UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

APLICANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

SEBASTIANA DE FÁTIMA SILVA DANTAS

CUITÉ - PB
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

APLICANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

SEBASTIANA DE FÁTIMA SILVA DANTAS

CUITÉ - PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

D192a Dantas, Sebastiana de Fátima Silva.

Aplicando equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. / Sebastiana de Fátima Silva Dantas – Cuité: CES, 2012.

36 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2012.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Co-orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Equações diferenciais. 2. Datação por carbono - 14. 3. Farmacologia. I. Título.

CDU 514.745.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Aplicando Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Sebastiana de Fátima Silva Dantas

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 07 de dezembro de 2011.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Co-Orientadora)

Prof. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter iluminado meus caminhos e ter me dado força para concluir mais uma etapa da minha vida.

Agradeço aos familiares, em particular, aos meus pais e irmãos, pelo apoio e dedicação que me dão.

Agradeço ao meu noivo, Jonas, pela compreensão nos momentos de ausência.

Agradeço aos meus amigos, Ana Cristina, Sabrina, Vanessa, Waléria, Jailson, Elias, Jarbas e Luan, pelo auxílio e apoio que sempre tivemos uns para com os outros.

A todos os professores do curso de matemática, pelos ensinamentos disponibilizados nas aulas, que contribuíram para a conclusão desse trabalho e consequentemente para minha formação profissional.

Em especial, quero agradecer as professoras Márcia e Gisélia, pela paciência, dedicação e apoio que tiveram comigo.

Agradeço ao professor Daniel Cordeiro por ter se disponibilizado a participar desta banca e por suas sugestões.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que esse trabalho fosse realizado meu sincero agradecimento.

"Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento."

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho abordaremos um estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e apresentaremos o desenvolvimento histórico das equações diferenciais mencionando alguns matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento da mesma. Discutiremos as idéias gerais de modelagem com equações diferenciais e investigamos alguns modelos importantes os quais podem ser aplicados no processo de datação por Decaimento Radioativo e a Farmacologia. Tomaremos como objeto de estudo a técnica de datação por Carbono-14, no qual será formulado um modelo matemático envolvendo uma Equação Diferencial que permite estimar a idade de fósseis, vestígios, peças ou objetos pertencentes a épocas passadas.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Datação por Carbono-14. Farmacologia.

ABSTRACT

In this work we will approach a study of the ordinary differential equations of first order and we will present the historical development of differential equations mentioning some mathematicians who contributed to its development.

We will discuss the general ideas of modeling with differential equations and investigate some important models which can be applied in the dating process by

Radioactive Decay and Pharmacology. We will take as an object of study the technique of Carbon-14 dating, in which a mathematical model involving a Differential Equation that allows to estimate the age of fossils, remains, pieces or objects belonging to past times.

Keywords: Differential equations. Carbon-14 dating. Pharmacology.

Sumário

Introdução **5**

1 Preliminares **6**
1.1 Função Exponencial Geral 6
1.1.1 A função logarítmica e exponencial 8
1.2 Integral definida 12

2 Conceitos Básicos **14**
2.1 Equação Diferencial 14
2.2 Equações Lineares de Primeira Ordem 17
2.3 Problema de Valor Inicial 19

3 Modelagem e Aplicações **28**
3.1 Modelagem com Equações Lineares de Primeira Ordem 29
3.2 Aplicações 30

Referências Bibliográficas **34**

Introdução

A história das equações diferencias começa no século XVII quando Newton, Leibniz e os irmãos Bernoullis resolveram alguns exemplos simples de equações diferenciais de primeira e segunda ordem, apresentados em alguns problemas de geometria e mecânica.

Newton atuou relativamente pouco na área de equações diferenciais, mas o seu desenvolvimento do Cálculo e a elucidação por príncipios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII especialmente por Euler. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as fórmulas $dy/dt = f(t)$ e $dy/dt = f(t, y)$. Ele desenvolveu um método para resolver a última equação, no caso em que $f(t, y)$ é um polinômio em t e y, usando séries infinitas.

Leibniz foi autodidata em Matemática, e seu interesse no assunto desenvolveu-se quando tinha vinte e poucos anos. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática e a nossa notação para derivada $\frac{dy}{dt}$, assim como o sinal de integral, são devidos a ele. Descobriu o método da separação de variáveis para equações lineares de primeira ordem $\frac{dy}{dt} = \frac{P(y)}{Q(t)}$ a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$. Como embaixador e conselheiro de diversas famílias, Leibniz viajou muito por toda a Europa e manteve uma extensa correspondência com os irmãos Bernoulli. No decorrer dessas correspondência foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais durante a parte final do século XVII.

Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais.

O maior matemático do século XVIII foi Leonhard Euler. Foi o primeiro a entender as propriedades e os papéis das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares. Desenvolveu alguns métodos para resolver equações diferenciais, tais como: identificou a condição para que as equações de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria de fatores intergrantes e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

Uma fase importante da teoria desenvolveu-se nos princípios do século XIX, paralelamente à tendência de conseguir um desenvolvimento melhor estruturado e mais rigoroso do cálculo.

Em 1820, Cauchy obteve o primeiro "Teorema de existência"para equação diferencial, tendo provado que toda equação diferencial de primeira ordem da forma $y' = f(t, y)$ tem solução sempre que o segundo membro, $f(t, y)$, satisfaz à certas condições gerais.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Função Exponencial Geral

Funções exponenciais da forma $f(t) = a^t$, onde a é uma constante positiva, são usadas para representar muitos fenômenos nas ciências naturais e sociais.

Exemplo 1.1 *Quando se dá um medicamento a um paciente, a droga entra na corrente sanguínea. Ao passar pelo o fígado e rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que depende da particular droga. Para o antibiótico ampicilina, aproximadamente* 40% *da droga é eliminado a cada hora. Uma dose típica de ampicilina é de* $250mg$.

Seja $Q = f(t)$, onde Q é a quantidade de ampicilina, em mg, na corrente sanguínea ao tempo t horas desde que a droga foi dada. Este processo é dado pela função

$$Q = Q_0 a^t,$$

onde Q_0 é a quantidade inicial (quando $t = 0$) e a é o fator pelo qual Q varia quando t aumenta de 1. A função é decrescente, visto que, $0 < a < 1$ e é uma função de decaimento exponencial. Observando o gráfico, verificamos que Q se reduz à metade

TABELA 1. *Valor da função de decaimento*

t (horas)	Q (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32,4
5	19,4

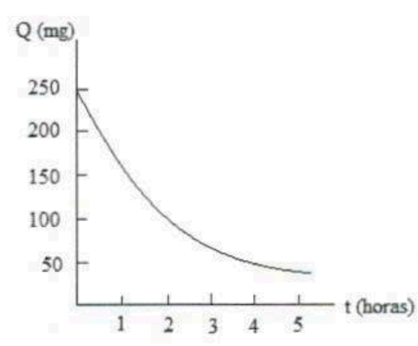


Figura 1.1: Eliminação da droga: Decaimento Exponencial

da quantidade original, ou 125 mg, depois de cerca de $1,4$ horas. Dizemos que a meia-vida da ampicilina no corpo é de cerca de $1,4$ horas.

Definição 1.1 *Dizemos que P é uma **função exponencial** de t com base a se*

$$P = P_0 a^t$$

*onde P_0 é a valor inicial (quando $t = 0$) e a é o fator pelo o qual P varia quando t aumenta de 1. Se $a > 1$ temos **crescimento exponencial**; se $0 < a < 1$, temos **decaimento exponencial**.*

A fórmula $P = P_0 a^t$ dá uma família de funções exponenciais com parâmetro P_0 (o valor inicial e o intercepto vertical) e a (a base, ou fator de crescimento/decaimento). A base diz se a função é crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Como a é o fator pelo o qual P varia quando t aumenta, valores grandes de a significam crescimento rápido; valores de a próximos de 0 significam decaimento rápido. Todos os membros da família $P = P_0 a^t$ são côncavos para cima se $P_0 > 0$.

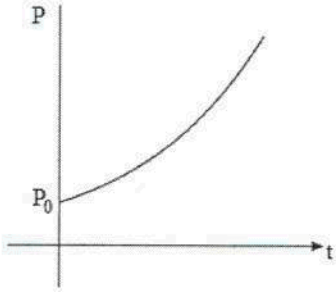


Figura 1.2: Crescimento exponencial

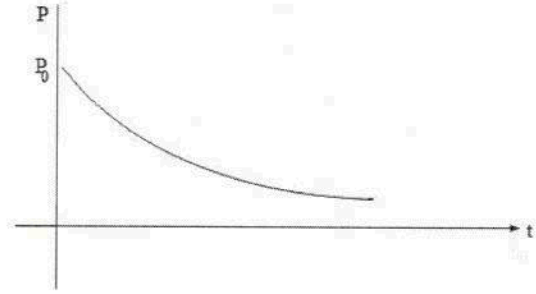


Figura 1.3: Decrescimento exponencial

O crescimento exponencial frequentemente é descrito em termos de taxas de crescimento em porcentagens.

Exemplo 1.2 *A população do México cresce a $2,6\%$ ao ano; em outras palavras o fator de crescimento é $a = 1 + 0,026 = 1.026$.*

Exemplo 1.3 *40% da ampicilina é removida a cada hora, assim o fator de decaimento é $a = 1 - 0,40 = 0,6$.*

De modo geral, aplica-se as seguintes fórmulas

Definição 1.2 *Se r é a taxa de crescimento, então $a = r + 1$ é o fator de crescimento e*

$$P = P_0 a^t = P_0(r+1)^t.$$

Se r é a taxa de decaimento, então $a = 1 - r$ é o fator de decaimento e

$$P = P_0 a^t = P_0(1-r)^t.$$

A quantidade r é às vezes chamada a **taxa de crescimento relativo**, *ou* **percentual**.

1.1.1 A função logarítmica e exponencial

A função exponencial mais importante para modelagem de fenômenos naturais, físicos e econômicos é a **função exponencial natural**, cuja a base é o número famoso e^1, que é aproximadamente $2,718281828$ para nove casas decimais.

Definição 1.3 *O **logarítmo natural** de um número $x > 0$ é definido como sendo a área da figura compreendida entre as retas $x = 1$, $x = t$, o eixo Ox e a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, considerada positiva se $x > 1$ e negativa se $0 < x < 1$.*

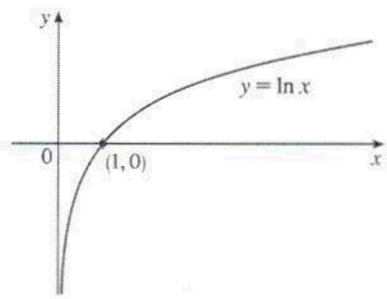


Figura 1.4: O gráfico de $\ln x$

Como a função $y = \ln x$ é crescente, sua inversa existe e é também crescente.

- $\ln x$ não é definido se t for negativo ou zero.

Definição 1.4 *Dado qualquer número real x chama-se* **exponencial de** x *ao número y, indicado com o símbolo e^x, cujo o logarítmo é x, isto é,*

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y.$$

O gráfico de e^x é obtido do gráfico do logaritmo por reflexão da reta $y = x$.

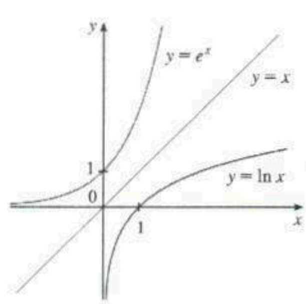


Figura 1.5: O gráfico de $\ln x$ e sua inversa e^x

- Como as funções e^x e $\ln x$ são inversas uma da outra, compô-las em qualquer ordem resulta na função identidade, i.e., $e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$, se $x > 0$.

[1]Essa notação foi escolhida pelo o matemático suíco Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra exponencial.

Considere a família da funções exponenciais

$$P = P_0 a^t.$$

Para qualquer número positivo a podemos escreve $a = e^k$ para algum k. Se $a > 1$, então k é positivo e se $(0 < a < 1)$, então k é negativo. Assim uma função que representa uma população crescendo exponencialmente pode ser escrita como

$$P = P_0 a^t = P_0 (e^k)^t = P_0 e^{kt}$$

com k positivo. No caso $(0 < a < 1)$, podemos usar outra constante positiva, k e escrever

$$a = e^{-k}.$$

Se Q for uma quantidade de decaimento exponencial e Q_0 a quantidade inicial, ao tempo t temos

$$Q = Q_0 a^t = Q_0 (e^{-k})^t = Q_0 e^{-kt} = \frac{Q_0}{e^{kt}}.$$

Como e^{kt} está agora no denominador Q decresce quando o tempo avança, como esperaríamos se Q está decaindo.

Definição 1.5 *Toda função de* ***crescimento exponencial*** *pode ser escrita em qualquer uma das duas formas*

$$P = P_0 a^t \text{ ou } P = P_0 e^{kt}$$

e toda função de ***decaimento exponencial*** *pode ser escrita em qualquer uma das formas*

$$Q = Q_0 b^t \text{ ou } Q = Q_0 e^{-kt}.$$

Onde P_0 e Q_0 são as quantidades iniciais, $a > 1$ e $0 < b < 1$ e k é uma constante positiva. Dizemos que P e Q estão crescendo ou decaindo a uma taxa contínua k.

A função exponencial da forma $P_0 e^{kt}$ pode sempre ser escrita na forma $P_0 a^t$. De fato, $P_0 e^{kt} = P_0 (e^k)^t$ o que sugere tomar

$$a = e^k, \text{ de modo que } k = \ln a.$$

As duas fórmulas diferentes, $P = P_0 e^{kt}$ e $P = P_0 a^t$ têm o mesmo gráfico e representam a mesma função.

Derivadas de e^t

Teorema 1.1 *Se $f(t) = e^t$ então $f'(t) = e^t$.*

Prova:

De fato,

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{t+h} - e^t}{h} = e^t \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^t, \quad \text{pois} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

$\square$

Exemplo 1.4 *Sendo g derivável, verifique que se $f(t) = e^{g(t)}$ então $f'(t) = e^{g(t)}g'(t)$.*

Com efeito, temos que a função $f(t)$ é uma composição de duas funções $h(t) = e^t$ e $g(t)$, neste caso, podemos usar a regra da cadeia, para encontrar a derivada de f. Pelo teorema (1.1), temos que a derivada de e^t é ela própria. Assim,

$$f^{'}(t) = e^{g(t)}g^{'}(t)$$

Relação entre Funções com Derivadas Iguais

Teorema 1.2 ***(Teorema do Valor Médio)*** *Seja $f : [a, b] \rightarrow$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a).$$

Prova: Ver [8]

Teorema 1.3 *Seja f contínua no intervalo I. Se $f'(t) = 0$ em todo t interior a I, então existirá uma constante k tal que $f(t) = k$ para todo t em I.*

Prova:

Suponha que $f(t)$ não seja constante em I, existem t_1 e $t_2 \in I$ com $t_1 < t_2$ tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$. Por hipótese $f^{'}(t) = 0$, para todo $t \in [t_1, t_2]$. Como, f é contínua em $[t_1, t_2]$ e, pelo Teorema do Valor Médio, $\exists$ c $\in (t_1, t_2)$ tal que

$$f^{'}(c) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = 0 \Rightarrow f(t_1) = f(t_2).$$

(Absurdo!) □

A função exponencial é igual à sua própria derivada, e o mesmo é verdadeiro se multiplicarmos a exponencial por uma constante. É fácil provar que estas são as únicas funções que satisfazem a esta condição em todo o eixo real.

Teorema 1.4 *Se C é um número real dado, existe uma e uma só função f que verifica a equação diferencial*

$$f'(t) = f(t)$$

para todo o real t e que verifica também a condição inicial $f(0) = C$. Esta função é dada pela fórmula

$$f(t) = Ce^t$$

Prova:

A função $f(t) = Ce^t$ satisfaz a equação diferencial, e a condição dada. Devemos mostrar que esta é a única solução.

Seja $y = g(t)$ qualquer solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} g'(t) &= g(t) \\ g(0) &= C \end{cases}$$

Mostraremos que $g(t) = Ce^t$.

De fato, consideremos a função $h(t) = g(t)e^{-t}$. A derivada de h é dada por

$$h'(t) = g'(t)e^{-t} - g(t)e^{-t} = e^{-t}[g'(t) - g(t)] = 0,$$

logo, pelo teorema (1.2), h é uma constante. Como $g(0) = C$, temos que $h(0) = g(0)e^0 = C$. Consequentemente, $h(t) = C$ para todo t, o que significa que $g(t) = Ce^t$.

□

O teorema é um exemplo de um teorema de existência e unicidade de solução. Diz-nos que o problema de valor inicial dado tem uma solução (existência) e uma só solução (unicidade).

Primitiva de uma função

Definição 1.6 *Seja f uma função definida num intervalo I. Uma* ***primitiva*** *de f em I é uma função F definida em I, tal que*

$$F'(t) = f(t)$$

para todo t em I.

Exemplo 1.5 *Calcular a $\int f(t)dt$ é encontrar uma primitiva F da função dada f, ou seja, é determinar uma função F tal que, $F' = f$, isto é,*

$$F' = f \Leftrightarrow \int f(t)dt = F(t) + C.$$

Esta equação foi a primeira equação diferencial que resolvemos e a primitiva F nada mais é que uma solução para esta equação diferencial.

Exemplo 1.6 *Resolver $F'(t) = \cos(t)$ é equivalente a*

$$F(t) = \int \cos t dt = \sin t + c,$$

o que nos mostra que esta equação diferencial tem infinitas soluções.

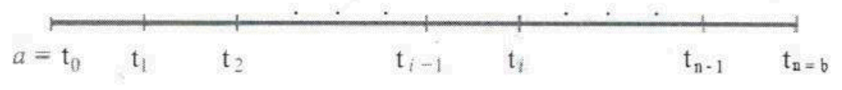
O estudo da existência e unicidade de soluções é um dos aspectos mais interessantes na teoria das equações diferenciais.

1.2 Integral definida

Partição de um intervalo

Uma partição P de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ onde $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Uma partição P de $[a, b]$ divide $[a, b]$ em n intervalos $[t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, ..., n$.



A amplitude do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ será indicada por $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$. Assim;

$$\triangle t_1 = t_1 - t_0, \triangle t_2 = t_2 - t_1 \text{ etc.}$$

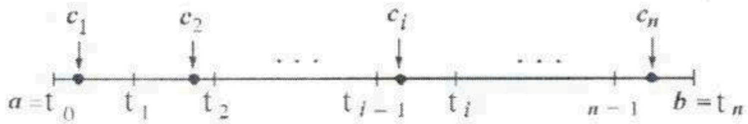
Os números $\triangle t_1, \triangle t_2, ..., \triangle t_n$ não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se *amplitude* da partição P e indica-se por máx $\triangle t_i$.

Uma partição $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ será indicada simplesmente por

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

Soma de Riemann

Seja f uma função definida em $[a, b]$ e $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice $i(i = 1, 2, 3, ..., n)$ seja c_i um número em $[t_{i-1}, t_i]$ escolhido arbitrariamente.



Pois bem, o número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle t_i = f(c_1) \triangle t_1 + f(c_2) \triangle t_2 + ... + f(c_n) \triangle t_n$$

denomina-se *soma de Riemann* de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Definição 1.7 *Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle t_i$ tende a L, quando o máx $\triangle t_i \longrightarrow 0$, e escrevemos*

$$\lim_{max \triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle t_i = L$$

se, para $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mais não da particular escolha dos c_i, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle t_i - L\right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a,b]$, com $\max \triangle t_i < \delta$.

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se ***integral****(de Riemann) de f em $[a,b]$ e indica-se por $\int_a^b f(t)dt$. Então, por definição,*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{max\triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle t_i.$$

Se $\int_a^b f(t)dt$ existe, então diremos que f é ***integrável****(segundo Riemann) em $[a,b]$.É comum referirmo-nos a $\int_a^b f(t)dt$ como* ***integral definida*** *de f em $[a,b]$.*

Teorema 1.5 *Se f for contínua em $[a,b]$, então f será integrável em $[a,b]$.*

Prova: Ver [8]

Teorema Fudamental do Cálculo

Teorema 1.6 *(Teorema Fundamental do Cálculo)Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Prova: Ver [8]

Mudança de Variável na Integral

Teorema 1.7 *Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois números reais quaisquer em I. Seja $g : [c,d] \longrightarrow I$, com g' contínua em $[c,d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições,*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Prova: Ver [8]

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Equação Diferencial

Definição 2.1 *Uma equação que contém as derivadas ou as diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de* **Equação Diferencial (ED)**.

Exemplo 2.1 *A equação*

$$y' = y \tag{2.1}$$

associa a função $y = y(t)$ *e sua derivada* $y' = dy(t)/dt$.

Diferentemente das incógnitas das equações algébricas, que são números, as incógnitas das equações diferenciais são funções.

Resolver uma equação diferencial significa encontrar todas as suas soluções, i.e., todas as funções que satisfazem a equação.

Exemplo 2.2 *A função*

$$y(t) = e^t$$

é uma solução da equação (2.1) porque $(e^t)' = e^t$.

Classificamos as equações diferenciais por tipo e linearidade.

Classificação pelo Tipo

As equações diferenciais são classificadas em dois tipos: ordinárias e parciais.

Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada **equação diferencial ordinária (EDO)**.

Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6y = 0, \qquad e \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

são equações diferenciais ordinárias.

Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

A equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 3xy(\frac{\partial u}{\partial y})^3,$$

onde a função incógnita é $u(t, x, y)$ é uma EDP.

Neste trabalho trataremos apenas de EDO.

Classificação por Ordem

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação.

Por exemplo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5(\frac{dy}{dt})^3 - 4y = e^t$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Em símbolos, podemos expressar uma equação diferencial ordinária de ordem n de uma variável dependente na forma geral

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.2}$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis, $t, y, y', \ldots, y^{(n)}$, e onde $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$.

Classificação por Linearidade

Uma equação diferencial ordinária de ordem n (2.2) é **linear** se F for linear em $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Isso significa que uma EDO de $n-$ésima ordem é linear quando (2.2) for

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t).$$

Observamos as duas propriedades características de uma equação diferencial linear: primeiramente, a variável dependente e todas as suas derivadas são do primeiro grau - isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1. Segundo, cada coeficiente depende apenas da variável independente t. As equações

$$(y - x)dx + 4xdy = 0, \qquad y'' - 2y' + y = 0, \qquad e \qquad \frac{d^3y}{dt^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

são respectivamente, equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordem.

Uma equação diferencial ordinária **não-linear** é uma equação que não é linear.

As equações

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \sin y = 0, \qquad e \qquad \frac{d^4y}{dt^4} + y^2 = 0$$

são exemplos de equação diferencial ordinária não-linear de primeira, segunda e quarta ordem, respectivamente.

Solução de uma EDO

Definição 2.2 *Toda função φ definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a identidade, é denominada um* **solução** *da equação diferencial no intervalo.*

Exemplo 2.3 *A função, $y = \frac{1}{16}t^4$ é solução da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = ty^{1/2}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Devemos verificar que $\frac{dy}{dt} - ty^{1/2} = 0$ para $y = \frac{1}{16}t^4$.

Temos

$$\frac{dy}{dt} = d(t^4/16) = \frac{t^3}{4}.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dt} - ty^{1/2} = \frac{t^3}{4} - ty^{1/2} = \frac{t^3}{4} - t(\frac{t^4}{16})^{1/2} = \frac{t^3}{4} - t\frac{t^2}{4} = 0.$$

Portanto, a função $y = \frac{1}{16}t^4$ é uma solução da equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem.

Definição 2.3 *O gráfico de uma solução φ de uma EDO é chamado de* **curva integral**.

Exemplo 2.4 *A curva integral para a solução $\varphi(t) = e^t$ no ponto $(0, 1)$, para equação diferencial $y' = y$ é mostrada na figura (2.1).*

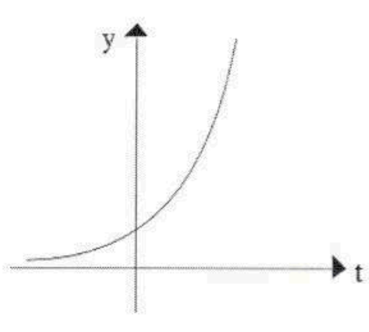


Figura 2.1: Curva integral da equação $y' = y$ para solução particular no ponto $(0, 1)$.

Definição 2.4 *Dizemos que uma relação $G(t, y) = 0$ é uma* **solução implícita** *de uma equação diferencial ordinária (2.2), em um intervalo I, quando existe pelo menos uma função φ que satisfaz a relação, bem como a equação diferencial em I.*

2.2 Equações Lineares de Primeira Ordem

A **forma geral** de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é dada por

$$F(t, y, y') = 0, \tag{2.3}$$

onde F é uma função que associa as variáveis t, y e y', onde y é uma função de t. Isto nos permite representar todas as classes de equações de primeira ordem sem descrever alguma equação particular.

Exemplo 2.5 *A função F definindo a equação*

$$3ty' = 6y + \sin t,$$

é $F(t, y, y') = 3ty' - 6y - \sin t$.

Muitas vezes é incoveniente trabalhar com a forma geral. Muitas equações encontradas em aplicações podem ser expressas da seguinte forma

$$y' = f(t, y)$$

que é dita **forma normal,**

F é agora $F(t, y, y') = y' - f(t, y)$. Chamamos f de **campo vetorial**, t de **variável independente** e y de variável dependente, visto que ela depende de t. Assim, a incógnita y é uma função.

Exemplo 2.6 *Na equação*

$$y' = y,$$

o campo vetorial é $f(t, y) = y$. Note que f é independente de t.

Definição 2.5 *Uma função diferenciável φ que satisfaz a relação*

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{2.4}$$

para cada t em qualquer intervalo aberto é chamada **solução** *da equação $y' = f(t, y)$. Analogamente, definimos a solução da equação $F(t, y, y') = 0$ substituindo a relação (2.3) por*

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.7 *A função*

$$\varphi(t) \;=\; e^{t/2},$$

é uma solução para a equação $y' = \frac{1}{2}y$. De fato φ é diferenciável e $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$. Outra solução é a função $\psi(t) = 0$.

Algumas equações diferenciais apresentam mais de uma solução, até infinitas soluções. O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial é chamado **solução geral**, para distinguí-la das soluções individuais (particulares).

Definição 2.6 *Uma função $\varphi(t) = \gamma$, onde γ é uma constante tal que $f(t,\gamma) = 0$ para todo t, é chamada de* ***solução singular*** *da equação (2.2).*

Exemplo 2.8 *A equação*

$$y' = 2y^2$$

tem a função zero, $\varphi(t) = 0$, como uma solução singular. De fato, φ é constante e o campo vetorial $f(y) = 2y^2$ é nulo para $y = 0$, i.e., $f(0) = 0$.

Exemplo 2.9 *Uma solução singular para a equação*

$$y' = 2y^2$$

é a função $\varphi(t) = 0$, pois φ é constante e $f(y) = 2y^2$ é nulo para $y = 0$, i.e, $f(0) = 0$.

Exemplo 2.10 *A equação $y' = \frac{1}{t}$ não tem soluções singulares, pois não existe nenhuma constante que anula o campo vetorial $f(t) = 1/t$.*

Muitas vezes as soluções singulares são casos particulares de uma fórmula obtida usando certo método, que fornece infinitas soluções. Mas algumas vezes estas fórmulas não incluem uma ou mais soluções singulares.

Exemplo 2.11 *A equação*

$$y' = y^{2/3}$$

tem solução a fórmula $y(t) = (t/3 + c)^3$. Mas a solução singular $\varphi(t) = 0$ não pode ser obtida por esta fórmula.

De fato,

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3} \Rightarrow \frac{dy}{y^{2/3}} = dt.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima, temos

$$\int y^{\frac{-2}{3}} dy = \int dt \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{t+C}{3} \Rightarrow y(t) = (t/3 + C)^3.$$

Mas a solução singular $\varphi(t) = 0$ não pode ser obtida por esta fórmula, visto que não existe valor real C para o qual $(t/3 + C)^3 = 0$ para todo t.

Uma equação diferencial na qual a variável independente não aparece explicitamente (i.e., que a forma normal da equação é $y' = f(y)$) é chamada **autônoma**. A equação do exemplo anterior é autônoma.

Exemplo 2.12 *Infinitas soluções da equação*

$$y' = -ty^2$$

são obtidas da fórmula geral $y(t) = 1/t^2 + C$. A solução singular $u(t) = 0$, entretanto, é impossível de ser obtida dessa fórmula, visto que não existe valor real C para o qual $(t/3 + C)^3 = 0$ para todo t.

Os últimos exemplos nos mostram que mesmo que tenhamos encontrado uma fórmula por algum método teremos que determinar todas as soluções singulares, e, se existirem, devemos verificar se elas estão incluídas na fórmula. Portanto, a **solução geral** consiste frequentemente em uma fórmula e uma ou mais soluções sigulares.

Campos de Direções

Podemos imaginar a forma do gráfico das soluções através do traçado do **campo de direções**[1]. Se φ é uma solução da equação

$$y' = f(t, y)$$

e $\varphi(t_0) = y_0$, a **inclinação** (direção) da tangente do gráfico de φ no ponto (t_0, y_0) é $f(t_0, y_0)$.

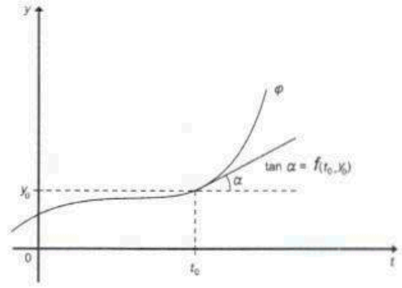


Figura 2.2: A inclinação $f(t_0, y_0)$ da reta tangente ao gráfico de φ no ponto $f(t_0, y_0)$.

Uma vez que podemos calcular $f(t_0, y_0)$ para todo (t_0, y_0), podemos encontrar a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução em cada ponto.

Exemplo 2.13 *O campo de direções para equação diferencial $y' = y$ e a curva-solução que passa pelo ponto $(0, 1)$ é mostrado na figura (2.3).*

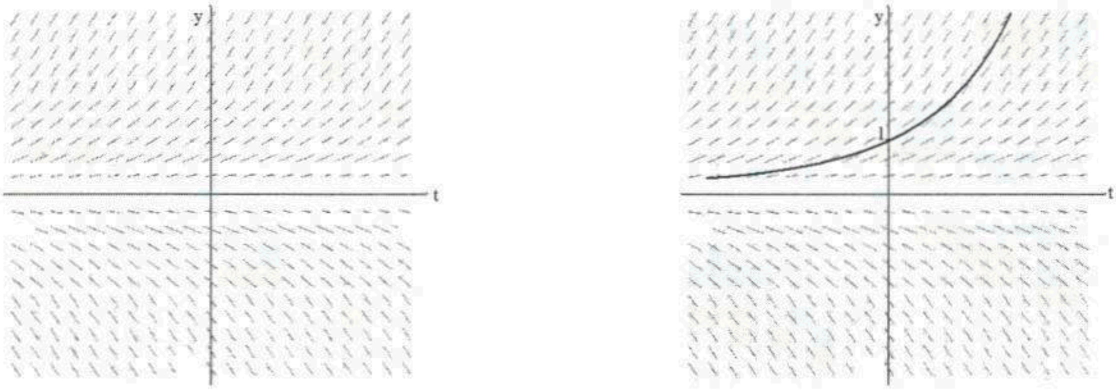


Figura 2.3: Campo de direções e solução particular

2.3 Problema de Valor Inicial

Algumas vezes estamos interessados somente numa solução particular que satisfaça uma certa condição, digamos $y(t_0) = y_0$. Em termos geométricos, é como procurar uma curva que represente uma solução no plano ty e que passe pelo ponto de coordenadas (t_0, y_0).

[1]Isso não é uma idéia nova; Euler concebeu essa idéia de marcar os pontos e os declives correspondentes no plano (t, y) há 250 anos!

Definição 2.7 *Um problema de valor inicial de uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal é dado por*

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Uma solução φ deste problema de valor inicial é uma solução da equação $y' = f(t,y)$ (i.e., $\varphi' = f(t,\varphi(t))$) que também satisfaz a condição inicial (i.e., $\varphi(t_0) = y_0$).

Exemplo 2.14 *A equação*

$$y' = -5t^2$$

tem solução geral $y(t) = -\frac{5}{3}t^3 + C$, onde C é uma constante real. A solução particular que satisfaz a condição $y(1) = 2$ é aquela cujo o gráfico passa pelo o ponto de coordenadas $(t,y) = (1,2)$. Para encontrar a expressão desta solução, precisamos determinar uma constante adequada C na solução geral. A fórmula fornece $y(1) = -\frac{5}{3} + C$, enquanto a condição é $y(1) = 2$, assim $C = \frac{11}{3}$. Consequentemente, a solução particular que estamos procurando é $\varphi(t) = -\frac{5}{3}t^3 + \frac{11}{3}$.

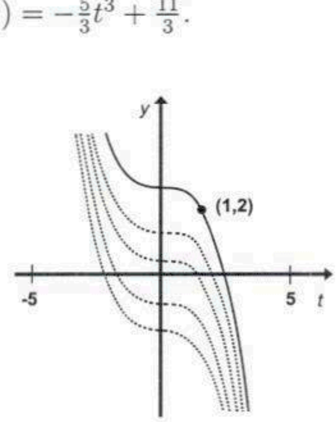


Figura 2.4: Gráfico da solução particular $y = -\frac{5t^3}{3} + \frac{11}{3}$.

Exemplo 2.15 *Considere o problema de valor inicial*

$$y' = y, \qquad y(0) = 1.$$

Temos que $\varphi(t) = e^t$ é uma solução para a equação $y' = y$, mas ela também satisfaz a condição inicial, porque $\varphi(0) = e^0 = 1$. Assim, $\varphi(t) = e^t$ é uma solução para o problema de valor inicial.

Exemplo 2.16 *Consideremos a mesma equação com uma condição inicial diferente, digamos*

$$y' = y, \qquad y(1) = e.$$

Novamente, a função $\varphi(t) = e^t$ satisfaz tanto a equação como a condição inicial: $\varphi(1) = e^1 = e$. Isto mostra que podemos ter a mesma solução para diferentes problemas de valor inicial. Isto acontece quando os pontos que escolhemos correspondem ao gráfico da mesma solução.

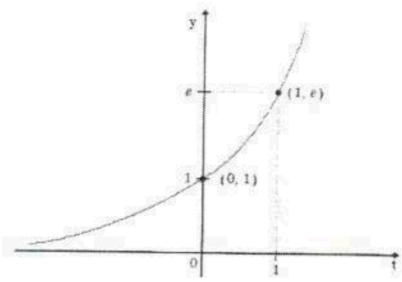


Figura 2.5: Solução do problema de valor inicial $y' = y$, $y(1) = e$.

Exemplo 2.17 *Consideremos uma vez mais a mesma equação com uma condição inicial diferente,*

$$y' = y, \qquad y(0) = 0.$$

Obviamente, $\varphi(t) = e^t$ não satisfaz a condição inicial do problema. Lembremos entretanto, que a função zero, $\psi(t) = 0$, é também uma solução da equação. Além disso, ela satisfaz a condição inicial acima, visto que $\psi(0) = 0$, assim $\psi(0) = 0$ é uma solução do problema de valor inicial.

É natural perguntar se todos os problemas de valor inicial têm soluções, e nesse caso, se elas são únicas. Observemos que existe uma forte relação entre essas perguntas e as que indagam se os gráficos das soluções preenchem o plano ty. Com isso queremos dizer que para todo ponto (t_0, y_0) existe uma solução φ na qual $\varphi(t_0) = y_0$.

Exemplo 2.18 *A família de funções $y(t) = Ce^t$, onde C toma cada valor real, forma a solução geral da equação $y' = y$. Para mostrar que os gráficos da família preenchem o plano ty, teremos que provar que para todo ponto (t_0, y_0) do plano existe uma função φ na família tal que $\varphi(t_0) = y_0$. Desde que φ deve ser da forma Ce^t para um determinado C, para encontrar φ devemos resolver a equação $Ce^{t_0} = y_0$ para C. Esta equação possui solução $C = y_0 e^{-t_0}$, portanto a função correspondente da família é $\varphi(t) = y_0 e^{-t_0} e^t$. Uma vez que para todo valor de t_0 e y_0 uma tal função existe, o gráfico preenche o plano.*

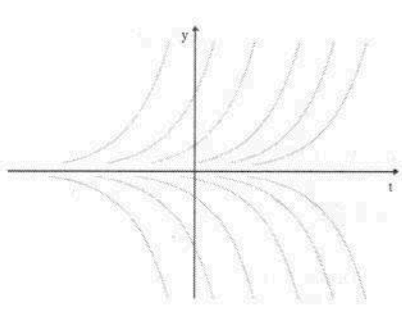


Figura 2.6: Os gráficos da família de funções $y(t) = Ce^t$, onde C toma cada valor real, preenchem o plano ty.

Teorema de Existência e Unicidade

Estamos na maioria das vezes interessados nas equações cujos problemas de valor inicial admitem existência e unicidade de solução. Para distinguir aqueles que têm dos que não tem, precisamos de alguns critérios gerais. O primeiro resultado neste sentido é um teorema de existência publicado em 1890 pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932).

Exemplo 2.19 *A equação na forma geral*

$$(y')^2 = -y^2 - 1$$

não tem solução real.

De fato, o lado esquerdo é positivo ou nulo, enquanto o lado direito é sempre negativo.

Exemplo 2.20 *O problema de valor inicial*

$$y' = \frac{2y^3 - \sin t}{t}, \quad y(0) = 1$$

não tem solução porque o campo vetorial é indefinido para $t = 0$.

Exemplo 2.21 *O problema de valor inicial*

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

tem no mínimo duas soluções: $u(t) = 0$ *e* $v(t) = t^3$.

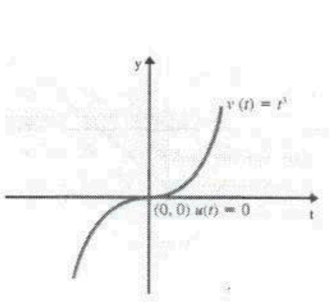


Figura 2.7: Os gráficos de $u(t) = 0$ e $v(t) = t^3$ têm o ponto $(0,0)$ em comum.

Teorema 2.1 *O Teorema de Existência de Peano*

Se o campo vetorial $f(t, y)$ é contínuo com relação a t e y em algum retângulo $\{(t, y) | t_1 < t < t_2, y_1 < y < y_2\}$ e se (t_0, y_0) é um ponto dentro deste retângulo, então

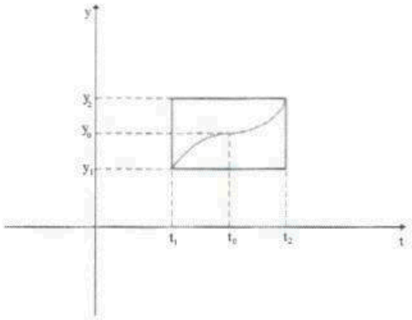


Figura 2.8: O teorema de Peano garante somente a existência local de uma solução.

existe um $\epsilon > 0$ e uma função φ definida em $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ que é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Este resultado nos diz que se em algum retângulo contendo (t_0, y_0) o campo de direções muda continuamente, então existe no mínimo uma curva passando pelo ponto (t_0, y_0) que representa o gráfico de uma solução.

Observe também que o teorema garante a existência da solução somente localmente (Veja a Figura 2.8).

Isto significa que a solução pode não existir fora de um pequeno intervalo contendo t_0.

Existem situações onde a solução é definida somente localmente e por isso o teorema de Peano não pode garantir existência global. Em muitos casos, entretanto, a solução é definida num intervalo grande.

O teorema de existência e unicidade seguinte tem suas raízes em alguns resultados obtidos por Cauchy nos anos 1820.

Teorema 2.2 *O Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy* [2]

Se o campo vetorial $f(t, y)$ é contínuo com relação a t e y em algum retângulo $\{(t, y) | t_1 < t < t_2, y_1 < y < y_2\}$, se a derivada parcial de f com relação a y existe e é contínua e se (t_0, y_0) é um ponto dentro deste retângulo, então existe um $\epsilon > 0$ e uma função φ definida em $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ que é uma solução para o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

[2]Este resultado é também chamado de Teorema de Picard. Embora a contribuição de Picard tenha ocorrido depois do trabalho de Cauchy, Picard foi o primeiro a estabelecer uma ligação desse teorema com o método das aproximações sucessivas.

Contrariamente ao critério de Peano, este teorema garante a propriedade de unicidade de solução exigindo que as direções do campo de direções façam mais do que impedir interrupções abruptas: elas devem também mudar "suavemente", uma propriedade expressa pela diferenciabilidade do campo vetorial com relação a variável dependente.

O teorema de Cauchy pode ser provado usando o método das aproximações sucessivas, mas ele também precisa de algumas ferramentas matemática mais sofisticadas, que estão fora do nosso escopo.

Observações

• Como o teorema de Peano, o critério de Cauchy tem um caráter local.

• Ambos os resultados oferecem somente condições suficientes para a unicidade ou a existência de soluções para os problemas de valor inicial. Isto significa que, se as hipóteses dos teoremas são satisfeitas, certamente temos unicidade ou existência. Se elas são violadas, entretanto, unicidade ou existência pode ou não ocorrer.

• Se a equação diferencial $y' = f(t, y)$ satisfaz as hipóteses do teorema de Cauchy para algum problema de valor inicial e os gráficos de duas soluções distintas interceptam-se em um ponto, então eles identificam-se em um intervalo.

Variáveis Separáveis

As equações diferenciais mais simples são do tipo $y' = f(t)$, onde f é uma função dada de t apenas e y é a função incógnita. Tais equações podem ser resolvidas por integração diretamente, como sabemos do cálculo.

Exemplo 2.22 *A solução geral da equação*

$$y' = (1+t)^2$$

é $y(t) = \int (1+t)^2 dt = (1+t)^3/3 + C$, onde C pode tomar qualquer valor real.

Exemplo 2.23 *A solução geral da equação*

$$y' = \frac{1}{t}, \quad \textit{para } t > 0,$$

é $y(t) = \int (1/t) dt = \ln |t| + C$, onde C pode tomar qualquer valor real.

O método de integração, entretanto, pode ser aplicado na classe mais ampla de equações separaveis [3], que tem a forma

$$y' = g(t)h(y), \tag{2.6}$$

onde g e h são funções e h é definida num conjunto no qual $h(y) \neq 0$.

[3]Tais equações diferenciais foram resolvidas a primeira vez há mais de três séculos pelos pioneiros da teoria: o matemático e físico inglês Isaac Newton (1642 – 1727) e o matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

Exemplo 2.24 *A equação*

$$y' = \frac{1}{2}t^3y^2$$

é separável, visto que $g(t) = \frac{1}{2}t^3$ *e* $h(y) = y^2$.

Exemplo 2.25 *A equação*

$$y' = \frac{e^t}{y}$$

é separável, visto que podemos definir $g(t) = e^t$ *e* $h(y) = 1/y$.

Exemplo 2.26 *A equação*

$$y' = \frac{\sin^2 y}{t} + 1$$

não é separável, visto que não existem funções g *e* h *tais que* $g(t)h(y) = \frac{\sin^2 y}{t} + 1$.

Método para Resolver Equações Separáveis

Uma equação separável é como uma mistura de óleo e água. Os líquidos se separam naturalmente. A idéia do método é separar as duas variáveis y e t e em seguida integrar a nova equação. Esta técnica é completamente justificada por um teorema do cálculo: a mudança de variável sob a integral. O método funciona como se segue.

Etapa 1. Separe as variáveis e obtenha a equação equivalente

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t).$$

Etapa 2. Como y e y' são funções de t, ambos os membros da equação dependem de t , então aplique a integral e escreva

$$\int \frac{y'}{h(y)}dt = \int g(t)dt.$$

Etapa 3. Use o teorema da mudança de variável na integral da esquerda e escreva formalmente $y'dt = dy$ assim a equação acima torna-se

$$\int \frac{dy}{h(y)}dt = \int g(t)dt.$$

Etapa 4. Após a integração, obtenha a fórmula geral na forma implícita (i.e., uma equação envolvendo y, mas não resolvida em y),

$$\ln|y(t)| = t + C,$$

onde H e G são funções diferenciáveis tais $dH/dy = 1/h$ e $dG/dt = g$, e C é uma combinação linear das constantes de integração da direita e da esquerda.

Etapa 5. Resolva a equação acima para y e obtenha a fórmula geral na forma explícita (i.e., resolvida em y como uma função de t).

Etapa 6. Encontre todas as soluções singulares, verifique se elas estão representadas na fórmula geral e em seguida escreva a solução geral.

Exemplo 2.27 *Resolva a equação*

$$y' = y$$

pelo método acima.

Separando as variáveis

$$\frac{y'}{y} = 1,$$

quando integrada, produz a solução geral

$$\ln|y| = t + C.$$

Aplicando a exponencial natural, obtemos

$$y(t) = Ce^t$$

Como veremos no nosso próximo exemplo, a maneira usual de resolver um problema de valor inicial é encontrar a solução geral, que é muito mais do que precisamos, e em seguida conservar somente a solução particular.

Exemplo 2.28 *Para resolver o problema de valor inicial*

$$y' = \frac{2y}{t}, \qquad y(1) = 3,$$

primeiro ignore a condição inicial e proceda como anteriormente. Separe as variáveis e obtenha

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t},$$

que, se integrada, produz a solução geral implícita

$$\ln|y| = 2\ln|t| + C,$$

onde C é uma constante. Isto conduz à solução geral

$$y(t) = kt^2,$$

onde k toma qualquer valor real. Observe que a solução zero, que é a única solução singular, aparece na fórmula acima para $k = 0$. Observe também que, como as soluções devem ser definidas em intervalos e como $t \neq 0$ cada solução singular é definida ou em $(-\infty, 0)$ ou em $(0, \infty)$.

Para determinar a solução particular φ que satisfaz a condição inicial $\varphi(1) = 3$, observe na solução geral que $\varphi(1) = k \cdot 1^2 = k$, assim $k = 3$, e portanto a solução do problema de valor inicial é $\varphi(t) = 3t^2$, definida em $(0, \infty)$.

Capítulo 3

Modelagem e Aplicações

Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais

Um **modelo matemático** é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer predições sobre o seu comportamento futuro.

Listemos alguns passos que fazem, frequentemente, parte do processo:

1. Construção de um modelo para descrever algum fenômeno físico;

2. Estabelecimento de um procedimento matemático adequado ao modelo físico;

3. Realização de cálculos numéricos aproximados com o uso do Modelo Matemático pré-estabelecido;

4. Comparação das quantidades numéricas obtidas através do Modelo Matemático com aquelas que se esperava obter a partir da formulação do modelo criado para resolver o problema.

Após estas etapas, costuma-se analisar os resultados e na verificação da adequação dos mesmos, aceita-se o modelo e na inadequação dos resultados, reformula-se o modelo, geralmente introduzindo maiores controles sobre as variáveis importantes, retirando-se os controles sobre as variáveis que não mostraram importância.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

3.1 Modelagem com Equações Lineares de Primeira Ordem

Como a teoria das equações diferenciais está interessada principalmente nas equações que têm aplicações em outras áreas da atividade humana, apresentaremos alguns exemplos da física, antropologia e biologia. O domínio de aplicações é mais amplo do que o que mostraremos aqui.

Crescimento Populacional

Um dos modelos mais simples de crescimento populacional [1] está baseado na observação de que quando populações (pessoas, plantas, bactérias, mosca de fruta, por exemplo) não estão restritas por limitações ambientais, elas tendem a crescer a uma taxa proporcional ao tamanho da população - quanto maior a população mais rapidamente ela cresce.

Para traduzir esse princípio em um modelo matemático, suponha que $P = P(t)$ denote a população no instante t. A cada momento, a taxa de crescimento populacional em relação ao tempo é dP/dt, desta forma a hipótese de que a taxa de crescimento é proporcional à população é descrita pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = Pk$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva a qual pode ser usualmente determinada experimentalmente. Assim, se a população for conhecida em algum instante, digamos $P = P_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para a população $P(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = Pk, \quad P(0) = P_0.$$

Datação por Carbono

Quando o nitrogênio, na parte superior da atmosfera da Terra, é bombardeado pelos os raios cósmicos, o elemento do carbono-14 radioativo é produzido. Este carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é ingerido pelas as plantas, que por sua vez, são comidas pelos os animais. Desta maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo. Em 1947, o cientista nuclear americano W.F.Libby propôs a teoria que a porcentagem de carbono-14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou animal morre, o carbono-14 no tecido começa a decair. Assim, a idade de uma artefato que contenha material animal ou vegetal pode ser estimada determinando qual a porcentagem que resta do seu conteúdo de carbono-14 original.

A equação

$$\frac{dQ}{dt} = kQ, \tag{3.1}$$

[1]Ele foi usado por Thomas Malthus (1766-1834) numa publicação de 1798.

é usada, para determinar a meia-vida de uma substância radioativa. O conhecido método de datação carbônica usado em antropologia é baseado nesta simples equação. Neste caso, Q representa a quantidade de substância radioativa e k é uma constante característica da substância. O valor da constante pode ser determinado através de experiências práticas e medições.

Farmacologia

Quando uma droga (digamos, penicilina ou aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sanguínea e, então, é absorvida pelo o organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de droga presente nesta corrente tende a decrescer à uma taxa proporcional à quantidade de droga presente - quanto mais droga estiver presente na corrente sanguínea, mais rapidamente ela será absorvida pelo o corpo.

Para traduzir este princípio em modelo matemático, suponha que $Q = Q(t)$ seja a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante t. A cada instante, a taxa de variação de Q em relação a t é dQ/dt, assim, a hipótese de que o decrescimento da taxa é proporcional à quantidade y na corrente sanguínea traduz-se na equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

onde k é uma constante de proporcionalidae positiva a qual depende da droga e pode ser determinada experimentalmente. O sinal negativo é requerido, pois Q decresce com o tempo. Assim, se a dosagem inicial da droga for conhecida, digamos $Q = Q_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $Q(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial.

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ, \quad Q(0) = Q_0.$$

3.2 Aplicações

Exemplo 3.1 *De acordo com dados das Nações Unidas, a população mundial no começo de* 1990 *era de, aproximadamente,* $5,3$ *bilhões e crescendo a uma taxa em torno de* 2% *ao ano. Supondo um modelo de crescimento exponencial, estime a população mundial no final de 2015.*

A população em 1990 era de 5,3 bilhões, ou seja $P_0 = P(0) = 5,3$
Sabendo que a taxa de crescimento é de 2% ($k = 0,02$,) então a população no instante t será

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 5,3e^{0,02t}$$

Como queremos saber a população mundial no ano de 2015, basta fazermos $t = 2015 - 1990 = 25$ anos, substituindo $t = 25$ na equação anterior, obteremos

$$P(25) = 5,3e^{0,02.25} \approx 8,7$$

Portanto, a população mundial estimada para 2015 é de aproximadamente $8,7$ bilhões.

Tempo de Duplicação e Meia-Vida

Se a quantidade P tiver um modelo de crescimento exponencial, então o tempo necessário para o tamanho inicial dobrar é chamado **tempo de duplicação** e se P tiver um modelo de dacaimento exponencial, então o tempo requerido para o tamanho original se reduzir ao meio é chamado de **meia-vida**. O tempo de duplicação e a meia-vida dependem somente da taxa de crescimento ou do decaimento e não da quantidade presente inicialmente.

Exemplo 3.2 *Suponha que $P = P(t)$ tem um modelo de crescimento exponencial*

$$P = P_0 e^{kt}$$

e seja T o tempo requerido para P dobrar o seu tamanho. Mostre que o tempo de duplicação é dado pela a fórmula

$$T = \frac{1}{k}\ln 2. \tag{3.2}$$

No tempo, $t = T$, o valor de P será dobrado $2P_0$, portanto, pela equação $P = P_0 e^{kt}$

$$2P_0 = P_0 e^{kT} \text{ ou } e^{kT} = 2$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados resulta $kT = \ln 2$, portanto o tempo de duplicação será dado por

$$T = \frac{1}{k}\ln 2.$$

A fórmula também dá a meia-vida de um modelo de dacaimento exponencial. Observe que esta fórmula não envolve a quantidade inicial y_0, assim em um modelo de crescimento ou de decaimento exponencial, a quantidade y duplica-se (ou reduz-se ao meio) a cada T unidades.

Exemplo 3.3 *A partir de* (3.2) *tem-se que, com uma taxa de crescimento contínuo de* 2% *ao ano, o tempo de duplicação para a população mundial será de quantos anos?*

Sabendo que a taxa de crescimento é de 2% ano, então o tempo de duplicação será

$$T = \frac{1}{k}\ln 2 = \frac{1}{0,02}\ln 2 \approx 34,66$$

ou aproximadamente 35 anos.

Exemplo 3.4 *Calcule a meia-vida do Carbono-14, sabendo que sua constante de desintegração vale* $0,000121 ano^{-1}$.

Por (3.2), temos que

$$T = \frac{1}{0,000121}\ln 2 \approx 5728,49$$

Logo, a meia-vida do Carbono-14 é de aproximadamente $5728,49$.

Exemplo 3.5 *Entre as décadas de 1940 e 1950, no vale de Khirbet Qumran, junto às encostas do Mar Morto, Juma Muhamed, pastor beduíno da região, recolhia seu rebanho quando ao seguir atrás de uma ovelha desgarrada percebeu que havia uma extensa fenda entre duas rochas. Curioso, atirou uma pedra e ouviu o ruído de um vaso se quebrando. No vaso, encontrou pergaminhos, que viriam a ser conhecidos como Manuscritos do Mar Morto. A coleção dos manuscritos incluíam manuais de disciplinas, hinários, comentários bíblicos, escritos apocalípticos, cópias do livro de Isaías e quase todos os livros do Antigo Testamento. A pergunta que surge é: Será que esses pergaminhos realmente eram da época de Cristo?(Dados: A atividade radioativa do carbono-14 em organismos vivos é de* $14dpmg^{-1}$, *à encontrada nos manuscritos era de aproximadamente* $11dpm/g$).

Usaremos a meia-vida do carbono-14, que é de aproximadamente 5730 anos, para calcular a constante de decaimento k do carbono-14. Como $Q(t) = Q_0e^{-kt}$, então, para $t = 5730$ anos teremos $Q(5730) = (1/2)Q_0$, logo,

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0e^{-kt} \\ (1/2)Q_0 &= Q_0e^{-5730k} \\ e^{-5730k} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \ln e^{-5730k} &= \ln(1/2) \\ -5730k &= \ln 0,5 \\ k &= -(\ln 0,5)/5730 \\ k &\approx 0,000121 \end{aligned}$$

e dessa forma, temos que função $Q(t) = Q_0e^{-0,000121t}$ é que determina a quantidade de material radioativo de carbono-14 em relação ao tempo. Logo,

$$\begin{aligned} \ln(11/14) &= -0,000121t \\ t &\approx 2000anos \end{aligned}$$

Deste modo, comprova-se que os manuscritos do Mar Morto remontam ao tempo em que Cristo viveu.

Exemplo 3.6 *Ácido valpróico é uma droga usada para controlar epilepsia; sua meia-vida no corpo humano é de cerca de* 15 *horas.*

a) Use a meia-vida para achar a constante k na equação diferencial $dQ/dt = -kQ$.

b) A qual tempo restarão 10% *da droga?*

a) Como a meia-vida do ácido valpróico no corpo humano é de 15 horas, então a constante k será

$$k = \frac{1}{15}\ln 2 \approx 0,0462$$

b) Para achar o tempo até que restem 10% da dose original, escrevemos $0,10Q_0$ para a quantidade restante, Q, e resolvemos para t.

$$\begin{aligned} 0,10Q_0 &= Q_0e^{-0,0462t} \\ 0,10 &= e^{-0,0462t} \end{aligned}$$

Aplicando o logarítmo natural em ambos os lados da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \ln 0,10 &= \ln e^{-0,0462t} \\ t &= \frac{\ln 0,10}{-0,0462} \\ &\approx 49,84 \end{aligned}$$

Ao tempo $t = 49,84$ ou cerca de 50 horas, restarão 10% da droga no corpo.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. *Cálculo*, 8ª ed. Porto Alegre, Bookman, 2007.

[2] APOSTOL, Tom M. *Cálculo - v. 1: Cálculo com funções uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear*, Reverté, 1988.

[3] APOSTOL, Tom M. *Cálculo - v. 2: Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear, com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades*, Reverté, 2004.

[4] BOYCE, William E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* 8ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 2006.

[5] DIACU, Florin. *Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações*, LTC.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*, v.1, 5ª ed. , LTC, 2001.

[7] HALETT, Deborah Hughes. *Cálculo e aplicações.* São Paulo, Edgard Blücher, 1999.

[8] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*, v.1, 12ª ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 2008.

[9] ZILL, Dennis G. *Equações Diferenciais* , 3ªed. São Paulo, Pearson Makron Books, 2001.

[10] *A Química do Tempo: Carbono-14- Química Nova na Escola.* (Acessado em 01/09/2011). Disponível em www.qnesc.sbq.org.br/online/qnesc

[11] *Os Essênios: Mistérios Antigos.* (Acessado em 04/09/2011). Disponível em www.misteriosantigos.com/essenios.htm