UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO

JANDEILSON SANTOS DA SILVA

EXISTÊNCIA DE ATRATORES GLOBAL E EXPONENCIAL PARA EQUAÇÃO DE CAMPOS NEURAIS

CAMPINA GRANDE - PB
2021

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Atratores Global e Exponencial para Equação de Campos Neurais

por

Jandeilson Santos da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

S586e Silva, Jandeilson Santos da.
Existência de atratores global e exponencial para equação de campos neurais / Jandeilson Santos da Silva. – Campina Grande, 2021.
151 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva".
Referências.

1. Equação de Campos Neurais. 2. Atrator Global. 3. Atrator Exponencial. 4. Dimensão Fractal. I. Silva, Severino Horácio da. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Existência de Atratores Global e Exponencial para Equação de Campos Neurais

por

Jandeilson Santos da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 23/02/2021 por:

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Pammella Queiroz de Souza

Prof. Dr. Pammela Queiroz de Souza

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2021

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, personagem principal em cada conquista.

Aos meus pais João e Tereza, por todo amor, sabedoria e ensinamentos de vida que me levaram a tomar o caminho que percorro hoje.

A minha esposa Silmara, por todo amor, apoio e paciência. Ao meu filho João Sérgio, cuja existência é incentivo para o alcance de novas conquistas.

As minhas irmãs Janyelle, Jandeilma, Jarlany e Jardilane pelo apoio, incentivo e alegria com minhas conquistas.

Aos Professores Severino Horácio e Aldo Trajano, pela orientação nos estudos, ensinamentos, dedicação, conselhos e paciência.

Aos professores Aldo Trajano, Flank Bezerra e Pâmella Queiroz, por terem aceitado compor a banca de avaliação deste trabalho, juntamente com o orientador Severino Horácio. Agradeço pela disponibilidade em ler, avaliar e dar sugestões valiosas.

Aos professores da UAMat que, de uma forma ou outra, contribuíram com minha formação acadêmica.

Aos colegas de estudo do PPGMat.

Ao apoio financeiro da CAPES.

Dedicatória

Aos meus pais, irmãs, esposa e filho.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns resultados abstratos da teoria de semigrupos e aplicamos tais resultados no estudo da dinâmica assintótica da equação de campos neurais, onde demonstramos resultados sobre boa posição e existência de atratores global e exponencial. Além disso, como consequência da existência do atrator exponencial, obtemos a finitude da dimensão fractal do atrator global.

Abstract

In this work we study some abstract results on the semigroup theory and apply these results in the study of asymptotic dynamics of the neural field equation, where we demonstrate results about well posedness, existence of global attractor and existence of exponential attractor. Furthermore, as a consequence of the existence of the exponential attractor, we obtain that the fractal dimension of the global attractor is finite.

Conteúdo

Introdução

A necessidade da teoria de sistemas dinâmicos está fundamentada, principalmente, em problemas do mundo real oriundos de diversas áreas, como física, mecânica e biologia, por exemplo, no que diz respeito a oferecer modelos matemáticos para tais problemas. Os modelos obtidos, em geral, são equações diferenciais denominadas *equações de evolução*, cuja função incógnita depende de uma variável espacial e de uma variável temporal. Sua evolução ao longo do tempo pode ser contínua (o estado do sistema é avaliado continuamente) ou discreta (o estado do sistema é avaliado em determinados momentos, por exemplo, a cada minuto ou a cada hora).

Um dos principais objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é o estudo do *comportamento assintótico* dos modelos considerados, que busca compreender e dar previsões, com o máximo de precisão possível, a respeito das soluções. Com este propósito, a *teoria de semigrupos* aparece como uma importante ferramenta, cuja utilidade vêm sendo explorada em estudos e pesquisas, desde décadas recentes até os dias atuais.

Neste trabalho, nos interessamos por um sistema dinâmico cujo comportamento pode ser descrito por uma família de operadores (não necessariamente lineares) $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, onde X é um espaço de Banach. A família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é chamada de semigrupo e satisfaz algumas propriedades especiais. Em se tratando do comportamento assintótico deste sistema, uma questão de grande importância é a existência de um conjunto compacto $\mathcal{A} \subset X$, que é invariante pela ação dos operadores $S(t)$ (isto é, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$) e que goza da seguinte propriedade: a partir de um certo tempo, a ação do semigrupo sobre conjuntos limitados de X, fica "próxima" (em um determinado sentido) de $\mathcal{A}$. Um conjunto $\mathcal{A}$ nestas condições é dito um *atrator global* para o semigrupo.

Em geral, a existência de um atrator global está atrelada à existência de um conjunto $\mathcal{B}$, chamado *conjunto absorvente*, com a propriedade de que, $S(t)B \subset \mathcal{B}$ para t suficientemente grande, qualquer que seja $B \subset X$ limitado. Quanto ao *atrator exponencial*, este deve gozar de algumas outras propriedades que serão melhor esclarecidas ao longo do texto. Contudo, sua essência, conforme o nome sugere, está no fato de que a ideia de "proximidade" antes referida ocorre sob uma estimativa que decai exponencialmente ao longo do tempo.

O principal objetivo desta dissertação, é mostrar a existência de atratores, global e exponencial, para o fluxo gerado pela equação de campos neurais em um determinado espaço de fases. Mais precisamente, estudamos o problema de evolução não local

$$u_t(x,t) = -u(x,t) + \tilde{J} * (f \circ u)(x,t) + h, \ x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ t \geq 0 \tag{1}$$

sob a condição de periodicidade $u(-\tau, t) = u(\tau, t)$. Na equação (1) h é uma constante positiva, $\tilde{J} \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função par não negativa com suporte em $[-1, 1]$, f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e o símbolo $*$ denota a convolução de funções em $\mathbb{R}$. A equação (1) foi introduzida na literatura por Wilson e Cowan (ver [23]) para modelar a atividade neuronal . Devido à condição de periodicidade é possível considerar um problema equivalente em $\mathbb{S}^1$,

$$u_t(w,t) = -u(w,t) + J * (f \circ u)(w,t) + h, \ w \in \mathbb{S}^1 \ \text{ e } \ t \geq 0, \tag{2}$$

estabelecendo uma relação entre as soluções de (1) e (2). A partir daí, estudamos existência de atratores global e exponencial para o semigrupo gerado pela equação (2) no espaço de fases $L^2(\mathbb{S}^1)$.

A existência de atrator global para o problema (2) foi abordada em um trabalho de Da Silva [20]. Considerando f Lipschitziana e assumindo algumas hipóteses técnicas envolvendo J e a constante de Lipschitz de f, o autor prova a existência de atrator global em $L^2(\mathbb{S}^1)$ e em seguida estuda da semicontinuidade superior de uma família destes atratores. Apoiado nestes resultados, e em resultados abstratos de Efendiev [5], o trabalho de Shomberg [21] trata da existência de atrator exponencial para o problema (2) e também estuda a semicontinuidade superior de uma família de atratores exponenciais.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1, seguindo Temam [22], apresentamos alguns conceitos e resultados sobre a Teoria de Semigrupos.

Em particular, exploramos a questão da invariância de conjuntos sob a ação de um semigrupo. No Capítulo 2, baseados no mesmo autor, exploramos ideias sobre conjuntos absorventes e atratores globais. Em particular, vemos que a existência de um atrator global garante a existência de um conjunto absorvente e que, com a adição de algumas hipóteses no espaço considerado e nos operadores $S(t)$, a existência de um conjunto absorvente limitado nos dá a existência de um atrator global. Em seguida, apoiados em Milani [17] e Efendiev [5], introduzimos o conceito de atrator exponencial e apresentamos um resultado que assegura a existência de um conjunto com todas as propriedades de atrator exponencial para um semigrupo discreto, a menos de compacidade.

No Capítulo 3, baseados em [20] e [21], usamos a teoria abstrata explorada nos capítulos anteriores para obter atratores, global e exponencial, para o semigrupo gerado pela equação (2) no espaço de fases $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Por fim, no Apêndice podem ser encontrados resultados de áreas diversas da matemática que foram utilizados no decorrer do texto.

Capítulo 1

Alguns Conceitos e Resultados Introdutórios da Teoria de Semigrupos

Neste capítulo, seguindo o livro do Temam [22] apresentamos alguns conceitos e resultados relativos à teoria de Semigrupos.

1.1 Semigrupos de Operadores

Consideraremos sistemas dinâmicos cujo estado é descrito por um elemento $u = u(t)$ de um espaço métrico H. Na maioria dos casos e, em particular, para sistemas dinâmicos associados a Equações Diferenciais Ordinárias ou Parciais, o parâmetro t varia continuamente em $\mathbb{R}$ ou em algum intervalo de $\mathbb{R}$. Contudo, em alguns casos t pode assumir apenas valores discretos, $t \in \mathbb{Z}$ ou $t \in A$ com $A \subset \mathbb{Z}$.

Definição 1.1 *Seja H um espaço métrico. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores (não necessariamente lineares) $S(t) : H \to H$, é um semigrupo se:*

(*i*) $S(t+s) = S(t) \cdot S(s), \ \forall t, s \geq 0$

(*ii*) $S(0) = I$ *(onde I é a identidade em H).*

Quando, além das duas condições acima, tivermos,

(*iii*) *H é um espaço de Banach, $S(t)x$ é contínuo em t e x e tem derivada de Fréchet contínua em x até ordem r, para $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times H$,*

diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C^r-semigrupo.

Nos interessamos por sistema dinâmicos cuja evolução pode ser descrita por uma família de operadores $S(t)$, $t \geq 0$, que mapeiam H sobre si mesmo e gozam da propriedade usual de semigrupo, isto é, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo. Mais claramente, essa descrição se dá da seguinte maneira: se φ é o estado do sistema dinâmico no tempo s então $S(t)\varphi$ é o estado do sistema dinâmico no tempo $t+s$. Assim,

$$u(t) = S(t)u(0), \tag{1.1}$$

$$u(t+s) = S(t)u(s), \;\; s,t \geq 0. \tag{1.2}$$

Com efeito,

$$S(t)u(0) = u(t+0) = u(t)$$

e

$$S(t)u(s) = u(t+s).$$

De (1.2) segue que $S(t)u(s) = S(s)u(t)$.

Exemplo 1.1 *Seja X um espaço de Banach. Se $F : X \to X$ é uma função Lipschitziana, então a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

define um semigrupo $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$.

Solução: Dado $v \in X$, denotaremos por $u(t,v)$ a solução da equação $u'(t) = F(u(t))$ com condição inicial $u(0) = v$. Note inicialmente que o problema (1.3) é equivalente à equação integral

$$u(t) = u(t,u_0) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \tag{1.4}$$

Realmente, se vale (1.3), integrando $u'(s) = F(u(s))$ de 0 a t obtemos a equação acima. Reciprocamente, derivando (1.4) com relação a t obtemos $u'(t) = F(u(t))$ e por um cálculo direto obtemos que $u(0) = u_0$.

Agora dado $u_0 \in X$ defina, para cada $t \geq 0$, $S(t) : X \to X$ por

$$S(t)u_0 = u(t,u_0).$$

Daí, para qualquer $u_0 \in X$ tem-se, por (1.4),

$$S(0)u_0 = u(0,u_0) = u_0$$

e portanto $S(0) = I$. Além do mais, dados $t, s \geq 0$

$$S(t+s)u_0 = u(t+s, u_0) \quad \text{e} \quad S(t)S(s)u_0 = u\left(t, S(s)u_0\right) = u\left(t, u(s, u_0)\right).$$

Observe que se u é solução do problema (1.3) então, para todos $t, s \geq 0$, $u(t+s, u_0) = u\left(t, u(s, u_0)\right)$. De fato, fixe $s \geq 0$ e considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = F(u(t)) \\ u(0) = u(s, u_0) \end{cases}. \tag{1.5}$$

Defina para todo $t \geq 0$, $y(t) = u(t+s, u_0)$ e $z(t) = u(t, u(s, u_0))$. Vejamos agora cada função separadamente. Temos,

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}u(t+s, u_0) = F(u(t+s, u_0)) = F(y(t))$$

e, como $u(s) = u(s, u_0)$ (pois u é solução do problema (1.3)),

$$y(0) = u(0+s) = u(s) = u(s, u_0).$$

Portanto y é solução do problema (1.5). Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}u(t, u(s, u_0)) = F(u(t, u(s, u_0))) = F(z(t))$$

e

$$z(0) = u(0, u(s, u_0)) = u(s, u_0).$$

Logo, z também é solução de (1.5) e, pela unicidade de solução segue que $u(t+s, u_0) = u\left(t, u(s, u_0)\right)$. Desse modo,

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0$$

e pela arbitrariedade de $u_0 \in X$ resulta que

$$S(t+s) = S(t)S(s),$$

como queríamos. $\square$

Observação 1.1 Considerando que F é uma função Lipschitziana, a existência e unicidade de solução para os problemas considerados no Exemplo 1.1 é assegurada pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard (ver Apêndice, Teorema A.10).

Nos casos que nos interessam particularmente, o semigrupo $S(t)$ será determinado pela solução de uma equação diferencial parcial ou ordinária. No caso de equações diferenciais ordinárias, os teoremas gerais de existência e unicidade de solução, fornecem a definição dos operadores $S(t)$. Por outro lado, em se tratando de dimensão infinita, não existem teoremas de existência e unicidade de solução suficientes em geral. Sendo assim, para o estudo dos sistemas dinâmicos dados, pode ser necessário em um momento prévio, provar a existência dos operadores $S(t)$ satis fazendo as propriedades desejadas.

Por enquanto, assumiremos apenas qo seguinte: $S(t)$ é um operador contínuo (não necessariamente linear) de H em si mesmo, para todo $t \geq 0$.

Os operadores $S(t)$ podem ou não ser injetivos; a propriedade da injetividade de $S(t)$ é equivalente a propriedade “unicidade retrógrada" para o sistema dinâmico. Quando $S(t), t > 0$, é injetivo denotamos por $S(-t)$ sua inversa que leva $S(t)(H)$ em H. Obtemos então uma família de operadores $S(t),\ t \in \mathbb{R}$, que satisfazem as propriedades da definição de semigrupo para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$. Um fato geral é que, em dimensão infinita, mesmo se os operadores $S(t),\ t > 0$, são definidos em toda parte, os operadores $S(t),\ t < 0$, não são, em geral, definidos em todo H.

Definição 1.2 *Para $u_0 \in H$, a órbita ou trajetória iniciando em u_0 é o conjunto*

$$\bigcup_{t\geq 0} \{S(t)u_0\}\,.$$

Analogamente, quando existir, uma órbita ou trajetória finalizando em u_0, é um conjunto de pontos

$$\bigcup_{t\leq 0} \{u(t)\}\,,$$

onde u é uma aplicação de $(-\infty, 0]$ em H tal que $u(0) = u_0$ e $u(t+s) = S(t)u(s)$, para quaisquer s, t com $s \leq 0,\ s+t \leq 0$ e $t \geq 0$.

Temos então o seguinte resultado.

Proposição 1.1 *Suponha que os operadores $S(t),\ t > 0$, são injetivos e sejam $t \geq 0,\ s \leq 0,\ t+s \leq 0$. Então*

$$\left.\begin{array}{r} u(0) = u_0 \\ u(t+s) = S(t)u(s) \end{array}\right\} \Leftrightarrow u(t) \in S(-t)^{-1}(\{u_0\}),\ \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Se vale

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(t+s) = S(t)u(s) \end{cases}$$

então, para qualquer $t \geq 0$,

$$S(-t)u(t) = u(-t+t) = u(0) = u_0$$

de modo que $u(t) \in S(-t)^{-1}(\{u_0\})$. Reciprocamente, suponha que

$$u(t) \in S(-t)^{-1}(\{u_0\}),\ \forall t \geq 0,$$

isto é,

$$S(-t)u(t) = u_0,\ \forall t \geq 0.$$

Tomando $t = 0$ obtemos

$$S(0)u(0) = u_0 \Rightarrow Iu(0) = u_0 \Rightarrow u(0) = u_0.$$

Além disto, para qualquer $t \geq 0$ temos,

$$u(t) = \underbrace{S(t)S(-t)}_{=I}u(t) = S(t)u_0 = S(t)u(0)$$

de onde vem que

$$u(t+s) = S(t+s)u(0) = S(t)S(s)u(0) = S(t)u(s),$$

finalizando a demonstração. ■

As órbitas iniciando e terminando em u_0 são também chamadas de *órbitas positiva e negativa* em u_0, respectivamente. Uma *órbita completa* contendo u_0 é a união das órbitas positiva e negativa correspondentes em u_0.

Definição 1.3 *Para $u_0 \in H$ e para $A \subset H$, definimos os conjuntos ω-limite de u_0 e de A como sendo, respectivamente,*

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0},$$

e

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)(A)},$$

onde o fecho é tomado relativamente a H. Analogamente, quando os operadores $S(t)$ são injetivos (caso no qual o sistema dinâmico está definido em $(-\infty, 0]$), o conjuntos α-limite de u_0 e de A são definidos, respectivamente por,

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}(\{u_0\})},$$

e

$$\alpha(A) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}(A)}.$$

Proposição 1.2 *Dado $A \subset H$ tem-se:*
(i) $\varphi \in \omega(A)$ se, e somente se, existe muma sequência de elementos $\varphi_n \in A$ e uma sequência $t_n \to +\infty$ tais que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

(ii) $\varphi \in \alpha(A)$ se, e somente se, existem uma sequência ψ_n convergindo para φ em H e uma sequência $t_n \to +\infty$, tais que,

$$\varphi_n = S(t_n)\psi_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: (i) $(\Rightarrow)$ Se $\varphi \in \omega(A)$ então

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)(A)}, \ \forall s \geq 0.$$

Dados $\varepsilon > 0$ e $s \geq 0$ tem-se que

$$\left(B(\varphi, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{t \geq s} S(t)(A) \right) \right) \neq \emptyset.$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(B(\varphi, 1/n) \cap \left(\bigcup_{t \geq n} S(t)(A) \right) \right) \neq \emptyset.$$

Escolha para cada $n \in \mathbb{N}$ únicos $t_n \geq n$ e $\varphi_n \in A$ tais que $S(t_n)\varphi_n \in B(\varphi, 1/n)$. Formamos assim sequências $(\varphi_n) \subset A$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$, com $t_n \to +\infty$, tais que

$$S(t_n)\varphi_n \in B(\varphi, 1/n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$0 \leq \|S(t_n)\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

implicando que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

$(\Leftarrow)$ Suponha que existam sequências nas condições estabelecidas. Dado $s \geq 0$, como $t_n \to \infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow t_n \geq s.$$

Sendo assim, considerando $n \geq n_0$

$$S(t_n)(A) \subset \bigcup_{t \geq s} S(t)(A)$$

Desde que $S(t_n)\varphi_n \in S(t_n)A$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\big(S(t_n)\varphi_n\big)_{n\geq n_0} \subset \bigcup_{t\geq s} S(t)(A).$$

Como

$$\lim_{n\geq n_0} S(t_n)\varphi_n = \varphi$$

resulta que

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)(A)}.$$

Pela arbitrariedade do $s \geq 0$ considerado, podemos concluir que

$$\varphi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)(A)} = \omega(A).$$

(ii) $(\Rightarrow)$ Suponha que $\varphi \in \alpha(A)$. Então,

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{r\leq s} S(-r)^{-1}(A)},\ \forall\ s \leq 0.$$

Desse modo, dado $s \leq 0$, para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se

$$B(\varphi,\varepsilon) \cap \left(\bigcup_{r\leq s} S(-r)^{-1}(A)\right) \neq \emptyset.$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$B(\varphi,1/n) \cap \left(\bigcup_{r\leq -n} S(-r)^{-1}(A)\right) \neq \emptyset.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $r_n \leq -n$ tal que

$$B(\varphi,1/n) \cap S(-r_n)^{-1}(A) \neq \emptyset.$$

Por conseguinte, é possível também escolher ψ_n tal que

$$\psi_n \in B(\varphi,1/n) \cap S(-r_n)^{-1}(A).$$

Ademais, defina, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = -r_n \ \text{ e } \ \varphi_n = S(t_n)\psi_n.$$

Note que, por construção,

$$t_n \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t_n \to +\infty$$

e

$$\varphi_n = S(t_n)\psi_n = S(-r_n)\psi_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disto,

$$\psi_n \in B(\varphi, 1/n) \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n = \varphi.$$

($\Leftarrow$) Suponha que existam sequências (ψ_n) e (t_n) com $\psi_n \to \varphi$ em H e $t_n \to +\infty$, tais que

$$\varphi_n = S(t_n)\psi_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, defina $r_n = -t_n$. Como $t_n \to +\infty$ temos $r_n \to -\infty$. Assim, dado $s \leq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow r_n \leq s.$$

Logo, para $n \geq n_0$,

$$S(-r_n)^{-1}(A) \subset \bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}(A).$$

Como,

$$S(t_n)\psi_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$$

é possível observar que

$$S(-r_n)\psi_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\psi_n \in S(-r_n)^{-1}(A), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, para $n \geq n_0$,

$$\psi_n \in \bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}(A),$$

isto é,

$$(\psi_n)_{n\geq n_0} \subset \bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}(A).$$

Como, por hipótese, $\lim\limits_{n\geq n_0} \psi_n = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \psi_n = \varphi$, concluímos que

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}(A)}.$$

Pela arbitrariedade do $s \leq 0$ considerado, segue que $\varphi \in \alpha(A)$. ∎

Definição 1.4 *Um ponto fixo, ou um ponto estacionário, ou um ponto de equilíbrio, é um ponto $u_0 \in H$ tal que*

$$S(t)u_0 = u_0, \ \forall t \geq 0.$$

Exemplo 1.2 *A órbita e os conjuntos ω-limite e α-limite de um ponto estacionário u_0 são iguais a $\{u_0\}$.*

Com efeito, a órbita iniciando em u_0 é o conjunto

$$\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)u_0\}.$$

Como u_0 é ponto de equilíbrio, $S(t)u_0 = u_0$ para todo $t \geq 0$. Logo,

$$\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)u_0\} = \{u_0\}.$$

Vamos mostrar que $\omega(u_0) = \{u_0\}$. Se $\varphi \in \omega(u_0)$, então existem sequências $\varphi_n \in \{u_0\}$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$\lim_{n \to \infty} S(t_n)\varphi_n = \varphi.$$

Mas $\varphi_n = u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $S(t_n)\varphi_n = S(t_n)u_0 = u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\varphi = u_0$ e, portanto,

$$\omega(u_0) = \{u_0\}.$$

Analogamente, se $\varphi \in \alpha(u_0)$ então existem uma sequência ψ_n convergindo para φ em H e uma sequência $t_n \to \infty$ tais que

$$S(t_n)\psi_n \in \{u_0\}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$S(t_n)\psi_n = u_0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow t_n > 0 \Rightarrow S(t_n)u_0 = u_0.$$

Logo,

$$n \geq N \Rightarrow S(t_n)\psi_n = S(t_n)u_0.$$

Por definição, para que $\alpha(u_0)$ exista é necessário que tenhamos $S(t)$ injetivo para todo $t > 0$. Assim $S(t_n)$ é injetivo para $n \geq N$. Daí,

$$n \geq N \Rightarrow \psi_n = u_0$$

e, por conseguinte,

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \psi_n = u_0.$$

Portanto,

$$\alpha(u_0) = \{u_0\}.$$

$\square$

Se u_0 é um ponto estacionário do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, podemos definir os conjuntos *Variedade Estável* e *Variedade Instável* de u_0.

Definição 1.5 *A Variedade Estável de u_0, $\mathcal{M}_-(u_0)$, é o conjunto de pontos u_* (podendo este ser vazio) que pertencem a uma órbita completa $\{u(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, digamos $u_* = u(t_0)$, tais que*

$$u(t) = S(t - t_0)u_* \to u_0 \quad \textit{quando} \quad t \to \infty.$$

A Variedade Instável de u_0, $\mathcal{M}_+(u_0)$, é o conjunto dos pontos $u_* \in H$ (podendo este ser vazio) que pertencem a uma órbita completa $\{u(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ e tais que

$$u(t) \to u_0 \quad \textit{quando} \quad t \to -\infty.$$

Um ponto estacionário u_0 é estável quando $\mathcal{M}_+(u_0) = \emptyset$. Do contrário u_0 é instável.

O caso discreto

Considere uma aplicação $S : H \to H$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $S(n) = S^n$ onde,

$$S^n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ vezes}}.$$

Convencionando que $S^0 = I$ temos que a família de operadores $\{S(n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ goza das propriedades de semigrupo. Um família de operadores netas condições é chamada de *semigrupo discreto.* Se S é injetivo podemos definir S^{-1} e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S(-n) := S^{-n} = (S^{-1})^n$. Por fim, podemos ainda dizer que $\{S(n)\}$ é o semigrupo discreto gerado por S.

Neste trabalho daremos ênfase ao estudo de semigrupos no caso contínuo. Uma abordagem mais detalhada acerca de semigrupos discretos pode ser encontrada em [9].

1.2 Conjuntos invariantes

Nesta seção estudamos conjuntos que apresentam características especiais sob a ação de um semigrupo.

Definição 1.6 *Dizemos que um conjunto $X \subset H$ é positivamente invariante para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se*

$$S(t)X \subset X, \ \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, quando

$$S(t)X \supset X, \ \forall t \geq 0,$$

dizemos que X é negativamente invariante.

Quando o conjunto X é ao mesmo tempo positivamente e negativamente invariante, dizemos que X é um *conjunto invariante* ou um conjunto *conjunto invariante funcional.*

Definição 1.7 *Um conjunto $X \subset H$ é um conjunto invariante para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se*

$$S(t)X = X, \ \forall t \geq 0. \tag{1.6}$$

Quando os operadores $S(t)$ são injetivos (possuem unicidade retrógrada), a relação (1.6) implica que $S(-t)$ é definido sobre X, para todo $t > 0$. Neste caso,

$$S(t)X = X, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato, basta verificar esta igualdade para $t < 0$. Mas se $t < 0$ então $s = -t > 0$. Daí $S(s)X = X$ (porque a igualdade já vale para valores não negativos de t) e $S(-s) : S(s)X \to X$ é uma bijeção. Logo,

$$S(-s)\big(S(s)X\big) = X \Rightarrow S(t)X = X.$$

Exemplo 1.3
(a) Se u_0 é ponto de equilíbrio de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $X = \{u_0\}$ é um conjunto invariante.
(b) Se $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ é uma família de pontos de equilíbrio, então $X = \bigcup_{\lambda\in\Gamma}\{u_\lambda\}$ é um conjunto invariante.

Justifiquemos estas afirmações:

(a) Sendo u_0 ponto de equilíbrio temos $S(t)u_0 = u_0$ para todo $t \geq 0$ e então

$$S(t)X = X, \ \forall t \geq 0$$

mostrando que X é invariante.

(b) Dado $t \geq 0$ temos

$$v \in X \Leftrightarrow v = u_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \Gamma.$$

Desde que u_λ é ponto de equilíbrio, para todo $r \geq 0$ tem-se $u_\lambda = S(r)u_\lambda$. Em particular, $u_\lambda = S(t)u_\lambda$. Sendo assim, da sentença acima obtemos

$$v \in X \Leftrightarrow v = S(t)u_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \Gamma \Leftrightarrow v \in S(t)X.$$

Portanto, $S(t)X = X$. □

Definição 1.8 *Seja X um espaço vetorial. Uma função $f : \mathbb{R} \to X$ é dita periódica se existe um número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Um número $T > 0$ nestas condições é chamado período de f. Quando $f : \mathbb{R} \to X$ é periódica e existe $T_f = \min\{T > 0;\ T$ é período de $f\}$, o número T_f é chamado período fundamental de f.*

Exemplo 1.4 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ é periódica, com período fundamental igual a 2π. Se $c \in \mathbb{R}$ é constante, então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, é uma função periódica e qualquer $T > 0$ é um período de f.*

É possível que uma função seja periódica sem que admita um período fundamental.

Exemplo 1.5 *Se X é um espaço vetorial, qualquer função constante de $\mathbb{R}$ em X é periódica, mas não admite período fundamental.*

Exemplo 1.6 *Considere a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Afirmamos que $\chi_{\mathbb{Q}}$ é periódica, mas não admite período fundamental.

De fato, seja $T \in \mathbb{Q}$, $T > 0$. Se $x \in \mathbb{Q}$ então $x + T \in \mathbb{Q}$ de sorte que

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x + T) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

Se $x \notin \mathbb{Q}$ então $x + T \notin \mathbb{Q}$ de modo que

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x + T) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

Portanto

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x + T) = \chi_{\mathbb{Q}}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vemos assim que $\chi_{\mathbb{Q}}$ é periódica e que qualquer $T \in \mathbb{Q}$ com $T > 0$ é um período de $\chi_{\mathbb{Q}}$. Entretanto, não existe $T_f = \min\{T > 0;\ T \text{ é período de } \chi_{\mathbb{Q}}\}$ pois, dado $T > 0$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existe $T' \in (0, T) \cap \mathbb{Q}$. Assim, T' é período de $\chi_{\mathbb{Q}}$ com $T' < T$. $\square$

Definição 1.9 *Dado $u_0 \in H$, uma órbita iniciando em u_0, $\mathcal{O}^+ = \bigcup_{t \geq 0} \{S(t)u_0\}$, é dita periódica quando existir $T > 0$ tal que $S(t + T)u_0 = S(t)u_0$, para todo $t \geq 0$. Uma constante $T > 0$ nestas condições é chamada período de $\mathcal{O}^+$. Se existir*

$$T_0 = \min\{T > 0;\ T \text{ é período de } \mathcal{O}^+\}$$

então T_0 é chamado período fundamental de $\mathcal{O}^+$. De maneira análoga podemos definir uma órbita periódica finalizando em u_0, bem como uma órbita completa periódica contendo u_0.

Exemplo 1.7 *Suponha que os operadores $S(t)$, $t \geq 0$ são injetivos. Sejam $u_0 \in H$ e $\{S(t)u_0;\ t \geq 0\}$ uma órbita periódica, com $T > 0$ sendo um período. Então $S(t)u_0$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e o conjunto $X = \{S(t)u_0;\ t \in \mathbb{R}\}$ é invariante.*

Considere $t < 0$. Então $r = -t > 0$ e pela injetividade $S(t) = S(-r)$ está definido sobre $S(r)H$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $nT > r$. Então,

$$u_0 = S(0)u_0 = S(nT)u_0 = S(r + nT - r)u_0 = S(r)\underbrace{S(nT - r)u_0}_{\in H}.$$

Logo, $u_0 \in S(r)H$ e $S(t)$ está definido em u_0.

Seja $s \geq 0$. Se $x \in X$ então $x = S(t)u_0$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Daí

$$S(s)x = S(s)S(t)u_0 = S(s + t)u_0.$$

Logo, $S(s)x \in X$ o que mostra a inclusão $S(s)X \subset X$. Por outro lado, se $x \in S(s)X$ então, para algum $t \in \mathbb{R}$,

$$x = S(s)S(t)u_0 = S(s+t)u_0 \in X,$$

mostrando a inclusão contrária e portanto a igualdade $S(s)X = X$. Portanto X é invariante.

Proposição 1.3 *Seja $\mathcal{O}^+ = \bigcup_{t \geq 0}\{S(t)u_0\}$ uma órbita periódica, com $T > 0$ sendo o menor real positivo que satisfaz $S(t+T)u_0 = S(t)u_0$ para todo $t \geq 0$. Então:*

(*i*) *Definindo $u : (-\infty, 0] \to H$ por $u(s) = S(s + mT)u_0$, onde $m \in \mathbb{N}$ é tal que $s \in [-mT, -(m-1)T]$, temos que $\mathcal{O}^- := \bigcup_{s \leq 0}\{u(s)\}$ é uma órbita finalizando em u_0.*

(*ii*) *O conjunto $X = \mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}_-$ é um conjunto invariante.*

Demonstração: ***(i)*** Vejamos inicialmente a boa definição de u. Dado $s \leq 0$, considere o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N};\ s \leq -(n-1)T\}$. Observe que $1 \in A$ e por isso $A \neq \emptyset$. Além do mais, como $-(n-1)T \to -\infty$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow -(n-1)T < s.$$

Assim, A é finito por está contido em $\{1, 2, ..., n_0 - 1\}$. Por conseguinte A é limitado, possuindo assim um elemento máximo, digamos m. Dessa forma, $m + 1 \notin A$ de sorte que

$$s > -[(m+1) - 1]T \Rightarrow s > -mT.$$

Como $m \in A$, $s \leq -(m-1)T$ e portanto, $s \in [-mT, -(m-1)T]$. Além disto

$$s > -mT \Rightarrow s + mT > 0$$

de modo que fica bem definida a expressão $S(s + mT)u_0$.

Vejamos agora que O^- é uma órbita finalizando em u_0. Para isto, devemos verificar que $u(0) = u_0$ e que $u(t + s) = S(t)u(s)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$, $s \leq 0$ e $t + s \leq 0$. Desde que $0 \in [-T, 0] = [-1T, -(1-1)T]$ temos

$$u(0) = S(0 + T)u_0 = S(0)u_0 = u_0.$$

Considere $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$, $s \leq 0$ e $t + s \leq 0$. Observe que

$$u(t+s) = S(\underbrace{t+s+mT}_{\geq 0})u_0,$$

onde $m \in \mathbb{N}$ é tal que $t + s \in [-mT, -(m-1)T]$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-kT, -(k-1)T]$. Como $\mathcal{O}^+$ é periódica, podemos escrever

$$u(t+s) = S(t+s+mT+kT)u_0 = S(s+kT+t+mT)u_0.$$

Desde que $t + mT \geq t + s + mT \geq 0$ e $s + kT \geq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(t+s) &= S(s+kT)S(t+mT)u_0 = S(s+kT)S(t)u_0 = S(s+kT+t)u_0 \\ &= S(t)S(s+kT)u_0 = S(t)u(s). \end{aligned}$$

(ii) Seja $t \geq 0$. Dado $x \in X$, se $x \in \mathcal{O}^+$, então $x = S(r)u_0$, para algum $r \geq 0$. Daí,

$$S(t)x = S(t)S(r)u_0 = S(t+r)u_0 \in \mathcal{O}^+.$$

Se $x \in \mathcal{O}^-$, então $x = u(s)$, para algum $s \leq 0$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-mT, -(m-1)T]$. Daí,

$$S(t)x = S(t)u(s) = S(t)S(s+mT)u_0 = S(t+s+mT)u_0 \in \mathcal{O}^+.$$

Portanto, se $x \in X$ então $S(t)x \in \mathcal{O}^+ \subset X$ mostrando que

$$S(t)X \subset X.$$

Para mostrar a inclusão contrária, vejamos primeiro que

$$\{S(r)u_0;\ r \geq 0\} \subset S(t)X.$$

De fato, sejam $r \geq 0$ e $x = S(r)u_0$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $nT > t$ e defina $t_1 := r + nT - t > 0$. Perceba que $S(t_1)u_0 \in X$, pois $S(t_1)u_0 \in \mathcal{O}^+$. Usando o fato de que $S(\cdot)u_0$ é periódica e T é um período,

$$x = S(r)u_0 = S(r+nT)u_0 = S(t+r+nT-t)u_0 = S(t)S(t_1)u_0$$

Logo, $x \in S(t)X$ mostrando a inclusão desejada.

Agora, dado $x \in X$, se $x \in \mathcal{O}^+$, então $x = S(r)u_0$, para algum $r \geq 0$ de sorte que $x \in S(t)X$. Se $x \in \mathcal{O}^-$ então $x = u(s) = S(s+mT)u_0$, para algum $s \leq 0$ e algum

$m \in \mathbb{N}$ com $s + mT \geq 0$. Fazendo $r' = s + mT$ temos $r' \geq 0$ e $x = S(r')u_0$ de onde temos que $x \in S(t)X$. Portanto vale a inclusão

$$X \subset S(t)X$$

e, consequentemente, a igualdade

$$S(t)X = X.$$

Considerando que $t \geq 0$ foi tomado fixo, porém arbitrário, é possível concluir que X é invariante. ■

Proposição 1.4 *Assuma que $X \subset H$ é invariante e que os operadores $S(t)$, $t \geq 0$, são injetivos. Então:*
(i) Dado $u_0 \in X$, $S(t)u_0$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$X_{u_0} = \{S(t)u_0,\ t \in \mathbb{R}\}$$

é um conjunto invariante.
(ii) Se $u_0, u_1 \in X$ então $X_{u_0} \cap X_{u_1} = \emptyset$ ou $X_{u_0} = X_{u_1}$.
(iii) Os conjuntos X_{u_0}, $u_0 \in X$, são conjuntos invariantes minimais, no sentido que eles não contém propriamente nenhum outro conjunto invariante (ou equivalentemente, se $Y \subset X_{u_0}$ é invariante então $Y = X_{u_0}$).

Demonstração: (i) Dado $t \geq 0$, supondo $S(t)$ injetiva tem-se que $S(t) : X \to S(t)X$ é uma bijeção. Neste caso fica definida a inversa $S(-t) : S(t)X \to X$. Como X é invariante, $S(t)X = X$ de sorte que, temos definida a aplicação $S(-t) : X \to X$. Portanto, existe $S(-t)u_0$. Pela arbitrariedade do $t \geq 0$ considerado, concluímos que existe $S(t)u_0$ para todo $t \geq 0$. Agora, considere $s \geq 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$ temos

$$S(s)S(t)u_0 = S(s+t)u_0 \in X_{u_0}.$$

Sendo assim,

$$S(s)X_{u_0} \subset X_{u_0}.$$

Por outro lado, dado $v \in X_{u_0}$, $v = S(t)u_0$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Note então que

$$v = \underbrace{S(s)S(-s)}_{I} S(t)u_0 = S(s)S(-s+t)u_0 \in S(s)X_{u_0}.$$

Logo

$$X_{u_0} \subset S(s)X_{u_0}$$

e, portanto,

$$S(s)X_{u_0} = X_{u_0}, \ \forall s \geq 0,$$

isto é, X_{u_0} é invariante.

(ii) Suponha que $X_{u_0} \cap X_{u_1} \neq \emptyset$ e considere $v \in X_{u_0} \cap X_{u_1}$. Então, existem $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ tais que $v = S(r_0)u_0$ e $v = S(r_1)u_1$. Daí,

$$u_0 = S(s)u_1,$$

onde $s = -r_0 + r_1$. Considere então $w \in X_{u_0}$, isto é, $w = S(t)u_0$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$w = S(t)S(s)u_1 = S(t+s)u_1 \in X_{u_1}.$$

Reciprocamente, se $w \in X_{u_1}$, ou seja, $w = S(t)u_1$ com $t \in \mathbb{R}$, então

$$w = S(t)S(-s)u_0 = S(t-s)u_0 \in X_{u_0}.$$

Portanto,

$$X_{u_0} = X_{u_1}.$$

(iii) Para este item fazemos as seguintes afirmações:

Afirmação 1.1 Se $Y \subset X_{u_0}$ é um conjunto invariante então $u_0 \in Y$.

Justificativa: De fato, se Y é invariante então $S(t)Y = Y \subset X_{u_0}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, fixados $v \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos $S(t)v \in X_{u_0}$, isto é, $S(t)v = S(s)u_0$, com $s \in \mathbb{R}$. Daí

$$u_0 = S(-s+t)v \in S(-s+t)Y = Y$$

e, portanto, $u_0 \in Y$. □

Afirmação 1.2 Se Y é um conjunto invariante contendo u_0, então Y contém $S(t)u_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com efeito, se Y é invariante então $S(t)Y = Y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim

$$S(t)v \in Y, \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall v \in Y.$$

Como $u_0 \in Y$ temos, em particular, $S(t)u_0 \in Y$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, suponha que $Y \subset X_{u_0}$ é invariante. Então pela Afirmação 1.1 temos que $u_0 \in Y$ e assim, da Afirmação 1.2, resulta que

$$S(t)u_0 \in Y, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $X_{u_0} \subset Y$. Consequentemente, $Y = X_{u_0}$. ∎

Definição 1.10 *Um subconjunto Y de um espaço métrico X é dito um conjunto relativamente compacto em X se seu fecho é compacto em X.*

Alguns outros conjuntos invariantes que serão de nosso interesse particular são fornecidos pelo seguinte lema:

Lema 1.1 *Assuma que para algum subconjunto $A \subset H$, $A \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto*

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A$$

é relativamente compacto em H. Então $\omega(A)$ é não vazio, compacto e invariante. Similarmente, se os conjuntos $S(t)^{-1}(A)$, $t \geq 0$ são não vazios e, para algum $t_0 > 0$,

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}A$$

é relativamente compacto, então $\alpha(A)$ é não vazio, compacto e invariante.

Demonstração: Desde que A é não vazio, os conjuntos $\bigcup_{t \geq s} S(t)A$ são não vazios para todo $s \geq 0$. Note que, para $s_1, s_2 \geq 0$ com $s_2 \geq s_1$ temos

$$\bigcup_{t \geq s_2} S(t)A \subset \bigcup_{t \geq s_1} S(t)A \Rightarrow \overline{\bigcup_{t \geq s_2} S(t)A} \subset \overline{\bigcup_{t \geq s_1} S(t)A}.$$

Portanto, os conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$, $s \geq 0$, são conjuntos fechados não vazios que diminuem conforme s aumenta. Daí,

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$$

é um conjunto fechado (pois é a interseção de fechados). Vamos mostrar que $\omega(A)$ é não vazio. Considere $n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 > t_0$. Defina o conjunto $K_1 := \overline{\bigcup_{t \geq n_1} S(t)A}$. Pelo que já vimos temos

$$K_1 \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A}.$$

Assim, K_1 é um fechado contido em um compacto e portanto é compacto. Escolha $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 \geq n_1$ e defina $K_2 := \overline{\bigcup_{t \geq n_2} S(t)A}$. Temos, $K_2 \subset K_1$ e como K_2 é fechado e K_1 é compacto segue que K_2 é compacto. Prosseguindo com este raciocínio, obtemos números naturais $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_j \leq \cdots$ e uma sequência de conjuntos compactos

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)A} \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_j \supset \cdots ,$$

onde

$$K_j := \overline{\bigcup_{t \geq n_j} S(t)A}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Formemos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escolhendo para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $x_n \in K_n$. Observe então que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de K_1 o qual é compacto e por isso, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ e $p \in K_1$ tais que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = p.$$

Dado $j \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$n \geq j \Rightarrow K_n \subset K_j.$$

Como $x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$(x_n)_{\substack{n \,\in\, \mathbb{N}' \\ n \,\geq\, j}} \subset K_j.$$

Ora

$$\lim_{\substack{n \,\in\, \mathbb{N}' \\ n \,\geq\, j}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = p.$$

Desde que K_j é fechado resulta que $p \in K_j$ e, pela arbitrariedade do $j \in \mathbb{N}$ considerado temos

$$p \in K_j, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Agora, dado $s \geq 0$, considere $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j \geq s$. Temos então

$$p \in K_j = \overline{\bigcup_{t \geq n_j} S(t)A} \subset \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A},$$

ou seja,

$$p \in \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}.$$

Logo,

$$p \in \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A} = \omega(A),$$

mostrando que $\omega(A) \neq \emptyset$.

Perceba agora que

$$\omega(A) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A} \subset \overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)A}.$$

Sendo $\omega(A)$ fechado e $\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}$ compacto, resulta que $\omega(A)$ é compacto. Resta mostrar que $\omega(A)$ é invariante, ou seja,

$$S(t)\omega(A) = \omega(A), \ \forall t \geq 0.$$

Seja $t \geq 0$. Dado $\psi \in S(t)\omega(A)$ tem-se $\psi = S(t)\varphi$, onde $\varphi \in \omega(A)$. Pela Proposição 1.2, existem sequências $(\varphi_n) \subset A$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n = \varphi.$$

Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n.$$

Pela continuidade do operador $S(t)$,

$$\lim_{n\to\infty} S(t+t_n)\varphi_n = S(t)[\lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n] = S(t)\varphi = \psi.$$

Como $t + t_n \to \infty$ segue, pela Proposição 1.2, que $\psi \in \omega(A)$ e portanto

$$S(t)\omega(A) \subset \omega(A).$$

Suponha agora $\varphi \in \omega(A)$. Considere as sequências $(\varphi_n) \subset A$ e $t_n \to \infty$ dadas pela Proposição 1.2. Assim,

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Como $t_n \to \infty$ e $t + t_0 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow t_n > t + t_0.$$

Desta forma,

$$\{S(t_n - t)\varphi_n; n \geq n_0\} \subset \{S(t_n - t)\varphi_n;\ t_n - t > t_0\} \subset \bigcup_{r\geq t_0} S(r)A \subset \overline{\bigcup_{r\geq t_0} S(r)A}.$$

e consequentemente

$$\big(S(t_n - t)\varphi_n\big)_{n\geq n_0} \subset \overline{\bigcup_{r\geq t_0} S(r)A} =: K_0.$$

Desde que, por hipótese, K_0 é compacto, existem uma subsequência $\big(S(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j}\big)_{n_j\geq n_0}$ e $\psi \in K_0 \subset H$ tais que

$$\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j} = \psi.$$

Mas $(\varphi_{n_j}) \subset A$ e $(t_{n_j} - t) \to \infty$ de sorte que, pela Proposição 1.2 tem-se $\psi \in \omega(A)$. Agora, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$S(t_{n_j})\varphi_{n_j} = S(t + t_{n_j} - t)\varphi_{n_j} = S(t)S(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j}.$$

Da continuidade do operador $S(t)$ vem

$$\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j})\varphi_{n_j} = S(t)[\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j}] \Rightarrow \varphi = S(t)\psi,$$

de onde que $\varphi \in S(t)\omega(A)$ e portanto

$$\omega(A) \subset S(t)\omega(A).$$

Das duas inclusões verificadas e da arbitrariedade do $t \geq 0$ considerado, concluímos que

$$S(t)\omega(A) = \omega(A),\ \forall t \geq 0,$$

ou seja, $\omega(A)$ é invariante.

A demonstração é totalmente similar para $\alpha(A)$. Vejamos:

1) $\alpha(A) \neq \emptyset$. Dado $s \leq 0$ temos $-t \geq 0$ para todo $t \leq s$. Daí, por hipótese,

$$S(-t)^{-1}A \neq \emptyset,\ \forall t \leq s \Rightarrow \bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A} \neq \emptyset.$$

Além disto, se $s, r \leq 0$ com $s \leq r$ então

$$x \in \bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A \Rightarrow x \in S(-t)^{-1}A;\ t \leq s \Rightarrow x \in S(-t)^{-1}A;\ t \leq r \Rightarrow x \in \bigcup_{t\leq r} S(-t)^{-1}A.$$

Logo,

$$\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A \subset \bigcup_{t\leq r} S(-t)^{-1}A \Rightarrow \overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A} \subset \overline{\bigcup_{t\leq r} S(-t)^{-1}A}.$$

Portanto, os conjuntos $\overline{\bigcup_{t\leq s} S(-t)^{-1}A}$, $s \leq 0$, são todos fechados, não vazios e decrescem conforme s diminui. Considere $n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 \geq t_0$ e defina

$$K_1 := \overline{\bigcup_{t\leq -n_1} S(-t)^{-1}A}.$$

Note que K_1 é um fechado contido em $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)^{-1}A}$ o qual é compacto e , por isso, K_1 é compacto. Escolha agora $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 \geq n_1$ e defina

$$K_2 := \overline{\bigcup_{t\leq -n_2} S(-t)^{-1}A}.$$

Observe que K_2 é uma fechado contido no compacto K_1 e, desta forma, K_2 é compacto. Prosseguindo com este raciocínio obtemos números naturais $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_j \leq \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos compactos

$$\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)^{-1}A} \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_j \supset \cdots,$$

onde, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$K_j := \overline{\bigcup_{t\leq -n_j} S(-t)^{-1}A}$$

Formemos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhendo para cada $n \in \mathbb{N}$ um único $x_n \in K_n$. Observe então que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de K_1 o qual é compacto e por isso, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, uma subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ e $p \in K_1$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = p.$$

Dado $j \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$n \geq j \Rightarrow K_n \subset K_j.$$

Como $x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$(x_n)_{\substack{n\,\in\,\mathbb{N}'\\ n\,\geq\, j}} \subset K_j.$$

Ora

$$\lim_{\substack{n\,\in\,\mathbb{N}'\\ n\,\geq\, j}} x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = p.$$

Desde que K_j é fechado resulta que $p \in K_j$ e, pela arbitrariedade do $j \in \mathbb{N}$ considerado temos

$$p \in K_j, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Agora, dado $s \leq 0$, considere $j \in \mathbb{N}$ tal que $-n_j \leq s$. Temos então

$$p \in K_j = \overline{\bigcup_{t \leq -n_j} S(-t)^{-1}A} \subset \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}A},$$

ou seja,

$$p \in \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}A}.$$

Logo,

$$p \in \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}A} = \alpha(A),$$

mostrando que $\alpha(A) \neq \emptyset$.

2) $\alpha(A)$ é compacto. Claramente

$$\alpha(A) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{r \leq s} S(-r)^{-1}A} \subset \overline{\bigcup_{r \leq s} S(-r)^{-1}A}, \ \forall s \leq 0.$$

Em particular, como $-t_0 < 0$ temos

$$\alpha(A) \subset \overline{\bigcup_{r \leq -t_0} S(-r)^{-1}A} = \overline{\bigcup_{-r \geq t_0} S(-r)^{-1}A} \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}A}.$$

Desde que $\alpha(A)$ é fechado (por ser a interseção de fechados) e $\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}A}$ é compacto, segue que $\alpha(A)$ é compacto.

3) $\alpha(A)$ é invariante. De fato, fixemos $t \geq 0$ e mostremos que

$$S(t)\alpha(A) = \alpha(A).$$

Seja $\psi \in S(t)\alpha(A)$, isto é, $\psi = S(t)\varphi$ onde $\varphi \in \alpha(A)$. Pela Proposição 1.2, existem sequências $(\varphi_n) \subset H$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, com $\varphi_n \to \varphi$ e $t_n \to +\infty$ tais que

$$S(t_n)\varphi_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considere a sequência $(\psi_n) \subset H$ onde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n = S(t)\varphi_n$. Pela continuidade do operador $S(t)$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} S(t)\varphi_n = S(t) \lim_{n\to\infty} \varphi_n = S(t)\varphi = \psi.$$

Além disto, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $t_n - t > 0$ e

$$S(t_n - t)\psi_n = S(t_n - t)S(t)\varphi_n = S(t_n - t + t)\varphi_n = S(t_n)\varphi_n.$$

Dessa forma,

$$S(t_n - t)\psi_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $(t_n - t) \to +\infty$ resulta, pela Proposição1.2 que $\psi \in \alpha(A)$. Logo,

$$S(t)\alpha(A) \subset \alpha(A).$$

Por fim, seja $\varphi \in \alpha(A)$. Pela Proposição 1.2, existem sequências $(\varphi_n) \subset H$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tais que $\varphi_n \to \varphi$, $t_n \to \infty$ e

$$S(t_n)\varphi_n \in A, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Defina para todo $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = t_n + t \ \text{ e } \ v_n = S(-t)\varphi_n.$$

Observe que

$$S(r_n)v_n \in A, \ \forall \ n \in \ \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

pois,

$$S(r_n)v_n = S(t_n + t)S(-t)\varphi_n = S(t_n)\varphi_n.$$

Logo,

$$v_n \in S(r_n)^{-1}A \subset \overline{\bigcup_{r \geq r_n} S(r)^{-1}A}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $r_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que $r_n \geq t_0$ sempre que $n \geq n_0$. Daí,

$$(v_n)_{n \geq n_0} \subset \overline{\bigcup_{r \geq t_0} S(r)^{-1}A}.$$

Por compacidade, seque que existem uma subsequência (v_{n_k}) de (v_n) e $v \in H$ tais que $v_{n_k} \to v$. Como $r_{n_k} \to \infty$ e (1.7), pela Proposição 1.2 resulta que $v \in \alpha(A)$. Além disso, pela continuidade de $S(t)$ temos,

$$\lim S(t)v_{n_k} = S(t)v.$$

Por outro lado,

$$\lim S(t)v_{n_k} = \lim S(t)S(-t)\varphi_{n_k} = \lim \varphi_{n_k} = \varphi.$$

Portanto, $\varphi = S(t)v$ de modo que $\alpha(A) \subset S(t)\alpha(A)$. ■

Observação 1.2 Este lema será frequentemente usado, especialmente para conjuntos ω-limite. Ele dará exemplos de conjuntos invariantes sempre que pudermos mostrar que $\bigcup_{t \geq 0} S(t)A$ é relativamente compacto. Este conjunto pode consistir de uma solução estacionária singular u_* se todas as trajetórias iniciando em A convergem para u_* quando $t \to \infty$; ou pode consistir de uma órbita ou solução periódica, ou uma solução "quase periódica", ou até conjuntos mais complexos. Para provar a suposição de que $\bigcup_{t \geq 0} S(t)A$ é relativamente compacto, usualmente mostramos que este conjunto é limitado se H é de dimensão finita ou, em dimensão infinita, mostramos que ele é limitado em um espaço W compactamente contido em H.

Capítulo 2

Conjuntos Atratores

Estudamos neste capítulo os conceitos de conjuntos absorvente e conjuntos atratores sob a ação de um semigrupo. Em particular, abordamos alguns resultados sobre atratores globais e atratores exponenciais. Veremos que a existência de um atrator global garante a existência de um conjunto absorvente. Para provar uma espécie de recíproca, serão necessárias hipóteses adicionais sobre o semigrupo e sobre o conjunto absorvente considerado. Em se tratando dos atratores exponencias, a propriedade de atração ocorre sob uma estimativa exponencial. Além disso, um tal atrator possui *dimensão fractal* finita e, quando existir simultaneamente um atrator global, obrigatoriamente o atrator global estará contido no atrator exponencial, de maneira que o atrator global herda a propriedade de dimensão fractal finita. O estudo de atratores globais tem como principal referência [22] enquanto, para os atratores exponenciais, nos debruçamos às ideias de Efendiev et al., Milani e Shomberg (ver [5], [17] e [21], respectivamente).

2.1 Conjuntos Absorventes e Atratores Globais

Definição 2.1 *Um atrator é um conjunto $A \subset H$ que goza das seguintes propriedades:*
(i) A é um conjunto invariante, isto é, $S(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.
(ii) A possui uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ tal que, para todo $u_0 \in \mathcal{U}$, $S(t)u_0$ converge para A quando $t \to \infty$ no sentido que

$$d(S(t)u_0, A) \to 0 \quad quando \quad t \to \infty.$$

A distância d na condição (ii) é entendida como sendo a distância entre um ponto e um conjunto dada por

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

$d(x, y)$ denotando a distância entre x e y em H. Se A é um atrator, o maior conjunto aberto $\mathcal{U}$ que satisfaz (ii) é chamado de *bacia de atração* de A. Diremos que A atrai uniformemente um conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ se

$$d(S(t)\mathcal{B}, A) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty, \tag{2.1}$$

onde $d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ é agora a *semi-distância* de dois conjuntos $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ dada por

$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \sup_{x \in \mathcal{B}_0} \inf_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y), \tag{2.2}$$

ou ainda,

$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \sup_{x \in \mathcal{B}_0} d(x, \mathcal{B}_1).$$

A uniformidade referida antes é na ideia de que, para cada $\varepsilon > 0$ é possível achar um t_ε de sorte que

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow d(S(t)u_0, A) < \varepsilon,$$

independente de qual seja $u_0 \in B$. Em outras palavras o t_ε depende apenas do ε (enquanto na condição (ii) da definição de atrator, dado $\varepsilon > 0$ se encontra um t_ε dependendo de ε e do u_0).

Dado $\varepsilon > 0$, chamamos de ε-vizinhança de A e denotamos por $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$ (ou quando não causar confusão, simplesmente $\mathcal{V}_\varepsilon$) o conjunto

$$\bigcup_{y \in A} B(y, \varepsilon).$$

Proposição 2.1 *A convergência* (2.1) *é equivalente ao seguinte: para cada $\varepsilon > 0$ existe t_ε tal que, para $t \geq t_\varepsilon$ tem-se $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_\varepsilon$.*

Demonstração: Suponha que vale (2.1) e seja $\varepsilon > 0$. Assim, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in S(t)\mathcal{B}} \inf_{y \in A} d(x, y) < \varepsilon.$$

Sendo assim, para $t \geq t_\varepsilon$, dado $x \in S(t)\mathcal{B}$ temos $\inf\limits_{y \in A} d(x,y) < \varepsilon$. Segue então da definição de ínfimo que, existe $y_0 \in A$ tal que $d(x,y_0) < \varepsilon$, ou seja,

$$x \in B(y_0, \varepsilon) \Rightarrow x \in \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Portanto,

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe t_ε tal que, para $t \geq t_\varepsilon$ tem-se $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_\varepsilon$. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_{\varepsilon/2} > 0$ tal que

$$t \geq t_{\varepsilon/2} \Rightarrow S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon/2}.$$

Seja $t \geq t_{\varepsilon/2}$. Dado $x \in S(t)\mathcal{B}$ existe $y_0 \in A$ tal que $x \in B(y_0, \varepsilon/2)$, ou seja, $d(x,y_0) < \varepsilon/2$. Logo,

$$\inf_{y \in A} d(x,y) \leq d(x,y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e então

$$\sup_{x \in S(t)\mathcal{B}} \inf_{y \in A} d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \; d(S(t)\mathcal{B}, A) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow d(S(t)\mathcal{B}, A) < \varepsilon$$

mostrando que $d(S(t)\mathcal{B}, A) \to 0$ quando $t \to \infty$. ∎

Quando não houver confusão, por simplicidade podemos dizer que A atrai $\mathcal{B}$. Por exemplo, diremos que A atrai os conjuntos limitados (ou compactos) de $\mathcal{U}$ se A atrai uniformemente cada conjunto limitado (ou cada conjunto compacto) de $\mathcal{U}$. Um atrator A pode ou não ter tal propriedade.

Em dimensão infinita, onde precisamos trabalhar com diferentes topologias, podemos considerar conjuntos A que são atratores em um espaço W, $W \subset H$. Isto significa que:

$(i)'$ $A \subset W$, $S(t)A = A$, $\forall t \geq 0$.

$(ii)'$ A condição (ii) da Definição 2.1 é válida com a topologia de W, isto é, $\mathcal{U}$ é aberto em W e a distância em (2.1) é a de W (W um espaço métrico).

Um conceito chave neste estudo é o de atratores globais (ou universais) de um semigrupo.

Definição 2.2 *Dizemos que $A \subset H$ é um atrator global (ou universal) para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se A é um atrator compacto que atrai conjuntos limitados de H.*

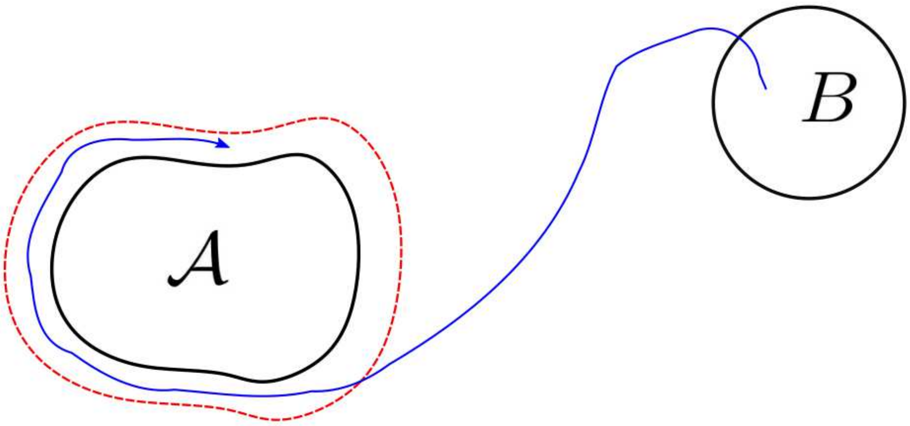

Figura 2.1: Ilustração de um atrator global

Observe que a bacia de atração de um atrator global A, é todo H. De fato, dado $u_0 \in H$, como $\{u_0\}$ é limitado

$$d(S(t)\{u_0\}, A) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Mas, para todo $t \geq 0$,

$$d(S(t)\{u_0\}, A) = \sup_{x \in S(t)\{u_0\}} \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf_{y \in A} d(S(t)u_0, y) = d(S(t)u_0, A).$$

Logo,

$$d(S(t)u_0, A) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty, \ \forall u_0 \in H. \tag{2.3}$$

Assim, H é o maior aberto em H, contendo A e satisfazendo (2.3).

Proposição 2.2 *Um atrator global A para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, quando existir, é único. Além disto, A é o maior (no sentido da inclusão) dentre os atratores limitados e dentre os conjuntos invariantes limitados (relativos ao semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$).*

Demonstração: Iniciamos com a seguinte Afirmação:

Afirmação 2.1 Se $A, B \subset H$ são tais que $d(A,B) = 0$, então $A \subset \overline{B}$.

De fato, seja $x_0 \in A$. Por hipótese

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y) = d(A,B) = 0.$$

Daí, por definição de supremo

$$\alpha := \inf_{y \in B} d(x_0, y) = 0.$$

Como o ínfimo de um conjunto limitado inferiormente é sempre aderente ao próprio conjunto (ver [12], Capítulo 5, Seção 2), existe uma sequência $(y_n) \subset B$ tais que $d(x_0, y_n) \to \alpha$, ou seja, $d(x_0, y_n) \to 0$. Sendo assim $y_n \to x_0$, mostrando que $x_0 \in \overline{B}$ e, portanto, $A \subset \overline{B}$.

Agora, suponha que A é um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Então:

(i) $S(t)A = A$, para todo $t \geq 0$.

(ii) Existe $\mathcal{U}$ aberto em H com $A \subset \mathcal{U}$ tal que, para todo $u_0 \in \mathcal{U}$ tem-se

$$d(S(t)u_0, A) \to 0 \;\text{ quando }\; t \to \infty.$$

(iii) A é compacto.

(iv) A atrai conjuntos limitados em H, isto é, dado $\mathcal{B} \subset H$ limitado,

$$d(S(t)\mathcal{B}, A) \to 0 \;\text{ quando }\; t \to \infty.$$

Vejamos inicialmente a maximalidade de A. Seja $G \subset H$ limitado e invariante. Pela propriedade (iv) acima tem-se

$$d(S(t)G, A) \to 0 \;\text{ quando }\; t \to \infty.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t > 0$ tal que $d(S(t)G, A) < \varepsilon$. Como G é invariante segue que $d(G, A) < \varepsilon$. Pela arbitrariedade de ε tem-se

$$d(G, A) < \varepsilon, \; \forall \varepsilon > 0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos $d(G, A) = 0$. Pela Afirmação 2.1, resulta que $G \subset \overline{A}$ e como A é compacto (e portanto fechado) vem que $G \subset A$. Portanto A é o maior conjunto invariante limitado para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Em particular, A é o maior atrator limitado para o referido semigrupo.

Seja D um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Então D goza de todas as propriedades listadas de (i) a (iv) para A. Particularmente, D é um atrator limitado e portanto

$$D \subset A.$$

Além disso, usando os fatos de que, para todo conjunto limitado $\mathcal{B} \subset H$,

$$d(S(t)\mathcal{B}, D) \to 0 \text{ quando } t \to \infty$$

e que A é limitado, por um raciocínio já utilizado antes $d(A, D) = 0$. Daí, pela Afirmação 2.1, $A \subset \overline{D}$. Como D é compacto vem que

$$A \subset D.$$

Portanto, $A = D$, o que demonstra a unicidade de A enquanto atrator global para semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. ■

Devido a Proposição 2.2 poderemos também chamar um atrator global de atrator maximal. Também devido à mesma Proposição, poderíamos definir um atrator global para um semigrupo (quando existir) como sendo o maior atrator compacto para tal semigrupo, que atrai os conjuntos limitados de H.

No sentido de estabelecer a existência de atratores, um conceito bastante útil é o relacionado a conjuntos absorventes.

Definição 2.3 *Sejam $\mathcal{B}$ um subconjunto de H e $\mathcal{U}$ um conjunto aberto contendo $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é absorvente em $\mathcal{U}$ se a órbita de qualquer subconjunto limitado de $\mathcal{U}$ entra em $\mathcal{B}$ depois de um certo tempo (que depende do conjunto). Simbolicamente, isto significa que*

$$\forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U},\ \mathcal{B}_0 \text{ limitado},\ \exists\ t_1(\mathcal{B}_0)/\ S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B},\ \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0). \tag{2.4}$$

Quando $\mathcal{B}$ é absorvente em $\mathcal{U}$, também dizemos que $\mathcal{B}$ absorve os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$.

Proposição 2.3 *A existência de um atrator global A para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, implica a existência de um conjunto absorvente.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ seja $\mathcal{V}_\varepsilon$ a ε-vizinhança de A. Sendo A um atrator global tem-se para qualquer conjunto limitado $\mathcal{B}_0 \subset H$,

$$t \to \infty \;\Rightarrow\; d(S(t)\mathcal{B}_0, A) \to 0.$$

Sendo assim, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que, para $t \geq t_\varepsilon$

$$d(S(t)\mathcal{B}_0, A) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sup_{x \in S(t)\mathcal{B}_0} \inf_{y \in A} d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dado $x \in S(t)\mathcal{B}_0$ temos $\inf\limits_{y \in A} d(x,y) \leq \varepsilon/2$. Como A é compacto, existe $y_0 \in A$ tal que $\inf\limits_{y \in A} d(x,y) = d(x,y_0)$. Logo,

$$d(x,y_0) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow x \in B(y_0,\varepsilon) \subset \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Portanto,

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Vemos assim que $\mathcal{V}_\varepsilon$ é absorvente em H. ∎

Reciprocamente, vamos mostrar que um semigrupo que possui um conjunto absorvente e goza de algumas outras propriedades, possui um atrator.

Observação 2.1 Podemos estender a definição de conjunto absorvente e considerar um conjunto $\mathcal{B}$ que absorve os pontos de $\mathcal{U}$ ou os conjuntos compactos de $\mathcal{U}$ (isto é, (2.4)) é satisfeito com $\mathcal{B}_0 = \{u_0\}$, $u_0 \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}$ um conjunto compacto). Contudo, essa extensão não será necessária em nossos estudos.

Se considerarmos um espaço $W \subset H$, então podemos substituir (na Definição) os conjuntos limitados e abertos de H pelos de W, obtendo o conceito de conjuntos que são absorventes em W.

Mostraremos agora, como provar a existência de um atrator quando a existência de um conjunto absorvente é conhecida. Neste momento, suposições adicionais sobre o semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ são necessárias. A saber, devemos assumir pelo menos uma das seguintes hipóteses:

($\mathbf{h_1}$) Os operadores $S(t)$ são *uniformemente compactos* para t suficientemente grande. Com isto queremos dizer que para todo conjunto limitado $\mathcal{B} \subset H$ existe t_0 (que a priori depende de $\mathcal{B}$) tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$$

é relativamente compacto em H.

($\mathbf{h_2}$) H é um espaço de Banach e, para todo t, $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ onde o operador $S_1(t)$ é uniformemente compacto (isto é, satisfaz ($\mathbf{h_1}$)) e $S_2(t)$ é uma aplicação contínua de H em H tal que, para todo conjunto limitado $C \subset H$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} \|S_2(t)\varphi\|_H \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Em outros termos, (h_2) assume que H é um espaço de Banach e que $S(t)$ é a pertubação de um operador satisfazendo (h_1) por uma aplicação (não necessariamente linear) que converge para 0 quando $t \to \infty$. Claramente, se H é um espaço de Banach, qualquer família de operadores satisfazendo (h_1) também satisfaz (h_2) com $S_2 \equiv 0$ para todo t.

Lema 2.1 *Se o semigrupo* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *satisfaz* (h_1) *ou* (h_2) *então, para qualquer conjunto não vazio e limitado* $\mathcal{B}_0$ *de* H, $\omega(\mathcal{B}_0)$ *é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração: Suponha que vale (h_1) e seja $\mathcal{B}_0 \subset H$ limitado, $\mathcal{B}_0 \neq \emptyset$. Existe t_0 tal que $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}_0$ é relativamente compacto em H. Daí, pelo Lema 1.1 segue que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio, compacto e invariante.

Suponhamos agora que vale (h_2). Para demonstrar o desejado, usaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2 Se (h_2) é válida, (φ_n) é limitada e $\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$, então $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$. Além disto, ($S_1(t_n)\varphi_n$) é convergente se, e somente se, ($S(t_n)\varphi_n$) converge (e neste caso os limites coincidem).

Com efeito, como vale (h_2), temos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|S_2(t_n)\varphi_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_2(t_n)\varphi_n\| = r_c(t_n),$$

onde $C := \{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Fazendo $n \to \infty$ temos que $t_n \to \infty$ e então, de acordo com (h_2), $r_c(t_n) \to 0$. Pelo Teorema do Sanduíche resulta que

$$\|S_2(t_n)\varphi_n\|_H \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e, por conseguinte,

$$S_2(t_n)\varphi_n \to 0 \quad \text{em} \quad H.$$

Por (h_2),

$$S(t_n)\varphi_n = S_1(t_n)\varphi_n + S_2(t_n)\varphi_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disto fica evidente que $(S_1(t_n)\varphi_n)$ converge se e somente se $(S(t_n)\varphi_n)$ converge. Em caso afirmativo, da igualdade acima e do fato de que $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} S_1(t_n)\varphi_n.$$

Seja $\mathcal{B}_0 \subset H$ não vazio e limitado e considere o conjunto

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}.$$

A definição de $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ relembra a definição de conjunto ω-limite, porém S_1 não é (necessariamente) um semigrupo. Contudo, vale uma caracterização para $\omega_1(\mathcal{B}_0)$, semelhante àquela para conjuntos ω-limite dada pela Proposição 1.2:

Afirmação 2.3 $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$ se, e somente se, existem uma sequência (φ_n) em $\mathcal{B}_0$ e $t_n \to \infty$, tais que

$$S_1(t_n)\varphi_n \to \varphi \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Idêntica a demonstração do item (i) na Proposição 1.2.

Vamos mostrar que o conjunto ω-limite de $\mathcal{B}_0$ relativo ao semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é igual a $\omega_1(\mathcal{B}_0)$. Assuma que $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Assim, pela Proposição 1.2 existem sequências $(\varphi_n) \subset \mathcal{B}_0$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Como (h_2) é válida, (φ_n) é limitada (pois $\mathcal{B}_0$ é limitado) e $t_n \to \infty$, pela Afirmação 2.2 segue que $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$. Mais que isso, como $S(t_n)\varphi_n$ converge para φ a mesma Afirmação nos dá que

$$S_1(t_n)\varphi_n \to \varphi \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Pela Afirmação 2.3 segue que $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$, mostrando que $\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega_1(\mathcal{B}_0)$. A inclusão contrária é demonstrada de maneira idêntica e, portanto,

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0). \tag{2.5}$$

Com argumentos análogos aos utilizados no Lema 1.1 para mostrar que $\omega(A)$ é não vazio e compacto, mostra-se que $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ é não vazio e compacto em H, atendo-se aos fatos de que $\mathcal{B}_0 \neq \emptyset$ e que existe $t_0 > 0$ para o qual $\bigcup_{t\geq t_0} S_1(t)\mathcal{B}_0$ é relativamente compacto em H (hipótese (h$_2$)). Daí, pela igualdade (2.5) resulta que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é não vazio e compacto em H. Resta mostrar que $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante por S.

A inclusão $S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$ para todo $t \geq 0$, é provada exatamente como no Lema 1.1. Seja $t \geq 0$. Dado $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$ tem-se $\psi = S(t)\varphi$, onde $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Pela Proposição 1.2, existem sequências $(\varphi_n) \subset \mathcal{B}_0$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$, $t_n \to \infty$ tais que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando a propriedade de semigrupo, temos

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n.$$

Daí, pela continuidade de $S(t)$ temos

$$\lim_{n\to\infty} S(t+t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t)[\lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n] = S(t)\varphi = \psi.$$

Como $(t+t_n) \to \infty$, pela Proposição 1.2 segue que $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$ e portanto

$$S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0).$$

A inclusão oposta necessita de um argumento levemente diferente. Seja $t \geq 0$ e considere $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Pela Proposição 1.2, existem sequências $(\varphi_n) \subset \mathcal{B}_0$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Pela hipótese (h$_2$) existe $t_0 > 0$ tal que $K_0 := \overline{\bigcup_{r \geq t_0} S_1(r)\mathcal{B}_0}$ é compacto em H. Desde que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$n \geq n_0 \Rightarrow t_n > t_0 + t \Rightarrow t_n - t > t_0.$$

Sendo assim,

$$\big(S_1(t_n - t)\varphi_n\big)_{n \geq n_0} \subset \bigcup_{r \geq t_0} S_1(r)\mathcal{B}_0 \subset K_0.$$

Pela compacidade de K_0 obtemos uma subsequência convergente $\big(S_1(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j}\big)_{n_j \geq n_0}^{j \in \mathbb{N}}$ de $\big(S_1(t_n - t)\varphi_n\big)_{n \geq n_0}$, digamos para $\psi \in K_0$. Usando novamente a hipótese (h$_2$) temos para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$S(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j} = S_1(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j} + S_2(t_{n_j} - t)\varphi_{n_j}.$$

Desde que $(t_{n_j}-t)\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e (φ_{n_j}) é limitada (pois $\mathcal{B}_0$ é limitado), pela Afirmação 2.2 vem que

$$\lim_{j\to\infty} S_2(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=0.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=\lim_{j\to\infty} S_1(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}+\lim_{j\to\infty} S_2(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=\psi+0=\psi.$$

Como $(t_{n_j}-t)\to\infty$ e $(\varphi_{n_j})\subset\mathcal{B}_0$, a igualdade acima nos dá, pela Proposição 1.2, que $\psi\in\omega(\mathcal{B}_0)$. Além disto, pela continuidade de $S(t)$,

$$\lim_{j\to\infty} S(t)S(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=S(t)\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=S(t)\psi$$

enquanto, pela propriedade de semigrupo

$$\lim_{j\to\infty} S(t)S(t_{n_j}-t)\varphi_{n_j}=\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j})\varphi_{n_j}=\varphi.$$

Pela unicidade de limites deve ser $\varphi=S(t)\psi$ e portanto $\varphi\in S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$. Concluímos enfim que

$$S(t)\omega(\mathcal{B}_0)=\omega(\mathcal{B}_0),\ \forall\ t\geq 0,$$

ou seja, $\omega(\mathcal{B}_0)$ é invariante. ■

Lema 2.2 *Suponha que H é um espaço de Banach. Sejam $\mathcal{U}$ um aberto convexo e $K\subset\mathcal{U}$ um conjunto compacto invariante que atrai conjuntos compactos em $\mathcal{U}$. Então K é conexo.*

Demonstração: Seja $B=\overline{\text{conv }K}$. Pelo Teorema A.3 temos que B é compacto. Além disso B é conexo e está contido em $\mathcal{U}$. Assim, K atrai B. Suponha que K não seja conexo. Então existem A_1 e A_2 abertos em H tais que, pondo $W_1=A_1\cap K$ e $W_2=A_2\cap K$, tem-se:

1) $W_1,W_2\neq\emptyset$, 2) $W_1\cap W_2=\emptyset$, 3) $W_1\cup W_2=K$.

Afirmação 2.4 Existem U_1 e U_2 abertos em H tais que:

1) $U_i\cap K\neq\emptyset,\ i=1,2,$ 2) $U_1\cap U_2=\emptyset$ 3) $K\subset U_1\cup U_2$.

Denotando por d a métrica de H, temos que (K,d) é um espaço métrico compacto. Desde que W_1 e W_2 são fechados em K, resulta que os mesmos são compactos em (K,d). Pelo Corolário A.2, existem $p \in W_1$ e $q \in W_2$ tais que

$$d(W_1,W_2) = d(p,q),$$

onde a distância entre conjuntos considerada é aquela definida na Seção A.1. Claramente $p \neq q$ pois $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Daí, $d(p,q) > 0$, ou seja,

$$\varepsilon := d(W_1,W_2) > 0.$$

Considere $r \in (0,\varepsilon)$ e defina

$$U_1 = \bigcup_{x \in W_1} B(x, r/2) \ \text{ e } \ U_2 = \bigcup_{y \in W_2} B(y, r/2).$$

Vamos mostrar que U_1 e U_2 satisfazem a tese da Afirmação.
1) $\underline{U_i \cap K \neq \emptyset, \ i = 1,2}$. Para ver isto basta notar que

$$\emptyset \neq W_i \subset U_i \cap K, \ i = 1,2.$$

2) $\underline{U_1 \cap U_2 = \emptyset}$. Suponha que ocorra o contrário. Então existem $z \in H$, $x \in W_1$ e $y \in W_2$ tais que

$$d(z,x) < \frac{r}{2} \ \text{ e } \ d(z,y) < \frac{r}{2}.$$

Logo,

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) < r < \varepsilon.$$

Mas isso é um absurdo pois

$$x \in W_1 \text{ e } y \in W_2 \Rightarrow d(x,y) \geq d(W_1,W_2) = \varepsilon.$$

3) $\underline{K \subset U_1 \cup U_2}$. Para verificar esta inclusão, note que $W_1 \subset U_1$ e $W_2 \subset U_2$. Logo,

$$W_1 \cup W_2 \subset U_1 \cup U_2,$$

ou seja, $K \subset U_1 \cup U_2$.

Considere os abertos U_1 e U_2 dados pela Afirmação 2.4. Como $K \subset B$ temos

$$S(t)K \subset S(t)B, \ \forall t \geq 0.$$

Sendo K invariante, resulta que

$$K \subset S(t)B, \ \forall t \geq 0.$$

Dado $t \geq 0$, tendo em vista que B é conexo e $S(t)$ é contínuo, temos que $S(t)B$ é conexo. Por outro lado, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implica em

$$[U_1 \cap S(t)B] \cap [U_2 \cap S(t)B] = \emptyset.$$

Além disso,

$$\emptyset \neq U_i \cap K \subset U_i \cap S(t)B \Rightarrow U_i \cap S(t)B \neq \emptyset, \ i = 1, 2.$$

Uma vez que ocorre a inclusão

$$[U_1 \cap S(t)B] \cup [U_2 \cap S(t)B] \subset S(t)B,$$

a inclusão inversa não pode ocorrer pois, do contrário, teríamos

$$[U_1 \cap S(t)B] \cup [U_2 \cap S(t)B] = S(t)B,$$

o que contradiz a conexidade de $S(t)B$.

Sendo assim, para qualquer $t \geq 0$, existe $x_t \in S(t)B$ tal que $x_t \notin [U_1 \cap S(t)B] \cup [U_2 \cap S(t)B]$ e, consequentemente, $x_t \notin U_1 \cup U_2$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $x_n \in S(n)B$ de sorte que $x_n \notin U_1 \cup U_2$. Considere a sequência (x_n) assim obtida. Vamos mostrar que (x_n) possui uma subsequência que converge para um ponto de K, chegando assim a uma contradição.

Sabemos que K atrai B, isto é,

$$d(S(t)B, K) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Dessa forma,

$$\sup_{x \in S(t)\mathcal{B}} d(x, K) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $t_\varepsilon > 0$ tal que,

$$t \geq t_\varepsilon \Rightarrow d(x, K) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in S(t)B.$$

De modo especial,

$$n \geq t_\varepsilon \Rightarrow d(x, K) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in S(n)B.$$

Logo,

$$n \geq t_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como K é compacto, pela Proposição A.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in K$ tal que $d(x_n, K) = d(x_n, u_n)$. Pela compacidade de K, (u_n) possui uma subsequência (u_{n_j}) convergindo para $u \in K$. Desse modo, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq j_1 \Rightarrow d(u_{n_j}, u) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disto, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $j \geq j_2$ tem-se $n_j \geq t_\varepsilon$. Seja $j_0 := \max\{j_1, j_2\}$. Logo,

$$j \geq j_0 \Rightarrow d(x_{n_j}, u) \leq d(x_{n_j}, u_{n_j}) + d(u_{n_j}, u) < \varepsilon.$$

Vemos assim que $x_{n_j} \to u$. Mas $u \in K$ e consequentemente $u \in U_1 \cup U_2$. Portanto, para j suficientemente grande tem-se $x_{n_j} \in U_1 \cup U_2$, o que é uma contradição pois (x_{n_j}) é uma subsequência de (x_n) e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin U_1 \cup U_2$. ■

Teorema 2.1 *Assuma que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaça (h_1) ou (h_2) e que existem um conjunto aberto $\mathcal{U}$ e um subconjunto limitado B de $\mathcal{U}$ tal que B é absorvente em $\mathcal{U}$. Então o conjunto ω-limite de B, $A := \omega(B)$, é um atrator compacto que atrai os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$. Além disto, A é atrator limitado maximal em $\mathcal{U}$ (com relação à inclusão de conjuntos). Mais ainda, se H é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é convexo então A é conexo.*

Demonstração:

1ª parte: $A = \omega(B)$ é um atrator compacto que atrai os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$.

Vamos assumir primeiro que (h_1) é válida. Neste caso, existe $t_1 > 0$ tal que $\bigcup_{t \geq t_1} S(t)B$ é relativamente compacto em H. Pelo Lema 1.1 segue que $A = \omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Para concluir que A é um atrator em $\mathcal{U}$ devemos mostrar que

$$d(S(t)u_0, A) \to 0 \text{ quando } t \to \infty, \ \forall u_0 \in \mathcal{U}. \tag{2.6}$$

E para concluir que A atrai conjuntos limitados em $\mathcal{U}$, devemos mostrar que, para todo subconjunto limitado D de $\mathcal{U}$, tem-se

$$d(S(t)D, A) \to 0 \text{ quando } t \to \infty. \tag{2.7}$$

Como (2.6) é um caso particular de (2.7), é suficiente mostrar esta última sentença, o que será feito por contradição. Suponha que para algum $B_0 \subset \mathcal{U}$ limitado, (2.7) não ocorra. Então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $M > 0$ é possível encontrar $t > M$, de modo que $d(S(t)B_0, A) \geq \delta$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $t_n > n$ satisfazendo $d(S(t_n)B_0, A) \geq \delta$. Logo,

$$\sup_{x \in S(t_n)B_0} d(x, A) \geq \delta > \frac{\delta}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S(t_n)B_0$ tal que $d(x_n, A) > \dfrac{\delta}{2}$. Também para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B_0$ de modo que $x_n = S(t_n)b_n$. Sendo assim,

$$d(S(t_n)b_n, A) > \frac{\delta}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Por (h_1), existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B_0}$ é compacto em H. Ora,

$$n \geq t_0 \Rightarrow t_n \geq t_0 \Rightarrow S(t_n)B_0 \subset \bigcup_{t \geq t_0} S(t)B_0 \Rightarrow S(t_n)b_n \in \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B_0}.$$

Sendo assim, a sequência $(S(t_n)b_n)_{n \geq t_0}$ possui uma subsequência $(S(t_{n_j})b_{n_j})$ convergindo para $b \in H$. Por (2.8) temos para todo $j \in \mathbb{N}$.

$$d(S(t_{n_j})b_{n_j}, A) > \frac{\delta}{2}. \tag{2.9}$$

Desde que A é compacto, a função

$$\begin{array}{rccl} g: & H & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = d(x, A) \end{array}$$

é contínua. Portanto, passando ao limite com $j \to \infty$ em (2.9) temos

$$d(b, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{2.10}$$

Como B é absorvente em $\mathcal{U}$, existe $t_2 > 0$ tal que, para $t \geq t_2$,

$$S(t)B_0 \subset B.$$

Em particular, $S(t_2)b_{n_j} \in B$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Considerando $j_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que $t_{n_j} > t_2$ sempre que $j \geq j_0$, temos $(S(t_2)b_{n_j})_{j \geq j_0} \subset B$ e mais

$$\lim_{j \geq j_0} S(t_{n_j} - t_2)S(t_2)b_{n_j} = \lim_{j \geq j_0} S(t_{n_j})b_{n_j} = b.$$

Como $t_{n_j} - t_2 \to \infty$, resulta da Proposição 1.2 que $b \in A = \omega(B)$. Neste caso $d(b, A) = 0$, o que é uma contradição com (2.10).

Agora suponhamos que (h_2) é válida. Pelo Lema 2.1 temos que $A = \omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Resta mostrar que A é um atrator em $\mathcal{U}$ e que que A atrai conjuntos limitados em $\mathcal{U}$. Para tanto, é suficiente mostrar que, para todo subconjunto limitado D de $\mathcal{U}$, vale (2.7). A prova será de maneira similar ao feito sob a hipótese (h_1), com as modificações adequadas.

Suponha que para algum $B_0 \subset \mathcal{U}$ limitado, (2.7) não ocorra. Nestas condições obtemos um número $\delta > 0$, sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(b_n) \subset B_0$ tais que, $t_n \to \infty$ e (2.8) é satisfeito. Por (h_2),

$$S(t_n)b_n = S_1(t_n)b_n + S_2(t_n)b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz (h_1), podemos obter uma subsequência $(S_1(t_{n_j})b_{n_j})$ de $(S_1(t_n)b_n)$, convergindo para $b \in H$. Desde que (b_{n_j}) é limitada, pela Afirmação 2.2 segue que $S(t_{n_j})b_{n_j} \to b$ quando $j \to \infty$. Daí, por (2.8) obtemos

$$d(b, A) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Por outro lado, usando o fato de que B é absorvente em $\mathcal{U}$, mostra-se que $b \in A$ e então $d(b, A) = 0$, o que é uma contradição.

2ª parte: <u>$A = \omega(B)$ é atrator limitado maximal em $\mathcal{U}$.</u> Seja A' atrator limitado em $\mathcal{U}$. Como B é absorvente em $\mathcal{U}$, existe $t' > 0$ tal que $S(t')A' \subset B$. Sendo A' invariante, temos $S(t')A' = A'$. Logo, $A' \subset B$ de sorte que

$$S(t)A' \subset S(t)B, \ \forall t \geq 0.$$

Desse modo, dado $s \geq 0$, temos para $t \geq s$

$$S(t)A' \subset S(t)B \subset \bigcup_{r\geq s} S(r)B \subset \overline{\bigcup_{r\geq s} S(r)B}.$$

Usando novamente o fato de que A' é invariante, vem que

$$A' \subset \overline{\bigcup_{r\geq s} S(r)B}, \ \forall s \geq 0,$$

de onde resulta que $A' \subset \omega(B) = A$.

3ª parte: <u>A é conexo (supondo que H é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é convexo).</u> Pela primeira parte temos que A é compacto e invariante e que atrai conjuntos limitados em $\mathcal{U}$. Sendo assim, A atrai conjuntos compactos em $\mathcal{U}$ e portanto, usando o Lema 2.2, segue que A é conexo.

∎

2.2 Atratores Exponenciais

Seja $(H, \|\cdot\|_H)$ um espaço de Banach. Denotaremos por dist_H a semidistância de Hausdorff na topologia de H, ou seja, dados $A, B \subset H$

$$\text{dist}_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_H.$$

Dado $r > 0$ e $A \subset H$ um subconjunto relativamente compacto, denotamos por $N_r(A, H)$ o menor número de r-bolas (bolas de raio r centradas em pontos de H) necessário para cobrir A. Quando não houver confusão com relação ao espaço H no qual estamos considerando A, escreveremos simplesmente $N_r(A)$. Claro que $N_r(A, H)$ está bem definido pois, por compacidade, existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in \overline{A}$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Logo, $0 \leq N_r(A, H) \leq n < \infty$.

Definição 2.4 *Dado um subconjunto A de X relativamente compacto, definimos a dimensão fractal de A em H como sendo*

$$\dim_F(A, H) = \limsup_{r \to 0} \frac{\ln N_r(A, H)}{\ln \frac{1}{r}}.$$

Mais uma vez, quando não houver confusão, escreveremos simplesmente $\dim_F(A)$ para denotar a dimensão fractal de A em H.

Lema 2.3 *Se $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente tal que $\varepsilon_k \to 0$ e, para algum $\alpha \in (0, 1)$,*

$$\varepsilon_{k+1} \geq \alpha \varepsilon_k \;\forall\; k \in \mathbb{N},$$

então, para qualquer $A \subset H$ relativamente compacto,

$$\dim_F(A, H) = \limsup_{k \to \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A, H)}{- \ln \varepsilon_k}.$$

Demonstração: Dado $r \in (0, 1)$, é possível obter $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon_{k+1} \leq r < \varepsilon_k. \tag{2.11}$$

De fato, como $\varepsilon_j \to 0$, para j suficientemente grande temos $\varepsilon_j \leq r$. Assim, o conjunto $\{j \in \mathbb{N};\; r < \varepsilon_j\}$ é finito e portanto limitado. Escolhendo k como o elemento máximo desse conjunto obtemos (2.11). Sendo $\varepsilon_{k+1} \leq r$, é possível cobrir A com uma quantidade $N_{\varepsilon_{k+1}}(A, H)$ de bolas de raio r. Logo,

$$N_r(A, H) \leq N_{\varepsilon_{k+1}}(A, H).$$

Note que

$$r < \varepsilon_k \Rightarrow \ln r < \ln \varepsilon_k \Rightarrow \frac{1}{\ln r} > \frac{1}{\ln \varepsilon_k} \Rightarrow \frac{1}{-\ln r} < \frac{1}{-\ln \varepsilon_k}.$$

Daí,

$$\frac{N_r(A,H)}{-\ln r} < \frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k} = \frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k + \ln \varepsilon_{k+1} - \ln \varepsilon_{k+1}} = \frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_{k+1} + \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right)}.$$

Além disto,

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \geq \alpha \Rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right) \geq \ln \alpha \Rightarrow -\ln \varepsilon_{k+1} + \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right) \geq -\ln \varepsilon_{k+1} + \ln \alpha.$$

Desse modo,

$$\frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_{k+1} + \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right)} \leq \frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_{k+1} + \ln \alpha}$$

Logo,

$$\frac{N_r(A,H)}{-\ln r} < \frac{N_{\varepsilon_{k+1}}(A,H)}{-\ln \varepsilon_{k+1} + \ln \alpha}.$$

Como (ε_k) é decrescente, quando $r \to 0$ para que (2.11) permaneça sendo satisfeito devemos ter $k \to \infty$. Sendo assim,

$$\limsup_{r\to 0} \frac{N_r(A,H)}{-\ln r} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k + \ln \alpha}.$$

Como $\varepsilon_k \to 0$ temos $-\ln \varepsilon_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Desse modo, a parcela constante $\ln \alpha$ é desprezível no denominador acima quando $k \to \infty$, isto é,

$$\limsup_{k\to\infty}(-\ln \varepsilon_k + \ln \alpha) = \limsup_{k\to\infty}(-\ln \varepsilon_k).$$

Portanto,

$$\limsup_{r\to 0} \frac{N_r(A,H)}{-\ln r} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

Segue da definição que,

$$\dim_F(A,H) \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

Procedendo de maneira similar, vamos agora obter a desigualdade oposta. Desde que $r < \varepsilon_k$, é possível cobrir A com uma quantidade $N_r(A,H)$ de bolas de raio ε_k. Logo, $N_{\varepsilon_k}(A,H) \leq N_r(A,H)$ o que implica em

$$\ln N_{\varepsilon_k}(A,H) \leq \ln N_r(A,H).$$

Além disto,

$$\varepsilon_{k+1} \leq r \Rightarrow \ln \varepsilon_{k+1} \leq \ln r \Rightarrow \frac{1}{\ln \varepsilon_{k+1}} \geq \frac{1}{\ln r} \Rightarrow \frac{1}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \leq \frac{1}{-\ln r}.$$

Daí,

$$\frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \leq \frac{\ln N_r(A,H)}{-\ln r}.$$

Somando e subtraindo $\ln \varepsilon_k$ no denominador da fração a esquerda, usando propriedades do logaritmo e o fato de que $\varepsilon_{k+1} \geq \alpha \varepsilon_k$ obtemos

$$\frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k + \ln \frac{1}{\alpha}} \leq \frac{\ln N_r(A,H)}{-\ln r}.$$

Portanto,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k + \ln \frac{1}{\alpha}} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(A,H)}{-\ln r}$$

de forma que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k} \leq \dim_F(A,H).$$

Finalmente, concluímos que

$$\dim_F(A,H) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(A,H)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

■

Abaixo listamos algumas propriedades da dimensão fractal, em conformidade com a Proposição 2.61 de [17].

Proposição 2.4 *Sejam H_1 e H_2 espaços de Banach.*

(i) *Se K_1 e K_2 são dois subconjuntos compactos de H_1 então*

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow \dim_F(K_1,H_1) \leq \dim_F(K_2,H_1).$$

(ii) *Se K_1 é compacto em H_1 e K_2 é compacto em H_2 então*

$$\dim_F(K_1 \times K_2, H_1 \times H_2) \leq \dim_F(K_1,H_1) + \dim_F(K_2,H_2).$$

(iii) *Se $f : H_1 \to H_2$ é Lipschitziana então, para todo conjunto compacto $K \subset H_1$ tem-se*

$$\dim_F\big(f(K),H_2\big) \leq \dim_F\big(K,H_1\big).$$

(iv) Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo então $\dim_F(I, \mathbb{R}) = 1$.

Demonstração: (i) Seja $r \in (0,1)$. Qualquer cobertura para K_2 é uma cobertura para K_1 de modo que, é possível cobrir K_1 por $N_r(K_2)$ bolas de raio r. Assim, por definição,

$$N_r(K_1) \leq N_r(K_2). \tag{2.12}$$

Agora,

$$r < 1 \Rightarrow \frac{1}{r} > 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{r} > 0.$$

Logo, podemos multiplicar ambos os membros de (2.12) por $\ln \frac{1}{r}$ obtendo

$$\frac{N_r(K_1)}{\ln \frac{1}{r}} \leq \frac{N_r(K_2)}{\ln \frac{1}{r}}.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{r \to 0} \frac{N_r(K_1)}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{r \to 0} \frac{N_r(K_2)}{\ln \frac{1}{r}},$$

ou seja, $\dim_F(K_1) \leq \dim_F(K_2)$.

(ii) Sejam $r \in (0,1)$ e $\delta = r/2$. Sejam

$$\bigcup_{i=1}^{N_\delta(K_1)} B(x_i, \delta) \quad \text{e} \quad \bigcup_{j=1}^{N_\delta(K_2)} B(y_j, \delta)$$

coberturas de K_1 em H_1 e de K_2 em H_2, respectivamente, por δ-bolas. Então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N_\delta(K_1)} B(x_i, \delta) \right) \times \left(\bigcup_{j=1}^{N_\delta(K_2)} B(y_j, \delta) \right) = \bigcup_{i=1}^{N_\delta(K_1)} \bigcup_{j=1}^{N_\delta(K_2)} [B(x_i, \delta) \times B(y_j, \delta)]$$

é uma cobertura para $K_1 \times K_2$ em $H_1 \times H_2$ com $N_\delta(K_1) \cdot N_\delta(K_2)$ bolas cujo raio é no máximo 2δ. Aumentando esse raio até 2δ, obtemos uma cobertura para $K_1 \times K_2$ em $H_1 \times H_2$, com $N_\delta(K_1) \cdot N_\delta(K_2)$ bolas de raio 2δ. Logo,

$$N_{2\delta}(K_1 \times K_2) \leq N_\delta(K_1) \cdot N_\delta(K_2)$$

o que implica em

$$\frac{\ln N_{2\delta}(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{2\delta}} \leq \frac{\ln N_\delta(K_1) + \ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{2\delta}},$$

ou ainda,

$$\frac{\ln N_{2\delta}(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{2\delta}} \leq \frac{\ln N_\delta(K_1) + \ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2\delta}}.$$

Disto vem que

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_{2\delta}(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{2\delta}} \leq \limsup_{\delta\to 0} \left(\frac{\ln N_\delta(K_1) + \ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2\delta}} \right).$$

Como $2\delta = r$ e

$$\delta \to 0 \Leftrightarrow r \to 0,$$

podemos escrever

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{\delta\to 0} \left(\frac{\ln N_\delta(K_1) + \ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2\delta}} \right).$$

Observe que

$$\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2\delta}} = \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\delta}} = \frac{1}{\frac{\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{\delta}}} = \frac{1}{\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{\delta}} + 1}.$$

Logo

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{2\delta}} = 1$$

de modo que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{\delta\to 0} \left(\frac{\ln N_\delta(K_1) + \ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{\delta}} \right).$$

Portanto,

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(K_1 \times K_2)}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(K_1)}{\ln \frac{1}{\delta}} + \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(K_2)}{\ln \frac{1}{\delta}},$$

concluindo a demonstração do item (ii).

(iii) Por hipótese existe $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\|_{H_2} \leq L\|x - y\|_{H_1}.$$

Fixe $r \in (0, 1)$ e seja $\delta := r/L$. Se

$$\bigcup_{i=1}^{N_\delta(K)} B(x_i, \delta)$$

é uma cobertura para K por δ-bolas então

$$\bigcup_{i=1}^{N_\delta(K)} B(f(x_i), L\delta)$$

é uma cobertura para $f(K)$ por $L\delta$-bolas. De fato, se $y \in f(K)$ então $y = f(x)$ com $x \in K$. Mas $x \in B(x_i, \delta)$ para algum $i \in \{1, 2, ..., N_\delta(K)\}$. Daí,

$$\|y - f(x_i)\|_{H_2} = \|f(x) - f(x_i)\|_{H_2} \leq L\|x - x_i\|_{H_1} \leq L\delta.$$

Portanto,

$$N_{L\delta}(f(K)) \leq N_\delta(K)$$

o que implica em

$$\ln N_{L\delta}(f(K)) \leq \ln N_\delta(K).$$

Note que

$$L\delta = r \Rightarrow L\delta < 1 \Rightarrow \frac{1}{L\delta} > 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{L\delta} > 0.$$

Podemos então escrever

$$\frac{\ln N_{L\delta}(f(K))}{\ln \frac{1}{L\delta}} \leq \frac{\ln N_\delta(K)}{\ln \frac{1}{L\delta}} = \frac{\ln N_\delta(K)}{\ln \frac{1}{L\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{\delta}}.$$

Assim,

$$\frac{\ln N_r(f(K))}{\ln \frac{1}{r}} \leq \frac{\ln N_\delta(K)}{\ln \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{L\delta}}$$

de onde temos que

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_r(f(K))}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{\delta \to 0} \left(\frac{\ln N_\delta(K)}{\ln \frac{1}{\delta}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{L\delta}} \right). \tag{2.13}$$

Desde que

$$\delta \to 0 \Leftrightarrow r \to 0$$

e

$$\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{L\delta}} \to 1 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0,$$

a desigualdade (2.13) pode ser reescrita como segue

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\ln N_r(f(K))}{\ln \frac{1}{r}} \leq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(K)}{\ln \frac{1}{\delta}}.$$

Portanto $\dim_F(f(K)) \leq \dim_F(K)$.

(iv) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $a, b \in \mathbb{R}$ seus extremos, digamos $a \leq b$. Fixe $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que é possível cobrir I com k bolas fechadas de raio $r_k := \dfrac{b-a}{2k}$. Para isto, dividimos o intervalo I em k subintervalos de comprimento $\dfrac{b-a}{k}$ e tomamos como centros para as bolas desejadas o ponto médio de cada subintervalo. Em outros termos, defina $x_1 := a + r_k$ e, para cada $j \in \{2, ..., k\}$ defina

$$x_j := x_{j-1} + 2r_k.$$

Então,

$$I \subset \bigcup_{j=1}^{k} B[x_j, r_k].$$

Logo,

$$N_{r_k}(I, \mathbb{R}) \leq k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vamos verificar que na verdade ocorre a igualdade. Suponha que existam $n \in \mathbb{N}$ com $n < k$ e $\mathcal{C}$ uma cobertura para I com uma quantidade n de bolas de raio r_k. Denote por μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e por B_j as bolas da cobertura $\mathcal{C}$. Como $I \subset \mathcal{C}$ temos

$$b - a = \mu(I) \leq \mu(\mathcal{C}) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = n \cdot 2r_k < k \cdot 2\frac{b-a}{2k} = b - a,$$

o que é um absurdo. Portanto, não existe cobertura para I por bolas de raio r_k com uma quantidade de bolas menor do que k, ou seja,

$$N_{r_k}(I, \mathbb{R}) = k.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\ln N_{r_k}(I,\mathbb{R})}{-\ln r_k} &= \frac{\ln k}{-\ln\left(\frac{b-a}{2k}\right)} = \frac{\ln k}{-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right) - \ln\frac{1}{k}} = \frac{\ln k}{-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right) + \ln k} \\ &= \frac{1}{\frac{-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right)+\ln k}{\ln k}} = \frac{1}{\frac{-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\ln k} + 1}.\end{aligned}$$

Como $-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right)$ é constante,

$$\frac{-\ln\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\ln k} \to 0 \qquad \text{quando} \qquad k \to \infty.$$

Logo,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln N_{r_k}(I,\mathbb{R})}{-\ln r_k} = 1. \tag{2.14}$$

Para finalizar, vamos mostrar que a sequência (r_k) satisfaz as hipóteses do Lema 2.11. É bem notório que (r_k) é decrescente e que $r_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Agora, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{k} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2k}.$$

Considerando qualquer α com $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{1}{k+1} \geq \alpha \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{b-a}{2(k+1)} \geq \alpha \frac{b-a}{2k},$$

ou seja,

$$r_{k+1} \geq \alpha r_k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.3 e por (2.14) segue que $\dim_F(I, \mathbb{R}) = 1$. ■

Definição 2.5 *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo sobre* H. *Um subconjunto compacto* $\mathcal{M} \subset H$ *é dito um atrator exponencial para* S *quando:*

(*i*) $\mathcal{M}$ *é positivamente invariante por* S, *isto é,* $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ *para todo* $t \geq 0$.

(*ii*) $\mathcal{M}$ *possui dimensão fractal finita.*

(*iii*) *Existe* $\omega > 0$ *tal que, para todo subconjunto limitado* B *de* H, *existe uma constante* $C(B) > 0$, *dependendo de* B, *tal que para todo* $t \geq 0$,

$$dist_H(S(t)B, \mathcal{M}) \leq C(B)e^{-\omega t}.$$

Observação 2.2 Quando existirem ambos, atrator exponencial $\mathcal{M}$ e atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Com efeito, como $\mathcal{A}$ é limitado, existe $C(\mathcal{A}) > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}_H(S(t)\mathcal{A}, \mathcal{M}) \leq C(\mathcal{A})e^{-\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Pela invariância de $\mathcal{A}$ segue que

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \leq C(\mathcal{A})e^{-\omega t}, \ \forall \ t \geq 0.$$

Fazendo $t \to \infty$ obtemos $\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0$ e, pela Afirmação 2.1, segue que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{M}}$. Sendo $\mathcal{M}$ compacto vem que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Além disso, como ambos os conjuntos são compactos (relativamente ao mesmo espaço de fases), $\dim_F \mathcal{A} \leq \dim_F \mathcal{M}$.

Observação 2.3 Dado um conjunto $A \subset H$, a notação $\#A$ indica a cardinalidade do conjunto A.

O seguinte resultado sobre existência de atratores exponenciais é devido a Efendiev, Miranville e Zelik (ver [5], Proposição 1).

Teorema 2.2 *Sejam $(H, \|\cdot\|_H)$ e $(H_1, \|\cdot\|_{H_1})$ espaços de Banach com $H_1 \subset H$, tais que a imersão $H_1 \hookrightarrow H$ é compacta. Seja $X \subset H$ um subconjunto limitado de H. Considere uma aplicação não linear $L : X \to X$ tal que L pode ser decomposta em uma soma de duas aplicações,*

$$L = L_0 + K,$$

onde $L_0 : X \to H$ é uma contração com

$$\|L_0(x_1) - L_0(x_2)\|_H \leq \alpha \|x_1 - x_2\|_H, \ \forall\, x_1, x_2 \in X, \tag{2.15}$$

sendo $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$; e $K : X \to H$ é tal que $K(X) \subset H_1$ e

$$\|K(x_1) - K(x_2)\|_{H_1} \leq C \|x_1 - x_2\|_H, \ \forall\, x_1, x_2 \in X, \tag{2.16}$$

para alguma constante $C > 0$. Então a aplicação L (ou ainda, o semigrupo discreto gerado por L) admite um conjunto $\mathcal{M} \subset \overline{X}^H$ com as seguintes propriedades:

(i) $L^k(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\dim_F(\mathcal{M}, H) < \infty$.

(iii) Existem $\alpha, \omega > 0$ tais que

$$dist_H(L^k(X), \mathcal{M}) \leq \alpha e^{-\omega k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ademais, $\mathcal{M}$ é fechado em H.

Demonstração: Sendo $\alpha < 1/2$ tem-se $1/2 - \alpha > 0$. Fixe $\theta \in \left(0, \frac{1}{2} - \alpha\right)$. Assim

$$2(\alpha + \theta) < 1.$$

Desde que X é limitado em H, existem $R > 0$ e $x_0 \in X$ tal que

$$X \subset B_H(x_0, R). \tag{2.17}$$

Defina os conjuntos E_0 e V_0 pondo

$$E_0 = V_0 = \{x_0\}.$$

Dado $x \in X$, por (2.16)

$$\|K(x) - K(x_0)\|_{H_1} \leq C \|x - x_0\|_H$$

e então de (2.17) resulta que

$$\|K(x) - K(x_0)\|_{H_1} \leq CR.$$

Assim, a bola $B_{H_1}(K(x_0), CR)$ cobre a imagem $K(X)$ de X por K em H_1. Observe que

$$\bigcup_{y\in\overline{B_{H_1}(K(x_0),CR)}} B_H(y,\theta R)$$

é uma cobertura para $\overline{B_{H_1}(K(x_0),CR)}$ em H. Mas pela imersão compacta $H_1 \hookrightarrow H$ temos que $\overline{B_{H_1}(K(x_0),CR)}$ é compacto em H e portanto, a cobertura acima admite uma subcobertura finita, a qual é também uma cobertura finita para $B_{H_1}(K(x_0),CR)$ em H por θR-bolas. Sendo assim, $N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H) < \infty$. Consideremos então uma cobertura para $B_{H_1}(K(x_0),CR)$ em H por $N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H)$ bolas de raio θR, cujos centros serão denotados por y_i, $i \in \{1,2,...,N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H)\}$.

Desse modo,

$$K(X) \subset \bigcup_{i=1}^{N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H)} B_H(y_i,\theta R).$$

Afirmação 2.5 $N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H) = N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))$.

Note que

$$N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H) = N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H) \tag{2.18}$$

e que

$$B_{H_1}(0,CR) = CRB_{H_1}(0,1). \tag{2.19}$$

Seja

$$\bigcup_{i=1}^{N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H)} B_H(z_i,\theta R)$$

uma cobertura para $B_H(0,CR)$ em H. Então

$$\bigcup_{i=1}^{N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H)} B_H\left(\frac{1}{CR}z_i,\frac{\theta}{C}\right)$$

é uma cobertura para $B_{H_1}(0,1)$ em H. De fato, dado $x \in B_{H_1}(0,1)$ por (2.19) temos $CRx \in B_{H_1}(0,CR)$. Assim, existe $i \in \{1,2,...,N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H)\}$ tal que $CRx \in B_H(z_i,\theta R)$. Daí,

$$\|CRx - z_i\|_H < \theta R \Rightarrow CR\left\|x - \frac{1}{CR}z_i\right\|_H < \theta R \Rightarrow \left\|x - \frac{1}{CR}z_i\right\|_H < \frac{\theta}{C}$$

e, consequentemente,

$$x \in B_H\left(\frac{1}{CR}z_i, \frac{\theta}{C}\right).$$

Portanto,

$$B_{H_1}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H)} B_H\left(\frac{1}{CR}z_i, \frac{\theta}{C}\right)$$

e por definição de $N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))$ resulta que

$$N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H)) \leq N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H). \tag{2.20}$$

Analogamente, se

$$\bigcup_{i=1}^{N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))} B_H\left(z_i, \frac{\theta}{C}\right)$$

é uma cobertura para $B_{H_1}(0,1)$ em H, então

$$\bigcup_{i=1}^{N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))} B(CRz_i, \theta R)$$

é uma cobertura para $B_{H_1}(0,CR)$ em H. Com efeito, dado $x \in B_{H_1}(0,CR)$ temos $\frac{1}{CR}x \in B_{H_1}(0,1)$. Assim, existe $i \in \{1,2,...,N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))\}$ tal que $\frac{1}{CR}x \in B_H\left(z_i, \frac{\theta}{C}\right)$. Daí,

$$\left\|\frac{1}{CR}x - z_i\right\|_H < \frac{\theta}{C} \Rightarrow \frac{1}{CR}\|x - CRz_i\|_H < \frac{\theta}{C} \Rightarrow \|x - CRz_i\|_H < \theta R,$$

ou seja,

$$x \in B_H(CRz_i, \theta R).$$

Logo,

$$B_{H_1}(0,CR) \subset \bigcup_{i=1}^{N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))} B(CRz_i, \theta R)$$

de onde segue, pela definição de $N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H)$, que

$$N_{\theta R}(B_{H_1}(0,CR),H) \leq N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H)). \tag{2.21}$$

As desigualdade (2.20) e (2.21) nos dão a igualdade proposta pela Afirmação.

Definindo $N(\theta) := N_{\frac{\theta}{C}}((B_{H_1}(0,1),H))$, pela Afirmação 2.5 temos

$$N_{\theta R}(B_{H_1}(K(x_0),CR),H) = N(\theta)$$

e, portanto,

$$K(X) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_H(y_i, \theta R)$$

é uma cobertura para $K(X)$ em H. Então, dado $x \in X$ existe $i \in \{1, 2, ..., N(\theta)\}$ tal que $K(x) \in B_H(y_i, \theta R)$. Usando a Desigualdade Triangular e (2.15) temos

$$\begin{aligned}
\|L(x) - \big(L_0(x_0) + y_i\big)\|_H &= \|L_0(x) + K(x) - L_0(x_0) - y_i\|_H \\
&\leq \|L_0(x) - L_0(x_0)\| + \|K(x) - y_i\|_H \\
&< \alpha\|x - x_0\|_H + \theta R \\
&< \alpha R + \theta R = (\alpha + \theta)R.
\end{aligned}$$

Vemos assim que

$$\bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_H\big(y_i + L_0(x_0), (\alpha + \theta)R\big)$$

é uma cobertura para $L(X)$ em H. Porém, os centros dessas bolas podem estar fora de $L(X)$ e até mesmo de X. Para evitar este problema, construímos uma nova cobertura para $L(X)$ em H da seguinte maneira: para cada $i \in \{1, 2, ..., N(\theta)\}$ escolhemos

$$x_i \in B_H\big(y_i + L_0(x_0), (\alpha + \theta)R\big) \cap L(X)$$

e consideramos a bola $B_H\big(x_i, 2(\alpha + \theta)R\big)$. A união dessas bolas com $i \in 1, 2, ..., N(\theta)$ é uma cobertura para $L(X)$. Para verificar isto basta notar que

$$B_H\big(y_i + L_0(x_0), (\alpha + \theta)R\big) \subset B_H\big(x_i, 2(\alpha + \theta)R\big), \ \forall\, i \in \{1, 2, ..., N(\theta)\}.$$

De fato, sejam $i \in \{1, 2, ..., N(\theta)\}$ e $x \in B_H\big(y_i + L_0(x_0), (\alpha + \theta)R\big)$. Então temos,

$$\begin{aligned}
\|x - x_i\|_H &\leq \|x - (y_i + L_0(x_0))\|_H + \|y_i + L_0(x_0) - x_i\|_H \\
&< (\alpha + \theta)R + (\alpha + \theta)R = 2(\alpha + \theta)R.
\end{aligned}$$

Defina o conjunto $V_1 := \{x_i;\ i = 1, 2, ..., N(\theta)\}$. Claramente $V_1 \subset L(X)$. Além disso, dado $x \in L(X)$ temos $x \in B_H\big(x_i, 2(\alpha + \theta)R\big)$ para algum $i \in \{1, 2, ..., N(\theta)\}$. Daí,

$$\inf_{y \in V_1} \|x - y\|_H \leq \|x - x_i\|_H < 2(\alpha + \theta)R.$$

Desse modo

$$\sup_{x \in L(X)} \inf_{y \in V_1} \|x - y\|_H \leq 2(\alpha + \theta)R,$$

ou seja,

$$\mathrm{dist}_H(L(X), V_1) \leq R[2(\alpha+\theta)].$$

Note ainda que a cardinalidade de V_1 é igual a $N(\theta)$.

Agora, dado $i \in \{1,2,...,N(\theta)\}$ seja $B_i = B_H\big(x_i, 2(\alpha+\theta)R\big)$. Por (2.16)

$$\|K(x) - K(x_i)\|_{H_1} \leq C\|x - x_i\|_H < C \cdot 2(\alpha+\theta)R,$$

para todo $x \in B_i \cap L(X)$. logo, a bola $B_{H_1}(K(x_i), C2(\alpha+\theta)R)$ cobre $K(B_i \cap L(X))$ em H_1. Devido a imersão compacta $H_1 \hookrightarrow H$ podemos cobrir essa bola por um número finito de $\theta \cdot 2(\alpha+\theta)R$-bolas em H. Pela Afirmação 2.5 (substituindo R por $2(\alpha+\theta)R$), o menor número de bolas para uma cobertura dessa natureza depende apenas de θ e é dado por $N(\theta)$.

Sejam pois $w_1, w_2, ..., w_{N(\theta)} \in H$ tais que

$$K(B_i \cap L(X)) \subset B_{H_1}(K(x_i), C2(\alpha+\theta)R) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_H(w_j, \theta 2(\alpha+\theta)R).$$

Dado $x \in B_i \cap L(X)$ temos, por (2.15), para algum $j \in \{1,2,...,N(\theta)\}$,

$$\begin{aligned}\|L(x) - (w_j + L_0(x_i))\|_H &= \|L_0(x) - L_0(x_i) + K(x) - w_j\|_H \\ &\leq \|L_0(x) - L_0(x_i)\|_H + \|K(x) - w_j\|_H \\ &< \alpha\|x - x_i\|_H + \theta 2(\alpha+\theta)R \\ &< \alpha 2(\alpha+\theta)R + \theta 2(\alpha+\theta)R.\end{aligned}$$

Com isto vemos que,

$$\|L(x) - (w_j + L_0(x_i))\|_H < (\alpha+\theta)2(\alpha+\theta)R = 2(\alpha+\theta)^2 R.$$

Logo,

$$\bigcup_{j=1}^{N(\theta)} B_H\big(w_j + L_0(x_i), 2(\alpha+\theta)^2 R\big)$$

cobre $L(B_i \cap L(X))$ em H. Escolhendo para cada $j \in \{1,2,...,N(\theta)\}$,

$$x_{ij} \in B_H\big(w_j + L_0(x_i), 2(\alpha+\theta)^2 R\big) \cap L\big(B_i \cap L(X)\big)$$

temos que

$$\bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_H(x_{ij}, 4(\alpha+\theta)^2 R)$$

é uma cobertura para $L(B_i \cap X)$, a qual contém $N(\theta)$ bolas. Observe que

$$L^2(X) = L(L(X)) = L\big(L(X) \cap X\big) \subset L\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_i\right) \cap X\right).$$

Sendo assim,

$$L^2(X) \subset L\left(\bigcup_{i=1}^{N(\theta)} B_i \cap X\right) = \bigcup_{i=1}^{N(\theta)} L(B_i \cap X) \subset \bigcup_{i=1}^{N(\theta)} \bigcup_{j=1}^{N(\theta)} B_H\big(x_{ij}, [2(\alpha+\theta)]^2 R\big).$$

Portanto,

$$\bigcup_{i=1}^{N(\theta)} \bigcup_{j=1}^{N(\theta)} B_H\big(x_{ij}, [2(\alpha+\theta)]^2 R\big)$$

é uma cobertura para $L^2(X)$ a qual contém $(N(\theta))^2$ bolas.

Definindo

$$V_2 = \big\{x_{ij},\ i,j \in \{1,2,...,N(\theta)\}\big\}$$

temos $\#V_2 = (N(\theta))^2$ e $V_2 \subset L^2(X)$.Seja $x \in L^2(X)$. Existem $i,j \in \{1,2,...,N(\theta)\}$ tais que $x \in B_H\big(x_{ij}, [2(\alpha+\theta)]^2 R\big)$. Logo,

$$\inf_{y \in V_2} \|x-y\|_H \leq \|x - x_{ij}\|_H < [2(\alpha+\theta)]^2 R.$$

Desse modo

$$\sup_{x \in L^2(X)} \inf_{y \in V_2} \|x-y\|_H \leq [2(\alpha+\theta)]^2 R,$$

ou seja,

$$\mathrm{dist}_H(L(X), V_2) \leq R[2(\alpha+\theta)]^2.$$

Prosseguindo com este raciocínio obtemos uma sequência $\{V_k\}$ de conjuntos tais que

$$V_k \subset L^k(X), \tag{2.22}$$

$$L^k(X) \subset \bigcup_{v \in V_k} B_H\big(v, [2(\alpha+\theta)]^k R\big), \tag{2.23}$$

$$\mathrm{dist}_H(L^k(X), V_k) \leq R[2(\alpha+\theta)]^k \tag{2.24}$$

$$\tag{2.25}$$

e

$$\#V_k = \big(N(\theta)\big)^k, \tag{2.26}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ façamos $E_k := L(E_{k-1}) \cup V_k$. Definimos

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = \overline{E}^H, \tag{2.27}$$

onde $\overline{E}^H$ indica e fecho de E em H. Vamos mostrar que $\mathcal{M}$ satisfaz a tese do Teorema. Convém observar que não é garantida a inclusão $\overline{E}^H \subset X$, o que possibilita questionamentos quanto a coerência da imagem direta $L(\mathcal{M})$. Entretanto, as hipóteses (2.15) e (2.16) aliadas à imersão compacta de H_1 em H, nos dão que L é uniformemente contínua relativamente à norma de H. Assim, L admite uma única extensão uniformemente contínua $\widehat{L}$ a $\overline{X}^H$. A saber, para cada $x \in \overline{X}^H$, $\widehat{L}(x) = \lim L(x_n)$, onde (x_n) é qualquer sequência em X com $x_n \to x$ em H (para maiores detalhes ver referência [13]). Como $\overline{E}^H \subset \overline{X}^H$, faz sentido o conjunto $\widehat{L}(\mathcal{M})$ ao qual iremos nos referir por $L(\mathcal{M})$. Cabe ainda salientar que as hipóteses assumidas para L valem também para $\widehat{L}$, com as convenientes adequações.

(i) <u>$L^k(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, para todo $k \in \mathbb{N}$</u>.

De fato, dado $x \in E$ temos $x \in E_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí, $L(x) \in E_{k+1} = L(E_k) \cup V_{k+1}$. Consequentemente $L(x) \in E$ mostrando que

$$L(E) \subset E.$$

Agora, dado $x \in \mathcal{M}$ tem-se $x = \lim x_n$ com $x_n \in E$. Pela continuidade de L temos

$$L(x) = L(\lim x_n) = \lim L(x_n).$$

Desde que $x_n \in E$ tem-se $L(x_n) \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $L(x) \in \overline{E}^H = \mathcal{M}$ e portanto

$$L(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}.$$

Usando indução verifica-se que

$$L^k(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) <u>$\dim_F(\mathcal{M}) < \infty$</u>.

Começamos relembrando os seguintes resultados da Análise Real, os quais podem ser encontrados em [12]. Consideramos $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função:

(i) Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$ então f é limitada em uma vizinhança de a, isto é, existem $A, \delta > 0$ tais que $|f(x)| < A$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

(ii) Se f é limitada em uma vizinhança de a, então $\limsup_{x \to a} f(x) < \infty$.

Direcionaremos a demonstração deste item no sentido de mostrar que a função

$$r \mapsto \frac{\ln N_r(\mathcal{M}, H)}{\ln \dfrac{1}{r}}$$

é limitada em uma vizinhança de 0, podendo assim concluir o desejado.

Verifiquemos inicialmente que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{k \geq n} E_k \subset L^n(X). \tag{2.28}$$

Note que, como $E_0 \subset X$ e $V_1 \subset L(X)$, temos

$$E_1 = L(E_0) \cup V_1 \subset L(X).$$

Desde que $V_2(X) \subset L^2(X)$,

$$E_2 = L(E_1) \cup V_2 \subset L^2(X).$$

Por indução, obtemos

$$E_k \subset L^k(X), \ \forall \ k \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

Observe ainda que $L(X) \subset X$ implica, também por indução,

$$L^{k+1}(X) \subset L^k(X), \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Agora, fixado $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$L^{k+p}(X) \subset L^k(X), \ \forall \ p \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Já sabemos que esta inclusão é válida para $p = 1$. Suponha que vale para p. Usando o fato de que $L(X) \subset X$ temos

$$L^{k+(p+1)}(X) = L^{k+p}(L(X)) \subset L^{k+p}(X) \subset L^k(X),$$

e isto demonstra (2.30). Finalmente, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq n$. Então $k = n+p$ com $p \in \mathbb{N}$. Por (2.30) $L^{n+p}(X) \subset L^n(X)$, ou seja, $L^k(X) \subset L^n(X)$. Mas por (2.29), $E_k \subset L_k(X)$. Logo $E_k \subset L^n(X)$ e portanto (2.28) está verificado. Por (2.28) e (2.23) segue que

$$\bigcup_{k \geq n} E_k \subset \bigcup_{v \in V_n} B_H\big(v, [2(\alpha+\theta)]^n R\big),$$

o que implica em

$$\overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H \subset \overline{\bigcup_{v \in V_n} B_H\big(v, [2(\alpha+\theta)]^n R\big)}^H,$$

ou seja,

$$\overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H \subset \bigcup_{v \in V_n} \overline{B_H\big(v, [2(\alpha+\theta)]^n R\big)}^H. \tag{2.31}$$

Agora fixe $0 < r \leq 2R(\alpha+\theta)$. Sendo $2(\alpha+\theta) < 1$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} R[2(\alpha+\theta)]^n = 0$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow R[2(\alpha+\theta)]^n < r.$$

Desse modo, o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N};\ R[2(\alpha+\theta)]^n \geq r\}$$

é limitado e por isso possui um elemento máximo $m(r)$. Fixe $n = m(r)+1$. Observe que

$$\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}^H = \overline{\left(\bigcup_{k<n} E_k\right) \cup \left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right)}^H = \overline{\bigcup_{k<n} E_k}^H \cup \overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H.$$

Como $\bigcup_{k<n} E_k$ é um conjunto finito e portanto compacto em H, segue que

$$\mathcal{M} = \left(\bigcup_{k<n} E_k\right) \cup \overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H.$$

Logo,

$$N_r(\mathcal{M}, H) \leq N_r\left(\bigcup_{k<n} E_k\right) + N_r\left(\overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H\right). \tag{2.32}$$

Como $R[2(\alpha+\theta)]^n < r$ (pois $n > m(r)$), por (2.31) resulta que

$$\overline{\bigcup_{k \geq n} E_k}^H \subset \bigcup_{v \in V_n} B_H(v, r)$$

e então

$$N_r\left(\overline{\bigcup_{k\geq n} E_k}^H\right) \leq \#V_n \leq N(\theta)^n.$$

Definindo $N_0 := \max\{2, N(\theta)\}$, temos

$$N_r\left(\overline{\bigcup_{k\geq n} E_k}\right) \leq \#V_n \leq N_0^n < N_0^{n+1}. \tag{2.33}$$

Para qualquer $A \subset H$ relativamente compacto temos

$$N_r(A, H) \leq \#A$$

pois

$$A \subset \bigcup_{v\in A} B(v, r).$$

Logo,

$$N_r\left(\bigcup_{k<n} E_k\right) \leq \#\left(\bigcup_{k<n} E_k\right) \leq \sum_{k<n} \#E_k = \#E_1 + \#E_2 + \cdots + \#E_{n-1}. \tag{2.34}$$

Recorde que, para todos $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1).$$

Lembre ainda que $E_0 = \{x_0\}$ de onde temos $\#L(E_0) = 1$. Uma vez que $E_k = L(E_{k-1}) \cup V_k$, temos

$$\#E_k \leq \#L(E_{k-1}) + \#V_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, como $N_0 \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\#E_1 &\leq \#L(E_0) + \#V_1 \leq 1 + N(\theta) \leq 1 + N_0,\\
\#E_2 &\leq \#L(E_1) + \#V_2 \leq \ 1 + N(\theta) + N(\theta)^2 \leq 1 + N_0 + N_0^2.
\end{aligned}$$

Segue por indução que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\#E_k \leq \sum_{i=0}^{k} N_0^i.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{k} N_0^i = \frac{N_0^{k+1} - 1}{N_0 - 1} < N_0^{k+1},$$

temos que

$$\#E_k < N_0^{k+1}.$$

Portanto, (2.34) nos diz que

$$N_r\left(\bigcup_{k<n} E_k\right) < N_0^2 + N_0^3 + \cdots + N_0^n < 1 + N_0 + N_0^2 + N_0^3 + \cdots + N_0^n.$$

Disto, por (2.32) e (2.33)

$$N_r(\mathcal{M}, H) \leq 1 + N_0 + N_0^2 + N_0^3 + \cdots + N_0^n + N_0^{n+1} = \frac{N_0^{n+2} - 1}{N_0 - 1} < N_0^{n+2}.$$

Podemos assim concluir que

$$\ln N_r(\mathcal{M}, H) < \ln N_0^{n+2}. \tag{2.35}$$

Por outro lado,

$$R[2(\alpha+\theta)]^{m(r)} \geq r \Rightarrow \frac{1}{R[2(\alpha+\theta)]^{m(r)}} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{R[2(\alpha+\theta)]^{m(r)}}\right) \leq \ln\frac{1}{r}.$$

Desse modo,

$$\frac{1}{\ln\dfrac{1}{r}} \leq \frac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{R[2(\alpha+\theta)]^{m(r)}}\right)} = \frac{1}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}}$$

e por (2.35) resulta que

$$\frac{\ln N_r(\mathcal{M}, H)}{\ln\dfrac{1}{r}} < \frac{\ln N_0^{n+2}}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}}.$$

ou melhor

$$\frac{\ln N_r(\mathcal{M}, H)}{\ln\dfrac{1}{r}} < \frac{\ln N_0^{m(r)+3}}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}}. \tag{2.36}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\frac{\ln N_0^{m(r)+3}}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}} &= \frac{(m(r)+3)\ln N_0}{\ln\dfrac{1}{R} + m(r)\ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)} \\ =&\frac{1}{\dfrac{\ln\frac{1}{R} + m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}{(m(r)+3)\ln N_0}} = \frac{1}{\dfrac{\ln\frac{1}{R}}{(m(r)+3)\ln N_0} + \dfrac{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}{(m(r)+3)\ln N_0}}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$R[2(\alpha+\theta)]^{m(r)+1} < r \Rightarrow [2(\alpha+\theta)]^{m(r)+1} < \frac{r}{R} \Rightarrow (m(r)+1)\ln[2(\alpha+\theta)] < \ln\frac{r}{R}.$$

Como $2(\alpha+\theta) < 1$, $\ln[2(\alpha+\theta)] < 0$ e então, multiplicando ambos os membros da última desigualdade por $1/(\ln[2(\alpha+\theta)])$ obtêm-se

$$(m(r)+1) > \frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln[2(\alpha+\theta)]}$$

ou ainda

$$m(r) > \frac{\ln\frac{r}{R}}{\ln[2(\alpha+\theta)]} - 1.$$

Desta desigualdade concluímos que $\lim_{r\to 0} m(r) = \infty$ e, consequentemente,

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{\dfrac{\ln\frac{1}{R}}{(m(r)+3)\ln N_0} + \dfrac{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}{(m(r)+3)\ln N_0}}\right) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\dfrac{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}{(m(r)+3)\ln N_0}}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{(m(r)+3)\ln N_0}{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)} = \lim_{r\to 0}\frac{m(r)\ln N_0}{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)} + \lim_{r\to 0}\frac{3\ln N_0}{m(r)\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}$$
$$= \frac{\ln N_0}{\ln\left(\frac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)}.$$

Portanto, existe

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln N_0^{n+2}}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}}.$$

Desse modo, a função que a cada $r \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$\frac{\ln N_0^{n+2}}{\ln\dfrac{1}{R} + \ln\left(\dfrac{1}{2(\alpha+\theta)}\right)^{m(r)}},$$

é limitada em uma vizinhança de 0. Por (2.36) resulta que

$$r \mapsto \frac{\ln N_r(\mathcal{M}, H)}{\ln\dfrac{1}{r}},$$

é também limitada em uma vizinhança de 0 e então

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(\mathcal{M}, H)}{\ln \frac{1}{r}} < \infty,$$

ou seja, $\dim_F(\mathcal{M}) < \infty$.

(iii) Atração exponencial.

Primeiramente, veja que

$$\operatorname{dist}_H(L^k(X), \mathcal{M}) \leq \operatorname{dist}_H(L^k(X), E).$$

De fato, seja $x \in L^k(X)$. Como

$$\{\|x-y\|_H;\ y \in E\} \subset \{\|x-y\|_H;\ y \in \mathcal{M}\}$$

por propriedades do ínfimo temos

$$\inf\{\|x-y\|_H;\ y \in \mathcal{M}\} \leq \inf\{\|x-y\|_H;\ y \in E\},$$

ou seja,

$$\inf_{y\in\mathcal{M}} \|x-y\|_H \leq \inf_{y\in E} \|x-y\|_H.$$

Logo

$$\sup_{x\in L^k(X)} \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x-y\|_H \leq \sup_{x\in L^k(X)} \inf_{y\in E} \|x-y\|_H,$$

isto é, $\operatorname{dist}_H(L^k(X), \mathcal{M}) \leq \operatorname{dist}_H(L^k(X), E)$.

Agora, sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x \in L^k(X)$. Dado $z \in V_k$ tem-se $z \in E$ e por isso

$$\inf_{y\in E} \|x-y\|_H \leq \|x-z\|.$$

Por definição de ínfimo segue que

$$\inf_{y\in E} \|x-y\| \leq \inf_{z\in V_k} \|x-z\|.$$

Passando ao supremo obtemos,

$$\sup_{x\in L^k(X)} \inf_{y\in E} \|x-y\| \leq \sup_{x\in L^k(X)} \inf_{z\in V_k} \|x-z\|$$

ou seja,

$$\operatorname{dist}_H(L^k(X), E) \leq \operatorname{dist}_H(L^k(X), V_k).$$

Por (2.24) vem

$$\text{dist}_H(L^k(X), E) \leq R[2(\alpha+\theta)]^k, \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Seja $a = 2(\alpha+\theta)$. Temos

$$a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow -\ln a > 0.$$

Além disso,

$$Ra^k = Re^{\ln a^k} = Re^{k \ln a} = Re^{-k(-\ln a)}$$

e, portanto, o resultado segue com $\alpha = R$ e $\omega = -\ln a$. ∎

O próximo resultado será útil no estudo de atratores exponenciais para equações de campos neurais, o que será feito no próximo capítulo. O mesmo pode ser encontrado em Fabrie [6].

Teorema 2.3 *Sejam (H, d) um espaço métrico e $\{S(t)\}$ um semigrupo agindo sobre H tal que, para todo $t \geq 0$,*

$$d\big(S(t)u_1, S(t)u_2\big) \leq Ce^{-Kt} d(u_1, u_2), \ \forall\ u_1, u_2 \in H, \tag{2.37}$$

onde $C \geq 0$ e $K > 0$ são constantes. Assuma que existam subconjuntos $M_1, M_2, M_3 \subset H$ e constantes $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tais que

$$dist_H\big(S(t)M_1, M_2\big) < C_1 e^{-\alpha_1 t}, \ \forall\ t \geq 0 \tag{2.38}$$

e

$$dist_H\big(S(t)M_2, M_3\big) < C_2 e^{-\alpha_2 t}, \ \forall\ t \geq 0. \tag{2.39}$$

Então,

$$dist_H(S(t)M_1, M_3) \leq C' e^{-\alpha' t}, \ \forall\ t \geq 0$$

onde

$$C' = CC_1 + C_2 \quad e \quad \alpha' = \min\left\{\frac{K+\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}\right\}.$$

Demonstração: Sejam $t \geq 0$ e $x \in S(t)M_1$, digamos $x = S(t)u_1$ onde $u_1 \in M_1$. Escrevendo $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$ temos $t = t_1 + t_2$. Por (2.38) temos

$$\sup_{x \in S(t_1)M_1} \inf_{y \in M_2} d(x, y) < C_1 e^{-\alpha_1 t_1},$$

de onde obtemos

$$\inf_{y \in M_2} d(x, y) < C_1 e^{-\alpha_1 t_1}, \ \forall\ x \in S(t_1)M_1.$$

Em particular,

$$\inf_{y\in M_2} d(S(t_1)u_1, y) < C_1e^{-\alpha_1 t_1}.$$

Sendo assim existe $u_2 \in M_2$ tal que

$$d(S(t_1)u_1, u_2) < C_1e^{-\alpha_1 t_1}. \tag{2.40}$$

Analogamente, usando (2.39) obtemos $u_3 \in M_3$ de sorte que

$$d(S(t_2)u_2, u_3) < C_2e^{-\alpha_2 t_2}. \tag{2.41}$$

Usando (2.37) temos

$$d(S(t)u_1, S(t_2)u_2) = d(S(t_2)S(t_1)u_1, S(t_2)u_2) \leq Ce^{-Kt_2}d(S(t_1)u_1, u_2)$$

e por (2.40) segue que

$$7d(S(t)u_1, S(t_2)u_2) \leq CC_1e^{-Kt_2-\alpha_1 t_1}. \tag{2.42}$$

Agora, por definição de ínfimo

$$\inf_{y\in M_3} d(x,y) = \inf_{y\in M_3} d(S(t)u_1, y) \leq d(S(t)u_1, u_3) \leq d(S(t)u_1, S(t_2)u_2) + d(S(t_2)u_2, u_3).$$

Por (2.41) e (2.42) vem que

$$\inf_{y\in M_3} d(x,y) \leq CC_1e^{-Kt_2-\alpha_1 t_1} + C_2e^{-\alpha_2 t_2} = CC_1e^{-\frac{K+\alpha_1}{2}t} + C_2e^{-\frac{\alpha_2}{2}t}.$$

Ora,

$$\alpha' \leq \frac{K+\alpha_1}{2} \Rightarrow -\frac{K+\alpha_1}{2}t \leq -\alpha' t \Rightarrow e^{-\frac{K+\alpha_1}{2}t} \leq e^{-\alpha' t}$$

e da mesma forma vê-se que

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t} < e^{-\alpha' t}.$$

Considerando as estimativas obtidas acima, é possível observar que

$$\inf_{y\in M_3} d(x,y) \leq CC_1e^{-\alpha' t} + C_2e^{-\alpha' t}$$

e por consequência, passando ao supremo com $x \in S(t)M_1$

$$\sup_{x\in S(t)M_1} \inf_{y\in M_3} d(x,y) \leq (CC_1 + C_2)e^{-\alpha' t}.$$

De (2.37) e da definição de C' segue que,

$$\text{dist}_H(S(t)M_1, M_3) \leq C'e^{-\alpha' t}$$

e o teorema fica provado. ∎

Capítulo 3

Existência de Atratores para uma Equação de Campo Neural

Neste capítulo, apoiados em [20] e [21], aplicamos os resultados abstratos dos capítulos anteriores para o semigrupo gerado pela equação de campos neurais no espaço de fase $L^2(\mathbb{S}^1)$. Mais precisamente, estudamos a existência de atratores globais e exponenciais para o fluxo gerado por esta equação.

Considere a equação,

$$u_t(x,t) - \tilde{J} * (f \circ u)(x,t) + u(x,t) = h \tag{3.1}$$

sob a condição inicial

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{3.2}$$

onde h é uma constante positiva, $\tilde{J} \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função par não negativa com suporte em $[-1,1]$. A convolução na equação (3.1), entre $\tilde{J}$ e a função positiva não decrescente e não linear $f(u)$ é definida por

$$\tilde{J} * (f \circ u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x-y) f(u(y,t))\, dy.$$

A equação (3.1) foi introduzida na literatura por Wilson e Cowan (ver referência [23]) para modelar um campo neural unidimensional. Em (3.1), $u(x,t)$ denota o potencial médio do tecido na localização x e tempo t e, o termo de convolução é interpretado como interações neurais. A função f representa a atividade neuronal é gerada e a constante h denota alguma força externa aplicada ao campo.

3.1 Formulação do Problema em Condições Periódicas

As soluções procuradas para a equação (3.1) são funções 2τ periódicas. Neste caso é natural dotar a equação (3.1) com condições de fronteira periódica sobre $[-\tau, \tau]$,

$$u(-\tau, t) = u(\tau, t).$$

A partir daí é possível estabelecer uma relação entre as soluções de (3.1) e as soluções de um problema similar considerado sobre $\mathbb{S}^1$, o que será feito mais adiante, pois nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico da equação (3.1) quando posta sobre o domínio limitado $\mathbb{S}^1$.

A notação $\|\cdot\|_p$, será usada para indicar a norma em $L^p(\mathbb{S}^1)$, $1 \leq p \leq \infty$. O produto interno em $L^2(\mathbb{S}^1)$ será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Mais adiante, estudaremos a boa posição em $L^2(\mathbb{S}^1)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \tilde{J} * (f \circ u) + u = h \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \tag{3.3}$$

ou seja, estaremos interessados em garantir que existe uma única solução do problema (3.3) em $L^2(\mathbb{S}^1)$, a qual depende continuamente do dado inicial. Vale salientar que, a depender das hipóteses sobre f, este problema pode admitir existência e unicidade de solução em diferentes espaços de Banach. Por exemplo, suponha que f é globalmente Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $M > 0$. Desse modo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq M|x - 0|$$

o que implica em

$$|f(x)| \leq M|x| + k, \tag{3.4}$$

onde $k = |f(0)|$. Seja $C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínuas e limitadas. A aplicação $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R})} : C_b(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|g\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|,$$

define uma norma em $C_b(\mathbb{R})$ e mais, o par $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C(\mathbb{R})})$ é um espaço de Banach.

Considere $F : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ dada por

$$F(u) = -u + \tilde{J} * (f \circ u) + h.$$

Observe que $\tilde{J}$ tem suporte compacto pois supp $\tilde{J}$ é um fechado contido no compacto $[-1, 1]$. Além disso, dado $u \in C_b(\mathbb{R})$, $f \circ u$ é contínua e por isso pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pela Proposição A.8 segue que $\tilde{J} * (f \circ u)$ é contínua. Agora, dado $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} |(\tilde{J} * (f \circ u))(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x-y) f(u(y)) \, dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} -\tilde{J}(z) f(u(x-z)) \, dz \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |\tilde{J}(z)| \cdot |f(u(x-z))| \, dz \leq \int_{-1}^{1} \|\tilde{J}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (M|u(x-z)| + k) \, dz \\ &\leq \int_{-1}^{1} \|\tilde{J}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (M\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + k) \, dz = 2\|\tilde{J}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (M\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + k) \end{aligned}$$

e portanto $\tilde{J} * (f \circ u)$ é limitada. Este raciocínio garante a boa definição de F. Dados $u, v \in C_b(\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{C_b(\mathbb{R})} &= \| - u + \tilde{J} * (f \circ u) + h + v - \tilde{J} * (f \circ v) - h\|_{C_b(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u - v\|_{C_b(\mathbb{R})} + \|\tilde{J} * (f \circ u) - \tilde{J} * (f \circ v)\|_{C_b(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|F(u) - F(v)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leq \|u - v\|_{C_b(\mathbb{R})} + \|\tilde{J} * (f \circ u - f \circ v)\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ temos,

$$\begin{aligned} |[\tilde{J} * (f \circ u - f \circ v)](x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x-y)[(f \circ u)(y) - (f \circ v)(y)] \, dy \right| \\ &= \left| - \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(z)[(f \circ u)(x-z) - (f \circ v)(x-z)] \, dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\tilde{J}(z)| \cdot |f(u(x-z)) - f(v(x-z))| \, dz \\ &\leq M \int_{-1}^{1} |\tilde{J}(z)| \cdot |u(x-z) - v(x-z)| \, dz \\ &\leq 2\|\tilde{J}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} M \|u - v\|_{C_b(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|F(u) - F(v)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leq (1 + 2\|\tilde{J}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} M) \|u - v\|_{C_b(\mathbb{R})},$$

mostrando que F é Lipschitziana. Pelo Teorema A.10 segue que, para cada $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$, o problema (3.3) possui única solução em $C_b(\mathbb{R})$.

Suponha que X é um espaço Banach de funções reais onde o problema está bem posto ($X = C_b(\mathbb{R})$, por exemplo) e considere o conjunto

$$\mathbb{P}_{2\tau} = \{u \in X; u \text{ é } 2\tau\text{-periódica}\}.$$

Note que $\mathbb{P}_{2\tau}$ é um subespaço de X. Afirmamos que este espaço é invariante pelo Problema (3.1), ou seja, se $u_0 = u(\cdot, 0) \in \mathbb{P}_{2\tau}$ então a solução $u(x,t)$ de (3.1) é 2τ-periódica. De fato, seja $u(x,t)$ a solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) = u_0 \in \mathbb{P}_{2\tau}$. Definindo $v(x,t) = u(x + 2\tau, t)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x+2\tau,t)}{\partial t} &= -u(x+2\tau,t) + \tilde{J} * (f \circ u)(x+2\tau,t) + h \\ &= -u(x+2\tau,t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x+2\tau-y) f(u(y,t))\, dy + h. \end{aligned}$$

Fazendo $z = y - 2\tau$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= -u(x+2\tau,t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x-z) f(u(z+2\tau,t))\, dz + h \\ &= -u(x+2\tau,t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x-z) f(v(z,t))\, dz + h \\ &= -v(x,t) + \tilde{J} * (f \circ v)(x,t) + h. \end{aligned}$$

Logo $v(x,t)$ é solução de (3.1). Além disso,

$$v(x,0) = u(x+2\tau,0) = u_0(x+2\tau) = u_0(x).$$

Portanto, $v(x,t)$ é solução do problema (3.3). Pela unicidade de solução dada no Teorema de Cauchy Lipschitz Picard (Teorema A.10), segue que $v(x,t) = u(x,t)$, ou seja,

$$u(x+2\tau,t) = u(x,t), \forall t \geq 0$$

mostrando-nos que $u(\cdot,t)$ é 2τ-periódica.

O seguinte Lema lista alguns fatos sobre funções periódicas que serão de nosso interesse.

Lema 3.1 *Sejam $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções τ-periódicas. Então:*

(i) Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, a função $\tilde{u}(y) := u(x-y)$ é uma função τ-periódica.

(ii) *O produto uv é uma função τ-periódica.*

(iii) *Para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a composição $f \circ u$ é τ-periódica.*

(iv) *Se u é integrável então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+\tau} u(x)\ dx = \int_0^\tau u(x)\ dx,$$

ou seja, o valor da integral definida em qualquer intervalo de comprimento τ é o mesmo, independente do extremo inicial.

Demonstração: (i) Dado $y \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{u}(y+\tau) = u(x-y-\tau) = u(x-y-\tau+\tau) = u(x-y) = \tilde{u}(y).$$

(ii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$(uv)(x+\tau) = u(x+\tau) \cdot v(x+\tau) = u(x)v(x) = (uv)(x).$$

(iii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ u)(x+\tau) = f(u(x+\tau)) = f(u(x)) = (f \circ u)(x).$$

(iv) Dado $a \in \mathbb{R}$ temos $a = m\tau + r$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq |r| < \tau$. Daí,

$$\int_a^{a+\tau} u(x)\ dx = \int_{m\tau+r}^{(m+1)\tau+r} u(x)\ dx = \int_{m\tau+r}^{(m+1)\tau} u(x)\ dx + \int_{(m+1)\tau}^{(m+1)\tau+r} u(x)\ dx.$$

Façamos as seguintes mudanças de variáveis: na primeira integral $x = y + m\tau$ e na segunda $x = y + (m+1)\tau$. Com isto, temos

$$\int_a^{a+\tau} u(x)\ dx = \int_r^\tau u(y+m\tau)\ dy + \int_0^r (y+(m+1)\tau)\ dy.$$

Usando a periodicidade de u obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^{a+\tau} u(x)\ dx &= \int_r^\tau u(y)\ dy + \int_0^r u(y)\ dy \\ &= \int_0^\tau u(y)\ dy,\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Lema 3.2 *Seja $\tau \in \mathbb{R}_+$ um número fixo. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existem $m \in \mathbb{Z}$ e $r \in [-\tau, \tau]$ tais que $x = m(2\tau) + r$.*

Demonstração: Dividindo $x - \tau$ por 2τ obtemos, $x - \tau = q(2\tau) + s$ onde $q \in \mathbb{Z}$ e

$$0 \leq |s| < 2\tau. \tag{3.5}$$

Logo,

$$x = q(2\tau) + s + \tau. \tag{3.6}$$

Se $|s + \tau| < \tau$ então o resultado fica demonstrado com $m = q$ e $r = s + \tau$. Se $s = 0$ então o mesmo vale com $m = q$ e $r = \tau$. O resultado também é válido para $s = \tau$, bastando tomar $m = q + 1$ e $r = 0$.

Assuma que $|s+\tau| \geq \tau$, $s \neq 0$ e $s \neq \tau$. Desse modo, $s+\tau \leq -\tau$ ou $s+\tau \geq \tau$. Mas a primeira possibilidade implica em $s \leq -2\tau$, o que contradiz (3.5). Logo, devemos ter $s + \tau \geq \tau$, o que implica em $s \geq 0$ e, como $s \neq 0$, resulta em $s > 0$. Temos duas possibilidades para analisar: $s < \tau$ ou $s > \tau$.

Se $s < \tau$ então, considerando $t = \tau - s$ temos $0 < t < \tau$ e $s = \tau - t$. Por (3.6) resulta

$$x = q(2\tau) + \tau - t + \tau = (q + 1)(2\tau) + (-t)$$

e o resultado segue com $m = q + 1$ e $r = -t$.

Se $s > \tau$ então $s = \tau + r$ para algum $r > 0$. Neste caso devemos ter $r < \tau$ pois do contrário teríamos $s \geq 2\tau$ contrariando (3.5). Sendo assim temos por (3.6),

$$x = q(2\tau) + \tau + r + \tau = (q + 1)(2\tau) + r,$$

e o resultado segue com $m = q + 1$. ∎

Lema 3.3 *A aplicação* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *dada por*

$$\varphi(x) = e^{\frac{\pi i x}{\tau}}$$

está bem definida e satisfaz os seguintes itens:

(i) $\varphi([-\tau, \tau]) = \mathbb{S}^1$.

(ii) $\varphi(x) = -1 + 0i$ *se, e somente se,* $x = \tau$ *ou* $x = -\tau$.

(iii) $\varphi|_{(-\tau,\tau)}$ *é injetiva.*

(iv) φ *é* 2τ*-periódica.*

Demonstração: Claramente φ está bem definida pois

$$\left|e^{\frac{\pi i x}{\tau}}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right)\right| = 1.$$

Vamos demonstrar os itens (i) e (ii).

(i) Observe que $\varphi([-\tau,\tau]) = \mathbb{S}^1$. De fato, a inclusão $\varphi([-\tau,\tau]) \subset \mathbb{S}^1$ é evidente. Por outro lado, dado $p = (a,b) \in \mathbb{S}^1$, seja θ a medida do ângulo que o vetor (a,b) forma com o eixo das abscissas. Temos,

$$a = \cos\theta = \cos\left[\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{\tau}{\pi}\theta\right)\right] \quad \text{e} \quad b = \text{sen}\theta = \text{sen}\left[\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{\tau}{\pi}\theta\right)\right].$$

Logo,

$$a = \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) \quad \text{e} \quad b = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right),$$

onde $x = \dfrac{\tau\theta}{\pi}$. Daí,

$$p = a + ib = \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = e^{\frac{\pi i x}{\tau}} = \varphi(x).$$

Além disso,

$$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\theta}{\pi} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\tau\theta}{\pi} \leq \tau$$

e portanto $p \in \varphi([-\tau,\tau])$, o que mostra a inclusão $\mathbb{S}^1 \subset \varphi([-\tau,\tau])$ e nos permite concluir a igualdade $\varphi([-\tau,\tau]) = \mathbb{S}^1$.

(ii) Por um cálculo direto vemos que

$$\varphi(\tau) = \varphi(-\tau) = -1 + 0i.$$

Para verificar a recíproca, suponha que $x \in [-\tau,\tau]$ é tal que $\varphi(x) = -1 + 0i$. Então,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = -1 + i0.$$

Por igualdade de números complexos,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = -1 = \cos\pi \Rightarrow \frac{\pi x}{\tau} = \pm\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\tau + 2k\tau,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Se $x = \tau + 2k\tau$ então $|x - \tau| = 2|k|\tau$. Supondo $|k| > 1$ temos $2|k|\tau > 2\tau$, de modo que $|x - \tau| > 2\tau$, o que contradiz o fato de que $x \in [-\tau,\tau]$. Portanto $|k| \leq 1$

e, desde que $k \in \mathbb{Z}$, temos $k = 1$ ou $k = -1$. Mas $k = 1$ implica $x = 3\tau$ o que é um absurdo, pois $x \in [-\tau, \tau]$. Portanto $k = -1$ e $x = -\tau$.

Se $x = -\tau + 2k\tau$ então

$$|x - \tau| = | - 2\tau + 2k\tau| = 2\tau|k - 1|.$$

Como $x \in [-\tau, \tau]$ segue que $|k - 1| \leq 1$, ou seja, $0 \leq k \leq 2$. Logo $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$. Mas $k = 2$ implica $x = 3\tau$, o que é absurdo pois $x \in [-\tau, \tau]$. Portanto $k = 0$ ou $k = 1$ o que nos dá $x = -\tau$ ou $x = \tau$.Por cálculo direto vemos que

$$\varphi(\tau) = \varphi(-\tau) = -1 + 0i.$$

Suponha que $x \in [-\tau, \tau]$ é tal que $\varphi(x) = -1 + 0i$. Então,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = -1 + i0.$$

Por igualdade de números complexos,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = -1 = \cos\pi \Rightarrow \frac{\pi x}{\tau} = \pm\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\tau + 2k\tau,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Se $x = \tau + 2k\tau$ então $|x - \tau| = 2|k|\tau$. Supondo $|k| > 1$ temos $2|k|\tau > 2\tau$, de modo que $|x - \tau| > 2\tau$, o que contradiz o fato de que $x \in [-\tau, \tau]$. Portanto $|k| \leq 1$ e, desde que $k \in \mathbb{Z}$, temos $k = 1$ ou $k = -1$. Mas $k = 1$ implica $x = 3\tau$ o que é um absurdo, pois $x \in [-\tau, \tau]$. Portanto $k = -1$ e $x = -\tau$.

Se $x = -\tau + 2k\tau$ então

$$2|k|\tau = |x + \tau| \leq |x| + \tau \leq 2\tau.$$

Dividindo ambos os membros por 2τ obtemos $|k| \leq 1$. Portanto $k = 0$ ou $k = 1$ o que nos dá $x = -\tau$ ou $x = \tau$.

Concluímos que se $\varphi(x) = -1 + 0i$ então $x = \tau$ ou $x = -\tau$.

(iii) Dados $x, y \in (-\tau, \tau)$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow e^{\frac{\pi i x}{\tau}} = e^{\frac{\pi i y}{\tau}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi y}{\tau}\right).$$

Sendo assim,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{\tau}\right) \Rightarrow \frac{\pi x}{\tau} = \pm\frac{\pi y}{\tau} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm y + 2k\tau,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assuma que $x = y + 2k\tau$. Assim

$$|x - y| = |2k\tau| = 2\tau|k|$$

de modo que não podemos ter $|k| \geq 1$ pois, do contrário, teríamos $|x - y| \geq 2\tau$ o que é um absurdo, uma vez que $x, y \in (-\tau, \tau)$. Daí, segue que $|k| < 1$ e consequentemente $k = 0$. Logo, $x = y$.

Suponha agora que $x = -y + 2k\tau$. Neste caso temos

$$2|k|\tau = |x + y| \leq |x| + |y| < 2\tau.$$

Dividindo ambos os membros por 2τ obtemos $|k| < 1$ e mais uma vez concluímos que $k = 0$, de onde segue que $x = y$.

(iv) Dado $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\tau) &= e^{\frac{\pi i(x+2\tau)}{\tau}} \\ &= e^{\frac{\pi i x}{\tau}} \cdot e^{\frac{\pi i 2\tau}{\tau}} \\ &= \varphi(x) \cdot e^{2\pi i} \\ &= \varphi(x) \cdot (\cos 2\pi + i\mathrm{sen} 2\pi) \\ &= \varphi(x) \cdot (1 + 0i) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Portanto, φ é 2τ-periódica. Dado $v \in \mathcal{F}$ defina $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $u(x) = v(\varphi(x))$. Dado $x \in \mathbb{R}$ temos, pelo item (iv) do Lema 3.3,

$$u(x + 2\tau) = v(\varphi(x + 2\tau)) = v(\varphi(x)) = u(x).$$

Isso nos diz que $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$. ■

Proposição 3.1 *Seja $\mathcal{F} := \{v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R};\ v$ é função$\}$. Cada elemento de $\mathbb{P}_{2\tau}$ pode ser identificado com um único elemento de $\mathcal{F}$.*

Demonstração: Considere a aplicação $T : \mathbb{P}_{2\tau} \to \mathcal{F}$, que a cada $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ associa $Tu \in \mathcal{F}$ definido da seguinte maneira: dado $z \in \mathbb{S}_1$, escolha $x \in [-\tau, \tau]$ com $z = \varphi(x)$ e ponha $(Tu)(z) = u(x)$.

Dado $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, note que Tu está bem definida. De fato, para $z \in \mathbb{S}^1$ o Lema 3.3 garante a existência de $x \in [-\tau, \tau]$ com $z = \varphi(x)$. Suponha que existam $x, y \in [-\tau, \tau]$

tais que $z = \varphi(x)$ e $z = \varphi(y)$. Se $z = -1 + 0i$ então, pelo Lema 3.3, tanto x quanto y só podem ser ou $-\tau$ ou τ. Caso sejam ambos iguais $-\tau$ ou ambos iguais a τ, é claro que $u(x) = u(y)$. Se porém $x = -\tau$ e $y = \tau$ (e o análogo vale se $y = -\tau$ e $x = \tau$), como u é 2τ-periódica temos, $u(x) = u(-\tau) = u(\tau) = u(y)$, o que garante a boa definição de Tu em z. Agora, suponha $z \neq -1 + 0i$. Então x e y são ambos diferentes de $-\tau$ e τ, isto é, $x, y \in (-\tau, \tau)$. Pelo Lema 3.3 temos que a restrição de φ a $(-\tau, \tau)$ é injetiva e, portanto, $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica em $x = y$ e, portanto, $u(x) = u(y)$. Logo, Tu está bem definida para todo $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ e, por conseguinte, T está bem definida.

Vejamos agora que T é linear. Sejam $u, v \in \mathbb{P}_{2\tau}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $z \in \mathbb{S}^1$ considere $x \in [-\tau, \tau]$ com $z = \varphi(x)$. Temos,

$$\begin{aligned}[T(u + \lambda v)](z) &= (u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) = (Tu)(z) + \lambda(Tv)(z) \\ &= (Tu + \lambda Tv)(z).\end{aligned}$$

Portanto, $T(u + \lambda v) \equiv Tu + \lambda Tv$.

Suponha que $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ é tal que $Tu \equiv 0$. Então $(Tu)(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$. Dado $x \in [-\tau, \tau]$, pela definição de φ, $\varphi(x) \in \mathbb{S}^1$. Logo, pela definição de Tu,

$$u(x) = (Tu)(\varphi(x)) = 0.$$

Agora, dado $y \in \mathbb{R}$, pelo Lema 3.2 podemos escrever $y = 2n\tau + r$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in [-\tau, \tau]$. Usando a periodicidade de u e o fato de que $u(x) = 0$ para $x \in [-\tau, \tau]$, podemos notar que

$$u(y) = u(2n\tau + r) = u(r) = 0.$$

Portanto $u \equiv 0$ e assim concluímos que T é injetiva. Desse modo $T : \mathbb{P}_2\tau \to T(\mathbb{P}_{2\tau})$ é um isomorfismo algébrico. Podemos então identificar o elemento $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ com o elemento $Tu \in T(\mathbb{P}_{2\tau}) \subset \mathcal{F}$. ■

Consideremos $X = C_b(\mathbb{R})$. Assim $\mathbb{P}_{2\tau} = \{u \in C_b(\mathbb{R});\ u \text{ é } 2\tau\text{-periódica}\}$. Assuma que $\tau > 1$. Denote por $\tilde{J}^\tau$ a extensão 2τ-periódica da restrição de $\tilde{J}$ ao intervalo $[-\tau, \tau]$, ou seja,

$$\tilde{J}^\tau(x) = \begin{cases} \tilde{J}(x), & \text{se } x \in [-\tau, \tau] \\ \tilde{J}(r), & \text{onde } x = m(2\tau) + r,\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } r \in [-\tau, \tau], \quad \text{se } x \notin [-\tau, \tau]. \end{cases}$$

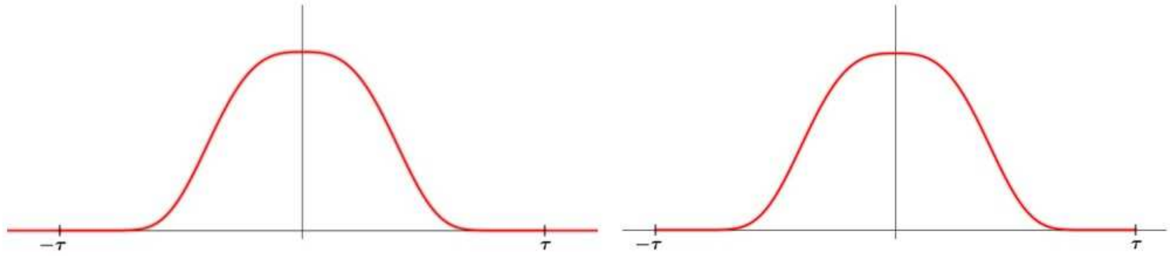

Figura 3.1: A esquerda a função $\tilde{J}$ e a direita sua restrição a $[-\tau, \tau]$

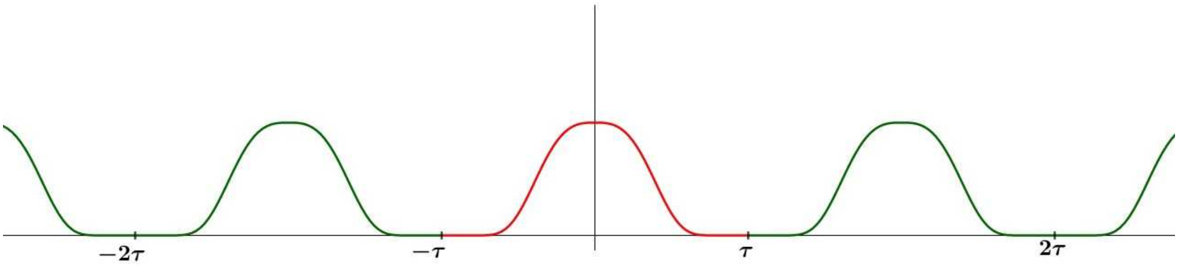

Figura 3.2: Extensão 2τ periódica da restrição de $\tilde{J}$ a $[-\tau, \tau]$

A função $\tilde{J}^\tau$ definida desta maneira pertence a $\mathbb{P}_{2\tau}$ e, pela Proposição 3.1, pode ser identificada com o elemento $T(\tilde{J}^\tau)$ de $\mathcal{F}$, onde T é dada na referida Proposição. Defina $J := T(\tilde{J}^\tau)$.

O próximo resultado estabelece uma relação entre as soluções de (3.1) e o problema similar, considerado em $\mathbb{S}^1$. Uma vantagem do estudo em $\mathbb{S}^1$ é o fato de trabalhar em um domínio limitado. Dentre outras coisas, isto nos dará a validade das imersões de Sobolev, que serão de grande utilidade para provar a existência de atrator global.

Proposição 3.2 *Uma função 2τ-periódica $u(x,t)$ é uma solução de* (3.1) *se, e somente se, $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w), t)$ (ou seja, $v = Tu$) é uma solução de*

$$\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} = -v(w,t) + J * (f \circ v)(w,t) + h, \tag{3.7}$$

onde agora $*$ denota a convolução em $\mathbb{S}^1$ dada por

$$(J * v)(w) = \int_{\mathbb{S}^1} J(w \cdot z^{-1}) v(z)\, dz,$$

onde $dz = \dfrac{\tau}{\pi} d\theta$, onde $d\theta$ indica a integração com respeito ao comprimento de arco.

Demonstração: Relembre que, dado $w \in \mathbb{S}^1$, como $\varphi([-\tau, \tau]) = \mathbb{S}^1$, existe $x \in [-\tau, \tau]$ com $w = \varphi(x)$.

Afirmação 3.1 *Sejam $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ e $v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dada por $v = Tu$. Se $w \in \mathbb{S}^1$ e $x \in [-\tau, \tau]$ são tais que $w = \varphi(x)$, então*

$$(J * v)(w) = (\tilde{J} * u)(x).$$

Para ver isto note inicialmente que para toda $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$,

$$(\tilde{J} * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} \tilde{J}^{\tau}(x - y)u(y)\ dy. \tag{3.8}$$

De fato, usando o Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}(\tilde{J} * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}(x - y)u(y)\ dy = \int_{x-\tau}^{x+\tau} \tilde{J}(x - y)u(y)\ dy \\ &= \int_{x-\tau}^{x+\tau} \tilde{J}^{\tau}(x - y)u(y)\ dy \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \tilde{J}^{\tau}(x - y)u(y)\ dy.\end{aligned}$$

Agora observe que, como $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$ temos, por (3.8),

$$(\tilde{J} * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} \tilde{J}^{\tau}(x - y)u(y)\ dy.$$

Usando as definições de J e v podemos escrever

$$(\tilde{J} * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} J(\varphi(x - y))v(\varphi(y))\ dy.$$

Observe que,

$$\frac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)| = \frac{\tau}{\pi}\left|\frac{\pi i}{\tau} e^{\frac{\pi i y}{\tau}}\right| = \left|e^{\frac{\pi i y}{\tau}}\right| = 1$$

e

$$w \cdot \varphi(y)^{-1} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1} = e^{\frac{\pi i x}{\tau}} \cdot e^{\frac{-\pi i y}{\tau}} = e^{\frac{\pi i(x-y)}{\tau}} = \varphi(x - y).$$

Logo,

$$(\tilde{J} * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} J(w \cdot [\varphi(y)]^{-1})v(\varphi(y))\frac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)|\ dy.$$

Como φ é uma parametrização de $\mathbb{S}^1$, pela definição de comprimento de arco (medido a partir de $-\tau$) temos, para qualquer $y \in [-\tau, \tau]$,

$$\theta(y) = \int_{-\tau}^{y} |\varphi'(s)|\ ds$$

de onde segue, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$d\theta = |\varphi'(y)|dy.$$

Daí, escrevendo $z = \varphi(y)$ temos

$$dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta = \frac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)|dy$$

e então, pelo Teorema de Mudança de variáveis,

$$(\tilde{J} * u)(x) = \int_{\mathbb{S}^1} J(w \cdot z^{-1})v(z)\ dz = (J * v)(w).$$

Assim, fica provada a afirmação.

Suponhamos agora que $u(x,t)$ é uma solução 2τ-periódica de (3.1), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\varphi^{-1}(w),t)}{\partial t} &= -u(\varphi^{-1}(w),t) + \tilde{J} * (f \circ u)(\varphi^{-1}(w),t) + h \\ &= -v(w,t) + \tilde{J} * (f \circ u)(x,t) + h.\end{aligned}$$

Pela Afirmação (3.1) temos

$$\tilde{J} * (f \circ u)(x,t) = J * (f \circ v)(w,t).$$

Logo,

$$\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} = -v(w,t) + J * (f \circ v)(w,t) + h,$$

ou seja, v é solução de (3.7). Reciprocamente, suponha que $v(w,t)$ é solução (3.7). Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\varphi^{-1}(w),t)}{\partial t} &= \frac{\partial v(w,t)}{\partial t} \\ &= -v(w,t) + J * (f \circ v)(w,t) + h, \\ &= -u(\varphi^{-1}(w),t) + \tilde{J} * (f \circ u)(x,t) + h \\ &= -u(x,t) + \tilde{J} * (f \circ u)(x,t) + h\end{aligned}$$

e, portanto, u é solução de (3.7). ∎

Observação 3.1 *Os resultados para convolução em $\mathbb{R}^n$ são válidos para a convolução em $\mathbb{S}^1$ definida no enunciado da proposição anterior.*

Apresentaremos agora a Desigualdade de Poincaré em $H^1(\mathbb{S}^1)$, baseados em Robinson (ver [18]).

Lema 3.4 (Desigualdade de Poincaré) *Para todo $u \in H^1(\mathbb{S}^1)$ temos*

$$\|u\|_2 \leq \frac{\tau}{\pi}\|u\|_{H^1(\mathbb{S}^1)}. \tag{3.9}$$

Demonstração: Iniciamos verificando a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2 *Se $u \in H^1([-\tau,\tau])$ é uma função 2τ-periódica (isto é $u(-\tau) = u(\tau)$), então*

$$\|u\|_{L^2[-\tau,\tau]} \leq \frac{\tau}{\pi}\|u_x\|_{L^2[-\tau,\tau]}. \tag{3.10}$$

De fato, de acordo com Robinson [18], podemos escrever

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{\pi i k}{\tau}x},$$

onde $c_{-k} = \overline{c_k}$ e $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2|c_k|^2 < \infty$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{\pi i k}{\tau}x}, \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{\frac{\pi i j}{\tau}x} \right\rangle_{L^2[-\tau,\tau]} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_k\overline{c_j}\left\langle e^{\frac{\pi i k}{\tau}x}, e^{\frac{\pi i j}{\tau}x}\right\rangle_{L^2[-\tau,\tau]}.
\end{aligned}$$

Dados $k, j \in \mathbb{Z}$ temos

$$\alpha_{kj} := \left\langle e^{\frac{\pi i k}{\tau}x}, e^{\frac{\pi i j}{\tau}x}\right\rangle_{L^2[-\tau,\tau]} = \int_{-\tau}^{\tau} e^{\frac{\pi i k}{\tau}x} \cdot \overline{e^{\frac{\pi i j}{\tau}x}}\, dx.$$

Se $j = 0$ então

$$\alpha_{kj} = \alpha_{k0} = \int_{-\tau}^{\tau} e^{\frac{\pi i k}{\tau}x} dx = \int_{-\tau}^{\tau}\left[\cos\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right)\right] dx.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\alpha_{k0} &= \int_{-\tau}^{\tau}\cos\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right)dx + i\int_{-\tau}^{\tau}\text{sen}\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right)dx \\
&= \frac{\tau}{\pi k}\text{sen}\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right)\Big|_{-\tau}^{\tau} + i\left[-\frac{\tau}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k x}{\tau}\right)\right]\Big|_{-\tau}^{\tau} \\
&= \frac{\tau}{\pi k}\big(\text{sen}\pi k - \text{sen}(-\pi k)\big) - i\frac{\tau}{\pi k}\big(\cos\pi k - \cos(-\pi k)\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\alpha_{0j} = 0$. Portanto,

$$\|u\|^2_{L^2[\tau,\tau]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} c_k\overline{c_j}\alpha_{kj}. \tag{3.11}$$

Agora, para $k, j \in \mathbb{Z}^*$,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{kj} &= \int_{-\tau}^{\tau} e^{\frac{\pi i(k-j)x}{\tau}} dx \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \left[\cos\left(\frac{\pi kx}{\tau} - \frac{\pi jx}{\tau}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi kx}{\tau} - \frac{\pi jx}{\tau}\right)\right] dx \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \left[\cos\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right)\right] dx \\
&+ i \int_{-\tau}^{\tau} \left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right)\right] dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{kj} = &\int_{-\tau}^{\tau} \cos\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) dx + \int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) dx \\
&+ i \int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) dx - i \int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi jx}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{\tau}\right) dx.
\end{aligned}
$$

Usando relações de ortogonalidade (ver Figueiredo [7]) obtemos, para todos $k, j \in \mathbb{Z}^*$,

$$
\alpha_{kj} = \begin{cases} \tau, & \text{se} \quad k = j \\ 0, & \text{se} \quad k \neq j \end{cases} . \tag{3.12}
$$

Por (3.11) segue que

$$
\|u\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k \overline{c_k} \tau = \tau \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k|^2. \tag{3.13}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\|u_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} &= \left\langle \frac{d}{dx} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{\pi ik}{\tau}x}, \frac{d}{dx} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{\frac{\pi ij}{\tau}x} \right\rangle_{L^2[-\tau,\tau]} \\
&= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{\pi ik}{\tau} e^{\frac{\pi ik}{\tau}x}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \frac{\pi ij}{\tau} e^{\frac{\pi ij}{\tau}x} \right\rangle_{L^2[-\tau,\tau]} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_k \frac{\pi ik}{\tau} \cdot \overline{\left(c_j \frac{\pi ij}{\tau}\right)} \alpha_{kj} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} c_k \frac{\pi ik}{\tau} \cdot \overline{\left(c_j \frac{\pi ij}{\tau}\right)} \alpha_{kj}.
\end{aligned}
$$

Usando (3.12) temos

$$
\|u_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left| c_k \frac{\pi ik}{\tau} \right|^2 \tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k|^2 \frac{\pi^2}{\tau^2} |k|^2 \tau
$$

de onde podemos concluir que

$$\|u_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} = \frac{\pi^2}{\tau} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k|^2|k|^2. \tag{3.14}$$

Dado $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$|k|^2 \geq 1 \Rightarrow |c_k|^2|k|^2 \geq |c_k|^2 \Rightarrow \tau|c_k|^2|k|^2 \geq \tau|c_k|^2.$$

Com isto obtemos

$$\tau \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k|^2 \leq \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k|^2|k|^2$$

e por (3.13) resulta que

$$\|u\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} \leq \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k|^2|k|^2. \tag{3.15}$$

Note que, por (3.14)

$$\frac{\tau^2}{\pi^2}\|u_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} = \tau \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k|^2|k|^2$$

e então, por (3.15),

$$\|u\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} \leq \frac{\tau^2}{\pi^2}\|u_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^2[-\tau,\tau]} \leq \frac{\tau}{\pi}\|u_x\|_{L^2[-\tau,\tau]}$$

e a afirmação fica demonstrada.

Agora, seja $u \in H^1(\mathbb{S}^1)$ e considere a função

$$\begin{array}{rccl} v: & [-\tau,\tau] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & v(x) = u(\varphi(x)), \end{array}$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ é dada por

$$\varphi(x) = e^{\frac{\pi i x}{\tau}}.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variáveis obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^1} |u(w)|^2 dw = \int_{-\tau}^{\tau} |u(\varphi(y))|^2 |\varphi'(y)| \frac{\tau}{\pi} dy = \frac{\tau}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} |v(y)|^2 dy.$$

Desta igualdade concluímos que $v \in L^2[-\tau,\tau]$ e além disso

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \frac{\tau}{\pi}\|v\|^2_{L^2[-\tau,\tau]}. \tag{3.16}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |u_w|^2 dw = \int_{-\tau}^{\tau} |u_w(\varphi(y))|^2 |\varphi'(y)| \frac{\tau}{\pi} dy = \frac{\tau}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} |u_w(\varphi(y))|^2 dy.$$

Pondo $w = \varphi(x)$ temos, a partir da Geometria Diferencial,

$$u_w(\varphi(x)) = u_w(w) = \frac{d}{dx}\big(u(\varphi(x))\big) = v_x(x).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |u_w|^2 dw = \frac{\tau}{\pi}\int_{-\tau}^{\tau} |v_x(y)|^2 dy.$$

Sendo assim $v_x \in L^2[-\tau,\tau]$ e mais,

$$\|u_w\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \frac{\tau}{\pi}\|v_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]}. \tag{3.17}$$

A partir de (3.16) temos, pela Afirmação 3.2,

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \frac{\tau}{\pi}\|v\|^2_{L^2[-\tau,\tau]} \leq \frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\tau^2}{\pi^2}\|v_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]}\right) = \frac{\tau^2}{\pi^2}\left(\frac{\tau}{\pi}\|v_x\|^2_{L^2[-\tau,\tau]}\right)$$

e, por (3.17), segue que

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} \leq \frac{\tau^2}{\pi^2}\|u_w\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \leq \frac{\tau}{\pi}\|u_w\|_{L^2(\mathbb{S}^1)},$$

concluindo a demonstração do lema. ■

3.1.1 Boa Posição no Espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$

No início da seção, comentamos que o Problema (3.3) pode admitir existência e unicidade de solução em diferentes espaços de Banach, dependendo das hipóteses assumidas para f. Como exemplo, mostramos que isto ocorre no espaços das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, supondo f Lipschitziana.

Mostraremos agora que, sob a mesma hipótese para f, o problema (3.3) admite existência e unicidade de solução no espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$, a qual depende continuamente dos dados iniciais.

Lema 3.5 *Se f é Lipschitziana com constante de Lipschitz $M > 0$ e $u \in L^2(\mathbb{S}^1)$, então $f \circ u \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e*

$$\|f \circ u\|_2 \leq M\|u\|_2 + k\sqrt{2\tau}.$$

Demonstração: Sendo f Lipschitziana temos

$$|f(x)| \leq M|x| + k, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $k = |f(0)|$. Daí, para todo $z \in \mathbb{S}^1$,

$$|f(u(z))|^2 \leq (M|u(z)| + k)^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{S}^1} |f(u(z))|^2 \, dz \leq \int_{\mathbb{S}^1} (M|u(z)| + k)^2 \, dz.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |f(u(z))|^2 \, dz \leq \|Mu + k\|_2^2 \leq (M\|u\|_2 + \|k\|_2)^2 < \infty$$

e, portanto, $f \circ u \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Além disso, pela desigualdade acima temos

$$\|f \circ u\|_2 \leq M\|u\|_2 + \|k\|_2.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\|k\|_2 = \left(\int_{\mathbb{S}^1} k^2 \, dz\right)^{\frac{1}{2}} = \left(k^2 \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\tau}{\pi} |\varphi'(y)| \, dy\right)^{\frac{1}{2}} = k \left(\int_{-\tau}^{\tau} 1dy\right)^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{2\tau}.$$

Portanto,

$$\|f \circ u\|_2 \leq M\|u\|_2 + k\sqrt{2\tau}.$$

■

Proposição 3.3 *Suponha que a função f é globalmente Lipschitziana, ou seja, existe $M > 0$ ta que,*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Então a função $F : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ dada por

$$F(u) = -u + J * (f \circ u) + h$$

é globalmente Lipschitziana em $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Demonstração: Verifiquemos inicialmente a boa definição de F. Dado $u \in L^2(\mathbb{S}^1)$ temos, pelo Lema 3.5, $f \circ u \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Usando o Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\int_{\mathbb{S}^1} J(z) \, dz = \int_{-\tau}^{\tau} J(\varphi(x)) \frac{\tau}{\pi} |\varphi'(x)| \, dx.$$

Como $\tilde{J}$ e J são não negativas,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |J(z)|\ dz = \int_{\mathbb{S}^1} J(z)\ dz = \int_{-\tau}^{\tau} J(\varphi(x))\frac{\tau}{\pi}|\varphi'(x)|\ dx = \int_{-\tau}^{\tau} |\tilde{J}^{\tau}(x)|\ dx$$
$$= \int_{-\tau}^{\tau} |\tilde{J}(x)|\ dx = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{J}(x)|\ dx = \|\tilde{J}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Como $\tilde{J} \in C_0(\mathbb{R})$ temos $\tilde{J} \in L^1(\mathbb{R})$ de modo que $\|\tilde{J}\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$. Portanto $J \in L^1(\mathbb{S}^1)$. Pelo Teorema de Young (Teorema (A.11)) segue que $J * (f \circ u) \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Desde que $-u, h \in L^2(\mathbb{S}^1)$, concluímos que

$$-u + J * (f \circ u) + h \in L^2(\mathbb{S}^1),\ \forall\ u \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

de modo que F está bem definida.

Agora, considerando $u, v \in L^2(\mathbb{S}^1)$, tem-se $f \circ u - f \circ v \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e, pelo Teorema de Young, $J * (f \circ u - f \circ v) \in L^2(\mathbb{S}^1)$ com

$$\|J * (f \circ u - f \circ v)\|_2 \leq \|J\|_1 \|f \circ u - f \circ v\|_2.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_2 &= \| - u + J * (f \circ u) + v - J * (f \circ v)\|_2 \\
&\leq \|u - v\|_2 + \|J * (f \circ u - f \circ v)\|_2 \\
&\leq \|u - v\|_2 + \|J\|_1 \|f \circ u - f \circ v\|_2.
\end{aligned}$$

Dado $w \in \mathbb{S}^1$,

$$|(f \circ u - f \circ v)(w)| = |f(u(w)) - f(v(w))| \leq M|u(w) - v(w)|$$

o que implica em

$$|(f \circ u - f \circ v)(w)|^2 \leq M^2 |u(w) - v(w)|^2.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |(f \circ u - f \circ v)(w)|^2\ dw \leq M^2 \int_{\mathbb{S}^1} |u(w) - v(w)|^2\ dw$$

e consequentemente,

$$\|f \circ u - f \circ v\|_2^2 \leq M^2 \|u - v\|_2^2 \Rightarrow \|f \circ u - f \circ v\|_2 \leq M\|u - v\|_2.$$

A partir disto observamos que,

$$\|J * (f \circ u - f \circ v)\|_2 \leq \|J\|_1 M \|u - v\|_2 \tag{3.18}$$

e então,

$$\|F(u) - F(v)\|_2 \leq \|u - v\|_2 + \|J\|_1 M \|u - v\|_2 = (1 + \|J\|_1 M)\|u - v\|_2.$$

Portanto F é Lipschitziana. ■

Corolário 3.1 *Suponha f globalmente Lipschitziana. Então, para cada $u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$, o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(w,t)}{\partial t} & = -u(w,t) + J * (f \circ u)(w,t) + h \\ \quad u(x,0) & = u_0(x) \end{cases} \tag{3.19}$$

possui uma única solução em $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 3.3 aliada ao Teorema A.10. ■

Proposição 3.4 *Suponha que f é Lipschitziana e seja $u(w,t)$ a solução de* (3.7) *com condição inicial $u(w,0) = u_0(w)$. Então*

$$u(w,t) = e^{-t}u_0(w) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(w,s) + h]\ ds. \tag{3.20}$$

Demonstração: Por hipótese temos

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + J * (f \circ u)(w,t) + h.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por e^t obtemos

$$e^t \frac{\partial u(w,t)}{\partial t} + e^t u(w,t) = e^t[J * (f \circ u)(w,t) + h],$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}[e^t u(w,t)] = e^t[J * (f \circ u)(w,t) + h].$$

Pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard temos $u \in C^1([0,\infty), L^2(\mathbb{S}^1))$. Assim, para cada $t \geq 0$ a função $\dfrac{\partial}{\partial t}[e^t u(w,t)]$ é Bochner integrável em $[0,t]$. Logo, podemos integrar ambos os membros da igualdade acima de 0 a t obtendo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (ver Teorema (A.5)),

$$e^t u(w,t) - e^0 u(w,0) = \int_0^t e^s[J * (f \circ u)(w,s) + h]\ ds,$$

o que implica em

$$e^t u(w,t) = u_0(w) + \int_0^t e^s [J * (f \circ u)(w,s) + h]\ ds.$$

Multiplicando os membros da igualde acima por e^{-t} resulta que

$$u(w,t) = e^{-t} u_0(w) + \int_0^t e^{-(t-s)} [J * (f \circ u)(w,s) + h]\ ds.$$

■

Corolário 3.2 *Suponha f globalmente Lipschitziana. Então a solução do Problema (3.19) é contínua com relação à condição inicial u_0.*

Demonstração: Sejam $u(w,t)$ e $v(w,t)$ soluções de (3.7) com condições iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Pela Proposição 3.4 temos, para $t \geq 0$ fixado,

$$\begin{aligned} u(\cdot,t) - v(\cdot,t) &= e^{-t} u_0(\cdot) + \int_0^t e^{-(t-s)} [J * (f \circ u)(\cdot,s) + h]\ ds \\ &\quad - e^{-t} v_0(\cdot) - \int_0^t e^{-(t-s)} [J * (f \circ v)(\cdot,s) + h]\ ds \\ &= e^{-t}(u_0(\cdot) - v_0(\cdot)) + \int_0^t e^{-(t-s)} [J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s)]\ ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$e^t [u(\cdot,t) - v(\cdot,t)] = [u_0(\cdot) - v_0(\cdot)] + \int_0^t e^s [J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s)]\ ds$$

e então

$$e^t \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_2 \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_2 + \left\| \int_0^t e^s [J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s)]\ ds \right\|_2.$$

Seja $s \geq 0$. Conforme visto na demonstração da Proposição 3.3, $J*(f\circ u - f\circ v)(\cdot,s) \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e mais, por (3.18),

$$\|J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s)\|_2 \leq \|J\|_1 M \|u(\cdot,s) - v(\cdot,s)\|_2. \tag{3.21}$$

Como $u(\cdot,s) - v(\cdot,s) \in L^1([0,t], L^2(\mathbb{S}^1))$ (pois é contínua) segue que $J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s) \in L^1([0,t], L^2(\mathbb{S}^1))$ e então, pelo Teorema A.6, podemos escrever

$$e^t \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_2 \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_2 + \int_0^t e^s \left\| J * (f \circ u - f \circ v)(\cdot,s) \right\|_2\ ds$$

de onde segue por (3.21)

$$e^t\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_2 \leq \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_2 + \int_0^t \|J\|_1 M e^s \|u(\cdot,s)-v(\cdot,s)\|_2 \, ds.$$

Pela Desigualdade de Gronwall resulta que

$$e^t\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_2 \leq \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_2 \; e^{\int_0^t \|J\|_1 M \; ds} = \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_2 \; e^{\|J\|_1 M t}.$$

Logo,

$$\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_2 \leq \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_2 \; e^{(\|J\|_1 M-1)t}$$

e o resultado segue. ∎

3.2 Existência de Atrator Global

Nesta seção mostraremos a existência de um conjunto compacto e invariante que atrai conjuntos limitados em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Para isto, além da hipótese de f ser Lipschitziana (com constante de Lipschitz M), assumiremos daqui por diante que

$$M\|J\|_1 < 1. \tag{3.22}$$

Dado $u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$, denotemos por $u(\cdot,t,u_0)$ a solução do P.V.I. (3.19), a qual é dada pela fórmula (3.4). Pelo Exemplo 1.1, as soluções da equação

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + J*(f\circ u)(w,t) + h \tag{3.23}$$

definem um semigrupo em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Mais precisamente, definindo para cada $t \geq 0$,

$$\begin{array}{rccl} S(t): & L^2(\mathbb{S}^1) & \to & L^2(\mathbb{S}^1) \\ & u_0 & \mapsto & S(t)u_0 = u(\cdot,t,u_0) \end{array},$$

o Exemplo 1.1 nos diz que a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo. Além disso, o Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard nos dá a continuidade de $S(t)u_0$ em t enquanto o Corolário 3.2 garante a continuidade em u_0. Logo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C^0-semigrupo, no sentido da Definição 1.1.

Reescrevendo a demonstração do Corolário 3.2 em termos do semigrupo S, obtemos o seguinte:

Lema 3.6 *Para quaisquer* $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$ *e para cada* $t \geq 0$,

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2 \; e^{(\|J\|_1 M - 1)t}.$$

O seguinte resultado trata da existência de um conjunto absorvente para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Lema 3.7 *O conjunto*

$$\mathcal{B} := \left\{ u \in L^2(\mathbb{S}^1); \; \|u\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h)}{1 - M\|J\|_1} \right\}$$

é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{S(t)\}$ *gerado por* (3.7), *onde* $k = |f(0)|$.

Demonstração: Seja $\mathcal{B}_0 \subset L^2(\mathbb{S}^1)$ um conjunto limitado. Vamos mostrar que existe $t_0 > 0$ tal que, sempre que $t \geq t_0$ tem-se $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Dado $u_0 \in \mathcal{B}_0$ e $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle S(t)u_0, S(t)u_0\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}S(t)u_0, S(t)u_0 \right\rangle + \left\langle S(t)u_0, \frac{d}{dt}S(t)u_0 \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{d}{dt}S(t)u_0, S(t)u_0 \right\rangle = 2\left\langle -S(t)u_0 + J * (f \circ S(t)u_0) + h, S(t)u_0 \right\rangle.\end{aligned}$$

A partir disto temos que,

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2 = 2\left(-\langle S(t)u_0, S(t)u_0\rangle + \langle J * (f \circ S(t)u_0), S(t)u_0\rangle + \langle h, S(t)u_0\rangle\right). \tag{3.24}$$

Pela Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\langle h, S(t)u_0\rangle &= \int_{\mathbb{S}^1} (hS(t)u_0)(w)\; dw \leq \int_{\mathbb{S}^1} |(hS(t)u_0)(w)|\; dw \\ &\leq \|S(t)u_0\|_2 \left(\int_{\mathbb{S}^1} h^2 \; dw \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando mudança de variáveis e o fato de que $dw = \dfrac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)|\; dy$ temos

$$\int_{\mathbb{S}^1} h^2\; dw = h^2 \int_{\mathbb{S}^1} 1\; dw = h^2 \int_{-\tau}^{\tau} 1\frac{\tau}{\pi}|\varphi'(y)|\; dy = h^2 \int_{-\tau}^{\tau} 1 dy = h^2 2\tau.$$

Logo,

$$\langle h, S(t)u_0\rangle \leq \|S(t)u_0\|_2 h\sqrt{2\tau}. \tag{3.25}$$

Agora, usando as Desigualdades de Hölder e Young obtemos

$$\begin{aligned}\langle J*(f\circ S(t)u_0), S(t)u_0\rangle &= \int_{\mathbb{S}^1}[J*(f\circ S(t)u_0)\cdot S(t)u_0](w)\ dw\\ &\leq \|J*(f\circ S(t)u_0)\|_2\|S(t)u_0\|_2\\ &\leq \|J\|_1\|(f\circ S(t)u_0)\|_2\|S(t)u_0\|_2.\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.5 segue que

$$\langle J*(f\circ S(t)u_0), S(t)u_0\rangle \leq \|J\|_1\|S(t)u_0\|_2(M\|S(t)u_0\|_2+k\sqrt{2\tau})$$

o que implica em

$$\langle J*(f\circ S(t)u_0), S(t)u_0\rangle \leq M\|J\|_1\|S(t)u_0\|_2^2+k\sqrt{2\tau}\|J\|_1\|S(t)u_0\|_2. \tag{3.26}$$

Usando (3.25) e (3.25) em (3.24) obtemos

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2 \leq 2\left(-\|S(t)u_0\|_2^2+M\|J\|_1\|S(t)u_0\|_2^2+k\sqrt{2\tau}\|J\|_1\|S(t)u_0\|_2+\|S(t)u_0\|_2h\sqrt{2\tau}\right).$$

Podemos supor sem perca de generalidade $S(t)u_0 \neq 0$ [1]. Desse modo,

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2 \leq 2\|S(t)u_0\|_2^2\left(-1+M\|J\|_1+\frac{k\sqrt{2\tau}\|J\|_1}{\|S(t)u_0\|_2}+\frac{h\sqrt{2\tau}}{\|S(t)u_0\|_2}\right).$$

Definindo $\varepsilon = 1-M\|J\|_1 > 0$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2 \leq 2\|S(t)u_0\|_2^2\left(-\varepsilon+\frac{\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1+h)}{\|S(t)u_0\|_2}\right). \tag{3.27}$$

Afirmação 3.3 *Quando*

$$\|S(t)u_0\|_2 \geq \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1+h)}{\varepsilon} \tag{3.28}$$

tem-se

$$\|S(t)u_0\|_2^2 \leq e^{-(1-M\|J\|_1)t}\|u_0\|_2^2. \tag{3.29}$$

De fato,

$$\|S(t)u_0\|_2 \geq \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1+h)}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1+h)}{\|S(t)u_0\|_2}.$$

[1] Para todo t tal que $S(t)u_0 = 0$ já se tem $S(t)u_0 \in \mathcal{B}$.

Por (3.27) resulta que

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2 \leq 2\|S(t)u_0\|_2^2\left(-\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2\|S(t)u_0\|_2^2\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\varepsilon\|S(t)u_0\|_2^2,$$

ou seja,

$$\frac{\frac{d}{dt}\|S(t)u_0\|_2^2}{\|S(t)u_0\|_2^2} \leq -\varepsilon.$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima de 0 a t obtemos

$$\ln(\|S(t)u_0\|_2^2) - \ln(\|S(0)u_0\|_2^2) \leq -\varepsilon t$$

e por propriedades de logaritmo vem

$$\ln\left(\frac{\|S(t)u_0\|_2^2}{\|S(0)u_0\|_2^2}\right) \leq -\varepsilon t \Rightarrow \frac{\|S(t)u_0\|_2^2}{\|S(0)u_0\|_2^2} \leq e^{-\varepsilon t} \Rightarrow \|S(t)u_0\|_2^2 \leq e^{-\varepsilon t}\|S(0)u_0\|_2^2.$$

Portanto,

$$\|S(t)u_0\|_2^2 \leq e^{-(1-M\|J\|_1)t}\|u_0\|_2^2.$$

Assim, para que ocorra (3.28) é necessário que ocorra também (3.29). Ora, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$t \geq t_0 \Rightarrow e^{-(1-M\|J\|_1)t}\|u_0\|_2^2 < \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h)}{\varepsilon}.$$

Por isso, se (3.28) ocorresse para $t \geq t_0$ teríamos, a partir de (3.29), um absurdo. Logo,

$$t \geq t_0 \Rightarrow \|S(t)u_0\|_2 < \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h)}{\varepsilon},$$

ou seja,

$$t \geq t_0 \Rightarrow S(t)u_0 \in \mathcal{B},$$

Como queríamos demonstrar. ∎

Lema 3.8 *Se $g \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ e $u \in L^2(\mathbb{S}^1)$ então, para todo $w \in \mathbb{S}^1$,*

$$|(g * u)(w)| \leq \sqrt{2\tau}\|g\|_\infty\|u\|_2.$$

Demonstração: Como $g \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ temos $|g(w)| \leq \|g\|_\infty$ q.t.p. em $\mathbb{S}^1$. Desta forma, para todo $w \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned}|(g * u)(w)| &= \left|\int_{\mathbb{S}^1} g(w \cdot z^{-1})u(z)\ dz\right| \leq \int_{\mathbb{S}^1} |g(w \cdot z^{-1})||u(z)|\ dz \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^1} \|g\|_\infty |u(z)|\ dz = \|g\|_\infty \int_{\mathbb{S}^1} |u(z)| \cdot 1\ dz.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder obtemos

$$|(g * u)(w)| \leq \|g\|_\infty \|u\|_2 \|1\|_2 = \sqrt{2\tau}\|g\|_\infty \|u\|_2.$$

■

Teorema 3.1 *Existe um atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo $\{S(t)\}$ gerado por (3.7), o qual está contido no conjunto $\mathcal{B}$ definido no Lema 3.7.*

Demonstração: Pela Proposição 3.4 temos para quaisquer $u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e $t \geq 0$

$$S(t)u_0 = e^{-t}u_0(\cdot) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]\, ds.$$

Para cada $t \geq 0$ defina $S_1(t), S_2(t) : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ por

$$S_1(t)u_0 = \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]\, ds \quad \text{e} \quad S_2(t)u_0 = e^{-t}u_0.$$

Cada aplicação $S_2(t)$ é contínua pois, para $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{S}^1)$,

$$\|S_2(t)u_0 - S_2(t)u_1\|_2 = e^{-t}\|u_0 - u_1\|_2 \leq \|u_0 - u_1\|_2.$$

Sejam $C \subset L^2(\mathbb{S}^1)$ um conjunto limitado e $\lambda_C := \sup_{v \in C} \|v\|_2$. Dado $v \in C$

$$\|S_2(t)v\|_2 = e^{-t}\|v\|_2 \leq e^{-t}\lambda_C, \ \forall t \geq 0. \tag{3.30}$$

Logo,

$$\sup_{v \in C} \|S_2(t)v\|_2 \leq e^{-t}\lambda_C, \ \forall t \geq 0.$$

Daí,

$$\sup_{v \in C} \|S_2(t)v\|_2 \to 0 \ \text{ quando } \ t \to \infty. \tag{3.31}$$

Agora, seja $u_0 \in C$. Defina

$$r := \frac{2\sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h)}{1 - M\|J\|_1}$$

e $R := \max\{\lambda_C, r\}$. Pelo Lema 3.7 o conjunto $\mathcal{B} := B[0, r]$ é absorvente (pelo semigrupo $\{S(t)\}$). Assim, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$t \geq t_0 \Rightarrow S(t)C \subset \mathcal{B}.$$

Logo,

$$t \geq t_0 \Rightarrow \|S(t)u_0\|_2 \leq r.$$

A partir da Afirmação 3.3 segue que

$$\|S(t)u_0\|_2 \leq R, \ \forall \ t \geq 0. \tag{3.32}$$

Por definição, dado $w \in \mathbb{S}^1$ temos $J'(w) = (J\varphi(x))' = (\tilde{J}^\tau)'(x)$, para algum $x \in [-\tau, \tau]$. Como $(\tilde{J}^\tau)'$ é contínua e limitada em $[-\tau, \tau]$, segue que J' é contínua e limitada. Assim $J' \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$. Indicaremos J' também bpo J_w. Pelos Lemas 3.8 e 3.5 temos, para todo $w \in \mathbb{S}^1$,

$$|J_w * (f \circ u)(w)| \leq \sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|f \circ u\|_2 \leq \sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty (M\|u\|_2 + k\sqrt{2\tau}).$$

Daí, para todo $w \in \mathbb{S}^1$,

$$|J_w * (f \circ u)(w)| \leq M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|u\|_2 + k2\tau\|J'\|_\infty. \tag{3.33}$$

Afirmação 3.4 *Para cada $t \geq 0$ fixado, a função $s \mapsto e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]$ é contínua.*

De fato, dados $s, s_0 \geq 0$ temos

$$|J * (f \circ u)(\cdot, s) + h - [J * (f \circ u)(\cdot, s_0) + h]| = |J * [(f \circ u)(\cdot, s) - (f \circ u)(\cdot, s_0)]|.$$

Usando o Lema 3.8 e o fato de que f é Lipschitziana temos,

$$\begin{aligned} |J * (f \circ u)(\cdot, s) + h - [J * (f \circ u)(\cdot, s_0) + h]| &\leq \sqrt{2\tau}\|J\|_\infty \|f(u(\cdot, s)) - f(u(\cdot, s_0))\|_2 \\ &\leq \sqrt{2\tau}\|J\|_\infty M\|u(\cdot, s) - u(\cdot, s_0)\|_2. \end{aligned}$$

Como u é contínua (pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard) segue que $s \mapsto e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]$ também o é.

Seja $t \geq 0$. Pela afirmação anterior, a função $s \mapsto e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]$ pertence a $L^1\big([0, t], L^2(\mathbb{S}^1)\big)$. Assim, podemos usar o Teorema A.7 para derivar sob o sinal de integração obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w) &= \frac{\partial}{\partial w} \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h] \, ds \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)} \frac{\partial}{\partial w}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h] \, ds \end{aligned}$$

Pela Proposição A.8 resulta que,

$$\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w) = \int_0^t e^{-(t-s)}[J_w * (f \circ u)(\cdot, s)]\ ds$$

e por (3.33) vem

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w)\right| &= \left|\int_0^t e^{-(t-s)}[J_w * (f \circ u)(\cdot, s)]\ ds\right| \leq \int_0^t e^{-(t-s)}|J_w * (f \circ u)(\cdot, s)|\ ds \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\Big(M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|u(\cdot, s)\|_2 + k2\tau\|J_w\|_\infty\Big)\ ds.\end{aligned}$$

Como $u(\cdot, s) = S(s)u_0$ segue por (3.32)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w)\right| &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\Big(M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|S(s)u_0\|_2 + k2\tau\|J_w\|_\infty\Big)\ ds \\ &\leq \Big(MR\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty + k2\tau\|J_w\|_\infty\Big)\int_0^t e^{-(t-s)}\ ds.\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_0^t e^{-(t-s)}\ ds = e^{-t}\int_0^t e^s\ ds = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t} \leq 1,$$

temos

$$\left|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w)\right| \leq k_1,$$

onde $k_1 := MR\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty + k2\tau\|J_w\|_\infty$. Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^1}\left|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w)\right|^2\ dw \leq k_1^2 2\tau < \infty, \tag{3.34}$$

o que nos diz que $\dfrac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e portanto $S_1(t)u_0 \in H^1(\mathbb{S}^1)$. Além disso

$$\left\|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0\right\|_2 \leq k_1\sqrt{2\tau}$$

e mais, por (3.30) e (3.32)

$$\|S_1(t)u_0\|_2 = \|S(t)u_0 - S_2(t)u_0\|_2 \leq \|S(t)u_0\|_2 + \|S_2(t)u_0\|_2 \leq R + \lambda_C.$$

Sendo assim,

$$\|S_1(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} = \|S_1(t)u_0\|_2 + \left\|\frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0\right\|_2 \leq R + \lambda_C + k_1\sqrt{2\tau},$$

quaisquer que sejam $t \geq 0$ e $u_0 \in C$. Portanto, o conjunto

$$\bigcup_{t\geq 0} S_1(t)C$$

é um conjunto limitado em $H^1(\mathbb{S}^1)$ e, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.12), o mesmo conjunto é relativamente compacto em $L^2(\mathbb{S}^2)$. Vemos assim que o semigrupo $\{S(t)\}$ e o conjunto absorvente $\mathcal{B}$ estão nas hipóteses do Teorema 2.1, com $\{S(t)\}$ satisfazendo ($\mathbf{h_2}$). Logo, pelo Teorema 2.1, o conjunto $\mathcal{A} := \omega(\mathcal{B})$ é um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}$. Além do mais, sendo $\mathcal{B}$ um conjunto absorvente, existe $s_0 > 0$ tal que

$$t \geq s_0 \Rightarrow S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}.$$

Desse modo

$$\bigcup_{t\geq s_0} S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \overline{\bigcup_{t\geq s_0} S(t)\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}.$$

Mas por definição,

$$\mathcal{A} \subset \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}}, \ \forall s \geq 0.$$

Portanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. ∎

3.3 Existência de Atrator Exponencial

Nesta seção estudamos a existência de atrator exponencial para o semigrupo gerado pelas soluções de (3.7), apoiados nos resultados apresentados na Seção 1.5. Em síntese, usaremos o Teorema 2.2 para obter um conjunto positivamente invariante, com dimensão fractal finita e que atrai exponencialmente um conjunto absorvente limitado, sobre a ação de um determinado semigrupo discreto. A partir deste conjunto e com o uso do Teorema 2.3, será possível obter um atrator exponencial para o semigrupo desejado.

A fim de utilizar o Teorema 2.2, mostraremos que as seguintes condições são satisfeitas:

(H1) O semigrupo $\{S(t)\}$ admite um conjunto absorvente $\mathcal{B}_1 \subset H^1(\mathbb{S}^1)$, o qual é limitado em $H^1(\mathbb{S}^1)$.

(H2) Existe $t_1 > 0$ tal que, na topologia de $L^2(\mathbb{S}^1)$, $S(t)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1$ para todo $t \geq t_1$.

(H3) Existe $t^* \geq t_1$ tal que, para todos $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_1$,

$$S(t^*)u_1 - S(t^*)u_2 = L(u_1, u_2) + K(u_1, u_2),$$

onde $L : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 \to L^2(\mathbb{S}^1)$ uma “contração"no sentido de que,

$$\|L(u_1, u_2)\|_2 \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_2, \forall\ u_1, u_2 \in \mathcal{B}_1, \tag{3.35}$$

para algum α com $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$; e $K : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 \to H^1(\mathbb{S}^1)$ satisfaz para todos $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_1$,

$$\|K(u_1, u_2)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \leq C\|u_1 - u_2\|_2, \tag{3.36}$$

onde $C > 0$ é uma constante.

(H4) A aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & [t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1 & \to & \mathcal{B}_1 \\ & (t, u) & \mapsto & F(t, u) := S(t)u \end{array}$$

é Lipschitziana sobre $\mathcal{B}_1$ na topologia de $L^2(\mathbb{S}^1)$, uniformemente em t, ou seja, existe $\lambda > 0$ tal que, para todos $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_1$,

$$\|S(t)u_1 - S(t)u_2\|_2 \leq \lambda \|u_1 - u_2\|_2,$$

qualquer que seja $t \in [t^*, 2t^*]$.

(**H5**) A aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & [t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1 & \to & \mathcal{B}_1 \\ & (t, u) & \mapsto & F(t, u) := S(t)u \end{array}$$

é Lipschitziana sobre $[t^*, 2t^*]$, uniformemente em $\mathcal{B}_1$, ou seja, existe $C^* > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{B}_1$,

$$\|S(t)u - S(t)u\|_2 \leq C^* |t_1 - t_2|,$$

quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in [t^*, 2t^*]$.

As condições **(H1)**-**(H5)** acima serão verificadas nas seguintes subseções.

Existência de Um Conjunto Absorvente Limitado em $H^1(\mathbb{S}^1)$

Seja $u \in L^2(\mathbb{S}^1)$ uma solução de (3.7) com condição inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{S}^1)$. Sabemos que, para todo $t \geq 0$,

$$u(t) = S(t)u_0 = S_1(t)u_0 + S_2(t)u_0,$$

onde

$$S_1(t)u_0 = \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(\cdot, s) + h]\, ds \quad \text{e} \quad S_2(t)u_0 = e^{-t}u_0.$$

Claramente $S_2(t)u_0 \in H^1(\mathbb{S}^1)$ para todo $t \geq 0$. Agora, conforme visto na demonstração do Teorema 3.1, para todo $t \geq 0$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w) \right| \leq \int_0^t e^{-(t-s)} \Big(M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|S(s)u_0\|_2 + k2\tau\|J_w\|_\infty \Big)\, ds.$$

Pondo $R_0 := \max\{\|u_0\|, r\}$, onde r é o raio da bola absorvente $\mathcal{B}$ definida no Lema 3.7, segue da Afirmação 3.3 que

$$\|S(t)u_0\|_2 \leq R_0, \;\forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0(w) \right| &\leq \Big(MR_0\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty + k2\tau\|J_w\|_\infty \Big) \int_0^t e^{-(t-s)}\, ds \\ &\leq MR_0\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty + k2\tau\|J_w\|_\infty. \end{aligned}$$

Daí $\dfrac{\partial}{\partial w} S_1(t)u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e por conseguinte $u(\cdot, t) = S(t)u_0 \in H^1(\mathbb{S}^1)$, para todo $t \geq 0$. Este raciocínio nos diz que $H^1(\mathbb{S}^1)$ é positivamente invariante pelo semigrupo $\{S(t)\}$.

Assumiremos daqui por diante que

$$M\|J_w\|_1 < \frac{\pi}{\sqrt{2}\tau}. \tag{3.37}$$

Lema 3.9 (Hipótese H1) *Sejam* $r' := \dfrac{2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{1 - M\dfrac{\tau}{\pi}\|J_w\|_1}$, *$r$ o raio da bola absorvente $\mathcal{B}$ definida no Lema 3.7 e $r_1 = r' + r$. O conjunto*

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ v \in H^1(\mathbb{S}^1);\; \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \leq r_1 \right\}.$$

é um conjunto absorvente limitado para $\{S(t)\}$ segundo a norma de $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{B}_0 \subset H^1(\mathbb{S}^1)$ um conjunto limitado, $u_0 \in \mathcal{B}_0$ e $u(\cdot, t) = S(t)u_0$. Sendo u solução de (3.7) temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + J * f \circ u + h$$

de onde segue que

$$\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial u}{\partial t} = -u_w + J_w * f \circ u.$$

Tomando o produto interno com u_w segue que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial u}{\partial t}, u_w \right\rangle = -\langle u_w, u_w\rangle + \langle J_w * f \circ u, u_w\rangle$$

Usando propriedades das distribuições obtemos

$$\left\langle \frac{d}{dt}u_w, u_w \right\rangle = -\langle u_w, u_w\rangle + \langle J_w * f \circ u, u_w\rangle.$$

o que implica em

$$2\left\langle \frac{d}{dt}u_w, u_w \right\rangle = -2\|u_w\|_2^2 + 2\langle J_w * f \circ u, u_w\rangle.$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}\|u_w\|_2^2 = \frac{d}{dt}\langle u_w, u_w\rangle = 2\left\langle \frac{d}{dt}u_w, u_w \right\rangle$$

temos

$$\frac{d}{dt}\|u_w\|_2^2 + 2\|u_w\|_2^2 = 2\langle J_w * f \circ u, u_w\rangle.$$

Observe que $J_w \in L^1(\mathbb{S}_1)$. De fato, da geometria diferencial temos

$$J_w(w) = (J(\varphi(x)))' = (\tilde{J}^\tau)'(x) = \tilde{J}'(x),$$

para algum $x \in [-\tau, \tau]$. Como $\tilde{J} \in C^1(\mathbb{R})$ segue que $\tilde{J}'$ é limitada em $[-\tau, \tau]$ e portanto $|J'(w)| < c_\tau$, para todo $w \in \mathbb{S}^1$. Consequentemente

$$\int_{\mathbb{S}^1} |J_w(w)|\, dw < \infty.$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young obtemos

$$2|\langle J_w * f \circ u, u_w\rangle| \leq 2\|J_w * f \circ u\|_2\|u_w\|_2 \leq 2\|J_w\|_1\|f \circ u\|_2\|u_w\|_2.$$

Pelo Lema 3.5

$$2|\langle J_w * f \circ u, u_w \rangle| \leq 2\|J_w\|_1(M\|u\|_2 + k\sqrt{2\tau})\|u_w\|_2$$

e pela Desigualdade de Poincaré resulta que

$$2|\langle J_w * f \circ u, u_w \rangle| \leq 2\|J_w\|_1(M\frac{\tau}{\pi}\|u_w\|_2 + k\sqrt{2\tau})\|u_w\|_2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|u_w\|_2^2 + 2\|u_w\|_2^2 \leq 2\|J_w\|_1 M\frac{\tau}{\pi}\|u_w\|_2^2 + 2\|J_w\|_1 k\sqrt{2\tau}\|u_w\|_2$$

implicando em

$$\frac{d}{dt}\|u_w\|_2^2 \leq -2\|u_w\|_2^2 + 2M\frac{\tau}{\pi}\|J_w\|_1\|u_w\|_2^2 + 2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1\|u_w\|_2.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\|u_w\|_2^2 \leq 2\|u_w\|_2^2\left(-1 + M\frac{\tau}{\pi}\|J_w\|_1 + \frac{k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{\|u_w\|_2}\right). \tag{3.38}$$

Afirmação 3.5 *Seja* $a := 1 - M\frac{\tau}{\pi}\|J_w\|_1$. *Se* $t \geq 0$ *é tal que*

$$\|u_w(\cdot,t)\|_2 \geq \frac{2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{a}, \tag{3.39}$$

então

$$\|u_w(\cdot,t)\|_2^2 \leq e^{-at}\|(u_0)_w\|_2^2. \tag{3.40}$$

A prova da Afirmação acima é análoga ao que foi feito na Afirmação 3.3 e, por isso, daremos apenas um esboço do raciocínio. Supondo que

$$\|u_w(\cdot,t)\|_2 \geq \frac{2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{a},$$

usando (3.38) obtemos

$$\frac{\frac{d}{dt}\|u_w(\cdot,t)\|_2^2}{\|u_w(\cdot,t)\|_2^2} \leq -a.$$

Integrando de 0 a t e usando propriedades do logaritmo e da exponencial obtemos

$$\frac{\|u_w(\cdot,t)\|_2^2}{\|u_w(\cdot,0)\|_2^2} \leq e^{-at}$$

o que implica em

$$\|u_w(\cdot,t)\|_2^2 \leq e^{-at}\|(u_0)_w\|_2^2.$$

Observe que existe $t_1 > 0$ tal que

$$e^{-\frac{a}{2}t}\|(u_0)_w\|_2 < \frac{2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{a}, \tag{3.41}$$

sempre que $t \geq t_1$. Por isso para $t \geq t_1$ (3.39) não pode ocorrer pois, do contrário, teríamos por (3.40) e (3.41) um absurdo. Logo,

$$t \geq t_1 \Rightarrow \|u_w(\cdot,t)\|_2 < \frac{2k\sqrt{2\tau}\|J_w\|_1}{1 - M\dfrac{\tau}{\pi}\|J_w\|_1}.$$

Como $\mathcal{B}_0$ é limitado em $H^1(\mathbb{S}^1)$, devido a imersão compacta $H^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ temos $\mathcal{B}_0$ também limitado em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Assim, pelo Lema 3.7, existe $t_2 > 0$ tal que

$$t \geq t_2 \Rightarrow \|S(t)v\|_2 \leq r, \ \forall\ v \in \mathcal{B}_0.$$

Pondo $t_0 := \max\{t_1, t_2\}$ temos para $t \geq t_0$

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} = \|u(\cdot,t)\|_2 + \|u_w(\cdot,t)\|_2 < r + r' = r_1,$$

concluindo assim a demonstração do Lema. ∎

Lema 3.10 *O conjunto $\mathcal{B}_1$ é positivamente invariante por $\{S(t)\}$ em $L^2(\mathbb{S}^1)$.*

Demonstração:

Como $\mathcal{B}_1$ é conjunto absorvente em $H^1(\mathbb{S}^1)$ e é também limitado, existe $t_1 > 0$ tal que, para $t \geq t_1$ tem-se $S(t)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1$ em $H^1(\mathbb{S}^1)$. Considerando a aplicação $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ tem-se que, para $t \geq t_1$,

$$I\big(S(t)\mathcal{B}_1\big) \subset I(\mathcal{B}_1)$$

em $L^2(\mathbb{S}^1)$ e isto demonstra o desejado. ∎

Observação 3.2 Note que se $\mathcal{B}_1$ é positivamente invariante então $\overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$ também o é. De fato, seja $t \geq 0$. Se $x \in \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$ então $x = \lim x_n$ com $(x_n) \subset \mathcal{B}_1$. Pela continuidade de $S(t)$ segue que

$$S(t)x = S(t)[\lim x_n] = \lim S(t)x_n.$$

Mas, pela invariância de $\mathcal{B}_1$, $S(t)x_n \in \mathcal{B}_1$ para todo n. Logo $S(t)x \in \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$.

Verificação das Hipóteses (H4) e (H5)

A hipótese **(H4)** já é satisfeita para o problema em estudo, sendo uma consequência imediata do Lema 3.6. Vamos verificar a validade de **(H5)**.

Proposição 3.5 *Existe uma constante $C_* > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq C^* \ ,$$

para todo $u \in \mathcal{B}_1$ e $t \in [t^*, 2t^*]$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{B}_1$. Pela equação (3.7),

$$\frac{d}{dt} S(t)u = -S(t)u + J * f \circ S(t)u + h.$$

Tomando a norma e usando a Desigualdade Triangular vem que

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq \|S(t)u\|_2 + \|J * f \circ S(t)u\|_2 + \|h\|_2.$$

Pela Desigualdade de Young vem que

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq \|S(t)u\|_2 + \|J\|_1 \|f \circ S(t)u\|_2 + h\sqrt{2}$$

e usando o Lema 3.5 obtemos

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq \|S(t)u\|_2 + \|J\|_1 (M\|S(t)u\|_2 + k\sqrt{2\tau}) + h\sqrt{2\tau}.$$

Logo,

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq \|S(t)u\|_2 + M\|J\|_1 \|S(t)u\|_2 + k\sqrt{2\tau}\|J\|_1 + h\sqrt{2\tau},$$

ou seja,

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t)u \right\|_2 \leq (1 + M\|J\|_1)\|S(t)u\|_2 + \sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h).$$

Como $\mathcal{B}_1$ é limitado em $H^1(\mathbb{S}^1)$, devido a imersão compacta $H^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ temos $\mathcal{B}_1$ também limitado em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Assim, existe $t' > 0$ tal que

$$t \geq t' \Rightarrow \|S(t)u\|_2 \leq r, \ \forall \ u \in \mathcal{B}_1,$$

onde r é o raio da bola absorvente $\mathcal{B}$ definida no Lema 3.7. Além disso, pela Afirmação 3.3, se $\|S(t)u\|_2 > r$ para $u \in \mathcal{B}_1$ e $t \geq 0$ então

$$\|S(t)u\|_2 \leq e^{-\frac{1}{2}(1-M\|J\|_1)t}\|u\|_2 \leq \|u\|_2.$$

Pela Desigualdade de Poincaré resulta que

$$\|S(t)u\|_2 \leq \frac{\tau}{\pi} r_1.$$

Sendo assim, definindo $R_1 : \max\left\{\frac{\tau}{\pi} r_1, r\right\}$ segue que

$$\|S(t)u\|_2 \leq R_1,$$

para todos $u \in \mathcal{B}_1$ e $t \geq 0$. Portanto,

$$\left\|\frac{d}{dt}S(t)u\right\|_2 \leq (1 + M\|J\|_1)R_1 + \sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h)$$

e o resultado segue tomando

$$C^* = (1 + M\|J\|_1)R_1 + \sqrt{2\tau}(k\|J\|_1 + h).$$

■

Corolário 3.3 *A aplicação*

$$\begin{array}{rrcl} F: & [t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1 & \rightarrow & \mathcal{B}_1 \\ & (t, u) & \mapsto & F(t, u) := S(t)u \end{array}$$

é Lipschitziana sobre $[t^*, 2t^*]$*, uniformemente em* $\mathcal{B}_1$*.*

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 3.5, com C^* sendo a constante de Lipschitz qualquer que seja $u \in \mathcal{B}_1$. ■

Corolário 3.4 *A aplicação*

$$\begin{array}{rrcl} F: & [t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1 & \rightarrow & \mathcal{B}_1 \\ & (t, u) & \mapsto & F(t, u) := S(t)u \end{array}$$

é Lipschitziana sobre $[t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1$*.*

Demonstração: Seja $\overline{C} := \max\{1, C^*\}$. Dados $(t_1, u_1), (t_2, u_2) \in [t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1$ temos

$$\begin{aligned} \|S(t_1)u_1 - S(t_2)u_2\|_2 &\leq \|S(t_1)u_1 - S(t_1)u_2 + S(t_1)u_2 - S(t_2)u_2\|_2 \\ &\leq \|S(t_1)u_1 - S(t_1)u_2\|_2 + \|S(t_1)u_2 - S(t_2)u_2\|_2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.6 e o Corolário 3.3 segue que

$$\begin{aligned} \|S(t_1)u_1 - S(t_2)u_2\|_2 &\leq \|u_1 - u_2\|_2 + C^*|t_1 - t_2| \\ &\leq \overline{C}(|t_1 - t_2| + \|u_1 - u_2\|_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|S(t_1)u_1 - S(t_2)u_2\|_2 \leq \overline{C}\|(t_1 - t_2, u_2 - u_2)\|_{[t^*,2t^*]\times\mathcal{B}_1}$$

e portanto,

$$\|F(t_1, u_1) - F(t_2, u_2)\|_2 \leq \overline{C}\|(t_1, u_1) - (t_2, u_2)\|_{[t^*,2t^*]\times\mathcal{B}_1}.$$

■

Decomposição da Diferença de Duas Soluções

Sejam $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Dado $t \geq 0$, considere

$$u(t) = S(t)u_0 \;\text{ e }\; v(t) = S(t)v_0.$$

Defina

$$z(t) := u(t) - v(t) \;\text{ e }\; z_0 = u_0 - z_0.$$

Note que z é solução em $L^2(\mathbb{S}^1)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + y = J * f \circ u - J * f \circ v \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.42}$$

Com efeito,

$$z(0) = u(0) - v(0) = S(0)u_0 - S(0)v_0 = u_0 - v_0 = z_0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} &= -u + J * f \circ u + h - (-v + J * f \circ v + h) \\ &= -u + v + J * f \circ u - J * f \circ v \\ &= -z + J * f \circ u - J * f \circ v \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{dz}{dt} + z = J * f \circ u - J * f \circ v.$$

Portanto z, é de fato uma solução de (3.42). Agora considere os problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} + \phi = 0 \\ \phi(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} + \theta = J * f \circ u - J * f \circ v \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

Ambos os prolemas podem der escritos na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = F(\varphi) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases},$$

com $F : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ Lipschitziana. Desse modo, o Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard garante existência e unicidade de solução para os dois problemas, ambas pertencentes a $C^1\big([0,\infty), L^2(\mathbb{S}^1)\big)$. Denotaremos por $\phi(t,\cdot,u_0,v_0)$ e $\theta(t,\cdot,u_0,v_0)$ as soluções dos problemas (3.43) e (3.44), respectivamente, em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Defina $\psi(t) = \phi(t,\cdot,u_0,v_0) + \theta(t,\cdot,u_0,v_0)$. Observe que

$$\psi(0) = \phi(0) + \theta(0) = z_0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} + \psi = \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\theta}{dt} + \phi + \theta &= \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi\right) + \left(\frac{d\theta}{dt} + \theta\right) \\ &= J * f \circ u - J * f \circ v. \end{aligned}$$

Portanto, ψ é solução de (3.42) e, pela unicidade de solução (dada pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard) segue que $z = \psi$, isto é,

$$z(t) = \phi(t,\cdot,u_0,v_0) + \theta(t,\cdot,u_0,v_0), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.45}$$

Lema 3.11 *Para todos $u_0, v_0 \in \mathcal{B}_1$ e todo $t > \ln 3$ temos*

$$\|\phi(t,\cdot,u_0,v_0)\|_2 < \frac{1}{3}\|u_0 - v_0\|_2. \tag{3.46}$$

Demonstração: A igualdade $\dfrac{d\phi}{dt} + \phi = 0$ nos dá

$$\left\langle \frac{d\phi}{dt} + \phi, 2\phi \right\rangle = 0.$$

Ora,

$$\left\langle \frac{d\phi}{dt} + \phi, 2\phi \right\rangle = 2\left\langle \frac{d\phi}{dt}, \phi \right\rangle + 2\langle \phi, \phi\rangle = \frac{d}{dt}\|\phi\|_2^2 + 2\|\phi\|_2^2.$$

Logo, para todo $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\|\phi(t)\|_2^2 + 2\|\phi(t)\|_2^2 = 0$$

o que implica em

$$\frac{\frac{d}{dt}\|\phi(t)\|_2^2}{\|\phi(t)\|_2^2} = -2.$$

Dado $t \geq 0$, podemos integrar a igualdade acima de 0 a t obtendo

$$\ln \|\phi(t)\|_2^2 - \ln \|\phi(0)\|_2^2 = -2t$$

de onde vem

$$\frac{\|\phi(t)\|_2^2}{\|\phi(0)\|_2^2} = e^{-2t},$$

ou seja,

$$\|\phi(t)\|_2 = e^{-t}\|z_0\|_2.$$

Para $t > \ln 3$ temos

$$-t < -\ln 3 \Rightarrow -t < \ln 3^{-1} \Rightarrow e^{-t} < e^{\ln 3^{-1}} \Rightarrow e^{-t} < \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$t \geq \ln 3 \Rightarrow \|\phi(t)\|_2 < \frac{1}{3}\|z_0\|_2 = \frac{1}{3}\|u_0 - v_0\|_2,$$

conforme queríamos mostrar. ∎

Lema 3.12 *Para todos $u_0, v_0 \in \mathcal{B}_1$ e $t \geq 0$, existe uma constante $C = C(M, \tau, J, J_w) > 0$ tal que*

$$\|\theta(t, \cdot, u_0, v_0)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} < C\|z_0\|_2. \tag{3.47}$$

Demonstração: Fixe $u_0, v_0 \in \mathcal{B}_1$. Iniciamos argumentando a pertinência de $\theta(t, \cdot, u_0, v_0)$ a $H^1(\mathbb{S}^1)$, qualquer que seja $t \geq 0$. Dado $w \in \mathbb{S}^1$, por um raciocínio análogo àquele utilizado para obter (3.20) vemos que

$$\theta(t, w, u_0, v_0) = \int_0^t e^{-(t-s)} J * (f \circ u - f \circ v)(w, s)\, ds. \tag{3.48}$$

Utilizando o Teorema A.7 e a Proposição A.8 obtemos

$$\theta_w(t,w,u_0,v_0) = \int_0^t e^{-(t-s)} J_w * (f\circ u - f\circ v)(w,s)\ ds.$$

Pelo Lema 3.8

$$\begin{aligned}|\theta_w(t,w,u_0,v_0)| &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} |J_w * (f\circ u - f\circ v)(w,s)|\ ds \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \sqrt{2\tau} \|J_w\|_\infty \|(f\circ u - f\circ v)(\cdot,s)\|_2\ ds\end{aligned}$$

e pelo fato de f ser Lipschitziana segue que

$$|\theta_w(t,w,u_0,v_0)| \leq \int_0^t e^{-(t-s)} \sqrt{2\tau} \|J_w\|_\infty M \|u(\cdot,s) - v(\cdot,s)\|_2\ ds.$$

Pelo Lema 3.6

$$|\theta_w(t,w,u_0,v_0)| \leq M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \int_0^t e^{-(t-s)} e^{-(1-M\|J\|_1)s} \|u_0 - v_0\|_2\ ds.$$

Daí,

$$|\theta_w(t,w,u_0,v_0)| \leq M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|z_0\|_2 \int_0^t e^{-(t-s)}\ ds$$

e então

$$|\theta_w(t,w,u_0,v_0)| \leq M\sqrt{2\tau}\|J_w\|_\infty \|z_0\|_2, \tag{3.49}$$

para todo $w \in \mathbb{S}^1$. Disto segue que $\theta_w \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e portanto $|\theta(t,\cdot,u_0,v_0)| \in H^1(\mathbb{S}^1)$, para todo $t \geq 0$. Ademais, por (3.49),

$$|\theta_w(t,w,u_0,v_0)|^2 \leq M^2 2\tau \|J_w\|_\infty^2 \|z_0\|_2^2$$

de onde onde obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\theta_w(t,w,u_0,v_0)|^2 dw \leq \int_{\mathbb{S}^1} M^2 2\tau \|J_w\|_\infty^2 \|z_0\|_2^2 dw.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{S}^1} M^2 2\tau \|J_w\|_\infty^2 \|z_0\|_2^2 dw = M^2 2\tau \|J_w\|_\infty^2 \|z_0\|_2^2 \int_{\mathbb{S}^1} 1 dw = \left(2\tau M \|J_w\|_\infty \|z_0\|_2\right)^2.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\theta_w(t,w,u_0,v_0)|^2 dw \leq \left(2\tau M \|J_w\|_\infty \|z_0\|_2\right)^2$$

o que implica em

$$\|\theta_w(t,\cdot,u_0,v_0)\|_2 \leq 2\tau M\|J_w\|_\infty\|z_0\|_2.$$

Por fim, usando propriedades da integral, a Desigualdade de Young, o fato de f ser Lipschitziana e o Lema 3.6, temos

$$\begin{aligned}\|\theta(t,\cdot,u_0,v_0)\|_2 &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\|J\|_1\|(f\circ u - f\circ v)(\cdot,s)\|_2\, ds\\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}M\|J\|_1\|\|u(\cdot,s)-v(\cdot,s)\|_2 ds\\ &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}M\|J\|_1 e^{-(1-M\|J\|_1)s}\|u_0-v_0\|_2 ds.\end{aligned}$$

Como $\|J\|_1 < 1$, segue que

$$\|\theta(t,\cdot,u_0,v_0)\|_2 \leq M\|J\|_1\|z_0\|_2\int_0^t e^{-(t-s)}ds \leq M\|J\|_1\|z_0\|_2.$$

Logo,

$$\|\theta(t,\cdot,u_0,v_0)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \leq M(\|J\|_1 + 2\tau\|J_w\|_\infty)\|z_0\|_2.$$

e o resultado fica demonstrado com $C = M(\|J\|_1 + 2\tau\|J_w\|_\infty)$. ∎

Fixe $t^* > \ln 3$ e defina $L, K : \mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_1 \to L^2(\mathbb{S}^1)$ por

$$L(u_0,v_0) := \phi(t^*,\cdot,u_0,v_0) \tag{3.50}$$

e

$$K(u_0,v_0) = \theta(t^*,\cdot,u_0,v_0). \tag{3.51}$$

Pelos Lemas 3.11 e 3.12 temos, para quaisquer $u_0, v_0 \in \mathcal{B}_1$

$$\|L(u_0,v_0)\|_2 < \frac{1}{3}\|u_0-v_0\|_2 \tag{3.52}$$

e

$$\|K(u_0,v_0)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \leq C\|u_0-v_0\|_2, \tag{3.53}$$

onde $C = M(\|J\|_1 + \|J_w\|_1)$. Além disso, por (3.45) temos

$$S(t^*)u_0 - S(t^*)v_0 = L(u_0,v_0) + K(u_0,v_0), \tag{3.54}$$

para todos $u_0, v_0 \in \mathcal{B}_1$.

Proposição 3.6 *Para todos* $t \geq 0$ *e* $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{S}^1)$,

$$\phi(t, \cdot, u_1 - u_2, 0) = \phi(t, \cdot, u_1, 0) - \phi(t, \cdot, u_2, 0).$$

Demonstração: Sabemos que $x = \phi(t, \cdot, u_1, 0)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \phi_t + \phi = 0 \\ \phi(0) = u_1 \end{cases}$$

e $y = \phi(t, \cdot, u_2, 0)$ é solução de

$$\begin{cases} \phi_t + \phi = 0 \\ \phi(0) = u_2 \end{cases}$$

Seja $\psi = x - y$. Então,

$$\psi_t + \psi = x_t - y_t + x - y = (x_t + x) - (y_t + y) = 0$$

e

$$\psi(0) = x(0) - y(0) = u_1 - u_2.$$

Pela unicidade de solução para o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \phi_t + \phi = 0 \\ \phi(0) = u_1 - u_2 \end{cases}$$

segue que $\psi = \phi(t, \cdot, u_1 - u_2, 0)$, demonstrando o desejado. ■

Proposição 3.7 *Para todos* $t \geq 0$ *e* $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{S}^1)$,

$$\theta(t, \cdot, u_1, 0) - \theta(t, \cdot, u_2, 0) = \theta(t, \cdot, u_1, u_2).$$

Demonstração: Sejam $x = \theta(t, \cdot, u_1, 0)$ e $y = \theta(t, \cdot, u_2, 0)$ as soluções dos problemas

$$\begin{cases} \theta_t + \theta = J * f \circ S(t)u_1 - J * f \circ S(t) \cdot 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \theta_t + \theta = J * f \circ S(t)u_2 - J * f \circ S(t) \cdot 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

respectivamente. Defina $\psi := x - y$. Temos,

$$\begin{aligned}\psi_t + \psi &= x_t + x - (y_t + y)\\ &= J * f \circ S(t)u_1 - J * f \circ S(t) \cdot 0 - \big(J * f \circ S(t)u_2 - J * f \circ S(t) \cdot 0\big)\\ &= J * f \circ S(t)u_1 - J * f \circ S(t)u_2\end{aligned}$$

e

$$\psi(0) = x(0) - y(0) = 0 - 0 = 0.$$

Pela unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases}\theta_t + \theta = J * f \circ S(t)u_1 - J * f \circ S(t)u_2\\ \theta(0) = 0\end{cases}$$

segue que $\psi = \theta(t, \cdot, u_1, u_2)$, como queríamos demonstrar. ■

Defina $L_0 : \mathcal{B}_1 \to L^2(\mathbb{S}^1)$ e $K_0 : \mathcal{B}_1 \to L^2(\mathbb{S}^1)$ por

$$L_0(u) = L(u, 0) + S(t^*) \cdot 0 \quad \text{e} \quad K_0(u) = K(u, 0). \tag{3.55}$$

Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_1$. Por (3.50) temos

$$L_0(u_1) - L_0(u_2) = L(u_1, 0) - L(u_2, 0) = \phi(t^*, \cdot, u_1, 0) - \phi(t^*, \cdot, u_2, 0)$$

e então pela Proposição 3.6 vem que

$$L_0(u_1) - L_0(u_2) = \phi(t^*, \cdot, u_1 - u_2, 0).$$

Usando (3.50) mais uma vez obtemos

$$L_0(u_1) - L_0(u_2) = L(u_1 - u_2, 0).$$

Por (3.52),

$$\|L_0(u_1) - L_0(u_2)\|_2 < \frac{1}{3}\|u_1 - u_2\|_2. \tag{3.56}$$

Analogamente, por (3.51),

$$K_0(u_1) - K_0(u_2) = K(u_1, 0) - K(u_2, 0) = \theta(t^*, \cdot, u_1, 0) - \theta(t^*, \cdot, u_2, 0).$$

Da Proposição 3.7 vem que

$$K_0(u_1) - K_0(u_2) = \theta(t^*, \cdot, u_1, u_2).$$

Assim, por (3.51) obtemos

$$K_0(u_1) - K_0(u_2) = K(u_1, u_2).$$

Com isso, temos a partir de (3.53)

$$\|K_0(u_1) - K_0(u_2)\|_{H^1(\mathbb{S}^1)} < C\|u_1 - u_2\|_2. \tag{3.57}$$

Agora, pela equação (3.54),

$$S(t^*)u = L(u, 0) + S(t^*) \cdot 0 + K(u, 0),\ \forall\ u \in \mathcal{B}_1,$$

ou seja,

$$S(t^*)u = L_0(u) + K_0(u),\ \forall\ u \in \mathcal{B}_1. \tag{3.58}$$

Existência do Atrator Exponencial

Desde que $H^1(\mathbb{S}^1)$ está imerso compactamente em $L^2(\mathbb{S}^1)$, $\mathcal{B}_1$ é limitado e valem as equações (3.56), (3.57), a aplicação $S(t^*)$ está nas condições do Teorema 2.2. Sendo assim, o referido resultado garante a existência de um conjunto $\mathcal{M}^* \subset \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$ com a seguintes propriedades:

(i) $S^n(t^*)(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{M}^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\dim_F(\mathcal{M}, L^2(\mathbb{S}^1)) < \infty$;

(iii) Existem $\alpha^*, \omega^* > 0$ tais que

$$\text{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}(S^n(t^*)(\mathcal{B}_1, \mathcal{M}^*) \leq \alpha^* e^{-\omega^* n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}; \tag{3.59}$$

(iv) $\mathcal{M}^*$ é fechado em $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Observação 3.3 (i) A notação $S^n(t^*)$ indica a composição de $S(t^*)$ consigo mesma n vezes, isto é,

$$S^n(t^*) = \underbrace{S(t^*) \circ S(t^*) \circ \cdots S(t^*)}_{n\ \text{vezes}}.$$

(ii) Por propriedades de semigrupo decorre que

$$S^n(t^*) = S(nt^*),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(iii) O conjunto $\mathcal{M}^*$ é compacto em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Com efeito, sendo $\mathcal{B}_1$ limitado em $H_1(\mathbb{S}^1)$, a imersão compacta $H^1(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ nos dá que $\overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}_1)}$ é compacto em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Como $\mathcal{M}^*$ é fechado em $L^2(\mathbb{S}^1)$, resulta que o mesmo é também compacto.

Teorema 3.2 *O semigrupo S admite um conjunto $\mathcal{M}$ compacto em $L^2(\mathbb{S}^1)$ com as seguintes propriedades:*

(i) *O conjunto $\mathcal{M}$ é positivamente invariante pelo semigrupo S, isto é, $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$.*

(ii) *O conjunto $\mathcal{M}$ possui dimensão fractal finita, ou seja, $\dim_F(\mathcal{M}, L^2(\mathbb{S}^1)) < \infty$.*

(iii) *O conjunto $\mathcal{M}$ atrai $\mathcal{B}_1$ exponencialmente, isto é, existem $\alpha \geq 0$ e $\omega > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$,*

$$dist_{L^2(\mathbb{S}^1)}\big(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\big) \leq \alpha e^{-\omega t}.$$

Demonstração: Defina

$$\mathcal{M} := \bigcup_{t \in [t^*, 2t^*]} S(t)\mathcal{M}^*.$$

Note que $\mathcal{M} = F\left([t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^*\right)$, onde

$$\begin{array}{rrcl} F: & [0,\infty) \times L^2(\mathbb{S}^1) & \to & L^2(\mathbb{S}_1) \\ & (t,u) & \mapsto & F(t,u) := S(t)u \end{array}$$

Como consequência do Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard e do Corolário 3.2, temos que F é contínua. Desde que $[t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^*$ é compacto em $[0,\infty) \times L^2(\mathbb{S}^1)$, segue da continuidade de F que $\mathcal{M}$ é compacto em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Mostraremos que $\mathcal{M}$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da tese do teorema.

(i) <u>O conjunto $\mathcal{M}$ é positivamente invariante pelo semigrupo S</u>

Iniciamos verificando o seguinte:

$$S(t)\mathcal{M} \subset \bigcup_{t+t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^*, \forall\ t \geq 0. \tag{3.60}$$

Seja $t \geq 0$. Dado $x \in \mathcal{M}$ temos $x \in S(s)\mathcal{M}^*$ para algum $s \in [t^*, 2t^*]$. Então $S(t)x \in S(t+s)\mathcal{M}^*$. Pondo $r = t+s$ segue que $r \in [t+t^*, t+2t^*]$ e $x \in S(r)\mathcal{M}^*$ e portanto (3.60) é válido.

Fixe $t \geq 0$ e suponha $0 \leq t \leq t^*$. Por (3.60) temos

$$S(t)\mathcal{M} \subset \bigcup_{t+t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* = \left(\bigcup_{t+t^* \leq r \leq 2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \right) \cup \left(\bigcup_{2t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \right).$$

Como

$$t + t^* \leq r \leq 2t^* \Rightarrow r \in [t^*, 2t^*]$$

é imediato que

$$\bigcup_{t+t^* \leq r \leq 2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}.$$

Agora, dado $r \in [2t^*, 2t^* + t]$ podemos escrever

$$r = 2t^* + s = s + t^* + t^*$$

com $s \in [0, t]$. Logo,

$$\bigcup_{2t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* = \bigcup_{s \in [0,t]} S(s+t^*)S(t^*)\mathcal{M}^*.$$

Usando a invariância de $\mathcal{M}^*$ por $S(t^*)$ vem que

$$\bigcup_{2t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \subset \bigcup_{s \in [0,t]} S(s+t^*)\mathcal{M}^*.$$

Observe que

$$0 \leq s \leq t \;\text{ e }\; t \leq t^* \Rightarrow t^* \leq s + t^* \leq t + t^* \Rightarrow t^* \leq s + t^* \leq 2t^*.$$

A partir disto é possível notar que,

$$\bigcup_{2t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \subset \bigcup_{t^* \leq \sigma \leq 2t^*} S(\sigma)\mathcal{M}^*,$$

ou seja,

$$\bigcup_{2t^* \leq r \leq t+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}.$$

Portanto,

$$S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Suponhamos agora $t > t^*$ e escrevamos

$$t = nt^* + \sigma$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in [0, t^*)$. Desse modo,

$$S(t)\mathcal{M} = S(nt^*)S(\sigma)\mathcal{M}.$$

Pela primeira parte $S(\sigma)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, Por isso,

$$S(t)\mathcal{M} \subset S(nt^*)\mathcal{M}.$$

Utilizando (3.60) obtemos

$$S(t)\mathcal{M} \subset \bigcup_{nt^*+t^* \leq r \leq nt^*+2t^*} S(r)\mathcal{M}^* = \bigcup_{(n+1)t^* \leq r \leq (n+2)t^*} S(r)\mathcal{M}^*.$$

Dado $r \in [(n+1)t^*, (n+2)t^*]$ é possível escrever

$$r = (n+1)t^* + s_r$$

onde $s_r \in [0, t^*]$. Fazendo $s = t^* + s_r$ temos $s \in [t^*, 2t^*]$ e $r = nt^* + s$. Daí,

$$S(r)\mathcal{M}^* = S(s)S(nt^*)\mathcal{M}^*.$$

Pela invariância de $\mathcal{M}^*$ por $S(nt^*)$ resulta que

$$S(r)\mathcal{M}^* \subset S(s)\mathcal{M}^*.$$

Portanto,

$$\bigcup_{(n+1)t^* \leq r \leq (n+2)t^*} S(r)\mathcal{M}^* \subset \bigcup_{s \in [t^*, 2t^*]} S(s)\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$$

e, por conseguinte,

$$S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Isto completa a demonstração de (i).

(ii) <u>A dimensão fractal de $\mathcal{M}$ é finita</u>

Por raciocínio análogo ao utilizado para provar que F é Lipschitziana em $[t^*, 2t^*] \times \mathcal{B}_1$ mostra-se que F é Lipschitziana em $[t^*, 2t^*] \times \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$. Consequentemente, F é Lipschitziana em $[t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^*$. Definindo $\overline{F} : [0, \infty) \times L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ da seguinte maneira,

$$\overline{F} = \begin{cases} F(t,u) \quad , & \text{para } (t,u) \in [t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^* \\ \quad 0 \quad\quad , & \text{para } (t,u) \in \Big([0,\infty) \times L^2(\mathbb{S}^1)\Big) \setminus \Big([t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^*\Big) \end{cases}$$

temos $\overline{F}$ Lipschitziana em $[0, \infty) \times L^2(\mathbb{S}^1)$ e $\mathcal{M} = \overline{F}\big([t^*, 2t^*] \times \mathcal{M}^*\big)$. Como $\mathcal{M}^*$ é compacto em $L^2(\mathbb{S}^1)$ e $[t^*, 2t^*]$ é compacto em $\mathbb{R}$, pela Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned} \dim_F(\mathcal{M}, L^2(\mathbb{S}^1)) &\leq \dim_F([t^*, 2t^*], \mathbb{R}) + \dim_F(\mathcal{M}^*, L^2(\mathbb{S}^1)). \\ &\leq 1 + \dim_F(\mathcal{M}^*, L^2(\mathbb{S}^1)). \end{aligned}$$

Sendo $\dim_F(\mathcal{M}^*, L^2(\mathbb{S}^1)) < \infty$, resulta que $\dim_F(\mathcal{M}, L^2(\mathbb{S}^1)) < \infty$.

(iii) O conjunto $\mathcal{M}$ atrai $\mathcal{B}_1$ exponencialmente

Seja $t \geq 0$. Suponha primeiro $t \in [0, t^*)$. Sejam $x \in S(t)\mathcal{B}_1$ e $y_0 \in \mathcal{M}$. Temos $x = S(t)b$ e $y_0 = S(r)z^*$ com $b \in \mathcal{B}_1$, $z^* \in \mathcal{M}^*$ e $r \in [t^*, 2t^*]$. Fazendo $\sigma = r - t$ temos $\sigma \geq 0$ $(r \geq t^* > t)$ e $r = t + \sigma$. Daí, pelo Lema 3.6

$$\|x - y_0\|_2 = \|S(t)b - S(t)S(\sigma)z^*\|_2 \leq e^{-C_2 t}\|b - S(\sigma)z^*\|_2,$$

onde $C_2 = 1 - M\|J\|_1$. Pela Observação 3.3 segue que $S(\sigma)z^* \in \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$ (lembre que $\mathcal{M}^* \subset \overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}$). Logo,

$$\|b - S(\sigma)z^*\| \leq \operatorname{diam}\left(\overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}\right).$$

Definindo $\alpha_1 = \operatorname{diam}\left(\overline{\mathcal{B}_1}^{L^2(\mathbb{S}^1)}\right)$ segue que

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq \|x - y_0\|_2 \leq \alpha_1 e^{-C_2 t}.$$

Daí,

$$\sup_{x \in S(t)\mathcal{B}_1} \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq \alpha_1 e^{-C_2 t},$$

isto é,

$$\operatorname{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha_1 e^{-C_2 t}.$$

Agora suponha $t \in [t^*, 2t^*]$. Seja $x \in S(t)\mathcal{B}_1$, isto é, $x = S(t)b$ com $b \in \mathcal{B}_1$. Dado $z^* \in \mathcal{M}^*$ temos $\overline{y} := S(t)z^* \in \mathcal{M}^*$. Assim, usando o Lema 3.6,

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq \|x - \overline{y}\|_2 = \|S(t)b - S(t)z^*\|_2 \leq e^{-C_2 t}\|b - z^*\|_2 \leq \alpha_1 e^{-C_2 t}.$$

Daí,

$$\sup_{x \in S(t)\mathcal{B}_1} \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq \alpha_1 e^{-C_2 t},$$

ou seja,

$$\operatorname{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)} \left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha_1 e^{-C_2 t}.$$

Finalmente, suponha $t > 2t^*$. Como neste caso $t > t^*$, podemos escrever

$$t = nt^* + \sigma_1$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_1 \in [0, t^*]$. Mas, sendo $t > 2t^*$ devemos ter $n \geq 2$. Desse modo, escrevendo

$$t = (n-1)t^* + t^* + \sigma_1$$

e definindo $m := n - 1$ e $\sigma = t^* + \sigma_1$, vemos que

$$t = mt^* + \sigma,$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in [t^*, 2t^*]$. Sejam $x \in S(t)\mathcal{B}_1$, digamos $x = S(t)b_1$ com $b \in \mathcal{B}_1$ e $z^* \in \mathcal{M}^*$. Defina $\overline{y} = S(\sigma)z^*$. Note que $\overline{y} \in \mathcal{M}$ e

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq \|x - \overline{y}\|_2 = \|S(\sigma)S(mt^*)b - S(\sigma)z^*\|_2 \leq e^{-C_2\sigma}\|S(mt^*) - z^*\|_2.$$

Pela arbitrariedade de $z^* \in \mathcal{M}^*$ segue que

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq e^{-C_2\sigma} \inf_{z^* \in \mathcal{M}^*} \|S(mt^*) - z^*\|_2 \leq e^{-C_2\sigma} \sup_{z \in S(mt^*)\mathcal{B}_1} \inf_{z^* \in \mathcal{M}^*} \|z - z^*\|_2.$$

Logo,

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq e^{-C_2\sigma} \operatorname{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)} \left(S(mt^*)\mathcal{B}_1, M^*\right).$$

Por (3.59) resulta que

$$\inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|_2 \leq e^{-C_2\sigma} \alpha^* e^{-\omega^* m}$$

e como $\sigma > t^*$ vem que

$$\inf_{y\in\mathcal{M}} \|x-y\|_2 \leq \alpha^* e^{-C_2 t^*} e^{-\omega^* m}.$$

Pela arbitrariedade de $x \in S(t)\mathcal{B}_1$ vem que

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha^* e^{-C_2 t^*} e^{-\omega^* m}.$$

Observe que

$$t = mt^* + \sigma \leq mt^* + 2t^* \Rightarrow -mt^* \leq -t + 2t^* \Rightarrow -m \leq -\frac{t}{t^*} + 2$$
$$\Rightarrow -m\omega^* \leq -\frac{\omega^*}{t^*}t + 2\omega^*.$$

Sendo assim,

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha^* e^{-C_2 t^*} e^{-\frac{\omega^*}{t^*}t} e^{2\omega^*}.$$

Definindo $\alpha_2 := \alpha^* e^{-C_2 t^*} e^{2\omega^*}$ e $\omega_2 := \dfrac{\omega^*}{t^*}$ temos

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha_2 e^{-\omega_2 t}.$$

Por fim, considerando

$$\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1 \ \text{ e } \ \omega := \min\{\omega_1, \omega_2\}$$

obtemos

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}\right) \leq \alpha e^{-\omega t},$$

para todo $t \geq 0$. ■

Lema 3.13 *Para todo subconjunto limitado B de $L^2(\mathbb{S}^1)$, existe uma constante $C_1(B) \geq 0$ dependendo de B, tal que para todo $t \geq 0$,*

$$dist_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)B, \mathcal{B}_1\right) \leq C_1(B) e^{-C_2 t}.$$

Demonstração: Seja B um subconjunto limitado de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Fixe $t \geq 0$ e seja $b \in S(t)B$, digamos $b = S(t)x$ com $x \in B$. Então,

$$\inf_{y\in\mathcal{B}_1} \|b-y\|_2 = \inf_{y\in\mathcal{B}_1} \|S(t)x-y\|_2.$$

Dado $z \in \mathcal{B}_1$ temos para todo $y \in \mathcal{B}_1$

$$\|S(t)x - y\|_2 \leq \|S(t)x - S(t)z\|_2 + \|S(t)z - y\|_2.$$

Pelo Lema 3.6,

$$\|S(t)x - y\|_2 \leq e^{-(1-M\|J\|_1)t}\|x - z\|_2 + \|S(t)z - y\|_2.$$

Se $\overline{C_1}(B)$ é uma cota superior para B temos ainda

$$\|x - z\|_2 \leq \|x\|_2 + \|z\|_2 \leq \overline{C_1}(B) + \frac{\tau}{\pi} r_1$$

Definindo $C_1(B) := \overline{C_1}(B) + \dfrac{\tau}{\pi} r_1$ temos

$$\|S(t)x - y\|_2 \leq C_1(B) e^{-(1-M\|J\|_1)t} + \|S(t)z - y\|_2,$$

para todo $y \in \mathcal{B}_1$. Daí,

$$\inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)x - y\|_2 \leq C_1(B) e^{-(1-M\|J\|_1)t} + \inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)z - y\|_2.$$

Desde que $z \in \mathcal{B}_1$ e pelo Lema 3.10 $\mathcal{B}_1$ é positivamente invariante por S, temos $S(t)z \in \mathcal{B}_1$. Logo,

$$\inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)z - y\|_2 \leq \|S(t)z - S(t)z\|_2 = 0$$

o que implica em

$$\inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)z - y\|_2 = 0.$$

Portanto,

$$\inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)x - y\|_2 \leq C_1(B) e^{-(1-M\|J\|_1)t}$$

e consequentemente,

$$\sup_{b \in S(t)B} \inf_{y \in \mathcal{B}_1} \|S(t)x - y\|_2 \leq C_1(B) e^{-(1-M\|J\|_1)t},$$

ou seja,

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)B, \mathcal{B}_1\right) \leq C_1(B) e^{-C_2 t}.$$

$\blacksquare$

Corolário 3.5 *O conjunto $\mathcal{M}$ dado no Teorema 3.2 é um atrator exponencial para o semigrupo S gerado pelas soluções da equação* (3.7).

Demonstração: Pelo Lema 3.6

$$d(S(t)u_1, S(t)u_2) \leq Ce^{-(1-M\|J\|_1)t} d(u_1, u_2),\ \forall\ u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{S}^1), \tag{3.61}$$

onde $C = 1$. Dado $B \subset L^2(\mathbb{S}^1)$ limitado, pelo Lema 3.13 existe $C_1(B) \geq 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)B, \mathcal{B}_1\right) \leq C_1(B)e^{-(1-M\|J\|_1)t},\ \forall\ t \geq 0. \tag{3.62}$$

Pelo Teorema 3.2, existem $\alpha \geq 0$ e $\omega > 0$ tais que,

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}(S(t)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}) \leq \alpha e^{-\omega t},\ \forall\ t \geq 0. \tag{3.63}$$

Aplicando o Teorema 2.3 com $K = 1 - M\|J\|_1$, $\alpha_1 = 1 - M\|J\|_1$, $C = 1$, $C_1 = C_1(B)$, $C_2 = \alpha$, $\alpha_2 = \omega$, $M_1 = B$, $M_2 = \mathcal{B}_1$ e $M_3 = \mathcal{M}$ obtemos

$$\mathrm{dist}_{L^2(\mathbb{S}^1)}\left(S(t)B, \mathcal{M}\right) \leq C'(B)e^{-\alpha' t},\ \forall\ t \geq 0,$$

onde

$$C'(B) = C_1(B) + \alpha \quad \text{e} \quad \alpha' = \min\left\{1 - M\|J\|_1, \frac{\omega}{2}\right\},$$

e portanto, o resultado fica demonstrado. ■

Corolário 3.6 *O atrator global $\mathcal{A}$ dado no Teorema 3.1 possui dimensão fractal finita.*

Demonstração: Consequência imediata do Corolário 3.5 e da Observação 2.2. ■

Apêndice A

Resultados Complementares

A.1 Conjuntos Compactos em Espaços Métricos

Definição A.1 *Um subconjunto A de um espaço métrico (X,d) é dito totalmente limitado quando, para todo $\varepsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tais que*

$$A \subset B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n,\varepsilon).$$

Proposição A.1 *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico (X,d) é totalmente limitado.*

Demonstração: Suponha que K não é totalmente limitado. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, dado $x_1 \in K$

$$K \not\subset B(x_1,\varepsilon).$$

Escolhendo $x_2 \in K \backslash B(x_1,\varepsilon)$

$$K \not\subset B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon).$$

Da mesma forma, escolhendo $x_3 \in K \backslash (\bigcup_{i=1}^{2} B(x_i,\varepsilon))$

$$K \not\subset B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup B(x_3,\varepsilon).$$

Prosseguindo com este raciocínio, obtemos uma sequência $(x_n) \subset K$ tal que, $x_1 \in K$ e

$$x_n \in K \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\varepsilon) \right), \ \forall n \geq 2.$$

Como K é compacto, existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n), convergindo para um ponto $p \in K$. Daí, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq j_0 \Rightarrow x_{n_j} \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Desde que os pontos de (x_n) são todos distintos, a bola $B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ contém infinitos pontos de (x_{n_j}). Considere então $x_r, x_s \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ com $r < s$. Assim, $1 \leq r \leq s-1$ e

$$x_s \in K \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{s-1} B(x_i, \varepsilon)\right) \Rightarrow x_s \notin B(x_r, \varepsilon).$$

Por outro lado,

$$d(x_s, x_r) \leq d(x_s, p) + d(x_r, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que implica em $x_s \in B(x_r, \varepsilon)$, um absurdo. ■

Lema A.1 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Se $K \subset X$ é compacto e V é uma vizinhança do zero, então existe $Y \subset K$ finito tal que $K \subset Y + V$.*

Demonstração: Se V é uma vizinhança do zero, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset V$. Como K é compacto, K é totalmente limitado. Assim, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ tais que

$$K \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Defina $Y := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dado $x \in K$ tem-se $x \in B(x_i, \varepsilon)$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Seja $y = x - x_i$. Temos

$$\|y\| = \|x - x_i\| < \varepsilon,$$

ou seja, $y \in B(0, \varepsilon)$. Assim,

$$x = x_i + y \Rightarrow x \in Y + B(0, \varepsilon) \Rightarrow x \in Y + V.$$

Portanto $K \subset Y + V$. ■

Antes de enunciarmos o próximo resultado, lembremos da seguinte definição:

Definição A.2 *Os espaço métricos nos quais toda sequência de Cauchy é convergente são ditos espaços métricos completos.*

Teorema A.1 (Teorema da Interseção de Cantor) *Sejam* (X, d) *um espaço métrico completo e* $\{F_n\} \subset X$ *uma sequência decrescente de conjuntos não vazios fechados em* X *tais que* $\lim_{n\to\infty}(\text{diam } F_n) = 0$. *Então a interseção* $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *contém um único ponto.*

Demonstração: Vejamos inicialmente que $F \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha $x_n \in F_n$ formando a sequência (x_n). Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty}(\text{diam } F_n) = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \text{diam } F_n < \varepsilon.$$

Sejam $n, m \geq n_0$, digamos $m \geq n$. Sendo $\{F_n\}$ decrescente, temos $F_m \subset F_n$ de modo que $x_m \in F_n$. Daí,

$$d(x_n, x_m) \leq \sup_{x,y\in F_n} d(x, y) = \text{diam } F_n < \varepsilon.$$

Assim $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $n, m \to 0$, ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Desde que X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Agora, tomado $j \in \mathbb{N} \in \mathbb{N}$, para $n \geq j$ temos que $F_n \subset F_j$ e portanto $x_n \in F_j$. Daí $(x_n)_{n\geq j} \subset F_j$. Uma vez que F_j é fechado e $(x_n)_{n\geq j}$ converge para x segue que $x \in F_j$. Pela arbitrariedade de $j \in \mathbb{N}$ resulta que $x \in F$ e portanto $F \neq \emptyset$.

Agora, se $y \in X$ também pertence a F então dado $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in F_n$. Daí,

$$d(x, y) \leq \sup_{a,b\in F_n} d(a, b) = \text{diam } F_n$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos $d(x, y) = 0$ e portanto $x = y$. ∎

Teorema A.2 *Todo espaço métrico completo e totalmente limitado é compacto.*

Demonstração: Sejam (X, d) um espaço métrico, (x_n) uma sequência em X e $Y = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Se Y for finito, então algum termo da sequência (x_n) se repete infinitas vezes e, desta forma, ela possui alguma subsequência convergente. Suponhamos então que Y seja infinito. Sendo X totalmente limitado, existem $y_1, y_2, ..., y_k \in X$ tais que

$$X \subset B(y_1, 1/4) \cup B(y_2, 1/4) \cup \cdots B(y_k, 1/4).$$

Sendo assim,

$$Y \subset B(y_1, 1/4) \cup B(y_2, 1/4) \cup \cdots B(y_k, 1/4)$$

e então, para algum dos conjuntos $B(y_i, 1/4)$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ possui infinitos pontos de (x_n). Podemos supor sem perca de generalidade que $B(y_1, 1/4)$ é um tal conjunto. Definimos então

$$F_1 := \overline{B(y_1, 1/4) \cap Y}.$$

Note que F_1 é fechado e que (para a sentença abaixo lembre que os diâmetros de um conjunto e do seu fecho são iguais)

$$\text{diam } F_1 = \text{diam } (B(y_1, 1/4) \cap Y) \leq \frac{1}{2}.$$

Agora, como $F_1 \subset X$, temos que F_1 é totalmente limitado. Então existem $a_1, ..., a_r \in F_1$ tais que

$$F_1 \subset B(a_1, 1/8) \cup B(a_2, 1/8) \cup \cdots B(a_r, 1/8).$$

Desde que $B(y_1, 1/4) \cap Y$ é infinito e está contido em F_1, tem-se que F_1 contém infinitos pontos de Y. Daí, algum dos conjuntos $B(a_i, 1/8)$ contém infinitos pontos de $F_1 \cap Y$, digamos $B(a_1, 1/8)$. Defina

$$F_2 := \overline{B(a_1, 1/8) \cap F_1 \cap Y}.$$

Note que F_2 é fechado, está contido em F_1 e

$$\text{diam } F_2 = \text{diam } (B(a_1, 1/8) \cap F_1 \cap Y) \leq \frac{1}{4}.$$

Analogamente, F_2 é totalmente limitado de forma que existem $b_1, ..., b_p \in X$ tais que $F_2 \subset \bigcup B(b_i, 1/16)$. Como $B(a_1, 1/8) \cap F_1 \cap Y$ é infinito e está contido em F_2, tem-se que F_2 contém infinitos pontos de $F_1 \cap Y$. Daí, algum dos conjuntos $B(b_i, 1/16)$, digamos $B(b_1, 1/16)$, contém infinitos pontos de $F_2 \cap (F_1 \cap Y)$. Defina

$$F_3 := \overline{B(b_1, 1/16) \cap F_2 \cap F_1 \cap Y}.$$

Claramente F_3 é fechado, está contido em F_2 e

$$\text{diam } F_3 \leq \frac{1}{8}.$$

Prosseguindo de forma indutiva, podemos definir uma sequência F_k de conjuntos fechados em X, tais que $F_{k+1} \subset F_k$, $F_k \cap Y$ é infinito, e diam $F_k \leq \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim sendo,

$$\lim_{k \to \infty} \text{diam } F_k = 0.$$

Pelo Teorema A.1, existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \{x\}.$$

Agora, formemos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n), escolhendo para cada $k \in \mathbb{N}$ um único $x_{n_k} \in F_k \cap Y$. Como $x \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$d(x, x_{n_k}) \leq \text{diam } F_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Segue, pelo Teorema do Sanduíche que $d(x, x_{n_k}) \to 0$ e, portanto, $x_{n_k} \to x$, concluindo a demonstração. ∎

Definição A.3 *Se A e B são subconjuntos de um espaço métrico (X, d), definimos a distância entre A e B por*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b); \ a \in A \ e \ b \in B\}.$$

Proposição A.2 *Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 subconjuntos de um espaço métrico (X, d) tais que $A_1 \subset A_2$ e $B_1 \subset B_2$. Então, $d(A_1, B_1) \geq d(A_2, B_2)$.*

Demonstração: Note que

$$\{d(x, y); \ x \in A_1 \text{ e } y \in B_1\} \subset \{d(w, z); \ w \in A_2 \text{ e } z \in B_2\}.$$

Pela definição de ínfimo segue que

$$\inf\{d(w, z); \ w \in A_2 \text{ e } z \in B_2\} \leq \inf\{d(x, y); \ x \in A_1 \text{ e } y \in B_1\},$$

ou seja, $d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$. ∎

Proposição A.3 *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d). Se $A \subset M$, então existe $p \in K$ tal que $d(p, A) = d(K, A)$.*

Demonstração: Ver Domingues [4]. ∎

Corolário A.1 *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d) e seja $A \subset M$ um subconjunto fechado tal que $K \cap A = \emptyset$. Então $d(K, A) > 0$.*

Demonstração: Ver Domingues [4]. ∎

Corolário A.2 *Se K e L são subconjuntos compactos de um espaço métrico (X, d), então existem $p \in K$ e $q \in L$ tais que $d(K, L) = d(p, q)$.*

Demonstração: Ver Domingues [4]. ∎

A.2 Conjuntos Convexos

Ao longo desta seção, a menos de menção contrária, X será sempre um espaço vetorial. Aqui, nossa principal referência é Aliprantis (ver [2]).

Definição A.4 *Um subconjunto C de X é dito convexo quando, para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$ tem-se $tx + (1-t)y \in C$.*

Exemplo A.1 *Qualquer subespaço de X é um conjunto convexo. Se X for um espaço vetorial normado e $a \in X$ então, para qualquer $r > 0$ a bola aberta centrada em a com raio r, $B(0,r)$, é um conjunto convexo.*

Lema A.2 *Um subconjunto $C \subset X$ é convexo se, e somente se, dados $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset C$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ escalares não negativos com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in C$.*

Uma combinação linear nas condições acima é chamada *combinação convexa* e os coeficientes podem ser chamados de *pesos*.

Demonstração do Lema A.2: ($\Leftarrow$) Supondo que C contém todas as combinações convexas de seus elementos, em particular C contém todas as combinações da forma $tx + (1-t)y$, onde $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$. Logo C é convexo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que C é convexo e mostremos que toda combinação convexa de elementos de C pertence a C. Para isto, usaremos indução sobre o número n de termos da combinação. Para $n = 1$ o resultado é óbvio pois para $\alpha_1 = 1$ e $x_1 \in C$ tem-se sempre $\alpha_1 x_1 \in C$. Suponha que o fato seja válido para um certo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $\{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\} \subset C$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1} \geq 0$ tais que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Se $\alpha_{n+1} = 1$ então $\alpha_i = 0$ para todo $i \in 1, 2, ..., n$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x_{n+1} \in C$$

e então o resultado fica demonstrado. Assuma que $\alpha_n \neq 1$, ou seja, $\alpha_n < 1$. Neste caso, $1 - \alpha_n > 0$ e assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} &= (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} \\ &= (1 - \alpha_{n+1}) y + \alpha_{n+1} x_{n+1},\end{aligned}$$

onde
$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} x_i.$$
Observe que
$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} = 1.$$
Pela hipótese de indução resulta que $y \in C$ e como C é convexo,
$$(1-\alpha_{n+1})y + \alpha_{n+1}x_{n+1} \in C,$$
ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \in C$ e portanto o lema está demonstrado. ■

Proposição A.4 *Se X é um espaço vetorial, valem:*
(i) A interseção de uma família qualquer de subconjuntos convexos de X é um conjunto convexo.
(ii) Um conjunto $C \subset X$ é convexo se, e somente se, $\alpha C + \beta C = (\alpha+\beta)C$ para quaisquer escalares não negativos α e β.
(iii) A soma de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.
(iv) Se X é um espaço normado e $C \subset X$ é convexo, então $\overline{C}$ também é convexo.

Demonstração: (i) Considere uma família $\{C_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de subconjuntos convexos de X e defina $C := \displaystyle\bigcap_{\lambda\in L} C_\lambda$. Fixe $\lambda \in L$. Dados $x, y \in C$ temos $x, y \in C_\lambda$ e sendo C_λ convexo, segue que $tx + (1-t)y \in C_\lambda$, qualquer que seja $t \in [0,1]$. Pela arbitrariedade de λ temos
$$tx + (1-t)y \in C, \ \forall t \in [0,1].$$

Como x e y foram tomados arbitrariamente em C, concluímos que C é convexo.
(ii) Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, o resultado é imediato. Por isso, assumiremos que $\alpha, \beta \neq 0$. Suponha inicialmente que C é convexo. Dado $z \in \alpha C + \beta C$, existem $x, y \in C$ tais que $z = \alpha x + \beta y$. Seja
$$w := \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y.$$
Como $x, y \in C$ e
$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$$
segue pelo Lema A.4 que $w \in C$. Agora, note que
$$(\alpha+\beta)w = \alpha x + \beta y = z.$$

Portanto $z \in (\alpha+\beta)C$ verificando a inclusão

$$\alpha C + \beta C \subset (\alpha+\beta)C.$$

Agora, se $z \in (\alpha+\beta)C$ temos $\alpha = \alpha w + \beta w$ com $w \in C$ e isto verifica a inclusão contraria, nos dando a igualdade

$$\alpha C + \beta C = (\alpha+\beta)C.$$

Reciprocamente, se vale a igualde $\alpha C + \beta C = (\alpha+\beta)C$ então, para qualquer $t \in [0,1]$ temos $tC + (1-t)C = [t + (1-t)]C = C$. Logo, dados $x, y \in C$ tem-se $tx + (1-t)y \in C$ e portanto C é convexo.

(iii) Sejam $A, B \subset X$ conjuntos convexos. Considere $x, y \in A+B$ e $t \in [0,1]$. Existem $x_A, y_A \in A$ e $x_B, y_B \in B$ tais que $x = x_A + x_B$ e $y = y_A + y_B$. Daí, pela convexidade de A e de B,

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= tx_A + tx_B + (1-t)y_A + (1-t)y_B \\ &= \underbrace{tx_A + (1-t)_A}_{\in A} + \underbrace{tx_B + (1-t)y_B}_{\in B} \end{aligned}$$

de onde segue que

$$tx + (1-t)y \in A+B.$$

(iv) Sejam $x, y \in \overline{C}$ e $t \in [0,1]$. Existem sequências $(x_n), (y_n) \subset C$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Considerando $z_n := tx_n + (1-t)y_n$ temos que $z_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois C é convexo e $x_n, y_n \in C$) e $z_n \to [tx + (1-t)y]$. Logo, $tx + (1-t)y \in \overline{C}$ mostrando que $\overline{C}$ é convexo. ∎

Dado $A \subset X$, a família dos subconjuntos convexos de X que contém A é não vazia, uma vez que o própria X é um desses conjuntos (lembre que estamos considerando X um espaço vetorial). Pela Proposição A.4, a interseção $\mathscr{A}$ de todos os convexos que contém A é um conjunto convexo. Além disto, se C é convexo contendo A, claramente $\mathscr{A} \subset C$. Isto nos diz que A é minimal dentre os conjuntos convexos que contém A. Ademais, é claro que $\mathscr{A}$ é único nestas condições. Diante disto, faz sentido a seguinte definição.

Definição A.5 *Dado um conjunto $A \subset X$, definimos a casca convexa de A, denotada por* conv A *(ou ainda* co$A$*) como sendo o menor conjunto convexo de X que contém A.*

Proposição A.5 *Dado $A \subset X$ tem-se*

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \ n \in \mathbb{N}, \ x_i \in A, \ \alpha_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ e \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Em outros termos, conv A *é conjunto de todas as combinações convexas possíveis de elementos de A.*

Demonstração: Seja

$$B := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \ n \in \mathbb{N}, \ x_i \in A, \ \alpha_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Dados $x, y \in B$, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

onde $x_i, y_j \in A$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$ e,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1.$$

Dado $t \in [0, 1]$ temos

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t)\beta_j y_j.$$

Defina λ_l e z_l, $l \in \{1, 2..., n+m\}$ da seguinte maneira:

- para $l \in 1, 2..., n$ ponha $\lambda_l = t\alpha_l$ e $z_l = x_l$;
- para $l = n + j, \ j = 1, 2, ..., m$ ponha $\lambda_l = (1-t)\beta_j$ e $z_l = y_j$.

Desta forma, temos

$$tx + (1-t)y = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l z_l + \sum_{l=n+1}^{n+m} \lambda_l z_l = \sum_{l=1}^{n+m} \lambda_l z_l.$$

Observe que $z_l \in A$ e $\lambda_l \geq 0$ para todo $l \in \{1, 2, ..., n+m\}$. Além disto,

$$\sum_{l=1}^{n+m} \lambda_l = t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-t) \sum_{j=1}^{m} \beta_j = t + (1-t) = 1.$$

Portanto, $tx + (1-t)y \in B$ e isto mostra que B é convexo. Ademais, dado $x \in A$ claramente $x \in B$, ou seja, $A \subset B$. Sendo assim, B é um convexo contendo A e por definição de casca convexa resulta que

$$\text{conv } A \subset B.$$

Agora, como conv A é convexo e contém A, deve conter também todas as combinações convexas de elementos de A. Logo,

$$B \subset \text{conv } A.$$

Portanto, conv $A = B$. ■

Lema A.3 *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \subset X$ conjuntos convexos não vazios. A casca convexa da união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ satisfaz*

$$\text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ x_i \in A_i\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ e\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Em particular, se cada A_i é compacto então conv $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ *é também compacto.*

Demonstração: Sejam $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e

$$C := \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ x_i \in A_i\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Evidentemente

$$C \subset \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i :\ m \in \mathbb{N},\ x_i \in A,\ \alpha_i \geq 0\ \forall i \in \{1, 2, ..., m\} \text{ e } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\right\}$$

e então, pela Proposição A.5 segue que

$$C \subset \text{conv } A.$$

Agora, dados $x, y \in C$ temos

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ e } y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

onde, $\lambda_i, \alpha_i \geq 0$ e $x_i, y_i \in A_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e mais,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Se $t \in [0, 1]$ tem-se

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (1-t)\alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} [t\lambda_i x_i + (1-t)\alpha_i y_i].$$

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$[t\lambda_i x_i + (1-t)\alpha_i y_i] \in t\lambda_i A_i + (1-t)\alpha_i A_i.$$

Como A_i é convexo, pela Proposição A.4 resulta que

$$[t\lambda_i x_i + (1-t)\alpha_i y_i] \in [t\lambda_i + (1-t)\alpha_i]A_i, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Sendo assim, para cada $i\{1, 2, ..., n\}$ existe $z_i \in A_i$ tal que

$$[t\lambda_i x_i + (1-t)\alpha_i y_i] = [t\lambda_i + (1-t)\alpha_i]z_i.$$

Logo,

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n}[t\lambda_i + (1-t)\alpha_i]z_i.$$

Perceba que $[t\lambda_i + (1-t)\alpha_i] \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e além disso,

$$\sum_{i=1}^{n}[t\lambda_i + (1-t)\alpha_i] = t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = t + (1-t) = 1.$$

Portanto, $tx + (1-t)y \in C$ o que nos diz que C é convexo. Como C contém cada A_i vemos que

$$A \subset C$$

e pela definição de casca convexa resulta que

$$\text{conv } A \subset C$$

e consequentemente, conv $A = C$.

Por fim assuma que cada A_i é compacto. Defina

$$f : \mathbb{R}^n \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to X$$

pondo

$$f(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,$$

onde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Considere o conjunto

$$K = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right\}.$$

Claramente K é limitado. Seja $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} = \big((\lambda_1^j, \lambda_2^j, ..., \lambda_n^j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em K com $\lambda_j \to \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Então para cada $i \in \{1, 2, .., n\}$ tem-se $\lambda_i \geq 0$ pois, do contrário, existiria $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_i^{j_0} < 0$, contrariando o fato de que $\lambda_{j_0} \in K$. Além disto, para cada $i = 1, 2, ..., n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lim_{j\to\infty} \lambda_i^j = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j = \lim_{j\to\infty} 1 = 1.$$

Logo $\lambda \in K$ e portanto K é fechado. Concluímos assim que K é compacto. Como f é contínua e $K \times A_1 \times \cdots \times A_n$ é um compacto, segue que $f(K \times A_1 \times \cdots \times A_n)$ é um compacto em X. Do que já foi demonstrado obtemos

$$f(K \times A_1 \times \cdots \times A_n) = \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

o que nos dá o desejado. ■

Corolário A.3 *A casca convexa de um subconjunto finito de X é um compacto.*

Demonstração: Seja $Y = \{x_1, ..., x_n\} \in X$. Notando que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ e que cada $\{x_i\}$ é um conjunto convexo e compacto, o resultado segue imediatamente do Lema A.3. ■

Lema A.4 *Suponha que X é um espaço vetorial normado. Se V é um aberto em X com $0 \in V$, então existe um aberto convexo W com $0 \in W$ tal que $W + W \subset V$.*

Demonstração: Com efeito, a aplicação $\varphi : X \times X \to X$ dada por $\varphi(x, y) = x + y$ é contínua e, em particular, contínua em $(0, 0)$. Assim, existe U aberto em $X \times X$ com $(0, 0) \in U$ tal que $\varphi(U) \subset V$. Como a coleção $\mathcal{B} = \{G \times H;\ G \text{ e } H \text{ abertos em } X\}$ é uma base para a topologia de $X \times X$, existem $G_0, H_0 \subset X$ abertos com $(0, 0) \in G_0 \times H_0$, tais que $G_0 \times H_0 \subset U$. Mas,

$$0 \in G_0 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0;\ B(0, \varepsilon_1) \subset G_0$$

e

$$0 \in H_0 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0;\ B(0, \varepsilon_2) \subset H_0.$$

Sejam $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $W := B(0, \varepsilon)$. Temos então que W é um aberto convexo, com $0 \in W$, $W \subset G_0$ e $W \subset H_0$. Assim $W \times W \subset U$ de sorte que $\varphi(W \times W) \subset V$, isto é,

$$W + W \subset V.$$

■

Definição A.6 *Seja X um espaço vetorial normado. Definimos a casca convexa fechada de um conjunto $A \subset X$, denotada por $\overline{\text{conv}}\, A$ ou por $\overline{\text{co}}A$, como sendo o menor conjunto convexo fechado que contém A.*

Seja A um subconjunto de um espaço vetorial normado X. Pela Proposição A.4 temos que $\overline{\text{conv } A}$ é um convexo fechado que contém A. Logo, $\overline{\text{conv}}\, A \subset \overline{\text{conv } A}$. Por outro lado, sendo conv A o menor convexo que contém A, temos

$$\text{conv } A \subset \overline{\text{conv}}\, A \Rightarrow \overline{\text{conv } A} \subset \overline{\overline{\text{conv}}\, A} \Rightarrow \overline{\text{conv } A} \subset \overline{\text{conv}}\, A.$$

Portanto,

$$\overline{\text{conv}}\, A = \overline{\text{conv } A}.$$

Observação A.1 Sejam $A, B \subset X$. Note que conv $(A + B) \subset$ conv $A +$ conv B. De fato, como $A \subset$ conv A e $B \subset$ conv B temos que $A + B \subset$ conv $A +$ conv B. Pela Proposição A.4, conv $A +$ conv B é convexo e então, por definição de casca convexa, devemos ter conv $(A + B) \subset$ conv $A +$ conv B. Além disto, se $A \subset B$ então conv $A \subset$ conv B. Realmente, conv B é um convexo que contém B e portanto contém A. Sendo conv A o menor convexo que contém A, segue que conv $A \subset$ conv B. Estes fatos serão utilizados na demonstração do seguinte teorema.

Teorema A.3 *Se X é um espaço de Banach e $K \subset X$ é compacto, então a casca convexa fechada de K, $\overline{\text{conv } K}$, é um conjunto compacto.*

Demonstração: Como $\overline{\text{conv } K}$ é um fechado contido em espaço métrico completo, temos que $\overline{\text{conv } K}$ com a métrica induzida de X é um espaço métrico completo. Pelo Teorema A.2 basta mostrar que $\overline{\text{conv } K}$ é totalmente limitado. Dado $\varepsilon > 0$ pelo Lema A.4 existe uma vizinhança convexa W de 0 tal que $W + W \subset B(0, \varepsilon)$. Desde que K é compacto, pelo Lema A.1 existe um conjunto finito $Y \subset K$ tal que $K \subset Y + W$. Pela Observação A.1 temos

$$\text{conv } K \subset \text{conv } (Y + W) \subset \text{conv } Y + \text{conv } W.$$

Como W é convexo, conv $W = W$ de sorte que

$$\text{conv } K \subset \text{conv } Y + W.$$

Pelo Corolário A.3 conv Y é compacto e, sendo W vizinhança do 0, o Lema A.1 nos dá a existência de um conjunto finito $F \subset \text{conv } Y \subset \text{conv } K$, tal que conv $Y \subset F + W$. Logo,

$$\text{conv } K \subset F + W + W \subset F + B(0, \varepsilon).$$

Escrevendo $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ obtemos $F + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Daí

$$\text{conv } K \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

e portanto conv K é totalmente limitado.

Afirmação A.1 Se $A \subset X$ é totalmente limitado então $\overline{A}$ também é totalmente limitado.

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Sendo A totalmente limitado, existem $x_1, ..., x_n \in A$ tais que

$$A \subset B(x_1, \varepsilon/2) \cup B(x_2, \varepsilon/2) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon/2).$$

Daí,

$$\overline{A} \subset \overline{B(x_1, \varepsilon/2)} \cup \overline{B(x_2, \varepsilon/2)} \cup \cdots \cup \overline{B(x_n, \varepsilon/2)}.$$

Dado $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\overline{B(x_i, \varepsilon/2)} = B[x_i, \varepsilon/2] \subset B(x_i, \varepsilon).$$

Logo,

$$\overline{A} \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon$$

e portanto $\overline{A}$ é totalmente limitado. □

Da afirmação acima segue que $\overline{\text{conv } K}$ é totalmente limitado e Teorema fica demonstrado. ■

Uma versão mais generalizada do Teorema A.3 pode ser encontrada em Aliprantis (ver [2]).

A.3 Resultados sobre Diferenciação e Integração

Definição A.7 *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é absolutamente contínua quando, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda família finita de intervalos abertos dois a dois disjuntos, (a_1, b_1), $(a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$, contidos em $[a, b]$, se*

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Teorema A.4 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Sejam $I = [a,b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A função f é absolutamente contínua.*

(ii) *A função f é derivável q.s., f' é integrável e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt, \ \forall \ x \in [a,b].$$

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada em Rudin [19]. Capítulo 7.

O seguinte Teorema trata-se de uma versão mais geral do Teorema Fundamental do Cálculo, envolvendo derivadas de funções em espaço de Banach e a *integral de Bochner*. Tanto o Teorema quanto seu corolário podem ser encontrados em Lang e Melo (ver [11] e [16], respectivamente).

Teorema A.5 *Sejam $f : [a,b] \to X$ contínua e $F : [a,b] \to X$ diferenciável com $F' = f$. Então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Corolário A.4 *Se $f : [a,b] \to X$ é contínua e $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, então $F'(x) = f(x)$.*

Teorema A.6 *Sejam X um espaço de Banach, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to X$ uma função mensurável. Então f é Bochner integrável se, e somente se, a aplicação $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertence a $L^1(I)$, isto é, $\displaystyle\int_I \|f(t)\|_X \ dt < \infty$. Em caso afirmativo vale a desigualdade,*

$$\left\| \int_I f(t) \ dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| \ dt.$$

Teorema A.7 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, X, Y espaços de Banach e $f : I \to X$ uma função Bochner-integrável. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear contínua, então Tf é Bochner-Integrável e*

$$T \int_I f(t) \ dt = \int_I Tf(t) \ dt.$$

Demonstrações do Teorema A.7 em versões mais gerais podem ser encontradas em Hille e Yosida (ver [10] e [24], respectivamente).

O próximo resultado trata-se da Desigualdade de Gronwall, a qual é utilizado com frequência ao longo do trabalho para a obtenção de estimativas importantes.

Teorema A.8 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam α, β e δ funções contínuas definidas em um intervalo aberto $[a,b]$, tais que $\beta \geq 0$ e*

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)ds.$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}ds$$

Em particular, se $\alpha(x) = k$, onde k é uma constante, temos

$$\delta(x) \leq ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds}.$$

Para a demonstração do Teorema A.8, sugerimos Djairo (ver [8]).

Proposição A.6 *Sejam $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua e $\alpha, \beta \in L^1([a,b], \mathbb{R})$. Se para quase todo $t \in [a,b]$,*

$$u'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)u(t),$$

então para todo $t \in [a,b]$,

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t e^{\int_\tau^t \beta(s)ds}\alpha(\tau)d\tau.$$

Em particular, se α e β são constantes com $\beta \neq 0$ então, para todo $t \in [a,b]$,

$$u(t) \leq e^{(t-a)\beta}u(a) + \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{(t-a)\beta} - 1\right)$$

A Proposição anterior encontra-se demonstrada em Milani (ver [17]).

A.4 Existência e Unicidade para o Problema de Cauchy Autônomo em Espaços de Banach

Em toda esta seção, X será sempre um espaço de Banach com norma denotada por $\|\cdot\|$.

Preliminares

O próximo resultado diz que o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua.

Proposição A.7 *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas de um espaço topológico (Z, τ) em um espaço métrico (Y, d). Se (f_n) converge uniformemente para $g : Z \to Y$, então g é contínua.*

A ferramenta essencial para o principal resultado desta seção é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual enunciaremos abaixo.

Teorema A.9 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Sejam* (X, d) *um espaço métrico completo e* $F : X \to X$ *uma contração, isto é, existe* $0 \geq k < 1$

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Então existe um único ponto fixo p *para* F*, isto é,* $F(p) = p$*. Além disso,* p *é um atrator de* F*, isto é, para todo* $x \in X$ *a sequência* $x_n = F^n(x)$*, onde* $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$*, converge para* p *quando* $n \to \infty$*.*

Problema de Cauchy Autônomo

O principal objeto desta seção é o Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard, o qual fornece existência e unicidade de solução para o seguinte problema de valor inicial, ou Problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = F(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{A.1}$$

onde F é uma aplicação de X em X. Seguimos aqui os textos de Brezis e Melo (ver [3] e [16], respectivamente).

Definição A.8 *Uma função* $u \in C^1([0, \infty); X)$ *é dita ser solução do Problema* (A.1) *quando satisfaz as condições nele impostas.*

Lema A.5 *Supondo* F *contínua, encontrar uma solução para o problema* (A.1) *é equivalente à encontrar* $u \in C([0, \infty), X)$ *que satisfaça a equação integral*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds, \ \forall t \geq 0. \tag{A.2}$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Assuma que vale (A.1). Dado $t \geq 0$, pelo Teorema (A.5),

$$\int_0^t u'(s)ds = u(t) - u(0) = u(t) - u_0.$$

Daí,

$$u'(s) = F(u(s)) \Rightarrow \int_0^t u'(s)ds = \int_0^t F(u(s))ds \Rightarrow u(t) - u_0 = \int_0^t F(u(s))ds$$
$$\Rightarrow u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

($\Leftarrow$) Para ver a recíproca defina $G(t) := \displaystyle\int_0^t F(u(s))ds$, para todo $t \geq 0$. Desde que $F \circ u$ é contínua, pelo Corolário A.4 temos

$$G'(t) = F(u(t)),\ \forall t \geq 0.$$

Assim, derivando (A.2) com relação a t obtemos $u'(t) = F(u(t))$ e por um cálculo direto vê-se que $u(0) = u_0$. ■

Para uma constante $k \geq 0$, que será fixada posteriormente, defina o conjunto

$$Y := \left\{ u \in C([0,\infty), X);\ \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\}.$$

Claramente a função identicamente nula pertence a Y e por isso $Y \neq \emptyset$. Note ainda que, se $u \in Y$ então o conjunto $\{e^{-kt}\|u(t)\|,\ t \geq 0\}$ é limitado; neste caso existe $c > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq ce^{kt}$ para todo $t \geq 0$.

Lema A.6 *O conjunto Y é um subespaço vetorial de $C([0,\infty), X)$.*

Demonstração: Já foi comentado que $0 \in Y$. Agora, sejam $u, v \in Y$ e $c \in \mathbb{R}$. É claro que $cu + v \in C([0,\infty), X)$. Além do mais,

$$\|cu(t) + v(t)\| \leq |c|\|u(t)\| + \|v(t)\|,\ \forall t \geq 0$$

implica em

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|cu(t) + v(t)\| &\leq \sup_{t\geq 0}\left(e^{-kt}|c|\|u(t)\| + e^{-kt}\|v(t)\|\right)\\ &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}|c|\|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\|.\end{aligned}$$

Daí,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|cu(t) + v(t)\| \leq |c| \underbrace{\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|}_{<\infty} + \underbrace{\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\|}_{<\infty}.$$

Portanto, $cu + v \in Y$. ■

Lema A.7 *A função*

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_Y : & Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \|u\|_Y = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| \end{array}$$

é uma norma em Y.

Demonstração: Evidentemente $\|0\|_Y = 0$. Suponha que $u \in Y$ é tal que $\|u\|_Y = 0$, isto é,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| = 0. \tag{A.3}$$

Se existir $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $u(t_0) \neq 0$, então

$$\|u(t_0)\| > 0 \Rightarrow e^{-kt_0}\|u(t_0)\| > 0$$

o que contraria (A.3). Logo, $u \equiv 0$ e portanto,

$$\|u\|_Y = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0.$$

Agora, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$

$$\|cu\|_Y = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|cu(t)\| = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}|c|\|u(t)\| = |c| \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| = |c|\|u\|_Y.$$

Por fim, para qualquer $t \geq 0$ tem-se

$$\|u(t) + v(t)\| \leq \|u(t)\| + \|v(t)\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|u + v\|_Y &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t) + v(t)\| \leq \sup_{t\geq 0} \left(e^{-kt}\|u(t)\| + e^{-kt}\|v(t)\|\right)\\ &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\| = \|u\|_Y + \|v\|_Y.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_Y$ realmente define uma norma em Y. ∎

Observação A.2 *Note que, se $u \in Y$ então*

$$\|u(t)\| \leq e^{kt}\|u\|_Y, \ \forall t \geq 0.$$

De fato, se $u \in Y$ então, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}e^{-kt}\|u(t)\| &\leq \sup_{s\geq 0} e^{-ks}\|u(s)\| = \|u\|_Y\\ \Rightarrow &\|u(t)\| \leq e^{kt}\|u\|_Y.\end{aligned}$$

Lema A.8 *O par $(Y, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset Y$ uma sequência de Cauchy em Y. Dado $\varepsilon > 0$, fixe $t \geq 0$ e considere $\lambda := \varepsilon e^{-kt} > 0$. Existe $n_0 = n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Rightarrow \|u_n - u_m\|_Y < \lambda \\ &\Rightarrow \left(\sup_{s\geq 0} \|u_n(s) - u_m(s)\| \right) < \lambda. \end{aligned}$$

Particularmente temos

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 &\Rightarrow e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \lambda \Rightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\| < \lambda e^{kt} \\ &\Rightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\big(u_n(t)\big)$ é uma sequência de Cauchy em X. Como X é de Banach, existe $u_t \in X$ tal que $u_n(t) \to u_t$ quando $n \to \infty$.

A arbitrariedade do $t \geq 0$ considerado no raciocínio acima, nos permite definir a função

$$\begin{array}{rccl} u: & [0, \infty) & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & u(t) = u_t = \lim_{n\to\infty} u_n(t). \end{array}$$

Afirmamos que $u \in Y$. Para verificar isto, vejamos inicialmente a condição de limitação. Seja $\varepsilon > 0$. Como (u_n) é de Cauchy em Y, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall t \geq 0.$$

Sendo assim, fixado $n \geq n_1$ temos, para cada $t \geq 0$,

$$m \geq n_1 \Rightarrow e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e então, por propriedades dos limites,

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow &e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$n \geq n_1 \Rightarrow e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall t \geq 0. \tag{A.4}$$

Mas, dado $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$ tem-se

$$e^{-kt}\left(\|u(t)\| - \|u_n(t)\|\right) \leq e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\|.$$

Logo, para $n = n_1$ temos, por (A.4),

$$\begin{aligned}
&e^{-kt}\left(\|u(t)\| - \|u_{n_1}(t)\|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall t \geq 0 \\
\Rightarrow &e^{-kt}\|u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + e^{-kt}\|u_{n_1}(t)\|,\ \forall t \geq 0 \\
\Rightarrow &\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_{n_1}(t)\|.
\end{aligned}$$

Desde que $u_{n_1} \in Y$, segue que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty.$$

Para assegurar o que afirmamos devemos verificar ainda que u é contínua em $[0,\infty)$. Para tanto, considere $s \geq 0$ e fixe $T > s$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\varepsilon e^{-kT} > 0$ e (u_n) é de Cauchy, por um raciocínio análogo ao utilizado para a obtenção de (A.4), existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \Rightarrow e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon e^{-kT},\ \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&-T \leq -t \Rightarrow -kT \leq -kt \Rightarrow e^{-kT} \leq e^{-kt} \\
\Rightarrow &e^{-kT}\|u_n(t) - u(t)\| \leq e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\|,\ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
n \geq n_2 \Rightarrow &e^{-kT}\|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon e^{-kT},\ \forall t \in [0,T] \\
\Rightarrow &\|u_n(t) - u(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Portanto (u_n) converge uniformemente para u em $[0,T]$. Desde que u_n restrita a $[0,T]$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta da Proposição A.7 que u é contínua em $[0,T]$. Em particular u é contínua em s, mostrando o desejado.

Por fim, afirmamos que $u_n \to u$ em Y, quando $n \to \infty$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ já vimos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo (A.4). Desse modo,

$$\begin{aligned}
n \geq n_1 \Rightarrow &\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_n(t) - u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow &\|u_n - u\|_Y < \varepsilon.
\end{aligned}$$

De tudo isto, concluímos que Y é um espaço de Banach. ∎

Teorema A.10 (Cauchy, Lipschitz, Picard) *Sejam X um espaço de Banach e $F : X \to X$ uma aplicação Lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a $L \geq 0$, isto é,*

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\|, \ \forall u, v \in X.$$

Então, para todo $u_0 \in X$ o problema (A.1) *possui uma única solução.*

Demonstração: Pelo Lema A.5, encontrar uma solução de (A.1) equivale a encontrar uma função $u \in C([0, \infty), X)$ tal que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\ ds.$$

Dado $u \in Y$ defina

$$\begin{array}{rccl} \Phi_u : & [0, \infty) & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \Phi_u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t F(u(s))\ ds. \end{array}$$

Vamos mostrar que $\Phi_u \in Y$. Sendo F e u contínuas, o Corolário A.4 nos dá que Φ_u é diferenciável e portanto contínua. Agora, para cada $t \geq 0$, usando propriedades da integral, as hipóteses sobre F e a Observação A.2 temos,

$$\begin{aligned} \|\Phi_u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_0^t F(u(s))\ ds \right\| \\ &= \left\| u_0 + \int_0^t [F(u(s)) - F(0(s))]\ ds + \int_0^t F(0(s))\ ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(0)\| ds + \int_0^t \|F(0)\| ds \\ &\leq \|u_0\| + L \int_0^t \|u(s)\| ds + t\|F(0)\| \\ &\leq \|u_0\| + L \int_0^t e^{ks} \|u\|_Y ds + t\|F(0)\|. \end{aligned}$$

Fazendo $L_1 := L\|u\|_Y \geq 0$ vem

$$\begin{aligned} \|\Phi_u(t)\| &\leq \|u_0\| + L_1 \int_0^t e^{ks} ds + t\|F(0)\| \\ &\leq \|u_0\| + \frac{L_1}{k} \left(e^{kt} - 1 \right) + t\|F(0)\| \\ &\leq \|u_0\| + \frac{L_1}{k} e^{kt} + t\|F(0)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{-kt}\|\Phi_u(t)\| \leq e^{-kt}\|u_0\| + \frac{L_1}{k} + te^{-kt}\|F(0)\|. \tag{A.5}$$

Note que $te^{-kt} \to 0$ quando $t \to \infty$ e portanto $te^{-kt}\|F(0)\|$ é limitado. Perceba ainda que, para $t \geq 0$,

$$-kt \leq 0 \Rightarrow e^{-kt} \leq 1 \Rightarrow \|u_0\|e^{-kt} \leq \|u_0\| \Rightarrow \sup_{t\geq 0} \|u_0\|e^{-kt} < \infty.$$

Assim, por (A.5) segue que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\Phi_u(t)\| \leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_0\| + \frac{L_1}{k} + \sup_{t\geq 0} te^{-kt}\|F(0)\| < \infty.$$

Portanto, $\Phi_u \in Y$ qualquer que seja $u \in Y$. Podemos então definir a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & Y & \longrightarrow & Y \\ & u & \longmapsto & \Phi(u) = \Phi_u. \end{array}$$

Dados $u, v \in Y$, pelo Lema A.6, $u - v \in Y$. Daí, usando propriedades da integral, o fato de F ser Lipschitziana e a Observação A.2, temos para qualquer $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| &= \left\| \int_0^t F(u(s))ds - \int_0^t F(v(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t [F(u(s)) - F(v(s))]ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\, ds \\ &\leq \int_0^t L\|u(s) - v(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t Le^{ks}\|u - v\|_Y ds = L\|u - v\|_Y \int_0^t e^{ks} ds \\ &= L\|u - v\|_Y \frac{1}{k}(e^{kt} - 1) \\ &\leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y e^{kt}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} e^{-kt}\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y,\ \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_Y = \|\Phi_u - \Phi_v\|_Y = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_Y.$$

Escolhendo $k > L$ temos $\frac{L}{k} < 1$ e portanto Φ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema A.9), existe $u \in Y$ tal que $\Phi(u) = u$, ou seja, $\Phi_u = u$. Daí $u \in C([0,\infty), X)$ e, para todo $t \geq 0$,

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\ ds$$

e portanto u é solução do problema (A.1).

Para ver a unicidade, suponha que u_1 e u_2 são soluções do problema (A.1). Dado $t \geq 0$ temos

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| = \left\| \int_0^t F(u_1(s))ds - \int_0^t F(u_2(s))ds \right\| = \left\| \int_0^t [F(u_1(s)) - F(u_2(s))]ds \right\|$$
$$\Rightarrow \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \int_0^t L\|u_1(s) - u_2(s)\|ds.$$

Fixado $T > t$, podemos usar a Desigualdade de Gronwall (Teorema A.8), com $\delta(x) = \|u_1(x) - u_2(x)\|$, $\beta(x) = L$ e $\alpha(x) = 0$, para todo $x \in [0,T]$, obtendo

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq 0 \cdot \exp\left(\int_0^t L\ ds \right) = 0.$$

Logo, $\|u_1(t) - u_2(t)\| = 0$, mostrando que

$$u_1(t) = u_2(t),\ \forall t \geq 0,$$

de modo que $u_1 \equiv u_2$. ∎

A.5 Alguns Resultados Sobre Espaços L^p e Espaços de Sobolev

O seguintes resultados e suas demonstrações podem ser encontrados em [1], [3] ou [15].

Proposição A.8 *Sejam $k \geq 1$, $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g,$$

para todo α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.11 (Young) *Sejam* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *com* $1 \leq p \leq +\infty$. *Então, para quase todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *a função* $y \mapsto u(x-y)v(y)$ *é integrável em* $\mathbb{R}^n$ *e além disso,* $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema A.12 (Rellich-Kondrachov) *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é limitado e de classe* C^1. *Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned}
&\text{Se } p < n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*),\ \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\
&\text{Se } p = n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty). \\
&\text{Se } p > n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Adams, R.A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Aliprantis, C. D; Border, K. C. *Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's Guide*, 3ª ed., Springer, New York, 2007.

[3] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, 2010.

[4] Domingues, H.H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual, São Paulo, 1982.

[5] Efendiev, M., Miranville, A., Zelik, S.. *Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion systems in* $\mathbb{R}^3$. C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math. **330**(8), 713-718, 2000.

[6] Fabrie, P., Galusinski, C., Miranville, A., Zelik, S. *Uniform exponential attractors for a singularly perturbed damped wave equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems **10**(2), 211-238, 2004.

[7] Figueiredo, D.G.*Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[8] Figueiredo, D. G.; Neves, A.F. *Equações Diferenciais Aplicadas*, 3ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[9] Hale, K.J., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, No. 25, American Mathematical Society, Rhode Island, 1988.

[10] Hille, E. *Methods in Classical and Functional Analysis.* Addison-Wesley, 1972.

[11] Lang, S. Analysis II, Addison-Wesley, 1969.

[12] Lima, E.L. *Curso de Análise; Vol. 1*, 14ª.ed./Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

[13] Lima, E.L. *Espaços Métricos*; 3ª.ed./Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[14] Lipschutz, S. *Schaum's Outline of Theory and Problems of General Topology*, McGraw-Hill Book Company, United States of America, 1965.

[15] Medeiros, L.A.J.; Miranda, M.A.M., *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*, UFRJ.IM, Rio de Janeiro, 2000.

[16] Melo, R.A. *A Teoria de Semigrupos Aplicada às Equações Diferenciais Parciais.* Dissertação de Mestrado UAMAT/UFCG, 2006.

[17] Milani, A.J., Koksch, N.J.*An Introduction to Semiflows.* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol 134. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2005.

[18] Robinson, J.C. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[19] Rudin, W.*Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1986.

[20] da Silva, S.H., *Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural network in a bounded domain*, Differential Equations and Dynamical Systems, **19**, 87-96, 2011.

[21] Shomberg, J.L. *Attractors for a Neural Network Equation.* Differential Equations and Dynamical Systems. **23**(1), 99-115, 2015.

[22] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2ª ed., Springer, New York, 1997.

[23] Wilson, H.R., Cowan, J.D. *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons.* Biophys. J. **12**, 1-24, 1972.

[24] Yosida, K. *Functional Analysis,* 6ª ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.