UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

RENATO SILVA PEREIRA

Cuité - PB

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

RENATO SILVA PEREIRA

Cuité - PB

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

P436t Pereira, Renato Silva.

O teorema fundamental do cálculo e aplicações. / Renato Silva Pereira – Cuité: CES, 2010.

56 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde – UFCG, 2010.

Orientadora: Msc Márcia Cristina Silva Brito.
Co-orientadora: Msc Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Cálculo - teorema. 2. Integral de Riemann. 3. Integrabilidade - condições. I. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

O Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações

Renato Silva Pereira

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 05 de julho de 2010.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)

Angelo Roncalli F. de Holanda
Prof. Angelo Roncalli Furtado de Holanda

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por mais esta conquista em minha vida. Sem Ele nada disso teria sido possível.

À toda minha família e, em especial, aos meus pais Arnaldo e Rosa Maria, minha irmã Amanda, minha avó Isabel e minha tia Socorro. Pessoas estas que estiveram sempre ao meu lado, me dando todo o apoio possível.

À todos os meus amigos e, em particular, a Fátima e a Jocássia.

À professora Márcia Cristina, pela orientação e pelo imenso incentivo em dar continuidade aos meus estudos. Ter trabalhado com ela foi uma honra para mim.

À professora Gisélia, pelas sugestões e críticas enriquecedoras. Elas foram fundamentais para o desenlvimento deste trabalho.

À todos os professores e, em especial, ao professor Anselmo Lopes, pelo grande incentivo, e ao professor Angelo Roncalli, a quem eu devo muito do que aprendi nesses últimos quatro anos.

Por fim, agradeço a todos os funcionários do campus. Eles também fazem parte dessa conquista.

Obrigado à todos!

Aos meus pais,
Arnaldo Pereira da Silva e
Rosa Maria Silva Pereira.

"Um homem pode imaginar coisas que são falsas, mas ele pode somente compreender coisas que são verdadeiras, pois se as coisas forem falsas, a noção delas não é compreensível."

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho discutiremos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e apresentaremos sua demonstração, bem como as propriedades referentes à integrabilidade de uma função. Adotaremos um ponto de vista voltado para a Análise Real, sendo, portanto, necessário apresentar todo o rigor e formalização, que são exigidos pelos conceitos considerados mais importantes. Apresentaremos a integral no sentido de Riemann, nos preocupando apenas com as chamadas somas superior e inferior. Com esta finalidade, faremos uso constante das propriedades relacionadas a ínfimo e supremo, sendo estas, portanto, fundamentais para o desenvolvimento das análises a serem feitas, ao longo deste trabalho. Finalizaremos com duas aplicações, às quais julgamos ser importantes, para enfatizar a importância do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Integral de Riemann, Condições de Integrabilidade.

Abstract

In this work we will discuss about the Fundamental Theorem of Calculus and we will show its demonstration, like the properties related to the integrability of a function. We will adopt a viewpoint focused on Real Analysis, therefore, necessary to show all the rigor and formalization, which are required by the concepts considered more important. We will show the integral in the Riemann sense, worrying only with so-called upper and lower sums. To this end, we will do constant use of the properties related to lowermost and supreme, and these are therefore fundamental to the development of the analysis to be do throughout this work. Conclude with two applications, which we think is important to emphasize the importance of the Fundamental Theorem of Calculus.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Riemann Integral, Integrability Conditions.

Sumário

Introdução

Ao longo deste trabalho, apresentaremos uma série de conceitos e resultados, objetivando uma preparação mínima que é exigida ao se trabalhar com o Teorema Fundamental do Cálculo. Adotando um ponto de vista voltado para a Análise Real, pretendemos fazer uma análise sucinta das propriedades relacionadas à este teorema.

O Teorema Fundamental do Cálculo é o ponto de ligação entre os Cálculos Diferencial e Integral. Como veremos, ele relaciona o problema de determinar reta tangente com o conceito de área. De um lado, temos uma integral definida e de outro uma função primitiva. Em outras palavras, o teorema afirma que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$ e tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Como se pode ver, o teorema exige que a função seja integrável. Dessa forma, precisamos conhecer em que condições uma função pode ser dita integrável, no sentido de Riemann, tal como definiremos no decorrer deste trabalho. E como veremos, ela tem que ser, antes de tudo, limitada. Como vamos trabalhar com funções limitadas, então é necessário conhecermos as principais propriedades que caracterizam tais funções.

Nossa discussão começa então, com as propriedades relacionadas aos conceitos de ínfimo e supremo. Isto realmente é necessário, tendo em vista que definiremos o conceito de integral em função do ínfimo e do supremo, das chamadas somas inferior e superior. Uma vez definida a integral, devemos partir para as condições em que se dá a integrabilidade de uma dada função. É aí que se encontram relacionados diversos conceitos e resultados de expressão significativa, tal como veremos mais adiante. Observaremos que a continuidade de uma função em um intervalo fechado assegura muitas propriedades de grande importância, às quais precisam de uma atenção especial. Outras exigências também serão feitas e, logo, teremos um conjunto considerável de funções integráveis.

Com isso em mente, o nosso próximo passo será apresentar alguns resultados de nosso interesse sobre derivadas. Dentre eles, os que daremos atenção especial são o Teorema de Darboux e o Teorema do Valor Médio de Lagrange. Resultados estes, que desempenharão papel importantíssimo para o desfecho de nossa discussão. Uma vez que se tenha analisado todas estas questões, estamos em condições de apreciar a ferramenta mais importante do Cálculo, que é o Teorema Fundamental do Cálculo.

Finalmente, para complementar e reforçar a importância do Teorema Fundamental do Cálculo, apresentaremos algumas aplicações.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Uma Motivação

Antes de iniciarmos nossa discussão sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C.), do ponto de vista analítico, faremos um breve tratado em torno do qual nos direcionaremos momentaneamente para discutir sobre alguns problemas, que foram, de certa forma, cruciais para o desenvolvimento moderno da teoria *integral* e mais especialmente do T.F.C.

Temos interesse particular pelo problema do cálculo de área de figuras planas, como o círculo, por exemplo, tendo em vista o chamado *método de exaustão*. Tal método consiste em cobrir a região interna à referida figura, utilizando-se outras formas geométricas mais simples e cuja área seja conhecida. Este método é atribuído ao matemático Eudoxo (406-355 a.C.), mas foi o matemático Arquimedes (287-212 a.C.) o responsável por seu desenvolvimento e aperfeiçoamento. Foi utilizando este método que Arquimedes obteve uma aproximação para a área do círculo.

1.1.1 O Cálculo da Área do Círculo

A idéia principal se baseia em tentar cobrir a área do círculo por meio da área de polígonos regulares à ele inscritos. Dessa forma, o problema resultante se resume ao de calcular área de triângulos.

Para obter uma aproximação para a área do círculo, Arquimedes o dividiu em setores de mesma área e, em cada setor, construiu um triângulo isósceles de forma que dois de seus lados tivessem a mesma medida que o raio.

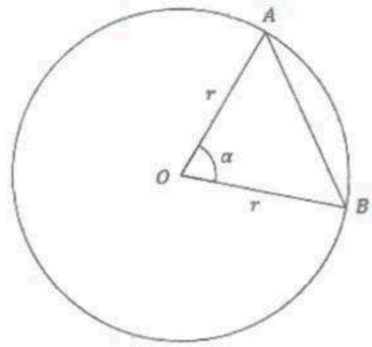

Figura 1.1: O triângulo isósceles ΔAOB, contido no setor circular AOB.

Se o procedimento for continuado, de forma a obtermos um número de triângulos tão grande quanto se queira, então observamos que à medida que esse número aumenta, os comprimentos das bases dos triângulos diminui gradativamente e, em consequência, as medidas das alturas dos triângulos tornam-se cada vez mais próxima do comprimento do raio. Dessa forma, se considerarmos a soma das áreas de todos esses triângulos obteremos um valor tão próximo da área do círculo quanto se queira. Essa conclusão se baseia na seguinte explicação geométrica: se esses triângulos forem colocados justapostos um ao outro, percebemos assim, que a figura vai adquirindo a forma de um retângulo de base medindo πr e altura r. Ora, um simples cálculo nos revela que a área deste retângulo é igual a πr^2, que é a área do círculo.

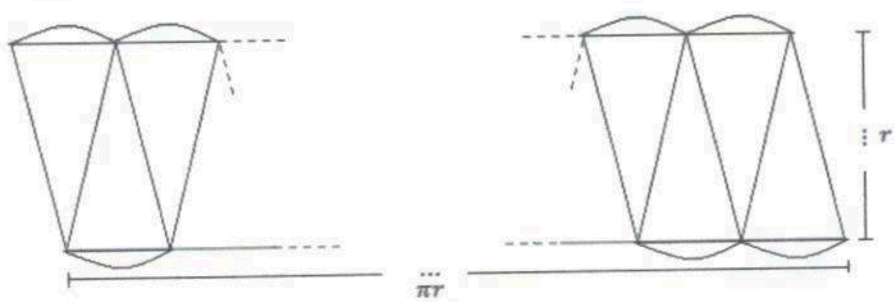

Figura 1.2: Figura se aproximando de um retângulo à medida que se aumenta o número de triângulos.

Este tipo de problema envolvendo áreas tornou-se, posteriormente, um dos precursores da teoria integral. Como podemos observar, a idéia empregada por Arquimedes é, na verdade, o conceito de limite. Usando este conceito, mostraremos que Arquimedes estava certo. Primeiro, vamos dividir o círculo em n setores de mesma área e considerar um triângulo, contido em um dos setores, como mostra a figura 1.3.

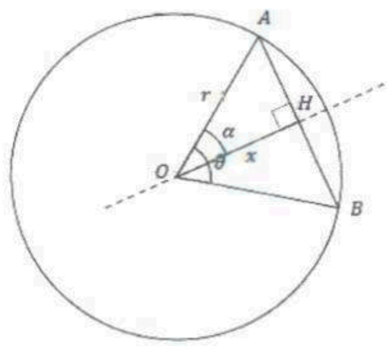

Figura 1.3: No triângulo acima, temos $OH = x$, $A\hat{O}B = \theta$ e $H\hat{O}A = \alpha$.

Note que $\theta = 2\pi/n$ e $\alpha = \pi/n$. Além disso, sendo o triângulo ΔOHA retângulo em H, então

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Logo, a área do triângulo ΔOHA é dada por

$$A_{\Delta OHA} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Consequentemente, a área do triângulo ΔOAB é

$$A_{\Delta AOB} = r^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Como temos n setores, então a área total, dos n triângulos, é dada por

$$A_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

onde $n \geq 3$. Dessa forma, obtemos uma sequência[1], denotada por A_n. Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} A = \lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\pi r^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{n}{\pi}\right] \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

[1]Uma sequência é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x(n) = x_n$ que faz corresponder a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

É importante destacar que o método utilizado por Arquimedes, embora funcionasse, apresentava muitas limitações. Para cada tipo de problema a ser trabalhado, era preciso obter aproximações particulares para cada um deles. Em outras palavras, não consistia de um método geral, cujas aproximações por algum polígono, funcionasse para qualquer problema dessa natureza. Somente mais tarde, com a criação do cálculo, é que métodos mais gerais foram sendo descobertos. Com o cálculo, foi possível fazer uma análise mais profunda e geral, que suprisse as limitações do método acima mencionado.

1.2 O Início do Cálculo Diferencial e Integral

O método visto anteriormente nos mostra que, de certa forma, na antiguidade a idéia central do Cálculo já apresentava seus primeiros indícios.

Os problemas de quadratura, que consistiam em determinar quadrados com áreas iguais à de figuras com áreas desconhecidas, por muito tempo constituiu um dos principais problemas enfrentados pelos matemáticos.

Alguns dos matemáticos que antecederam o início do Cálculo, tinham em mente a idéia de partes infinitamente pequenas. O objetivo era empregar estas idéias inovadoras para solucionar problemas de natureza geométrica. Matemáticos como Cavaliere[2] e Fermat[3] foram bem sucedido neste aspecto. Este último, principalmente, fez contribuições importantes, no que se refere à determinação de tangente à uma dada curva $y = f(x)$, passando por um de seus pontos. Além disso, Fermat também desenvolveu um método para avaliar a área abaixo dessas curvas. Estas novas descobertas indicavam que em pouco tempo, uma nova teoria estava para ser descoberta.

Outros matemáticos que tiveram contribuições importantes foram os ingleses Isaac Barrow (1630-1677) e John Wallis (1616-1703). Wallis fez importantes descobertas sobre análise infinitesimal, e Barrow foi um dos primeiros a perceber uma relação inversa existente entre os problemas de tangente e quadratura (ver [3]). Sem dúvida,

[2]Bonaventura Cavaliere (1598-1647), matemático italiano que desenvolveu métodos para determinação de áreas e volumes.

[3]Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês e um dos responsáveis pelo desenvolvimento da Geometria Analítica.

os trabalhos desses dois matemáticos influenciaram em muito as descobertas feitas por Issac Newton (1642-1727), um dos fundadores do Cálculo.

As primeiras descobertas de Newton dizem respeito à representação de funções por meio de séries infinitas. A partir de 1665, Newton passa a interpretar as grandezas como taxa de variação, o que mais tarde possibilitou o desenvolvimento de um método geral, que unia a taxa de variação e as séries infinitas. Dando continuidade aos trabalhos de Barrow, Newton desenvolveu seu "Método dos Fluxos" e foi o primeiro a enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo. Em pouco tempo Newton fez descobertas extraordinárias, relacionadas à gravitação, mecânica, luz e ótica.

Assim como Newton, o alemão Whilhelm Leibniz (1646-1716), trabalhando de forma independente, também descobriu o Cálculo. Embora Newton tenha descoberto o Cálculo 10 anos antes de Leibniz, este foi o primeiro a publicá-lo, em 1684. Pouco tempo depois Leibniz volta a publicar e, desta vez, faz referência à relação existente entre diferenciação e integração, como se dá no Teorema Fudamental do Cálculo. As notações de Leibniz, para derivada e integral, são ainda hoje utilizadas, diferentemente das notações empregadas por Newton.

A partir daí, o Cálculo passa a desenvolver-se de forma gradativa, sendo impulsionado, principalmente por problemas relacionados à Física Matemática. Tendo em vista tamanha importância, grande parte do matemáticos posteriores passam a se preocupar cada vez mais, no sentido de eliminar qualquer incerteza sobre os conceitos abrangidos na nova teoria. É o início de uma das mais importantes áreas da matemática, denominada Análise. Matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weiertrass (1815-1897) e Bernhard Riemann (1826-1866) contribuíram em muito para o desenvolvimento da Análise.

O Teorema Fundamental do Cálculo também foi influenciado pelas novas descobertas. Com o desenvolvimento da Integral de Riemann e da Integral de Lebesgue[4], ampliou-se em muito o conjunto de funções, para as quais o teorema é válido.

[4]Henri Lebesgue (1875-1941), matemático francês responsável pela teoria moderna de integral, a chamada Integral de Lebesgue.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Para falar sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos primeiro entender o conceito de integral. Além disso, é de fundamental importância determinar as condições de integrabilidade de funções e para isto, devemos ter em mente os principais resultados relacionados à integral.

2.1 Ínfimo e Supremo

Dizemos que um subconjunto de números reais $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe um número real a tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Todo número a, satisfazendo esta condição, é chamado *uma cota inferior de* X. Analogamente, $X \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado superiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que b é uma *cota superior de* X.

Quando $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferior e superiormente dizemos simplesmente que X é limitado, o que equivale a dizer que existe um elemento $c > 0$ de modo que se tenha $|x| \leq c$, qualquer que seja $x \in X$. De fato, se a e b são cotas inferior e superior de X, respectivamente, então, tomando $c = \max\{|a|, |b|\}$, obtemos

$$-c \leq a \leq x \leq b \leq c \Longleftrightarrow |x| \leq c.$$

Definição 2.1 (Ínfimo) *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto não-vazio e limitado inferiormente. Chama-se ínfimo de* X *em* $\mathbb{R}$ *a maior de todas as cotas inferiores de* X*. Se* m

é ínfimo de X, escrevemos $m = \inf X$. Isto equivale as seguintes afirmações:

i) Qualquer que seja $x \in X$, temos $m \leq x$;

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $m \leq x < m + \varepsilon$.

Definição 2.2 (Supremo) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e limitado superiormente. Chama-se supremo de X em $\mathbb{R}$ a menor de todas as cotas superiores de X. Se M é supremo de X, denotamos por $M = \sup X$. Ou equivalentemente,*

i) Qualquer que seja $x \in X$, temos $x \leq M$;

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$.

Sempre que falarmos em ínfimo e supremo devemos especificar em relação a que conjuntos estamos nos referindo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.1 *Seja $I = [0, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$. Se considerarmos o conjunto dos números reais, então $\inf I = 0$ e $\sup I = \sqrt{2}$. Porém, em relação ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ temos $\inf I = 0$ e $\nexists \sup I$.*

Os conceitos de ínfimo e supremo fornecem resultados importantes para o nosso estudo e, por isso, merecem um pouco da nossa atenção. Vale salientar que os conjuntos que iremos considerar a seguir são todos subconjuntos de $\mathbb{R}$ e não-vazios.

Proposição 2.1 *Sejam X e Y subconjuntos limitados tais que $x \leq y$, quaisquer que sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Então, $\sup X \leq \inf Y$. Além disso, $\sup X = \inf Y$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.*

Prova: Note que qualquer que seja $y \in Y$, y é cota superior de X. Logo, $\sup X \leq y$. Como $\inf Y$ deve ser a maior das cotas inferiores de Y, segue que $\sup X \leq \inf Y$. Agora, seja $\sup X < \inf Y$. Considerando $\varepsilon = \inf Y - \sup X$, obtemos que

$$x + \varepsilon \leq \sup X + \varepsilon = \inf Y \leq y \Longrightarrow \varepsilon \leq y - x.$$

Por outro lado, se $\sup X = \inf Y$, então dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\begin{aligned} &\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup X = \inf Y \leq y < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow y - x < \inf Y - \sup X + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2 *Sejam X e Y subconjuntos limitados e c um número real. Então os conjuntos*

$$X + Y = \{x + y; x \in X, y \in Y\}, \text{ e } c \cdot X = \{cx; x \in X\}$$

são limitados e, além disso, vale:

i) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$, *e* $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$;

ii) $\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup X$, *e* $\inf(c \cdot X) = c \cdot \inf X$, *para* $c \geq 0$;

iii) $\sup(c \cdot X) = c \cdot \inf X$, *e* $\inf(c \cdot X) = c \cdot \sup X$, *para* $c < 0$.

Prova: Sendo X e Y limitados, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $|x| \leq c_1$ e $|y| \leq c_2$, quaisquer que sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Logo,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq c_1 + c_2;$$
$$|cx| = |c||x| \leq |c|c_1.$$

Ou seja, $X + Y$ e $c \cdot X$ são limitados e, portanto, possuem ínfimo e supremo.

i) Sejam $M = \sup X, N = \sup Y, m = \inf X$ e $n = \inf Y$. Temos que,

$$m + n \leq x + y \leq M + N,$$

para quaisquer que sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Ou seja, $m + n$ e $M + N$ são cotas inferior e superior de $X + Y$, respectivamente. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ com $m \leq x_1 < m + \varepsilon/2$, $n \leq y_1 < n + \varepsilon/2$, $M - \varepsilon/2 < x_2 \leq M$ e $N - \varepsilon/2 < y_2 \leq N$. Daí,

$$(m + n) \leq x_1 + y_1 < \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right) = (m + n) + \varepsilon,$$

isto é, $m + n$ é a maior das cotas inferiores de $X + Y$. Donde, $\inf(X + Y) = m + n$, ou seja, $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$. Temos ainda,

$$(M + N) - \varepsilon = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(N - \frac{\varepsilon}{2}\right) < x_2 + y_2 \leq (M + N),$$

ou seja, $M + N$ é a menor das cotas superiores de $X + Y$. Donde, $\sup(X + Y) = M + N$, isto é, $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$. Isto prova o item *(i)*.

ii) Se $c = 0$, então $\sup(c \cdot X) = \sup 0 = 0 = 0 \cdot \sup X$. Seja $c > 0$. Então,

$$m \leq x \leq M \Longrightarrow c \cdot m \leq c \cdot x \leq c \cdot M,$$

para todo $x \in X$. Assim, vemos que $c \cdot m$ e $c \cdot M$ são cotas inferior e superior de $c{\cdot}X$, respectivamente. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $x_1, x_2 \in X$ tal que $m \leq x_1 < m + \varepsilon/c$ e $M - \varepsilon/c < x_2 \leq M$. Donde, obtemos

$$c{\cdot}m \leq c{\cdot}x_1 < c{\cdot}m + \varepsilon, \text{ e } c{\cdot}M - \varepsilon < c{\cdot}x_2 \leq c{\cdot}M.$$

Portanto, $c \cdot m$ e $c \cdot M$ são, respectivamente, a maior e a menor das cotas inferiores e superiores de $c{\cdot}X$, isto é, $\sup(c{\cdot}X) = c{\cdot}\sup X$ e $\inf(c{\cdot}X) = c{\cdot}\inf X$.

iii) Se $c < 0$, então $c{\cdot}M \leq c{\cdot}x \leq c{\cdot}m$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = -\varepsilon/c > 0$. Daí, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $m \leq x_1 < m + \delta$ e $M - \delta < x_2 \leq M$. Logo,

$$\begin{aligned} c{\cdot}m - \varepsilon &= c{\cdot}\left(m - \frac{\varepsilon}{c}\right) = c{\cdot}(m + \delta) < c{\cdot}x_1 \leq c{\cdot}m; \\ c{\cdot}M \leq c{\cdot}x_2 &< c{\cdot}(M - \delta) = c{\cdot}\left(M + \frac{\varepsilon}{c}\right) = c{\cdot}M + \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $c \cdot M$ e $c \cdot m$ são, respectivamente, a maior e a menor das cotas inferiores e superiores de $c{\cdot}X$, isto é, $\sup(c{\cdot}X) = c{\cdot}\inf X$ e $\inf(c{\cdot}X) = c{\cdot}\sup X$.

□

No caso de estarmos considerando funções reais, esta última proposição sofre algumas mudanças, como veremos a seguir.

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, quando o seu conjunto imagem

$$f(X) = \{f(x); x \in X\}$$

for limitado. Assim, podemos considerar

$$\begin{aligned} \inf f &= \inf f(X) = \inf\{f(x); x \in X\}; \\ \sup f &= \sup f(X) = \sup\{f(x); x \in X\}, \end{aligned}$$

para indicar o ínfimo e o supremo de f.

Da proposição 2.2, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas e c um número real. Tem-se que as funções*

$$f + g, c{\cdot}f : X \to \mathbb{R}$$

são limitadas e além disso,

i) $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, *e* $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$;

ii) $\sup(c\cdot f) = c\cdot\sup f$, *e* $\inf(c\cdot f) = c\cdot\inf f$, *para* $c \geq 0$;

iii) $\sup(c\cdot f) = c\cdot\inf f$, *e* $\inf(c\cdot f) = c\cdot\sup f$, *para* $c < 0$.

Prova: Sejam $F = f(X), G = g(X)$, e $H = (f+g)(X)$. Como F e G são limitados, então $F+G$ e $c\cdot F$ também são limitados. Note ainda que os ítens *(ii)* e *(iii)* seguem diretamente da proposição anterior. Para provar *(i)* usaremos o seguinte resultado:

Afirmação: Sejam $A \subset B$ subconjuntos não-vazios e limitados de números reais. Então,

$$\sup A \leq \sup B, \text{ e } \inf B \leq \inf A.$$

De fato, note que

$$\sup B \geq x, \forall x \in B \Longrightarrow \sup B \geq x, \forall x \in A;$$
$$\inf B \leq x, \forall x \in B \Longrightarrow \inf B \leq x, \forall x \in A,$$

ou seja, $\sup B$ e $\inf B$ são, respectivamente, cotas superior e inferior de A. Donde, $\sup A \leq \sup B$ e $\inf B \leq \inf A$.

Agora, observe que se $y \in H$, então $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para algum $x \in X$. Como $f(x) \in F$ e $g(x) \in G$, segue que $y \in F+G$. Logo, $H \subset F+G$. Portanto, $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

□

Exemplo 2.1.2 *Sejam* $f, g : X = [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dadas por* $f(x) = x$ *e* $g(x) = -x$. *Temos que,* $0 \leq f(x) \leq 1$ *e* $-1 \leq g(x) \leq 0$, *logo* $-1 \leq f(x) + g(x) \leq 1$, *enquanto que* $(f+g)(x) = 0$. *Isto mostra que* $(f+g)(X) \not\supset f(X) + g(X)$.

Proposição 2.3 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *limitada. Se* $m = \inf f, M = \sup f$ *e* $\omega = M - m$, *então*

$$\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}.$$

Prova: Para quaisquer $x, y \in X$, temos $m \leq f(x) \leq M$ e $-M \leq -f(y) \leq -m$. Logo,

$$-(M-m) \leq f(x) - f(y) \leq M - m \Longleftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = \omega.$$

Supondo $f(x) \geq f(y)$, e dado ε, podemos obter $f(y), f(x) \in f(X)$ tais que

$$m \leq f(y) < m + \varepsilon/2 \text{ e } M - \varepsilon/2 < f(x) \leq M.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}\omega - \varepsilon = (M - m) - \varepsilon = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ < f(x) - f(y) \\ \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.4 *Sejam $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ subconjuntos não-vazios e limitados de números reais. Se para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$ existem $x' \in X'$ e $y' \in Y'$ tais que $x \leq x'$ e $y' \leq y$, então $\sup X' = \sup X$ e $\inf Y' = \inf Y$.*

Prova: Temos que $\sup X' \leq \sup X$ e $\inf Y \leq \inf Y'$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $x' \in X'$, $y \in Y$ e $y' \in Y'$ tais que

$$\begin{aligned}&\sup X - \varepsilon < x \leq x' \leq \sup X;\\ &\inf Y \leq y' \leq y < \inf Y + \varepsilon.\end{aligned}$$

Donde, segue o resultado.

□

2.2 Integral de Riemann

Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado de números reais. Chama-se *partição* do intervalo I a todo subconjunto finito de pontos

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset I,$$

de modo que se tenha, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. O intervalo $[x_{i-1}, x_1]$ de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ será chamado o i-ésimo intervalo da partição P. Dessa forma temos,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a.$$

Se P e Q são partições de I, com $P \subset Q$, dizemos que Q refina P, ou ainda, que Q é um refinamento de P. Com isso, para se obter um refinamento de P basta acrescentar-lhe mais pontos. Assim, se $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ temos que

$$Q = P \cup \left\{x; x = \frac{x_0 + x_1}{2}\right\}$$

é um refinamento de P.

Dada uma função limitada $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ e $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ uma partição de I, consideraremos

$$m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\};$$
$$M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\};$$
$$\omega_i = M_i - mi,$$

para representar, nesta ordem, o ínfimo, o supremo, e a oscilação de f no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P.

2.2.1 Soma Inferior e Soma Superior

Seja $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ um partição de I. A *soma inferior*, denotada por $s(f; P)$, e a *soma superior*, denotada por $S(f; P)$, ambas em relação à partição P, são definidas como sendo

$$s(f; P) = m_1\Delta x_1 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i;$$
$$S(f; P) = M_1\Delta x_1 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Consideremos

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}, \text{ e } M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Assim, no i-ésimo intervalo temos $m \leq m_i \leq M_i \leq M$. Daí,

$$m\Delta x_i \leq m_i\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i \leq M\Delta x_i.$$

Com isso,,

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i,$$

ou seja, $m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a)$.

Uma representação gráfica para essas somas pode ser vista na figura 2.1. Como podemos observar, a soma inferior $s(f; P)$ é uma aproximação por falta da área da região compreendida entre as retas $x = a, y = b$ e o gráfico de f em $[a, b]$, onde $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, enquanto que $S(f; P)$ é uma aproximação por excesso da área da mesma região.

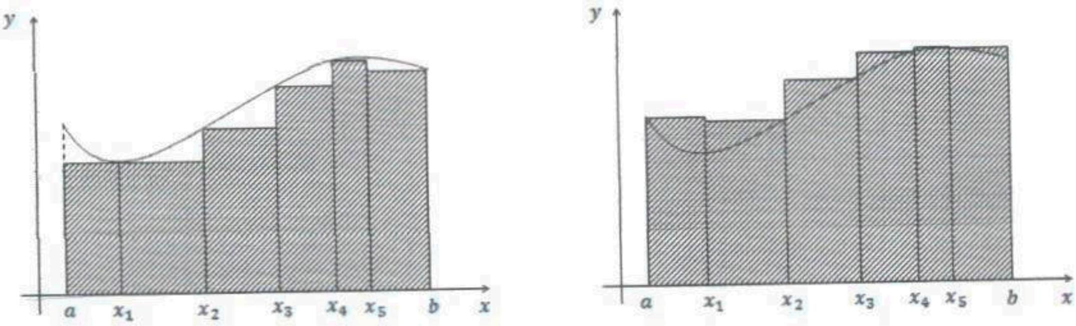

Figura 2.1: Representação gráfica para $s(f;P)$ e $S(f;p)$, respectivamente.

Teorema 2.1 *Se P é uma partição e Q é um refinameto de P, então*

$$s(f;P) \leq s(f;Q), \ \text{e} \ S(f;Q) \leq S(f;P).$$

Demonstração: Seja Q um refinamento de $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, obtida pelo acréscimo de um ponto y, isto é, $Q = P \cup \{y\}$. Ora, existe um índice j tal que $y \in (x_{j-1}, x_j)$. Sejam

$$\begin{aligned} M' &= \sup\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq y\}; \\ M'' &= \sup\{f(x); y \leq x \leq x_j\}. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta x_j = (x_j - y) + (y - x_{j-1})$, então

$$\begin{aligned} S(f;Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i \Delta x_i + M_j[(x_j - y) + (y - x_{j-1})] + \sum_{i=j+1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} M_i \Delta x_i + M'(x_j - y) + M''(y - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i \Delta x_i. \end{aligned}$$

Além disso,

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i \Delta x_i + M_j[(x_j - y) + (y - x_{j-1})] + \sum_{i=j+1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Como $M' \leq M_j$ e $M'' \leq M_j$, obtemos que

$$S(f;Q) - S(f;P) = (M' - M_j)(x_j - y) + (M'' - M_j)(y - x_{j-1}) \leq 0.$$

Donde, $S(f;Q) \leq S(f;P)$. Agora, seja Q_k um refinamento de P, obtido pelo acréscimo de k pontos, isto é,

$$Q_k = P \cup \{y_1, y_2, ..., y_k\}.$$

Suponha $S(f;Q_k) \leq S(f;P)$ e note que $Q_{k+1} = Q_k \cup \{y_{k+1}\}$. Pelo que acabamos de mostrar, temos $S(f;Q_{k+1}) \leq S(f;Q_k)$. Portanto, $S(f;Q_{k+1}) \leq S(f;P)$. A demonstração no caso do ínfimo se faz de forma análoga.

□

Corolário 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$, temos $s(f;P) \leq S(f;Q)$.*

De fato, note que $P \cup Q$ é um refinamento de P e de Q. Logo,

$$s(f;P) \leq s(f;P\cup Q) \leq S(f;P\cup Q) \leq S(f;Q).$$

2.2.2 Integral Inferior e Integral Superior

Agora, apresentaremos os conceitos de integral inferior e integral superior, a apartir dos quais definiremos a integral de Riemann.

Dada $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e P uma patição de I, definimos a *integral inferior* e a *integral superior* de f, respectivamente por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P), \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P),$$

onde o inf e o sup são tomados em relação a todas as partições P de I.

Tal como as definimos acima, a integral inferior e a integral superior gozam das seguintes propriedades:

i) Para quaisquer que sejam as partições P de $[a,b]$, temos que

$$s(f;P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx, \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f;P);$$

ii) Dado $\varepsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a,b]$ tais que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < s(f;P), \quad \text{e} \quad S(f;Q) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Além disso, sendo P e Q partições quaisquer de $[a,b]$, temos que

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;Q) \leq M(b-a),$$

desde que se tenha $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Aplicando a proposição 2.1, obtemos

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq \sup s(f;P) \leq \inf S(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a),$$

Ou seja,

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ainda, em consequência do teorema 2.1, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.3 *Seja P uma partição de $[a, b]$. Se considerarmos as somas $s(f;Q)$ e $S(f;Q)$ apenas relativas às partições Q que refinam P, então os valores para $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ permanecem os mesmos.*

Prova: Considere os seguintes conjuntos

$$X = \{s(f;P); P \text{ é partição de } [a,b]\};$$
$$Y = \{s(f;Q); Q \text{ é um refinamento de } P\}.$$

Note que $Y \subset X$, e $s(f;P) \leq s(f;Q)$, de forma que podemos usar a proposição 2.4 e obter $\sup Y = \sup X$, isto é,

$$\sup_Q s(f;Q) = \sup_P s(f;P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Para mostrar o caso da integral superior, procedemos de maneira análoga.

□

2.2.3 Função Integrável

Podemos definir o conceito de integral a partir das somas inferior e superior, como segue.

Definição 2.3 (Integral Segundo Riemann) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável(à Riemann) quando suas integrais inferior e superior possuem o mesmo valor. Indicamos por*

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

onde $\int_a^b f(x)dx$ denota um valor comum, que é a integral de Riemann.

Exemplo 2.2.1 *Considere a função constante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = k$, para todo $x \in [a, b]$. Afirmamos que f é integrável.*

De fato, para toda partição P de $[a, b]$, temos $m_i = M_i = k$ no i-ésimo intervalo de P. Daí,

$$s(f;P) = S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k(b-a).$$

Segue que $\sup s(f;P) = \inf S(f;P) = k(b-a)$ *e, portanto,*

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

Teorema 2.2 (Condição Imediata de Integrabilidade) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) f é integrável;

ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que

$$S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon;$$

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$. Considere os conjuntos

$$X = \{s \mid s = s(f;P); P \text{ é partição de } [a;b]\};$$
$$Y = \{S \mid S = S(f;Q); Q \text{ é partição de } [a;b]\}.$$

Pelo corolário 2.2 temos $s(f;P) \leq S(f;Q)$, quaisquer que sejam $s \in X$ e $S \in Y$. Além disso, sendo f integrável vale $\sup s(f;P) = \inf S(f;Q)$, isto é, $\sup X = \inf Y$. Decorre da proposição 2.1 que dado $\varepsilon > 0$, existem $s \in X$ e $S \in Y$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Note que a partição $P \cup Q$ refina P e Q. Logo, pelo teorema 2.1, temos

$$s(f;P) \leq s(f;P\cup Q) \leq S(f;P\cup Q) \leq S(f;Q).$$

Donde, obtemos

$$S(f;P\cup Q) - s(f;P\cup Q) \leq S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. De fato, sendo $S(f;P\cup Q) - s(f;P\cup Q) < \varepsilon$, então pela proposição 2.1 obtemos $\sup X = \inf Y$, isto é, $\sup s(f;P\cup Q) = \inf S(f;P\cup Q)$ e, portanto, f é integrável.

□

Teorema 2.3 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas.*

1) Seja $a < c < b$. A função f é integrável se, e somente se, as restrições $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, e neste caso, tem-se que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) Se f e g são integráveis, então:

i) A soma $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) O produto $f \cdot g$ é integrável e, se $c \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

iii) Se $0 < k \leq |g(x)|$, para todo $x \in [a, b]$, então o quociente f/g é integrável.

iv) Se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, temos

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

v) O valor absoluto de f, $|f|$, é integrável e

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Omitiremos a demonstração deste teorema. Os leitores interessados podem encontrá-la em [9].

Como sabemos, a igualdade presente em *(1)*, no teorema acima, só é verdadeira para $a < c < b$. Afim de generalizarmos esta igualdade para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, faremos as seguintes convenções:

i) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx := 0;$

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$

Com isso, evitamos alguns problemas que poderiam surgir mais adiante.

2.3 Condições de Integrabilidade

Nesta seção estudaremos algumas condições para que uma função seja integrável. Como veremos, isto requer algumas noções, às quais faremos uma breve revisão. Para maiores detalhes, indicamos as referências [9] e [7].

2.3.1 Limite e Continuidade

Definição 2.4 (Limite de Uma Função) *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real, e x_0 um ponto de acumulação* [1] *de X. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para x_0 é o número real L, e escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, sempre que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Este limite, quando existe, é único.

Existem ainda os chamados limites laterais, como veremos a seguir. Mas, primeiro, consideremos os seguintes conjuntos

$$X'_+ = \{x; \forall \varepsilon > 0, (x, x + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset\};$$
$$X'_- = \{x; \forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Os pontos de X'_+ e de X'_- são chamados, respectivamente, de pontos de acumulação à direita e à esquerda de X.

Definição 2.5 (Limites Laterais) *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X'_+$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite à direita de $f(x)$, e escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente, se $x_0 \in X'_-$, $L \in \mathbb{R}$ será o limite à esquerda de $f(x)$, e denotado por $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$, sempre que dado $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

[1] Um ponto x_0 é dito ponto de acumulação de um conjunto X quando $B(x_0, \varepsilon) \cap (X - \{x_0\}) \neq \emptyset$, onde $B(x_0, \varepsilon)$ denota uma bola aberta centrada em x_0 e de raio ε. Representaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Assim se $x_0 \in X'_+ \cap X'_-$, temos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Definição 2.6 (Função Contínua) *Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $x_0 \in X$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e*

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se x_0 for um ponto de acumulação de X, então f ser contínua em x_0 significa que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quando uma função $f : X \to \mathbb{R}$ não é contínua num ponto $x_0 \in X$, dizemos que x_0 é um ponto de descontinuidade de f. Pode acontecer de f ser descontínua em x_0, e os limites laterais em tal ponto existirem. Neste caso, diz-se que f possui uma descontinuidade de primeira espécie em x_0. No caso de um desses limites laterais não exitirem, então f terá uma descontinuidade de segunda espécie em x_0.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ será contínua em X quando for contínua em todos os pontos de X. Vamos considerar então uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e analisar sua continuidade. Note que todo ponto $x_0 \in [a, b]$ é ponto de acumulação de $[a, b]$, e com isso, podemos avaliar a existência do limite em cada um desses pontos. Mas observe que nos pontos extremos desse intervalo, ou seja nos pontos a e b, só podemos falar em limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente, o que nos leva à seguinte definição.

Definição 2.7 (Continuidade em Intervalo Fechado) *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será contínua, em $[a, b]$, se forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) f é contínua em (a, b);

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$;

iii) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemplo 2.3.1 *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Temos que $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, isto é, f é contínua em $\mathbb{R}$.*
De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon/|a|$, obtemos que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0| < \varepsilon.$$

Como x_0 é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$ e, para todo $x_o \in \mathbb{R}$ temos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, então f é contínua em $\mathbb{R}$.

O fato de uma função real ser contínua num intervalo fechado (conjunto compacto[2]), nos dá informações relevantes sobre seu comportamento neste conjunto. Em especial temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4 *(Weierstrass) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então existem $x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que,*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1),$$

para todo $x \in [a, b]$.

Este teorema vale para um conjunto compacto qualquer. Observe que ele assegura a existência de valores mínimo e máximo, que são assumidos em pontos do domínio da função. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [9].

Definição 2.8 (Continuidade Uniforme) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita uniformemente contínua no conjunto X se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e*

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Note que no caso da continuidade simples, para cada ponto x do domínio da função obtemos um $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ que depende de ε e de x. Isto é, a continuidade é um fenômeno local. Por outro lado, a continuidade uniforme é um fenômeno global, pois obtemos um único $\delta = \delta(\varepsilon)$, dependendo unicamente de ε, que serve para todo os pontos $x \in X$.

Teorema 2.5 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Os leitores interessados podem encontrar a demonstração desse teorema em [10]. Observe que a função do exemplo 2.3.1 é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Com efeito, para cada $\varepsilon > 0$ dado, obtemos $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/|a|$, isto é, δ não depende do ponto $x \in \mathbb{R}$.

[2]Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito aberto quando qualquer de seus pontos for centro de uma bola aberta contida, inteiramente, em X. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado quando seu complementar $\mathbb{R} - X$ for aberto. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ que é fechado e limitado, é chamado conjunto compacto.

2.3.2 Condições Suficientes de Integrabilidade

Levando-se em consideração todos esses conceitos apresentados, uma questão natural surgiria no fato de tentarmos estudar a integrabilidade de uma função segundo sua continuidade em um intervalo fechado. Ora, primeiramente, precisamos trabalhar em conjuntos limitados, isto é, f deve ser limitada. E, já sabemos, pelo teorema 2.4 que a continuidade de f num intervalo fechado garante sua limitação. Estas obeservações nos permite enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.6 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável.*

Demonstração: Do teorema 2.5 temos que f é uniformemente contínua, logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta < 0$ tal que $x, y \in [a, b]$ e

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Seja $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$, escolhida de modo que $\Delta x_i < \delta$. Note que no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subset P$, em vista do teorema 2.4, existem x_i e y_i em $[a, b]$ tais que $m_i = f(x_i) \leq f(x) \leq f(y_i) = M_i$, para todo $x \in [a, b]$. Isto nos dá,

$$\omega_i = f(y_i) - f(x_i) \leq |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, em consequência do item (iii) do teorema 2.2, segue que f é integrável.

□

Consideremos a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$. Note que f é contínua em $[-1, 1]$ e, além disso, é limitada. Logo, segue do teorema anterior que f é integrável. Por outro lado, se pensarmos na função f como sendo

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} \ , & \text{se } x \neq 0; \\ 0 \ , & \text{se } x = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

então certamente não poderíamos utilizar o teorema acima para garantir ou investigar sua integrabilidade, uma vez que esta função é descontínua no ponto $x = 0$. Surge então um problema: o de investigar a integrabilidade de uma função que seja descontínua em um número finito de pontos. Este problema será resolvido com auxílio do próximno teorema.

Teorema 2.7 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e suponha que a restrição $f|_{[a,c]}$ seja integrável, qualquer que seja $a \leq c < b$. Nestas condições f é integrável.*

Demonstração: Temos que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in [a,b]$. Sendo $f|_{[a,c]}$ integrável, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1} = c\}$ de $[a,c]$, satisfazendo a condição

$$S(f|_{[a,c]}; P) - s(f|_{[a,c]}; P) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, pondo $x_n = b$, obtemos uma partição $\tilde{P} = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ de $[a,b]$. Além disso, note que $-K \leq f(x) \leq K$ implica $-K \leq m_n$, e $M_n \leq K$. Daí, segue que $\omega_n = M_n - m_n \leq 2K$. Com isso, podemos obter

$$\omega_n \Delta x_n \leq 2K(b-c) < \frac{\varepsilon}{2},$$

desde que tomemos c, com $b - c < \varepsilon/4K$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da mesma forma, sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $f|_{[c,b]}$ integrável, para todo $c \in (a,b]$, obtém-se que f é integrável.

□

Corolário 2.4 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se, para quaisquer $a < c < d < b$, $f|_{[c,d]}$ é integrável, então f é integrável.*

De fato, fazendo $p = (c+d)/2$, obtemos $a < c < p < d < b$. Sendo $f|_{[c,d]}$ integrável, então $f|_{[c,p]}$ e $f|_{[p,d]}$ também são integráveis e, em particular, para todo $c \in (a,p]$ e todo $d \in [p,b)$. Do teorema anterior, segue que $f|_{[a,p]}$ e $f|_{[p,b]}$ são integráveis e, portanto, pelo item *(1)* do tereoma 2.3 f é integrável.

Corolário 2.5 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e possui um número finito de pontos de descontinuidade $x_0, x_1, ..., x_n$, então f é integrável.*

Para provar este resultado, note que f é contínua e, portanto, integrável em cada intervalo $[c,d]$, com $x_{i-1} < c < d < x_i$, $i = 1, ..., n$. Do corolário 2.4 segue que $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ é integrável, para cada i. Logo, pelo item *(1)* do teorema 2.3, f é integrável.

Segue do corolário acima, que a função definida em 2.1 é integrável.

Consideremos agora, a classe das funções monótonas. Tais funções possuem propriedades interessantes, o que nos permite analisar sua integrabilidade como veremos a seguir.

Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona se ela for crescente, decrescente, não-crescente, ou não-decrescente. A função do exemplo 2.3.1 é crescente para $a > 0$, e decrescente para $a < 0$. Note que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então ela é limitada e, além disso, assume seus valores máximos e mínimos em pontos de seu domínio. Sendo assim, faz sentido falarmos em integrabilidade dessas funções.

Teorema 2.8 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é integrável.*

Demonstração: Suponhamos que f seja não-decrescente, isto é, $f(x) \leq f(y)$, para $x \leq y$ em $[a,b]$. Primeiramente, observe que $f(a) \neq f(b)$, pois caso contrário, f seria constante e, portanto integrável. Consideremos então, uma partição P de $[a,b]$, $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$, com $\Delta x_i < \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Como no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subset P$ temos $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$, logo, $m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$ e $\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] &= f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - \left[\sum_{i=2}^{n} f(x_{i-1}) + f(a)\right] \\ &= f(b) + \sum_{j=2}^{n} f(x_{j-1}) - \sum_{i=2}^{n} f(x_{i-1}) - f(a) \\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Portanto,

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] < \varepsilon.$$

Segue, pelo item (iii) do teorema 2.2, que f é integrável. Agora seja f não-crescente, isto é, $f(x) \geq f(y)$, para $x \leq y$ em $[a, b]$. Note que $-f$ é não-crescente e, portanto, integrável. Mas $-(-f)$ também é integrável, o que é garantido pelo item (ii) do teorema 2.3. Logo, $f = -(-f)$ é integrável.

□

2.3.3 Uma Condição Necessária e Suficiente

Com base no conjunto dos pontos de descontinuidades de uma função, Lebesgue apresentou um resultado de grande importância, que fornece uma condição necessária e suficente para que uma função seja integrável.

Considere um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Seja $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ uma sequência de intervalos tal que

$$X \subset I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Nestas condições, dizemos que a sequência acima é uma cobertura de X. De forma geral, uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ de conjuntos I_λ tal que $X \subset \mathcal{C}$.

Definição 2.9 (Conjunto de Medida Nula) *Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula quando, para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter uma coleção enumerável*[3] *de interevalos abertos $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ tais que*

$$X \subset \mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \ e \ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon,$$

onde $|I_i|$ denota a amplitude do i-ésimo intervalo I_i.

Note que todo conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ possui medida nula. Com efeito, seja I_i um intervalo aberto, com $i = 1, 2, ..., n, ...$, onde

$$I_i = \left(x_i - \frac{1}{2}q^i, x_i + \frac{1}{2}q^i\right).$$

Temos que, $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, e tomando $0 < q < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} = |I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q} < \varepsilon.$$

[3]Um conjunto X é dito enumerável quando é finito, ou quando podemos estabelecer uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to X$.

O conceito de conjunto de medida nula é de importância fundamental e é com base nele que Lebesgue apresentou o seguinte teorema.

Teorema 2.9 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

Note que o teorema 2.6 e o corolário 2.5 são consequências imediatas do teorema acima. De fato, sendo f contínua, temos que o conjunto D dos seus pontos de descontinuidade é vazio, logo é finito e, portanto, enumerável. Segue então que f é integrável. Da mesma forma, D é finito, então ele é enumerável e, consequentemente, tem medida nula. Donde, f é integrável.

Capítulo 3

O Teorema Fundamental do Cálculo

Agora que já sabemos em que condições uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, podemos iniciar nossa discussão sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. É claro que este teorema tem sua importância histórica e, posteriormente, foi motivando vários estudos para as mais diversas áreas de aplicação, tais como a Mecânica e as Equações Diferencias. Como sabemos, Newton e Leibniz, desempenharam papel fundamental, fornecendo ferramentas matemáticas que foram a base para o desenvolvimento de uma das mais importantes áreas da Matemática, chamada Análise, motivada por problemas de muitas áreas, principalmente relacionados à Física Matemática.

3.1 A Derivada de Uma Função

Para nosso estudo, a idéia de derivada desempenhará papel importante, uma vez que enconta-se, juntamente com a idéia de integral, intimamente relacionada ao Teorema Fundamental do Cálculo. Comecemos então com o problema de determinar a reta tangente ao gráfico de uma função f, passando por um dado ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Uma representação para este processo, pode ser vista na figura 3.1.

Como sabemos, para determinar uma reta basta conhecermos um de seus pontos P e seu coeficiente angular m, que fornece a inclinação da reta. Neste caso, temos que

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Como queremos determinar a reta tangente t em $(x_0, f(x_0))$, tomamos x cada vez mais próximo de x_0, isto é, fazendo $x \to x_0$. Dessa forma, obtemos o coeficiente angular de t, a saber

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.1}$$

E obtemos que a reta t procurada é dada por

$$y = f(x_0) + m_t(x - x_o).$$

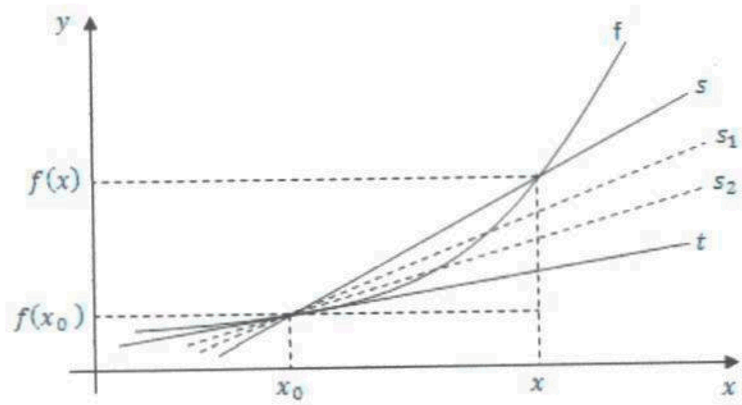

Figura 3.1: Aproximação da reta tangente t ao gráfico de f e passando por $(x_0, f(x_0))$, através das retas secantes s, s_1, s_2.

Quando calculamos o coeficiente angular, dado em (3.1), o que fazemos na verdade, é obter a derivada da função f no ponto x_0. O conceito de derivada é de aplicação imensa e, por isso, também merece um pouco da nossa atenção.

Definição 3.1 (Derivada num ponto) *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de X pertencente a X, isto é, $x_0 \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável no ponto x_0 se existe o seguinte limite*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, o valor $f'(x_0)$ é a derivada de f no ponto x_0.

Dizemos que f é derivável em X, e denotamos $f'(x)$, quando f é derivável em todos os pontos $x \in X \cap X'$.

Na definição acima, fazendo $h = x - x_0$, obtemos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}.$$

A função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, onde k é um constante, é derivável e $f'(x) = 0$. De fato, como $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $f(x+h) - f(x) = 0$. Logo, $f'(x) = 0$.

Observe que se $x_0 \in X' \cap X'_+$, então só faz sentido falarmos em limite lateral à direita e por isso, se define a chamada derivada à direita da função no ponto x_0, pondo

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Da mesma forma, se define a derivada lateral à esquerda da função f no ponto x_0, denotada por $f'_- x_0$, onde $x_0 \in X \cap X'_-$. É claro que, sendo $x_0 \in X'_+ \cap X'_-$, então f será derivável em x_0 se, e somente se, as derivadas laterais $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ existirem e tiverem o mesmo valor.

Note que se f é derivável em x_0, então f também é contínua neste ponto. De fato, para $x \neq x_0$, temos que

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Tomando o limite com $x \to x_0$, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ou seja, f é contínua em x_0. Observe que nada podemos concluir em relação a continuidade da derivada $f'(x)$ no ponto x_0. Se $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em I, então f é dita continuamente derivável em I ou, equivalentemente, f é de classe C^1.

A teoria de derivada nos proporciona resultados que são de grande importância, no que diz respeito ao estudo do comportamento de funções. Dentre tantos reultados, temos um interesse particular pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange. Antes, porém, precisamos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.1 (Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f for derivável em (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 3.2 (Valor Médio de Lagrange) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Consideremos uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Note que g é contínua e ainda, $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Além disso, para todo $x \in (a,b)$, temos que

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Agora, defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, pondo $\varphi(x) = g(x) - f(x)$. Ora, $\varphi'(x) = g'(x) - f'(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Como φ é contínua em $[a,b]$, com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, podemos usar o teorema de Rolle e obter $\varphi'(x_0) = 0$, isto é, $g'(x_0) = f'(x_0)$, para algum $x_0 \in (a,b)$. Donde,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

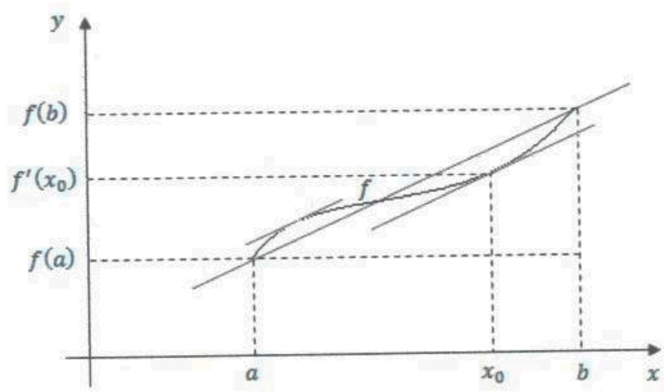

Figura 3.2: Representação gráfica para o Teorema do Valor Médio.

Em outras palavras, o teorema 3.2 nos diz que se f é contínua, então existe pelo menos uma reta tangente ao gráfico de f, cuja inclinação é a mesma que a da reta secante que passa pelos extremos do intervalo. A figura 3.2 exemplifica este fato.

Corolário 3.1 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e tal que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f é constante.*

De fato, suponha $x, y \in [a,b]$, com $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Longrightarrow f(y) - f(x) = f'(c)(x - y),$$

para algum $c \in (x,y)$. Por hipótese, $f'(c) = 0$. Segue que $f(y) = f(x)$, isto é, f é contante, o que completa a prova do corolário.

Geometricamente, observamos pelo corolário acima, que sendo $f'(x) = 0$, então a reta tangente ao gráfico de f é horizontal e, portanto, f só pode ser constante.

3.2 Derivada e Integral: Existe Alguma Relação?

Para justificar o título desta seção, vamos considerar, de início, o problema de determinar a velocidade instantânea de um móvel, movendo-se numa trajetória qualquer. Seja $s = s(t)$ a posição do móvel no intante $t \geq 0$. Assim, no instante $t + \Delta t$, onde Δt é a variação de tempo, sua posição será $s(t + \Delta t)$ e o espaço percorrido entre t e $t + \Delta t$ será dado por

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Por definição, a velocidade média v_m, neste intervalo de tempo, é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Se o movimento é *uniforme*, a velocidade média permanece constante em todo o movimento e, portanto, será igual à velocidade instantânea do móvel. Suponhamos então, que o movimento não seja uniforme e tentemos determinar a velocidade instantânea. Perceba que a velocidade instantânea nos fornece informações precisas a respeito do movimento e, além disso, é um fenômeno local, assim como o limite. Como queremos saber o que se passa, em relação à velocidade, em cada instante t, precisamos tomar intervalos de tempo cada vez menores e determinar a velociade média em $[t, t + \Delta t]$. Dessa forma, fazendo $\Delta t \to 0$ obtemos

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

que é a velocidade do móvel no intante t. Observe que $v(t) = s'(t)$.

Imagine agora que estamos diante do problema inverso, isto é, conhcemos a velocidade $v(t)$ e queremos determinar uma função $s(t)$ que forneça a posição do móvel. E de uma forma mais geral, poderíamos nos questionar: será possível determinar uma função conhecendo-se sua derivada? Esta questão merece ser tratada com mais cautela e é uma motivação para o conceito de primitiva de uma função.

3.2.1 Primitiva de Uma Função

Antes de fazermos qualquer referência sobre a existência de primitivas e suas propriedades, precisamos formalizar este conceito.

Definição 3.2 (Primitiva de Uma Função) *Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, chama-se primitiva de f a uma função derivável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$.*

Considere uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Sabemos que para todo $x \in [a,b]$, a restrição $f|_{[a,x]}$ é integrável, e então podemos definir uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pela relação

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in [a,b]. \tag{3.2}$$

Teorema 3.3 *A função F definida em (3.2) é contínua em $[a,b]$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in [a,b]$, com $x < y$, e $k > 0$ tal que $|f(t)| \leq k$, para todo $t \in [a,b]$. Temos que

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^a f(t)dt + \int_a^y f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y kdt = k(y-x) \\ &\leq k|y-x| \end{aligned}$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, obtemos $\delta = \varepsilon/k$, tal que

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de F.

□

O fato de F ser contínua em $[a,b]$ a faz uma candidata a ser primitiva de f, pois há a possibilidade dela ser derivável e mais ainda, satisfazer a condição $F' = f$. Contudo, devemos exigir alguma condição sobre a função f e é nesta direção a que nos leva os próximos resultados.

Teorema 3.4 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua em $x_0 \in [a,b]$, então a função definida em (3.2) é derivável em x_0, com $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que as derivadas laterais $F'_+(x_0)$ e $F'_-(x_0)$ são iguais a $f(x_0)$.

Sendo f contínua em x_0, então dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $t \in [a, b]$ e

$$|t - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Mostremos primeiro que $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Para tanto, dado $\varepsilon > 0$, precisamos obter $\delta > 0$ tal que $h + x_0 \in [a, b]$ e

$$0 < h < \delta \Longrightarrow \left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon. \ (*)$$

Note que

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] - f(x_0)\right|.$$

Como,

$$\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt,$$

da igualdade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt\right| \\
&\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\
&< \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot h = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, a condição em $(*)$ é satisfeita, ou seja, $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Falta mostrar que $F'_-(x_0) = f(x_0)$. Seja então $-\delta < h < 0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= -\frac{1}{h}\left|\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)dt - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt\right| \\
&= -\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\right| \\
&= -\frac{1}{h}\left|\int_{x_0+h}^{x_0} [f(t) - f(x_0)]dt\right| \\
&\le -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|dt \\
&< -\frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot(-h) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $x_0 + h \in [a, b]$ e

$$-\delta < h < 0 \Longrightarrow \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Donde, $F'_-(x_0) = f(x_0)$. É claro que nos pontos a e b, extremos do intervalo $[a, b]$, temos somente uma das igualdades, isto é, $F'_+(a) = f(a)$ e $F'_-(b) = f(b)$.

□

Como consequência imediata do teorema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.2 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida em* (3.2), *é uma primitiva de f.*

No teorema 3.4 é importante notar que a continuidade de f em x_0 é apenas uma condição suficiente, mas não necessária, para que $F'(x_0)$ exista. Já o corolário 3.2 nos garante que toda função contínua num intervalo fechado possui primitiva.

Consideremos uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0; \text{ se } -1 \leq t \leq 0, \\ 1; \text{ se } \quad 0 < t \leq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Observe que f possui uma descontinuidade de primeira espécie em $t = 0$, pois

$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} f(t) = 1.$$

Logo, f é integrável. Sendo assim, para $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, temos

$$F(x) = \begin{cases} 0; \text{ se } -1 \leq x \leq 0, \\ x; \text{ se } \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Como $F'_-(0) = 0$ e $F_+(0) = 1$, segue que F não é derivável em $x = 0$ e, portanto, não é primitiva de f. Isto indica que deve haver alguma condição necessária sobre o ponto x_0, de forma que exista $F'(x_0)$.

Teorema 3.5 (Darboux) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$, e y satisfazendo $f'(a) < y < f'(b)$. Então, existe $x \in (a, b)$ tal que $y = f'(x)$.*

Em outras palavras, este teorema, também chamado de teorema do valor intermediário para derivada, nos diz que f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$, desde que f seja derivável em $[a, b]$.

Corolário 3.3 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $[a,b]$, então $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ não pode ter descontinuidades de primeira espécie.*

De acordo com este corolário , fica claro que a função f, dada em (3.3), não possui primitiva. Com efeito, f possui uma descontinuidade de primeira espécie em $x = 0$. Portanto, não pode existir uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a,b]$ tal que $F' = f$. Evidentemente, não podemos tirar a mesma conclusão se a descontinuidade for de segunda espécie, pois existem funções que apresentam tal descontinuidade e, mesmo assim, possuem primitivas.

Teorema 3.6 *Se F e G são primitivas de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então elas diferem por uma constante, isto é, $F - G = k$, $k \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como $F' = f$ e $G' = f$, temos $(F - G)' = F' - G' = 0$. Segue do corolário 3.1 que $F - G = k$, ou seja, $F(x) = G(x) + k$, com k constante.

□

Como vimos anteriormente, a continuidade de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ garante a existência de uma primitiva $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Além disso, se F também for uma primitiva de f, temos $F(x) = G(x) + k$, para alguma constante $k \in \mathbb{R}$. Daí,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + k.$$

Logo, para $x = a$ e $x = b$, obtemos $F(a) = k$ e

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + k.$$

Com isso, temos que

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{3.4}$$

A última igualdade acima nos mostra claramente que é possível obter a integral de f, suposta contínua em $[a,b]$, em função de sua primitiva F, sendo o valor da integral igual a diferença $F(b) - F(a)$, que a primitiva assume nos extremos do intervalo $[a,b]$. Como $F' = f$, podemos reescrever a igualdade (3.4) como segue

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Isto mostra que há, de certa forma, uma relação entre a integral e a derivada de f, desde que f seja contínua.

De forma geral, esta relação também é observada para uma classe de funções, não necessariamente contínuas, mas integráveis. E o que nos assegura este fato é exatamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

3.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Finalmente, chegamos ao teorema que motivou o nosso trabalho. O Teorema Fundamental do Cálculo tem importância histórica, e motivou novos estudos, que resultaram numa teoria mais geral sobre integração. Sem dúvida alguma, os trabalhos de Riemann e, posteriormente, Lebesgue ampliaram em muito esta teoria. Este teorema é o resultado mais importante dos cálculos Diferencial e Integral e, também o elo de ligação entre estas duas teorias, como veremos logo a seguir.

Teorema 3.7 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f possui uma primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Note que F é contínua no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P e, além disso, é derivável em (x_{i-1}, x_i), para cada $i = 1, 2, ..., n$. Dessa forma, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, obtendo

$$F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Longrightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para algum $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Logo,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_{i-1}) - F(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i,$$

para $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Denotemos por m_i' e M_i' o ínfimo e o supremo de F' no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P. Assim, $m_i' \leq F'(\xi_i) \leq M_i'$ e temos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i'\Delta x_i.$$

Como $F' = f$, obtemos

$$s(f;P) = s(F';P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F';P) = S(f;P).$$

Daí, segue que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Sendo f integrável, por hipótese, resulta que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = F(b) - F(a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

O resultado mais importante que o Teorema Fundamental do Cálculo nos mostra é a ligação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. De um lado, temos a determinação da inclinação da reta tangente, associado ao conceito de derivada, e de outro, o cálculo de área, ao qual associamos a integral definida.

Além disso, este teorema nos diz que para se calcular a integral de uma função f, basta determinarmos uma de suas primitivas. Isto reduz em muito o nosso trabalho, pois, em geral, o cálculo de primitivas é bem mais simples.

Como sabemos, uma vez conhecida uma primitiva, podemos obter todas as outras. Do T.F.C., segue que todas as primitivas F da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ são da forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + k,$$

onde k é uma constante.

3.4 Aplicações

Para completar o nosso estudo, apresentaremos a seguir duas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

3.4.1 Uma Demonstração do Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário nos diz que toda função contínua num intervalo fechado assume todos os valores intermediários entre dois de seus pontos. Este teorema constitui uma ferramenta matemática importante. Uma de suas aplicações é a determinação da existência de raízes de equações.

Teorema 3.8 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e y tal que $f(a) < y < f(b)$. Nestas condições, existe $x_0 \in (a,b)$, satisfazendo $y = f(x_0)$.*

Demonstração: Sendo f contínua, e consequentemente integrável, então o T.F.C. nos garante a existência de uma primitiva F de f, onde

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in [a,b]. \tag{3.5}$$

Por hipótese, temos $f(a) < y < f(b)$. Como $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, segue que

$$F'(a) < y < F'(b).$$

Note que F satisfaz as condições do Teorema de Darboux, de tal sorte que existe $x_0 \in (a,b)$, com $y = F'(x_0) = f(x_0)$. Isto completa nossa demonstração.

□

3.4.2 A Irracionalidade do Número π

A primeira prova da irracionalidade de π se deve ao matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que em 1761 apresentou sua prova à Academia de Berlim.

Como sabemos, o número π, cujo valor aproximado é $3,141592...$, está diretamente associado ao cálculo do comprimento C de uma circunferência de raio r, através da relação

$$C = 2\pi r.$$

Nos direcionaremos então, com o objetivo de mostrar a irracionalidade de π, utilizando como uma das ferramentas matemáticas, o Teorema Fundametal do Cálculo. Começaremos com o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \tag{3.6}$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Então:

i) Para todo $x \in (0,1)$, temos $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$;

ii) Existem constantes inteiras, $c_n, c_{n+1}, ..., c_{2n} \in \mathbb{Z}$, *tais que*

$$f(x) = \frac{1}{n!}(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + ... + c_{2n}x^{2n}),\ \forall x \in \mathbb{R};$$

iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, *temos que* $f^k(0), f^k(1) \in \mathbb{Z}$.

Prova: *i)* Note que $0 < x < 1$ implica $0 < x^n < 1$. Além disso, temos $-1 < -x < 0$, o que nos fornece $0 < 1 - x < 1$. Logo, $0 < (1-x)^n < 1$. Como $n! \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$0 < x^n(1-x)^n < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}.$$

ii) Desenvolvendo o Binômio de Newton de $(1-x)^n$, obtemos

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^i.$$

Com isso, podemos escrever $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^i = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^{n+i}.$$

Se desenvolvermos o somatório, então

$$f(x) = \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} x^{n+1} + ... + \binom{n}{n} (-1)^n x^{2n}\right]. \tag{3.7}$$

Note que cada um dos coeficientes de x^{n+i}, para $i = 0, 1, ..., n$, são números inteiros, ou seja, são os coeficientes desejados. Além disso, cada um desses coeficientes podem ser obtidos através da expressão

$$c_{n+i} = \binom{n}{i} (-1)^i,\ i = 0, 1, ..., n.$$

Substituindo cada um desses coeficientes em (3.7), obtemos

$$f(x) = \frac{1}{n!}(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + ... + c_{2n}x^{2n}) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i.$$

Por esta igualdade, vemos que f é um função polinomial de grau $2n$.

iii) Derivando f um número k de vezes, obtemos

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i i(i-1)...(i-(k-1))x^{i-k},\ k \leq i. \tag{3.8}$$

Observe que se $k < n$, então cada um dos termos de $f^{(k)}(x)$ são múltiplos de x, pois o menor grau que aparece nos termos de f é igual a n. Neste caso, o maior valor que k pode assumir é $n-1$. Note que

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i i(i-1)...(i-(n-2))x^{i-n+1} \\ &= \frac{1}{n!}\left[c_n n(n-1)...2x + \sum_{i=n+1}^{2n} c_i i(i-1)...(i-(n-2))x^{i-n+1}\right]. \end{aligned}$$

Daí, segue que $f^{(n-1)}(0) = 0$. Além disso, todas as derivadas de ordem inferior a $n-1$ também se anulam em 0. De fato, cada uma dessas derivadas é uma função polinomial, cujo o menor grau que aparece nos seus termos é maior do que 1. Isto é, em cada termo aparece uma expressão da forma x^m, com $m > 1$. Com isso, obtemos $f^{(k)}(0) = 0$, para todo $k < n$.

Agora, seja $n \leq k \leq 2n$. Sabemos que todos os termos de f apresentam a expressão x^m em sua composição. Com isso, os termos com $m < k$, tem derivadas de ordem k todas nulas. Por outro lado, aqueles em que $m > k$, têm derivadas múltiplas de x e, consequentemente se anulam em 0. O único termo que não se anula em 0 é o termo independente de $f^{(k)}(x)$. Fazendo $k = i$ em 3.7, obtemos

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}c_k k(k-1)...1 = \frac{1}{n!}c_k k!.$$

Sendo $n \leq k$, resulta que $\frac{k!}{n!} \in \mathbb{N}$. Isto é, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. Além disso, se $k = 2n$, então

$$f^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!}c_{2n}(2n)!.$$

Daí, segue que $f^{(k)}(0) = 0$, para $k > 2n$.

Para mostrar que $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, basta notar que

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = f(1-x).$$

Pela regra da cadeia, temos $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$. Daí, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

□

Lema 3.2 *Se x^2 é irracional, então x é irracional.*

De fato, se x fosse racional então existiriam $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, com $\text{mdc}(r,s) = 1$, tais que $x = \frac{r}{s}$. Daí, teríamos $x^2 = \frac{r^2}{s^2} = \frac{r}{s}\cdot\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Absurdo!

Agora estamos em condições de provar a irracionalidade de π. Vamos ao trabalho!

Teorema 3.9 *O número π^2 é irracional e, portanto, π também é.*

Demonstração: O lema 3.2 já nos garante que se π^2 for irracional, π também será. Assim, só precisamos mostrar que π^2 é irracional. Suponhamos então que π^2 seja racional. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p,q) = 1$ e $q \neq 0$, tais que $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$.

Considere as funções $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$
\begin{aligned}
F(x) &= q^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \ldots + (-1)^{(n-1)}\pi^4 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)\right];\\
G(x) &= F'(x)\text{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x),
\end{aligned}
$$

onde f é a função definida em (3.6). Derivando F e G, temos

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= q^n \left[\pi^{2n} f'(x) - \pi^{2n-2} f^{(3)}(x) + \ldots + (-1)^{(n-1)}\pi^4 f^{(2n-1)}(x)\right];\\
G'(x) &= F''(x)\text{sen}(\pi x) + \pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\text{sen}(\pi x)\\
&= \text{sen}(\pi x)[F''(x) + \pi^2 F(x)].
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= q^n \left[\pi^{2n} f''(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^{(n-1)}\pi^4 f^{(2n)}(x)\right]\\
&= -\pi^2 q^n \left[-\pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \ldots - (-1)^{(n-1)}\pi^2 f^{(2n)}(x)\right]\\
&= -\pi^2 q^n \left[-\pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^{n}\pi^2 f^{(2n)}(x)\right]\\
&= -\pi^2 \left[F(x) - q^n \pi^{2n} f(x)\right]\\
&= -\pi^2 F(x) + q^n \pi^{2n+2} f(x).
\end{aligned}
$$

Com isso, obtemos que

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= \text{sen}(\pi x)[-\pi^2 F(x) + q^n \pi^{2n+2} f(x) + \pi^2 F(x)]\\
&= \text{sen}(\pi x) f(x) q^n \pi^{2n+2}.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
q^n \pi^{2n+2} = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^n \pi^2 = p^n \pi^2.
$$

Logo, G' será dada por

$$
G'(x) = \text{sen}(\pi x) f(x) p^n \pi^2.
$$

Isto indica que se G' admite primitiva, então a função G, acima definida, é uma delas. Mas para isto, precisamos primeiro, analisar se G' é integrável em algum intervalo fechado. Sabemos pelo item *(i)* do lema 3.1 que a função f é limitada em $[0,1]$. Também sabemos que $0 \leq |\text{sen}(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $0 \leq |\text{sen}(\pi x)| \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Assim, temos

$$|G'(x)| = |\text{sen}(\pi x) f(x) p^n \pi^2| \leq \pi^2 \frac{p^n}{n!}, \ \forall x \in [0,1].$$

Dessa forma, vemos que G' é limitada em $[0,1]$. Pelo item *(ii)* do lema 3.1, temos que f é uma função polinomial e, portanto, contínua em $[0,1]$. Como a função $\text{sen}(\pi x)$ também é contínua neste intervalo, o mesmo ocorre com G'. Dessa forma, concluímos que G' é integrável em $[0,1]$ e, portanto admite primitiva.

Agora, note que para todo $0 < \varepsilon < 1$, temos $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset [0,1]$, isto é, a restrição $G'|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ é integrável. Daí, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi^2 p^n \text{sen}(\pi x) f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \pi^2 p^n \text{sen}(\pi x) f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} [G(1-\varepsilon) - G(\varepsilon)] \\ &= G(1) - G(0), \end{aligned} \tag{3.9}$$

que é a integral de G' no intervalo aberto $(0,1)$. Precisamos então de alguma informação sobre os valores de $G(0)$ e $G(1)$. Temos,

$$G(0) = F'(0)\text{sen}(0) - \pi F(0)\cos(0) = -\pi F(0);$$
$$G(1) = F'(1)\text{sen}(\pi) - \pi F(1)\cos(\pi) = \pi F(1).$$

Pelo item *(iii)* do lema 3.1 vimos que $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$q^n \pi^{2k} = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^k = q^{n-k} p^k \in \mathbb{Z},$$

para todo $k = 1, 2, ..., n$. Estas informações nos garante que $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$. De 3.9, temos que

$$\int_0^1 \pi p^n \text{sen}(\pi x) f(x) dx = \frac{G(1) - G(0)}{\pi} = \frac{\pi(F(0) + F(1))}{\pi} = F(1) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Observe que, $0 < \text{sen}(\pi x) \leq 1$ e $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$, para todo $x \in (0,1)$. Logo,

$$0 < \pi p^n \text{sen}(\pi x) f(x) < \pi \cdot \frac{p^n}{n!}. \tag{3.10}$$

Para darmos continuidade, precisamos de alguns resultados sobre sequências. Para mais informações sugerimos as referências [9] e [6].

Definição 3.3 *Dizemos que uma sequência x_n tem limite L, e escrevemos $\lim x_n = L$, sempre que dado $\varepsilon > 0$, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Se tal limite existe, dizemos que x_n converge para L. Caso contrário, diz-se que x_n diverge.

Exemplo 3.4.1 *Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$, então $\lim x_n = 0$.*

De fato, como $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, então dado $\varepsilon > 0$, exite $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - a\right| < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < a + \varepsilon.$$

Agora, considere $c \in \mathbb{R}$, com $a < c < 1$. Como $0 < x_n$, então $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Assim, para n suficientemente grande, temos que

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c \Longrightarrow 0 < x_{n+1} < c \cdot x_n < x_n.$$

Ou seja, x_n é uma sequência monótona e limitada, pois $0 < x_n \leq x_{n_0+1}$, para todo $n > n_0$. Segue que x_n é convergente[1]. Seja $L = \lim x_n$. Sendo $x_{n+1} < c \cdot x_n < x_n$, fazendo $n \rightarrow$, obtemos que $c \cdot L = L$, isto é, $(c-1) \cdot L = 0$. Como $c < 1$, temos $c - 1 < 0$ e, com isso, resulta que $L = 0$. Donde, $\lim x_n = 0$.

Afirmação: A sequência x_n, cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{p^n}{n!}$, converge para 0. De fato, temos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$. Portanto, pelo exemplo anterior, resulta $\lim x_n = 0$. Logo, da definição 3.3, fazendo $\varepsilon = \frac{1}{\pi}$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow \frac{p^n}{n!} < \frac{1}{\pi}.$$

Assim, para n suficientemente grande, resulta de 3.10 que

$$0 < \pi p^n \operatorname{sen}(\pi x) f(x) < 1 \Longrightarrow 0 < \int_0^1 \pi p^n \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx < 1.$$

[1] Toda sequência monótona limitada é convergente.

Isto significa que $0 < F(0) + F(1) < 1$, o que é um absurdo, pois $F(0) + F(1) \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, isto é, π^2 é irracional. Finalmente, pelo lema 3.2, segue que π é irracional.

$\square$

Com estas aplicações encerramos a nossa discussão.

Obrigado!

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. *Cálculo 1: Funções de Uma Variável.* 6ªed. Rio de Janeiro, L.T.C., 1993.

[2] BARDI, Jason Socrates. *A Guerra do Cálculo.* Trad. Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro, Record, 2008.

[3] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide, 2ªed. São Paulo, Edgard blucher, 1996.

[4] BOULOS, Paulo. *Cálculo Diferencial e Integral.* Vol.1. São Paulo, Pearson Makron Books, 1999.

[5] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise I.* 2ª ed. Rio de Janeiro, L.T.C., 1996.

[6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. & NEVES, Aloisio Freiria. *Equações Diferenciais Aplicadas.* 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol.1, 5ª ed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2008.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Vol.2, 5ª ed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2008.

[9] LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* Vol.1. 2ª ed. Rio de Janeiro, CNPq, 1993.

[10] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Vol.1. 12ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[11] *O Nascimento do Cálculo.* Disponível em http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_integrais.htm

Acessado em 13/06/2010.

[12] *História da Integral.* Disponível em http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histintegral.htm

Acessado em 13/06/2010.