



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

## **Defeitos em Matéria Condensada: de Twistons a Skyrmions**

**Dameres Santos Silva Borges**

CAMPINA GRANDE - PB

Julho 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Defeitos em Matéria Condensada: de Twistons a Skyrmions**

**Dameres Santos Silva Borges**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE - PB

Julho 2018

B732d    Borges, Damares Santos Silva.  
      D defeitos em matéria condensada: de twistons a skyrmions / Damares Santos Silva Borges. – Campina Grande, 2018.  
      79 f. : il. color.

      Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.  
      "Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".  
      Referências.

      1. Física de Partículas. 2. Defeitos Topológicos. 3. Twistons.  
      4. Skyrmions. I. Santos, João Rafael Lúcio dos. II. Título.

CDU 539.12(043)

# DEFEITOS EM MATÉRIA CONDENSADA: DE TWISTONS A SKYRMIONS

DAMARES SANTOS SILVA BORGES

Aprovada em 26 de Julho de 2018

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos - UFCG

Orientador

---

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos - UFPB

Examinador Externo

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito - UFCG

Examinador Interno

# Agradecimentos

A Deus, pela vida e pelas oportunidades maravilhosas que me concede, permitindo-me realizar sonhos e me dando forças para suportar todas as adversidades da caminhada. Vejo o Senhor em tudo, obrigada!

À minha família, que, mesmo de longe, foi fundamental para que tudo isso acontecesse. Papai e mamãe (Denilson e Vitória), serei eternamente grata. Minhas irmãs (Dhene, Débora e Rebeca) e meu cunhado (Renato), vocês são incríveis, obrigada!

Gostaria de agradecer especialmente ao professor João Rafael, a quem tive o prazer de ter como orientador. Obrigada pela paciência e ensinamentos ao longo desse tempo. Tudo isso tem sido, com certeza, de grande inspiração para mim, deixo aqui minha admiração e gratidão!

Aos meus amigos baianos, fico sempre lisonjeada com o carinho e a torcida de vocês. Por todas as orações e bons desejos, sou grata de coração.

Não posso deixar de agradecer também aos amigos que fiz durante esses dois anos em Campina Grande. Nunca imaginei que faria grandes amizades que seriam uma grande família para mim nesse tempo, obrigada!

Agradeço de maneira especial a Ivânderson. Nossa parceria nos últimos 6 anos tem sido das melhores. As coisas teriam sido mais difíceis sem você aqui. Muito obrigada!

Finalmente, agradeço aos funcionários e professores da Universidade Federal de Campina Grande por tudo que me proporcionaram e também à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo fomento, sem o qual nada disso seria possível.

# Lista de Figuras

2.1	Potencial $\phi^4$ . . . . .	10
2.2	Soluções. ( <i>kink</i> - linha vermelha; <i>anti-kink</i> - linha azul) . . . . .	11
2.3	Potencial $\phi^4$ invertido . . . . .	12
2.4	Solução tipo <i>lump</i> (solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul) . . . . .	13
2.5	Densidades de energia (para <i>kink</i> - linha azul; para <i>lump</i> - linha vermelha) . . . . .	14
3.1	Ilustração dos movimentos torcional e longitudinal ao longo de uma cadeia de $\text{CH}_2$ . Figura adaptada da referência [6]. . . . .	24
3.2	Potencial $V$ para $\lambda = 1.1$ e $\mu = 1$ . . . . .	26
3.3	Esquerda: potencial $V$ para $\lambda = 7.30/\pi^2$ , $\mu = 0.67$ e $b_2 = 0$ . Direita: contorno de $V$ , onde a curva sólida e a pontilhada representam as órbitas analíticas que conectam os campos $\phi$ e $\chi$ . . . . .	30
3.4	Esquerda: potencial $V$ para $\lambda = 7.30/\pi^2$ , $\mu = 0.67$ e $b_2 = 2$ . Direita: contorno de $V$ , onde a curva sólida e a pontilhada representam as órbitas analíticas que conectam os campos $\phi$ e $\chi$ . . . . .	30
4.1	$\phi(r)$ do modelo (4.60). Solução positiva- linha pontilhada. Solução negativa- linha contínua. Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	43
4.2	Densidade de energia para o modelo (4.60). Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	44
4.3	Magnetização para o potencial $\phi^4$ , tomando a solução negativa e $\delta = 0$ . Esquerda: $s = 0.2$ . Direita: $s = 0.4$ . . . . .	45
4.4	Magnetização para o potencial $\phi^4$ , tomando a solução negativa e $\delta = 0$ . Esquerda: $s = 0.6$ . Direita: $s = 0.8$ . . . . .	45

4.5	Componente $z$ da magnetização para o potencial $\phi^4$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . .	46
4.6	Densidade de carga para o modelo $\phi^4$ quando $\delta = 0$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . .	46
4.7	Soluções para o modelo $\phi^6$ positiva (esquerda) e negativa (direita). Em ambos os casos: linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ e linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	48
4.8	Densidade de energia para o modelo $\phi^6$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	49
4.9	Magnetização para o potencial $\phi^6$ , tomando a solução positiva e $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Esquerda: $s = 0.2$ . Direita: $s = 0.4$ . . . . .	50
4.10	Magnetização para o potencial $\phi^6$ , tomando a solução positiva e $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Esquerda: $s = 0.6$ . Direita: $s = 0.8$ . . . . .	50
4.11	Componente $z$ da magnetização para o potencial $\phi^6$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . .	51
4.12	Densidade de carga para o modelo $\phi^6$ quando $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . .	51
5.1	Solução $\phi(r)$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	61
5.2	Solução $\chi(r)$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	61
5.3	Densidade de energia $\rho(r)$ . Linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ , linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	62
5.4	Densidade de carga $q$ . A esquerda com $\delta = 0$ e a direita com $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ e linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	64
5.5	Densidade de carga $q$ . A esquerda com $\delta = \pi$ e a direita com $\delta = \frac{3\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ e linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	65
5.6	Magnetização quando $\delta = 0$ para $s = 0.2$ e $s = 0.4$ , respectivamente. . . . .	67
5.7	Magnetização quando $\delta = 0$ para $s = 0.6$ e $s = 0.8$ , respectivamente. . . . .	67
5.8	Magnetização quando $\delta = \frac{\pi}{2}$ para $s = 0.2$ e $s = 0.4$ , respectivamente. . . . .	68

5.9	Magnetização quando $\delta = \frac{\pi}{2}$ para $s = 0.6$ e $s = 0.8$ , respectivamente. . . . .	68
5.10	Magnetização quando $\delta = \pi$ para $s = 0.2$ e $s = 0.4$ , respectivamente. . . . .	69
5.11	Magnetização quando $\delta = \pi$ para $s = 0.6$ e $s = 0.8$ , respectivamente. . . . .	69
5.12	Magnetização quando $\delta = \frac{3\pi}{2}$ para $s = 0.2$ e $s = 0.4$ , respectivamente. . . . .	70
5.13	Magnetização quando $\delta = \frac{3\pi}{2}$ para $s = 0.6$ e $s = 0.8$ , respectivamente. . . . .	70
5.14	Componente $\hat{z}$ da magnetização. A esquerda com $\delta = 0$ e a direita com $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ e linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	71
5.15	Componente $\hat{z}$ da magnetização. A esquerda com $\delta = \pi$ e a direita com $\delta = \frac{3\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha $s = 0.8$ , linha azul escuro $s = 0.6$ , linha azul claro $s = 0.4$ e linha amarela $s = 0.2$ . . . . .	71

# Lista de Tabelas

4.1	Restrições para $N$ e $D$ . . . . .	34
4.2	Varição $\bar{r}$ quando $s$ varia. . . . .	47
4.3	Varição $\bar{r}$ quando $s$ varia. . . . .	52
5.1	Carga . . . . .	66
5.2	Varição $\bar{r}$ quando $s$ varia. . . . .	72

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>xii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria de Campos Escalares para Configurações Unidimensionais</b>	<b>6</b>
2.1 Teoria para Um Campo Escalar Real . . . . .	6
2.2 Solução do Tipo <i>Kink</i> . . . . .	8
2.3 Solução do Tipo <i>Lump</i> . . . . .	12
2.4 Método da Deformação . . . . .	14
2.5 Estabilidade Linear . . . . .	15
2.6 Teoria para Dois Campos Escalares Reais . . . . .	18
2.7 Método de Extensão . . . . .	20
<b>3 <i>Twistons</i> no Polietileno Cristalino e o Método de Extensão</b>	<b>23</b>
3.1 Resultados Anteriores . . . . .	23
3.2 Novos Modelos para <i>Twistons</i> . . . . .	27
<b>4 Teoria para Configurações Planares de Um Campo e <i>Skyrmions</i></b>	<b>32</b>
4.1 Argumento de Derrick e Dimensões Espaciais Maiores que 1 . . . . .	32
4.2 Generalidades . . . . .	34
4.2.1 Método BPS . . . . .	35
4.2.2 Estabilidade Linear . . . . .	36
4.3 <i>Skyrmions</i> Magnéticos em (2, 1) Dimensões . . . . .	39
4.4 Exemplos . . . . .	42
4.4.1 Potencial $\phi^4$ - Modelo com Carga $Q = \pm 1$ . . . . .	42

4.4.2	Potencial $\phi^6$ - Modelo com Carga $Q = \pm 1/2$ . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Teoria para Configurações de Dois Campos Planares e <i>Skyrmions</i></b>	<b>53</b>
5.1	Generalidades . . . . .	53
5.1.1	Método BPS . . . . .	54
5.1.2	Análise de Estabilidade . . . . .	54
5.2	Modelos de Dois Campos para Configurações Planares . . . . .	59
5.3	Número de <i>Skyrmion</i> para Modelos de Dois Campos . . . . .	62
5.4	Estruturas Magnéticas do Tipo <i>Skyrmion</i> a partir de Modelos de Dois Campos .	64
5.4.1	Número de <i>Skyrmion</i> . . . . .	64
5.4.2	Magnetização . . . . .	66
5.4.3	Análise da Componente $\hat{z}$ da Magnetização . . . . .	71
5.4.4	Raio Médio de Matéria . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>73</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo da Carga Topológica para Dois Campos</b>	<b>80</b>

# Resumo

Os defeitos topológicos são caracterizados como soluções estáveis de equações de movimento em uma ou mais dimensões espaciais e desempenham papel importante na ciência não-linear. Neste trabalho de dissertação, damos ênfase a defeitos em (1+1) e (2+1) dimensões espaço-temporais. No primeiro caso, abordamos configurações conhecidas como *twistons* (soluções topológicas tipo *kink*) presentes em cristais de polietileno. Nessa primeira abordagem, revisitamos trabalhos anteriores e, a partir do método de extensão, construímos novas famílias de potenciais que descrevem bem sistemas desse tipo. Apresentamos soluções topológicas analíticas e que não possuem problemas de degenerescência infinita. No segundo caso, estudamos estruturas conhecidas como *skyrmions* com base na sua descrição em materiais magnéticos, em que são denotados como configurações da magnetização em nanoescala e topologicamente estáveis. Recorremos novamente ao método de extensão e apresentamos um potencial, função de dois campos escalares acoplados, a partir do qual conseguimos modelar essas estruturas magnéticas. Além disso, o novo modelo de dois campos tem soluções analíticas conhecidas, permitindo análises interessantes como a determinação de uma quantidade topológica conservada, estudo das diferentes configurações da magnetização e cálculo do raio médio de matéria.

**PALAVRAS-CHAVE:** Defeitos Topológicos, Twistons, Skyrmions.

# Abstract

Topological defects are characterized as stable equation of motion solutions in one or more spatial dimensions and play an important role in nonlinear science. In this study, space-time  $(1 + 1)$  and  $(2 + 1)$  dimension defects are emphasized. In the first case, configurations known as twistons (kink-like topological solutions) present in polyethylene crystals are assessed. In this first approach, previous works were reviewed and new families of potentials that adequately describe these types of systems were constructed from the extension method, presenting analytical topological solutions that do not display infinite degeneracy problems. In the second case, structures known as skyrmions were studied based on their description in magnetic materials, where they are denoted as topologically stable nanoscale magnetization configurations. The extension method was applied and a potential from which such magnetic structures can be modelled, function of two coupled scalar fields was presented. In addition, the new two-field model possesses known analytical solutions, allowing for interesting analyses, such as the determination of a conserved topological quantity, the study of the different magnetization configurations and calculation of mean matter radius.

**KEY WORDS:** Topological Defects, Twistons, Skyrmions.

# Capítulo 1

## Introdução

Os sólitons foram descobertos pela primeira vez em 1834 por J. Scott Russel, um engenheiro escocês. Na ocasião, ele observava o movimento de um barco que era puxado rapidamente, ao longo de um canal estreito, por um par de cavalos. Quando o barco parou de repente, ele notou que uma massa de água acumulou-se ao redor da proa do barco e, em seguida, rolou para a frente rapidamente assumindo a forma de uma grande elevação solitária. O interessante é que essa elevação preservou sua forma e velocidade durante uma ou duas milhas, quando Scott a perdeu nos meandros do canal [1].

Dado esse exemplo, podemos entender o conceito de sólitons como configurações de campo com energia finita que preservam sua forma e velocidade. Esse tipo de configuração é típico de teorias de campos não-lineares e possui aplicações em hidrodinâmica, ótica, física de partículas, cosmologia, dentre várias outras áreas.

Existem ainda soluções de equações de campo não-lineares chamadas ondas solitárias, cuja principal característica é que a densidade de energia  $\rho(x, t)$  (se considerarmos uma dimensão espacial apenas) é localizada. Ou seja,  $\rho(x, t)$  é finita em alguma região finita do espaço e vai a zero no infinito espacial suficientemente rápido para ser integrável [2]. Mais ainda, a densidade de energia deve se mover sem distorções com velocidade constante.

Diferentemente dos sólitons observados por Russel, ondas solitárias não necessariamente preservam sua identidade após o espalhamento, podendo dissipar sua energia em colisão e até mesmo aniquilar completamente [3]. Um exemplo de onda solitária, em uma dimensão espacial, é a estrutura topológica chamada *kink*. Essa estrutura é classificada como defeito topológico e ocorre quando há uma transição de fase após uma quebra espontânea de simetria. Além disso, os

*kinks* possuem uma base topológica<sup>1</sup> que está ausente em sólitons hidrodinâmicos.

No contexto da física da matéria condensada, podemos estudar sistemas nos quais soluções tipo *kink* descrevem bem o comportamento do fenômeno em questão. Esse é o caso de estruturas conhecidas como *twistons*, presentes em cristais de polietileno.

A existência de *twistons* em cristais de polietileno foi primeiramente postulada por Mansfield e Boyd em 1978 [6]. Essas configurações se referem a torções de 180° que se estendem suavemente em vários grupos de CH<sub>2</sub> no plano ortogonal à direção da cadeia. Essas configurações aparecem no polietileno cristalino como um resultado de sua larga flexibilidade torcional. Desde então alguns estudos foram feitos no intuito de apresentar um modelo solitônico que descreva bem sistemas desse tipo.

O que existe na literatura é desde modelos mais gerais, que consideram os graus de liberdade radial, torcional e longitudinal do sistema [7], até modelos mais simples, que consideram apenas o movimento torcional ao longo da cadeia [8].

Após esses, temos os trabalhos de Bazeia, Ventura e Simas (1999 [9] e 2000 [10]), nos quais foram modificados alguns pressupostos apresentados na referência [7]. Nesses trabalhos mais recentes, foi apresentado um formalismo baseado em dois campos escalares reais ( $\phi$  e  $\chi$ ) acoplados, responsáveis pelo movimento torcional e longitudinal, respectivamente, através dos quais é possível comparar seus resultados com os publicados anteriormente e verificar que eles estão de acordo.

Apesar dos bons resultados apresentados pelos modelos mais atuais, verificamos que a forma explícita encontrada para o potencial que especifica o sistema ainda não é a mais satisfatória, uma vez que em sua estrutura de vácuos há uma linha de zeros, ocasionando uma energia degenerada para qualquer valor do campo  $\chi$  (veja [11]). O que ocorre, basicamente, é que a mesma energia utilizada para a cadeia fazer um deslocamento unitário é a necessária para quebrar a cadeia.

Na tentativa de solucionar esse problema, verificamos que uma saída possível é o chamado método de extensão [12], que a permite a criação de modelos efetivos de dois campos com soluções analíticas, partindo de modelos de um campo. Com base nisso, nossa proposta é construir um novo potencial, que dê conta das soluções topológicas analíticas conhecidas, mas

---

<sup>1</sup>Se tratando do significado da palavra topologia, ela se refere ao ramo da matemática interessado em estudar as formas e propriedades do espaço que são invariantes sob deformações contínuas [4]. No caso de soluções topológicas do tipo *kink*, a evolução do tempo é um exemplo de uma deformação contínua para a qual a energia permanece finita, e essa é a razão fundamental para a estabilidade dessas soluções [5].

que tenha uma estrutura de mínimos que não tenha problemas de degenerescência infinita. E isso é o que pretendemos desenrolar em algum dos próximos capítulos.

Em duas dimensões espaciais, encontramos, dentre outros, o estudo de defeitos conhecidos como *skyrmions*.

A definição de *skyrmion* foi originalmente proposta por Tony Skyrme (1962) no contexto da física de partículas. Em sua ideia original [13], ele utilizou o conceito matemático de partículas, hoje chamadas de *skyrmions*, em uma certa teoria de campo não-linear para explicar hádrons em física nuclear. Essas partículas são topologicamente protegidas, caracterizadas por um inteiro topológico que não pode ser alterado por uma deformação contínua da configuração do campo [14].

No decorrer dos anos, o estudo de *skyrmions* tem se tornado relevante em sistemas da matéria condensada, como por exemplo, cristais líquidos [15], efeito hall quântico [16], supercondutores [17], condensados de Bose [18] e em diversas outras áreas da Física. Embora Skyrme tenha considerado uma versão tridimensional de *skyrmions*, a mesma noção foi generalizada para dimensões arbitrárias: pode-se definir um *skyrmion* como uma configuração de campo suave, topologicamente estável, descrevendo um mapeamento não-trivial de um espaço de coordenadas para um espaço de parâmetros de ordem com uma topologia não-trivial [19]. São propriedades de *skyrmions*: carga conservada, vorticidade e helicidade [20].

Nesta dissertação, estamos interessados na formação de *skyrmions* em materiais magnéticos [14]. Consideramos então excitações magnéticas localizadas. Como pode ser visto em [21], dependendo do tipo de material, as excitações localizadas podem aparecer como estruturas isoladas ou como matrizes ou redes organizadas espacialmente.

Em 2009, foi feita a primeira observação experimental de um rede de *skyrmion* em um material de magnético quiral formado por silício de manganês (MnSi) [22]. Desde então, tendo aumentado as pesquisas teóricas e experimentais nessa área, mais observações têm sido feitas, como por exemplo, *skyrmions* isolados foram demonstrados experimentalmente em filmes finos magnéticos com interação Dzyaloshinsky-Moriya [23]. Além disso, o estudo dessas estruturas tem intensificado a possibilidade de desenvolver soluções para miniaturização de dispositivos e aplicações na spintrônica [24, 25].

Conforme visto em [21], a maneira padrão de descrever sistemas, tais como as configurações de magnetização que iremos considerar, é baseada em escrever uma densidade de energia livre, que geralmente é decorrente das interações de Dzyaloshinsky-Moriya [26, 27] a fim de

obter as equações de movimento para os principais graus de liberdade. No entanto, essa linha de investigação leva a equações diferenciais não lineares de segunda ordem acopladas, cuja forma específica depende do modelo levado em consideração e geralmente requer investigações numéricas.

Sendo assim, Bazeia, Doria e Rodrigues (2016) [21] propuseram uma maneira alternativa à linha de investigações numéricas, focando principalmente na construção de resultados analíticos. Em nossas investigações, iremos trabalhar sob a perspectiva dos últimos autores citados.

Como pode ser visto em [21, 28, 29], os autores trazem modelos de um campo que podem retratar diferentes configurações das excitações magnéticas. Nesse sentido, objetivamos propor um modelo de dois campos, também com soluções topológicas analíticas, que nos dê outras possibilidades no estudo dessas estruturas do tipo *skyrmion*. Isso é o que desenvolveremos mais a frente, onde esperamos contribuir com mais informações a respeito desses sistemas.

Dito isso, vamos relatar agora como a estrutura da dissertação será organizada. No capítulo 2, discorreremos sobre aspectos gerais da teoria de campos envolvendo configurações unidimensionais. Primeiro apresentamos sistemas de um campo, aplicando o método BPS [30, 31] para encontrar equações de primeira ordem. Classificamos também as soluções quanto a topologia mostrando defeitos do tipo *kink* e *lump*. Seguimos apresentando um procedimento importante para gerar novos modelos de um campo, que é o método da deformação [32]. Finalizamos então o capítulo apresentando a teoria que descreve modelos de dois campos escalares reais, expondo também sobre uma técnica para construção de modelos de dois campos chamada método de extensão [12].

No capítulo 3 fazemos a aplicação de várias técnicas mostradas no capítulo anterior considerando o estudo de *twistons* no polietileno cristalino. Mostramos os resultados de alguns estudos realizados ao longo dos anos e construímos, através do uso do método de extensão, um novo modelo de dois campos que pode descrever melhor sistemas dessa natureza.

Iniciamos o capítulo 4 discutindo sobre o teorema de Derrick [3] que diz que modelos de um campo escalar real representados pela densidade de lagrangiana usual não suportam defeitos topológicos a menos que em dimensão espacial igual a 1. Apresentamos então a alternativa proposta em [33] para contornar o problema e assim discorreremos sobre a teoria que descreve configurações de um campo em duas dimensões espaciais apresentando simetria radial. Finalizamos o capítulo explanando sobre *skyrmions* em materiais magnéticos e trazendo dois exemplos importantes enunciados em [21, 28].

No capítulo 5, iniciamos fazendo uma breve explanação de como descrever sistemas planares com simetria radial na presença de dois campos. Após isso, enunciemos um potencial de dois campos acoplados que é capaz de descrever configurações magnéticas do tipo *skyrmion*. Finalizamos o capítulo fazendo diversas análises sobre a natureza das estruturas descritas pelo novo modelo.

Concluimos a dissertação, no capítulo 6, lembrando os principais resultados e objetivos alcançados ao longo de trabalho, apresentando também quais são as perspectivas futuras sobre os temas abordados.

# Capítulo 2

## Teoria de Campos Escalares para Configurações Unidimensionais

Neste capítulo, apresentaremos as teorias que descrevem modelos de um e dois campos escalares reais. Aqui trabalharemos em  $(1, 1)$  dimensões. Mostraremos as principais características desses modelos, tais como: equação de movimento, energia, suas soluções topológicas e não-topológicas e alguns métodos que permitem a criação de novos modelos.

Frisamos que neste capítulo, e em toda a dissertação, será utilizado o sistema de unidades naturais, assim, nas equações apresentadas,  $c = 1$ , sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Além disso, por se tratarem de teorias de campo relativísticas, utilizaremos a métrica de Minkowski com a convenção  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$  para descrevê-las, que em  $(1, 1)$  dimensões é simplesmente  $\text{diag}(+, -)$ .

### 2.1 Teoria para Um Campo Escalar Real

A teoria para um campo escalar real  $\phi = \phi(x, t)$  pode ser descrita pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde, para o caso unidimensional,  $\mu = 0, 1$  e  $V(\phi)$  é o potencial que especifica o modelo estudado. Podemos então reescrever a densidade de lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - V(\phi). \quad (2.2)$$

Uma vez que  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = 0$  quando  $\mu \neq \nu$  e, sabendo também que,  $x^0 = ct$  e  $x^1 = x$ , então obtemos que  $\mathcal{L}$  é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (2.3)$$

No entanto, como destacamos no começo deste capítulo, estamos utilizando o sistema de unidades naturais e a métrica de Minkowski com a assinatura  $\text{diag}(+, -)$ . Dessa forma, a densidade de lagrangiana resulta em

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (2.4)$$

A ação para o campo é dada por

$$S[\phi] = \int dt dx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.5)$$

A partir da minimização da ação,  $\delta S = 0$ , encontramos a equação de movimento para  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , que é dada por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0, \quad (2.6)$$

de forma que, substituindo (2.1) em (2.6), a equação de movimento pode ser reescrita como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = 0, \quad (2.7)$$

em que  $V_\phi$  é a derivada parcial de  $V$  com relação a  $\phi$ . Mais ainda, podemos escrever a equação acima como

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.8)$$

onde  $\dot{\phi}$  é a derivada parcial do campo com relação ao tempo, e  $\phi'$  é a derivada parcial do campo com relação à posição.

Para calcularmos a energia dessa configuração precisamos escrever a densidade de hamiltoniana ou densidade de energia  $\rho$ . Para isso, podemos efetuar uma transformada de Legendre, na forma

$$\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (2.9)$$

a partir da qual podemos finalmente escrever a energia total como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (2.10)$$

## 2.2 Solução do Tipo *Kink*

As soluções para as equações de movimento são o que chamamos de defeitos e podem ser classificadas como topológicas ou não-topológicas. Em  $(1, 1)$  dimensões, que é o caso abordado neste capítulo, essas soluções são chamadas *kinks* e *lumps*, nessa ordem e, como veremos, o que nos permite especificar esses dois tipos de soluções é a corrente topológica.

As soluções que conectam diferentes vácuos do potencial são conhecidas genericamente como *kinks*, um nome sugerido pela forma do campo escalar quando plotado como uma função de  $x$  [5]. Os *kinks* são caracterizados por uma carga topológica que, como veremos, é uma quantidade que se conserva. Vamos focar aqui em soluções estáticas,  $\phi = \phi(x)$ , ou equivalentemente estar no mesmo referencial da solução. Assim a equação de movimento (2.8) se torna

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.11)$$

Usando alguma manipulação algébrica, é possível transformar a equação acima em uma equação diferencial de primeira ordem, mas vamos apresentar aqui um método conhecido como BPS que carrega consigo importantes justificativas físicas.

O método BPS foi descoberto separadamente por Bogomol'nyi (1976) [30], Prasad e Sommerfield (1975) [31], daí o nome. Esse procedimento parte do cálculo da energia do sistema. Portanto, para o caso estático, podemos reescrever (2.10) como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (2.12)$$

O segundo passo da aplicação do método consiste em manipular o integrando de forma que ele possa ser reescrito como um quadrado perfeito, ou seja

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \phi' \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} \phi' \right]. \quad (2.13)$$

Daí então, podemos reconhecer uma energia mínima e não-trivial do sistema, que ocorre ao considerarmos

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.14)$$

Esta é uma equação de primeira ordem e sua solução também satisfaz (2.11). A essa energia minimizada chamamos  $E_{BPS}$ , e ela tem a forma

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \pm \sqrt{2V} \phi' \right]. \quad (2.15)$$

Podemos definir o potencial  $V(\phi)$  como sendo

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.16)$$

onde  $W = W(\phi)$  é uma função suave do campo  $\phi$  e é denominada "superpotencial", além disso  $W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}$ . Utilizando essa nova definição, podemos reescrever (2.11), (2.14) e (2.15) como

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (2.17)$$

$$\phi' = \pm W_\phi \quad (2.18)$$

e

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [W_\phi \phi'] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx} = W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty)), \quad (2.19)$$

respectivamente, com  $W_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}$ . Assim,

$$|E_{BPS}| = |\Delta W|. \quad (2.20)$$

É importante ressaltar que o superpotencial  $W$ , utilizado para reescrever o potencial na equação (2.16), é um termo emprestado dos estudos de supersimetria [34]. Conforme frisado em [35] o modelo de campo escalar em questão pode ser visto como a parte bosônica de um teoria supersimétrica, sendo que os estados BPS, soluções das equações de primeira ordem, conservam parcialmente a supersimetria.

Observe que de (2.17) e (2.18) é possível perceber claramente que as soluções da equação de primeira ordem resolvem a equação de movimento. Além disso, é importante notar que a eficiência do método BPS se dá na escolha de potenciais positivos definidos, pois, por construção, o método se baseia em  $V(\phi) \geq 0$  e, como veremos, para *lumps* o método retribui sempre o valor zero para energia, o que, usando a hamiltoniana, verificamos que não é verdade.

Como já foi dito, o que caracteriza uma solução quanto à topologia é a corrente topológica, que nos permite determinar a carga topológica dessas soluções. Uma das maneiras de escrevermos essa corrente é considerando

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (2.21)$$

que uma vez mais utiliza o superpotencial  $W$ , usado nos estudos de teorias supersimétricas. Nesse caso,  $\mu, \nu = 0, 1$  e  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o tensor de Levi-Civita antissimétrico e em duas dimensões ( $\epsilon^{01} = 1 = -\epsilon^{10}$ ;  $\epsilon^{00} = 0 = \epsilon^{11}$ ). Por causa da antissimetria de  $\epsilon^{\mu\nu}$ , fica claro que  $J^\mu$  é uma quantidade conservada, ou seja

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.22)$$

É importante ressaltar que a conservação da corrente não surge do teorema de Noether (veja [1]), a partir de uma simetria da teoria, mas porque é trivialmente conservada, visto que é o divergente de um tensor antissimétrico. Assim, para soluções estáticas, a carga topológica é dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0, \quad (2.23)$$

que também é uma quantidade conservada.

Note que  $J^0 = \frac{dW}{dx}$ , então

$$Q = \Delta W = E_{BPS}, \quad (2.24)$$

ou seja, essa definição de corrente nos permite ter uma carga conservada idêntica à energia BPS e cuja existência depende do comportamento nas condições de fronteira do sistema dado. Tais correntes e leis de conservação são chamadas de topológicas, uma vez que surgem de propriedades topológicas de configurações de campo e não diretamente de simetrias da teoria [36].

A carga (2.24) classifica as soluções estáticas em dois grupos: soluções topológicas (*kinks*), quando o seu valor é diferente de zero, e soluções não topológicas (*lumps*), quando o seu valor é igual a zero.

A fim de exemplificar uma solução tipo *kink* tomemos o potencial  $\phi^4$ , plotado na figura 2.1, que em unidades dimensionais é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (2.25)$$

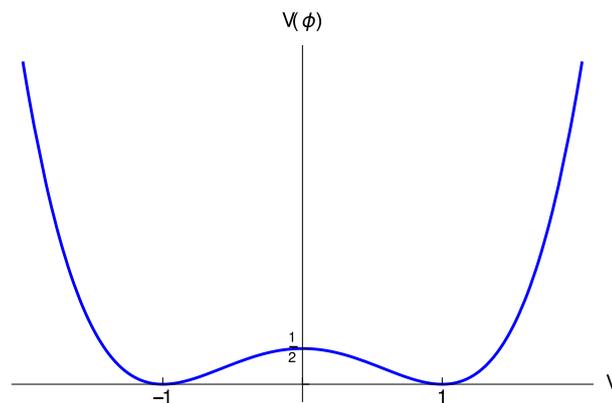


Figura 2.1: Potencial  $\phi^4$

A partir do potencial acima, podemos utilizar (2.16) para obter a forma do superpotencial, que é

$$W(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3}. \quad (2.26)$$

Utilizando (2.17) podemos escrever a equação de movimento para esse sistema, que é

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1), \quad (2.27)$$

e, partindo de (2.18), vemos que a equação de primeira ordem pode ser escrita na forma

$$\phi' = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.28)$$

Observe que duas possíveis soluções para esse sistema é  $\phi_{\pm} = \pm 1$ . No entanto, esses tipos de soluções são bastante triviais. Elas indicam os vácuos clássicos do sistema e nos conduz a uma energia nula. Portanto vamos considerar soluções não-triviais, que são dadas por

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.29)$$

Essas soluções são denominadas *kinks* (com sinal positivo) e *anti-kinks* (com sinal negativo), respectivamente. Na figura 2.2 podemos observar que essas soluções apresentam limites assintóticos diferentes, portanto são ditas topológicas e conectam os mínimos do potencial, além disso essas soluções também são conhecidas como estados BPS.

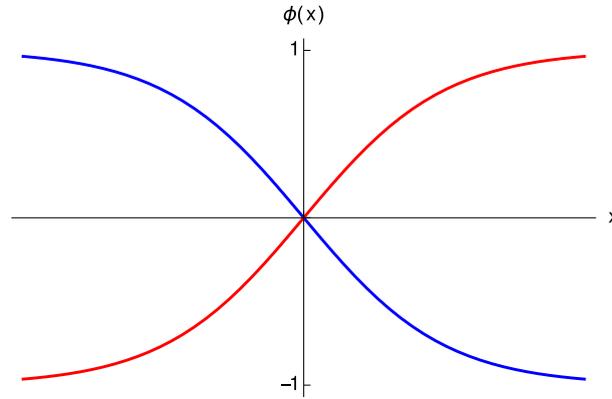


Figura 2.2: Soluções. (*kink* - linha vermelha; *anti-kink* - linha azul)

Os kinks podem ser imersos em duas ou mais dimensões espaciais. Quando isso ocorre, chamamos de paredes de domínio e sua energia se transforma em densidade de energia.

Utilizando (2.12) podemos calcular a energia das soluções (2.29), assim

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{sech}(x)^4 = \frac{4}{3}, \quad (2.30)$$

que é a mesma energia BPS

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))| = \left| \phi - \frac{\phi^3}{3} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{3}. \quad (2.31)$$

Nesse exemplo, fica clara a eficiência do método BPS, pois, além de nos retribuir equações de primeira ordem, que são estados BPS com energia mínima (em geral mais simples de resolver que as de segunda ordem), ele também nos permite calcular a energia do sistema mesmo sem conhecer as soluções, usando apenas  $W(\phi)$  e os mínimos do potencial correspondente.

## 2.3 Solução do Tipo *Lump*

Para exemplificar soluções do tipo *lump*, podemos considerar o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)\phi^2. \quad (2.32)$$

Esse é o conhecido “potencial  $\phi^4$  invertido” e está esboçado na figura 2.3. A partir da definição (2.16) podemos escrever  $W(\phi)$  associado a esse potencial, que é

$$W(\phi) = -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.33)$$

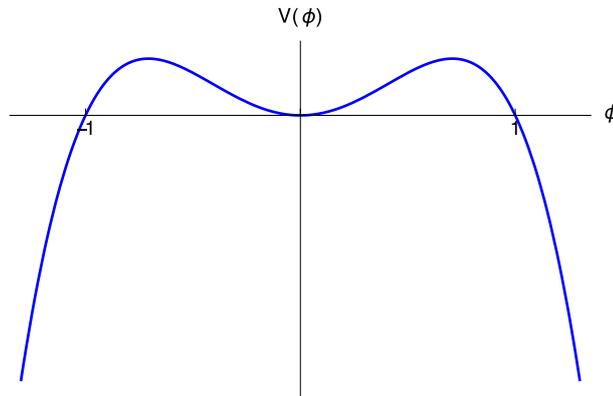


Figura 2.3: Potencial  $\phi^4$  invertido

Utilizando os mesmos procedimentos que na seção anterior, obtemos a equação de movimento referente a esse novo potencial, que é dada por

$$\phi'' = \phi - 2\phi^3. \quad (2.34)$$

Da mesma forma, podemos obter as equações de primeira ordem, que são

$$\phi' = \pm\phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

A partir daí podemos encontrar as soluções não-triviais desse sistema, que têm a forma

$$\phi(x) = \pm\text{sech}(x), \quad (2.36)$$

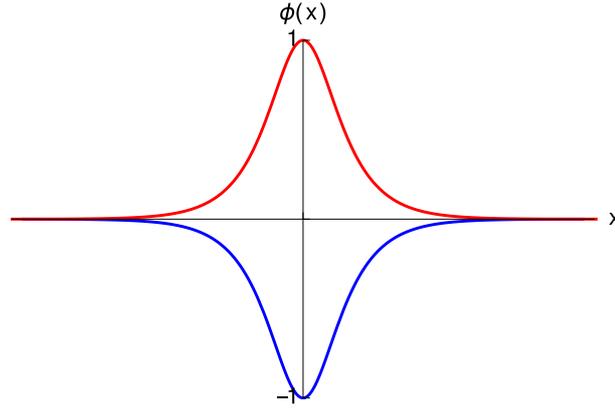


Figura 2.4: Solução tipo *lump* (solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul) esboçadas na figura 2.4.

Como é possível perceber através do esboço da solução, as soluções do tipo *lump* se iniciam em algum valor do campo em  $x \rightarrow -\infty$ , e suavemente crescem (decrecem) e decrecem (crescem) até atingir o mesmo valor de campo em  $x \rightarrow \infty$ . Esse comportamento caracteriza uma solução não-topológica e, de fato, a energia BPS (carga topológica) dessa configuração é nula, pois

$$E_{BPS} = |W(\phi(x))|_{-\infty}^{+\infty} = \left| \frac{1}{3}(1 - \text{sech}(x)^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (2.37)$$

Daí podemos ver que defeitos do tipo *lump* estão relacionados com órbitas que conectam o mesmo ponto de mínimo. Além disso, o fato de sua energia BPS ser zero é também um indicativo de instabilidade dessas soluções.

Como já foi dito, o método BPS não é eficiente no cálculo da energia para potenciais que não são positivo definidos, como é o caso desse (2.32). Por isso, para sabermos de fato a energia dessa configuração é necessário integrar a densidade de energia, ou seja, utilizarmos (2.12), que nos dá

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - \phi^2)\phi^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{sech}(x)^2 \tanh(x)^2 = \frac{2}{3}. \quad (2.38)$$

Na figura 2.5, temos esboçadas as densidades de energia das soluções tipo *kink* e *lump*. Podemos compará-las e notar que a energia do *kink* é concentrada em torno do seu centro, enquanto que o mesmo não ocorre para *lumps*.

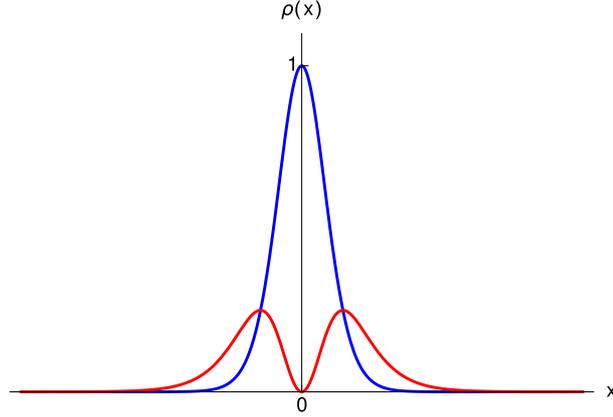


Figura 2.5: Densidades de energia (para *kink* - linha azul; para *lump* - linha vermelha)

## 2.4 Método da Deformação

O método da deformação é um procedimento introduzido por Bazeia, Losano e Malbouisson (2002) [32] que permite a construção de muitas outras novas teorias analíticas, com solução tipo defeito, a partir de uma teoria original bem conhecida. O método conecta dois modelos de um campo através de uma função  $f$ , chamada função de deformação.

Para mostrar como o método funciona, vamos considerar os modelos de um campo descritos pelas densidades de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.39)$$

e

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi), \quad (2.40)$$

ambas em (1, 1) dimensões, sendo  $\mathcal{L}$  a densidade lagrangiana referente ao modelo já conhecido e  $\mathcal{L}_d$  referente ao novo modelo, que será gerado a partir da função de deformação. Além disso,  $V(\phi)$  e  $U(\chi)$  são os respectivos potenciais dos modelos acima.

Associada a cada modelo temos uma equação de movimento, que para o caso estático é

$$\phi'' = V_\phi \quad \text{e} \quad \chi'' = U_\chi, \quad (2.41)$$

respectivamente, onde  $U_\chi$  é a derivada parcial de  $U$  com relação ao campo  $\chi$ .

Podemos definir também cada potencial como função do respectivo superpotencial, ou seja

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2} \quad \text{e} \quad U(\chi) = \frac{\tilde{W}_\chi^2}{2}. \quad (2.42)$$

Finalmente, cada modelo possui equações de primeira ordem associadas, dadas por

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi) \quad \text{e} \quad U(\chi) = \pm \tilde{W}_\chi(\chi). \quad (2.43)$$

Para que o método seja eficaz é necessário que haja uma função de deformação  $f$ , tal que

$$f = f(\chi) = \phi \quad (2.44)$$

e admite uma inversa

$$\chi = f^{-1}(\phi). \quad (2.45)$$

Observe que  $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$ . Então, utilizando (2.44), teremos que

$$\phi' = f_\chi \chi', \quad (2.46)$$

com  $f_\chi = \frac{\partial f}{\partial \chi}$ . Mas, dadas as equações (2.43), podemos escrever

$$\tilde{W}_\chi = \frac{W_\phi(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi}. \quad (2.47)$$

Assim, utilizando as relações para o potencial descritas em (2.42), temos finalmente uma relação para  $U(\chi)$ , na forma

$$U(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow f(\chi))}{f_\chi^2}, \quad (2.48)$$

que especifica a nova teoria, criada a partir da função deformadora, que tem como solução analítica

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (2.49)$$

Ou seja, tendo um modelo bem conhecido e uma função deformadora, é possível criar um novo modelo, diferente do primeiro, que já carrega consigo pelo menos uma solução analítica conhecida.

No capítulo 3, realizaremos uma aplicação desse método, onde ficará mais claro como ele funciona.

## 2.5 Estabilidade Linear

Dada uma solução estática  $\phi = \phi_s(x)$ , podemos investigar a sua estabilidade linear. Para isso, vamos considerar o campo escalar

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.50)$$

em que  $\eta(x, t)$  é uma pequena perturbação, ou flutuação, ao redor da solução estática  $\phi_s(x)$ .

Escrevendo a equação de movimento da densidade de lagrangiana que descreve o campo  $\phi(x, t)$  obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0, \quad (2.51)$$

de forma que substituindo (2.50) em (2.51) chegamos a

$$\ddot{\eta} - \phi_s'' - \eta'' + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.52)$$

É preciso ressaltar que estamos considerando perturbações muito pequenas, de forma que apenas as contribuições lineares em  $\eta$  serão relevantes. Sabendo isto, a equação de movimento se torna

$$\ddot{\eta} - \phi_s'' - \eta'' + V_{\phi_s} + \eta V_{\phi_s \phi_s} = 0. \quad (2.53)$$

No entanto, conforme visto em (2.11), podemos reconhecer na expressão acima dois termos correspondentes a uma equação de movimento para configurações estáticas, que, portanto, irão a zero. Assim, encontramos finalmente

$$\ddot{\eta} - \eta'' + \eta V_{\phi_s \phi_s} = 0. \quad (2.54)$$

Desse resultado, vemos que as características da solução  $\eta$  irão depender da forma do potencial e da solução estática  $\phi_s$ . Para resolver essa equação de segunda ordem, podemos recorrer ao método de separação de variáveis. Como a solução estática só depende de  $x$ , podemos considerar

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \cos(\omega_n t). \quad (2.55)$$

Substituindo a equação (2.55) em (2.54), notamos que esta última pode ser reescrita como uma equação do tipo

$$\mathcal{H} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad (2.56)$$

sendo  $\mathcal{H}$  dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi_s \phi_s}. \quad (2.57)$$

Além disso, podemos utilizar a definição do potencial  $V$  em termos do superpotencial

$$V(\phi_s) = \frac{W_{\phi_s}^2}{2}, \quad (2.58)$$

para reescrever  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi_s \phi_s}^2 + W_{\phi_s} W_{\phi_s \phi_s \phi_s}. \quad (2.59)$$

Podemos ainda redefinir  $\mathcal{H}$  em termos das quantidades  $a$  e  $a^\dagger$

$$\mathcal{H} = a^\dagger a, \quad (2.60)$$

onde elas são dados por

$$a = -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \quad (2.61)$$

$$a^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s}. \quad (2.62)$$

Assim, reescrevemos (2.56) como

$$a^\dagger a \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.63)$$

Observe que essa é uma típica equação de autovalores e que, para manter nossa suposição de perturbações pequenas, não devemos admitir a existência de autovalores negativos. Caso contrário, o cosseno em (2.55) portaria um argumento imaginário, implicando não mais em soluções estáveis.

Considerando a inexistência de autovalores negativos, podemos procurar por uma solução tipo modo-zero chamada  $\eta_0$ . Para isso, vamos assumir que essa solução  $\eta_0(x)$  corresponde ao estado em que  $\omega_0 = 0$ , assim

$$a \eta_0 = \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \right) \eta_0 = 0, \quad (2.64)$$

ou seja,

$$\frac{d\eta_0}{dx} = W_{\phi_s \phi_s} \eta_0. \quad (2.65)$$

Integrando a equação acima em ambos os lados obtemos finalmente

$$\eta_0(x) = A e^{\pm \int dx W_{\phi_s \phi_s}}, \quad (2.66)$$

sendo  $A$  uma constante de normalização.

Observe que  $W_{\phi_s \phi_s}$  pode ser reescrito na forma

$$W_{\phi_s \phi_s} = \frac{d}{dx} [\log(W_{\phi_s})], \quad (2.67)$$

assim, substituindo a informação acima em (2.66), obtemos

$$\eta_0(x) = A W_{\phi_s}. \quad (2.68)$$

A partir da análise do modo-zero de oscilação, é possível constatar que as soluções instáveis serão aquelas em que o modo-zero ( $\omega_0 = 0$ ) apresenta nó, cruza o zero em  $x = 0$ , não representando, de fato, um estado fundamental. Além disso, essas soluções instáveis corresponderão a autovalores  $\omega_n^2 < 0$ .

## 2.6 Teoria para Dois Campos Escalares Reais

Vamos agora generalizar o formalismo revisado anteriormente para modelos que envolvem dois campos. Para isso, tomemos dois campos escalares reais em  $(1, 1)$  dimensões,  $\phi = \phi(x, t)$  e  $\chi = \chi(x, t)$ . Esses modelos podem ser descritos a partir da seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.69)$$

onde  $V(\phi, \chi)$  é o potencial que especificará o modelo de dois campos a ser estudado.

As equações de movimento dessa configuração são dadas por

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\chi} - \chi'' + V_\chi = 0, \quad (2.70)$$

que no regime estático,  $\phi = \phi(x)$  e  $\chi = \chi(x)$ , são

$$\phi'' = V_\phi \quad \text{e} \quad \chi'' = V_\chi. \quad (2.71)$$

Por meio de uma transformada de Legendre podemos escrever a densidade de energia relacionada, que para o caso estático nos dá

$$\rho = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi), \quad (2.72)$$

portanto, podemos calcular a energia total, na forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right]. \quad (2.73)$$

Assim como aplicamos o método BPS para modelos de um campo, podemos fazê-lo para o caso atual. Para isso, vamos definir

$$V(\phi, \chi) \equiv \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (2.74)$$

sendo  $W = W(\phi, \chi)$  o superpotencial. Dessa definição podemos reescrever as equações de movimento (2.71) como sendo

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi} \quad \text{e} \quad \chi'' = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}. \quad (2.75)$$

Além disso, (2.73) se torna

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right] \quad (2.76)$$

e então podemos completar os quadrados do integrando, que nos dá

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2\phi'W_\phi \pm 2\chi'W_\chi]. \quad (2.77)$$

Observe que para obtermos a energia mínima não-trivial do sistema é necessário que

$$\phi' = \pm W_\phi \quad \text{e} \quad \chi' = \pm W_\chi, \quad (2.78)$$

que são agora nossas relações para as equações de primeira ordem. Com isso, podemos finalmente escrever a energia BPS para modelos de dois campos escalares reais, que é dada por

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\phi'W_\phi + \chi'W_\chi) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{d\chi}, \quad (2.79)$$

ou seja,

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (2.80)$$

Desde que  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$ , que é uma condição necessária para que  $W_{\phi\phi}$  e  $W_{\chi\chi}$  sejam bem definidas, podemos verificar que as equações de primeira ordem (2.78) satisfazem as equações de movimento (2.75).

Podemos ainda analisar os mínimos globais do modelo através do estudo das equações de primeira ordem. Isso se dá ao fazermos  $W_\phi = 0$  e  $W_\chi = 0$ . O conjunto de mínimos globais pode ser caracterizado por  $v_i = (\phi_i, \chi_i)$  com  $i = 1, 2, \dots$ . A partir disso, podemos definir um setor topológico, que é caracterizado por cada par de mínimo  $v_i$  e  $v_j$ . Esse setor é dito BPS quando a energia  $E_{BPS}^{ij} = |W_i - W_j|$ , com  $W_i = W(\phi_i, \chi_i)$ , é não-nula. Caso contrário, esse setor é dito não-BPS.

Da mesma forma que para modelos de um único campo, modelos de dois campos também possuem associados a eles uma corrente topológica, que pode ser definida como

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi, \chi), \quad (2.81)$$

que também é uma quantidade conservada, a partir da qual podemos definir uma carga topológica conservada, dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \Delta W = E_{BPS}. \quad (2.82)$$

É interessante notar também que modelos de dois campos são, em geral, muito mais difíceis de resolver que os de um. Isso se dá porque as equações de primeira ordem são acopladas. Considerando as equações (2.78), é possível determinar a equação da órbita, que relaciona os campos  $\phi$  e  $\chi$ , que é dada por

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (2.83)$$

daí fica claro que são necessárias técnicas especiais para desacoplar essas equações.

Sendo assim, encontramos que dois métodos são bastante utilizados na literatura e são eles: o método das órbitas tentativas [37] e o método do fator integrante [38]. Mais à frente no capítulo 3, trabalharemos com um modelo de dois campos e como podemos conferir em [11], o método do fator integrante foi utilizado pelos autores a fim de encontrarem soluções mais gerais para o mesmo modelo que estudaremos.

## 2.7 Método de Extensão

O procedimento, proposto por Bazeia, Losano e Santos (2013) [12], propicia a construção de modelos de dois campos a partir de modelos de um campo. Em linhas gerais, para efetivação do método, é necessário um dado modelo de um campo e uma função deformadora. Esta função gerará outro modelo de um campo, que é obtido do modelo inicial. Tendo os dois modelos de um campo, eles são acoplados de uma forma não-trivial, gerando assim um modelo de dois campos efetivos que já carrega consigo algumas soluções topológicas explícitas.

Para ponto de partida, vamos considerar um modelo inicial, bem conhecido, como descrito por (2.39) e uma função deformadora, tal como (2.44). A partir da ação de  $f$  no modelo inicial teremos um segundo modelo de um campo, dado por (2.40), de forma que cada modelo possui suas respectivas equações de primeira ordem, como dadas por (2.43). Apesar disso, relembremos que, se

$$\phi' = f_\chi \chi' \quad \text{e} \quad W_\phi(\phi \rightarrow \chi) = f_\chi W_\chi(\chi), \quad (2.84)$$

então podemos escrever

$$f_\chi = \frac{\phi'(\chi)}{\chi'(\chi)} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\chi)}{W_\chi(\chi)}. \quad (2.85)$$

Como é possível notar, a equação acima tem uma estrutura semelhante a apresentada em (2.83), que é a equação da órbita para um modelo de dois campos. Percebendo essa semelhança, encontramos também a inspiração dos autores de [12] para introduzir a ideia chave do método, que depende do uso de uma função deformadora para reescrever a equação acima como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (2.86)$$

resultando finalmente em uma relação de órbita para o modelo de dois campos, que é a proposta do método.

O primeiro passo para efetivar a ideia é reconhecer que a equação de primeira ordem  $\phi' = W_\phi(\phi)$  pode ser reescrita de três formas equivalentes

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad (2.87a)$$

$$\phi' = W_\phi(\chi), \quad (2.87b)$$

$$\text{e } \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.87c)$$

onde, na segunda expressão, foi mudado  $\phi \rightarrow f(\chi)$  em todos os lugares e na terceira expressão utilizamos  $\phi \rightarrow f(\chi)$  de forma parcial. No último caso, esse procedimento deve ser feito de uma forma particular tal que  $W_\phi$  seja uma função específica dos dois campos, acoplando ambos. Digamos que em  $W_\phi(\phi)$  contém o termo  $\phi^3$ , então podemos escrever  $\phi^3 = \phi \times \phi^2$  e então efetuamos a mudança  $\phi \times f^2(\chi)$  ou  $f(\chi) \times \phi^2$ , levando a dois modelos distintos.

O mesmo pode ser feito para  $\chi' = W_\chi(\chi)$ , nos dando

$$\chi' = W_\chi(\chi), \quad (2.88a)$$

$$\chi' = W_\chi(\phi), \quad (2.88b)$$

$$\text{e } \chi' = W_\chi(\phi, \chi). \quad (2.88c)$$

O segundo passo é utilizar um mecanismo construído para controlar o método. Para isso, os autores introduziram três conjuntos de três parâmetros reais,  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  e  $c_1, c_2, c_3$ , vinculados de forma tal que

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad (2.89a)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad (2.89b)$$

$$\text{e } c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad (2.89c)$$

Utilizando esses parâmetros, podemos efetuar as mudanças:  $W_\phi \rightarrow a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi)$  e  $W_\chi \rightarrow b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi)$ , de forma a escrevermos

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{a_1W_\phi(\chi) + a_2W_\phi(\phi, \chi) + a_3W_\phi(\phi) + c_1g(\chi) + c_2g(\phi, \chi) + c_3g(\phi)}{b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi)}, \quad (2.90)$$

onde  $g(\chi) = g(\phi, \chi) = g(\phi)$  é, em princípio, uma função arbitrária construída utilizando os mesmos procedimentos feitos para  $W_\phi$  e  $W_\chi$ . É importante ressaltar que o termo  $c_1g(\chi) + c_2g(\phi, \chi) + c_3g(\phi)$  também poderia ter sido adicionado ao denominador, ao contrário do que fizemos em (2.90). Isso apenas mudaria o papel entre os dois campos  $\phi$  e  $\chi$ .

A forma específica de  $g$  pode ser obtida ao tirarmos proveito de uma condição que o superpotencial para um modelo de dois campos  $W(\phi, \chi)$  obedece, que é

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (2.91)$$

Da expressão (2.90), vemos que

$$W_\chi \rightarrow b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi) \quad (2.92)$$

e

$$W_\phi \rightarrow a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi). \quad (2.93)$$

Então utilizando as equações acima e impondo (2.91), temos finalmente o vínculo

$$b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi), \quad (2.94)$$

que é usado para calcular a função  $g$ . Feito isso, podemos finalmente determinar a forma final de  $W(\phi, \chi)$ , que define um modelo de dois campos, e que, por construção, já apresenta um par de soluções.

Como será visto no próximo capítulo, faremos uso das técnicas e procedimentos aqui citadas, de forma a solidificar todos os conceitos vistos.

## Capítulo 3

# *Twistons* no Polietileno Cristalino e o Método de Extensão

Neste capítulo, apresentaremos uma nova maneira de descrever *twistons* topológicos no polietileno cristalino. Iniciaremos abordando um modelo que vem sendo estudado ao longo dos anos e tem apresentado bons resultados. No entanto, veremos que ainda não há uma forma explícita para um potencial que descreva bem a teoria e ao mesmo tempo não apresente um número infinito de estados degenerados. Nesse sentido, nosso objetivo aqui será construir explicitamente, utilizando o método de extensão, um novo potencial que apresente o mesmo conjunto de soluções analíticas já encontradas, mas que não tenha problemas com linhas de mínimos.

### 3.1 Resultados Anteriores

A existência de *twistons* em cristais de polietileno foi primeiramente postulada por Mansfield e Boyd (1978) [6], como sendo torções suaves de  $180^\circ$ . Essas torções se prolongam em vários grupos de  $\text{CH}_2$  no plano ortogonal à direção da cadeia, causando também uma contração do comprimento da unidade de  $\text{CH}_2$ . Essa configuração pode ser ilustrada na figura 3.1.

A fim de descrever o sistema em questão, vamos admitir que estamos lidando com um grupo molecular rígido, que pode ser descrito utilizando coordenadas cilíndricas. De forma que

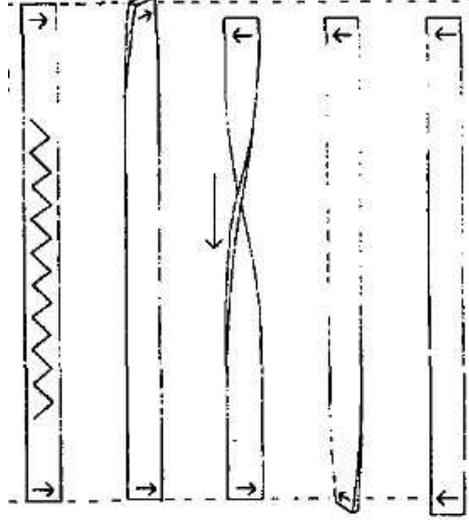


Figura 3.1: Ilustração dos movimentos torcional e longitudinal ao longo de uma cadeia de  $\text{CH}_2$ .  
Figura adaptada da referência [6].

a energia cinética da cadeia é tal que

$$T = \frac{1}{2} m r_0^2 \sum_n \left[ \dot{\phi}_n^2 + \frac{s^2}{r_0^2} \dot{\chi}_n^2 \right], \quad (3.1)$$

onde  $m$  é a massa associada ao grupo molecular  $\text{CH}_2$ ,  $r_0$  é a posição de equilíbrio da coordenada radial,  $s$  é a distância longitudinal entre os grupos moleculares adjacentes, conforme descrito em [9, 10, 11]. Além disso temos que  $\phi_n$  e  $\chi_n$  correspondem aos graus de liberdade torcional e longitudinal, respectivamente. Nessa abordagem, estamos desprezando o grau de liberdade radial, que é uma boa aproximação para descrever *twistons* no polietileno cristalino [9].

Sendo assim, a lagrangiana para a cadeia pode ser escrita como

$$L = T - U_{intra}(\phi_n, \chi_n) - U_{inter}(\phi_n, \chi_n), \quad (3.2)$$

sendo  $U_{intra}$  e  $U_{inter}$  os potenciais que descrevem as interações intramoleculares e intermoleculares, respectivamente.

O potencial intramolecular pode ser descrito por

$$U_{intra} = \frac{1}{2} \sum_n k_t (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_n k_l (\chi_{n+1} - \chi_n)^2, \quad (3.3)$$

em que  $k_t$  e  $k_l$  são constantes tipo mola relacionadas com os graus de liberdade torcional e longitudinal, respectivamente.

Desde que as coordenadas estejam variando lentamente, podemos tomar o limite contínuo. Nesse limite, podemos escrever

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{dx}{s}; \quad \phi_n \rightarrow \phi(x, t); \quad \phi_{n+1} \rightarrow \phi(x + s, t) \rightarrow \phi(x, t) + s\phi' \quad (3.4)$$

e

$$\chi_n \rightarrow \chi(x, t); \quad \chi_{n+1} \rightarrow \chi(x + s, t) \rightarrow \chi(x, t) + s\chi'. \quad (3.5)$$

Dessa forma, temos que a densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{m}{s} r_0^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} k_t s \phi'^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{s} s^2 \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} k_l s \chi'^2 - U_{inter}(\phi, \chi). \quad (3.6)$$

Aqui as coordenadas  $\phi_n$  e  $\chi_n$  se comportam como campos reais  $\phi(x, t)$  e  $\chi(x, t)$ . Esse modelo geral carrega um potencial que é usado para especificar o modelo particular de interesse. Observe que há uma semelhança direta entre a equação acima com a densidade de lagrangiana relativística para dois campos escalares interagindo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi). \quad (3.7)$$

É importante lembrar que estamos considerando o sistema de unidades naturais, onde  $c = 1$ , e a métrica de Minkowski com a assinatura  $\text{diag}(+, -)$ .

Nessa perspectiva, em [9, 10] os autores abordaram a dinâmica dos *twistons* através de um modelo de dois campos escalares reais, considerando campos estáticos. Sendo assim, a partir do superpotencial dado por

$$W(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \lambda \phi^2 \left( \frac{1}{2} \phi^2 - \pi^2 \right) + \frac{1}{2} \mu \phi^2 \chi^2, \quad (3.8)$$

podemos escrever o potencial que descreve as interações intermoleculares [9] que é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} [\lambda \phi (\phi^2 - \pi^2) + \mu \phi \chi^2]^2 + \frac{1}{2} (\mu \phi^2 \chi)^2. \quad (3.9)$$

Sua forma pode ser vista na figura 3.2. Observe que há uma linha de zeros para  $\phi = 0$  e também outros dois vácuos, que ocorrem quando  $\phi = \pm\pi$  e  $\chi = 0$ . Veja que a linha de zeros apresenta energia degenerada para qualquer valor de  $\chi_v$ , isso significa que a mesma energia utilizada para fazer um deslocamento unitário (da ordem da distância entre os grupos moleculares adjacentes) é também a energia necessária para realizar deslocamentos maiores que o comprimento da cadeia, por exemplo, podendo assim romper a sua estrutura.

Utilizando (2.78) encontramos também que as equações de primeira ordem são dadas por

$$\phi' = \lambda \phi^3 - \pi^2 \lambda \phi + \mu \chi^2 \phi \quad \text{e} \quad \chi' = \mu \chi \phi^2, \quad (3.10)$$

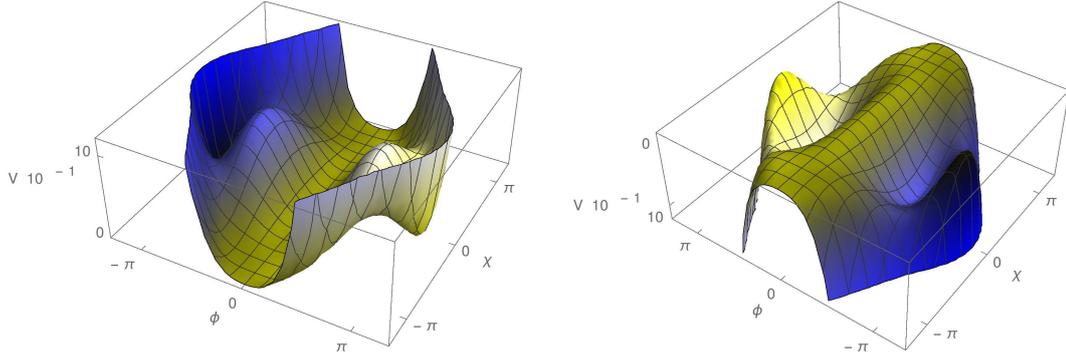


Figura 3.2: Potencial  $V$  para  $\lambda = 1.1$  e  $\mu = 1$ .

aqui o ' representa a derivada parcial com relação à coordenada  $x$ . Além disso, podemos obter

$$\phi = \pi \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \tanh(\pi^2 \mu x))} \quad \text{e} \quad \chi = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1} \sqrt{\frac{1}{2} (\tanh(\pi^2 \mu x) + 1)}, \quad (3.11)$$

*twistons* analíticos, soluções das respectivas equações de primeira ordem. Uma vez que  $\phi$  é o campo responsável pelo movimento torcional, vemos que sua solução possui amplitude  $\pi$ , que é o ângulo que a cadeia gira para formar o *twiston*. Já o campo  $\chi$ , responsável pelo movimento longitudinal, tem sua amplitude dada por  $\pi[(\lambda/\mu) - 1]^{\frac{1}{2}}$ . Além disso, as soluções são válidas apenas se  $\lambda/\mu > 1$ .

Sendo o superpotencial  $W$  conhecido, a partir dele podemos calcular a energia total usando o método BPS, conforme visto em (2.80), assim

$$E_{BPS} = \frac{1}{4} \lambda \pi^4. \quad (3.12)$$

Para quantificar o valor acima, os autores em [10] utilizaram que  $|\lambda| \pi^2 = 7.30$  kcal/mol. Essa quantidade foi baseada em dados experimentais para a contribuição de energia da região de *twistons* localizados [6]. Utilizando esse dado, obtemos  $E = 17.99$  kcal/mol como sendo a energia para os *twistons* topológicos. Além disso, esse é um resultado que está de acordo com o obtido utilizando outros métodos para descrever *twistons*, veja [6, 7, 39].

Mais recentemente esse mesmo modelo foi revisitado por Dutra, Santos e Winter (2010) [11] apresentando um grupo de soluções bem mais geral que o mostrado em [9, 10]. Além disso, os autores apontaram que o potencial proposto por Bazeia e colaboradores (1990; 2000) possuía uma degenerescência infinita, ou seja, infinitas configurações de campo que apresentam a mesma energia, conforme pode ser visto na figura 3.2. Sendo assim, os autores realizaram uma perturbação no potencial e conseguiram eliminar o efeito citado. No entanto, os resultados obtidos utilizando essa abordagem foram numéricos.

Visto que o resultado encontrado em [11] resolve o problema, mas não apresenta uma forma explícita para o potencial, nosso objetivo será construir explicitamente um novo modelo de dois campos acoplados, que abranja as soluções previamente encontradas e isso é o que veremos na seção a seguir.

## 3.2 Novos Modelos para *Twistons*

Os resultados que apresentaremos a seguir podem ser vistos também em [40], onde reunimos essas discussões em um trabalho que já se encontra em submissão.

A fim de construir novos modelos de dois campos, vamos fazer uso do método apresentado na seção 2.7 do capítulo anterior. Para isso, precisamos de um modelo de um campo e uma função deformadora.

Consideremos então o modelo de um campo ( $\phi$ ) cuja equação de primeira ordem é dada por

$$\phi' = W_\phi = \mu\phi(\phi^2 - \pi^2), \quad (3.13)$$

e tem como solução analítica

$$\phi(x) = \pi\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \tanh(\pi^2\mu x))}. \quad (3.14)$$

Além disso, vamos considerar também a seguinte função de deformação

$$f(\chi) = \phi = \sqrt{\pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2}} \quad \text{com inversa} \quad f^{-1}(\phi) = \chi = \gamma\sqrt{\pi^2 - \phi^2}, \quad (3.15)$$

sendo

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1}. \quad (3.16)$$

É útil lembrar que, como visto na seção 2.4, onde abordamos o método da deformação, uma vez que temos um modelo bem conhecido e uma função de deformação, podemos gerar um novo modelo. Assim utilizando a equação (2.47) chegamos em

$$\chi' = W_\chi = \mu\chi\left(\pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2}\right), \quad (3.17)$$

que é a equação de primeira ordem para o novo modelo de um campo  $\chi$ .

Além disso, uma vez que conhecemos a solução  $\phi(x)$  (3.14) e a função de deformação (3.15), podemos encontrar a solução para o campo  $\chi$  diretamente de (3.17), ou seja,

$$\chi(x) = \pi\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(\pi^2\mu x))}. \quad (3.18)$$

Agora que temos os dois modelos de um campo e a função de deformação, vamos finalmente aplicar o método de extensão, conforme a prescrição abordada na seção 2.7. Primeiro vamos escrever as respectivas equações de primeira ordem na forma

$$W_\phi(\phi) = \mu\phi(\phi^2 - \pi^2), \quad (3.19a)$$

$$W_\phi(\chi) = \mp \sqrt{\pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2}} \left( \frac{\mu\chi^2}{\gamma^2} \right), \quad (3.19b)$$

$$W_\phi(\phi, \chi) = \lambda\phi(\phi^2 - \pi^2) + \mu\chi^2\phi \quad (3.19c)$$

e

$$W_\chi(\chi) = \mu\chi \left( \pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2} \right), \quad (3.20a)$$

$$W_\chi(\phi) = \pm \mu\phi^2\gamma\sqrt{\pi^2 - \phi^2}, \quad (3.20b)$$

$$W_\chi(\phi, \chi) = \mu\chi\phi^2. \quad (3.20c)$$

Como não queremos que o potencial a ser construído contenha raízes, vamos eliminar os termos que as possuam. Isso equivale a considerar  $a_1 = b_3 = 0$  na equação (2.89). Além disso, vamos escolher  $c_1 = 0$ , assim conseguiremos determinar a função  $g$ . Desse modo obtemos os vínculos

$$a_2 = 1 - a_3 \quad (3.21a)$$

$$b_1 = 1 - b_2 \quad (3.21b)$$

$$c_2 = -c_3. \quad (3.21c)$$

Usando a propriedade  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$ , conforme exposto na equação (2.94), obtemos

$$c_2g_\chi(\phi, \chi) = 2\mu(b_2 - a_2)\chi\phi \quad (3.22)$$

e podemos, por integração direta, determinar  $g(\phi, \chi)$ , que tem a forma

$$c_2g(\phi, \chi) = \mu(b_2 - a_2)\chi^2\phi. \quad (3.23)$$

Utilizando a deformação (3.15) e substituindo-a na equação acima, podemos finalmente determinar  $g(\phi)$ , que é dada por

$$c_2g(\phi) = \mu\gamma^2(b_2 - a_2)(\pi^2 - \phi^2)\phi. \quad (3.24)$$

Substituindo as equações acima em (2.93) e (2.92) e utilizando as equações de vínculo (3.21), obtemos que

$$W_\phi = \phi' = (b_2\gamma^2 + 1)\mu(\phi^2 - \pi^2)\phi + b_2\mu\chi^2\phi \quad (3.25)$$

e

$$W_\chi = \chi' = (1 - b_2)\mu\chi \left( \pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2} \right) + b_2\mu\chi\phi^2. \quad (3.26)$$

Finalmente, fazendo integrações diretas das equações acima com respeito a  $\phi$  e  $\chi$ , respectivamente, obtemos o superpotencial efetivo para o novo modelo de dois campos

$$W(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - b_2)\mu \left( \pi^2 - \frac{\chi^2}{2\gamma^2} \right) \chi^2 - \frac{1}{2}(b_2\gamma^2 + 1)\mu\phi^2 \left( \frac{\phi^2}{2} - \pi^2 \right) + \frac{1}{2}b_2\mu\chi^2\phi^2. \quad (3.27)$$

Utilizando (2.74), podemos finalmente escrever o potencial a partir das equações de primeira ordem. Assim

$$V(\phi, \chi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2[(b_2\gamma^2 + 1)(\phi^2 - \pi^2)\phi + b_2\chi^2]^2 + \frac{\mu^2}{2} \left[ (1 - b_2)\chi \left( \pi^2 - \frac{\chi^2}{\gamma^2} \right) + b_2\chi\phi^2 \right]^2 \quad (3.28)$$

é o novo potencial encontrado, cujas suas equações de movimento são satisfeitas por (3.14) e (3.18).

A fim de encontrarmos modelos consistentes com o movimento longitudinal da cadeia vamos analisar qual a relação entre  $\mu$  e  $\lambda$ . De (3.18) vemos que a amplitude do movimento longitudinal é dada por

$$\pi\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1}. \quad (3.29)$$

No entanto, na cadeia de polietileno, temos que ajustar a amplitude da solução (3.18) à unidade para torná-la compatível com o fato de que, quando a cadeia gira em  $180^\circ$  e se volta para seu registro cristalino, o movimento longitudinal desloca em uma distância  $s$  [9]. Assim, normalizando  $\chi_v = \pm 1$ , encontramos que

$$\mu = \frac{\pi^2}{1 + \pi^2}\lambda \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{1}{\pi}. \quad (3.30)$$

Assim, escolhendo  $\lambda = 7.30/\pi^2$  encontramos que  $\mu \approx 0.67$ , produzindo uma família de potenciais físicos que podem descrever o comportamento dos *twistons* naturalmente.

Na figura 3.3, podemos ver o comportamento do potencial (3.28) para o caso em que  $b_2 = 0$ , observe que o potencial gerado para esse valor específico de  $b_2$  possui 9 vácuos dos quais 4 são conectados por órbitas analíticas. A linha sólida vermelha consiste nas soluções (3.14) e (3.18), enquanto a linha vermelha pontilhada representa o conjunto de soluções negativas, dado por

$$\phi(x) = -\pi\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \tanh(\pi^2\mu x))} \quad \text{e} \quad \chi(x) = -\pi\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(-2\mu x))}. \quad (3.31)$$

Devido a simetria do potencial, a órbita acima também satisfaz suas equações de movimento.

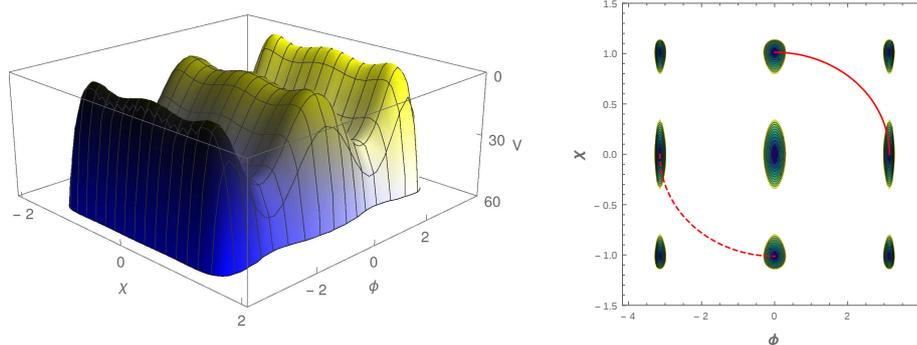


Figura 3.3: Esquerda: potencial  $V$  para  $\lambda = 7.30/\pi^2$ ,  $\mu = 0.67$  e  $b_2 = 0$ . Direita: contorno de  $V$ , onde a curva sólida e a pontilhada representam as órbitas analíticas que conectam os campos  $\phi$  e  $\chi$ .

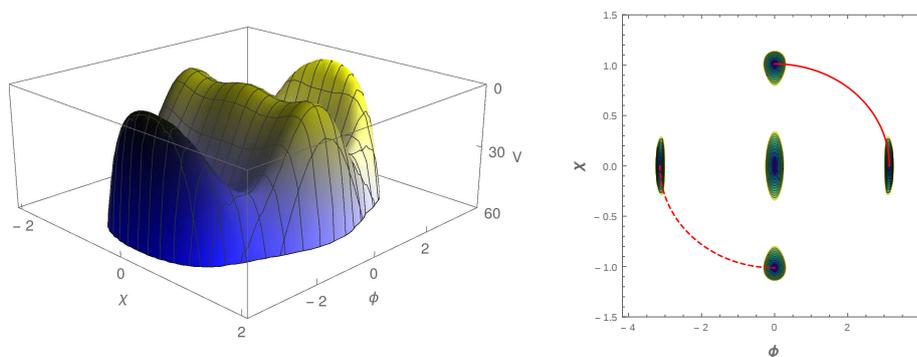


Figura 3.4: Esquerda: potencial  $V$  para  $\lambda = 7.30/\pi^2$ ,  $\mu = 0.67$  e  $b_2 = 2$ . Direita: contorno de  $V$ , onde a curva sólida e a pontilhada representam as órbitas analíticas que conectam os campos  $\phi$  e  $\chi$ .

Na figura 3.4, temos o gráfico do potencial considerando  $b_2 = 2$ . Observe que ao mudarmos o valor desse parâmetro gera-se um novo potencial com um novo conjunto de vácuos, nesse caso 5 vácuos. Além disso, observamos também que 4 deles são conectados pelas órbitas (3.14) - (3.18) e (3.31).

É interessante notar que ao tomarmos o caso  $b_2 = 1$  recuperamos o potencial proposto por Bazeia e colaboradores em [9] e [10], também expressado na equação (3.9).

Utilizando a equação (2.80), podemos calcular a energia BPS do modelo, obtendo assim

$$E_{BPS} = \frac{\lambda}{4}\pi^4 = 17.99, \quad (3.32)$$

que é a mesma energia encontrada em [9] e [10] e consequentemente está de acordo com os

resultados previamente encontrados a partir da utilização de outros métodos.

Finalmente, vemos que da utilização do método de extensão foi possível construir novas famílias de potenciais físicos que descrevem o comportamento dos *twistons*, tendo como bônus soluções analíticas já conhecidas. Além disso, conseguimos produzir potenciais que não apresentam degenerescência infinita.

## Capítulo 4

# Teoria para Configurações Planares de Um Campo e *Skyrmions*

Neste capítulo, apresentaremos a teoria que descreve campos escalares reais em  $(2, 1)$  dimensões. Aqui vamos considerar sistemas com simetria radial, discorrendo sobre os principais aspectos de modelos de um campo, tais como: equações de movimento, soluções, energia, método BPS e análise de estabilidade. Além disso, iremos aplicar os conhecimentos citados no estudo de defeitos chamados *skyrmions*, numa perspectiva como a presente em [21, 28, 29].

### 4.1 Argumento de Derrick e Dimensões Espaciais Maiores que 1

Se levarmos em conta o argumento de Derrick, abordado com detalhes em [3], veremos que modelos de um campo escalar real não suportam defeitos topológicos (com soluções não triviais, independentes do tempo e de energia finita) a menos que estejamos trabalhando em  $(1, 1)$  dimensões. Apesar disso, há maneiras de contornar o teorema, como pode ser visto em [41]. Nessa referência, os autores abordam o modelo de baby-skyrme que se dá pela adição de termos à densidade lagrangiana do modelo  $\sigma$  não-linear (veja [42]) e com isso conseguem descrever fenômenos em  $(2, 1)$  dimensões.

Outra forma de contornar o teorema pode ser encontrada em [33], onde Bazeia e colaboradores (1995) assumem uma forma específica para o potencial, que consiste na dependência explícita da distância, e isso é o que discutiremos abaixo.

Para descreverem modelos em  $(D, 1)$  dimensões, os autores [33] consideraram a seguinte

densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(x^2; \phi) \quad (4.1)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar real,  $x^2 = x_\mu x^\mu$  e o potencial  $U$  é descrito por

$$U(x^2; \phi) = \frac{1}{r^N} P(\phi). \quad (4.2)$$

A métrica aqui usada é  $(+, -, \dots, -)$ , com  $x_\mu = (x_0, x_1, \dots, x_D)$ ,  $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $P(\phi)$  é um polinômio que não contém termos com derivada em  $\phi$  e  $N$  é um parâmetro a ser determinado.

A equação de movimento pode ser escrita como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{r^N} \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0. \quad (4.3)$$

Vamos considerar que soluções do tipo  $\phi = \phi(r)$ , com  $r \in [0, \infty)$ , resolvem a equação de movimento. Podemos também escrever a energia total, que em  $D$  dimensões, utilizando coordenadas hiper-esféricas, pode ser escrita como

$$E^D = \Omega^D \int_0^\infty r^{D-1} dr \rho = \Omega^D \int_0^\infty r^{D-1} dr \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{r^N} P(\phi) \right], \quad (4.4)$$

sendo  $D$  a dimensão espacial e  $\Omega_D$  o fator angular, que depende da respectiva dimensão. Observe que a energia total pode ser dividida em um termo gradiente  $E_g^D$  e um potencial  $E_p^D$ , ou seja

$$E^D = E_g^D + E_p^D, \quad (4.5)$$

com

$$E_g^D = \Omega_D \int_0^\infty r^{D-1} dr \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] \quad \text{e} \quad E_p^D = \Omega_D \int_0^\infty r^{D-1} dr \left[ \frac{1}{r^N} P(\phi) \right]. \quad (4.6)$$

Agora então vamos realizar o procedimento de Derrick, que consiste em reescalonar o campo, através de um relação  $\phi(r) \longrightarrow \phi^\lambda(r) = \phi(\lambda r)$  e após isso satisfazer condições de minimização da energia. Então aplicando a mudança em (4.4) obtemos

$$E_\lambda^D = \Omega^D \int_0^\infty \frac{r^{D-1}}{\lambda^D} dr \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{r^N \lambda^{-N}} P(\phi) \right], \quad (4.7)$$

ou seja,

$$E_\lambda^D = \lambda^{2-D} E_g^D + \lambda^{N-D} E_p^D. \quad (4.8)$$

Derivando em relação à  $\lambda$ , obtemos

$$\frac{dE_\lambda^D}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0 \quad \implies \quad (2-D)E_g^D + (N-D)E_p^D = 0. \quad (4.9)$$

Efetuando a segunda derivada com respeito a  $\lambda$ , temos que

$$\frac{d^2 E_\lambda^D}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=1} \geq 0 \implies (2-D)(1-D)E_g^D + (N-D)(N-D-1)E_p^D \geq 0. \quad (4.10)$$

Essa condição de que a derivada segunda da energia deve ser positiva é usada para garantir configurações de campo estáveis.

Observe que as condições citadas impõem restrições em  $N$  e  $D$ . Considerando  $D = 1$  e  $N = 0$  temos o caso  $E_g^1 = E_p^1$ , em que a energia é compartilhada igualmente entre ambas as partes. Este é um caso padrão, que compreende modelos tais como os apresentados no capítulo 2, de fato nesse caso especial só existem soluções estáveis para  $D = 1$  (veja em [3], seção 1.3).

No entanto, agora que foi proposto um potencial cuja forma é peculiar (4.2), podemos obter muitos outros casos que suportam soluções tipo defeito. A partir das equações (4.9) e (4.10), vemos na tabela 4.1 como serão as restrições para  $N$  e  $D$  e quais suas implicações na relação entre as partes da energia.

$N$	Dimensão $D$	Relação entre $E_g^D$ e $E_p^D$
2	2	Nenhuma relação
$N = 2(D - 1)$	$\geq 3$	$E_g^D = E_p^D$

Tabela 4.1: Restrições para  $N$  e  $D$

Com isso, para o caso particular em que estamos interessados, que é o estudo de potenciais em duas dimensões espaciais ( $D = 2$ ), obtemos que  $N = 2$  e esse é o resultado que será utilizado nas próximas seções.

## 4.2 Generalidades

Tendo em vista os argumentos supracitados podemos reescrever as equações, considerando  $D = 2$ , para que possamos apresentar efetivamente uma teoria que descreva modelos de um campo escalar em  $(2, 1)$  dimensões espaço-temporais.

Os modelos de um campo para configurações planares podem ser descritos pela seguinte densidade de lagrangiana, vide (4.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - U(\phi), \quad (4.11)$$

onde  $\nabla$  é o gradiente no plano  $(r, \theta)$ , uma vez que trabalharemos com coordenadas cilíndricas, e  $U = U(r; \phi)$  tem a forma

$$U(r; \phi) = \frac{1}{r^2} P(\phi). \quad (4.12)$$

Observe que a definição acima vem de (4.2), já considerando  $N = 2$ . Vamos então considerar uma configuração radial e independente do tempo,  $\phi = \phi(r)$ . A sua equação de movimento é

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{dP(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (4.13)$$

obtida utilizando a equação de Euler-Lagrange. Note que é uma equação do tipo  $\nabla^2 \phi = \frac{\partial U}{\partial \phi}$  e portanto tivemos o cuidado de escrever o laplaciano em coordenadas cilíndricas

Podemos ainda, de (4.4) calcular a energia dessa configuração. Assim

$$E = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr \rho(r), \quad (4.14)$$

sendo a integral em  $d\theta$  o fator angular correspondente e  $\rho = -\mathcal{L}$  a densidade de energia. Daí então

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \rho(r) = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} P(\phi) \right] \quad (4.15)$$

é a energia total para o sistema apresentado.

## 4.2.1 Método BPS

Assim como para os casos unidimensionais apresentados anteriormente, modelos com configurações planares também podem admitir soluções BPS. Para encontrá-las, escolhemos uma função suave do campo  $W = W(\phi)$ , que está relacionada com o potencial  $U$  na forma

$$P(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (4.16)$$

com  $W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}$ .

Definida a equação acima, podemos reescrever a energia, completando os quadrados, como prescreve o método BPS [30, 31]. Assim

$$E = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \mp \frac{1}{r} W_\phi \right)^2 \pm \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} W_\phi \right]. \quad (4.17)$$

Do resultado acima podemos ver que a equação que minimiza a energia de forma não-trivial é

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} W_\phi, \quad (4.18)$$

que são as equações de primeira ordem do sistema. Além disso, não é difícil mostrar que as soluções dessas equações também satisfazem a equação de movimento (4.13). Esse mesmo resultado pode ser encontrado em [33], onde é generalizado para  $D$  dimensões espaciais.

Considerando a minimização, a energia, chamada BPS, é dada por

$$E_{BPS} = 2\pi \int_0^\infty dr \frac{d\phi}{dr} W_\phi, \quad (4.19)$$

que finalmente pode ser escrita como

$$E_{BPS} = 2\pi[W(\phi(r \rightarrow \infty)) - W(\phi(r = 0))] = 2\pi|\Delta W|. \quad (4.20)$$

Lembremos que o  $W$  é o mesmo superpotencial sobre o qual falamos anteriormente, que tem relação com a teoria supersimétrica [34].

## 4.2.2 Estabilidade Linear

Anteriormente, investigamos a estabilidade linear de soluções unidimensionais. Aqui veremos que o mesmo pode ser feito para o caso de configurações planares. Assim sendo, poderemos inferir se as soluções estáticas apresentadas são estáveis sob flutuações radiais.

Vamos considerar então, uma solução do tipo

$$\phi(r, t) = \phi_s(r) + \sum_k \eta_k(r) \cos(\omega_k t), \quad (4.21)$$

conforme feito em [33], onde  $\phi_s$  é a solução estática conhecida e o segundo termo  $\eta(r, t)$  é uma pequena flutuação em torno da solução. Substituindo a expressão acima na equação de movimento (4.13) encontramos que

$$-\frac{1}{r} \frac{d\eta_k}{dr} - \frac{d^2\eta_k}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta_k = \omega_k^2 \eta_k. \quad (4.22)$$

Observe que assim como feito para configurações unidimensionais, estamos considerando apenas as contribuições lineares em  $\eta(r)$ . Além disso, a equação acima toma essa forma pois reconhecemos termos que configuram uma equação de movimento para soluções estáticas, que portanto vai a zero. Assim, podemos reescrever a equação acima como

$$\left( -\nabla^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \right) \eta_k(r) = \omega_k^2 \eta_k(r). \quad (4.23)$$

Note que considerando soluções do tipo BPS, utilizando o proposto em (4.16), podemos reescrever a expressão acima como

$$\mathcal{H}\eta_k(r) = \omega_k^2 \eta_k(r), \quad (4.24)$$

sendo  $\mathcal{H} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$ , dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{r^2} \left( -r \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \left( r \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right). \quad (4.25)$$

Como já foi dito, a estabilidade das nossas soluções depende da inexistência de autovalores negativos. Por isso vamos considerar que o estado mais baixo é o modo zero, que ocorre quando  $\omega_0 = 0$ . Considerando isso, obtemos

$$\mathcal{H}\eta_0(r) = 0 \quad \implies \quad r \frac{d\eta_0(r)}{dr} = \pm W_{\phi\phi} \eta_0(r), \quad (4.26)$$

ou seja, temos uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser resolvida separando as variáveis e integrando em ambos os lados, resultando finalmente em

$$\eta_0(r) = A e^{\pm \int dr \frac{1}{r} W_{\phi\phi}}, \quad (4.27)$$

sendo  $A$  uma constante de normalização que pode ser obtida fazendo  $\int r dr \eta_0^{\dagger} \eta_0 = 1$ . Finalmente podemos escrever

$$\eta_0(r) = A W_{\phi}, \quad (4.28)$$

que satisfaz a equação de autovalores para  $\omega_0 = 0$ .

### Estabilidade Linear a partir do Comportamento da Energia Total

Conforme pode ser visto em [21, 28, 29, 36] uma maneira alternativa de analisar a estabilidade das soluções é observando o comportamento da energia total. Para isso, vamos considerar uma solução do tipo

$$\phi(r) = \phi_s(r) + \epsilon \eta(r), \quad (4.29)$$

sendo  $\phi_s(r)$  a solução estática conhecida,  $\epsilon$  uma constante real de valor muito pequeno e  $\eta(r)$  a flutuação em torno da solução estática, que obedece à seguinte condição de contorno

$$\eta(0) = \eta(\infty) = 0. \quad (4.30)$$

Como pode ser visto em [42], a condição acima é dada a fim de garantir que  $\phi(r)$  será bem comportada nos extremos.

Vamos então relembrar, que para configurações estáticas planares, a energia total é escrita como

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} P(\phi) \right], \quad (4.31)$$

de forma que substituindo (4.29) na energia total, temos

$$E_\epsilon = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_s}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{dr} \right)^2 \epsilon^2 + \epsilon \frac{d\phi_s}{dr} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{r^2} P(\phi_s + \epsilon\eta) \right]. \quad (4.32)$$

Observe que  $P(\phi_s + \epsilon\eta)$  pode ser expandido em torno de  $\phi = \phi_s$  na forma

$$P(\phi_s + \epsilon\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{d^n P(\phi)}{d\phi^n} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^n, \quad (4.33)$$

ou seja, abrindo a expansão até segunda ordem temos que

$$P(\phi_s + \epsilon\eta) = P(\phi)_{\phi=\phi_s} + \epsilon \frac{dP(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (4.34)$$

Substituindo a expansão na equação (4.32), podemos agrupar os termos de mesma ordem em  $\epsilon$ , de forma que teremos uma equação do tipo

$$E_\epsilon = E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots, \quad (4.35)$$

sendo  $E_n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$  a contribuição para a energia até a ordem  $n$  em  $\epsilon$ . Verificamos então que  $E_0$  tem a mesma forma de (4.31) com  $\phi = \phi_s$  e  $E_1$  e  $E_2$  são iguais a

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta \right] \quad (4.36)$$

e

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left[ \left( \frac{d\eta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 \right], \quad (4.37)$$

respectivamente. Mas, uma vez que podemos reescrever o primeiro termo de  $E_1$  como

$$r dr \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} \frac{d\eta}{dr} = d \left( r \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta \right) - \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta dr - r \frac{d^2 \phi}{dr^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta dr, \quad (4.38)$$

notamos a existência um termo de superfície que, tendo em vista as condições de contorno consideradas, vai a zero quando integrado. Substituindo os demais termos em  $E_1$ , obtemos

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ -\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} - \frac{d^2 \phi}{dr^2} \Big|_{\phi=\phi_s} + \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \right] \eta. \quad (4.39)$$

Observe que o integrando é composto pela mesma expressão (4.13), que é igual a zero, portanto

$$E_1 = 0. \quad (4.40)$$

Note também que, usando (4.13),  $E_2$  pode ser reescrito na forma

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left( \eta' - \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta \right)^2 + \pi \int_0^\infty d \left( \frac{1}{r} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta^2 \right), \quad (4.41)$$

sendo  $' = \frac{d}{dr}$  e

$$\int_0^\infty d \left( \frac{1}{r} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta^2 \right) = \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d\phi^2} \eta^2 - \left( \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{\eta}{\phi'} \right)^2 + 2 \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta \eta' \right]. \quad (4.42)$$

No entanto, observamos que a integral acima é um termo de superfície e, dadas as condições de contorno (4.30), vai a zero. Portanto

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left( \eta' - \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta \right)^2. \quad (4.43)$$

A condição de mínimo para a energia acima,  $E_2 = 0$ , é dada quando

$$\eta' = \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta, \quad (4.44)$$

assim, resolvendo essa equação diferencial para  $\eta$ , obtemos que

$$\eta(r) = A e^{\int dr \frac{r^{-2}}{\phi'} \frac{dP}{d\phi}}, \quad (4.45)$$

com  $A$  sendo uma constante de normalização. Dessa forma, encontramos o campo perturbativo da solução  $\phi(r)$ , sendo ele o modo-zero  $\eta_0(r)$ . Observe que, de fato, ao reescrevermos  $\frac{dP}{d\phi} = \pm r \frac{d\phi}{dr} W_{\phi\phi}$ , temos a mesma solução obtida em (4.27).

Como pode ser visto em [36, 42, 43, 44], a condição  $E_2 = 0$  representa a invariância translacional do sistema. Veja que se  $\phi(r)$  é uma solução da equação de movimento (4.13), então  $\phi(r + r_0)$  também será. Expandindo o termo  $\phi(r + r_0) = \phi(r) + r_0 \phi'$  e comparando com (4.29), vemos que  $\phi'$  é uma pequena flutuação.

Uma vez que o campo perturbativo foi encontrado, devemos averiguar qual será o primeiro termo de contribuição para energia diferente de zero. É claro que os termos podem variar, a depender do potencial utilizado. Além disso, sabemos que as integrais calculadas podem resultar em valores positivos, negativos ou nulos. O primeiro caso nos diz que a solução é estável sob pequenas flutuações. O segundo caso, traz a informação de que a solução é instável. Já o caso nulo não traz informação alguma, sendo necessário o cálculo do próximo termo da expansão. A verificação da estabilidade de soluções será feita na seção 4.4 para alguns potenciais.

### 4.3 Skyrmions Magnéticos em (2, 1) Dimensões

Nesta seção, descreveremos excitações topológicas em sistemas magnéticos considerando um único campo escalar real, conforme proposto em [21, 28].

Os autores consideraram, assim como na maneira usual, um sistema magnético sobre o qual supõe-se que a magnetização é homogênea ao longo da direção  $\hat{z}$  e tem módulo constante, de forma que o vetor magnetização normalizado é escrito como

$$\vec{M} = M_1\hat{x} + M_2\hat{y} + M_3\hat{z}, \quad (4.46)$$

com a restrição

$$M_1^2(x, y) + M_2^2(x, y) + M_3^2(x, y) = 1, \quad (4.47)$$

reduzindo o problema para dois graus de liberdade. Nesse caso, o vetor de magnetização só depende de coordenadas planares, ou seja,  $\vec{M} = \vec{M}(x, y)$ .

O problema pode ainda ser reduzido para um grau de liberdade se supormos que a magnetização  $\vec{M}$  (dada em coordenadas cilíndricas) é ortogonal à direção radial  $\hat{r}$ , ou seja  $\vec{M} \cdot \hat{r} = 0$ . Dessa forma, o modelo agora apresenta um perfil helicoidal (tipo parede de Bloch), em que  $\vec{M}$  é sempre perpendicular à coordenada  $r$ . O perfil helicoidal investigado nas referências citadas, cujos modelos veremos abaixo, foi inspirado em [45]. Esse tipo de estrutura aparece, por exemplo, em metais como MnSi [46, 47].

Em coordenadas cilíndricas, o vetor magnetização pode ser escrito como

$$\vec{M} = M_1(r, \theta)\hat{z} + M_2(r, \theta)\hat{\theta}, \quad (4.48)$$

obedecendo a

$$M_1^2(r, \theta) + M_2^2(r, \theta) = 1. \quad (4.49)$$

A fim de modelar a situação acima, vamos utilizar a magnetização, conforme descrita em [21], que é

$$\vec{M} = \sin\Theta(r)\hat{z} + \cos\Theta(r)\hat{\theta}, \quad (4.50)$$

onde  $\Theta(r)$  é dado por

$$\Theta(r) = \frac{\pi}{2}\phi(r) + \delta, \quad (4.51)$$

sendo  $\phi$  o campo escalar, que pode variar no plano  $(r, \theta)$  e  $\delta$  é uma constante de fase, que pode ser usada para controlar o valor da magnetização assintoticamente ou no centro da estrutura magnética [29]. Observe que o campo escalar real  $\phi$  é uma quantidade adimensional e pode ser estudado utilizando a teoria para sistemas planares apresentada na seção anterior.

Se tratando de configurações do tipo *skyrmion*, é comum introduzir a quantidade topológica conservada, também chamada número de *skyrmion*. Essa quantidade conservada é derivada

de um vetor densidade de corrente topológica que pode ser escrito como [48]

$$\vec{J}_\alpha = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{abc} \vec{M}_a \partial_\beta \vec{M}_b \partial_\gamma \vec{M}_c, \quad (4.52)$$

sendo  $\epsilon$  o tensor de Levi-Civita. Além disso, os índices gregos variam como  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$ , sendo as componentes do espaço-tempo, e os índices latinos variam na forma  $a, b, c = 1, 2, 3$ , representando as componentes cartesianas do vetor de magnetização.

Assim, a carga conservada é definida pela integral da componente 0 da corrente topológica, ou seja

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \vec{M} \cdot \partial_i \vec{M} \times \partial_j \vec{M} \epsilon^{ij}, \quad (4.53)$$

sendo  $i, j = 1, 2$ ,  $\partial_i$  a derivada com relação a  $x^i$  e sendo  $\epsilon^{ij}$  um tensor completamente antissimétrico, de forma que  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$  [2], [21]. Assim

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{M} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.54)$$

Observe que a equação acima, ao usarmos  $dx dy = r dr d\theta$ , pode ser reescrita na forma

$$Q = \int_0^\infty dr q, \quad (4.55)$$

sendo  $q$  a densidade de número de *skyrmion* [28, 49], escrita como

$$q = \frac{r}{2} \vec{M} \cdot \partial_x \vec{M} \times \partial_y \vec{M}. \quad (4.56)$$

Podemos ainda efetuar uma mudança de coordenadas de  $(x, y)$  para  $(r, \theta)$  e utilizar (4.50) e (4.51), para escrevermos

$$q(r) = -\frac{\pi}{4} \cos \Theta(r) \frac{d\phi(r)}{dr}. \quad (4.57)$$

Assim, integrando a densidade de carga  $q$ , chegamos finalmente a uma expressão para o número de *skyrmion*, que é

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen} \Theta(0) - \frac{1}{2} \text{sen} \Theta(\infty). \quad (4.58)$$

Dessa forma, vemos que o perfil topológico da solução  $\Theta(r)$  é relacionado com o seu valor na origem e o comportamento assintótico para valores grandes de  $r$ .

Ainda sobre o número de *skyrmion*, os modelos que vamos estudar se referem a estruturas topológicas em que  $Q = \pm 1$ , chamadas *skyrmion* e *anti-skyrmion* e  $Q = \pm 1/2$ , chamadas *half-skyrmion* ou vórtice. Conforme pode ser visto em [50] embora a carga topológica para *skyrmions* e vórtices seja diferente, suas dinâmicas são qualitativamente similares e podem ser descritas usando o mesmo formalismo e por isso podemos tratá-los em pé de igualdade.

Uma vez que estamos trabalhando com quantidades adimensionais, é necessário que se introduza um quantidade para medir distância. Como veremos na próxima seção, os modelos apresentados suportam configurações radiais estáveis com energia localizada ao redor de uma dada posição  $r$ . Além disso, a energia dependerá de um parâmetro  $s$  (que será introduzido na especificação dos modelos). Como será estudado na próxima seção, vamos verificar que a região de transição da estrutura topológica sofrerá variação conforme variamos o parâmetro  $s$ .

Dessa forma, iremos associar  $s$  ao tamanho característico da estrutura investigada [21]. Para isso, vamos chamar  $\bar{r}$  como sendo o raio médio de matéria da configuração do campo, que é definido como a distância radial  $r$  ponderada pela densidade de energia do campo escalar estático usado para descrever a configuração de *skyrmion*, ou seja,

$$\bar{r} = \frac{\int_0^\infty \rho(r)r^2 dr}{\int_0^\infty \rho(r)r dr} \quad (4.59)$$

é o raio médio de matéria.

## 4.4 Exemplos

Nesta seção vamos explorar dois dos modelos propostos nas referências [21, 28]. Mais especificamente, vamos investigar os potenciais  $\phi^4$  e  $\phi^6$  e veremos quais resultados foram obtidos considerando a abordagem apresentada na seção anterior.

### 4.4.1 Potencial $\phi^4$ - Modelo com Carga $Q = \pm 1$

Aqui vamos utilizar o já conhecido potencial  $\phi^4$ , reescrito como proposto em [21], que é dado por

$$P(\phi) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-s)^2} (1 - \phi^2)^2, \quad (4.60)$$

em que  $s$  é um parâmetro adimensional e  $s \in [0, 1)$ . Via (4.13), considerando configurações estáticas, podemos escrever a equação de movimento para o modelo, que é

$$r^2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} + \frac{2\phi(1 - \phi^2)}{(1-s)^2} = 0. \quad (4.61)$$

Além disso, utilizando o método BPS [veja as equações (4.16) e (4.18)] podemos escrever a equação de primeira ordem, que é

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} \frac{1 - \phi^2}{(1-s)} \quad (4.62)$$

e tem como soluções não-triviais

$$\phi(r) = \pm \frac{-1 + r^{\frac{2}{1-s}}}{1 + r^{\frac{2}{1-s}}}, \quad (4.63)$$

cuja forma pode ser vista na figura 4.1 para os diferentes valores de  $s$ . Observe que são soluções similares ao que tínhamos para *kinks* e *anti-kinks*. Note também que essas soluções satisfazem a equação de movimento apresentada. Nesse caso, essas soluções caracterizam estruturas de carga  $Q = \pm 1$  e as chamaremos *skyrmion* (positiva) e *anti-skyrmion* (negativa).

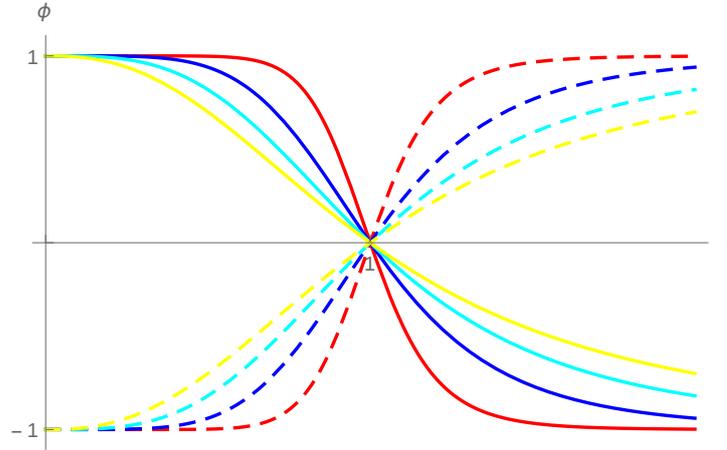


Figura 4.1:  $\phi(r)$  do modelo (4.60). Solução positiva- linha pontilhada. Solução negativa- linha contínua. Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

De (4.15), podemos escrever a densidade de energia, então

$$\rho(r) = \frac{16r^{\frac{2(s+1)}{1-s}}}{(1-s)^2 \left( r^{\frac{2}{1-s}} + 1 \right)^4}, \quad (4.64)$$

cuja forma pode ser vista na figura 4.2 para alguns valores de  $s$ . Assim, a energia total também pode ser calculada e é dada por

$$E = \frac{8\pi}{3(1-s)}. \quad (4.65)$$

Note que a energia depende de  $s$  e quanto maior é o valor desse parâmetro, maior é o valor da energia.

Conforme vimos na seção 4.2.2, podemos verificar a estabilidade das soluções também do ponto de vista da energia, de forma que, utilizando a equação (4.45) e as soluções conhecidas para o modelo  $\phi^4$ , podemos calcular o modo-zero para este modelo, que é

$$\eta_0(r) = A \frac{r^{\frac{2}{1-s}}}{\left( 1 + r^{\frac{2}{1-s}} \right)^2}. \quad (4.66)$$

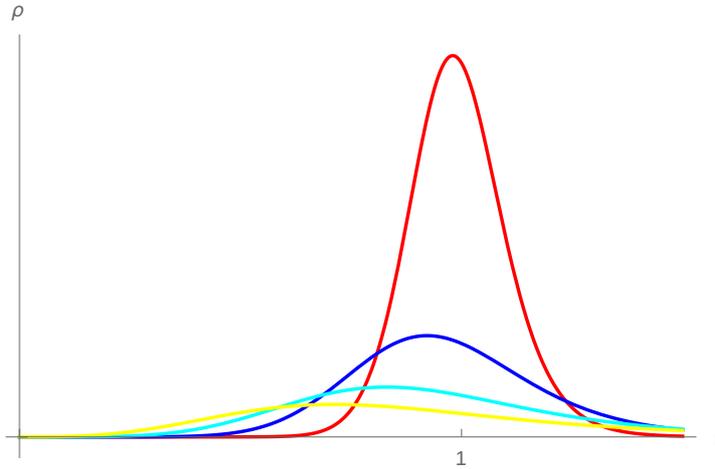


Figura 4.2: Densidade de energia para o modelo (4.60). Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Seguindo o procedimento descrito na mesma seção supracitada, verificamos que  $E_3 = 0$  e

$$E_4 = \frac{3\pi}{35(1-s)}. \quad (4.67)$$

Daí podemos ver que é um valor positivo ( $E_4 > 0$ ), o qual nos mostra que a solução (4.63) é estável sob flutuações esfericamente simétricas.

Uma vez que as soluções são conhecidas, podemos utilizar as definições citadas na seção anterior para descrevermos o comportamento da estrutura magnética modelada pelo potencial  $\phi^4$ . De (4.50) e (4.63), encontramos a magnetização para o modelo em questão pode ser descrita como

$$\vec{M} = \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \pm \frac{-1 + r^{\frac{2}{1-s}}}{1 + r^{\frac{2}{1-s}}} \right) + \delta \right] \hat{z} + \text{cos} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \pm \frac{-1 + r^{\frac{2}{1-s}}}{1 + r^{\frac{2}{1-s}}} \right) + \delta \right] \hat{\theta}. \quad (4.68)$$

Considerando  $\delta = 0$  e tomando a solução negativa, obtém-se que  $\vec{M}(r = 0)$  aponta no sentido positivo na direção  $\hat{z}$ . Já quando  $r \rightarrow \infty$  o vetor magnetização aponta no sentido negativo na direção  $\hat{z}$  do material magnético. O comportamento citado pode ser visto nas figuras 4.3 e 4.4 para diferentes valores de  $s$ . É importante observar que o comportamento da magnetização em seus extremos independe do valor  $s$ , o parâmetro  $s$  influencia apenas no comportamento para outros valores de  $r$ , diferentes de 0 e  $\infty$ .

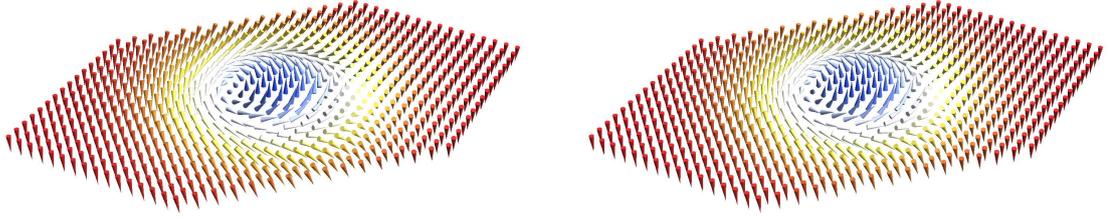


Figura 4.3: Magnetização para o potencial  $\phi^4$ , tomando a solução negativa e  $\delta = 0$ . Esquerda:  $s = 0.2$ . Direita:  $s = 0.4$

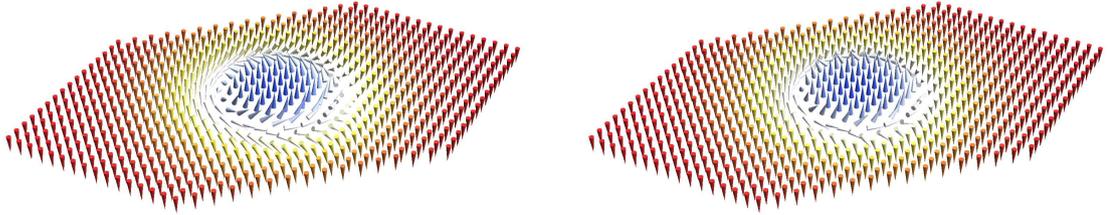


Figura 4.4: Magnetização para o potencial  $\phi^4$ , tomando a solução negativa e  $\delta = 0$ . Esquerda:  $s = 0.6$ . Direita:  $s = 0.8$

Como consta em [42], o comportamento da magnetização também pode ser estudado ao analisarmos a componente  $\hat{z}$  do vetor  $\vec{M}$ , o que é mostrado na figura 4.5. Nesse caso em que tomamos a solução negativa e  $\delta = 0$ , notamos que na medida em que  $r$  cresce, a componente  $\hat{z}$  da magnetização varia de 1 para  $-1$ . Observa-se também que esse comportamento é mais suave quando  $s$  se aproxima de 0 e mais abrupto com  $s$  tende a 1. Ou seja, a região de transição na estrutura topológica varia na medida em que o parâmetro  $s$  varia. Este é o comportamento esperado, pois a magnetização sai de um estado fundamental para outro mais lenta ou mais rapidamente, a depender do valor de  $s$ .

Utilizando a equação (4.57) encontramos que a densidade de número de *skyrmion* para este modelo pode ser escrita como

$$q(r) = q_0(r) \cos \left[ \pm \frac{\pi}{2} \left( \frac{-1 + r^{\frac{1}{1-s}}}{1 + r^{\frac{1}{1-s}}} \right) + \delta \right], \quad (4.69)$$

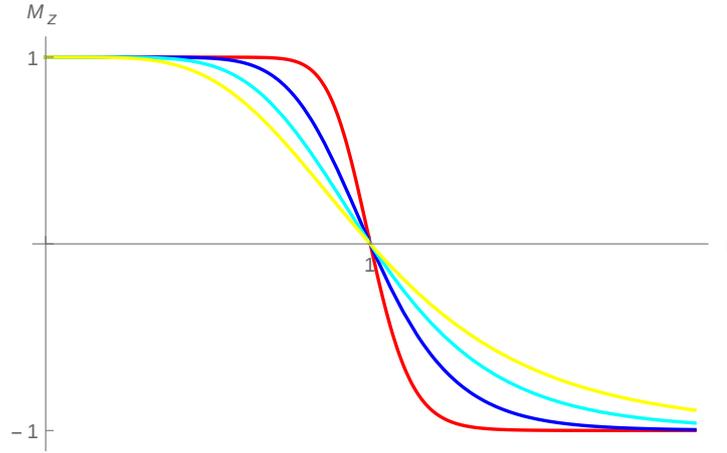


Figura 4.5: Componente  $z$  da magnetização para o potencial  $\phi^4$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

onde

$$q_0(r) = \mp \frac{\pi r^{\frac{(1+s)}{(1-s)}}}{(1-s)(1+r^{\frac{2}{(1-s)}})^2}. \quad (4.70)$$

Na figura 4.6 vemos o comportamento da densidade de carga para  $\delta = 0$ .

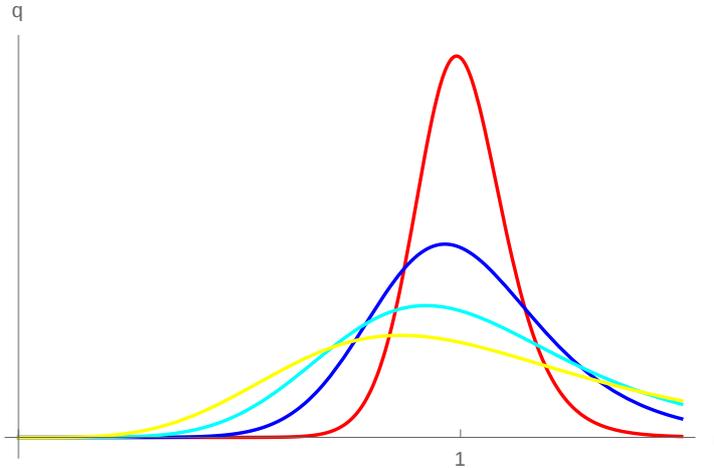


Figura 4.6: Densidade de carga para o modelo  $\phi^4$  quando  $\delta = 0$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Integrando a densidade de número de *skyrmion* ou simplesmente usando a equação (4.58), obtemos

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \phi(r=0) + \delta \right] - \frac{1}{2} \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \phi(r \rightarrow \infty) + \delta \right]. \quad (4.71)$$

Note que tomando a solução positiva, encontramos que

$$\phi(r=0) = -1 \quad \text{e} \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 1, \quad (4.72)$$

ou seja, nesse caso

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen} \left( -\frac{\pi}{2} + \delta \right) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right). \quad (4.73)$$

Observe que se escolhemos  $\delta = 0$  então  $Q = -1$ . Agora se fazemos  $\delta = \pi$ , então  $Q = 1$ .

O mesmo procedimento pode ser feito utilizando a solução negativa, de onde obtemos

$$\phi(r = 0) = 1 \quad \text{e} \quad \phi(r \rightarrow \infty) = -1, \quad (4.74)$$

assim, obtemos que

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( -\frac{\pi}{2} + \delta \right). \quad (4.75)$$

Novamente, fazendo  $\delta = 0$ , encontramos que  $Q = 1$  e escolhendo  $\delta = \pi$ , obtemos que  $Q = -1$ .

Ou seja, a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$  nos leva de um *skyrmion* para um *anti-skyrmion* independente do valor de  $\delta$ .

Finalmente, utilizando a equação (4.59), podemos calcular o raio médio de matéria, que para esse caso, é dado por

$$\bar{r} = \frac{\pi(3-s)(1-s^2)}{8 \cos(\frac{\pi}{2}s)} \quad (4.76)$$

Na tabela abaixo podemos ver como  $\bar{r}$  varia a medida que  $s$  varia.

$s$	Raio médio $\bar{r}$
0.2	1.1099
0.4	1.06012
0.6	1.0262
0.8	1.00647

Tabela 4.2: Variação  $\bar{r}$  quando  $s$  varia.

Note que  $\bar{r}$  diminui na medida em que  $s$  cresce. E no limite em que  $s \rightarrow 1$  temos que  $\bar{r} \rightarrow 1$ , isto ocorre quando se tem uma transição muito abrupta e portanto uma região de transição inexistente, requerendo uma energia muito alta. Essas discussões podem ser vistas com detalhes em [42].

#### 4.4.2 Potencial $\phi^6$ - Modelo com Carga $Q = \pm 1/2$

Um outro potencial interessante a ser estudado é o chamado  $\phi^6$ , que nesse caso será descrito utilizando

$$P(\phi) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-s)^2} \phi^2 (1 - \phi^2)^2, \quad (4.77)$$

novamente, o parâmetro  $s$  é adimensional e  $s \in [0, 1)$ . A equação de movimento pra este modelo é dada por

$$r^2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} + \frac{2\phi^3(1 - \phi^2) - \phi(1 - \phi^2)^2}{(1 - s)^2} = 0. \quad (4.78)$$

Utilizando a prescrição do método BPS, obtemos que as equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} \frac{\phi(1 - \phi^2)}{(1 - s)}, \quad (4.79)$$

cujas soluções são

$$\phi(r) = \pm \frac{r^{\frac{1}{(1-s)}}}{\sqrt{1 + r^{\frac{2}{(1-s)}}}} \quad (4.80)$$

que correspondem às soluções da equação positiva e negativa, respectivamente. Os gráficos das soluções podem ser vistos na figura 4.7 para alguns valores de  $s$ . Essas soluções, como será mostrado, correspondem a estruturas com carga  $Q = \pm 1/2$  chamadas de vórtice e anti-vórtice, respectivamente.

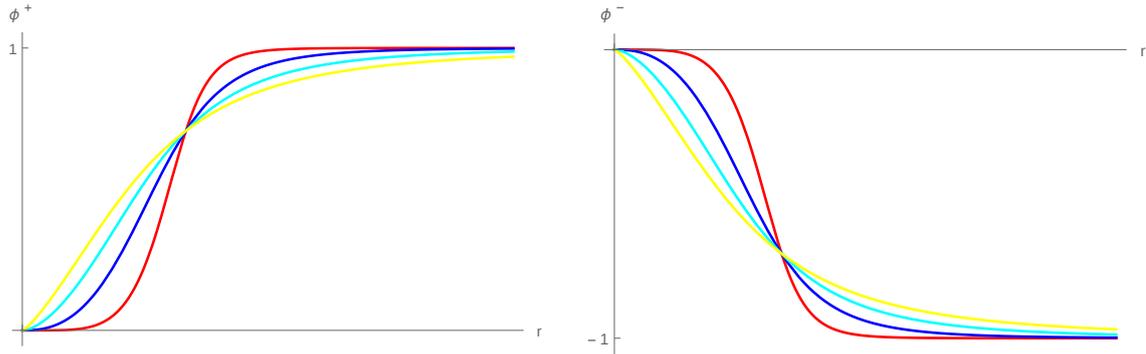


Figura 4.7: Soluções para o modelo  $\phi^6$  positiva (esquerda) e negativa (direita). Em ambos os casos: linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$  e linha amarela  $s = 0.2$

Recorrendo à equação (4.15), podemos escrever a densidade de energia como

$$\rho(r) = \frac{r^{\frac{2s}{1-s}}}{(1 - s)^2 \left( r^{\frac{2}{1-s}} + 1 \right)^3}, \quad (4.81)$$

que tem sua forma mostrada na figura 4.8. Tendo isso, podemos finalmente calcular a energia total, que é

$$E = \frac{\pi}{2(1 - s)}. \quad (4.82)$$

Daí vemos que a energia depende de  $s$  e cresce na medida em que esse parâmetro também cresce.

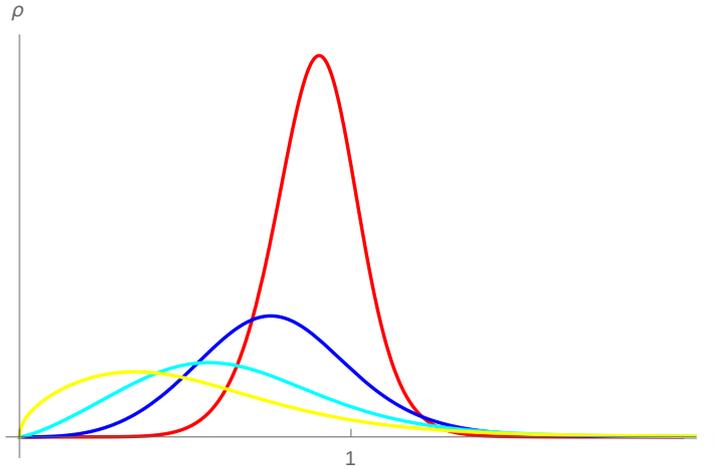


Figura 4.8: Densidade de energia para o modelo  $\phi^6$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Utilizando a abordagem mostrada na seção 4.2.2, podemos calcular a função perturbativa do sistema, a fim de verificarmos a análise de estabilidade, que, nesse caso, é dada por

$$\eta_0(r) = A \frac{r^{\frac{2}{s-1}}}{\left(r^{\frac{2}{s-1}} + 1\right)^{3/2}}. \quad (4.83)$$

Obtido o modo-zero, podemos calcular os demais termos da expansão da energia total (4.35). Como mostramos,  $E_2 = 0$  o que possibilita encontrar a função perturbativa no modo-zero, assim o próximo termo da expansão é  $E_3$ , que é dado por

$$E_3 = \frac{15\pi^2}{64(1-s)}. \quad (4.84)$$

Claramente, vemos que  $E_3 > 0$  e isso mostra que a solução (4.80) é estável sob flutuações esféricamente simétricas.

Agora que já conhecemos as soluções, podemos analisar o comportamento de magnetização. Vamos seguir aqui a mesma descrição feita por [21], onde é analisado o comportamento para a solução positiva. Utilizando a equação (4.50) e tomando a solução positiva encontramos que o vetor magnetização é

$$\vec{M} = \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{1 + r^{\frac{2}{1-s}}}} \right) + \delta \right] \hat{z} + \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{1 + r^{\frac{2}{1-s}}}} \right) + \delta \right] \hat{\theta}. \quad (4.85)$$

Vamos tomar então o caso particular em que  $\delta = \pi/2$ . Observe que quando  $r = 0$  o vetor magnetização aponta do sentido positivo de  $z$  e quando  $r \rightarrow \infty$  a magnetização aponta no sentido negativo da direção  $\theta$  do material magnético. O comportamento da magnetização pode

ser visto nas figuras 4.9 e 4.10 para diferentes valores de  $s$ . Além disso, é possível observar que o comportamento em  $r = 0$  e  $r \rightarrow \infty$  independe desse parâmetro.

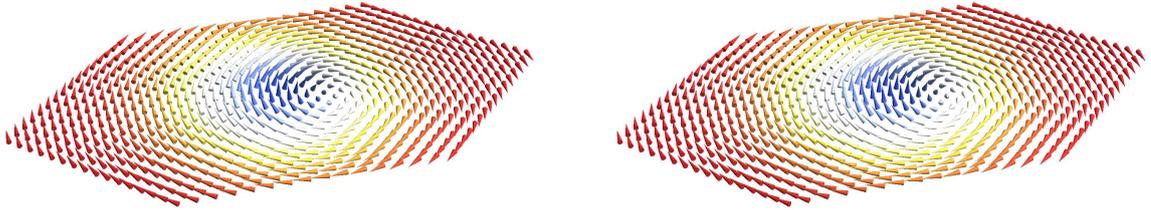


Figura 4.9: Magnetização para o potencial  $\phi^6$ , tomando a solução positiva e  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Esquerda:  $s = 0.2$ . Direita:  $s = 0.4$

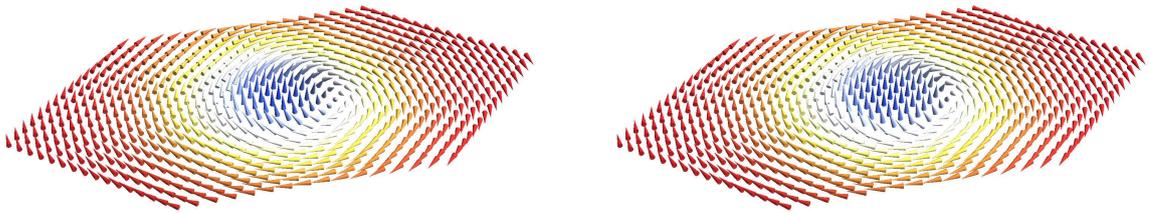


Figura 4.10: Magnetização para o potencial  $\phi^6$ , tomando a solução positiva e  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Esquerda:  $s = 0.6$ . Direita:  $s = 0.8$

Analisando o comportamento da magnetização numa perspectiva da componente  $\hat{z}$  do vetor, podemos ver (conforme mostrado na figura 4.11), que diferentemente do potencial  $\phi^4$ , nesse caso essa componente varia de 1 para 0. É possível notar também que essa variação é mais suave quando  $s$  é mais próximo de 0 e mais abrupta a medida que  $s$  se aproxima de 1.

Utilizando a equação (4.57), podemos calcular a forma da densidade de número de *skyrmion*. Nesse caso vemos que é dada por

$$q(r) = q_0(r) \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{1}{(1-s)}}}{\sqrt{1 + r^{\frac{2}{(1-s)}}}} \right) + \delta \right], \quad (4.86)$$

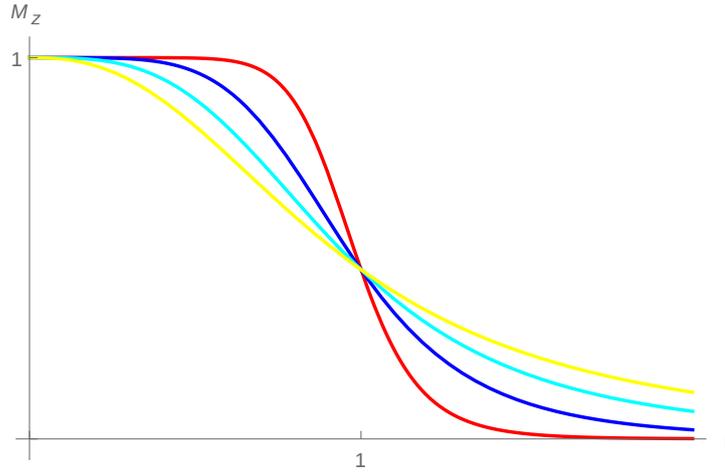


Figura 4.11: Componente  $z$  da magnetização para o potencial  $\phi^6$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

com

$$q_0(r) = -\frac{\pi}{4} \frac{r^{\frac{s}{1-s}}}{(1-s) \left( r^{\frac{2}{1-s}} + 1 \right)^{3/2}}, \quad (4.87)$$

cuja forma, considerando  $\delta = \pi/2$ , pode ser vista na figura 4.12. Podemos notar que o comportamento para a densidade  $q$  é similar para os dois modelos apresentados.

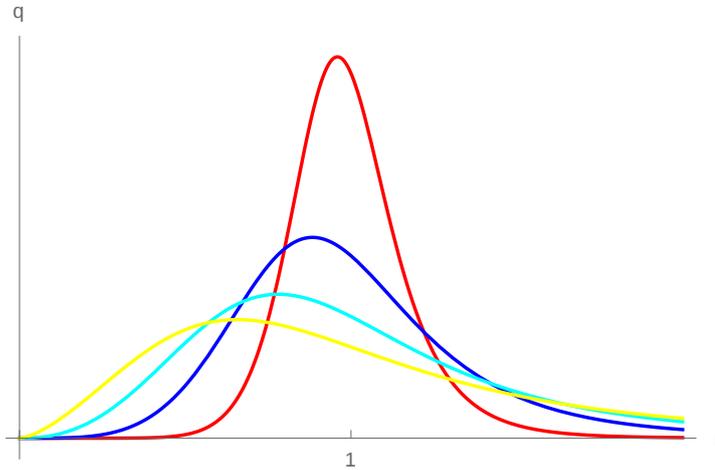


Figura 4.12: Densidade de carga para o modelo  $\phi^6$  quando  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Integrando a densidade  $q$  obtemos o número de *skyrmion* equivalente ao modelo. Além dessa forma, como vimos na equação (4.58), podemos calculá-lo apenas conhecendo o comportamento da solução em  $r = 0$  e quando  $r \rightarrow \infty$ . Assim, tomando a solução positiva da equação

(4.80), obtemos que

$$\phi(r = 0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 1, \quad (4.88)$$

assim

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen}(\delta) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right). \quad (4.89)$$

Escolhendo  $\delta = \pi/2$  encontramos que  $Q = 1/2$ . Agora tomando  $\delta = 3\pi/2$  encontramos que  $Q = -1/2$ . Tomando agora a solução negativa, obtemos

$$\phi(r = 0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(r \rightarrow \infty) = -1, \quad (4.90)$$

assim

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen}(\delta) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( -\frac{\pi}{2} + \delta \right). \quad (4.91)$$

Tomando  $\delta = \pi/2$  encontramos que  $Q = 1/2$ . Escolhendo  $\delta = 3\pi/2$ , encontramos  $Q = -1/2$ . É interessante notar que, diferentemente do exemplo anterior, a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$  não nos leva de um vórtice para um anti-vórtice.

Vamos finalizar nossas análises calculando o raio médio de matéria, conforme a equação (4.59), que para este modelo é

$$\bar{r} = \frac{1}{4} \pi (1 - s^2) \sec \left( \frac{\pi s}{2} \right). \quad (4.92)$$

Veja na tabela abaixo quanto vale  $\bar{r}$  na medida em que  $s$  varia.

$s$	Raio médio $\bar{r}$
0.2	0.792784
0.4	0.815477
0.6	0.855167
0.8	0.914977

Tabela 4.3: Variação  $\bar{r}$  quando  $s$  varia.

Note que  $\bar{r}$  aumenta na medida em que  $s$  cresce. E no limite em que  $s \rightarrow 1$  temos que  $\bar{r} \rightarrow 1$ , isto acontece quando se tem uma transição muito abrupta em que  $\vec{M}(1)$  vai para  $\vec{M}(0)$  muito rapidamente, ocorrendo portanto uma região de transição inexistente, que requer uma energia muito alta. Essas discussões podem ser vistas com detalhes em [42].

Conforme registrado em todo este capítulo, revisamos o formalismo apresentado em [21, 28], apresentando uma maneira alternativa de descrever estruturas localizadas do tipo *skyrmion* em sistemas planares magnéticos. No próximo capítulo faremos isso considerando modelos de dois campos.

# Capítulo 5

## Teoria para Configurações de Dois Campos Planares e *Skyrmions*

Neste capítulo, iremos abordar sistemas planares sob a ação de dois campos escalares reais. Inicialmente apresentaremos a teoria para descrever configurações específicas que possuem simetria radial e posteriormente apresentaremos um modelo de dois campos com soluções analíticas, capaz de descrever configurações do tipo *skyrmion*.

### 5.1 Generalidades

Para caracterizar um modelo de dois campos em configurações planares, vamos considerar a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2}\nabla\chi \cdot \nabla\chi - U(\phi, \chi), \quad (5.1)$$

sendo  $\phi = \phi(r, t)$  e  $\chi = \chi(r, t)$  campos escalares reais e  $U(\phi, \chi)$  o potencial, dado por

$$U(\phi, \chi) = \frac{1}{r^2}P(\phi, \chi), \quad (5.2)$$

onde  $P(\phi)$  é um polinômio que não contém termos com derivada em  $\phi$  e  $\chi$ . Sendo assim, as equações de movimento para  $\phi$  e  $\chi$  são, respectivamente

$$-r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \phi} = 0 \quad (5.3)$$

e

$$-r^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \chi} = 0. \quad (5.4)$$

No entanto, estamos interessados em trabalhar com configurações estáticas e esfericamente simétricas, ou seja  $\phi = \phi(r)$  e  $\chi = \chi(r)$ . Sendo assim, a energia total é dada por

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \rho(r) = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} P(\phi, \chi) \right], \quad (5.5)$$

em que  $\rho(r)$  é a densidade de energia.

### 5.1.1 Método BPS

Para aplicar o método BPS [30, 31], apresentado em capítulos anteriores, vamos definir

$$P(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (W_\phi^2 + W_\chi^2), \quad (5.6)$$

onde  $W = W(\phi, \chi)$  é o chamado superpotencial, função suave dos campos  $\phi$  e  $\chi$  e  $W_\phi$  e  $W_\chi$  são as derivadas parciais do superpotencial com relação aos respectivos campos.

Dessa forma, substituindo (5.6) em (5.5) e completando os quadrados, como ensina o método, podemos reescrever a energia total como

$$E = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \mp \frac{1}{r} W_\phi \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dr} \mp \frac{1}{r} W_\chi \right)^2 \pm \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} W_\phi \pm \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} W_\chi \right]. \quad (5.7)$$

Da equação acima podemos ver que as equações que minimizam a energia são

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{W_\phi}{r} \quad \text{e} \quad \frac{d\chi}{dr} = \pm \frac{W_\chi}{r}, \quad (5.8)$$

que são nossas equações de primeira ordem. Assim, a energia minimizada, denominada BPS, será dada por

$$E_{BPS} = 2\pi \int_0^\infty dr \left[ \pm \frac{d\phi}{dr} W_\phi \pm \frac{d\chi}{dr} W_\chi \right], \quad (5.9)$$

assim

$$E_{BPS} = 2\pi |W[\phi(\infty), \chi(\infty)] - W[\phi(0), \chi(0)]| = 2\pi |\Delta W|. \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Análise de Estabilidade

Assim como fizemos em capítulos anteriores para sistemas de um campo, podemos também verificar a estabilidade de soluções em sistemas compostos por dois campos. Para fazer tal análise, podemos propor soluções do tipo

$$\phi(r, t) = \phi_s(r) + \eta(r, t) \quad (5.11)$$

e

$$\chi(r, t) = \chi_s(r) + \xi(r, t). \quad (5.12)$$

Aqui  $\phi_s$  e  $\chi_s$  são as soluções estáticas conhecidas e  $\eta$  e  $\xi$  são as respectivas perturbações em torno das soluções.

Vamos substituir as soluções acima nas equações de movimento (5.3) e (5.4), de onde obtemos

$$-r^2 \frac{\partial^2 \eta(r, t)}{\partial t^2} + r^2 \frac{d^2 \phi_s}{dr^2} + r^2 \frac{\partial^2 \eta(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{d\phi_s}{dr} + r \frac{\partial \eta(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0 \quad (5.13)$$

e

$$-r^2 \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2} + r^2 \frac{d^2 \chi_s}{dr^2} + r^2 \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{d\chi_s}{dr} + r \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_s} = 0. \quad (5.14)$$

No entanto, se considerarmos que as flutuações em tornos das soluções são muito pequenas, vemos que  $P(\phi, \chi)$  pode ser expandido como

$$P(\phi, \chi) \approx P(\phi_s, \chi_s) + \frac{\partial P}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta + \frac{\partial P}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_s} \xi, \quad (5.15)$$

pois desprezamos contribuições das flutuações em ordens superiores.

Aplicando o resultado acima em (5.13) e (5.14) e reconhecendo equações de movimento para os respectivos campos em cada equação, obtemos

$$-r^2 \frac{\partial^2 \eta(r, t)}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \eta(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \eta(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta - \frac{\partial^2 P}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\phi=\phi_s, \chi=\chi_s} \xi = 0 \quad (5.16)$$

e

$$-r^2 \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi=\chi_s} \xi - \frac{\partial^2 P}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\phi=\phi_s, \chi=\chi_s} \eta = 0. \quad (5.17)$$

Vamos supor ainda, que as respectivas funções perturbativas são dadas por

$$\eta(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(r) \exp(-i\omega_n t) \quad (5.18)$$

e

$$\xi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(r) \exp(-i\omega_n t), \quad (5.19)$$

sendo  $\omega$  um parâmetro real. Assim, substituindo essas relações em (5.16) e (5.17), obtemos

$$\eta_n(r) \omega_n^2 = -\eta_n(r)'' - \frac{1}{r} \eta_n(r)' + \frac{1}{r^2} P_{\phi_s \phi_s} \eta_n(r) + \frac{1}{r^2} P_{\chi_s \phi_s} \xi_n(r) \quad (5.20)$$

e

$$\xi_n(r)\omega_n^2 = -\xi_n(r)'' - \frac{1}{r}\xi_n(r)' + \frac{1}{r^2}P_{\chi_s\chi_s}\xi_n(r) + \frac{1}{r^2}P_{\chi_s\phi_s}\eta_n(r), \quad (5.21)$$

onde ' é a primeira derivada com relação a  $r$  e  $P_{\phi\chi}$  é a derivada parcial de  $P$  com respeito a  $\phi$  e com respeito a  $\chi$  e assim por diante.

Observe que as equações acima podem ser reescritas como

$$\mathcal{H}\Psi_n = \omega_n^2\Psi_n, \quad (5.22)$$

sendo

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = -\nabla^2\mathbb{1}_{2\times 2} + \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} P_{\phi_s\phi_s} & P_{\chi_s\phi_s} \\ P_{\phi_s\chi_s} & P_{\chi_s\chi_s} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

com  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ . Podemos reconhecer em (5.22) uma equação de autovalores, de forma que a estabilidade das soluções estará ligada com a não-existência de autovalores negativos, ou seja  $\omega_n < 0$ .

Notem também que, de (5.6), podemos reescrever  $\mathcal{H}$  como o produtos dos operadores  $S$  e  $S^\dagger$ , na forma

$$\mathcal{H} = S^\dagger S = \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} + M \right) \left( -r \frac{\partial}{\partial r} + M \right), \quad (5.24)$$

com

$$M = \begin{pmatrix} W_{\phi_s\phi_s} & W_{\chi_s\phi_s} \\ W_{\phi_s\chi_s} & W_{\chi_s\chi_s} \end{pmatrix}.$$

Assumindo então a existência de um modo-zero, de tal forma que  $\omega_0 = 0$ , temos a equação

$$S\Psi_0 = 0 \quad \implies \quad r \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = M\Psi_0. \quad (5.25)$$

Observe que essa equação matricial pode ser resolvida para um dado

$$\Psi_0 = A \begin{pmatrix} W_{\phi_s} \\ W_{\chi_s} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

senho  $A$  uma constante de normalização. Resultado esse que é bastante similar ao que relatamos em capítulos anteriores através das equações (2.68) e (4.28).

### Análise do ponto de vista Energia Total

Como sabemos, uma maneira equivalente de estudar a estabilidade linear, consiste em analisar o comportamento da energia total. Sendo assim, vamos propor as seguintes soluções

$$\phi(r) = \phi_s(r) + \epsilon\eta(r) \quad (5.27)$$

e

$$\chi(r) = \chi_s(r) + \epsilon \xi(r), \quad (5.28)$$

com  $\epsilon$  sendo um parâmetro muito pequeno, real e constante e  $\eta(r)$  e  $\xi(r)$  as flutuações em torno das respectivas soluções estáticas.

Além disso impomos as condições de contorno

$$\eta(0) = \eta(\infty) = 0 \quad (5.29)$$

e

$$\xi(0) = \xi(\infty) = 0. \quad (5.30)$$

Vamos relembrar que a energia total para um sistema de dois campos com simetria radial é dada por

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \rho(r) = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} P(\phi, \chi) \right], \quad (5.31)$$

de forma que aplicando as soluções propostas (5.27) e (5.28) na equação (5.31) para a energia total e considerando  $P(\phi, \chi)$  a expansão

$$P(\phi, \chi) = P(\phi, \chi)_{\phi=\phi_s, \chi=\chi_s} + \epsilon \frac{\partial P}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta + \epsilon \frac{\partial P}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi_s} \xi + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi=\chi_s} \xi^2 + \mathcal{O}(3), \quad (5.32)$$

obtemos uma equação do tipo

$$E_\epsilon = E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots, \quad (5.33)$$

sendo  $E_0$  a equação usual para a energia (5.31), e  $E_1$  e  $E_2$  dados por

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{d\phi}{dr} \frac{d\eta}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \frac{d\xi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \phi} \eta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \chi} \xi \right] \quad (5.34)$$

e

$$E_2 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P(\phi, \chi)}{\partial \phi^2} \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P(\phi, \chi)}{\partial \chi^2} \xi^2 \right], \quad (5.35)$$

respectivamente.

No entanto, observe que podemos reescrever

$$r dr \frac{d\phi}{dr} \frac{d\eta}{dr} = d \left( r \frac{d\phi}{dr} \eta \right) - \frac{d\phi}{dr} \eta dr - r \frac{d^2 \phi}{dr^2} \eta dr \quad (5.36)$$

e

$$r dr \frac{d\chi}{dr} \frac{d\xi}{dr} = d \left( r \frac{d\chi}{dr} \xi \right) - \frac{d\chi}{dr} \xi dr - r \frac{d^2 \chi}{dr^2} \xi dr, \quad (5.37)$$

de forma que substituindo ambas as equações em  $E_1$ , podemos reconhecer dois termos de superfície, que é possível anulá-los utilizando as condições de contorno, e duas equações de movimento, para  $\phi$  e  $\chi$ , que portanto, vão a zero. Assim

$$E_1 = 0. \quad (5.38)$$

Podemos também reescrever  $E_2$  como

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left( \frac{d\eta}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{1}{\phi'} \eta \right)^2 + \pi \int_0^\infty r dr \left( \frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \chi} \frac{1}{\chi'} \xi \right)^2 + \pi \int_0^\infty d \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{1}{\phi'} \eta^2 \right) + \pi \int_0^\infty d \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \chi} \frac{1}{\chi'} \xi^2 \right), \quad (5.39)$$

sendo ' a derivada com relação a  $r$ . Como podemos observar, as duas últimas integrais correspondem a termos de superfície, que, devido às condições de contorno, vão a zero. Assim

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left( \frac{d\eta}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{1}{\phi'} \eta \right)^2 + \pi \int_0^\infty r dr \left( \frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \chi} \frac{1}{\chi'} \xi \right)^2. \quad (5.40)$$

Assim como no procedimento feito para modelos de um campo, observe que ao minimizar essa energia, ou seja, fazer  $E_2 = 0$ , obtemos

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{1}{\phi'} \eta \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \chi} \frac{1}{\chi'} \xi. \quad (5.41)$$

Resolvendo as equações acima para os campos perturbativos encontramos que

$$\eta(r) = A \exp \left( \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{1}{\phi'} dr \right) \quad \text{e} \quad \xi(r) = A \exp \left( \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \chi} \frac{1}{\chi'} dr \right), \quad (5.42)$$

sendo  $A$  uma constante de normalização, não necessariamente igual para ambos os casos. Veja que este resultado é similar ao encontrado pelo método anterior, pois

$$\frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \phi} = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P(\phi, \chi)}{\partial \chi} = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}, \quad (5.43)$$

que substituídos em  $\eta(r)$  e  $\xi(r)$  nos dá

$$\eta(r) = A \exp \left[ \int_0^\infty \frac{1}{r} \left( W_{\phi\phi} + \frac{W_\chi}{W_\phi} W_{\chi\phi} \right) dr \right] \quad \text{e} \quad \xi(r) = A \exp \left[ \int_0^\infty \frac{1}{r} \left( W_{\chi\chi} + \frac{W_\phi}{W_\chi} W_{\chi\phi} \right) dr \right]. \quad (5.44)$$

Podemos ainda reescrever os respectivos integrandos como  $\frac{d}{dr} \log(W_\phi)$  e  $\frac{d}{dr} \log(W_\chi)$ . Assim, temos explicitamente o mesmo resultado obtido na equação (5.26) utilizando o método anterior.

Apresentada a teoria geral que descreve sistemas de dois campos em configurações planares, nas próximas seções iremos apresentar um novo modelo de dois campos, além de sua aplicação em configurações do tipo *skyrmion*.

## 5.2 Modelos de Dois Campos para Configurações Planares

Para construir um modelo efetivo de dois campos que descreva bem sistemas com configurações planares, mais especificamente estruturas magnéticas do tipo *skyrmion*, vamos fazer uso do método de extensão, proposto em [12] e devidamente apresentado na seção 2.7.

Na aplicação do método, vamos considerar os dois modelos de um campo apresentados na seção 4.4. Relembrando então, temos o modelo  $\phi^4$  com equação de primeira ordem

$$r\phi' = W_\phi = \frac{1 - \phi^2}{(1 - s)}, \quad (5.45)$$

cuja solução analítica positiva é

$$\phi(r) = \frac{r^{\frac{2}{1-s}} - 1}{r^{\frac{2}{1-s}} + 1} \quad (5.46)$$

e temos também o modelo  $\chi^6$ , com equação de primeira ordem dada por

$$r\chi' = W_\chi = \frac{(1 - \chi^2)\chi}{(1 - s)} \quad (5.47)$$

e tem solução

$$\chi(r) = \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}}. \quad (5.48)$$

Observe que os modelos são conectados pela função de deformação

$$f(\chi) = \phi = 2\chi^2 - 1 \quad \text{com inversa} \quad f^{-1}(\phi) = \chi = \sqrt{\frac{\phi + 1}{2}}, \quad (5.49)$$

que é elemento fundamental para efetivação do método de extensão.

Sendo conhecidos os dois modelos de um campo e a função de deformação, vamos seguir a prescrição do método de extensão reescrevendo as respectivas equações de primeira ordem na forma

$$W_\phi(\phi) = \frac{1 - \phi^2}{(1 - s)}, \quad (5.50a)$$

$$W_\phi(\chi) = 4\frac{(\chi^2 - \chi^4)}{(1 - s)}, \quad (5.50b)$$

$$W_\phi(\phi, \chi) = 2\frac{\chi^2(1 - \phi)}{(1 - s)} \quad (5.50c)$$

e

$$W_\chi(\chi) = \frac{(1 - \chi^2)\chi}{(1 - s)}, \quad (5.51a)$$

$$W_\chi(\phi) = \frac{1}{1 - s} \sqrt{\frac{\phi + 1}{2}} \left( \frac{1 - \phi}{2} \right), \quad (5.51b)$$

$$W_\chi(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - s)} \chi(1 - \phi). \quad (5.51c)$$

Uma vez que não queremos um novo modelo no qual o potencial contenha raízes, vamos eliminar os termos que as possuam. Isso equivale a considerar  $b_3 = 0$ , veja equação (2.89). Além disso, vamos escolher  $c_1 = 0$ , assim conseguiremos determinar a função  $g$  enunciada na seção 2.7. Desse modo, temos as seguintes equações de vínculo

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad (5.52a)$$

$$b_1 = 1 - b_2 \quad (5.52b)$$

$$c_2 = -c_3. \quad (5.52c)$$

Usando a propriedade  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$ , conforme exposto na equação (2.94), obtemos

$$(1-s)c_2g_\chi(\phi, \chi) = -b_2\frac{\chi}{2} - a_1(8\chi - 16\chi^3) - 4a_2\chi(1-\phi) \quad (5.53)$$

e podemos, por integração direta, determinar  $g(\phi, \chi)$ , que tem a forma

$$(1-s)c_2g(\phi, \chi) = -b_2\frac{\chi^2}{4} - a_1(4\chi^2 - 4\chi^4) - 2a_2\chi^2(1-\phi). \quad (5.54)$$

Utilizando a função de deformação (5.49) e substituindo na equação acima, podemos finalmente determinar  $g(\phi)$ , que é dado por

$$(1-s)c_2g(\phi) = -\frac{b_2}{8}(1+\phi) - a_1[2(\phi+1) - (\phi+1)^2] - a_2(1-\phi^2). \quad (5.55)$$

Substituindo as equações (5.50), (5.51), (5.54) e (5.55) em (2.92) e (2.93) e utilizando as equações de vínculo (5.52), obtemos finalmente que

$$W_\phi = \frac{1}{(1-s)} \left[ (1-\phi^2) + \frac{b_2}{4} \left( \frac{1}{2}(\phi+1) - \chi^2 \right) \right] \quad (5.56)$$

e

$$W_\chi = \frac{1}{(1-s)} \left[ -b_2\chi(1-\chi^2) + \frac{b_2}{2}\chi(1-\phi) + \chi - \chi^3 \right]. \quad (5.57)$$

Assim, fazendo integrações diretas das equações acima com respeito a  $\phi$  e  $\chi$ , respectivamente, obtemos o superpotencial efetivo para o novo modelo de dois campos, que é

$$W(\phi, \chi) = \frac{1}{1-s} \left[ \frac{b_2}{4} \left( \chi^4 - \chi^2 + \frac{\phi^2}{4} - \chi^2\phi + \frac{\phi}{2} \right) - \frac{\chi^4}{4} + \frac{\chi^2}{2} - \frac{\phi^3}{3} + \phi \right]. \quad (5.58)$$

Conhecendo  $W(\phi, \chi)$ , podemos utilizar (5.2) e (5.6) para escrever o potencial que descreve o novo modelo, ou seja

$$U(r; \phi, \chi) = \frac{1}{2r^2} \frac{1}{(1-s)^2} \left\{ \left[ \frac{b_2}{4} \left( \frac{\phi}{2} - \chi^2 + \frac{1}{2} \right) - \phi^2 + 1 \right]^2 + \left[ \frac{b_2}{4} (4\chi^3 - 2\chi - 2\chi\phi) - \chi^3 + \chi \right]^2 \right\}, \quad (5.59)$$

lembrando que  $s$  é real, tal que  $s \in [0, 1)$  e  $b_2$  é um parâmetro real. Assim, conseguimos construir uma família de potenciais de forma que cada modelo será especificado pela escolha do parâmetro  $b_2$ . Além disso, esses modelos terão como um dos possíveis pares de soluções analíticas

$$\phi(r) = \frac{r^{\frac{2}{1-s}} - 1}{r^{\frac{2}{1-s}} + 1} \quad \text{e} \quad \chi(r) = \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}}, \quad (5.60)$$

cujas formas podem ser visualizadas nas figuras 5.1 e 5.2.

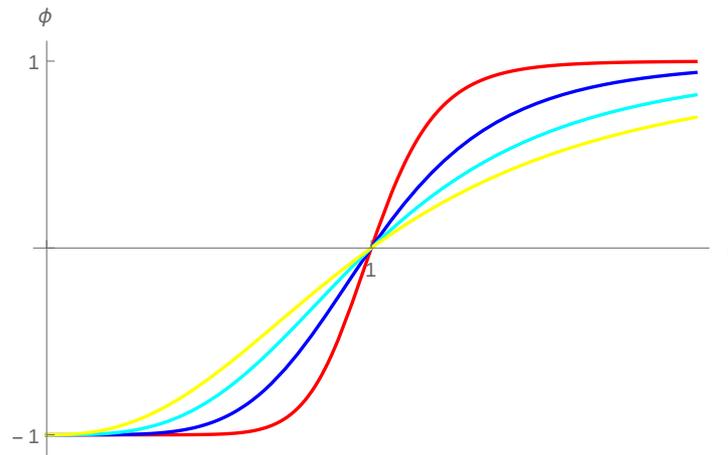


Figura 5.1: Solução  $\phi(r)$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

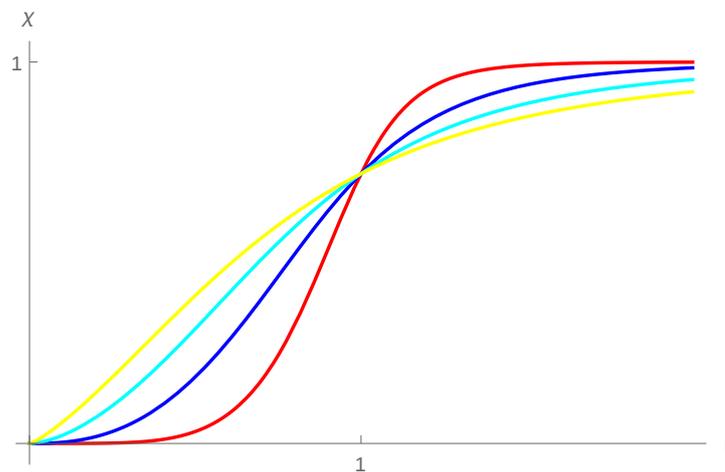


Figura 5.2: Solução  $\chi(r)$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Substituindo as soluções obtidas acima em (5.5), podemos escrever a densidade de

energia como

$$\rho(r) = \frac{r^{-\frac{2(s-3)}{s-1}} \left( r^{\frac{2}{s-1}} + 17 \right)}{(s-1)^2 \left( r^{\frac{2}{s-1}} + 1 \right)^4}, \quad (5.61)$$

observe que a forma da densidade de energia varia conforme  $s$  varia, como pode ser observado na figura 5.3. Com a equação acima podemos calcular a energia total, que é

$$E = \frac{19\pi}{6(1-s)}. \quad (5.62)$$

É interessante notar que a energia total do modelo de dois campos é exatamente a soma das energias provenientes dos modelos iniciais, de um campo. Além disso, verificamos também que na medida em que  $s$  cresce, a energia total também cresce.

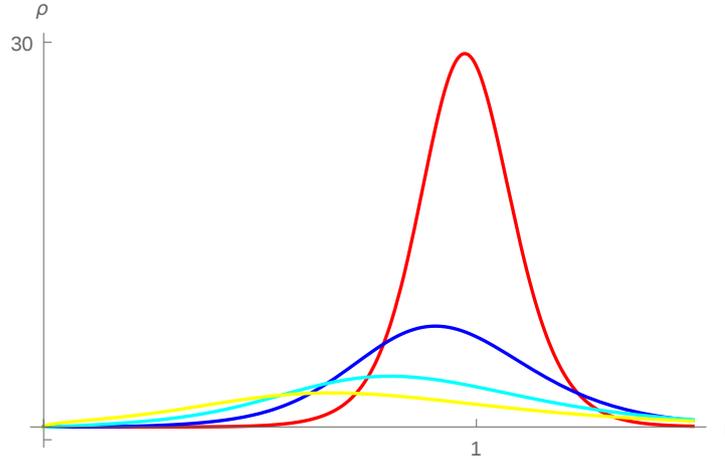


Figura 5.3: Densidade de energia  $\rho(r)$ . Linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$ , linha amarela  $s = 0.2$ .

Podemos também verificar a estabilidade das soluções apresentadas com base no que foi mostrado na seção 5.1.2. Utilizando as equações (5.44) e o superpotencial dado por (5.58), obtemos os modo-zero, na forma

$$\eta(r) = \frac{r^{\frac{2}{1-s}}}{\left( r^{\frac{2}{1-s}} + 1 \right)^2} \quad \text{e} \quad \xi(r) = \frac{r^{\frac{2}{1-s}}}{\left( r^{\frac{2}{1-s}} + 1 \right)^{3/2}}. \quad (5.63)$$

### 5.3 Número de *Skyrmion* para Modelos de Dois Campos

Como mostramos no capítulo anterior, uma característica fundamental atrelada a estruturas do tipo *skyrmion* é a carga topológica e, como visto na equação (4.54), essa quantidade depende do vetor de magnetização. No entanto, o vetor de magnetização usado anteriormente

compreende apenas um campo escalar. Como nosso intuito aqui é modelar essas estruturas a partir de modelos de dois campos, vamos escrever

$$\vec{M} = \cos \Theta(r) \hat{\theta} + \sin \Theta(r) \hat{z}, \quad (5.64)$$

com  $\Theta(r)$  definido agora como

$$\Theta(r) \equiv \frac{\pi}{2} [\phi(r) + \chi(r)] + \delta, \quad (5.65)$$

tendo assim a contribuição dos dois campos escalares.

É importante ressaltar que, embora estejamos considerando o vetor magnetização como sendo dependente de dois campos escalares, ainda prevalecem as imposições feitas no capítulo anterior. Ou seja, estamos tratando com um problema de um único grau de liberdade, tal que  $M_1^2(r, \theta) + M_2^2(r, \theta) = 1$ ,  $\vec{M} = \vec{M}(r)$  e  $\vec{M} \cdot \hat{r} = 0$ .

Utilizando essa nova definição e fazendo uma mudança de variáveis de  $(x, y)$  para  $(r, \theta)$  na equação (4.54), encontramos que

$$Q = \frac{1}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\phi(r=0) + \chi(r=0)) + \delta \right] - \frac{1}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\phi(r \rightarrow \infty) + \chi(r \rightarrow \infty)) + \delta \right]. \quad (5.66)$$

A dedução da equação acima pode ser vista com detalhes no Apêndice A.

Além disso, podemos escrever a quantidade topológica citada como a integral da chamada densidade de número de *skyrmion*  $q$ , ou seja

$$Q = \int_0^\infty dr q, \quad (5.67)$$

onde  $dx dy = r dr d\theta$ , e  $q$  é escrito como

$$q = \frac{r}{2} \vec{M} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right). \quad (5.68)$$

Novamente, fazendo uma mudança de coordenadas, de  $(x, y)$  para  $(r, \theta)$  e utilizando as equações (5.64) e (5.65), obtemos

$$q = -\frac{\pi}{4} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (\phi(r) + \chi(r)) + \delta \right] \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right), \quad (5.69)$$

que é a densidade de carga topológica.

## 5.4 Estruturas Magnéticas do Tipo *Skyrmion* a partir de Modelos de Dois Campos

Agora que possuímos um modelo de dois campos (5.59) com soluções analíticas conhecidas e uma nova definição do vetor de magnetização, vamos analisar quais são suas principais características.

### 5.4.1 Número de *Skyrmion*

Utilizando as soluções conhecidas (5.60) e substituindo na equação (5.69) podemos escrever a densidade de carga topológica, que é dada por

$$q = -\frac{\pi}{4} \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{2}{1-s}} - 1}{r^{\frac{2}{1-s}} + 1} + \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}} \right) + \delta \right] \times \left( -\frac{4r^{\frac{s+1}{1-s}}}{(s-1) \left( r^{-\frac{2}{s-1}} + 1 \right)^2} - \frac{r^{-\frac{s}{s-1}}}{(s-1) \left( r^{-\frac{2}{s-1}} + 1 \right)^{3/2}} \right), \quad (5.70)$$

cuja forma pode ser vista nas figuras 5.4 e 5.5 para diferentes valores de  $s$  e de  $\delta$ .

Veja que, bem diferente do tínhamos nos exemplos vistos na seção 4.4, para modelos de um campo, a densidade de carga não é mais localizada em torno de um valor de  $r$ , mas possui agora um pico e uma espécie de poço.

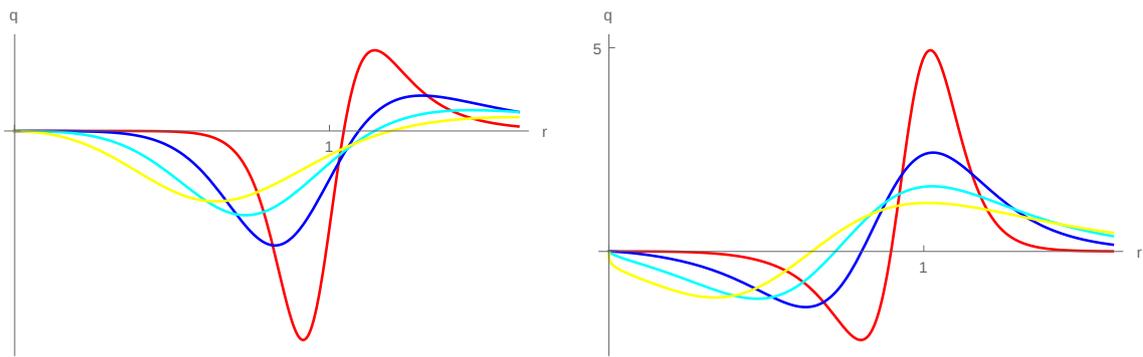


Figura 5.4: Densidade de carga  $q$ . A esquerda com  $\delta = 0$  e a direita com  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$  e linha amarela  $s = 0.2$ .

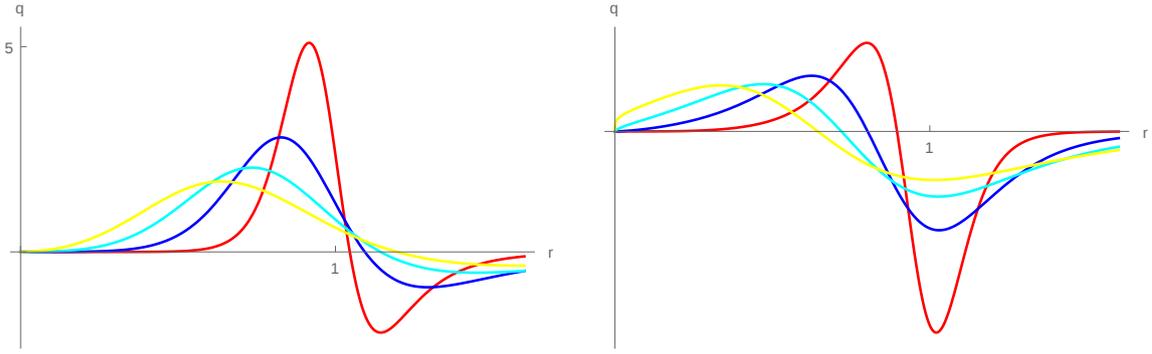


Figura 5.5: Densidade de carga  $q$ . A esquerda com  $\delta = \pi$  e a direita com  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$  e linha amarela  $s = 0.2$ .

Como sabemos, para encontrarmos o número de *skyrmion* podemos integrar a densidade acima encontrada, ou simplesmente, utilizar a equação

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen}\Theta(r=0) - \frac{1}{2} \text{sen}\Theta(r \rightarrow \infty), \quad (5.71)$$

sendo  $\Theta = \frac{\pi}{2}[\phi(r) + \chi(r)] + \delta$ .

Veja que, nos extremos, as soluções (5.60), se comportam como

$$\phi(0) = -1 \quad \text{e} \quad \chi(0) = 0 \quad (5.72)$$

$$\phi(\infty) = 1 \quad \text{e} \quad \chi(\infty) = 1, \quad (5.73)$$

o que, claro, já foi observado nas figuras 5.1 e 5.2 das soluções. Assim, substituindo essas informação em  $Q$ , obtemos

$$Q = \frac{1}{2} \text{sen}\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \text{sen}(\delta + \pi). \quad (5.74)$$

Calculando essa quantidade, para diferentes valores de  $\delta$ , conforme observado na tabela abaixo, podemos finalmente inferir a carga do modelo, que é

$$Q = \pm \frac{1}{2}, \quad (5.75)$$

que é característica de estruturas chamadas *half-skyrmion* ou vórtice.

Fase $\delta$	Carga $Q$
0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$\pi$	$+\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Tabela 5.1: Carga

É importante lembrar que o novo modelo, mostrado na equação (5.59), foi criado a partir de dois modelos já conhecidos ( $\phi^4$  e  $\chi^6$ ). E como visto na seção 4.4, o primeiro apresenta  $Q = \pm 1$  e o segundo nos dá  $Q = \pm 1/2$ . Isso significa que quando construímos um potencial de dois campos a partir de dois modelos de um campo, o potencial de maior ordem domina e determina a carga referente ao modelo criado, nesse caso  $Q = \pm 1/2$ .

## 5.4.2 Magnetização

Da definição de magnetização para modelos de dois campos relembremos que

$$\vec{M} = \cos \left[ \frac{\pi}{2}(\phi(r) + \chi(r)) + \delta \right] \hat{\theta} + \sin \left[ \frac{\pi}{2}(\phi(r) + \chi(r)) + \delta \right] \hat{z}, \quad (5.76)$$

assim, utilizando as soluções (5.60), podemos escrever o vetor de magnetização, considerando o potencial (5.59), como

$$\vec{M} = \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{2}{1-s}} - 1}{r^{\frac{2}{1-s}} + 1} + \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}} \right) + \delta \right] \hat{\theta} + \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^{\frac{2}{1-s}} - 1}{r^{\frac{2}{1-s}} + 1} + \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}} \right) + \delta \right] \hat{z}, \quad (5.77)$$

que, claro, seu comportamento depende da especificação da constante de fase  $\delta$  e do parâmetro  $s$ . Como dissemos anteriormente,  $\delta$  controla a direção da magnetização nos extremos e é isso que veremos nos exemplos abaixo.

**Caso  $\delta = 0$**

Nesse caso, quando  $r = 0$  a magnetização aponta no sentido negativo de  $\hat{z}$  e quando  $r \rightarrow \infty$ , aponta no sentido negativo de  $\hat{\theta}$ . O comportamento citado pode ser visto nas figuras 5.6 e 5.7 para diferentes valores de  $s$ . Observe que o comportamento da magnetização nos extremos independe de  $s$ .

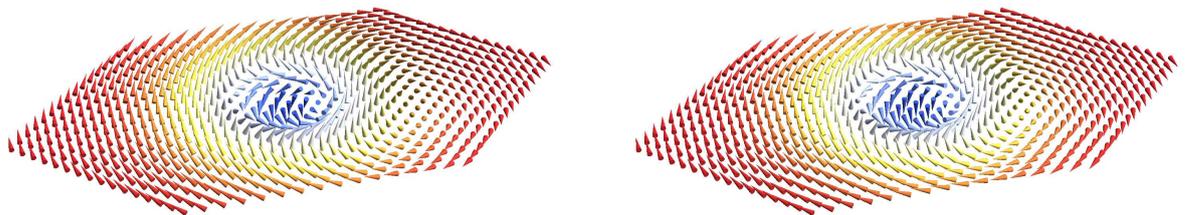


Figura 5.6: Magnetização quando  $\delta = 0$  para  $s = 0.2$  e  $s = 0.4$ , respectivamente.

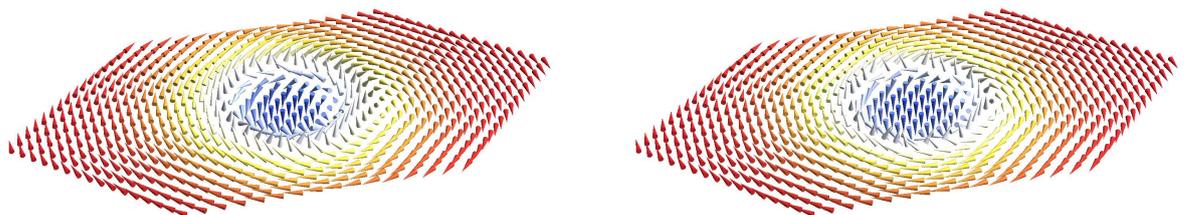


Figura 5.7: Magnetização quando  $\delta = 0$  para  $s = 0.6$  e  $s = 0.8$ , respectivamente.

**Caso  $\delta = \frac{\pi}{2}$**

Considerando  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , encontramos que a magnetização, quando  $r = 0$ , aponta na direção de  $\hat{\theta}$  e quando  $r \rightarrow \infty$ , o vetor de magnetização aponta no sentido negativo de  $\hat{z}$ . O comportamento da magnetização para diferentes valores de  $s$  pode ser visto nas figuras 5.8 e 5.9 abaixo.

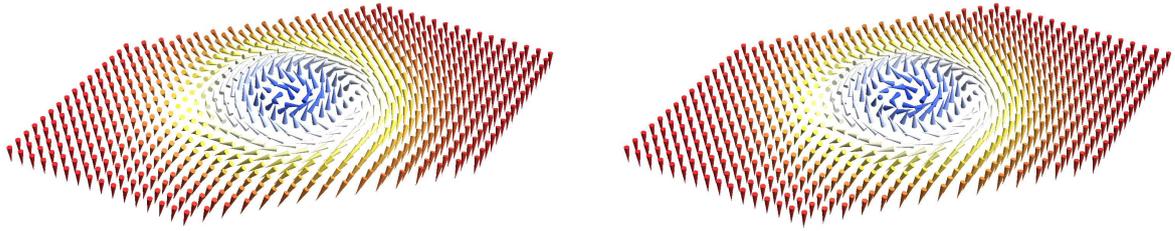


Figura 5.8: Magnetização quando  $\delta = \frac{\pi}{2}$  para  $s = 0.2$  e  $s = 0.4$ , respectivamente.

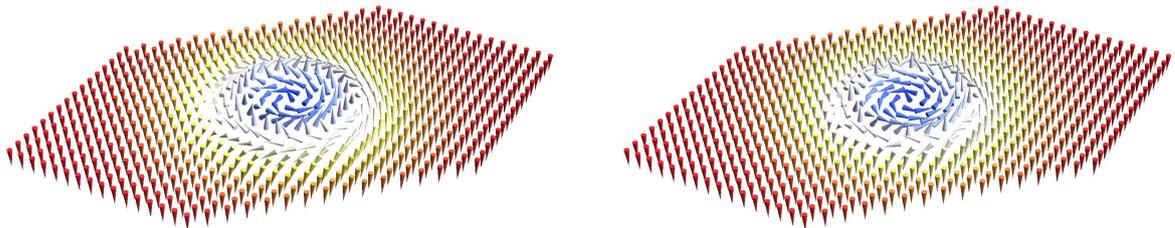


Figura 5.9: Magnetização quando  $\delta = \frac{\pi}{2}$  para  $s = 0.6$  e  $s = 0.8$ , respectivamente.

**Caso  $\delta = \pi$**

Para  $\delta = \pi$ , encontramos que, quando  $r = 0$ , o vetor de magnetização aponta na direção de  $\hat{z}$ . Já quando  $r \rightarrow \infty$ , ele aponta no sentido positivo de  $\hat{\theta}$ . Isso pode ser visto para diferentes valores de  $s$  nas figuras 5.10 e 5.11 .

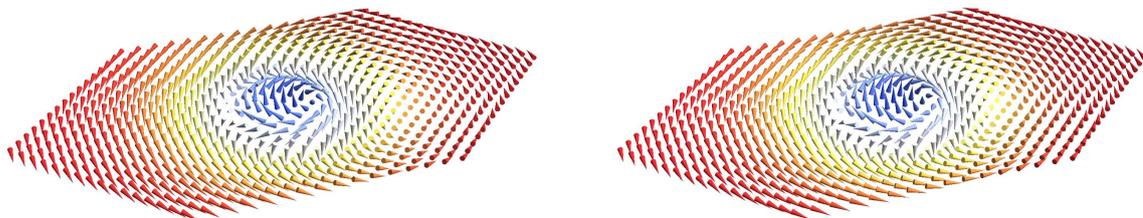


Figura 5.10: Magnetização quando  $\delta = \pi$  para  $s = 0.2$  e  $s = 0.4$ , respectivamente.

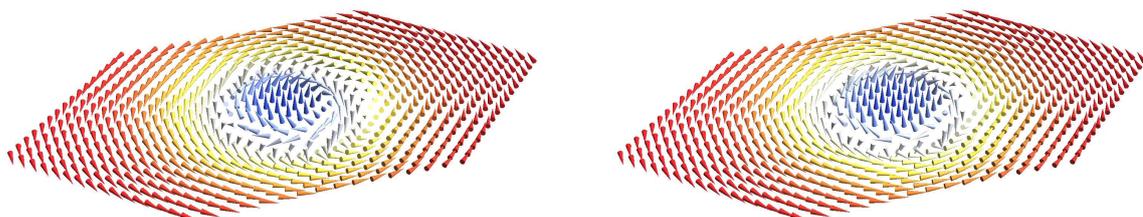


Figura 5.11: Magnetização quando  $\delta = \pi$  para  $s = 0.6$  e  $s = 0.8$ , respectivamente.

**Caso**  $\delta = \frac{3\pi}{2}$

Para  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ , vemos que a magnetização, aponta no sentido negativo de  $\hat{\theta}$ , quando  $r = 0$ . Já quando  $r \rightarrow \infty$ , o vetor de magnetização aponta no sentido positivo de  $\hat{z}$ , como mostrado nas figuras 5.12 e 5.13.

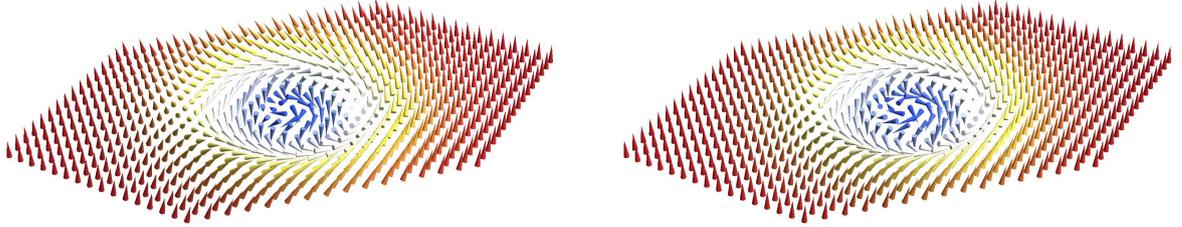


Figura 5.12: Magnetização quando  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  para  $s = 0.2$  e  $s = 0.4$ , respectivamente.

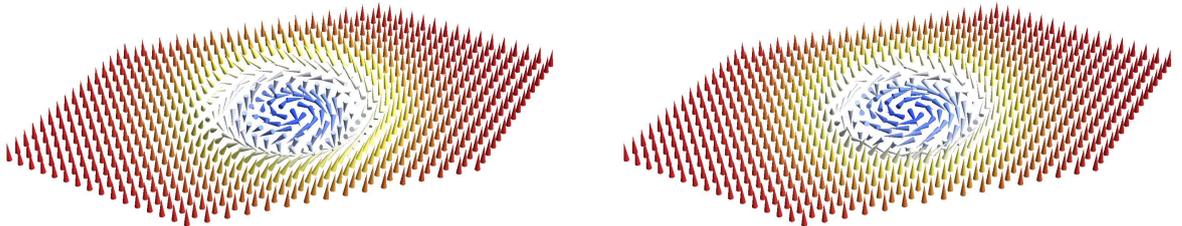


Figura 5.13: Magnetização quando  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  para  $s = 0.6$  e  $s = 0.8$ , respectivamente.

Vimos acima várias situações possíveis para o vetor de magnetização, onde utilizamos um conjunto de cones no plano para representar a excitação magnética helicoidal. Em todos os casos constatamos que o comportamento em  $r = 0$  e  $r \rightarrow \infty$  independe de  $s$ , no entanto, como podemos visualizar nas figuras, para outro valores de  $r$  encontramos que o parâmetro  $s$  modifica consideravelmente o comportamento de  $\vec{M}(r)$ .

### 5.4.3 Análise da Componente $\hat{z}$ da Magnetização

Podemos também ver o comportamento do vetor magnetização a partir da análise da sua componente  $\hat{z}$ , conforme é visto abaixo.

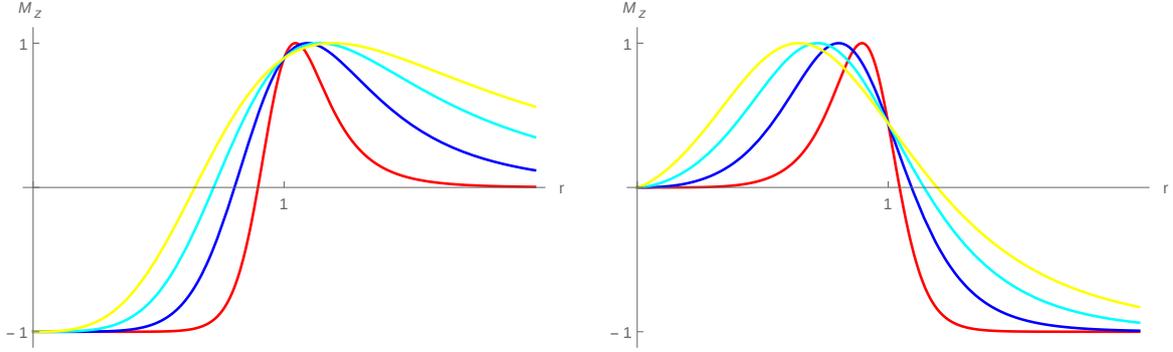


Figura 5.14: Componente  $\hat{z}$  da magnetização. A esquerda com  $\delta = 0$  e a direita com  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$  e linha amarela  $s = 0.2$ .

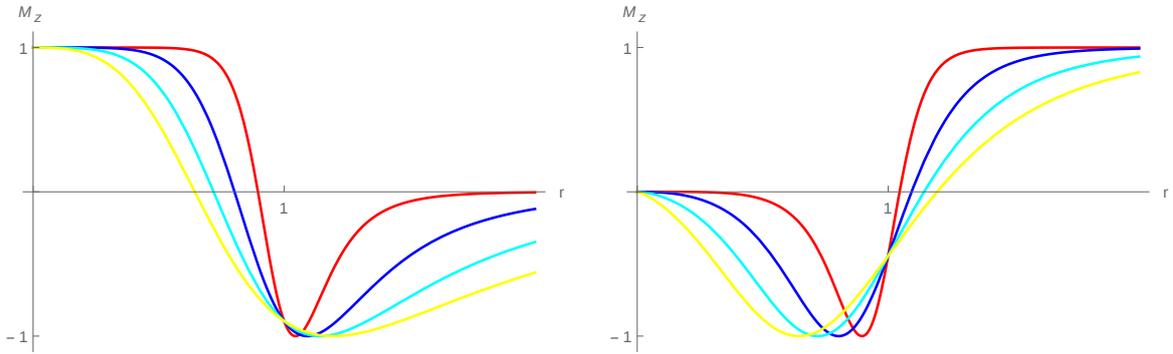


Figura 5.15: Componente  $\hat{z}$  da magnetização. A esquerda com  $\delta = \pi$  e a direita com  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ . Em ambos os casos: linha vermelha  $s = 0.8$ , linha azul escuro  $s = 0.6$ , linha azul claro  $s = 0.4$  e linha amarela  $s = 0.2$ .

Veja, por exemplo, que para o caso em que  $\delta = \pi$ ,  $M_z$  varia de 1 a 0, passando por  $-1$ , conforme  $r$  cresce. De fato esse comportamento não havia sido observado nos modelos apresentados na seção 4.4. No entanto podemos perceber que a componente  $\hat{z}$  se comporta como um híbrido proveniente dos dois modelos prévios, tendo o comportamento assintótico característico do apresentado pelo potencial  $\phi^6$ .

Observe também que a variação da componente  $M_z$  é mais suave na medida em que  $s$  tende a 0 e mais abrupta quando  $s$  tende a 1. Essa situação, como comentado anteriormente, nos

mostra que  $s$  está diretamente relacionado com o tamanho da região de transição da estrutura topológica.

#### 5.4.4 Raio Médio de Matéria

Podemos finalmente, investigar o tamanho do *skyrmion* ao calcularmos o raio médio de matéria  $\bar{r}$ , que é dado por

$$\bar{r} = \frac{\int_0^\infty \rho(r)r^2 dr}{\int_0^\infty \rho(r)r dr}. \quad (5.78)$$

Então utilizando (5.61), chegamos a

$$\bar{r} = \frac{1}{76}\pi(s^2 - 1)(8s - 27) \sec\left(\frac{\pi s}{2}\right). \quad (5.79)$$

Podemos observar que  $\bar{r}$  diminui, a medida que  $s$  aumenta, no entanto, observamos também que, quanto mais próximo de 1 está o  $s$ , o  $\bar{r}$  também se aproxima de 1.

$s$	Raio médio $\bar{r}$
0.2	1.05983
0.4	1.02149
0.6	0.999196
0.8	0.992027

Tabela 5.2: Variação  $\bar{r}$  quando  $s$  varia.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste capítulo iremos sumarizar as principais discussões e resultados alcançados ao longo desta dissertação.

Iniciamos o trabalho apresentando a teoria de campo escalar real que descreve sistemas unidimensionais, a partir da qual introduzimos o conceito de defeitos topológicos. Como visto, há diversas situações físicas que podem ser investigadas utilizando modelos não-lineares cujas soluções podem ser classificadas como defeitos.

Após fazer uma revisão abordando as principais características de defeitos topológicos unidimensionais, bem como de algumas técnicas fundamentais no desenvolvimento do trabalho, por exemplo o método da extensão [12], exploramos configurações chamadas *twistons* (veja [6, 9, 11]).

Ao resgatarmos as discussões sobre *twistons* em cristais de polietileno, verificamos a necessidade de um potencial explícito, com soluções analíticas, que não apresentasse problemas com degenerescência infinita. O objetivo foi alcançado com a utilização do método de extensão, a partir do qual encontramos uma família de potenciais que descrevem naturalmente o comportamento dessas estruturas. Mais ainda, o potencial encontrado, além de não possuir nenhum problema com linha de mínimos, apresenta soluções analíticas características dessas configurações. Encontramos também que a energia BPS para o novo modelo é consistente com os resultados previamente encontrados. Como dissemos, essas discussões foram compiladas em formato de artigo, que pode ser visto em [40].

Dada a eficiência do método, vemos que há outros modelos descrevendo cristais no polietileno baseados em potenciais seno-Gordon, por exemplo (veja [51]), que podem ser revisitados utilizando essa mesma perspectiva.

Numa segunda parte do trabalho, revisamos também defeitos topológicos em configurações planares com simetria radial. Apresentamos estruturas conhecidas como *skyrmions*, numa perspectiva como a vista em [21, 28] com aplicação em materiais magnéticos.

A partir desse estudo, procuramos descrever esses sistemas sugerindo um potencial de dois campos com interações não-triviais. Para criarmos o novo modelo fizemos novamente o uso do método de extensão, cuja aplicação nos rendeu um potencial efetivo de dois campos com soluções analíticas características de defeitos do *skyrmion*.

Com o novo modelo conseguimos extrair características interessantes. O número de *skyrmion* correspondente é  $Q = \pm 1/2$ , que representa estruturas conhecidas como *half-skyrmion* ou vórtices.

Ainda sobre a construção do modelo citado, verificamos que o potencial de maior ordem, a partir do qual o novo modelo foi gerado, teve domínio no valor da carga topológica do novo modelo. Acontecendo o mesmo com os limites assintóticos da componente  $\hat{z}$  da magnetização.

Além disso, conseguimos representar diferentes situações possíveis da excitação magnética helicoidal.

Essa é uma perspectiva interessante de abordar *skyrmions*, uma vez que nos dá muitas possibilidades de comportamento para a magnetização e densidade de carga, por exemplo. Se encontrarmos na literatura evidências experimentais de que existem estruturas se comportando da maneira apresentada, temos uma ferramenta que pode descrever mais realisticamente configurações da magnetização em materiais magnéticos.

# Referências Bibliográficas

- [1] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2 ed., 2007.
- [2] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland personal library, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982.
- [3] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [4] E. J. A. Curi, “Férmions em uma parede de bloch.,” dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Física, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, 2017.
- [5] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2004.
- [6] M. Mansfield and R. Boyd, “Molecular motions, the  $\alpha$  relaxation, and chain transport in polyethylene crystals,” *J. Polym Sci. Phys.*, vol. 16, pp. 1227–1252, 1978.
- [7] F. Zhang and M. A. Collins, “Topological solitons in polyethylene crystals,” *Phys. Rev. E*, vol. 49, pp. 5804–5811, Jun 1994.
- [8] J. L. Skinner and P. G. Wolynes, “Transition state and brownian motion theories of solitons,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 73, no. 8, pp. 4015–4021, 1980.
- [9] D. Bazeia and E. Ventura, “Topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 303, pp. 341–346, apr 1999.
- [10] E. Ventura, A. Simas, and D. Bazeia, “Exact topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 320, no. 5, pp. 587 – 593, 2000.

- [11] A. de Souza Dutra, J. R. dos Santos, and O. C. Winter, “Extended class of exact twistons and crystalline polyethylene,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 36, pp. 365–402, 2010.
- [12] D. Bazeia, L. Losano, and J. R. L. Santos, “Kinklike structures in scalar field theories: From one-field to two-field models,” *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 1615 – 1620, Apr 2013.
- [13] T. Skyrme, “A unified field theory of mesons and baryons,” *Nuclear Physics*, vol. 31, pp. 556 – 569, 1962.
- [14] N. Nagaosa and Y. Tokura, “Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions,” *Nature nanotechnology*, vol. 8, pp. 899–911, 12 2013.
- [15] J.-i. Fukuda and S. Zumer, “Quasi-two-dimensional skyrmion lattices in a chiral nematic liquid crystal,” *Nature Communications*, vol. 2, March 2011.
- [16] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, “Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum hall effect at small zeeman energies,” *Phys. Rev. B*, vol. 47, pp. 16419–16426, Jun 1993.
- [17] D. F. Agterberg, E. Babaev, and J. Garaud, “Microscopic prediction of skyrmion lattice state in clean interface superconductors,” *Phys. Rev. B*, vol. 90, p. 064509, Aug 2014.
- [18] T.-L. Ho, “Spinor bose condensates in optical traps,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 742–745, Jul 1998.
- [19] K. Everschor-Sitte and M. Sitte, “Real-space berry phases: Skyrmion soccer,” *Journal of Applied Physics*, vol. 115, no. 17, p. 172602, 2014.
- [20] X. Zhang, M. Ezawa, and Y. Zhou, “Magnetic skyrmion logic gates: conversion, duplication and merging of skyrmions,” *Scientific Reports*, vol. 5, 2015.
- [21] D. Bazeia, M. Doria, and E. Rodrigues, “Topological excitations in magnetic materials,” *Physics Letters A*, vol. 380, no. 22, pp. 1947 – 1952, 2016.
- [22] S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, “Skyrmion lattice in a chiral magnet,” *Science*, vol. 323, pp. 915–9, 03 2009.

- [23] N. Romming, C. Hanneken, M. Menzel, J. E. Bickel, B. Wolter, K. von Bergmann, A. Kubetzka, and R. Wiesendanger, “Writing and deleting single magnetic skyrmions,” vol. 341, Aug 2013.
- [24] J. Sampaio, V. Cros, S. Rohart, A. Thiaville, and A. Fert, “Nucleation, stability and current-induced motion of isolated magnetic skyrmions in nanostructures,” *Nature Nanotechnology*, vol. 8, Oct 2013.
- [25] R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, and G. Finocchio, “A strategy for the design of skyrmion racetrack memories,” *Scientific Reports*, vol. 4, Oct 2014.
- [26] I. Dzyaloshinsky, “A thermodynamic theory of weak ferromagnetism of antiferromagnetics,” *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 4, no. 4, pp. 241 – 255, 1958.
- [27] T. Moriya, “Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism,” *Phys. Rev.*, vol. 120, pp. 91–98, Oct 1960.
- [28] D. Bazeia, J. G. G. S. Ramos, and E. I. B. Rodrigues, “Topological strength of magnetic skyrmions,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 423, pp. 411–420, 2017.
- [29] D. Bazeia and E. Rodrigues, “Semi-compact skyrmion-like structures,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 432, pp. 112 – 118, 2017.
- [30] E. B. Bogomol’nyi, “Stability of classical solutions,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 24, p. 449, 1976.
- [31] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, “Exact classical solution for the ’t hooft monopole and the julia-zee dyon,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 760–762, Sep 1975.
- [32] D. Bazeia, L. Losano, and J. M. C. Malbouisson, “Deformed defects,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 101701, Nov 2002.
- [33] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, “New global defect structures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 241601, Dec 2003.
- [34] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1992.

- [35] D. Bazeia, *Campos escalares em ação*. Tese, Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2004.
- [36] R. Jackiw, “Quantum meaning of classical field theory,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 49, pp. 681–706, 1977.
- [37] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, and R. F. Ribeiro, “Topological defects and the trial orbit method,” *Modern Physics Letters A*, vol. 17, no. 29, pp. 1945–1953, 2002.
- [38] A. de Souza Dutra, “General solutions for some classes of interacting two field kinks,” *Physics Letters B*, vol. 626, no. 1, pp. 249 – 255, 2005.
- [39] J. L. Skinner and Y. H. Park, “Soliton model for dielectric relaxation in crystalline polyethylene. comparison with experiment,” *Macromolecules*, vol. 17, no. 9, pp. 1735–1740, 1984.
- [40] J. R. L. Santos, D. S. S. Borges, and I. O. Moreira, “New family of potentials with analytical twiston-like solutions,” Jun 2018. arXiv:1806.00539. Em submissão.
- [41] B. Piette, B. Schroers, and W. Z. Zakrzewski, “Multisolitons in a two-dimensional skyrme model,” *Z. Phys. C - Particles and Fields*, vol. 65, pp. 165–174, March 1995.
- [42] E. I. B. Rodrigues, *Estruturas localizadas em materiais magnéticos e em supercondutores*. Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2017.
- [43] T. Uchiyama, “An extended hadron model based on the exact solution of the nonlinear field equation,” *Progress of theoretical physics*, vol. 56, 09 1976.
- [44] T. Uchiyama, “Extended hadron model based on the modified sine-gordon equation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, 12 1976.
- [45] A. N. Bogdanov, U. K. Röbber, M. Wolf, and K.-H. Müller, “Magnetic structures and reorientation transitions in noncentrosymmetric uniaxial antiferromagnets,” *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 214410, Dec 2002.
- [46] P. Bak and M. H. Jensen, “Theory of helical magnetic structures and phase transitions in mnsi and fege,” *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 13, no. 31, p. L881, 1980.

- [47] U. K. Röbler, A. N. Bogdanov, and C. Pfleiderer, “Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals,” *Nature*, vol. 442, Aug 2017.
- [48] J. Han, *Skyrmions in Condensed Matter*. Springer Tracts in Modern Physics, Springer International Publishing, 2017.
- [49] S. Banerjee, J. Rowland, O. Erten, and M. Randeria, “Enhanced stability of skyrmions in two-dimensional chiral magnets with rashba spin-orbit coupling,” *Phys. Rev. X*, vol. 4, p. 031045, Sep 2014.
- [50] J.-V. Kim, “Role of nonlinear anisotropic damping in the magnetization dynamics of topological solitons,” *Phys. Rev. B*, vol. 92, p. 014418, Jul 2015.
- [51] A. Hammad, T. Swinburne, H. Hasan, S. Del Rosso, L. Iannucci, and A. P. Sutton, “Theory of the deformation of aligned polyethylene,” *Proceedings of The Royal Society A*, 08 2015.

# Apêndice A

## Cálculo da Carga Topológica para Dois Campos

Lembremos que o cálculo da carga topológica de um *skyrmion* pode ser feito através de

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{M} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right), \quad (\text{A.1})$$

no entanto  $\vec{M} = \vec{M}(r)$  foi previamente definido como

$$\vec{M} = \cos \Theta(r) \hat{\theta} + \sin \Theta(r) \hat{z}, \quad (\text{A.2})$$

na qual  $\Theta(r) = \frac{\pi}{2} [\phi(r) + \chi(r)] + \delta$ .

Visto que a magnetização é dada em coordenadas cilíndricas, vamos efetuar uma mudança de coordenadas em (A.1).

Primeiramente lembremos que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \hat{z} \times \hat{r}. \quad (\text{A.3})$$

Derivando  $x$  e  $y$ , que são funções de  $r$  e  $\theta$ , podemos escrever o resultado matricialmente como  $D_1 = MD_2$ , ou seja

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

de forma que, multiplicando pela inversa de  $M$  em ambos os lados pela esquerda, obtemos

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado, como  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(x/y)$ , temos também que

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy \quad (\text{A.6})$$

e

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy. \quad (\text{A.7})$$

Assim, comparando as equações acima com (A.5), obtemos que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (\text{A.8})$$

Note que podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (\text{A.9})$$

mas substituindo na equação acima os resultados encontrados em (A.8), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo o mesmo procedimento para  $\frac{\partial}{\partial y}$ , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{A.11})$$

Utilizando também que  $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$  e  $\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ , podemos calcular as derivadas

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = -(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

e

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} = -(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (\text{A.13})$$

ou seja,

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \hat{r} \frac{\sin \theta}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} = -\hat{r} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (\text{A.14})$$

Com as informações acima podemos finalmente calcular as derivadas da magnetização em (A.1), assim

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = (-\sin \Theta(r) \hat{\theta} + \cos \Theta(r) \hat{z}) \frac{\partial \Theta(r)}{\partial x} + \cos \Theta(r) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}. \quad (\text{A.15})$$

Sabendo que  $\Theta(r) = \frac{\pi}{2} [\phi(r) + \chi(r)] + \delta$  e substituindo (A.10) e (A.14) na equação acima, temos finalmente que

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = (-\sin \Theta(r) \hat{\theta} + \cos \Theta(r) \hat{z}) \left[ \frac{\pi}{2} \cos \theta \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right) \right] + \cos \Theta(r) \frac{\sin \theta}{r} \hat{r}. \quad (\text{A.16})$$

Fazendo o mesmo procedimento, obtemos também que

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = (-\operatorname{sen}\Theta(r)\hat{\theta} + \cos\Theta(r)\hat{z}) \left[ \frac{\pi}{2} \cos\theta \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right) \right] - \cos\Theta(r) \frac{\cos\theta}{r} \hat{r}. \quad (\text{A.17})$$

Com os resultados encontrados, podemos finalmente calcular o produto vetorial

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = -\frac{\pi \cos\Theta(r)}{2r} \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right) \vec{M}. \quad (\text{A.18})$$

Voltando agora na equação (A.1), vamos efetuar a mudança  $dx dy = r dr d\theta$ , de forma que

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr \left\{ \vec{M} \cdot \left[ -\frac{\pi \cos\Theta(r)}{2r} \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right) \vec{M} \right] \right\}, \quad (\text{A.19})$$

mas lembremos que  $\vec{M} \cdot \vec{M} = 1$ , então

$$Q = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr \left[ \frac{\pi}{2} \cos\Theta(r) \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{d\chi}{dr} \right) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Agora observe que podemos reescrever o integrando, na forma

$$Q = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{d \operatorname{sen}\Theta(r)}{dr}, \quad (\text{A.21})$$

assim, finalmente, obtemos que

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\Theta(r=0) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\Theta(r \rightarrow \infty). \quad (\text{A.22})$$