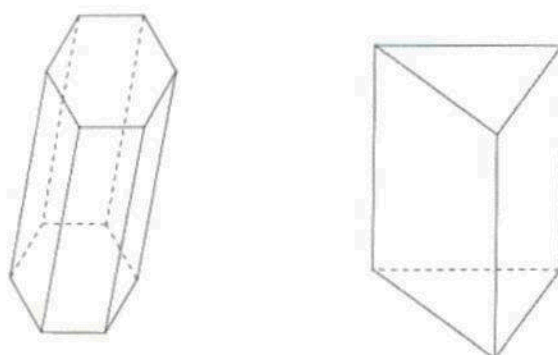
- (i) bases: são polígonos convexos congruentes $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ situados nos planos paralelos α e β (planos das bases)
- (ii) faces laterais: são paralelogramos $ABB'A'$, $BCC'B'$, ..., $AFF'A'$
- (iii) arestas das bases: são os lados dos polígonos das bases
- (iv) arestas laterais: são segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ..., $\overline{FF'}$
- (v) altura: é a distância entre os planos paralelos α e β

3.4.2 Classificação

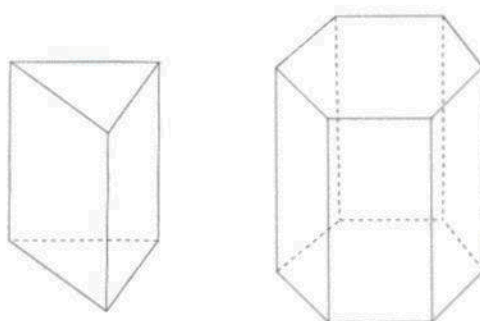
Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc, conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc



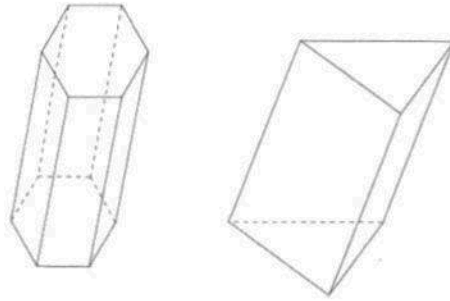
Conforme a inclinação das arestas laterais em relação ao planos das bases, os prismas podem ser **retos** ou **obliquos**.



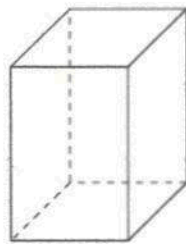
Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são **retângulos**.



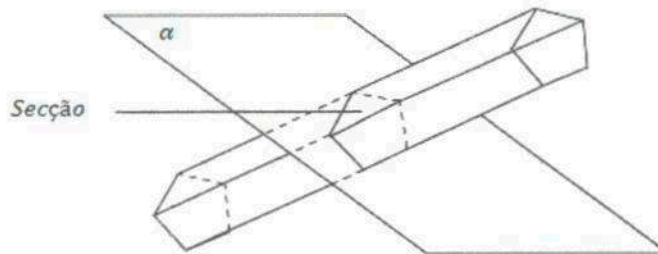
Prisma oblíquo, é a quele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.



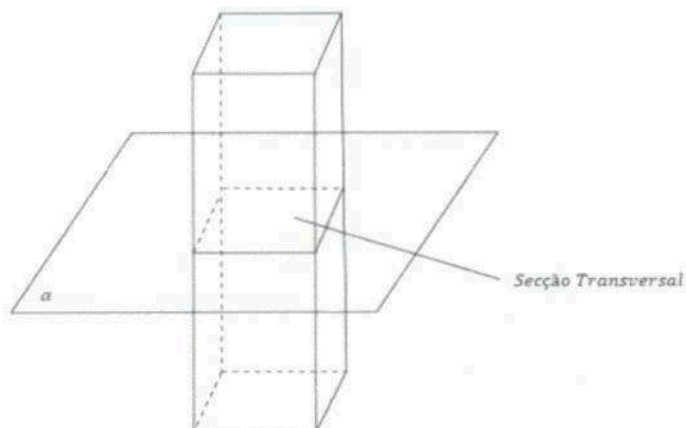
Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



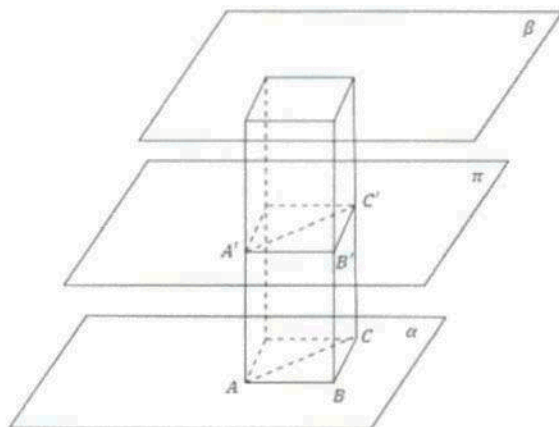
A intersecção de um prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais denomina-se **secção do prisma**.



A secção determinada num prisma por um plano paralelo às bases é denominada **secção transversal**.



Teorema 3.4.1 *Seja P um prisma entre os planos α e β . Se π é um plano paralelo a α e β , entre α e β , então $\pi \cap P$ é uma figura congruente à base de P .*



3.5 Área da Superfície de um Prisma

A **área** de uma figura geométrica plana é a quantidade de vezes que a figura contém o quadrado de lado unitário.

3.5.1 Área da superfície de um prisma

Teorema 3.5.1 *A soma das áreas das faces laterais de um prisma reto é igual ao produto do perímetro da base pela a altura.*

Prova:

Cada face lateral é um retângulo cuja altura h é a altura do prisma e cuja base é um lado da base do prisma. Se l_1, l_2, \dots, l_n são os lados da base do prisma, então soma das áreas das faces laterais dele é igual a $l_1h + l_2h + \dots + l_nh = (l_1 + l_2 + \dots + l_n)h$, isto é, o produto do perímetro da base pela a altura. \square

A área da base (A_b) é a soma de n triângulos de base l (medida do lado) e altura m (medida do apótema). Então:

$$A_b = n \cdot \left(\frac{l \cdot m}{2} \right) \Rightarrow A_b = \frac{(n \cdot l)m}{2}$$

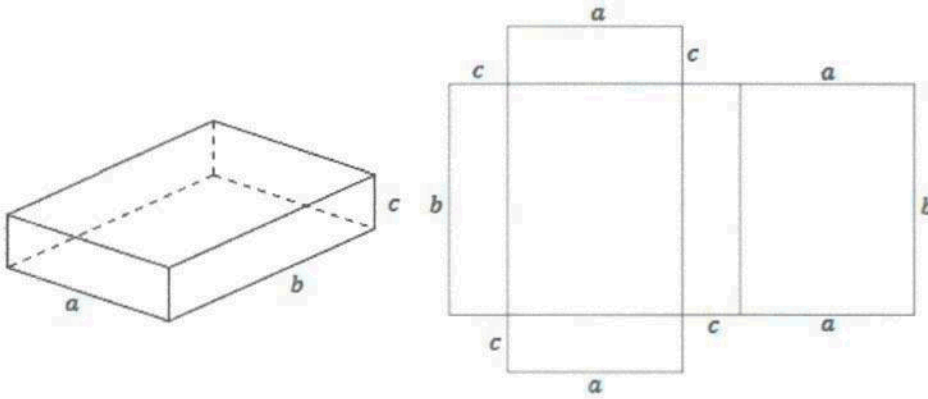
A área total de um prisma reto é a soma das áreas das faces laterais com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

$$A_t = A_l + 2A_b$$

Exemplo 3.5.1.1 Área da superfície do prisma retangular

Planificando o prisma, temos:



As faces laterais são retângulos de dimensão a e c e b e c .

$$A_l = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc \Rightarrow A_l = 2(ac + bc)$$

A base é um retângulo cujo os lados mede a e b

$$A_b = ab$$

A área total é dada por:

$$A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow A_t = 2(ab + ac + bc)$$

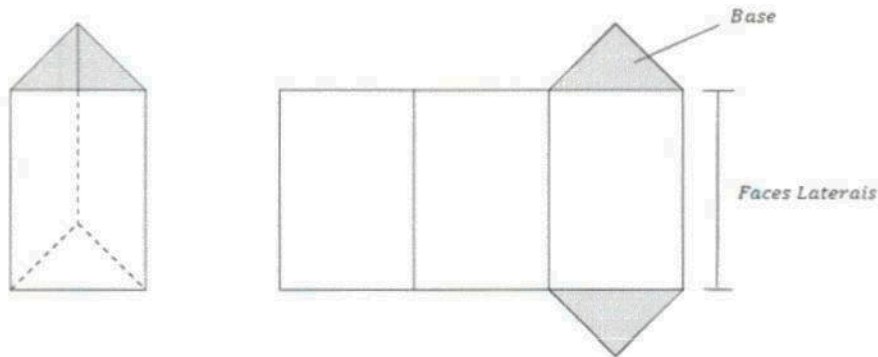
Obs: Um cubo é um paralelepípedo retângulo em que todas as arestas têm medidas iguais.

Cálculo da área total

$$A_t = 2(ab + ac + bc) = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2(a^2 + a^2 + a^2) = 2 \cdot 3a^2 = 6a^2$$

Exemplo 3.5.1.2 Área da superfície do prisma triangular

Planificando o prisma temos:



A face lateral é um retângulo de dimensões a e h .

$$A_l = ah + ah + ah = 3ah \Rightarrow A_l = 3ah$$

A base é um triângulo equilátero cujo o lado mede a .

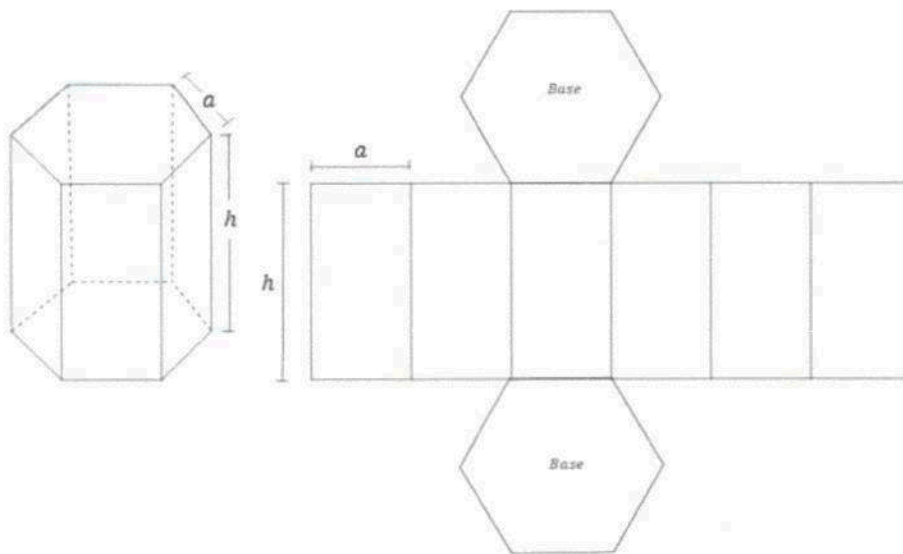
$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A área total é dada por:

$$A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow A_t = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo 3.5.1.3 Área da superfície do prisma hexagonal

Planificando o prisma temos:



A face lateral é um retângulo de dimensões a e h .

$$A_l = ah + ah + ah + ah + ah + ah = 6ah \Rightarrow A_l = 6ah$$

A base é um hexágono regular que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros cujos lados medem a .

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A área total é dada por:

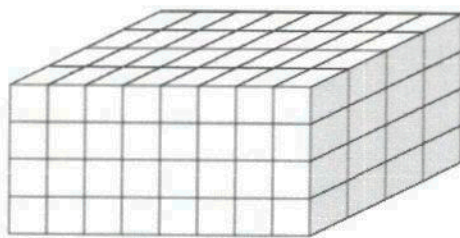
$$A_t = A_l + 6A_b \Rightarrow A_t = 6ah + 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6ah + 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

3.6 Volume de Superfície

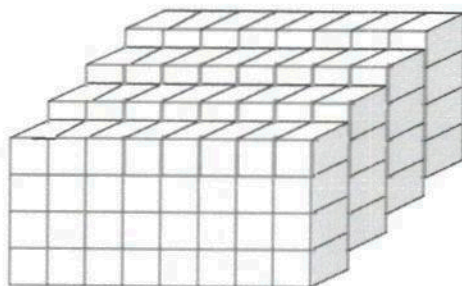
O volume de um sólido é a quantidade de vezes que o cubo de aresta unitária “cabe” nele.

3.6.1 Volume do paralelepípedo retângulo

Considere um paralelepípedo retangular cujas as arestas adjacentes da base medem, respectivamente, 8 e 4 unidades de medida de comprimento e cuja altura mede 4.



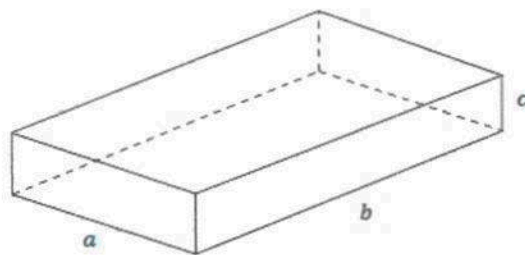
Vamos decompor o paralelepípedo em quatro subparalelepípedos.



Cada um desses subparalelepípedos contém 8×4 cubos de aresta unitária. Portanto, no total, o paralelepípedo original contém $8 \times 4 \times 4$ unidades de medida de volume, isto é, seu volume é 128.

Teorema 3.6.1 *Seja P um paralelepípedo retangular cujas arestas adjacentes da base medem, respectivamente, a , b e cuja altura mede c . Então,*

$$V = abc$$

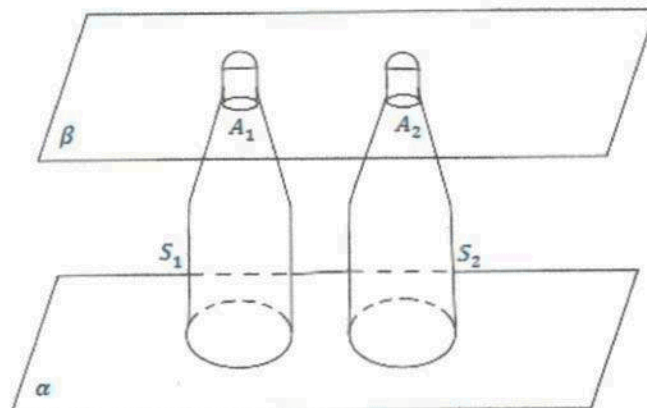


Volume do Prisma

Chamaremos de **plano horizontal** todo aquele paralelo ou coincidente com um certo plano que fixamos (implicitamente ou explicitamente) como referencial numa discussão.

Princípio de Cavalieri

Sejam S_1 e S_2 sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S_1 e S_2 segundo figuras com mesma área, então S_1 e S_2 têm mesmo volume.



Consideremos um prisma e um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e bases iguais a A_b contidas no plano α .

Como as secções transversais determinadas no prisma e no paralelepípedo pelo plano β , paralelo a α , têm áreas iguais, concluímos, pelo princípio de Cavalieri, que o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo.

Mas o volume desse paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões. Logo:

$$V = (ab)h \quad \text{ou} \quad V = A_b h$$

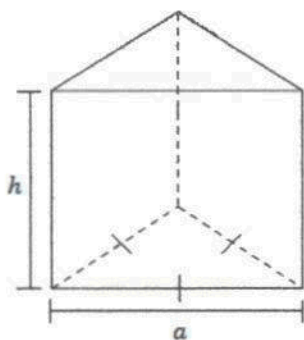
Assim, podemos obter o volume do prisma:

$$V_{\text{prisma}} = A_b h$$

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela a sua altura.

Exemplo 3.6.1.1 *Prisma triangular regular.*

Cálculo da área da base



A base é um triângulo equilátero de lado a . Logo;

$$A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

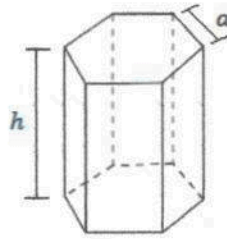
Cálculo do volume

$$V = A_b \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$$

Exemplo 3.6.1.2 *Prisma hexagonal regular. A base é um hexágono regular.*

Um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros. A área de um triângulo equilátero de lado a é dada por

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



logo, a área da base é dada por:

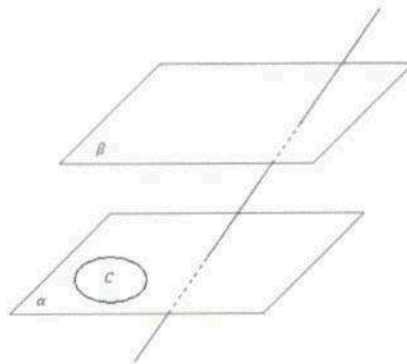
$$A_b = 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

Cálculo do volume

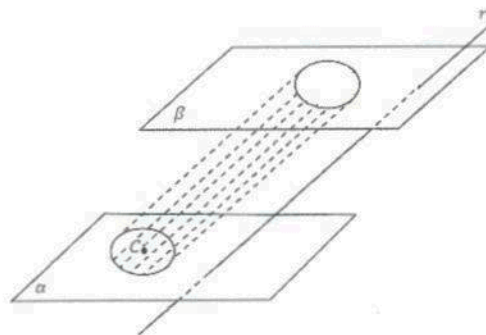
$$V = A_b \cdot h = 3 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right) \cdot h$$

3.7 Cilindros

Definição 3.7.1 Consideremos dois planos paralelos α e β , um círculo C contido em α e uma reta r que intercepta α e β , mas não intercepta c .



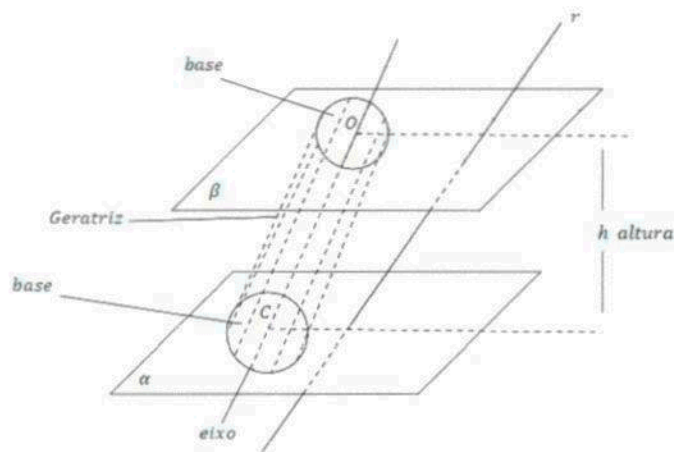
A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta r , com uma extremidade num ponto do círculo C e a outra no plano β , denomina-se **cilindro circular**.



3.7.1 Elementos

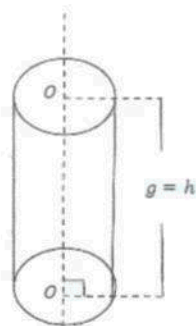
Num cilindro, convém destacar os seguintes elementos:

- (i) bases: são círculos de raio r e centros O e O' situados nos planos paralelos α e β , respectivamente
- (ii) altura: é a distância entre os planos paralelos α e β .
- (iii) eixo: é a reta que contém os centros das bases
- (iv) geratrizes: são os segmentos paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases



3.7.2 Cilindro circular reto

Um cilindro se diz **reto** (ou de revolução) quando as geratrizes são perpendiculares às bases. Ele pode ser obtido pela rotação completa de um retângulo de lados r e g em torno do eixo $\overline{OO'}$.



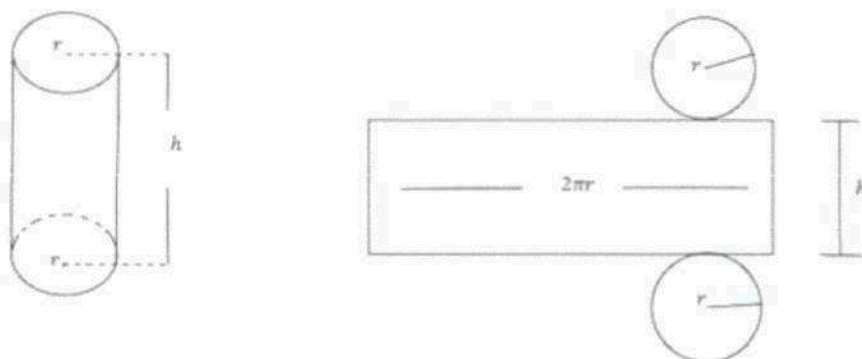
Neste caso, a altura do cilindro é igual a medida da geratriz, ou seja, $h = g$

3.7.3 Área da superfície de um cilindro

Teorema 3.7.1 A área da superfície lateral de um cilindro circular reto cuja a altura é h e cujo raio da base é r é igual a

$$2\pi rh$$

Planificando a superfície do cilindro da figura, obtemos:



Daí temos:

Área da base (A_b)

É a área do círculo de raio r :

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral (A_l)

É a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e h :

$$A_l = 2\pi rh$$

Área total (A_t)

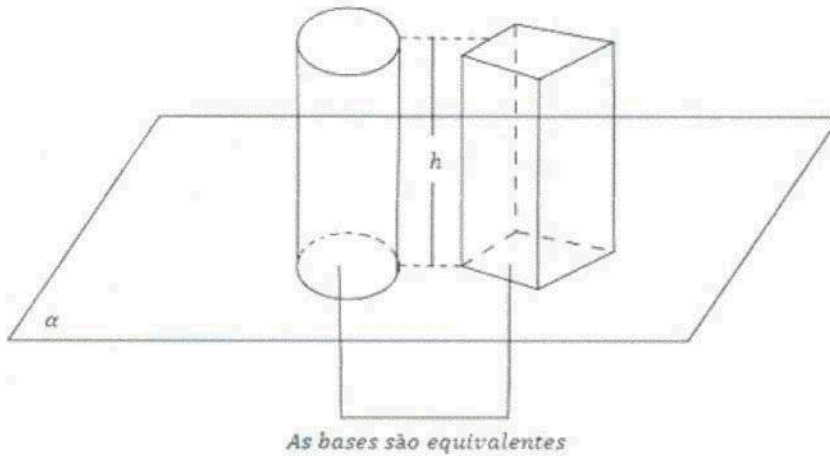
É a soma da área lateral com as áreas das duas bases do cilindro.

$$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h + r)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

3.7.4 Volume do cilindro

A figura a seguir nos mostra um cilindro e um prisma com mesma altura h e bases equivalente contidas no plano α .



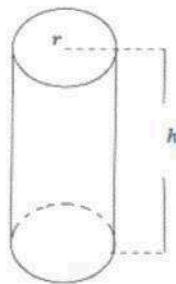
Nesta situação, todo plano paralelo às bases e que secciona os dois sólidos determina nele secções transversais de mesma área. Pelo o princípio de Cavalieri, temos então:

$$\text{volume do cilindro} = \text{volume do prisma}$$

Assim,

$$\text{volume do cilindro} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

Num cilindro reto de raio r e altura h , a área da base é dada por $A_b = \pi r^2$.



$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h.$$

Capítulo 4

Aplicações e Contextualizações

OBS: todos os cálculos serão feitos das áreas aproximadas.

Aplicação 1

As embalagens de leite condensado, na maioria das marcas, são fabricadas no formato cilíndrico e no formato paralelepípedo retângulo.



Problema:

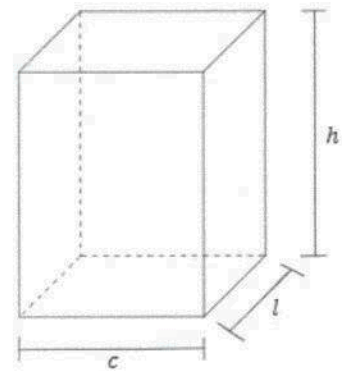
- a) Qual a forma ideal de uma embalagem de leite condensado de 395g entre a cilíndrica e paralelepípedo retângulo?
- b) Em relação ao armazenamento, qual das duas embalagens proporciona um melhor aproveitamento do espaço?

Caixinha de Leite Condensado

Medida: Altura (h) = 11,8 cm

Lado (l) = 4 cm

Comprimento (c) = 6,4 cm

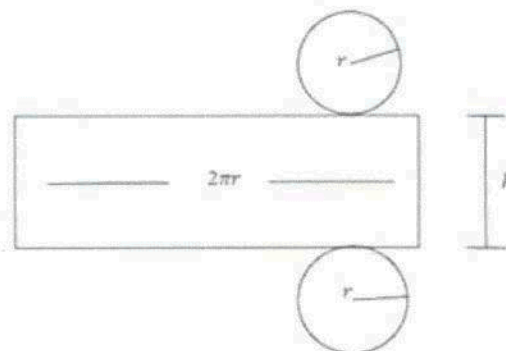
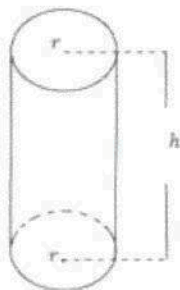


- Cálculo da área da caixa

$$\begin{aligned} A_{\text{caixinha}} &= 2 \cdot (11,8 \cdot 4) + 2 \cdot (11,8 + 6,4) + 2 \cdot (6,4 \cdot 4) \\ &= 94,4 + 151,04 + 51,2 \\ &= 296,64 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Cálculo do volume da caixa

$$\begin{aligned} V_{\text{caixinha}} &= h \cdot l \cdot c \\ &= 11,8 \cdot 4 \cdot 6,4 \\ &= 302,08 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Lata de Leite Condensado

Medida: Altura (h) = 7,4 cm

Diâmetro (D) = 7,4 cm

Raio (r) = 3,7 cm

- Cálculo da área da lata condensado

$$\begin{aligned}
 A_{\text{lata}} &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\
 &= (2 \cdot 3,14 \cdot 3,7 \cdot 7,4) + (2 \cdot 3,14 \cdot 3,7^2) \\
 &= 171,9464 + 85,9732 \\
 &= 257,9196 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

- Cálculo do volume da lata condensado

$$\begin{aligned}
 V_{\text{lata}} &= \pi r^2 h \\
 &= 3,14 \cdot 3,7^2 \cdot 7,4 \\
 &= 318,1 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Percebemos que a $A_p > A_c$, isto é, uma embalagem na forma retangular utiliza mais material que uma embalagem na forma cilíndrica.

Devemos lembrar que, uma embalagem não tem apenas faces e bases. Há também as dobras necessárias para o encaixe.

Percebemos também que $V_P < V_C$. Podemos observar a forma que a gramatura é distribuída no volume encontrado, assim:

- No paralelepípedo retângulo (caixinha), a cada 1 cm^3 é armazenado, aproximadamente, $1,307 \text{ g}$ de leite condensado;
- No cilindro (lata), a cada 1 cm^3 é armazenado, aproximadamente, $1,241 \text{ g}$ de leite condensado.

Cálculo das caixas que armazenam o Leite Condensado

CAIXA 1: ARMAZENAMENTO DA CAIXINHA DE LEITE CONDENSADO (27 caixas)

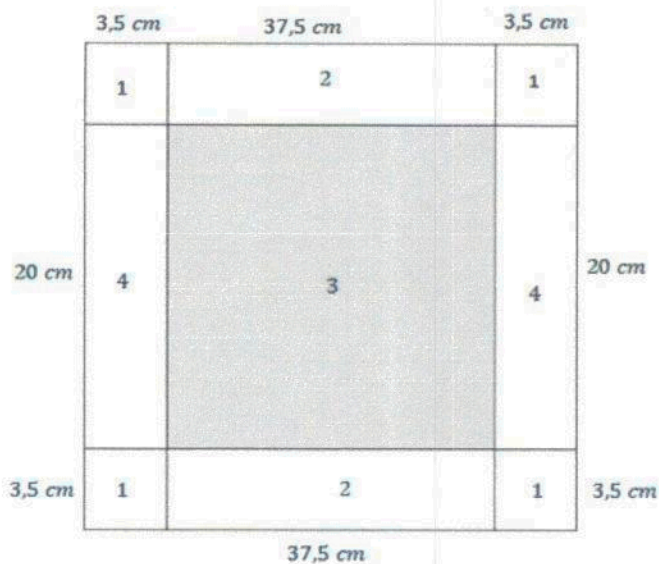
MEDIDAS DA CAIXA₁

$$\text{Área do retângulo (1)} = 3,5 \cdot 3,5$$

$$\text{Área do retângulo (2)} = 3,5 \cdot 37,5$$

$$\text{Área do retângulo (3)} = 37,5 \cdot 20$$

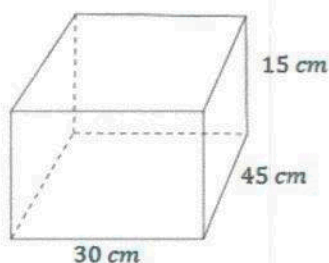
$$\text{Área do retângulo (4)} = 3,5 \cdot 20$$



Área total do retângulo

$$\begin{aligned}
 \text{Área da caixa}_1 &= 4 \cdot 3,5 \cdot 3,5 + 2 \cdot 3,5 \cdot 37,5 + 37,5 \cdot 20 + 2 \cdot 3,5 \cdot 20 \\
 &= 49 + 262,5 + 750 + 140 \\
 &= 1201,5 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

CAIXA 2: ARMAZENAMENTO DA LATA DE LEITE CONDENSADO (48 latas)



$$\begin{aligned}
 \text{Área da caixa}_2 &= 2 \cdot (30 \cdot 15) + 2(45 \cdot 15) + 2(30 \cdot 45) \\
 &= 900 + 1350 + 2700 \\
 &= 4950 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Área da caixa₁ < área da caixa₂, o que nos leva a concluir que o armazenamento da caixinha de leite condensado é mais viável do que da lata, ocupando menos espaço e economizando no material que transportará o produto. Mesmo sendo maior a quantidade de latas de leite condensado armazenadas em relação à caixinha, o seu espaço de armazenamento vai ser maior.

Se armazenarmos 53 caixinhas de leite condensado (2 caixas), observaremos que

o espaço de ocupação continuará sendo menor. Pois,

$$2 \cdot 1201,5 \text{ cm}^2 = 2403 \text{ cm}^2$$

Trabalhar com a forma de um paralelepípedo retângulo é mais viável. A seguir algumas das vantagens para a produção do leite condensado nas caixinhas no formato de paralelepípedo retângulo:

- Espaço para estocar o produto nos depósitos dos supermercados (impulsionando o comerciante a comprar mais);
- Espaço para armazenar o produto no armário do consumidor,
- Praticidade para abrir o produto;
- Menor risco em acidentes domésticos (cortes);
- Maior espaço nos caminhões de transporte;
- Economia nas caixas que embalam o produto;
- Menor custo final na produção do produto, podendo ser repassado para o consumidor final.

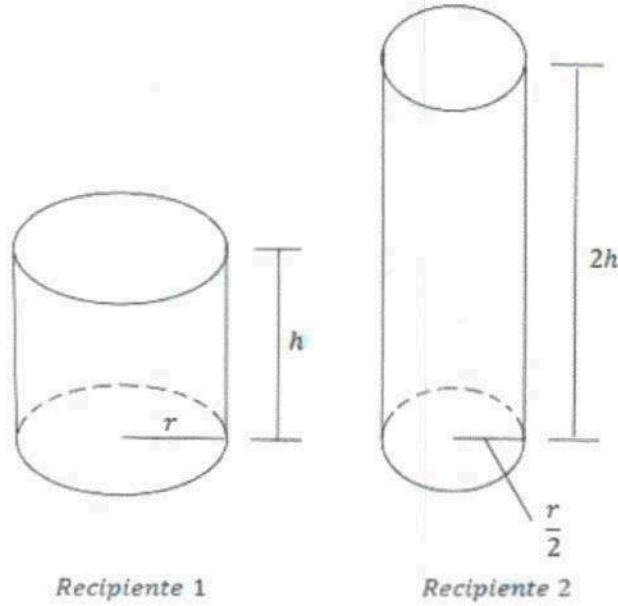
Em tudo que foi observado, conclui-se que armazenar 395 g de um determinado produto é mais viável numa embalagem na forma de um paralelepípedo retângulo e não na forma cilíndrica.

Aplicação 2

Embalagens Cilíndricas

PROBLEMA: Fátima dispõe de dois recipientes cilíndricos: um com raio r e altura h , o outro com a metade do raio e o dobro da altura. Qual o recipiente de maior capacidade?

$$\text{Volume do cilindro} = \pi r^2 h$$



Recipiente 1

$$V_1 = \pi r^2 h$$

Recipiente 2

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2h \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{4}\right) \cdot 2h \\ &= \frac{\pi r^2 h}{2} \end{aligned}$$

Logo o recipiente 1 tem o dobro da capacidade do recipiente 2.

Aplicação 3

Fabricando Embalagens

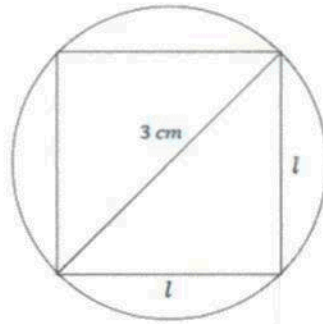
Um fabricante de embalagens de papelão deseja construir caixas com base não circular. Qual deve ser a altura mínima dessa caixa para que elas armazenem o mesmo volume.

- Caso a base seja um quadrado inscrito na circunferência de diâmetro 3 cm?
- Caso a base seja um hexágono inscrito numa circunferência de diâmetro 3 cm?

Compare os resultados obtidos em cada um dos problemas e argumente sobre a vantagem e desvantagem de escolher determinadas formas geométricas.

Resposta:

Observemos a seguinte figura.



a) Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$3^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow$$

$$9 = 2l^2 \Rightarrow$$

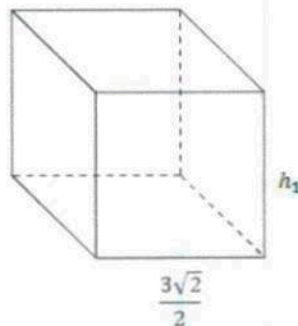
$$l^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$l = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$$

- Área do quadrado

$$\begin{aligned} A_{\text{quadrado}} &= bh \\ &= l^2 \\ &= \frac{9}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Cálculo do volume



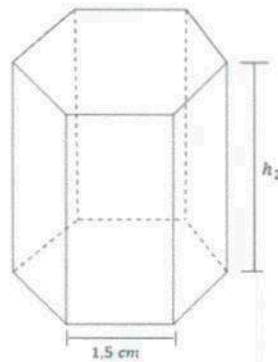
$$V_1 = \frac{9}{2} \cdot h_1 \text{ cm}^3$$

b) Área da superfície de um prisma

- Superfície lateral: é formada pelas faces laterais.
- Área lateral (A_l): é a área da superfície lateral.
- Superfície total: é formada pelas bases e pelas faces laterais.
- Área total (A_t): é a área da superfície total.

Temos: altura = h_2 , raio do círculo que circunscreve a base é $r = 3 \text{ cm}$.

Prisma de Base Hexagonal



Área da base

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1,5^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2,25 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 6 \cdot S_{\text{triângulo}} = \frac{6 \cdot 2,25 \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 2,25 \sqrt{3}}{2} = \frac{6,75 \sqrt{3}}{2}$$

- Cálculo da área lateral

Num prisma regular, sabemos que as faces laterais são retângulos. Logo,

$$A_{\text{retângulo}} = 1,5 \cdot h_2 \text{ cm}^2$$

Como temos 6 retângulos, então:

$$A_{\text{retângulo}} = 6 \cdot 1,5 \cdot h_2 \text{ cm}^2$$

- Cálculo do Volume do prisma de base hexagonal

$$V_2 = A_2 \cdot h_2 = \frac{6,75 \sqrt{3}}{2} \cdot h_2 \text{ cm}^3$$

Igualando os volumes, temos:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{9}{2}H_1 = \frac{6,75\sqrt{3}}{2} \cdot h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{2,25\sqrt{3}}{3} \cdot h_2$$

ou seja, para que as caixas tenham a mesma capacidade, a caixa de base quadrada tem que ter altura de $\frac{2,25\sqrt{3}}{3} \cdot h_2$ da altura da caixa de base hexagonal.

Observações:

- A área da base quadrada é menor do que a área da base hexagonal, como os volumes são iguais, obtivemos o resultado de que a altura da caixa 1 vai ser menor do que da caixa 2, o que nos leva a concluir que a área total vai ser menor, proporcionando uma economia do material utilizado;
- A facilidade de armazenar a caixa de base quadrada é maior, possibilitando um estoque maior do produto, ocupando um menor espaço;
- O fato de o produto ocupar um menor espaço possibilita um armazenamento maior nas prateleiras;
- A caixa de base hexagonal tem um designer mais interessante, chamando à atenção do consumidor, mas o custo de produção desse produto sobressai à beleza exterior presente no produto;
- As dobraduras da caixa de base quadrada são mais fáceis de serem feitas, diminuindo o tempo de serviço e o número de funcionários para produção;
- Diante dessas facilidades, trabalhar com caixas com base quadrada é mais viável. O custo benefício que o produto proporciona, facilita o manuseio e uma alta na venda dos produtos, reduzindo os custos de produção e o valor do produto para o consumidor final.

Aplicação 4

Vimos observando que as marcas de sabão em pó andam apostando nas mudanças das embalagens. As caixas de 1 kg passaram de um paralelepípedo mais estreito e alto para um mais largo e achatado.

As embalagens têm medidas aproximadamente iguais a:

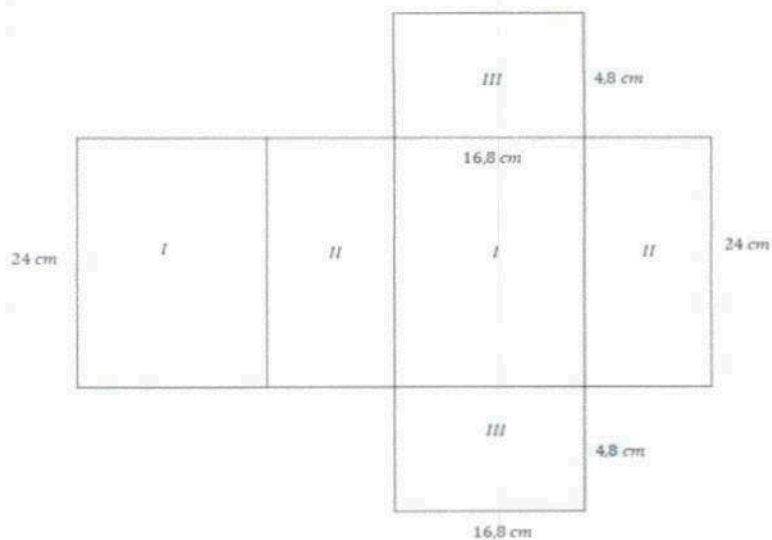
- Embalagem antiga (estreita e alta): 4,8 cm por 16,8 cm para a base e 24 cm para altura.
- Embalagem nova (larga e achatada): 19 cm por 7 cm para a base e 14,5 cm para a altura.

Pergunta: O que levou o fabricante a mudar o tamanho e a forma da embalagem?

CAIXA ANTIGA



PLANIFICAÇÃO DA CAIXA ANTIGA



ÁREA DOS RETÂNGULOS

- Retângulo I

Medidas: $b = 16,8 \text{ cm}$ e $h = 24 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo I}} &= b \cdot h \\ &= 16,8 \cdot 24 \\ &= 403,2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área dos retângulos I

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulos I}} &= 2 \cdot 403,2 \\ &= 806,4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Retângulo II

Medidas: $b = 4,8 \text{ cm}$ e $h = 24 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulos II}} &= 4,8 \cdot 24 \\ &= 115,2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área dos retângulos II

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulos II}} &= 2 \cdot 115,2 \\ &= 230,4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Retângulo III

Medidas: $b = 16,8 \text{ cm}$ e $h = 4,8 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulos III}} &= 16,8 \cdot 4,8 \\ &= 80,64 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área dos retângulos III

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulos III}} &= 2 \cdot 80,64 \\ &= 161,28 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Logo,

Área Total da caixa antiga

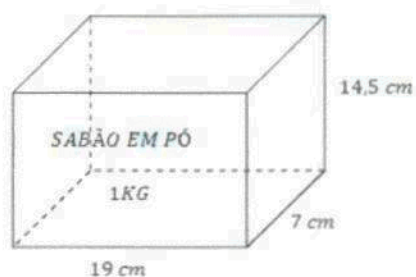
$$\begin{aligned} A_{\text{caixa antiga}} &= 806,4 + 230,4 + 161,28 \\ &= 1198,08 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Volume

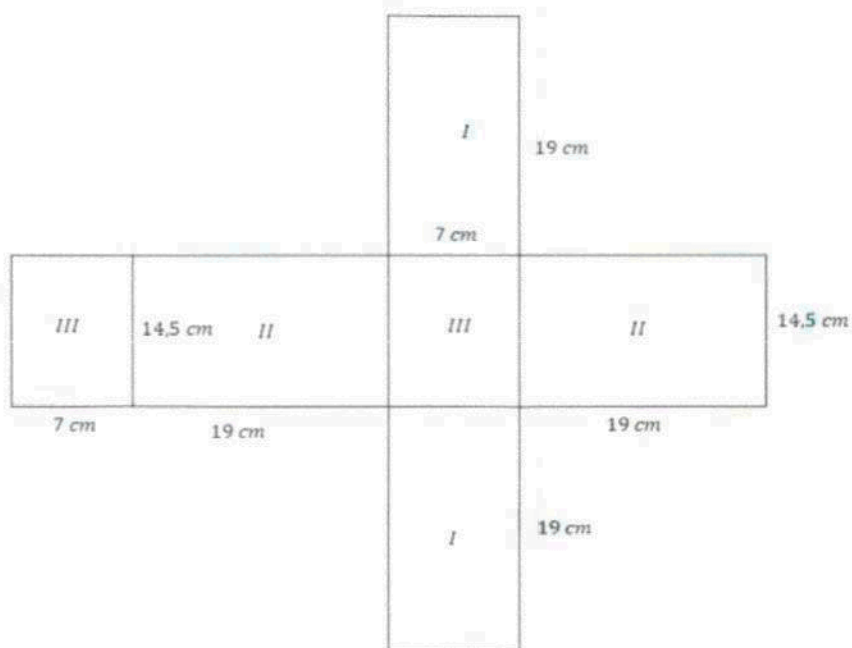
Volume é igual a área da $b \cdot h$, assim

$$\begin{aligned} V &= 80,64 \cdot 24 \\ &= 1935,36 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

CAIXA ATUAL



PLANIFICAÇÃO



- Retângulo de número 1

Medidas: $b = 7 \text{ cm}$ e $h = 19 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo 1}} &= 7 \cdot 19 \\ &= 133 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área dos retângulos de número 1

$$\begin{aligned}A_{\text{retângulo 1}} &= 2 \cdot 133 \\ &= 266 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

- Retângulo de número 2

Medidas: $b = 19 \text{ cm}$ e $h = 14,5 \text{ cm}$

$$\begin{aligned}A_{\text{retângulo 2}} &= 19 \cdot 14,5 \\ &= 275,5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Área dos retângulos de número 2

$$\begin{aligned}A_{\text{retângulo 2}} &= 2 \cdot 275,5 \\ &= 551 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

- Retângulo de número 3

Medidas: $b = 7 \text{ cm}$ e $h = 14,5 \text{ cm}$

$$\begin{aligned}A_{\text{retângulo 3}} &= 7 \cdot 14,5 \\ &= 101,5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Área dos retângulos de número 3

$$\begin{aligned}A_{\text{retângulo 3}} &= 2 \cdot 101,5 \\ &= 203 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Logo,

Área total da caixa nova

$$\begin{aligned}A_{\text{total da caixa nova}} &= 266 + 551 + 203 \\ &= 1020 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

- Volume

Volume é igual a área da $b \cdot h$, então

$$\begin{aligned}A &= 133 \cdot 14,5 \\ &= 1928,5 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES:

- (i) A caixa antiga apresenta uma área maior do que da caixa atual, o que nos mostra que o custo da matéria prima para confeccioná-la é maior;
- (ii) O volume entre as duas caixas apresentou uma diferença pequena, deixando claro que o produto é bem distribuído no espaço disponível;
- (iii) Vamos exemplificar o problema:

Se levarmos em conta a população, aproximada, de Jaçanã/RN que é de 10.000 habitantes e se, pelo menos um habitante comprasse uma caixa por mês de sabão, teríamos o seguinte cálculo:

Caixa antiga:

$$A = 1198,08\text{cm}^2$$

Multiplicando a quantidade consumida na cidade pela área teremos,

$$\text{Área total} = 11.980.800\text{cm}^2$$

Transformando em metros quadrados temos,

$$\text{Área total} = 1.198,08\text{m}^2 \text{ de papelão}$$

Caixa atual:

$$A = 1.020\text{cm}^2$$

Multiplicando a quantidade consumida na cidade pela área, teremos:

$$\text{Área total} = 10.200.000\text{cm}^2$$

Transformando em metros quadrados, temos: $\text{Área total} = 1.020\text{m}^2$

Esse cálculo mostra que, a indústria teria uma economia de $178,08\text{m}^2$ de papelão, apenas na cidade de Jaçanã. Sabemos que o sabão em pó é um produto vendido em todo país, em quantidade significativa. A economia feita pela indústria é exorbitante, e mostra que apenas uma mudança no designer da embalagem, proporcionou uma lucratividade maior e que os mesmos poderão ser revertidos para o desenvolvimento da empresa.

Aplicação 5

Alguns produtos são atraentes pelas embalagens que vislumbram os olhos do consumidor. As formas geométricas servem de inspiração para as empresas e estimulam

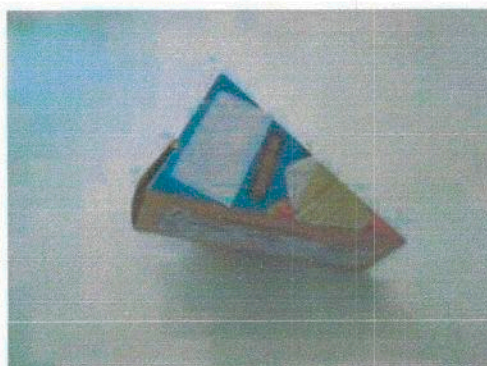
o desenvolvimento de propagandas que focam as formas tridimensionais com eficácia. A jogada de marketing funciona substancialmente e atrai consumidores mais exigentes que buscam qualidade e criatividade.

Diante dessas constatações, buscamos um produto que deixa transparecer “sua imagem” na qualidade do designer trabalhado. Essa criatividade ficou explícita nas embalagens dos queijos Brie e Camembert.

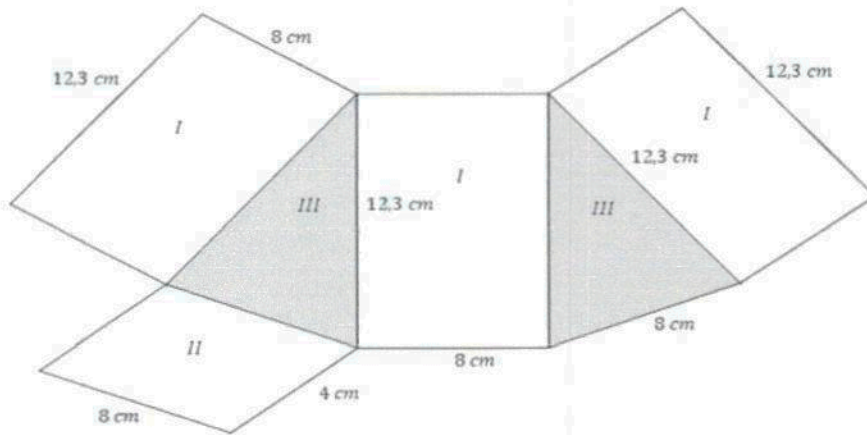
Pergunta: Através dos cálculos de área e volume de cada um dos produtos, quais as conclusões podem ser tomadas em relação às formas geométricas usadas para embalar os produtos? Quais suas vantagens e desvantagens?



1º Caso: Queijo Brie



PLANIFICAÇÃO DO PRISMA DE BASE TRIANGULAR



• Cálculo da Área

FIGURA I (retângulo)

Medidas: $b = 12,3 \text{ cm}$ e $h = 4 \text{ cm}$, assim

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo I}} &= 12,3 \cdot 4 \\ &= 49,2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Como são três retângulos temos,

Área total dos retângulos

$$\begin{aligned} A_{3\text{retângulos}} &= 3 \cdot 49,2 \\ &= 147,6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

FIGURA II (retângulo)

Medidas: $b = 8 \text{ cm}$ e $h = 4 \text{ cm}$, assim

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo 2}} &= 8 \cdot 4 \\ &= 32 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

FIGURA III (triângulo)

Medidas: lado $a = 12,3 \text{ cm}$; lado $b = 12,3 \text{ cm}$ e lado $c = 8 \text{ cm}$

Cálculo da altura do triângulo

Pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$12,3^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow$$

$$151,29 = h^2 + 16 \Rightarrow$$

$$h^2 = 135,29 \Rightarrow$$

$$h \cong 11,63 \text{ cm}^2$$

Calculemos a área do triângulo

$$\begin{aligned} A_{\text{triângulo}} &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{8 \cdot 11,63}{2} \\ &= \cong 46,52 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Como temos 2 triângulos então,

- Área dos triângulos

$$\begin{aligned} A_{\text{triângulos}} &= 2 \cdot 46,53 \\ &= 93,06 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Assim, Área total do prisma de base triangular

$$\begin{aligned} A_{\text{total do prisma}} &= 93,06 + 147,6 + 32 \\ &= 272,66 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

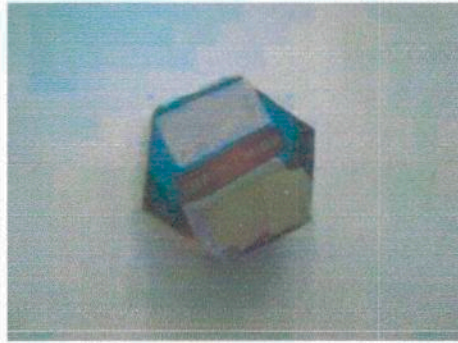
- Volume

$$\text{Área da base} = 46,53 \text{ cm}^2$$

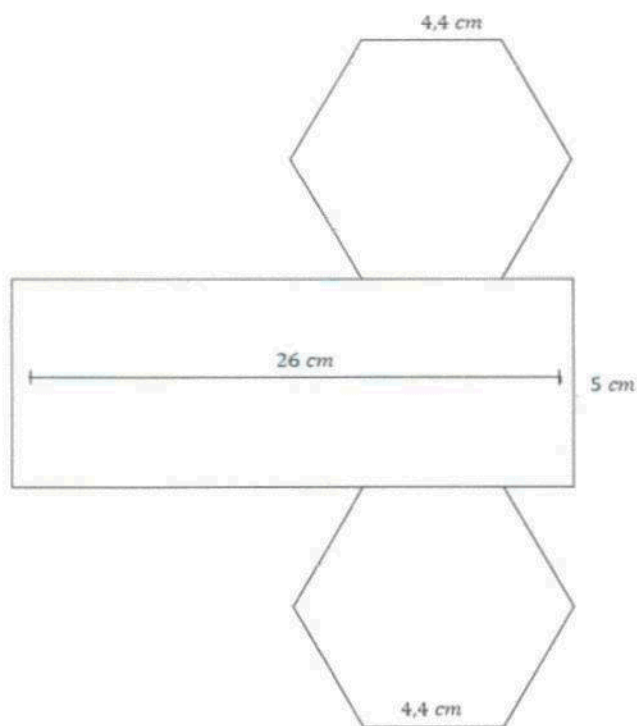
$$\text{Altura} = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{prisma}} &= 46,53 \cdot 4 \\ &= 186,08 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2º Caso: Queijo Camembert



PLANIFICAÇÃO



Cálculo da área:

- Área do hexágono

Sabemos que a área de uma região triangular equilátera é igual a:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Como o lado do triângulo vale $4,4 \text{ cm}$, temos

$$\begin{aligned} A_{\text{triângulo}} &= \frac{4,4^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{19,36\sqrt{3}}{4} \\ &= 4,84\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{\text{hexágono}} &= 6 \cdot 4,84\sqrt{3} \\ &= 29,04\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Área do retângulo

Medidas: $b = 26 \text{ cm}$ e $h = 5 \text{ cm}$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo}} &= 26 \cdot 5 \\ &= 130 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Logo,

Área total do prisma de base triangular

$$\begin{aligned} A_{\text{total do prisma}} &= 2 \cdot 29,04\sqrt{3} + 130 \\ &= 230,59751 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- Volume

Área da base = $29,04\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Altura = 5 cm

$$\begin{aligned} V_{\text{prisma}} &= 29,04\sqrt{3} \cdot 5 \\ &= 251,49378 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Considerações:

Observamos que o designer das embalagens influencia diretamente no custo final dos produtos.

A área da embalagem de base triangular é maior do que a área da embalagem de base hexagonal, o que nos leva a constatar que, a quantidade de matéria prima utilizada para produzir a caixa de forma triangular influenciou no custo final do produto. Às vezes a qualidade dos produtos é a mesma, o que as diferencia é o tamanho, a forma das embalagens que são apresentadas e preço da venda. Essas diferenças devem ser observadas e analisadas com cuidado, para que se possa ter uma economia significativa.



Considerações Finais

O passado faz parte da vida de cada um de nós. Em relação às embalagens isso não é diferente. No século XIX, a produção era caseira e a venda rudimentar. Toda produção era armazenada em barris e vendida a granel. Com o desenvolvimento do comércio, a produção era vendida em grande escala, tornando necessário armazenar os produtos em pequenas embalagens, para maior praticidade e agilidade no atendimento.

Com o surgimento dos mercados o auto-serviço tornou-se visível. As marcas tornaram-se importantes para identificar o fabricante, tornando-o conhecido. Surge assim à necessidade de cada vez mais, modernizar, inovar e aperfeiçoar os logotipos e formas das embalagens. O mercado tornou-se competitivo e desafiador. Produto e embalagem começaram a andar paralelos, um dependendo inteiramente do outro. O consumidor tornou-se exigente, preocupando-se com a forma que o produto estava sendo oferecido.

No decorrer de todo esse tempo, as embalagens continuam inovando e proporcionando, ao consumidor, curiosidade e fascínio pela criatividade e ousadia dos fabricantes. A globalização trás grandes possibilidades para a inovação. Consumidores cada vez mais exigentes impulsionam os fabricantes a buscarem designs sofisticado e conforto nos produtos oferecidos, aliando qualidade e criatividade.

Diante dessas aplicações, observamos que desenvolver trabalhos com embalagens que fazem parte do cotidiano do aluno, propicia um conhecimento mais específico e concreto. Desejamos que a continuidade do trabalho fosse dada, através das aplicações sugeridas em sala de aula.

Entendemos que o processo de ensino/aprendizagem da geometria, torna-se es-

estimulante e eficaz utilizando material concreto no seu desenvolvimento. Estimular os alunos a compreender as abstrações da geometria, através desses elementos que estão envolvidos no cotidiano de cada um, é dever do educador. Esperamos que esse trabalho possibilite um desempenho mais significativo no ensino da geometria.

Cientes de nossa responsabilidade educacional, esperamos contribuir, significativamente, com o processo de ensino/aprendizagem da geometria. Desejamos que todos que se sintam responsáveis com esse processo, dediquem-se a desenvolver meios que facilitem a compreensão da geometria, tornando-a prazerosa e estimulante.

Que essas aplicações façam parte das atividades dos professores e tragam benefícios no ensino da matemática, com responsabilidade e dedicação para que a nossa região tenha resultados significativos, deixando claro que é possível fazer a diferença, basta ter criatividade, lealdade no trabalho e estímulo, só assim conseguiremos mudar a má impressão que se tem dessa disciplina tão importante e deslumbrante que é a matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: Segrac, 1997.
- [2] BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2ª edição - São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [3] BEZERRA, Manoel Jairo. *Curso de Matemática* 35ª edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1980.
- [4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à Geometria Espacial* Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner Ltda, 1993.
- [5] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [6] D' AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.
- [7] DANTE, Luis Roberto. *Matemática, volume único*. Livro do professor. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2005.
- [8] DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*. Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 8. Ed. - São Paulo: Atual, 2005.

- [9] FAINGUELERNT, Estela Kaufman. *Educação matemática: representação e construção em geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- [10] FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).
- [11] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; JR, José Ruy Giovanni. *Matemática: 2º grau*. São Paulo: FTD, 1988.
- [12] LÚCIA, Moysês. *Aplicações de Vygotsky à educação matemática*. Campinas, SP: Papirus, 1997 - (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
- [13] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WARGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Volume 2, 2006.
- [14] MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. 11ª. Ed. - São Paulo: Cortez; Brasília, DF: UNESCO, 2006. NACARATO, Adair Mendes. PASSOS, Cármen Lucia Brancaglioni. *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Paulo: EdUFSCar, 2003.
- [15] OLIVEIRA, Marta Kohl de. *Vygotsky, Aprendizado e Desenvolvimento: um Processo Sócio-Histórico*. 3ª edição. São Paulo: Editora Spicione, 1995.
- [16] Disponível em: www.brasilecola.com/.../principio-cavalieri.htm
Acessado em 16/04/2010.
- [17] Disponível em: <http://www.exatas.com/matematica/euler.html>
Acessado em 30/04/2010.
- [18] Disponível em: <http://www.ime.usp.br/leo/imatica/historia/tales.html>
Acessado em 04/05/2010.
- [19] Disponível em: <http://www2.furg.br/projeto/portaldeembalagens/dez/historia.html>
Acessado em 09/05/2010.

- [20] Disponível em: www.cb2-miranda-douro.rcts.pt/mat/arquim.htm
Acessado em 16/06/2010.