



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Relaxação em Sistemas Quânticos Simples: Aplicação  
da Dinâmica de Campos Térmicos no Modelo de  
Jaynes-Cummings**

**João Gustavo da Silva Santos**

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Relaxação em Sistemas Quânticos Simples: Aplicação  
da Dinâmica de Campos Térmicos no Modelo de  
Jaynes-Cummings**

**João Gustavo da Silva Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Danievertton Moretti

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

S237r

Santos, João Gustavo da Silva.

Relaxação em Sistemas Quânticos Simples : aplicação da dinâmica de campos térmicos no modelo de Jaynes-Cummings / João Gustavo da Silva Santos. – Campina Grande, 2017.

76 f. il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Danievertton Moretti".

Referências.

1. Dinâmica de Campo Térmico. 2. Modelo de Jaynes-Cummings. 3. Dissipação. 4. Relaxação. I. Moretti, Danievertton. II. Título.

CDU 53(043)

# TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

JOÃO GUSTAVO DA SILVA SANTOS

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Danievertton Moretti  
Orientador

---

Prof(a). Tâmara de Oliveira Lima e Silva  
Examinador Externo

---

Prof. Bertúlio de Lima Bernardo  
Examinador Interno

*“Sua falta de fé é perturbadora.”*

Darth Vader

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Danieverton Moretti, por toda a paciência e dedicação para que este trabalho desse certo.

A José Roberto, pela grande contribuição, juntamente com Bárbara Carnaúba e Francisco Revson com toda discussão durante os encontros do nosso grupo de pesquisa.

Agradeço também aos excelentes professores do Departamento de Física da UFCG, em especial a Francisco Brito e João Rafael por todo conhecimento que obtive em suas disciplinas.

Aos meus colegas do Departamento de Física da UFCG, em especial a Deusallete Vilar, Douglas Nara, Edme Vale, Gilvan Bonfim, Ildemar Barreto, Julielson Dias, Leonardo Colaço, Leonardo Paulino e Solomon Lomotey.

Aos meus amigos do Rio de Janeiro, Gilson Correia, João Zilmar, Linda Oliveira, Luis Felipe, Marcelo Bonfim, Natália Sandis, Rafael Melo e Rodrigo Genzo, pela saudade.

A família da minha noiva, Adrícia Mirelly, Heronildes Costa e Maria da Paz que sempre me deram apoio necessário.

Aos pequenos Gabriel e Sophia pelos momentos de diversão, risos e carinho.

Gostaria de agradecer em especial a minha família, minha mãe Sidiclei Brito, meu pai Jessé Fonseca e minha irmã Viviane Santos, por todo amor, pela confiança e fé, pelo suporte, pelo carinho e por toda saudade que estou deles.

E gostaria de agradecer a minha noiva Dayanna Kelly que é o principal motivo por sair de casa no Rio de Janeiro para vir morar tão longe, por todo carinho que me dá e por todo amor envolvido.

Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

*À minha família.*

# Lista de Figuras

3.1	Átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético. . . . .	18
3.2	Curva de absorção destacando o comportamento de alargamento por potência. . . . .	26
3.3	Curva de absorção para um termo de relaxação aditivo $\gamma$ . . . . .	27
3.4	Átomo de três níveis interagindo com dois campos eletromagnéticos numa configuração do tipo $\Lambda$ . . . . .	28
3.5	Curva de absorção para EIT . . . . .	31
3.6	Inversão de população para $\bar{n} = 40$ . . . . .	38
3.7	Inversão de população com dissipação com $\alpha = 5$ , $\Delta = 0.5$ e $\lambda = 1$ . . . . .	40
4.1	Ilustração da correspondência entre um sistema dissipativo com um banho térmico e um sistema com interação efetiva na TFD. . . . .	48
4.2	Inversão de população para o caso em que exista apenas um fóton na cavidade. . . . .	68



# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão de elementos primordiais Mecânica Quântica</b>	<b>4</b>
2.1 Mecânica Quântica . . . . .	4
2.1.1 Espaço de Hilbert . . . . .	4
2.1.2 Postulados da Mecânica Quântica . . . . .	5
2.2 Operador matriz densidade . . . . .	6
2.3 Formalismo da Óptica Quântica . . . . .	8
2.3.1 Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	9
2.3.2 Estados do campo eletromagnético . . . . .	11
<b>3 Relaxação em sistemas quânticos</b>	<b>15</b>
3.1 Descrição do campo eletromagnético . . . . .	15
3.2 Sistema de dois níveis . . . . .	17
3.3 Sistema de três níveis - EIT . . . . .	27
3.4 Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	31
3.4.1 Dinâmica quântica . . . . .	34
3.4.2 Inversão de população para o caso dissipativo . . . . .	38
<b>4 Dissipação térmica descrito pela TFD (<i>Thermo Field Dynamics</i>)</b>	<b>41</b>
4.1 TFD ( <i>Thermo Field Dynamics</i> ) . . . . .	41
4.2 Revisão do artigo: <i>A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics</i> . . . . .	44

4.2.1	Observação de uma nova perspectiva sobre um simples exemplo com ruído térmico. . . . .	45
4.3	Processo dissipativo do modelo de Jaynes-Cummings via TFD . . . . .	49
4.3.1	Termo de interação não-hermitiano . . . . .	49
4.3.2	Vetor de estado dissipativo para o caso semi-clássico . . . . .	56
4.3.3	Vetor de estado dissipativo para o caso quântico . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusão e perspectiva</b>	<b>70</b>

# Resumo

Desenvolvemos neste trabalho, um estudo teórico da aplicação da dinâmica de campo térmico sobre o modelo de Jaynes-Cummings. De acordo com a abordagem feita por Hashizume no artigo, “*A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*” aplicamos os mesmos conceitos para investigar o processo de relaxação envolvido no modelo de Jaynes-Cummings. Num primeiro momento, fizemos uma revisão de alguns elementos primordiais para a compreensão de toda a discussão envolvida nessa dissertação. Em seguida, estudamos processos de relaxação em sistemas quânticos simples, para podermos, mais tarde, traçar um paralelo entre os resultados e estabelecer alguma relação com o que foi encontrado. Diante da Dinâmica de campo térmico, mas conhecida como TFD (*Thermo Field Dynamics*), usamos uma abordagem feita por Hashizume e colaboradores, e investigamos como o processo de relaxação se desenvolve mediante a representação via TFD.

Palavras-chave: Dinâmica de Campo Térmico - Modelo de Jaynes-Cummings - Dissipação - Relaxação.

# Abstract

We develop in this work, a theoretical study of the application of the Thermo field dynamics on the model of Jaynes-Cummings. According to the approach taken by Hashizume in the article, “*A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*”, we use the same concepts to investigate the relaxation process involved in model Jaynes-Cummings. In the first moment, we did a review of some key elements to compreensão all the discussion involved in this dissertation. Then, we study relaxation processes in simple quantum systems, for we could later draw a parallel between the results and establish some relationship to what was found. Front the thermal field dynamics, but known as TFD, we use an approach made by Hashizume and colaborators, and we investigated how the relaxation process it developed through the representation via TFD.

Keywords: Thermal Field Dynamic - Jaynes-Cummings Model - Dissipation - Relaxation.

# Capítulo 1

## Introdução

O tema central do nosso trabalho é revisar e discutir alguns mecanismos relacionados aos processos de relaxação (tanto no Modelo de Jaynes-Cummings, MJC, como em outros sistemas), sejam eles correspondentes ao decaimento natural (tempo de vida), decoerência (perda da fase relativa entre superposições quânticas), etc., vamos explicitar um breve panorama sobre alguns trabalhos que investigaram temas correlacionados ao nosso. Naturalmente, sabemos que há um enorme interesse da comunidade em estudar a interação de um sistema quântico em contato com um reservatório (banho térmico, ou ambiente). Uma vez que o sistema é perturbado externamente e retirado da condição de equilíbrio, sua tendência é relaxar e retomar a condição anterior. A situação mais comum, acreditamos, está relacionada ao tempo de vida de um átomo, por exemplo, que se encontra no estado excitado. A interação deste sistema com o vácuo quântico é o mecanismo responsável pelo decaimento natural (ou emissão espontânea), que foi tratada primeiramente por Weisskopf-Wigner [36] e, atualmente, ainda é fruto de correções no espectro de frequência [6]. Sistemas quânticos mais complexos, em relação ao número de estados e sua interação com campos aplicados externamente, foram estudados e modelados sob a perspectiva de entender os mecanismos de relaxação. Como poderemos ver no capítulo 3, átomos possuindo três níveis, sob certas condições, podem ser preparados em superposições quânticas que exibem o efeito de EIT (Transparência Induzida Eletromagneticamente). De maneira simples, o EIT corresponde a um cancelamento (que pode ser total) na absorção dos fótons do campo eletromagnético estando este último em ressonância com o átomo. Esse cancelamento pode ser explicado levando em conta a coerência (superposição) entre os estados fundamentais. Diversos modelos explicam algumas situa-

ções experimentais específicas. Por exemplo, para uma degradação da superposição devido à influência de inhomogeneidade de campos magnéticos espúrios, S. Pustelny e colaboradores tem um belo trabalho que considera um gradiente de campo magnético com apenas dois valores distintos, porém, que deixa o sistema relativamente complicado [27]. Além disso, D. Moretti e colaboradores investigaram, em sistemas semelhantes, situações que tal inhomogeneidade pode ser “mascarada” com aplicação de campo magnético externo e bem definido em relação ao eixo de quantização, “suavizando” o efeito de decoerência [26]. Em adição, E. Figueroa e colaboradores investigaram a decoerência em sistemas apresentando EIT sob a perspectiva de comparação entre mecanismos de troca de população ou simples defasamento, tendo a temperatura como parâmetro principal [11]. Eles mostraram que efeitos de defasamento da superposição entre os estados excitados é majoritário em relação à troca de população entre tais estados. Em relação ao MJC, que foi estudado pela primeira vez em 1963 [20], diversos modelos foram investigados para um melhor entendimento da interação entre um átomo de dois níveis com um modo quantizado do campo eletromagnético no interior da cavidade e sua interação com a vizinhança.

Por fim, Masashi Ban investigou [4] os efeitos térmicos no MJC à temperatura finita também utilizando TFD, no entanto, numa perspectiva distinta da que usamos em nosso trabalho. O autor fez uma comparação direta entre seu formalismo e o de Liouville von Neumann, discutindo aspectos interessantes, mostrando ser praticamente equivalentes. No entanto, na TFD, quantidades físicas podem ser expressas, pelo menos a baixas temperaturas, como expansão de um parâmetro que não é explícito no formalismo de Liouville von Neumann. Recentemente, Seyed Mahmoud Ashrafi e colaboradores [3] abordaram o MJC considerando que a cavidade possua uma relaxação (“damping”), onde foi utilizado um método com razoável complexidade, “dissipative interaction picture”, para estudar a estatística quântica do sistema.

Por exemplo, M. Scala [28] e colaboradores estudaram através do quadro de RWA (Rotating Wave Approximation) como uma derivação microscópica da equação mestra para o modelo de Jaynes-Cummings com perda na cavidade é dada levando em conta um termo dissipativo. No nosso estudo, o tratamento dado ao MJC foi de acordo com a abordagem feita por Hashizume e colaboradores [17], onde estudaram um simples modelo propondo uma nova perspectiva sobre a dissipação térmica com base na TFD, no qual ressaltam uma interação efetiva entre os espaços originais e Til. Em nossa análise, desen-

volvemos uma investigação em torno dos possíveis processos de relaxação envolvido neste modelo sob a ótica da TFD. Para estabelecer uma relação mais próxima a estes processos, revisamos sistemas quânticos que revelaram diferentes formas de relaxação, como por exemplo a relaxação devido a decoerência que ocorre no Sistema de três níveis - EIT e o modelo de Jaynes-Cummings, que apresenta um processo de relaxação devido a perda de fótons na cavidade.

É pautado nestes aspectos que este trabalho é desenvolvido, de forma tal, que a sua estrutura segue o seguinte padrão:

- Capítulo 1 - Introdução.
- Capítulo 2 - Revisão de conceitos da Mecânica Quântica primordiais para a compreensão dessa dissertação.
- Capítulo 3 - Análise e discussão de sistemas quânticos sobre a perspectiva dos processos de relaxação envolvidos.
- Capítulo 4 - Investigação possíveis processos de relaxação envolvidos no MJC, levando em conta os efeitos decorrente da ação do reservatório térmicos, via o formalismo da TFD
- Capítulo 5 - Considerações finais.

Antes de darmos inicio ao nosso estudo, uma importante observação deve ser feita. Devido a um conflito de notação, precisamos deixar claro o que foi adotado em nosso trabalho.

- Notação - Na TFD os termos ditos estendidos são representados com um chapéu, assim como convencionalmente são representados os operadores. Para resolver este conflito, vamos mudar a representação dos operadores e manter os termos estendidos com o chapéu. Vetores serão representados normalmente em negrito. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \textit{Operadores} &\rightarrow \mathcal{O} \\
 \textit{Termos estendidos} &\rightarrow \hat{O} \\
 \textit{Vetores} &\rightarrow \mathbf{O}
 \end{aligned}$$

nem sempre será possível representar os operadores por essa fonte diferenciada, mas nesses casos, eles serão distintos.

# Capítulo 2

## Revisão de elementos primordiais Mecânica Quântica

Neste capítulo faremos uma revisão dos elementos da Mecânica Quântica que são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho de dissertação. Este pode ser um capítulo cansativo para o leitor familiarizado com o assunto, pois faz uma revisão teórica de Mecânica Quântica. Se este for o caso, o capítulo 3 dá início ao estudo pelo qual a teoria também aparece, mas de forma aplicada. Entretanto, a revisão faz-se necessária para esclarecer por quais vias teóricas esta dissertação se baseia.

### 2.1 Mecânica Quântica

Antes de apresentar a base da Mecânica Quântica é preciso conceituar o Espaço de Hilbert ( $\mathbb{H}$ ), pois todas grandezas são definidas a partir desse espaço. Em seguida será apresentado, de forma resumida, os Postulados da Mecânica Quântica, o Operador matriz densidade e uma introdução ao Formalismo da Óptica Quântica; conceitos que formam a base teórica para a compreensão desta dissertação.

#### 2.1.1 Espaço de Hilbert

É um espaço vetorial complexo de dimensão finita e de quadrados integráveis, ou seja, apesar da dimensão infinita, as suas integrais quadráticas são finitas. O Espaço de Hilbert é composto de produto interno, tal que sua norma é definida a partir de um produto interno deste espaço [2].



Conceituar o Espaço de Hilbert talvez fosse desnecessário, pois o intuito aqui é apenas uma revisão, mas posteriormente falaremos sobre duplicação deste espaço, de forma que o leitor se sentirá mais familiarizado com o tema quando citado.

## 2.1.2 Postulados da Mecânica Quântica

- **Postulado 1** - Os estados de um sistema quântico são representados por vetores do espaço de Hilbert complexo. O vetor  $|\Psi\rangle$  é chamado de Ket e correspondente a um dado estado quântico; a correspondência é tal que dois vetores linearmente dependentes representam o mesmo estado.

O vetor de estado  $|\Psi\rangle$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base do espaço de Hilbert,

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle \quad (2.1)$$

onde os kets  $u_k$  são autokets de uma base de dimensão  $k$  do espaço  $\mathbb{H}$  e  $c_i = \langle c_i | \Psi \rangle$  para  $i = 1 \dots k$  com  $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$ .

Quando o Ket  $|\Psi\rangle$  varre todo o espaço  $\mathbb{H}$ , o produto com qualquer vetor, forma um novo espaço vetorial. Este é o espaço de  $\mathbb{H}$  chamado de Dual, denotado por  $\mathbb{H}^\dagger$  [32]. Para cada vetor  $|\Psi\rangle$  vai existir um dual correspondente,  $|\Psi\rangle^\dagger = \langle \Psi |$ , onde o vetor  $\langle \Psi |$  é chamado de Bra.

- **Postulado 2** - O observável é uma propriedade do sistema físico que, a princípio, pode ser medido e é representado por operadores hermitianos. De maneira mais formal, podemos dizer que: Qualquer variável dinâmica clássica será representada por operadores lineares hermitianos, cujos autovalores constituem uma base sobre o espaço  $\mathbb{H}$ . Qualquer função destas variáveis dinâmicas, também fica representada por uma função do operador. Assim, estes operadores são ditos observáveis.
- **Postulado 3** - A medida de um observável  $\mathcal{A}$  é um resultado numérico chamado de autovalor de  $\mathcal{A}$ ; após a medida, o estado quântico colapsa em um autoestado com um autovalor. Tal como,

$$\mathcal{A}|\Psi\rangle = a_n|\Psi\rangle \quad (2.2)$$

onde  $a_n$  é o autovalor. A probabilidade do resultado  $a_n$  ser encontrado em uma medida feita sobre o sistema no estado  $|\Psi\rangle$ , é dado por:

$$\mathbf{Prob}(a_n) = \|\mathcal{P}_n|\Psi\rangle\|^2 = \langle\Psi|\mathcal{P}_n|\Psi\rangle. \quad (2.3)$$

onde  $\|\mathcal{P}_n|\Psi\rangle\|$  é a norma da projeção de  $|\Psi\rangle$  e  $\mathcal{P}_n = |n\rangle\langle n|$  é o operador projeção na direção do Ket  $|\Psi\rangle$ .

Se o resultado  $a_n$  é encontrado, então o estado quântico torna-se:

$$|\Psi_n\rangle = \frac{\mathcal{P}_n|\Psi\rangle}{(\langle\Psi|\mathcal{P}_n|\Psi\rangle)^{1/2}}. \quad (2.4)$$

Note que  $|\Psi_n\rangle$  está normalizado, onde a normalização é dada por  $\sum_n \mathbf{Prob}(a_n) = 1$ .

- **Postulado 4** - A evolução temporal de um estado quântico é regida por uma transformação unitária. A amplitude de probabilidade de um estado quântico no tempo  $t_0$  é representado por  $|\Psi(0)\rangle$ , num certo tempo depois  $t$ , a amplitude de probabilidade torna-se  $|\Psi(t)\rangle$ . Isso ocorre através de transformações unitárias dada por:

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\Psi(0)\rangle. \quad (2.5)$$

O operador evolução temporal pode ser escrito como  $\mathcal{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t)$ , onde  $\mathcal{H}$  é o operador hamiltoniano do sistema. A propriedade fundamental de  $\mathcal{U}(t)$  é a unitariedade, ou seja,

$$\mathcal{U}^\dagger(t)\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^\dagger(t) = 1. \quad (2.6)$$

- **Postulado 5** - Como o sistema físico  $S_1$  está associado ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_1$  e o sistema  $S_2$  ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}_2$ , então a composição dos sistemas  $S_1 + S_2$  será associado com o produto tensorial de dois espaços vetoriais de Hilbert  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$  [10].

## 2.2 Operador matriz densidade

Diferentemente da Mecânica clássica, onde é possível determinar a dinâmica completa em qualquer instante de tempo de um sistema físico, conhecendo-se a sua posição e os momentos iniciais, e sendo possível obter suas equações de movimento; na Mecânica quântica, a descrição do sistema passa a ser através de uma teoria intrinsecamente probabilística.

Um sistema quântico fechado é em geral, uma idealização extremamente forte. Onde é negligenciado qualquer interação com o meio externo, podendo ser descrito por um estado puro como uma superposição de estados  $|u_k\rangle$ , portanto:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t)|u_k\rangle, \quad (2.7)$$

onde os coeficientes  $c_k(t)$  satisfazem a seguinte relação  $\sum_k |c_k(t)|^2 = 1$ . De acordo com o postulado 1,  $|\Psi(t)\rangle$  é um vetor de estado, ele carrega todas as informações disponíveis sobre o sistema.

Em um sistema onde há perda de energia e informação sobre a fase relativa entre os estados, há uma mistura estatística, a qual nos referimos como incertezas clássicas. Neste caso, o sistema é descrito por um estado misto.

No formalismo do operador matriz densidade é possível incluir as incertezas clássicas, que possibilita trabalhar ao mesmo tempo com as probabilidades estatísticas e as incertezas quânticas. O operador matriz densidade é definido como:

$$\rho(t) = \sum_k p_k |\Psi_k(t)\rangle \langle \Psi_k(t)|, \quad (2.8)$$

onde  $p_k$  representa a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|\Psi_k(t)\rangle$  e satisfaz a seguinte relação  $\sum_k |p_k(t)|^2 = 1$ .

Reescrevendo o estado de um forma mais geral numa base como  $|u_n\rangle$ , temos

$$|\Psi_k(t)\rangle = \sum_n c_{n,k}(t)|u_n\rangle. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação (2.9) na equação (2.8) podemos encontrar os elementos de  $\rho_{mn}(t)$ , onde  $m$  e  $n$  podem ser iguais ( $m = n$ ) ou diferentes ( $m \neq n$ ). Para  $m = n$  temos,

$$\rho_{nn}(t) = \sum_k p_k |c_{n,k}(t)|^2 \quad (2.10)$$

e para  $m \neq n$ ,

$$\rho_{mn}(t) = \sum_k p_k c_{m,k}(t) c_{n,k}^*(t). \quad (2.11)$$

A equação (2.10) representa os termos diagonais do operador matriz densidade, que estão associados a probabilidade de encontrar um sistema físico num dado estado da base  $|u_n\rangle$  e são denominados populações. Já a equação (2.11) representa os elementos fora da diagonal, que estão relacionados a interferência entre os estados  $|u_m\rangle$  e  $|u_n\rangle$ , estes elementos são denominados coerências.

O operador densidade nos permite extrair toda a informação sobre o sistema, esteja ele num estado puro ou misto. O valor esperado de um observável  $\mathcal{O}$  do sistema pode ser calculados através do traço de  $\mathcal{O}\rho(t)$ , tal como:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_k p_k \langle \Psi_k | \mathcal{O} | \Psi_k \rangle = Tr(\mathcal{O}\rho). \quad (2.12)$$

Derivando a equação de Schrödinger, obtemos a evolução no temporal do operador matriz densidade

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)], \quad (2.13)$$

onde  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano do sistema. A equação (2.13) é denominada de equação quântica de Liouville-Von Neumann.

Em um caso real devemos acrescentar os termos de perda populacional dos níveis devido ao decaimento espontâneo ou outros fenômenos, em razão da interação do sistema com o meio. Estes termos podem, em geral, ser incluídos fenomenologicamente de modo que a equação (2.13) torne-se numa equação conhecida como equação ótica de Bloch [23]

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)] + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Big|_{rel}, \quad (2.14)$$

onde  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Big|_{rel}$  representa a taxas de relaxações das populações e coerências.

É importante mencionar que o termo de relaxação contido na equação (2.14) será detalhado um pouco mais em seções posteriores para sistemas físicos relativamente bem conhecidos. Isto está diretamente ligado ao tema central de nosso trabalho, que envolve o conceito de relaxação, porém sem fazer o uso explícito de 2.14 (vide o capítulo 4). No entanto, antes disto, continuaremos com a revisar pontos indispensáveis para entendimento mínimo desta dissertação.

## 2.3 Formalismo da Óptica Quântica

Nesta seção faremos uma breve discussão dentro do formalismo da Óptica Quântica, inicialmente apresentando a quantização do campo eletromagnético e suas propriedades básicas e em seguida descreveremos alguns dos possíveis estados que a luz pode assumir.

Por fim, é dada uma explanação sobre os componentes comuns de estados quânticos em experimentos de óptica quântica.

### 2.3.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético no espaço livre começa com a descrição clássica dada pelas equações de Maxwell [30]. Baseando-se principalmente nas ideias de Faraday, Maxwell realizou uma das sínteses mais fundamentais ao mostrar que todos os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos podem ser descritos, unificadamente, a partir de um conjunto de quatro equações diferenciais, conhecidas como equações de Maxwell. As equações de Maxwell criam uma ligação entre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o campo magnético  $\mathbf{B}$  [19]. No vácuo, onde não há cargas líquidas e nem correntes, as equações se tornam

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e pode ser descrita pela seguinte relação,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (2.19)$$

As entidades físicas  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo, respectivamente.

As equações de Maxwell podem ser combinadas resultando em uma nova equação, que prevê e, portanto, descreve a onda eletromagnética. Estamos interessados em encontrar a equação do campo elétrico onde a dependência temporal e espacial seja explícita. Vamos usar as equações de Maxwell para encontrar o campo elétrico dependente do tempo e espaço, tomando o rotacional sobre a equação (2.17) obtemos,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo a equação (2.18) na equação (2.20) chegamos a seguinte equação,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0. \quad (2.21)$$

A solução da equação (2.21) dá a dependência temporal e espacial do campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}\right)^{1/2} [\alpha_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - \alpha_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \quad (2.22)$$

em que  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $V$  é o volume de quantização do campo eletromagnético,  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda do modo,  $\omega_k$  é a frequência angular do modo  $k$ ,  $\alpha$  e  $\alpha^*$  são amplitudes complexas sem dimensão advindas da análise de Fourier e  $u_{\mathbf{k}}$  é uma função do modo que descreve a sua polarização. A quantização do campo eletromagnético é feita pela troca de  $\alpha$  e  $\alpha^*$  pelos operadores de aniquilação e criação  $a$  e  $a^\dagger$ , respectivamente. Usando o fato dos fótons serem bósons<sup>1</sup>, a relação de comutação entre  $a$  e  $a^\dagger$  é

$$[a_k, a_k] = [a_k^\dagger, a_k^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_k^\dagger] = \delta_{kk}. \quad (2.23)$$

O campo quantizado assim se torna

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0}\right)^{1/2} [a_{\mathbf{k}s} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - a_{\mathbf{k}s}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \quad (2.24)$$

o hamiltoniano clássico para o campo pode ser calculado a partir da energia do campo eletromagnético, da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\right). \quad (2.25)$$

Com essa descrição, podemos avançar e falar sobre os estados do campo eletromagnético. Esta é uma parte fundamental desta revisão, pois está diretamente ligado ao sistema que vamos trabalhar posteriormente.

---

<sup>1</sup>Bósons são partículas que obedecem à estatística de Bose-Einstein. Dentre os exemplos de bósons estão as partículas elementares, como o fóton, o glúon, o bóson de Higgs, e partículas compostas, como mésons e núcleos atômicos estáveis, como o hélio-4

### 2.3.2 Estados do campo eletromagnético

O intuito desta seção é fazer uma breve revisão sobre alguns estados fundamentais do campo eletromagnético, pois são teorias fundamentais para o entendimento desta pesquisa e que serão aplicadas no presente estudo.

- **Estado de Fock (Número)** - O estado número, que também é conhecido pelo estado de Fock, é representado usando a notação de Dirac, como  $|n\rangle$  e apresenta um número de fótons bem definido. O estado número é autoestado do operador  $\mathcal{N} = aa^\dagger$  com autovalores dado por,

$$\mathcal{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.26)$$

A ação dos operadores de aniquilação e criação sobre esses estados é

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.27)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.28)$$

O Estado de Número  $|n\rangle$  constitui um conjunto  $|n\rangle$  completo no espaço de  $\mathbb{H}$  [22] e são ortonormais.

- **Estado Coerente** - Glauber [15] introduziu os estados coerentes em 1963 com o objetivo de descrever uma teoria consistente com a importância da coerência óptica. Bastante conhecidos na literatura, os estados coerentes são denotados por  $|\alpha\rangle$  e são autoestados do operador aniquilação  $a$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.29)$$

note que  $\alpha$  é um número complexo, podendo ser escrito como  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ , sendo  $|\alpha|$  o módulo do parâmetro de coerência e  $\theta$  é a fase.

Os estados números formam um conjunto completo e assim podemos expandir  $|\alpha\rangle$  da seguinte forma,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle \quad (2.30)$$

onde os coeficientes  $C_n(t)$  satisfazem a seguinte relação  $\sum_n |C_n(t)|^2 = 1$ .

Atuando o operador aniquilação na equação (2.30) temos

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a|n\rangle \quad (2.31)$$

$$\alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.32)$$

Mudando o coeficiente na equação (2.32), ou seja, fazendo  $n \rightarrow n+1$

$$\alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \sqrt{n+1}|n\rangle, \quad (2.33)$$

substituindo a equação (2.30) na equação (2.33) acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \alpha C_n &= C_{n+1} \sqrt{n+1} \\ C_{n+1} &= \frac{\alpha C_n}{\sqrt{n+1}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

que é a relação de recorrência dos coeficientes do estado coerente. Podemos reescrever esta relação aplicando sucessivamente aos termos  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  na equação (2.34) e veremos que há uma relação em torno do coeficiente  $C_0$ . Ou seja, quando  $n = 0$  temos

$$C_1 = \alpha C_0, \quad (2.35)$$

para  $n = 1$ ,

$$C_2 = \frac{\alpha C_1}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2 C_0}{\sqrt{2}}, \quad (2.36)$$

para  $n = 2$ ,

$$C_3 = \frac{\alpha C_2}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha^3 C_0}{\sqrt{3}}, \quad (2.37)$$

é notório que a relação de recorrência formada em torno do coeficiente  $C_0$  é da seguinte forma:

$$C_n = \frac{\alpha^n C_0}{\sqrt{n!}}. \quad (2.38)$$



Com essa relação podemos explicitar o estado coerente como,

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.39)$$

Para determinar o valor de  $C_0$  vamos lançar mão da condição de normalização do estado coerente, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= |C_0|^2 \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*l}\alpha^n}{\sqrt{l!n!}} \langle l|n\rangle \\ 1 &= |C_0|^2 \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*l}\alpha^n}{\sqrt{l!n!}} \delta_{l,n} \\ 1 &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ 1 &= |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \\ C_0 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

lembrando que  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$  e que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ . Assim a equação (2.39) normalizada é dado por,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.41)$$

Uma outra forma de obter o estado coerente é através da aplicação do operador deslocamento ( $\mathcal{D}$ ) no estado de vácuo. Não iremos fazer essa demonstração aqui, pois foge ao nosso propósito.

Assim como apenas citamos que o estado coerente pode ser encontrado através do operador deslocamento, vamos citar outros estados fundamentais do campo eletromagnético.

- **Estado Térmico** - Considerando uma fonte em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$  absoluta emitindo luz, o operador densidade pode ser escrito como,

$$\rho = N e^{-\beta\mathcal{H}} \quad (2.42)$$

onde,  $N = [\text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}})]^{-1}$ ,  $\mathcal{H} = \hbar\omega(\mathcal{N} + 1/2)$  e  $\beta = 1/\kappa_B T$ , onde  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann. Este estado define o campo eletromagnético no estado térmico.

- **Estado Comprimido** - Diferente do estado térmico, o estado comprimido é puramente quântico. Matematicamente o estado pode ser descrito da seguinte forma:

$$|\alpha, z\rangle = \mathcal{S}(z)|\alpha\rangle = \mathcal{S}(z)\mathcal{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.43)$$

que é a atuação do operador deslocamento no estado de vácuo, seguido pela atuação do operador de compressão que é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{S}(z) = \exp\left[\frac{1}{2}(z^*a^2 - za^{\dagger 2})\right], \quad (2.44)$$

sendo,  $z = re^{i\phi}$  o parâmetro de compressão,  $r$  é o módulo do parâmetro de compressão e  $\phi$  é a fase.

O estado coerente comprimido é gerado através de processos não-lineares, envolvendo termos quadráticos dos operadores de criação e aniquilação.

A revisão de elementos da Mecânica quântica se faz necessária devido o grande uso que faremos durante esse trabalho de dissertação, mas este é apenas um capítulo de revisão e apoio, caso o leitor ache necessário a busca de conceitos em outras fontes é de grande ajuda. Na próximo capítulo faremos uma revisão de trabalhos bem conhecidos na literatura e os conceitos aqui vistos serão efetivamente utilizados.

# Capítulo 3

## Relaxação em sistemas quânticos

A finalidade deste capítulo é investigar sistemas físicos que, em primeira aproximação, apresentem modelos teóricos que explicam bem os fenômenos de relaxação observados na prática. Entre eles, estudaremos o modelo de Jaynes-Cummings. Logo, julgamos importante este capítulo pois podemos encará-lo com um breve revisão bibliográfica onde diversos mecanismos de relaxação podem ser explicitados e discutidos.

### 3.1 Descrição do campo eletromagnético

A luz é uma onda eletromagnética, que ao interagir com a matéria, provoca uma perturbação na sua configuração. Quando a frequência do campo eletromagnético é igual a frequência de transição atômica, a resposta óptica do meio é aumentada, e dizemos que a luz é ressonante no meio. O campo elétrico cria dentro de cada átomo uma separação de cargas que oscilam na mesma frequência do campo incidente, gerando um momento de dipolo induzido. Para melhor compreender a interação luz-matéria, consideramos o modelo semi-clássico, em que o átomo atua como sistema quântico e o campo como um sistema clássico. Este campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_{livre} \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \quad (3.4)$$

O campo elétrico ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ) e o campo magnético ( $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ) relacionam-se com o vetor intensidade magnética ( $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ) e o vetor deslocamento ( $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ) da seguinte forma:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  são, respectivamente, a polarização e magnetização.

Assumindo, o caso em que todas as transições são do tipo dipolo elétrico e que  $\rho_{livre} = 0 = \mathbf{j}$ , podemos dizer que os campos eletromagnéticos induzidos no meio são causados pela radiação dos dipolos atômicos [7],

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

consideramos que não há efeito de magnetização apreciáveis, de modo que  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  é nulo.

Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  e a equação (3.3) temos,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \nabla \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \quad (3.9)$$

Podemos substituir o campo magnético na equação acima por  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  e em seguida usar a equação (3.4) para chegar em,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.5) nesta equação

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \right) \\ &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \right) \\ \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz que é dada por  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . Sabemos das identidades vetoriais que  $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = 0$  e assim

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}. \quad (3.12)$$

Esta equação mostra que a polarização cria um campo elétrico como resposta dos átomos ao feixe de luz incidente, ou seja, a polarização representa a resultante macroscópica da soma de todos os momentos de dipolo induzido na região onde ocorre a interação. Logo,

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{d} \rangle \quad (3.13)$$

onde  $N$  é a densidade de átomos na região de interação com o campo e  $\langle \mathbf{d} \rangle = -e \langle \mathbf{r} \rangle$  é a média dos momentos de dipolo elétrico individuais de cada átomo. Para se obter o valor esperado da polarização, vamos usar o formalismo do operador matriz densidade e a partir da equação (2.12) concluímos,

$$\mathbf{P} = N \text{tr}(\mathbf{d}\rho). \quad (3.14)$$

A polarização é a resposta dos átomos ao campo incidente, é nela que focaremos a atenção, ou seja, é o observável que utilizaremos para obter grandezas físicas que deverão proporcionar as características mais relevantes do sistema, como a susceptibilidade. Essa polarização, por sua vez, estará relacionada com as coerências atômicas

## 3.2 Sistema de dois níveis

No sistema de dois níveis vamos estudar a interação de um campo eletromagnético monocromático de frequência  $\omega$  com um átomo de dois níveis. Esse problema será importante para introduzir alguns conceitos que serão úteis em modelos mais complexos abordados em seguida. Além disso, nossa discussão estará pautada em torno do processo de relaxação existente.

Considerando um átomo de dois níveis, onde  $|a\rangle$  representa o estado fundamental e  $|b\rangle$  o estado excitado, interagindo com um campo eletromagnético monocromático de frequência  $\omega$ , onde a dessintonia é expressa como  $\Delta = \omega_0 - \omega$  e a taxa de decaimento entre os níveis é representada por  $\Gamma$ , como mostra a figura 3.1.

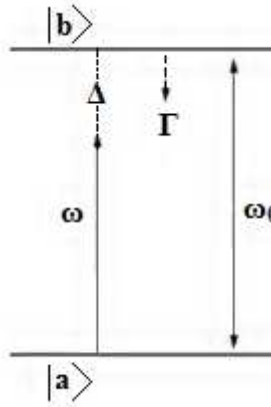


Figura 3.1: Átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético.

Vamos escrever o hamiltoniano livre (que não há interação) do sistema levando em consideração que no nível fundamental a energia é nula, assim temos que  $\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_0|b\rangle\langle b|$ . Em seguida podemos escrever o hamiltoniano de interação átomo-campo da seguinte forma

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

O momento de dipolo é escrito como  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  e o campo eletromagnético de frequência  $\omega$  é dado por:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2}(Ee^{i\omega t} + E^*e^{-i\omega t}) \quad (3.16)$$

onde  $E$  é a amplitude do campo.

Podemos reescrever o momento de dipolo, em termos dos seus elementos de matriz, usando o operador identidade.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbb{I}\mathbf{d}\mathbb{I} \\ &= (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)\mathbf{d}(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) \\ &= |a\rangle\langle a|\mathbf{d}|a\rangle\langle a| + |a\rangle\langle a|\mathbf{d}|b\rangle\langle b| + |b\rangle\langle b|\mathbf{d}|b\rangle\langle b| + |b\rangle\langle b|\mathbf{d}|a\rangle\langle a| \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}_{aa}|a\rangle\langle a| + \mathbf{d}_{bb}|b\rangle\langle b| + \mathbf{d}_{ab}|a\rangle\langle b| + \mathbf{d}_{ba}|b\rangle\langle a| \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{d}_{ij} = \langle i|\mathbf{d}|j\rangle$ .

O momento de dipolo  $\mathbf{d}$  é um operador com paridade ímpar, então, para os estados atômicos com paridade bem definida, todos os elementos diagonais são nulos, tal que,  $\langle a|\mathbf{d}|a\rangle = \langle b|\mathbf{d}|b\rangle = 0$ . Para um sistema de dois níveis é, necessário verificar que os

estados tenham paridade bem definida. Assim, o momento de dipolo tem a seguinte forma:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{ab}|a\rangle\langle b| + \mathbf{d}_{ba}|b\rangle\langle a|. \quad (3.18)$$

Com todas essas informações podemos reescrever o hamiltoniano de interação explicitando os seus termos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} &= -(\mathbf{d}_{ab}|a\rangle\langle b| + \mathbf{d}_{ba}|b\rangle\langle a|)\frac{1}{2}(Ee^{i\omega t} + E^*e^{-i\omega t}) \\ \mathcal{H}_{int} &= -\frac{\mathbf{d}_{ba}E}{2}e^{i\omega t}|b\rangle\langle a| - \frac{\mathbf{d}_{ab}E}{2}e^{i\omega t}|a\rangle\langle b| - \frac{\mathbf{d}_{ba}E^*}{2}e^{-i\omega t}|b\rangle\langle a| - \frac{\mathbf{d}_{ab}E^*}{2}e^{-i\omega t}|a\rangle\langle b| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vamos fazer uma aproximação a partir daqui, pois quando consideramos que o campo oscila em torno da frequência de ressonância os termos cuja as frequências oscilam rapidamente com  $\pm(\omega + \omega_0)$  são desprezados, pois estão fora da frequência de ressonância. Assim, o primeiro e quarto termo da equação (3.19) serão desprezados. Quando desprezamos termos não ressonantes do hamiltoniano de interação, estamos fazendo uma aproximação de onda girante (R.W.A. - Rotating Wave Approximation). Essa aproximação nos leva ao hamiltoniano de interação reduzido com a forma:

$$\mathcal{H}_{int} = \hbar\Omega e^{i\omega t}|a\rangle\langle b| + \hbar\Omega^* e^{-i\omega t}|b\rangle\langle a|, \quad (3.20)$$

onde  $\Omega = -\mathbf{d}_{ab}E/2\hbar$  e  $\Omega^* = -\mathbf{d}_{ab}E^*/2\hbar$ , o termo  $\Omega$  é conhecido como frequência de Rabi. Podemos agora escrever o hamiltoniano total,

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0|b\rangle\langle b| + \hbar\Omega e^{i\omega t}|a\rangle\langle b| + \hbar\Omega^* e^{-i\omega t}|b\rangle\langle a|. \quad (3.21)$$

Vamos considerar que a população se conserva (sistema é fechado) para escrever as equações de Bloch das populações  $\rho_{ii}$  e das coerências  $\rho_{ij}$ . Vamos utilizar a equação (2.14) para escrever uma relação e determinar as equações de Bloch; sabendo que  $\dot{\rho}_{ij} = \langle i|[\mathcal{H}, \rho]|j\rangle$  temos,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ij} &= -i\{\omega_0\langle i||b\rangle\langle b|\rho|j\rangle + \Omega e^{i\omega t}\langle i||a\rangle\langle b|\rho|j\rangle + \Omega^* e^{-i\omega t}\langle i||b\rangle\langle a|\rho|j\rangle \\ &\quad -\omega_0\langle i|\rho|b\rangle\langle b|j\rangle - \Omega e^{i\omega t}\langle i|\rho|a\rangle\langle b|j\rangle - \Omega^* e^{-i\omega t}\langle i|\rho|b\rangle\langle a|j\rangle\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A partir da relação estabelecida na equação (3.22), vamos atribuir os possíveis valores de  $i$  e  $j$  e adicionar fenomenologicamente, como foi citado no final da seção 2.2, o termo de relaxação para finalmente determinar as equações para as populações e coerências.

- Quando  $i = j = a$  temos,

$$\dot{\rho}_{aa} = -i\Omega e^{i\omega t} \rho_{ba} + i\Omega^* e^{-i\omega t} \rho_{ab} + \Gamma \rho_{bb} \quad (3.23)$$

- Quando  $i = j = b$  temos,

$$\dot{\rho}_{bb} = -i\Omega^* e^{-i\omega t} \rho_{ab} + i\Omega e^{i\omega t} \rho_{ba} - \Gamma \rho_{bb}. \quad (3.24)$$

- Quando  $i \neq j$  e  $i = a, j = b$ ,

$$\dot{\rho}_{ab} = i\omega_0 \rho_{ab} + i\Omega(\rho_{aa} - \rho_{bb})e^{i\omega t} - \frac{\Gamma}{2} \rho_{ab}. \quad (3.25)$$

- Para encontrar  $\dot{\rho}_{ba}$  basta escrever o conjugado hermitiano de  $\dot{\rho}_{ab}$ ,

$$\dot{\rho}_{ba} = -i\omega_0 \rho_{ba} - i\Omega^*(\rho_{aa} - \rho_{bb})e^{-i\omega t} - \frac{\Gamma}{2} \rho_{ba}. \quad (3.26)$$

As duas primeiras equações (3.23) e (3.24) são as equações de Bloch para as populações onde,  $\Gamma$  representa a taxa de decaimento populacional e os sinais positivo e negativo mostra a direção deste decaimento. Ou seja,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t} \right|_{rel} &= \Gamma \sigma_{bb} \\ \left. \frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} \right|_{rel} &= -\Gamma \sigma_{bb}, \end{aligned}$$

e as equações (3.25) e (3.26) são as equações de Bloch para as coerências, onde  $\Gamma/2$  representa a taxa de decaimento devido a interferência entre os estados. Portanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} \right|_{rel} &= -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{ab} \\ \left. \frac{\partial \rho_{ba}}{\partial t} \right|_{rel} &= -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{ba}. \end{aligned}$$



Fazendo uma mudança de variáveis, por outras denominadas variáveis lentas, pois  $\sigma$  depende do tempo de forma mais lento do que o fator exponencial, podemos reescrever as equações de Bloch. Substituindo nas equações as variáveis,

$$\rho_{ii} = \sigma_{ii} \quad (3.27)$$

$$\rho_{ab} = \sigma_{ab} e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

$$\rho_{ba} = \sigma_{ba} e^{-i\omega t} \quad (3.29)$$

obtemos as novas equações,

$$\dot{\sigma}_{aa} = -i\Omega\sigma_{ba} + i\Omega^*\sigma_{ab} + \Gamma\sigma_{bb} \quad (3.30)$$

$$\dot{\sigma}_{bb} = -i\Omega^*\sigma_{ab} + i\Omega\sigma_{ba} - \Gamma\sigma_{bb} \quad (3.31)$$

$$\dot{\sigma}_{ab} = i\Delta\sigma_{ab} + i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ab} \quad (3.32)$$

$$\dot{\sigma}_{ba} = -i\Delta\sigma_{ba} - i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ba} \quad (3.33)$$

onde  $\Delta$  é a dissintonia dado por  $\Delta = \omega_0 - \omega$ .

Para encontrar a coerência  $\sigma_{ab}$  vamos procurar por soluções no estado estacionário, ou seja,  $\dot{\sigma}_{ij} = 0$  e juntamente com a condição de normalização  $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$  resolver o seguinte sistema:

$$-i\Omega\sigma_{ba} + i\Omega^*\sigma_{ab} + \Gamma\sigma_{bb} = 0 \quad (3.34)$$

$$-i\Omega^*\sigma_{ab} + i\Omega\sigma_{ba} - \Gamma\sigma_{bb} = 0 \quad (3.35)$$

$$i\Delta\sigma_{ab} + i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ab} = 0 \quad (3.36)$$

$$-i\Delta\sigma_{ba} - i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ba} = 0. \quad (3.37)$$

Usando as equações (3.36), (3.37) e a condição de normalização podemos explicitar  $\sigma_{ab}$  e  $\sigma_{ba}$  como:

$$\sigma_{ab} = \Omega \frac{(2\sigma_{bb} - 1)}{(\Delta + i\Gamma/2)} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{ba} = \Omega^* \frac{(2\sigma_{bb} - 1)}{(\Delta - i\Gamma/2)}. \quad (3.39)$$

Substituindo as equações (3.38) e (3.39) na equação (3.35), vamos conseguir explicitar a população  $\sigma_{bb}$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
& -i|\Omega|^2 \frac{(2\sigma_{bb} - 1)}{(\Delta - i\Gamma/2)} + i|\Omega|^2 \frac{(2\sigma_{bb} - 1)}{(\Delta + i\Gamma/2)} + \Gamma\sigma_{bb} = 0 \\
& i|\Omega|^2 \left[ \frac{\Delta + i\Gamma/2 - \Delta + i\Gamma/2}{(\Delta - i\Gamma/2)(\Delta + i\Gamma/2)} \right] + 2i|\Omega|^2 \left[ \frac{-\Delta - i\Gamma/2 + \Delta - i\Gamma/2}{(\Delta - i\Gamma/2)(\Delta + i\Gamma/2)} \right] \sigma_{bb} + \Gamma\sigma_{bb} = 0 \\
& \frac{-2|\Omega|^2(\Gamma/2)}{(\Delta - i\Gamma/2)(\Delta + i\Gamma/2)} + \frac{[4|\Omega|^2(\Gamma/2) + \Gamma(\Delta - i\Gamma/2)(\Delta + i\Gamma/2)]}{(\Delta - i\Gamma/2)(\Delta + i\Gamma/2)} \sigma_{bb} = 0 \\
& \sigma_{bb} = \frac{2|\Omega|^2(\Gamma/2)}{4|\Omega|^2(\Gamma/2) + \Gamma[\Delta^2 + (\Gamma/2)^2]} = \frac{2|\Omega|^2(\Gamma/2)}{(\Gamma/2)[4|\Omega|^2 + 2\Delta^2 + 2(\Gamma/2)^2]} \\
& \sigma_{bb} = \frac{2|\Omega|^2}{4|\Omega|^2 + 2\Delta^2 + 2(\Gamma/2)^2}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Agora substituindo a equação (3.40) em (3.38), vamos finalmente obter a coerência  $\sigma_{ab}$  tal como,

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab} &= -\Omega \frac{\left[ 1 - \frac{4|\Omega|^2}{4|\Omega|^2 + 2\Delta^2 + 2(\Gamma/2)^2} \right]}{\Delta + i\Gamma/2} \\
\sigma_{ab} &= -\Omega \frac{[4|\Omega|^2 + 2[\Delta^2 + (\Gamma/2)^2] - 4|\Omega|^2]}{[4|\Omega|^2 + 2\Delta^2 + 2(\Gamma/2)^2](\Delta + i\Gamma/2)} \\
\sigma_{ab} &= -\Omega \frac{2(\Delta + i\Gamma/2)(\Delta - i\Gamma/2)}{2(\Delta + i\Gamma/2) \left[ \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2|\Omega|^2 \right]} \\
\sigma_{ab} &= -\Omega \frac{(\Delta - i\Gamma/2)}{\left[ \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2|\Omega|^2 \right]} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

observe que  $[\Delta^2 + (\Gamma/2)^2] = (\Delta + i\Gamma/2)(\Delta - i\Gamma/2)$ .

Anteriormente, vimos que a interação do campo com o átomo gera uma polarização, que via formalismo do operador densidade pode ser escrito, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= N \text{tr}(\mathbf{d}\rho) \\
\mathbf{P} &= N \sum_j \langle \psi_j | \rho \mathbf{d} | \psi_j \rangle \\
\mathbf{P} &= N \sum_j \sum_k \langle \psi_j | \rho | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \mathbf{d} | \psi_j \rangle \\
\mathbf{P} &= N \sum_{jk} \mathbf{d}_{jk} \rho_{jk} \\
\mathbf{P} &= N \mathbf{d}(\rho_{ab} + \rho_{ba})
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{jk}$ , pois  $\mathbf{d}_{jk} = e(\mathbf{r}_{jk})$  e  $\mathbf{r}$  é a distância entre os polos, ou seja,  $\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_{kj}$ . Substituindo as variáveis lenta  $\rho_{ab} = \sigma_{ab}e^{i\omega t}$  e  $\rho_{ba} = \sigma_{ba}e^{-i\omega t}$  na equação (3.42),

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= N \mathbf{d}(\sigma_{ab}e^{i\omega t} + \sigma_{ba}e^{-i\omega t}) \\
\mathbf{P} &= N \mathbf{d}[\sigma_{ab}(\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)) + \sigma_{ba}(\cos(\omega t) - i \text{sen}(\omega t))] \\
\mathbf{P} &= N \mathbf{d}[\sigma_{ab}\cos(\omega t) + i\sigma_{ab}\text{sen}(\omega t) + \sigma_{ba}\cos(\omega t) - i\sigma_{ba}\text{sen}(\omega t)] \\
\mathbf{P} &= N \mathbf{d}[(\sigma_{ab} + \sigma_{ba})\cos(\omega t) - i(\sigma_{ba} - \sigma_{ab})\text{sen}(\omega t)].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Quando o campo encontra-se a baixa intensidade, a polarização gerada da interação com o átomo, pode ser descrita como uma função linear do campo.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{3.44}$$

onde  $\epsilon_0$  é a constante dielétrica do vácuo e  $\chi = \chi' + i\chi''$  é uma função complexa denominada susceptibilidade óptica linear. A parte imaginária desta função  $\chi''$  descreve a absorção ocorrente no meio, enquanto a parte real  $\chi'$  está associada à dispersão. Vamos redefinir a equação (3.42) do seguinte modo:

$$\mathbf{P} = N \mathbf{d}[\chi' \cos(\omega t) - \chi'' \sin(\omega t)]. \tag{3.45}$$

Através da equação (3.45) podemos dizer que  $\chi'$  é a componente que oscila em fase com o campo incidente, logo não dissipa energia, enquanto  $\chi''$  é a componente responsável pela absorção, pois está em quadratura com o campo. Portanto, a absorção está vinculada a parte imaginária,  $\chi''$ , da susceptibilidade, ao mesmo tempo que a parte real  $\chi'$  estar

vinculada à dispersão, exatamente como citado anteriormente, quando introduzimos a susceptibilidade óptica linear. Vamos mostrar que isso é verdade encontrando os valores de  $\chi'$  e  $\chi''$ , mas para isso assumimos que  $\Omega = \Omega^*$  o que não torna o problema menos geral.

Assim temos que a componente de dispersão tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\chi' &= (\sigma_{ab} + \sigma_{ba}) \\
\chi' &= \Omega \left[ -\frac{(\Delta - i\Gamma/2)}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} - \frac{(\Delta + i\Gamma/2)}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi' &= \Omega \left[ \frac{-2\Delta}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi' &= -2\Delta \left[ \frac{\Omega}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi' &= -2\Delta \mathcal{L}(\Delta)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

e a componente de absorção é dada por,

$$\begin{aligned}
\chi'' &= i(\sigma_{ba} - \sigma_{ab}) \\
\chi'' &= i\Omega \left[ -\frac{(\Delta + i\Gamma/2)}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} + \frac{(\Delta - i\Gamma/2)}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi'' &= i\Omega \left[ \frac{-i2\Gamma/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi'' &= \Gamma \left[ \frac{\Omega}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2|\Omega|^2} \right] \\
\chi'' &= \Gamma \mathcal{L}(\Delta)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde  $\mathcal{L}(\Delta) = \frac{\Omega}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2|\Omega|^2}$  é a curva Lorentziana de largura  $\Delta_\omega = 2\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + 2\Omega^2}$ . Note que para campo muito fraco a largura é,  $\Delta_\omega = \Gamma$ .

Portanto, a susceptibilidade é a função na qual estamos interessados, a fim de obtermos informações a respeito da interação do sistema com a radiação incidente. Sob a perspectiva do processo de relaxação, a componente da susceptibilidade que nos interessa é a parte imaginária, ou seja, a componente responsável pela absorção ( $\chi'' = \Gamma \mathcal{L}(\Delta)$ ):

$$\chi'' = \frac{\Gamma\Omega}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2|\Omega|^2}. \tag{3.48}$$

Vamos normalizar a absorção por  $\Gamma$  e assim obtemos,

$$\chi'' = \frac{4\Omega/\Gamma}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2 + 8\left(\frac{|\Omega|}{\Gamma}\right)^2}. \tag{3.49}$$

Do ponto de vista da taxa de relaxação  $\Gamma$  (relacionada ao tempo de vida), o sistema de dois níveis, interagindo com um campo eletromagnético aplicado externamente, é um dos mais simples possíveis. No entanto, com o objetivo de relacionar esta seção com a que virá adiante (EIT), vamos introduzir uma taxa de relaxação relacionada com a decoerência entre os estados “ $a$ ” e “ $b$ ”. Na prática, os mecanismos relacionados à esta taxa estão intimamente relacionados à densidade e/ou temperatura absoluta que o sistema se encontra, podendo, então, esta ser maior do que a  $\Gamma$  (decaimento natural).

Explicitamente, a taxa  $\gamma$  pode estar relacionada, por exemplo, à colisões do átomo de dois níveis com a parede da célula que o limita espacialmente. Adicionando este termo obteremos assim as equações,

$$\dot{\sigma}_{aa} = -i\Omega\sigma_{ba} + i\Omega^*\sigma_{ab} + \Gamma\sigma_{bb} \quad (3.50)$$

$$\dot{\sigma}_{bb} = -i\Omega^*\sigma_{ab} + i\Omega\sigma_{ba} - \Gamma\sigma_{bb} \quad (3.51)$$

$$\dot{\sigma}_{ab} = i \left[ \Delta + i \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma \right) \right] \sigma_{ab} + i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) \quad (3.52)$$

$$\dot{\sigma}_{ab} = -i \left[ \Delta - i \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma \right) \right] \sigma_{ab} - i\Omega(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}). \quad (3.53)$$

Para resolver esse sistema vamos procurar soluções no estado estacionário  $\dot{\sigma}_{ij} = 0$ , levar em conta que a população se conserva  $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$  e trabalhar de forma semelhante ao que foi feito anteriormente para encontrar a coerência  $\sigma_{ab}$ . Logo, vamos conseguir encontrar a equação,

$$\sigma_{ab} = \frac{-\Omega[\Delta - i(\Gamma/2 + \gamma)]}{\Delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma\right)^2 + 4\frac{\Omega^2}{\Gamma}\left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma\right)}. \quad (3.54)$$

Com o valor da coerência em mãos, podemos agora procurar a componente da susceptibilidade que representa a absorção. Para isso basta proceder de forma análoga ao que foi feito anteriormente de modo que alcance

$$\chi'' = \frac{4(1 + 2\gamma/\Gamma)\frac{\Omega}{\Gamma}}{1 + \frac{4\gamma}{\Gamma}\left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma}\right) + \frac{8\Omega^2}{\Gamma^2}\left(1 + \frac{2\gamma}{\Gamma}\right) + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2}, \quad (3.55)$$

onde está normalizada por  $\Gamma$ .

Como dito anteriormente, o objetivo deste capítulo é introduzir e resumir alguns resultados simples que apresentem mecanismos de alargamento devido a processos de

relaxação. Inicialmente, vamos mostrar a figura 3.3 para discutir uma característica que não está ligada a tais processos, mas importante em sistemas quânticos de dois níveis interagindo com campo externo.

A figura 3.3 mostra a parte imaginária da susceptibilidade em função da dessintonia do campo aplicado externamente (como dito antes, a absorção é proporcional à parte imaginária da susceptibilidade) para três valores distintos da frequência de Rabi (a intensidade experimental é proporcional ao quadrado da frequência de Rabi).

Como podemos observar, a curva apresenta um pico em  $\Delta = 0$ , caracterizando a ressonância atômica (máxima absorção). Além disto, um aspecto interessante é a maior largura à meia altura para curvas com maiores valor da frequência de Rabi. Este tipo de comportamento é conhecido com "alargamento por potência" e, como é evidente, ele acompanha, inclusive, uma diminuição na absorção. Esta diminuição é um efeito de saturação no sistema atômico.

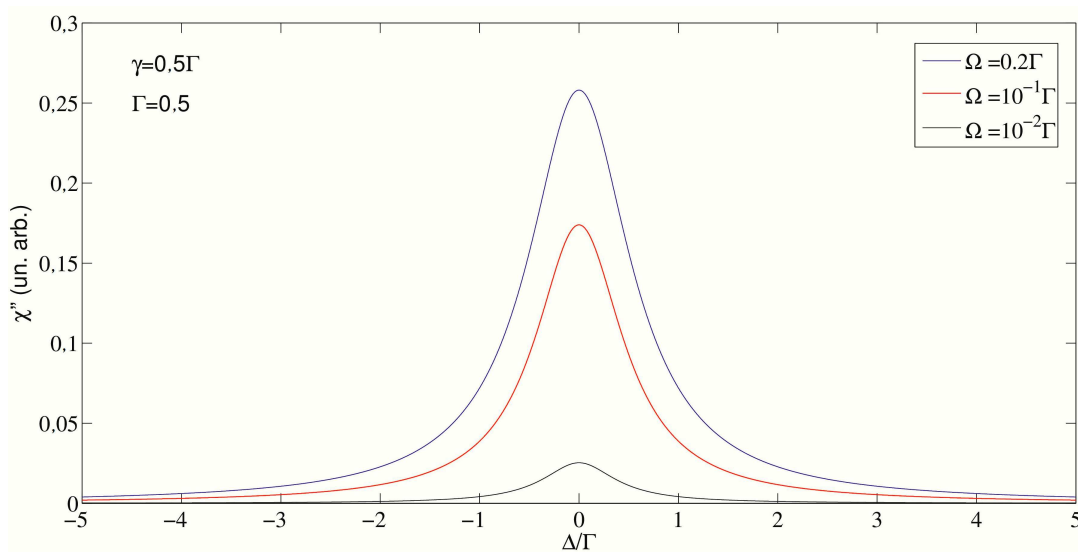


Figura 3.2: Curva de absorção destacando o comportamento de alargamento por potência.

Finalmente, após essa breve discussão sobre o alargamento por potência, vamos estudar o comportamento baseado na equação (3.55); isto nos auxiliará no entendimento da revisão e do trabalho.

Para trabalhar com um sistema real é preciso adicionar o termo de relaxação referente à emissão espontânea, mas esse termo diz respeito a uma característica natural de cada átomo. Podemos considerar um termo aditivo,  $\gamma$ , que é responsável pela perda de coerência (ou decoerência) relativa entre os dipolos induzidos nos átomos pela luz inci-

dente, devido principalmente às colisões interatômicas. Este não é um termo de relaxação característico do sistema, o que possibilita a sua variação e assim permiti a observação em diferentes situações. Logo, para deixar nosso modelo mais realístico e para podermos investigar o fenômeno de relaxação, vamos discutir como é o comportamento da absorção (ainda em função da dessintonia) quando o sistema apresenta uma taxa  $\gamma$ .

Na figura 3.3, assumimos valores bem distintos para a taxa  $\gamma$ , o que nos permite concluir que a largura cresce com o aumento de  $\gamma$  uma vez que este aumento representa o crescimento da decoerência, resultando assim em um decréscimo na população, o que representa o declínio da absorção.

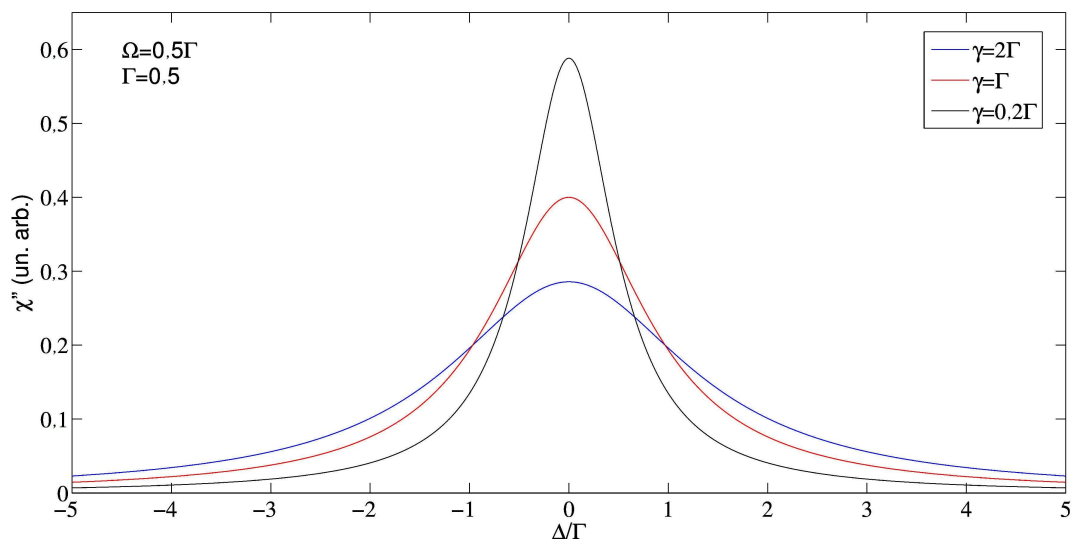


Figura 3.3: Curva de absorção para um termo de relaxação aditivo  $\gamma$ .

Neste sistema de dois níveis introduzimos de forma detalhada propriedades que serão omitidas no modelo a seguir e vimos que a decoerência está intimamente ligada ao processo de relaxação existente.

### 3.3 Sistema de três níveis - EIT

Ao preparar um sistema atômico numa superposição coerente de estados, sob certas condições, é possível eliminar a emissão de fluorescência. Aplicando dois feixes de laser, simultaneamente no meio atômico específico, podemos manipular essa configuração de forma a adquirir condições apropriadas para que seja possível eliminar a absorção de um dos feixes. Este é o efeito chamado de Transparência Eletromagneticamente Induzida, mais conhecido pela sigla EIT (Electromagnetically Induced Transparency) [16].

Nesta seção analisaremos o fenômeno de EIT por meio do modelo teórico de três níveis, na configuração  $\Lambda$ . Aqui não detalharemos os cálculos, como feito na seção anterior com o modelo de dois níveis, o nosso objetivo é explicar como funciona o modelo analisado e através da curva de absorção, apresentar e discutir resultados. Como feito anteriormente, vamos variar um termo que representa a decoerência no sistema e verificar o comportamento da absorção. Descreveremos a ressonância de EIT alargada homogeneamente<sup>1</sup> onde os principais mecanismos envolvidos neste processo de alargamento do espectro são os de decaimento populacional relacionados ao tempo de vida do estado excitado e a intensidade do feixe de bombeamento  $\Omega$ .

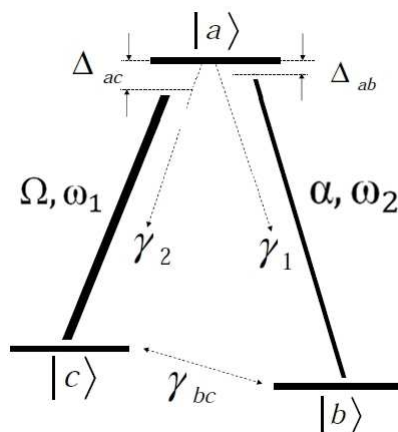


Figura 3.4: Átomo de três níveis interagindo com dois campos eletromagnéticos numa configuração do tipo  $\Lambda$ .

Um sistema de três níveis numa configuração  $\Lambda$ , na qual é acoplado dois campos eletromagnéticos idênticos ao usado no sistema de dois níveis, com frequência  $\omega_1$  e  $\omega_2$  respectivamente, de modo que a população do sistema é conservada, de acordo com a figura 3.4. O estado excitado é dado pelo estado  $|a\rangle$  e os estados  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$  são os estados fundamentais do sistema. A interação é a mesma vista na seção anterior, neste caso, um átomo interage com o feixe de sonda com frequência de Rabi  $\alpha$ , acoplado aos estados  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ , e com feixe de bombeamento com frequência de Rabi  $\Omega$  acoplado aos estados  $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ , cuja as transições são apenas do tipo dipolo elétrico, mas entre os estados fundamentais não estão acoplados por essa transição.

O feixe de bombeamento tem dessintonia  $\Delta_{ab} = \omega_{ab} - \omega_1$  e o feixe sonda tem dessintonia  $\Delta_{ac} = \omega_{ac} - \omega_2$ , onde  $\omega_{ab}$  e  $\omega_{ac}$  são frequências das transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e

<sup>1</sup>Homogeneamente no sentido que os átomos são indistinguíveis e de mesma energia.



$|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  respectivamente. O estado excitado decai com uma taxa  $\gamma_2$  entre  $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  e uma taxa  $\gamma_1$  entre  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ , mas considerando que os estados  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$  são muito próximos, podemos dizer que as taxas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são iguais e portanto  $\Gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  (também relacionada ao tempo de vida), já a taxa de decaimento da coerência (ou decoerência) entre os estados fundamentais é representada por  $\gamma_{bc}$

A mensuração do sinal de EIT é feita sobre a quantidade de energia absorvida pelo feixe de sonda  $\alpha$ , e indiretamente na coerência induzida nos níveis atômicos  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ . O feixe de sonda tem uma baixa intensidade, assim temos a vantagem de poder desprezar efeitos não-lineares, quando escolhemos este feixe para verificar a absorção. Assim como no sistema de dois níveis, o observável físico envolvido no processo é a susceptibilidade, logo podemos obter a absorção analisando a sua parte imaginária. Mas para definir a susceptibilidade, é necessário determinar a coerência induzida pelos feixes de sonda e bombeamento, de forma semelhante ao sistema de dois níveis. A solução das equações de Bloch em regime estacionário permite determinar a coerência através de métodos perturbativos. Com isso, temos que a coerência no estado estacionário é dado por:

$$\sigma_{ab}^{(1)} = \frac{i\alpha\Gamma_{cb}}{\Gamma_{cb}\Gamma_{ab} + \Omega^2} \quad (3.56)$$

onde  $\sigma_{ab}^{(1)}$  está na primeira ordem de perturbação,  $\Gamma_{ab} = \Gamma + i\Delta_{ab}$  e  $\Gamma_{cb} = \gamma_{bc} + i\Delta_{bc}$ .

A equação (3.44) é uma função linear que representa a polarização gerada da interação do átomo o campo a baixa intensidade. Reescrevendo essa equação para o feixe de sonda obtemos,

$$P_\alpha = Nd_{ab}\sigma_{ab}^{(1)} = \epsilon_0\chi E. \quad (3.57)$$

onde  $N$  é a densidade de átomos na região,  $d_{ab}$  o momento de dipolo induzido,  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo,  $\chi$  é a susceptibilidade e  $E$  o campo eletromagnético. Podemos agora expressar a susceptibilidade em termos da coerência a partir da equação (3.57), como  $\sigma_{ab} = \frac{\epsilon_0\chi E}{Nd_{ab}}$  e também definir a frequência de Rabi  $\alpha = \frac{d_{ab}E}{\hbar}$ . Substituindo essas informações na equação (3.56) temos,

$$\chi = \frac{i\eta\Gamma_{cb}}{\Gamma_{cb}\Gamma_{ab} + \Omega^2} \quad (3.58)$$

onde  $\eta = \frac{Nd_{ab}^2}{\epsilon_0\hbar}$  é constante.

Os níveis mais baixos de energia são bem próximos, no sentido que podemos considerar que possuem a mesma energia, ou seja, são degenerados. Portanto, podemos expressar as frequências naturais como  $\omega_{ac} = \omega_{ab} = \omega_2$ , desta forma as dessintonias podem ser escrita em torno de um termo geral, relativa à diferença entre os feixes. Definindo  $\Delta \equiv \omega_2 - \omega_1$  temos,

$$\Delta_{ab} = \omega_2 - \omega_1 = \Delta \quad (3.59)$$

$$\Delta_{ac} = \omega_2 - \omega_2 = 0 \quad (3.60)$$

$$\Delta_{ab} = (\omega_2 - \omega_1) - 0 = \Delta \quad (3.61)$$

Podemos agora reescrever a equação (3.58) como:

$$\chi = \frac{i\eta(\gamma_{bc} + i\Delta)}{(\gamma_{bc} + i\Delta)(\Gamma + i\Delta) + \Omega^2}. \quad (3.62)$$

Da seção anterior sabemos que a parte real da susceptibilidade representa à dispersão do sistema, e a parte imaginária a absorção. Para determinar a parte imaginária,  $\chi''$ , que é o nosso interesse aqui, basta multiplicar e dividir a equação (3.62) pelo conjugado do seu denominador

$$\chi'' = \frac{\eta[\Delta^2\Gamma + \gamma_{bc}(\Omega^2 + \gamma_{bc}\Gamma)]}{\Delta^2(\gamma_{bc} + \Gamma)^2 + (\Delta^2 - \gamma_{bc}\Gamma - \Omega^2)^2}. \quad (3.63)$$

Normalizando a absorção por  $\Gamma$  temos que,

$$\chi'' = \frac{\eta\left[\Delta^2 + \gamma_{bc}\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \gamma_{bc}\right)\right]}{\left[\frac{\Delta^4}{\Gamma} + \frac{\Delta^2}{\Gamma}(\gamma_{bc}^2 - 2\Omega^2 + \Gamma^2) + \gamma_{bc}\Gamma + \frac{\Omega^2}{\Gamma}(2\gamma_{bc}\Gamma + \Omega^2)\right]}. \quad (3.64)$$

Como feito anteriormente para o sistema de dois níveis, vamos plotar as curvas de absorção em função da dissintonia  $\Delta$ . Vamos plotar as curvas variando a decoerência entre os estados fundamentais.

Analisando a figura 3.5, observamos o efeito da taxa de decaimento  $\gamma_{bc}$  entre os estados  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$ . Quando essa taxa,  $\gamma_{bc}$ , tem um valor pequeno, temos um forte efeito de transparência, chegando a ser praticamente por completo, na ressonância se  $\gamma_{bc}$  é bastante reduzido; no entanto, o bombeamento óptico se torna mais acentuado. Conforme a taxa  $\gamma_{bc}$  vai aumentando, a transparência diminui, pois para  $\gamma$  elevado, a decoerência diminui “destruindo” rapidamente o estado escuro, o que limita a transparência obtida

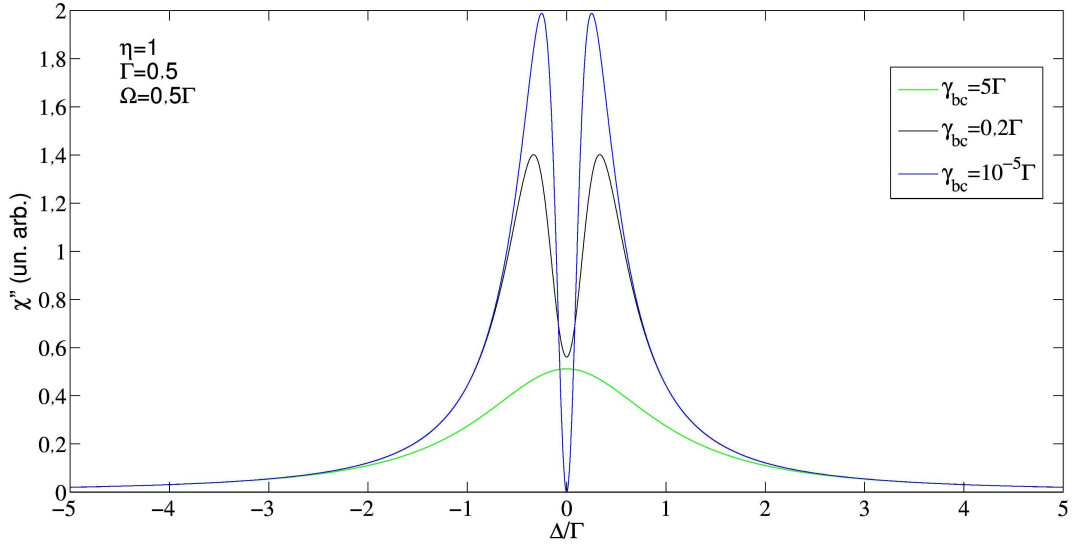


Figura 3.5: Curva de absorção para EIT

na ressonância, uma vez que este efeito é resultado do bombeamento dos átomos para um estado escuro, que é uma superposição coerente dos estados  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$ . Esse estado é transparente ao campo de radiação e, por esse motivo, é denominado Estado Escuro.

Analisando estes dois últimos sistemas simples, podemos ter uma ideia do papel de termos relacionados à relaxação, sejam eles de decaimento natural do estado excitado ou correspondente à superposição quântica.

Para continuarmos, portanto, nossa revisão sobre tais processos, vamos estudar o MJC ideal (sem termos de relaxação) e, posteriormente, um modelo mais realístico. Isto será importante para correlacionarmos com nosso estudo via TFD.

### 3.4 Modelo de Jaynes-Cummings

Os modelos vistos até aqui, sistema de dois e três níveis, descrevem a interação semi-clássica entre o átomo e o campo eletromagnético, onde o átomo recebe um tratamento quântico, enquanto o campo um tratamento clássico. O modelo de Jaynes-Cummings (MJC) descreve a interação átomo-campo num regime completamente quântico, ou seja, o campo eletromagnético é quantizado.

O MJC descreve a interação entre um modo de campo eletromagnético quantizado e um átomo de dois níveis, ressonante ou quase-ressonante com o modo do campo. Este é o modelo mais simples que descreve a interação de dois sistemas quânticos: campo (um oscilador harmônico) acoplado ao átomo (um sistema de dois níveis).

Definindo os auto-estados de energia excitado  $|e\rangle$  com energia  $\frac{1}{2}\hbar\omega_a$  e fundamental  $|f\rangle$  com energia  $-\frac{1}{2}\hbar\omega_a$ , podemos escrever o hamiltoniano para o átomo da seguinte forma,

$$\mathcal{H}_a = E_f|f\rangle\langle f| + E_e|e\rangle\langle e| \quad (3.65)$$

onde  $E_f$  e  $E_e$  é a energia no estado fundamental e excitado respectivamente. O hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado é dado por,

$$\mathcal{H}_c = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (3.66)$$

Podemos olhar apenas para um modo do campo de modo que, um dado vetor de base definido pelo operado  $a_k^\dagger a_k$ , em que  $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$  é denominado base de Fock, é interpretado como um estado onde o campo possui  $n$  excitações, ou fótons, e os operadores  $a_k^\dagger$  e  $a_k$  são, respectivamente, os operadores criação e aniquilação. O operador  $a_k^\dagger a_k$  é então chamado de operador número, pois corresponde ao observável número de fótons do modo. Então, o hamiltoniano de um único modo do campo eletromagnético pode ser escrito como,

$$\mathcal{H}_c = \hbar\omega_c a^\dagger a \quad (3.67)$$

onde  $\omega_c$  é a frequência referente ao campo.

O hamiltoniano de interação entre o átomo e o campo é escrita pela aproximação de dipolo,

$$\mathcal{H}_i = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.68)$$

lembrando que  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são os vetores momento de dipolo elétrico do átomo e campo elétrico, respectivamente. O campo elétrico quantizado de interesse pode ser escrito como [12]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}, t) = \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} (a + a^\dagger) \text{sen}(k\mathbf{z}). \quad (3.69)$$

Devemos transformar os vetores em operadores para estabelecer uma conexão com a mecânica quântica. Podemos representar o operador  $\mathcal{D}$  na base do hamiltoniano do átomo,

$$\mathcal{D} = \sum_n \sum_m |n\rangle\langle n|\mathbf{D}|m\rangle\langle m|. \quad (3.70)$$

As transições permitidas entre o estado fundamental e o estado excitado podem ser obtidas calculando a matriz de transição de dipolo elétrico. Logo,  $\langle n|\mathbf{D}|m\rangle = 0$  para  $n = m$  por simetria. Além disso,

$$d_{e,f} = \langle n|\mathbf{D} \cdot \hat{\varepsilon}|m\rangle = \langle m|\mathbf{D} \cdot \hat{\varepsilon}|n\rangle = d_{f,e}, \quad (3.71)$$

ou seja,  $d_{e,f}$  é um vetor com coordenadas reais e, por simplicidade,  $d_{e,f} = d_{f,e} = d$ . Então, na base dos estados atômicos,  $\mathcal{D}$  tem a seguinte representação:

$$\mathcal{D} = d(|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|). \quad (3.72)$$

Os operadores de transição atômica, responsáveis por levar o átomo do estado fundamental ao excitado, e de forma inversa, do estado excitado ao fundamental, são respectivamente

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle f|, \quad (3.73)$$

$$\sigma_- = |f\rangle\langle e|, \quad (3.74)$$

$$\sigma_z = [\sigma_+, \sigma_-], \quad (3.75)$$

onde  $\sigma_z$  é o operador inversão de população.

Finalmente, podemos reescrever o operador momento de dipolo da seguinte forma:

$$\mathcal{D} = d(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (3.76)$$

Assim, o hamiltoniano de interação fica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= -[d(\sigma_+ + \sigma_-)] \cdot \left[ \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} (a + a^\dagger) \text{sen}(k\mathbf{z}) \right] \\ \mathcal{H}_i &= \left[ -d \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen}(k\mathbf{z}) \right] (\sigma_+ + \sigma_-) \cdot (a + a^\dagger) \\ \mathcal{H}_i &= \lambda \hbar (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger) \\ \mathcal{H}_i &= \lambda \hbar (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a,) \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde  $\lambda = \left[ -d \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen}(k\mathbf{z}) \right] / \hbar$ . O primeiro termo desse Hamiltoniano descreve o processo onde o átomo é excitado e o campo perde um fóton, e o segundo termo, o processo inverso, o átomo decai para o estado fundamental e o campo ganha um fóton; juntos, esses dois processos são conservativos. O terceiro termo leva o átomo para o estado excitado e

o campo ganha um fóton, e o quarto termo leva o átomo para o estado fundamental e o campo perde um fóton; esses dois processos não são conservativos. Este comportamento está associado às oscilações para uma situação próximo da ressonância. Os dois primeiros termos do hamiltoniano de interação,  $\mathcal{H}_i$ , evoluem de maneira proporcional a  $e^{\pm i(\omega_a - \omega_c)}$ , enquanto os dois últimos evoluem segundo  $e^{\pm i(\omega_a + \omega_c)}$ . Quando  $\omega_c \approx \omega_a$ , ou seja, próximo da ressonância, os dois últimos termos oscilarão mais rapidamente do que os dois primeiros, contribuindo de forma insignificante e assim podendo ser desprezados. Essa aproximação já foi vista neste capítulo e é conhecida por aproximação de onda girante. Portanto, o hamiltoniano de Jaynes-Cummings tem a seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \lambda\hbar(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (3.78)$$

### 3.4.1 Dinâmica quântica

Introduzindo o conceito de quadro de Interação (ou de Dirac) temos que dividir o hamiltoniano  $\mathcal{H}$  em duas componentes

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_i, \quad (3.79)$$

onde  $\mathcal{H}_0$  é definido pela soma entre  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_c$  e representa o hamiltoniano livre

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a, \quad (3.80)$$

enquanto  $\mathcal{H}_i$  representa o hamiltoniano de interação visto anteriormente. Portanto, na representação de Schrödinger podemos escrever a seguinte equação,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_i)|\Psi\rangle. \quad (3.81)$$

Podemos escrever a equação (3.81) na representação de interação através da transformação unitária,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}}|\Psi\rangle. \quad (3.82)$$

Assim, a dinâmica do sistema será regida pela equação

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{\mathcal{H}}_i|\tilde{\Psi}\rangle, \quad (3.83)$$

onde  $\tilde{\mathcal{H}}_i = e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}}\mathcal{H}_i e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}}$ .

Fazendo uso do Lema de Baker-Hausdorff que tem a forma

$$e^{\lambda\mathcal{A}}\mathcal{B}e^{-\lambda\mathcal{A}} = \mathcal{B} + \lambda[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \cdots [\mathcal{A}, \mathcal{B}]]] \cdots] + \cdots, \quad (3.84)$$

e com o uso das relações de comutação que são satisfeitos pelos operadores  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_i$

$$[\sigma_z, \sigma_+] = \sigma_z\sigma_+ - \sigma_+\sigma_z = 2\sigma_+ \quad (3.85)$$

$$[\sigma_z, \sigma_-] = \sigma_z\sigma_- - \sigma_-\sigma_z = -2\sigma_- \quad (3.86)$$

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = -a \quad (3.87)$$

$$[a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger, \quad (3.88)$$

podemos reescrever  $\tilde{\mathcal{H}}_i$  como:

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \lambda\hbar(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}). \quad (3.89)$$

O hamiltoniano de Jaynes-Cummings pode ser facilmente expresso pelo conjunto dos estados do átomo e dos estados de Fock do campo, uma vez que, o conjunto de autoestados de  $\mathcal{H}_0$ ,  $\{|e, n\rangle, |f, n\rangle\}$ , forma uma base completa para o espaço gerado por  $\text{Átomo} \otimes \text{Campo}$ . Podemos escrever o estado do sistema como uma combinação linear desses:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{f,n}(t)|f, n\rangle, \quad (3.90)$$

onde  $c_{e,n}$  e  $c_{f,n}$  são as amplitudes de probabilidade.

Substituindo as equações (3.89) e (3.90) na equação Schrödinger, equação (3.83), temos:

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \dot{c}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{c}_{f,n}(t)|f, n\rangle &= \lambda\hbar \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t})(c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{f,n}(t)|f, n\rangle) \\ i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \dot{c}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{c}_{f,n}(t)|f, n\rangle &= \lambda\hbar \sum_{n=0}^{\infty} c_{f,n}(t)\sqrt{n}e^{i\Delta t}|e, n-1\rangle + c_{e,n}(t)\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}|f, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (3.91)$$

O hamiltoniano de interação somente realiza transição de estado  $|e, n\rangle$  para o estado  $|f, n+1\rangle$  e de forma oposta, podemos considerar apenas a evolução das amplitudes de probabilidade  $c_{e,n}$  e  $c_{f,n+1}$  [30]. Portanto, a equação (3.91) fica

$$\dot{c}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{c}_{f,n+1}(t)|f, n+1\rangle = -i\lambda\sqrt{n+1}(c_{f,n+1}(t)e^{i\Delta t}|e, n\rangle + c_{e,n}(t)e^{-i\Delta t}|f, n+1\rangle). \quad (3.92)$$

Projetando a equação (3.92) acima em  $\langle f, n' + 1 |$  e  $\langle e, n' |$ , obtemos um sistema de equações acopladas:

$$\dot{c}_{f,n+1}(t) = -i\lambda\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{e,n}(t) \quad (3.93)$$

$$\dot{c}_{e,n}(t) = -i\lambda\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{f,n+1}(t). \quad (3.94)$$

Existem algumas formas de resolver esse sistema, por exemplo, substituir a equação (3.94) na equação (3.93), um vez que  $\dot{c}_{f,n+1}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(c_{f,n+1}(t))$ , encontrando a equação diferencial de segunda ordem,

$$\ddot{c}_{e,n}(t) - i\Delta\dot{c}_{e,n}(t) + \lambda^2(n+1)c_{e,n}(t) = 0. \quad (3.95)$$

A solução desta equação diferencial tem a forma exponencial tal como,

$$c_{e,n} = e^{i\beta t} \quad (3.96)$$

$$\dot{c}_{e,n} = i\beta e^{i\beta t} \quad (3.97)$$

$$\ddot{c}_{e,n} = -\beta^2 e^{i\beta t}. \quad (3.98)$$

Substituindo este conjunto de soluções na equação (3.95) encontramos,

$$\beta = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}}{2} = \frac{1}{2}(\Delta \pm \Omega_n) \quad (3.99)$$

onde  $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}$  é a frequência de Rabi que depende do número de fótons. Notem que este modelo já revela o aspecto quântico não intuitivo, pois o sistema oscila com  $\Omega_n$  mesmo com  $n = 0$  (vácuo), diferente do caso clássico, que  $\Omega$  é identicamente nulo se estivermos no vácuo.

A solução para  $c_{e,n}$  será a combinação linear das duas soluções de  $\beta$ , ou seja,

$$c_{e,n} = Ae^{i\beta_+ t} + Be^{i\beta_- t}. \quad (3.100)$$

Para encontrar as constantes  $A$  e  $B$  vamos usar as condições iniciais, que nos leva ao estado estacionário, onde,  $c_{e,n} = c_n(0)$  e  $c_{f,n+1} = 0$ , no qual  $c_n(0)$  corresponde a amplitude do estado inicial do campo eletromagnético. Assim, os valores de  $A$  e  $B$  são



$$A = \frac{c_n(0)}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega_n}\right) \quad (3.101)$$

$$B = \frac{c_n(0)}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega_n}\right). \quad (3.102)$$

A solução do coeficiente  $c_{e,n}(t)$  é finalmente dada como

$$c_{e,n}(t) = c_n(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\Delta}{2}t}, \quad (3.103)$$

de forma análoga o coeficiente  $c_{f,n+1}$  pode ser encontrado usando a condição inicial, dada mais acima,  $c_{f,n+1} = 0$ . Assim,

$$c_{f,n+1}(t) = -c_n(0) \left[ \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\Delta}{2}t}. \quad (3.104)$$

Substituindo as equações (3.103) e (3.104) na equação (3.90) vamos obter o estado para o sistema. Lembrando que estamos considerando apenas a evolução das amplitudes de probabilidade  $c_{e,n}$  e  $c_{f,n+1}$ , temos que o estado do sistema é da forma

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{i\frac{\Delta}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] |e, n\rangle - \left[ \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] |f, n+1\rangle \right\}. \quad (3.105)$$

Considerando um estado inicial  $|\tilde{\Psi}(0)\rangle$ , em que o estado coerente do campo  $|\alpha\rangle$ , interage com o átomo de maneira ressonante ( $\Delta = 0$ ) temos,  $c_n(0) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$ . Logo,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \left[ \cos(\lambda\sqrt{n+1}t) |e, n\rangle - i \operatorname{sen}(\lambda\sqrt{n+1}t) |f, n+1\rangle \right]. \quad (3.106)$$

Podemos agora calcular a inversão de população,  $W(t)$ , que dá a diferença entre as probabilidades de encontrar o átomo nos estados excitado e fundamental,

$$\begin{aligned} W(t) = \langle \sigma_z \rangle &= \langle \tilde{\Psi} | \sigma_z | \tilde{\Psi} \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \cos(2\lambda\sqrt{n+1}t). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Chamando  $\bar{n} = |\alpha|^2$  de número médio de fótons do campo, temos então que

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \quad (3.108)$$

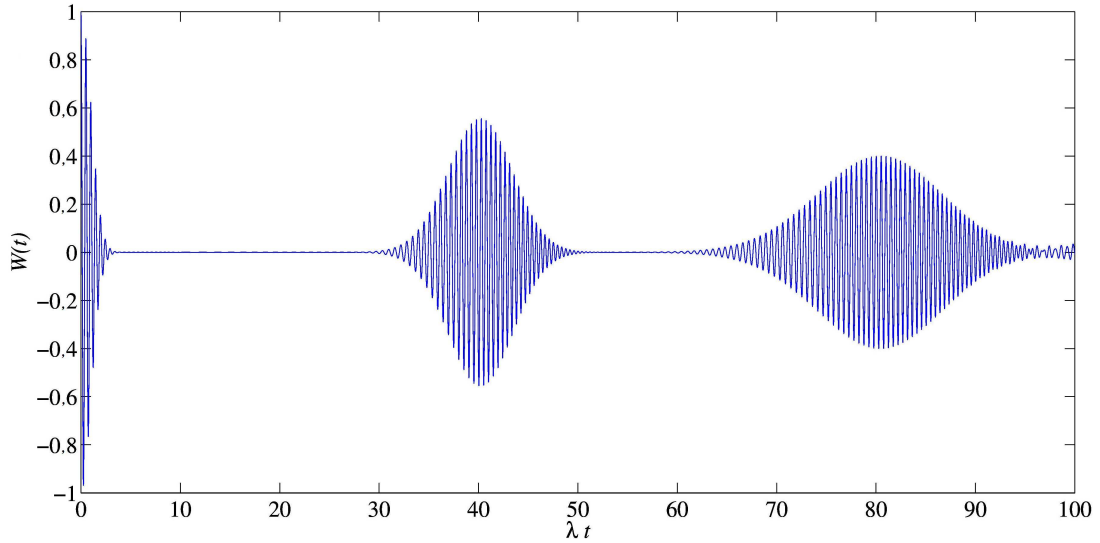


Figura 3.6: Inversão de população para  $\bar{n} = 40$ .

A figura 3.6 representa a curva de inversão de população, pelo qual é possível observar o fenômeno conhecido como colapsos e ressurgimentos. Este fenômeno advém da interação de um átomo com o estado coerente do campo da luz, devido à defasagem, provocada pela diferença de frequência entre cada um dos  $n$  fótons que formam o estado coerente. A inversão de população é composta pela superposição das oscilações geradas pela interação do átomo com cada estado de Fock, o que provoca uma incomensurabilidade das frequências de oscilações de cada termo da série.

Logo que o sistema passa a interagir, a probabilidade de se encontrar o átomo no estado fundamental ou excitado é maior, mas após um determinado período de tempo, a coerência quântica colapsa, reduzindo a zero o valor da inversão de população. No entanto, após um certo período de tempo, os termos da série voltam a se encontrar quase em fase novamente e a coerência quântica ressurgir de forma espontânea, mas parcialmente.

### 3.4.2 Inversão de população para o caso dissipativo

Na seção anterior não consideramos a ação do ambiente, que é uma boa aproximação quando a cavidade tem um fator de qualidade elevado. No entanto, experimentalmente, um fator de qualidade elevado ao ponto de ser possível desprezar a ação do ambiente não é plausível, mas podemos ignorar outros tipos de relaxação envolvidas, tal como, o decaimento espontâneo do átomo. Portanto, para um modelo realístico a dissipação do campo na cavidade, devido a interação com o ambiente, deve ser considerado.

Com intuito de discutir um pouco mais deste sistema sob a perspectiva da relaxação, vamos expor um resultado interessante e já investigado por Clarissa do Vale da Silva Lima [9]. Assim, para introduzir no sistema a ação do ambiente, este é modelado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico. Nessas condições, o operador densidade, que gera a equação que descreve a inversão de população é expresso como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & \left[ \cos(\mathcal{B}) - \frac{i\Delta t}{2\mathcal{B}} \text{sen}(\mathcal{B}) \right] |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| \otimes |e\rangle\langle e| \left[ \cos(\mathcal{B}) - \frac{i\Delta t}{2\mathcal{B}} \text{sen}(\mathcal{B}) \right] \\ & + \left[ \cos(\mathcal{B}) - \frac{i\Delta t}{2\mathcal{B}} \text{sen}(\mathcal{B}) \right] |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| \otimes |e\rangle\langle f| \left[ \frac{i\lambda t}{2\mathcal{B}} a \text{sen}(\mathcal{B}) \right] \\ & - \left[ \frac{i\lambda t}{2\mathcal{B}} a^\dagger \text{sen}(\mathcal{B}) \right] |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| \otimes |f\rangle\langle e| \left[ \cos(\mathcal{B}) + \frac{i\Delta t}{2\mathcal{B}} \text{sen}(\mathcal{B}) \right] \\ & + \left[ \frac{2\lambda^2 t}{\mathcal{B}} a^\dagger \text{sen}(\mathcal{B}) \right] |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| \otimes |f\rangle\langle f| \left[ \frac{t}{2\mathcal{B}} a \text{sen}(\mathcal{B}) \right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde  $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda a a^\dagger}}{2} t$  e  $\alpha(t) = \alpha e^{-\gamma t}$ .

A inversão de população para o sistema é encontrada a partir da equação (3.109) e é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(t) &= \text{tr}(\sigma_z \rho^{(1)}(t)) \\ &= e^{-|\alpha|^2 e^{-2\gamma t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^2 n e^{-2n\gamma t}}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} [\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)\cos(\Omega_n t)], \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde  $\gamma$  é a taxa de dissipação de fótons da cavidade e  $\Omega_n = \Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)$ .

A partir da equação (3.110) é possível plotar a curva de inversão da população em função do tempo. Na referência citada nesta subseção há uma figura relevante ao nosso proposito. Na figura 4.1<sup>2</sup>, foi plotado quatro gráficos para valores distintos de  $\gamma$  e observado o comportamento de cada uma das curvas de uma forma conjunta. Note que  $|\alpha(t)|^2 = \bar{n} e^{-2\gamma t} \equiv \bar{n}(t)$  é o valor esperado do número médio de fótons.

Na figura 3.7(a) a curva de inversão de população comporta-se de forma aproximada do caso sem dissipação, devido ao baixo valor de  $\gamma$  essa reação era algo esperado. Conforme o valor de  $\gamma$  aumenta, os tempos de ressurgimentos são antecipados, pois as interferências quânticas responsáveis pelos colapsos vão se degradando em um intervalo de tempo cada vez menor ( $1/\gamma$ ), chegando a um limite onde o fenômeno quântico não pode ser mais observado. Quando  $\gamma \approx 1$ , como na figura 3.7(d), não é possível distinguir, a partir

<sup>2</sup>Figura 4.1 da dissertação de mestrado da Clarissa do Vale da Silva Lima .

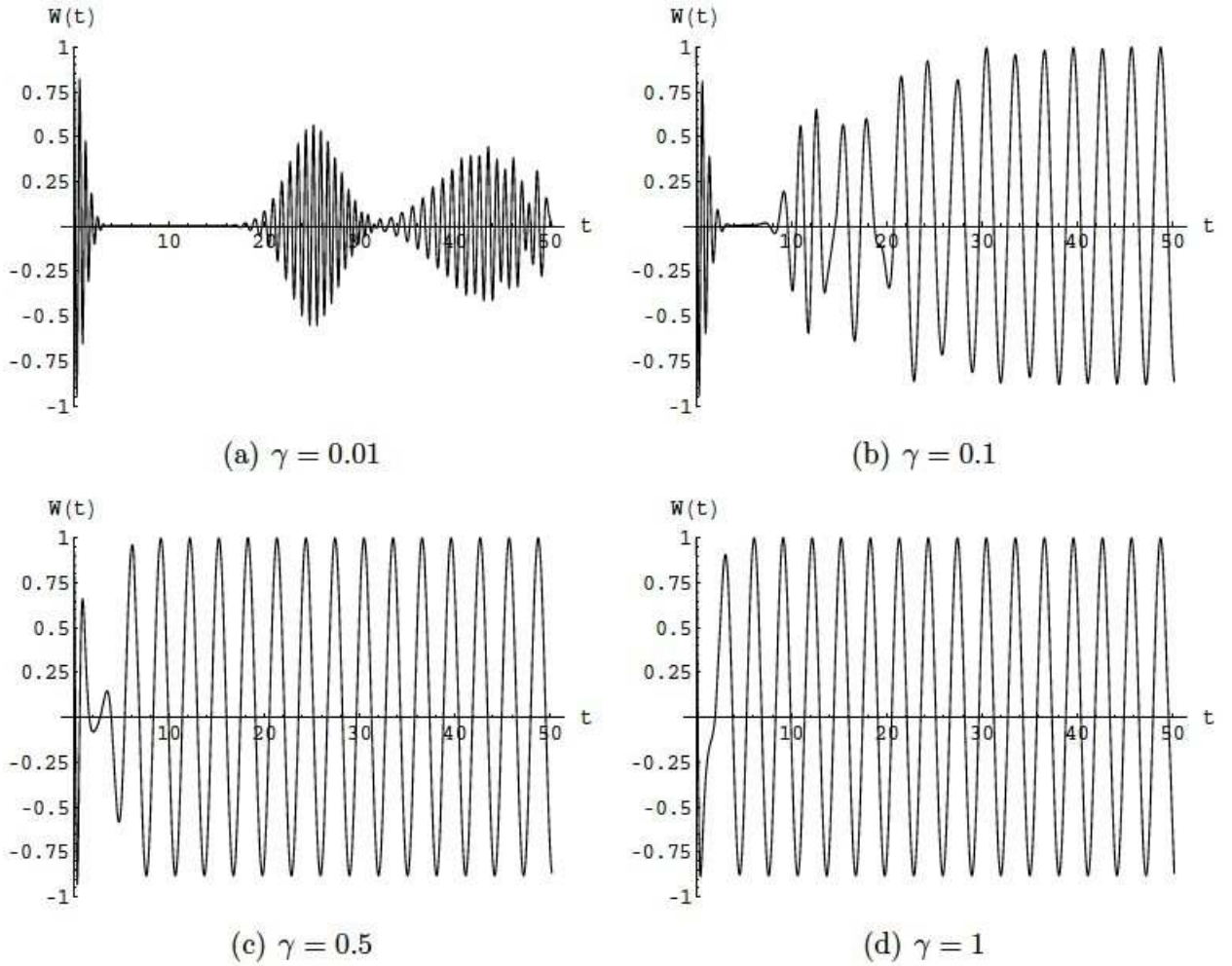


Figura 3.7: Inversão de população com dissipação com  $\alpha = 5$ ,  $\Delta = 0.5$  e  $\lambda = 1$ .

de uma dinâmica quântica ou semi-clássica, a medida da inversão quântica, pois nesta região, a inversão de população quântica se comporta da mesma forma que a inversão de população clássica.

Durante esse capítulo observamos a ação de processos de relaxação de alguns modelos bem conhecidos na literatura, esse tipo fenômeno é de grande interesse para o nosso trabalho, pois nos permitirá fazer um paralelo junto aos nossos resultados. É importante mencionar que embora os três casos revisados neste capítulo tenham sido investigados no contexto de relaxação, cada um possui fundamental diferença. Note que no último caso (MJC), o estudo correspondem à perda de fótons na cavidade, enquanto que os dois primeiros são fenômenos relacionados com o decaimento e/ou decoerência dos estados atômicos. No próximo capítulo vamos, analisar novamente o MJC, mas agora, utilizando a Teoria de Campo Térmico. Passaremos a ver o nosso trabalho efetivamente.

# Capítulo 4

## Dissipação térmica descrito pela TFD (*Thermo Field Dynamics*)

Neste capítulo vamos introduzir a teoria da Dinâmica de Campo Térmico, mais conhecida por sua grafia em inglês como, Thermo Field Dynamics (TFD), para que em seguida possamos analisar o artigo publicado na revista *Physica A*, que se chama *A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*, que foi a base para o desenvolvimento neste trabalho.

### 4.1 TFD (*Thermo Field Dynamics*)

Desenvolvida por Hiroomi Umezawa e Yasushi Takahashi em 1975, a TFD é uma formulação a tempo real, onde o espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$  é duplicado quando a ação do reservatório sobre o sistema é levado em consideração, o que caracteriza uma duplicação dos graus de liberdade do sistema [33].

A grandeza fundamental da Mecânica Estatística do equilíbrio é a média estatística de um observável  $\mathcal{A}$ , definida, no ensemble canônico à temperatura  $T$ , como:

$$\langle \mathcal{A} \rangle \equiv Tr[\rho(\beta)\mathcal{A}] = \frac{1}{z(\beta)}Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}\mathcal{A}], \quad (4.1)$$

onde  $z(\beta)$  é a função partição que é dada como  $z(\beta) = Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}]$ ,  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano e  $\beta$  é dado por  $\beta = 1/\kappa_B T$ , onde  $T$  é a temperatura e  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann. Levando em conta essas observações iremos introduzir, a grosso modo, a TFD.

A TFD foi desenvolvida buscando-se construir uma representação no qual as médias estatísticas no ensemble coincidam, ou seja, o que procuramos é um estado no qual o seu valor esperado seja igual a média estatística de um operador. O estado termalizado  $|0(\beta)\rangle$  é conhecido como vácuo térmico. De acordo com o que busca a teoria, o valor esperado em um vácuo térmico será dado por,

$$\langle 0(\beta)|\mathcal{A}|0(\beta)\rangle = \langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{A}]. \quad (4.2)$$

Lembrando que, para um sistema em equilíbrio, a média de um operador  $\mathcal{A}$  é dado por,

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{A}]. \quad (4.3)$$

Usando a base formada pelos autoestados  $|n\rangle$  do hamiltoniano  $\mathcal{H}$  temos,

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n \langle n|e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{A}|n\rangle; \quad (4.4)$$

como  $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ , onde  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ , temos

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n \langle n|e^{-\beta E_n} \mathcal{A}|n\rangle \quad (4.5)$$

e assim,

$$\langle 0(\beta)|\mathcal{A}|0(\beta)\rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|\mathcal{A}|n\rangle. \quad (4.6)$$

Podemos escrever o estado termalizado, de acordo com a álgebra do espaço de  $\mathbb{H}$ , da seguinte forma:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta)|n\rangle. \quad (4.7)$$

Multiplicando pela esquerda por  $\langle m|$

$$\langle m|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta)\langle m|n\rangle, \quad (4.8)$$

e usando a condição de ortonormalidade  $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$  temos,

$$g_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle, \quad (4.9)$$

onde  $g_n(\beta)$  é uma função par. Dessa forma o valor esperado em um vácuo térmico nos dá uma relação do tipo:

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | \mathcal{A} | 0(\beta) \rangle &= \sum_n \sum_m g_n^* g_m \langle n | \mathcal{A} | m \rangle \\
\sum_n \sum_m g_n^* g_m \langle n | \mathcal{A} | m \rangle &= \frac{1}{z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle \\
\sum_n \sum_m g_n^* g_m \langle n | \mathcal{A} | m \rangle &= \frac{1}{z(\beta)} \sum_n \sum_m e^{-\beta E_n} \langle n | \mathcal{A} | m \rangle \langle m | n \rangle \\
g_n^*(\beta) g_m(\beta) &= \frac{1}{z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{m,n}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Está relação não pode ser satisfeita, uma vez que  $g_n(\beta)$  é uma função escalar, devido a definição do delta de Kronecker. A relação encontrada é incoerente, o que nos leva a concluir que  $|0(\beta)\rangle$  não pertence ao espaço  $\mathbb{H}$  [21], pois podemos definir o delta de Kronecker a partir do produto escalar entre dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ , o que sugere que  $g_n(\beta)$  deve ser um vetor definido num certo espaço vetorial, assim o resultado acima seria proveniente de um produto escalar de vetores.

Vamos introduzir um espaço formado pelo produto tensorial dos elementos de base dado por  $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$ , onde  $g_n(\beta)$  é definido como  $g_n(\beta) = f_n(\beta) |\tilde{n}\rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned}
g_m^*(\beta) g_n(\beta) &= \langle \tilde{m} | f_m^*(\beta) f_n(\beta) | \tilde{n} \rangle \\
g_m^*(\beta) g_n(\beta) &= f_m^*(\beta) f_n(\beta) \delta_{m,n}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Quando comparamos a equação (4.11) com a equação (4.10) concluímos quer

$$f_m^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{z(\beta)} e^{-\beta E_n}, \tag{4.12}$$

onde teremos que,

$$f_n(\beta) = \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{z(\beta)}}. \tag{4.13}$$

Com o valor de  $f_n(\beta)$  em mãos, podemos reescrever  $g_n(\beta)$  como  $g_n(\beta) = \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{z(\beta)}} |\tilde{n}\rangle$  e por fim definir o estado de vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$  de forma consistente,

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle \tag{4.14}$$

este vetor de estado pertence ao espaço vetorial dado por  $\mathbb{H}_T = \mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}}$ .

Quando introduzimos um espaço vetorial, que nos permitiu definir o vetor de estado termalizado  $|0(\beta)\rangle$ , introduzimos um espaço chamado de Til (ou Dual)  $\tilde{\mathbb{H}}$ , o qual afetou o grau de liberdade do sistema, duplicando-o. O espaço Til tem as mesmas propriedades do espaço original de Hilbert. Uma das interpretações para a existência do espaço Til [1] parte da Teoria quântica de campos (TQC) axiomática do Wightman, no qual prever que numa TQC, a temperatura finita, seria necessário a duplicação dos graus de liberdade.

O espaço Til é uma réplica do espaço de Hilbert, assim a álgebra de operadores sobre esses dois espaços deve ser isomorfa, de modo que podemos caracterizar o espaço Til definindo um mapeamento entre essas álgebras [21], dado por:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j)^\sim &= \tilde{\mathcal{A}}_i \tilde{\mathcal{A}}_j \\
(c\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_j)^\sim &= c^* \tilde{\mathcal{A}}_i + \tilde{\mathcal{A}}_j \\
(\mathcal{A}_i^\dagger)^\sim &= (\tilde{\mathcal{A}}_i)^\dagger \\
(\tilde{\mathcal{A}}_i)^\sim &= \mathcal{A}_i \\
[A_i, \tilde{\mathcal{A}}_j] &= 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Estas propriedades são chamadas de regras de conjugação Til.

Com a revisão feita no capítulo 2 e a introdução da teoria TFD reunimos elementos que nos permite analisar o artigo, *A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*, de forma que possibilite uma percepção clara sobre o mesmo.

## 4.2 Revisão do artigo: *A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*

Neste artigo, Yoichiro Hashizume, Masuo Suzuki e Soichiro Okamura utilizaram um simples exemplo de spin 1/2, pelo qual alcançaram uma interação efetiva entre o espaço original e o Til. Com este resultado, foi possível compreender como, através de um tratamento simples, os ruídos térmicos foram renormalizados na representação da TFD. Porém, eles não distinguiram a origem da perturbação térmica, do ponto de vista dos primeiros princípios, mas esclarecem fenomenologicamente o esquema de renormalização de ruídos térmicos usando TFD. Esse artigo foi o ponto de partida para o desenvolvimento deste trabalho, onde os principais conceitos são vistos aqui. Basicamente, faremos uma revisão da segunda seção do mesmo, sem a preocupação em explicitar os demais cálculos.



### 4.2.1 Observação de uma nova perspectiva sobre um simples exemplo com ruído térmico.

Desenvolvida por Umezawa e Takahashi em 1975, a TFD é uma formulação a tempo real, onde o espaço de Hilbert é duplicado quando caracterizado uma duplicação dos graus de liberdade. Para estudar propriedades estatísticas usando TFD, é necessário fazer a introdução de espaço Til de forma a duplicar o sistema. Portanto, o vetor de estado  $|\Psi\rangle$ , que será o vetor de estado na representação da TFD, é dado por:

$$|\Psi\rangle = \rho^{1/2}|n, \tilde{n}\rangle, \quad (4.16)$$

onde  $\rho$  é o operador matriz densidade. As bases  $|n\rangle$  e  $|\tilde{n}\rangle$  são, respectivamente, autoestados do hamiltoniano  $\mathcal{H}$  no espaço original e  $\tilde{\mathcal{H}}$  no espaço Til e seus autovalores são dados por  $E_n$ , ou seja,  $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$  e  $\tilde{\mathcal{H}}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle$ . Os  $n$  formam um conjunto ortogonal completo de base arbitrária.

A dinâmica neste formalismo permite escrever a equação de evolução temporal do seguinte modo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\Psi(t)\rangle, \quad (4.17)$$

aqui  $\hat{\mathcal{H}}$  é chamado de espaço estendido e definido como  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$ . Desta forma, o espaço Til é introduzido de um ponto de vista matemático, mas seus significados ainda físicos não são tão claros [25]. No entanto, o espaço duplo Hilbert é muito útil na prática e tem diversas aplicações, como no estudo da entropia de um buraco negro [18], [24].

Em 1961, Schwinger [29] mostrou que os efeitos de um banho térmico podem ser representados por um ruído térmico, usando um propagador de flutuação de osciladores quânticos. Aqui, foi adotado um sistema de spin com o ruído térmico  $R(t)$  descrito pelo seguinte hamiltoniano incluindo uma variável spin  $S_0$ ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - JR(t)S_0 \quad (4.18)$$

onde  $\mathcal{H}_0$  é um hamiltoniano de interesse, sem o ruído,  $J$  é uma constante de acoplamento e  $R(t)$  é considerado como o ruído branco gaussiano, ele satisfaz

$$\langle R(t) \rangle_R = 0 \quad e \quad \langle R(t)R(t') \rangle_R = \epsilon \delta(t - t'), \quad (4.19)$$

onde  $\epsilon$  é um paramento que define a intensidade do ruído. Aqui, a notação  $\langle A \rangle_R$  não é uma média quântica, é uma média sobre o parâmetro estocástico  $A$ .

O ruído térmico é aplicado no espaço original e Til, porque o espaço Til tem que ser isomorfo frente ao espaço original. Assim, o hamiltoniano duplicado, ou seja, hamiltoniano espaço estendido, e escrito como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - JR(t)(S_0 - \tilde{S}_0) \equiv \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'(t). \quad (4.20)$$

onde  $\hat{\mathcal{H}}'(t)$  é o hamiltoniano de interação onde conta o ruído. A evolução temporal do vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$  da TFD é expresso como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} \Psi(t) = (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'(t)) |\Psi(t)\rangle, \quad (4.21)$$

a solução desta equação é dada por,

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t) |\Psi(t=0)\rangle. \quad (4.22)$$

O operador evolução temporal  $\hat{\mathcal{U}}(t)$  aqui, carrega o ruído térmico  $R(t)$  e é expresso como:

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \hat{\mathcal{U}}_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_n) \right\}, \quad (4.23)$$

onde  $\hat{\mathcal{U}}_0(t) \equiv \exp[-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar]$  é o termo sem interação. Então, tomando a média estocástica  $\langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_n) \rangle$ , obtém-se o operador  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$ . Aqui é necessário aplicar uma aproximação de desacoplamento (aproximação de campo médio) como:

$$\langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_n) \rangle_R \simeq \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \rangle_R \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_3) \hat{\mathcal{H}}'(t_4) \rangle_R \cdots \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_{2k-1}) \hat{\mathcal{H}}'(t_{2k}) \rangle_R. \quad (4.24)$$

Mas se  $2k \equiv n$ , encontra-se,

$$\langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_n) \rangle_R = \left[ \epsilon J^2 (S_0 - \tilde{S}_0)^2 \right]^k \delta(t_1 - t_2) \cdots \delta(t_{2k-1} - t_{2k}). \quad (4.25)$$

Com o uso da equação (4.25) é possível encontrar a média estocástica do operador evolução temporal,  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$ , na seguinte forma,

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \hat{\mathcal{U}}_0(t) \exp \left[ - \frac{\epsilon J^2}{2\hbar^2} (S_0 - \tilde{S}_0)^2 t \right] = e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar} e^{\gamma t S_0 \tilde{S}_0 - \gamma t}, \quad (4.26)$$

onde  $\gamma \equiv \epsilon J^2/\hbar^2$  e  $(S_0 - \tilde{S}_0)^2 = -2S_0 \tilde{S}_0 + 2$ .

Na equação (4.26) aparece uma interação efetiva, entre o espaço original e Til, representada por  $\gamma t S_0 \tilde{S}_0$ , esta interação depende dos parâmetros  $\epsilon$  e  $J$ . É uma interação exatamente análoga ao tipo spin-spin, no espaço usual; no entanto, aqui temos uma interação entre espaços de Hilbert distintos. Consequentemente, este tipo de interação aparece apenas no sistema de dissipação com banho térmico. No caso presente, tomando a média estocástica do operador evolução temporal  $\hat{\mathcal{U}}(t)$ , o ruído desaparece de forma explícita do hamiltoniano efetivo  $\hat{\mathcal{H}}_{eff}$ . Então podemos concluir que os efeitos dissipativos são renormalizados nas interações efetivas entre os espaços originais e Til. Usando as notações  $S_0 = e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar} S_0 e^{i\mathcal{H}_0 t/\hbar}$  e  $\tilde{S}_0 = e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_0 t/\hbar} \tilde{S}_0 e^{i\tilde{\mathcal{H}}_0 t/\hbar}$ , a derivada no tempo do vetor de estado dissipativo da TFD,  $|\Psi^{diss}(t)\rangle$  tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi^{diss}(t)\rangle &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R \right) |\Psi_0^{diss}\rangle \\ &= \left( \frac{1}{i\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\Lambda}_0(t) \right) |\Psi^{diss}(t)\rangle, \end{aligned} \quad (4.27)$$

com a condição inicial  $|\Psi(t=0)\rangle \equiv |\Psi_0\rangle = |\Psi^{diss}(t=0)\rangle = |\Psi_0^{diss}\rangle$ , onde a interação efetiva  $i\hbar\hat{\Lambda}_0(t)$  é definida como:

$$i\hbar\hat{\Lambda}_0(t) \equiv i\hbar\gamma(S_0(t)\tilde{S}_0(t) - 1). \quad (4.28)$$

A equação (4.28) mostra o termo dissipativo  $\hat{\Lambda}_0(t)$  que inclui uma interação efetiva, o qual é denotada por uma forma de convolução advinda da definição do Hamiltoniano da TFD,  $\hat{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$ , na equação (4.21) de evolução temporal de vetores de estado da TFD. Assim, essa interação efetiva é peculiar à TFD dissipativa. Quando não há dissipação, a interação efetiva  $i\hbar\hat{\Lambda}_0(t)$  desaparece para  $\epsilon \rightarrow 0$ , e a equação (4.27) torna-se uma equação diferencial ordinária (não-dissipativa), tal como a equação (4.17). O hamiltoniano efetivo, de acordo com as equações (4.27) e (4.28), pode ser expresso da seguinte forma

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \hat{\mathcal{H}}_0 + i\hbar\hat{\Lambda}_0(t), \quad (4.29)$$

este termo é claramente não-hermitiano.

Essa estrutura não-hermitiana é regida [34] pela limitação física, levando em conta as condições iniciais e finais das propriedades de relaxação e condições de estado térmico. Neste artigo foi feita uma nova interpretação dessa estrutura, reduzindo a perturbação térmica sobre o estado térmico. Na figura 4.1 temos uma relação alternativa entre o espaço original e a TFD. A imagem mostra a equivalência entre um sistemas de spin com um

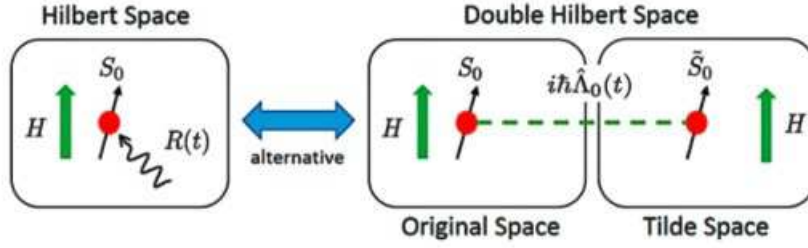


Figura 4.1: Ilustração da correspondência entre um sistema dissipativo com um banho térmico e um sistema com interação efetiva na TFD.

campo aleatório, devido a um banho térmico definido no espaço de Hilbert e um sistema finito com interação efetiva, definido no duplo espaço de Hilbert. A correspondência entre estes os dois sistemas gera a perspectiva de que a perturbação térmica é descrita por interações efetivas não-hermitianas.

Para descrever explicitamente o vetor de estado dissipativo da TFD,  $|\Psi^{diss}(t)\rangle$ , foi usado um simples exemplo em que o hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  tem a forma

$$\mathcal{H}_0 = -\mu_B H S_0^z, \quad (4.30)$$

em que  $H$  é o campo magnético aplicado externamente e  $\mu_B$  é o momento magnético. A condição inicial dada por,  $|\Psi_0\rangle \equiv |\Psi(t=0)\rangle$ , tem a forma,

$$|\Psi_0\rangle = \alpha_1|+, \tilde{+}\rangle + \alpha_2|+, \tilde{-}\rangle + \alpha_3|-, \tilde{+}\rangle + \alpha_4|-, \tilde{-}\rangle. \quad (4.31)$$

onde  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 | \sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 = 1\}$ . Assim o vetor de estado dissipativo da TFD é expresso como:

$$\begin{aligned} |\Psi^{diss}(t)\rangle &= \langle \hat{U}(t) \rangle_R |\Psi_0\rangle \\ &= (\alpha_1|+, \tilde{+}\rangle + \alpha_4|-, \tilde{-}\rangle) + e^{-2\gamma t} (e^{-2i\omega t} \alpha_2|+, \tilde{-}\rangle + e^{2i\omega t} \alpha_3|-, \tilde{+}\rangle) \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde  $\omega = \mu_B H / \hbar$ . Este é um simples exemplo que mostra o emaranhamento entre o espaço original e til decrescendo de forma exponencial. Por exemplo, num sistema de dois níveis com ruído colorido, resultado análogo a este é encontrado, como pode ser visto na equação (2.3.31), página 23 de [5]. Simplificando as flutuações térmicas, tanto no espaços originais quanto no espaço til, a interação efetiva  $i\hbar\hat{\Lambda}_0(t)$  aparece diretamente. Este é um dos pontos mais importantes da perspectiva atual.

Na seção 4.3 iremos abordar os cálculos que foram omitidos aqui, onde teremos uma melhor compreensão e esclarecimento de detalhes aqui negligenciados. As ideias vistas serão utilizadas como ponto de partida para nosso trabalho, onde iremos mostrar um modelo mais sofisticado para investigar os processos dissipativos via TFD.

## 4.3 Processo dissipativo do modelo de Jaynes-Cummings via TFD

No capítulo 4 introduzimos a Dinâmica de Campo Térmico, em seguida fizemos revisão de uma seção do artigo que norteou este trabalho. Nesta seção vamos aplicar as ideias vistas anteriormente em um modelo bem conhecido da literatura, no entanto, mais arrojado que o proposto no artigo. Nossa atenção ficou voltada aos processos dissipativos envolvidos neste contexto.

### 4.3.1 Termo de interação não-hermitiano

O modelo que estamos usando, o de Jaynes-Cummings -MJC, não leva em consideração a interação com a cavidade. A pior, consideramos uma cavidade com um fator de qualidade bastante elevado. Este fato não elimina por completo a interação com o ambiente, a temperatura é um exemplo. Em termos microscópicos, levamos em conta as flutuações devido ao reservatório térmico, onde o ruído representa essas flutuações microscópicas. Essa flutuação descreve a ação do reservatório térmico sobre o sistema átomo-campo, que por sua vez dissipa energia em forma de luz dentro da cavidade.

Essa flutuação pode ser introduzida através do método de Langevin, que é muito usado para descrever flutuações aleatórias de um sistema pré-estabelecido. É acrescentado um ruído ao sistema, o qual vai representar flutuações microscópicas, onde este ruído é uma variável estocástica. Em nosso modelo, essa variável estocástica é a variável  $R(t)$  dependente do tempo. Com o acréscimo desta ao modelo, precisamos estabelecer alguns parâmetros estocásticos desta variável  $R(t)$ . O caso mais simples de ruído, o mesmo que foi usado no artigo, é gaussiano e markoviano. O processo gaussiano é determinado pelas suas médias simples e quadráticas, neste caso teremos

$$\langle R(t) \rangle_R = 0. \quad (4.33)$$

O índice  $R$  está representando uma média estocástica e já foi explicado na seção anterior. Se o processo também é markoviano ele pode ser descrito de forma aproximada por,

$$\langle R(t)R(t') \rangle_R = \epsilon \delta(t - t') \quad (4.34)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro a ser determinado. O ruído térmico  $R(t)$  é então considerado como o ruído branco.

Este parâmetro  $\epsilon$  é de grande relevância para o trabalho, no sentido de justificar o uso do TFD, que é uma teoria que introduz a temperatura ao sistema que a descreve. Mas em nosso trabalho a temperatura não é vista de forma explícita, pois está camuflada neste parâmetro  $\epsilon$ . A partir do teorema de flutuação-dissipação, é possível encontrar o valor de  $\epsilon$  na qual se vincula uma função de autocorrelações das flutuações do reservatório térmico ao elemento dissipativo do sistema, representado na equação (4.35) abaixo pela variável  $D$ . Assim,

$$\langle R(t)R(t') \rangle_R = D\kappa_B T \delta(t - t') \quad (4.35)$$

onde  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. Toda essa discussão sobre processo estocástico, método de Langevin e teorema de flutuação-dissipação é detalhado nas referências [8], [13], [14] e [35].

Diante desta proposta, podemos escrever o hamiltoniano do modelo com o ruído incluso. Vamos aqui trabalhar com um modelo totalmente quântico, mas também falaremos do modelo semi-clássico, fazendo as devidas considerações. O hamiltoniano de Jaynes-Cummings totalmente quântico, descrito na equação (3.78), tem a seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \lambda\hbar(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (4.36)$$

onde  $\left(\frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a\right)$  é chamado de hamiltoniano livre e pode ser representado como  $\mathcal{H}_0$ . O hamiltoniano proposto aqui leva algumas modificações, como a presença do ruído e a modificação da notação, assim

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \lambda R(t)(a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f) \quad (4.37)$$

onde  $\sigma_+ \equiv \sigma_e = |e\rangle\langle f|$  é o responsável pela transição do estado fundamental para o excitado,  $\sigma_- \equiv \sigma_f = |f\rangle\langle e|$  faz a transição do estado excitado para o fundamental e lembrando que  $\lambda$  é uma constante de acoplamento no qual  $\hbar$  foi englobado.

Sabemos que no espaço duplicado o hamiltoniano torna-se o hamiltoniano estendido denotado por  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$  e assim teremos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \mathcal{H}_0 - \lambda R(t)(a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f) + \tilde{\mathcal{H}}_0 - \lambda R(t)(\tilde{a}\tilde{\sigma}_e + \tilde{a}^\dagger\tilde{\sigma}_f) \\ \hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}_0 - \lambda R(t)(a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f - \tilde{a}\tilde{\sigma}_e - \tilde{a}^\dagger\tilde{\sigma}_f),\end{aligned}\quad (4.38)$$

lembre-se que o espaço Til é uma cópia do espaço original. Para diminuir a notação, podemos escrever o hamiltoniano estendido de uma forma compacta como,  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'(t)$ , onde  $\hat{\mathcal{H}}'(t) \equiv -\lambda R(t)(a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f - \tilde{a}\tilde{\sigma}_e - \tilde{a}^\dagger\tilde{\sigma}_f)$ .

A dinâmica que rege o sistema na estrutura da TFD é descrita, também, pela equação Schrödinger. Fazendo a evolução temporal do vetor de estado da TFD,  $|\Psi(t)\rangle$  obtemos,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\Psi(t)\rangle = (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'(t))\cdot|\Psi(t)\rangle \quad (4.39)$$

A solução da equação (4.39) é dada por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t)|\Psi(t=0)\rangle$ , onde  $\hat{\mathcal{U}}(t)$  é o operador de evolução temporal.

O hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}'(t)$ , além de depender do tempo, claramente não comutam entre si, quando encontra-se em diferentes intervalos de tempo. Portanto, a solução formal do operador de evolução temporal  $\hat{\mathcal{U}}(t)$  é chamada de série de Dyson e é dada por

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \hat{\mathcal{U}}_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \hat{\mathcal{H}}'(t_1)\hat{\mathcal{H}}'(t_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}'(t_n) \right\}, \quad (4.40)$$

onde  $\hat{\mathcal{U}}_0(t) \equiv \exp[i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar]$  não inclui o ruído térmico  $R(t)$ . Note que  $\hat{\mathcal{U}}(t)$  é composto de termos estocástico.

Tomando a média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle\hat{\mathcal{U}}(t)\rangle_R$ , encontramos a função de autocorrelação  $\langle\hat{\mathcal{H}}'(t_1)\hat{\mathcal{H}}'(t_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}'(t_n)\rangle$ . É necessário desacoplar esta função e para isso vamos usar uma aproximação de desacoplamento (aproximação de campo médio) do tipo:

$$\langle\hat{\mathcal{H}}'(t_1)\hat{\mathcal{H}}'(t_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}'(t_n)\rangle_R \simeq \langle\hat{\mathcal{H}}'(t_1)\hat{\mathcal{H}}'(t_2)\rangle_R \langle\hat{\mathcal{H}}'(t_3)\hat{\mathcal{H}}'(t_4)\rangle_R \cdots \langle\hat{\mathcal{H}}'(t_{2k-1})\hat{\mathcal{H}}'(t_{2k})\rangle_R. \quad (4.41)$$

Fazendo uma mudança como  $n \equiv 2k$ , encontra-se,

$$\langle\hat{\mathcal{H}}'(t_1)\hat{\mathcal{H}}'(t_2)\cdots\hat{\mathcal{H}}'(t_{2k})\rangle_R = \left[\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2\right]^k \delta(t_1 - t_2)\cdots\delta(t_{2k-1} - t_{2k}) \quad (4.42)$$

onde  $A \equiv a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f$  e  $\tilde{A} \equiv \tilde{a}\tilde{\sigma}_e + \tilde{a}^\dagger\tilde{\sigma}_f$ .

Podemos encontrar a média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  com o uso da equação (4.42) e lembrando que  $n \equiv 2k$ , assim temos que

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \hat{\mathcal{U}}_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^{2k} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{2k-1}} dt_{2k} \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_{2k}) \rangle_R \right\}, \quad (4.43)$$

o que nos permite verificar o comportamento de  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  e tentar estabelecer alguma relação. Então, analisando o somatório termo a termo, para alguns valores de  $k$ , podemos estabelecer uma relação para os termos entre as chaves.

- Para  $k = 1$  temos,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \rangle_R = \\ & = -\frac{1}{\hbar^2} \left[ \epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2 \right] \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \delta(t_1 - t_2) \\ & = \left[ -\frac{\epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} t \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

- Para  $k = 2$  temos,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^4 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \hat{\mathcal{H}}'(t_3) \hat{\mathcal{H}}'(t_4) \rangle_R = \\ & = \frac{1}{\hbar^4} \left[ \epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2 \right]^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \delta(t_1 - t_2) \delta(t_3 - t_4) \\ & = \left[ \frac{\epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} t \right]^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

- Para  $k = 3$  temos,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^6 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_5} dt_6 \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_6) \rangle_R = \\ & = -\frac{1}{\hbar^6} \left[ \epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2 \right]^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_5} dt_6 \delta(t_1 - t_2) \cdots \delta(t_5 - t_6) \\ & = \left[ -\frac{\epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} t \right]^3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

- Para  $k = 4$  temos,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^8 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_7} dt_8 \langle \hat{\mathcal{H}}'(t_1) \hat{\mathcal{H}}'(t_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}'(t_8) \rangle_R = \\ & = \frac{1}{\hbar^8} \left[ \epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2 \right]^4 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_7} dt_8 \delta(t_1 - t_2) \cdots \delta(t_7 - t_8) \\ & = \left[ \frac{\epsilon \lambda^2 (A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} t \right]^4. \end{aligned} \quad (4.47)$$



O fator adicional  $1/2$  surgiu porque a função delta situa-se no limite superior da integração (veja o apêndice 2 de [5]).

Claramente há uma relação, porém é preciso fazer alguns ajustes para estabelecê-la de forma contundente. Podemos notar que para valores pares de  $k$ , o termo entre os colchetes é positivo, mas se adicionarmos o sinal negativo a esses termos positivos não estaríamos alterando o resultado final, pois eles encontram-se elevados a um número par. Portanto, adicionando este sinal negativo, dentro do colchete, para os termos positivos, podemos escrever uma relação para todos os termos entre chaves. Ou seja,

$$\left\{ 1 + \left[ -\frac{\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} \right] t + \left[ -\frac{\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} \right]^2 t^2 + \left[ -\frac{\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} \right]^3 t^3 \dots \right\} \quad (4.48)$$

esta relação nada mais é que uma função exponencial. Assim, podemos escrever a média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  como:

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \hat{\mathcal{U}}_0 \exp \left[ -\frac{\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} \right], \quad (4.49)$$

lembrando que  $\hat{\mathcal{U}}_0(t) \equiv \exp[i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar]$  temos,

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \exp \left[ -\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar} \right] \exp \left[ -\frac{\epsilon\lambda^2(A - \tilde{A})^2}{2\hbar^2} \right]. \quad (4.50)$$

O próximo passo agora é abrir o termo  $(A - \tilde{A})^2$ , mas para facilitar os cálculos, num primeiro momento, vamos tratar este termo como um simples produto notável de acordo com as regras de comutação Til descrita na equação (4.15) e em seguida analisar cada termo. Então,

$$(A - \tilde{A})^2 = A^2 - 2A\tilde{A} + \tilde{A}^2. \quad (4.51)$$

Analisando cada um dos termos separadamente teremos:

- para  $A^2$ ,

$$\begin{aligned} A^2 &= (a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f)^2 = (a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f) \cdot (a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f) \\ A^2 &= aa\sigma_e^2 + aa^\dagger\sigma_e\sigma_f + a^\dagger a\sigma_f\sigma_e + a^\dagger a^\dagger\sigma_f^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

como  $\sigma_e^2 = 0$  e  $\sigma_f^2 = 0$  encontra-se,

$$A^2 = aa^\dagger\sigma_e\sigma_f + a^\dagger a\sigma_f\sigma_e. \quad (4.53)$$

O operador número tem a forma,  $\mathcal{N} = a^\dagger a$ . Então, podemos redefinir  $a^\dagger a = \mathcal{N}$  e  $aa^\dagger = \mathcal{N} + \mathbb{I}$  e reescrever  $A^2$  como:

$$\begin{aligned} A^2 &= (\mathcal{N} + \mathbb{I})\sigma_e\sigma_f + \mathcal{N}\sigma_f\sigma_e \\ A^2 &= \mathcal{N}\sigma_e\sigma_f + \sigma_e\sigma_f + \mathcal{N}\sigma_f\sigma_e = \mathcal{N}(\sigma_e\sigma_f + \sigma_f\sigma_e) + \sigma_e\sigma_f \\ A^2 &= \mathcal{N} + \sigma_e\sigma_f. \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde  $(\sigma_e\sigma_f + \sigma_f\sigma_e) = \mathbb{I}$

- Para  $\tilde{A}^2$  o procedimento é análogo ao feito acima. Assim,

$$\tilde{A}^2 = \tilde{\mathcal{N}} + \tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f. \quad (4.55)$$

- Para  $A\tilde{A}$ ,

$$\begin{aligned} C &= (a\sigma_e + a^\dagger\sigma_f) \cdot (\tilde{a}\tilde{\sigma}_e + \tilde{a}^\dagger\tilde{\sigma}_f) \\ A\tilde{A} &= (a\tilde{a}\sigma_e\tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger\sigma_e\tilde{\sigma}_f + a^\dagger\tilde{a}\sigma_f\tilde{\sigma}_e + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\sigma_f\tilde{\sigma}_f). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Com as equações (4.51), (4.54), (4.55) e (4.56) podemos escrever  $(A - \tilde{A})^2$  da seguinte forma:

$$(A - \tilde{A})^2 = \mathcal{N} + \sigma_e\sigma_f - 2(a\tilde{a}\sigma_e\tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger\sigma_e\tilde{\sigma}_f + a^\dagger\tilde{a}\sigma_f\tilde{\sigma}_e + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\sigma_f\tilde{\sigma}_f) + \tilde{\mathcal{N}} + \tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f. \quad (4.57)$$

Substituindo a equação (4.57) na equação (4.49), encontramos finalmente o valor da média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$ . Portanto,

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \hat{\mathcal{U}}_0 \exp \left\{ \gamma \left[ -\frac{(\sigma_e\sigma_f + \tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f)}{2} + a\tilde{a}\sigma_e\tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger\sigma_e\tilde{\sigma}_f + a^\dagger\tilde{a}\sigma_f\tilde{\sigma}_e + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\sigma_f\tilde{\sigma}_f - \frac{(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})}{2} \right] t \right\} \quad (4.58)$$

onde  $\gamma = \frac{\epsilon\lambda^2}{\hbar^2}$ .

Na equação (4.58) aparece uma interação efetiva entre os espaços original e Til, esta interação depende dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\lambda$  contidos em  $\gamma$ . Este tipo de interação efetiva aparece apenas em sistemas dissipativos com um banho de térmico, conseqüentemente a solução da equação (4.39) é dada nestes termos dissipativo,

$$|\Psi^{diss}(t)\rangle = \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle. \quad (4.59)$$

Vamos derivar no tempo o vetor de estado dissipativo da TFD no intuito de determinar o termo de interação efetiva. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\Psi^{diss}(t)\rangle &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R \right) |\Psi_0^{diss}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial t} |\Psi^{diss}(t)\rangle &= \left( \frac{\hat{\mathcal{H}}_0}{i\hbar} + \left[ -\frac{(\sigma_e \sigma_f + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f)}{2} + a\tilde{a}\sigma_e\tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger\sigma_e\tilde{\sigma}_f + a^\dagger\tilde{a}\sigma_f\tilde{\sigma}_e + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\sigma_f\tilde{\sigma}_f \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})}{2} \right] \right) \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial t} |\Psi^{diss}(t)\rangle &= \left( \frac{\hat{\mathcal{H}}_0}{i\hbar} + \hat{\Lambda}_0(t) \right) \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle \tag{4.60}
\end{aligned}$$

onde  $|\Psi_0^{diss}\rangle = |\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle$  e  $\hat{\Lambda}_0(t)$  é o termo de interação que procurávamos e tem a forma,  $\hat{\Lambda}_0(t) = -\frac{(\sigma_e \sigma_f + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f)}{2} + a\tilde{a}\sigma_e\tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger\sigma_e\tilde{\sigma}_f + a^\dagger\tilde{a}\sigma_f\tilde{\sigma}_e + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\sigma_f\tilde{\sigma}_f - \frac{(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})}{2}$ . Note que o termo de interação é dependente do tempo, pois

$$a\sigma_e = a(t)\sigma_e(t) = a(0)\sigma_e(0)e^{-i(\omega_a - \omega_c)t}, \tag{4.61}$$

$$a^\dagger\sigma_f = a^\dagger(t)\sigma_f(t) = a^\dagger(0)\sigma_f(0)e^{i(\omega_a - \omega_c)t}. \tag{4.62}$$

Portanto,  $\hat{\Lambda}_0(t)$  é o termo dissipativo que inclui interação efetiva entre os espaços original e Til. Note que, uma vez feito a média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$ , o ruído térmico, de uma forma explicita, desaparece. No entanto, se  $\epsilon \rightarrow 0$  a interação efetiva é perdida e neste caso não há dissipação derivada da interação com o reservatório térmico. A partir da equação (4.60) podemos expressar um hamiltoniano efetivo dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_{ef} = \hat{\mathcal{H}}_0 + i\hbar\hat{\Lambda}_0(t). \tag{4.63}$$

A interpretação de  $\hat{\mathcal{H}}_{ef}$  é a mesma para o termo encontrado no artigo. Apesar da complexidade do termo encontrado aqui, em comparação ao do artigo, a estrutura que rege as limitações físicas permanecem as mesmas. Logo, o termo da equação (4.62) é não-hermitiano.

O próximo passo é descrever o vetor de estado dissipativo da TFD,  $|\Psi^{diss}\rangle$ . No entanto, na seguinte subseção, vamos descrever este vetor para um modelo semi-clássico e depois voltar ao caso totalmente quântico.

### 4.3.2 Vetor de estado dissipativo para o caso semi-clássico

O tratamento acima foi aplicado para um modelo totalmente quântico, mas aqui iremos trabalhar com um modelo semi-clássico. No entanto, vamos apresentar alguns resultados, onde a demonstração é feita de forma análoga ao descrito na subseção 4.3.1. Não iremos nomear novamente cada parâmetro que aparecer, pois são os mesmos já descritos, exceto, em casos relevantes ou de um novo parâmetro.

O ruído térmico, devido as flutuações que ocorre por conta da interação com o reservatório térmico é, assim como no caso quântico, um ruído gaussiano. Ou seja,

$$\langle R(t) \rangle_R = 0 \quad e \quad \langle R(t)R(t') \rangle_R = \epsilon \delta(t - t'), \quad (4.64)$$

e novamente,  $\epsilon$  é um parâmetro que define a intensidade do ruído.

O hamiltoniano para este modelo é proposto levando em consideração toda a discussão feita sobre a introdução do ruído na subseção 4.3.1, neste contexto temos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \lambda R(t)(E_0 \sigma_e + E'_0 \sigma_f), \quad (4.65)$$

onde  $E_0$  e  $E'_0$  são as amplitudes do campo elétrico e  $\mathcal{H}_0 = \hbar \omega_a |e\rangle\langle e|$ , considerando que no estado fundamental a energia é nula e no excitado a energia seja  $\hbar \omega_a$ . O hamiltoniano no sistema duplicado, ou seja, o hamiltoniano estendido  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$  tem a forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - \lambda E_0 R(t)((\sigma_e + \sigma_f) - (\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f)), \quad (4.66)$$

onde consideramos, sem perda de generalidade do sistema, que  $E_0 = E'_0$ .

A próxima etapa seria fazer a evolução temporal do vetor de estado da TFD,  $|\Psi(t)\rangle$ , obtendo um vetor de estado dissipado dado por  $|\Psi^{diss}\rangle = \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle$ . A média estocástica do operador de evolução temporal  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  para o modelo em questão é dada por:

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = \hat{\mathcal{U}}_0 \exp[\gamma E_0 (\sigma_e \tilde{\sigma}_e + \sigma_e \tilde{\sigma}_f + \sigma_f \tilde{\sigma}_e + \sigma_f \tilde{\sigma}_f - \mathbb{I})t] \quad (4.67)$$

onde  $\hat{\mathcal{U}}_0 = \exp[-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar]$  e  $\gamma = \epsilon \lambda^2 / \hbar^2$ .

Para obter o vetor de estado dissipativo temos que atuar com  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  sobre  $|\Psi_0^{diss}\rangle$  que na condição inicial  $|\Psi^{diss}(t=0)\rangle$  assume a forma

$$|\Psi_0^{diss}\rangle = \alpha_1 |e, \tilde{e}\rangle + \alpha_2 |e, \tilde{f}\rangle + \alpha_3 |f, \tilde{e}\rangle + \alpha_4 |f, \tilde{f}\rangle \quad (4.68)$$

onde  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 | \sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 = 1\}$ , são números reais.

Sabemos que  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  é uma função de operadores, não é hermitiano, portanto, não é possível atuar sobre  $|\Psi_0^{diss}\rangle$  diretamente. Vamos expandir apenas a parte não-hermitiana de  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  e assim atuar sobre  $|\Psi_0^{diss}\rangle$ .

Para facilitar os cálculos, vamos compactar a notação fazendo  $\hat{\mathcal{L}} \equiv \sigma_e \tilde{\sigma}_e + \sigma_e \tilde{\sigma}_f + \sigma_f \tilde{\sigma}_e + \sigma_f \tilde{\sigma}_f$ , note que  $\hat{\mathcal{L}}$  se encontra no espaço duplicado. Com um exemplo genérico é possível justificar essa afirmação, tomando o produto entre dois termos de espaços diferentes temos,

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} \cdot \Lambda^{(2)} &= (\Omega^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)})(\mathbb{I}^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)}) \\ &= (\Omega^{(1)} \mathbb{I}^{(1)}) \otimes (\mathbb{I}^{(2)} \Lambda^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Para uma explanação mais completa, a cerca de operação entre sistemas distintos, veja o capítulo 10 de [31]. Com a mudança na notação, podemos reescrever a média estocástica do operador evolução temporal como,

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} e^{-\gamma E_0 \mathbb{I} t} e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}. \quad (4.70)$$

Antes de fazer a expansão, vamos verificar o comportamento de  $\hat{\mathcal{L}}$  atuando sobre os estados da base de  $|\Psi_0^{diss}\rangle$ :

$$\hat{\mathcal{L}}|e, \tilde{e}\rangle = |f, \tilde{f}\rangle, \quad (4.71)$$

$$\hat{\mathcal{L}}|e, \tilde{f}\rangle = |f, \tilde{e}\rangle, \quad (4.72)$$

$$\hat{\mathcal{L}}|f, \tilde{e}\rangle = |e, \tilde{f}\rangle, \quad (4.73)$$

$$\hat{\mathcal{L}}|f, \tilde{f}\rangle = |e, \tilde{e}\rangle. \quad (4.74)$$

Podemos reescrever  $\hat{\mathcal{L}}$  como

$$\hat{\mathcal{L}} = \sigma_e(\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f) + \sigma_f(\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f), \quad (4.75)$$

logo  $\hat{\mathcal{L}}^2$  fica,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^2 &= \sigma_e \sigma_f (\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f)^2 + \sigma_f \sigma_e (\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f)^2, \\ \hat{\mathcal{L}}^2 &= (\sigma_e \sigma_f + \sigma_f \sigma_e) (\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f)^2, \\ \hat{\mathcal{L}}^2 &= \mathbb{I} (\tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f)^2, \\ \hat{\mathcal{L}}^2 &= (\tilde{\sigma}_e^2 + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_e + \tilde{\sigma}_f^2), \\ \hat{\mathcal{L}}^2 &= \tilde{\mathbb{I}}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde  $\tilde{\sigma}_e^2 = \tilde{\sigma}_f^2 = 0$ ,  $(\sigma_e\sigma_f + \sigma_f\sigma_e) = \mathbb{I}$  e  $(\tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_f\tilde{\sigma}_e) = \tilde{\mathbb{I}}$ . Neste caso observamos que,

$$\hat{\mathcal{L}}|e, \tilde{e}\rangle = |f, \tilde{f}\rangle, \quad (4.77)$$

$$\hat{\mathcal{L}}^2|e, \tilde{e}\rangle = |e, \tilde{e}\rangle, \quad (4.78)$$

$$\hat{\mathcal{L}}^3|e, \tilde{e}\rangle = |f, \tilde{f}\rangle, \quad (4.79)$$

$$\hat{\mathcal{L}}^4|e, \tilde{e}\rangle = |e, \tilde{e}\rangle. \quad (4.80)$$

Com estes resultados podemos dizer que para  $\hat{\mathcal{L}}^{2n}$  aplicado sobre um estado, resulta num estado oposto e para  $\hat{\mathcal{L}}^{2n-1}$  aplicado sobre o estado, resulta no mesmo estado; onde  $n = [1, \infty)$ .

Então, expandindo a função do operador  $\hat{\mathcal{L}}$ ,  $e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}$  temos,

$$e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t} = 1 + \gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^2}{2!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^3}{3!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^4}{4!} + \dots \quad (4.81)$$

Vamos agora, atuar o  $e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}$  expandido sobres as bases do estado.

- Atuando sobre  $|e, \tilde{e}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{e}\rangle &= \left[ 1 + \gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^2}{2!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^3}{3!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^4}{4!} + \dots \right] |e, \tilde{e}\rangle \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{e}\rangle &= |e, \tilde{e}\rangle + \gamma E_0 t |f, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^2}{2!} |e, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^3}{3!} |f, \tilde{f}\rangle \dots \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{e}\rangle &= \cosh(\gamma E_0 t) |e, \tilde{e}\rangle + \sinh(\gamma E_0 t) |f, \tilde{f}\rangle. \end{aligned} \quad (4.82)$$

- Atuando sobre  $|e, \tilde{f}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{f}\rangle &= \left[ 1 + \gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^2}{2!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^3}{3!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^4}{4!} + \dots \right] |e, \tilde{f}\rangle \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{f}\rangle &= |e, \tilde{f}\rangle + \gamma E_0 t |f, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^2}{2!} |e, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^3}{3!} |f, \tilde{e}\rangle \dots \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|e, \tilde{f}\rangle &= \cosh(\gamma E_0 t) |e, \tilde{f}\rangle + \sinh(\gamma E_0 t) |f, \tilde{e}\rangle. \end{aligned} \quad (4.83)$$

- Atuando sobre  $|f, \tilde{e}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|f, \tilde{e}\rangle &= \left[ 1 + \gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^2}{2!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^3}{3!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t)^4}{4!} + \dots \right] |f, \tilde{e}\rangle \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|f, \tilde{e}\rangle &= |f, \tilde{e}\rangle + \gamma E_0 t |e, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^2}{2!} |f, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^3}{3!} |e, \tilde{f}\rangle \dots \\ e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}} t}|f, \tilde{e}\rangle &= \cosh(\gamma E_0 t) |f, \tilde{e}\rangle + \sinh(\gamma E_0 t) |e, \tilde{f}\rangle. \end{aligned} \quad (4.84)$$

- Atuando sobre  $|f, \tilde{f}\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} |f, \tilde{f}\rangle &= \left[ 1 + \gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t)^2}{2!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t)^3}{3!} + \frac{(\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t)^4}{4!} + \dots \right] |f, \tilde{f}\rangle \\
e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} |f, \tilde{f}\rangle &= |f, \tilde{f}\rangle + \gamma E_0 t |e, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^2}{2!} |f, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma E_0 t)^3}{3!} |e, \tilde{e}\rangle \dots \\
e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} |f, \tilde{f}\rangle &= \cosh(\gamma E_0 t) |f, \tilde{f}\rangle + \sinh(\gamma E_0 t) |e, \tilde{e}\rangle.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Come este resultado podemos, finalmente, atuar com  $e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t}$  sobre  $|\Psi_0^{diss}\rangle$ , logo

$$\begin{aligned}
e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} |\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} \alpha_1 |e, \tilde{e}\rangle + e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} \alpha_2 |e, \tilde{f}\rangle + e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} \alpha_3 |f, \tilde{e}\rangle + e^{\gamma \hat{\mathcal{L}}t} \alpha_4 |f, \tilde{f}\rangle, \\
&= (\alpha_1 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_4 \sinh(\gamma E_0 t)) |e, \tilde{e}\rangle \\
&\quad + (\alpha_4 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_1 \sinh(\gamma E_0 t)) |f, \tilde{f}\rangle \\
&\quad + (\alpha_2 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_3 \sinh(\gamma E_0 t)) |e, \tilde{f}\rangle \\
&\quad + (\alpha_3 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_2 \sinh(\gamma E_0 t)) |f, \tilde{e}\rangle.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Podemos atuar de forma direta com a função de operadores, que carrega o operador identidade, uma vez que se trata de um operador hermitiano. Portanto, atuando com  $e^{-\gamma E_0 \mathbb{1}t}$  sobre a equação (4.86), temos:

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma E_0 \mathbb{1}t} e^{\gamma E_0 \hat{\mathcal{L}}t} |\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{-\gamma t} [(\alpha_1 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_4 \sinh(\gamma E_0 t)) |e, \tilde{e}\rangle \\
&\quad + (\alpha_4 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_1 \sinh(\gamma E_0 t)) |f, \tilde{f}\rangle \\
&\quad + (\alpha_2 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_3 \sinh(\gamma E_0 t)) |e, \tilde{f}\rangle \\
&\quad + (\alpha_3 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_2 \sinh(\gamma E_0 t)) |f, \tilde{e}\rangle].
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Para atuar sobre o vetor de estado dissipativo com o hamiltoniano livre no espaço duplicado  $\hat{\mathcal{H}}_0$ , temos que definir a sua forma antes de atuar no estado. Sabemos que  $\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_a |e\rangle\langle e|$ , logo

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega_a (|e\rangle\langle e| - |\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}|). \tag{4.88}$$

Como  $\sigma_e = |e\rangle\langle f|$  e  $\sigma_f = |f\rangle\langle e|$  então podemos chegar  $\sigma_e \sigma_f = |e\rangle\langle e|$ , de forma bastante simples. A partir dessa definição podemos reescrever  $\hat{\mathcal{H}}_0$  como,

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega_a (\sigma_e \sigma_f - \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f). \tag{4.89}$$

Na equação (4.89) temos uma operação entre dois sistemas distintos e para fazer esta operação temos que duplicar cada um dos termos. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(\sigma_e\sigma_f \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f) \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a[|e\rangle\langle e| \otimes (|\tilde{e}\rangle\langle\tilde{e}| + |\tilde{f}\rangle\langle\tilde{f}|) - (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|) \otimes |\tilde{e}\rangle\langle\tilde{e}|] \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(|e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}| - |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}|) \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(|e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}|).
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Atuando com  $\hat{\mathcal{H}}_0$  sobre as bases do estado dissipativo separadamente, temos:

$$\hat{\mathcal{H}}_0|e, \tilde{e}\rangle = 0, \tag{4.91}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|e, \tilde{f}\rangle = |e, \tilde{f}\rangle, \tag{4.92}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|f, \tilde{e}\rangle = -|f, \tilde{e}\rangle, \tag{4.93}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|f, \tilde{f}\rangle = 0. \tag{4.94}$$

Assim, atuando com  $e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}}$  sobre  $|\Psi_0^{diss}\rangle$  encontramos,

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mathcal{U}}(t)\rangle_R|\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{-i\omega_a\hat{\mathcal{H}}_0 t} e^{\gamma E_0(\hat{\mathcal{L}}-\mathbb{I})t}|\Psi_0^{diss}\rangle = \\
&e^{-\gamma E_0 t}[(\alpha_1 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_4 \sinh(\gamma E_0 t))|e, \tilde{e}\rangle \\
&+ (\alpha_4 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_1 \sinh(\gamma E_0 t))|f, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{-i\omega_a t}(\alpha_2 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_3 \sinh(\gamma E_0 t))|e, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\omega_a t}(\alpha_3 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_2 \sinh(\gamma E_0 t))|f, \tilde{e}\rangle].
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Finalmente podemos escrever o vetor de estado dissipativo  $|\Psi^{diss}(t)\rangle = \langle\hat{\mathcal{U}}(t)\rangle_R|\Psi_0^{diss}\rangle$  como:

$$\begin{aligned}
|\Psi^{diss}(t)\rangle &= e^{-\gamma E_0 t}[(\alpha_1 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_4 \sinh(\gamma E_0 t))|e, \tilde{e}\rangle \\
&+ (\alpha_4 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_1 \sinh(\gamma E_0 t))|f, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{-i\omega_a t}(\alpha_2 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_3 \sinh(\gamma E_0 t))|e, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\omega_a t}(\alpha_3 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_2 \sinh(\gamma E_0 t))|f, \tilde{e}\rangle].
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Para tentar aproximar este resultado com o encontrado no artigo, podemos definir as constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  como,  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_4$  e usar a seguinte relação,

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x. \tag{4.97}$$



Assim podemos reescrever a equação (4.96) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|\Psi^{diss}(t)\rangle &= \alpha(|e, \tilde{e}\rangle + |f, \tilde{f}\rangle) \\
&+ e^{-\gamma E_0 t} [e^{-i\omega_a t} (\alpha_2 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_3 \sinh(\gamma E_0 t)) |e, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\omega_a t} (\alpha_3 \cosh(\gamma E_0 t) + \alpha_2 \sinh(\gamma E_0 t)) |f, \tilde{e}\rangle]. \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Este resultado é semelhante ao encontrado pelos autores no artigo, onde os termos coerentes dissipam. Não determinamos o termo de interação efetiva para o caso semi-clássico, mas é possível obtê-lo de forma análoga ao encontrado no caso quântico.

Abrimos este parênteses para falar sobre o caso semi-clássico, e tentar estreitar um paralelo com o sistema proposto no artigo, além de servir como auxílio para a próxima subseção. Portanto, vamos retomar o modelo totalmente quântico e determinar o seu vetor de estado dissipativo.

### 4.3.3 Vetor de estado dissipativo para o caso quântico

Vamos aqui retomar o nosso caso quântico e definir o vetor de estado dissipativo para este modelo. Vamos usar a seção anterior para nos auxiliar nos cálculos, pois a álgebra é muito semelhante, diferindo, em essência, em relação a dimensão do espaço de Hilbert.

Partindo da equação (4.58), podemos reescrever o  $\hat{\mathcal{U}}_0$  de forma explícita, levando em conta que para o modelo que estamos trabalhando, a energia no estado fundamental é nula e no estado excitado é  $\hbar\omega_a$ , assim como foi feito na seção anterior. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \hbar\omega_a |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c a^\dagger a \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a (|e\rangle\langle e| - |\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}|) + \hbar\omega_c (\mathcal{N} - \tilde{\mathcal{N}}) \tag{4.99}
\end{aligned}$$

lembrando que  $\mathcal{N} = a^\dagger a$  e  $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$ .

Sabemos que para definir o vetor de estado dissipativo é preciso atuar com a média estocástica do operador evolução temporal, ou seja,  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle$ . Com a condição inicial  $|\Psi^{diss}(t=0)\rangle$ , teremos um vetor de estado inicial, para o caso quântico, com o seguinte formato:

$$|\Psi_0^{diss}\rangle = \alpha_1 |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \alpha_2 |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \alpha_3 |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \alpha_4 |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \tag{4.100}$$

onde  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 | \sum_{j=1}^4 \alpha_j^2 = 1\}$ , são números reais.

Assim como no caso semi-clássico, temos que  $\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R$  é uma função de operadores, e uma forma de atuar com ela sobre um estado é expandindo. Novamente, para compactar a notação vamos dizer que  $\mathcal{L} \equiv (\sigma_e \sigma_f + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f) - 2(a\tilde{a}\sigma_e \tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger \sigma_e \tilde{\sigma}_f + a^\dagger \tilde{a} \sigma_f \tilde{\sigma}_e + a^\dagger \tilde{a}^\dagger \sigma_f \tilde{\sigma}_f) + (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})$  e assim a equação (4.58) torna-se,

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{\gamma \mathcal{L} t}{2}}. \quad (4.101)$$

A partir da equação (4.42) definimos que  $A \equiv a\sigma_e + a^\dagger \sigma_f$  e  $\tilde{A} \equiv \tilde{a}\tilde{\sigma}_e + \tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_f$ , de modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (A - \tilde{A})^2 \\ &= (\sigma_e \sigma_f + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f) - 2(a\tilde{a}\sigma_e \tilde{\sigma}_e + a\tilde{a}^\dagger \sigma_e \tilde{\sigma}_f + a^\dagger \tilde{a} \sigma_f \tilde{\sigma}_e + a^\dagger \tilde{a}^\dagger \sigma_f \tilde{\sigma}_f) + (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}). \end{aligned} \quad (4.102)$$

No intuito de facilitar os cálculos, vamos atuar com  $A$  e  $\tilde{A}$  sobre as bases do vetor de estado dissipativo inicial.

- Atuando sobre  $|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$A|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \quad e \quad \tilde{A}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.103)$$

- Atuando sobre  $|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$A|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \quad e \quad \tilde{A}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.104)$$

- Atuando sobre  $|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$A|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \quad e \quad \tilde{A}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.105)$$

- Atuando sobre  $|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$A|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \quad e \quad \tilde{A}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.106)$$

Vamos verificar também para o caso  $A^2$  e  $\tilde{A}^2$ . Logo,

- Atuando sobre  $|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$A^2|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \quad e \quad \tilde{A}^2|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.107)$$

- Atuando sobre  $|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$A^2|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \quad e \quad \tilde{A}^2|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.108)$$

- Atuando sobre  $|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$A^2|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \quad e \quad \tilde{A}^2|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.109)$$

- Atuando sobre  $|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$A^2|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \quad e \quad \tilde{A}^2|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.110)$$

Sabemos da equação (4.102) que  $\mathcal{L} = (A^2 + \tilde{A}^2) - 2A\tilde{A}$ , mas é necessário duplicar este parâmetro. Vamos dividir  $\mathcal{L}$  em outros dois parâmetros, ou seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} - 2\hat{\mathcal{G}}, \quad (4.111)$$

onde  $\mathcal{F} = (A^2 + \tilde{A}^2)$  e  $\hat{\mathcal{G}} = A\tilde{A}$ . Note que  $\hat{\mathcal{G}}$  está escrito no espaço duplicado, pois este termo já se encontra duplicado. A justificativa é a mesma dada para termo  $\hat{\mathcal{L}}$ , no caso semi-clássico. É preciso agora duplicar  $\mathcal{F}$ , assim

$$\mathcal{F} = (\sigma_e \sigma_f + \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f) + (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}) \quad (4.112)$$

$$\hat{\mathcal{F}} = (\sigma_e \sigma_f \otimes \tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f) + (\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}})$$

$$\hat{\mathcal{F}} = (|e\rangle\langle e| \otimes (|\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}| + |\tilde{f}\rangle\langle \tilde{f}|) + (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|) \otimes |\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}|) + (\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}})$$

$$\hat{\mathcal{F}} = [ |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| + |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}| + |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| ] + (\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}})$$

$$\hat{\mathcal{F}} = (2|e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| + |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}|) + (\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} + \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}}). \quad (4.113)$$

Com os resultados acima temos que  $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{F}} - 2\hat{\mathcal{G}}$ , e assim, a equação (4.101) é reescrita como:

$$\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R = e^{-\frac{i\tilde{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{\gamma \hat{\mathcal{L}} t}{2}}. \quad (4.114)$$

Estamos interessados em saber como atua o termo  $\exp\{-(\gamma \hat{\mathcal{L}} t)/2\}$  e como já foi discutido anteriormente, teremos que expandir este termo. Mas como o termo  $\hat{\mathcal{L}}$  é a junção de  $\hat{\mathcal{F}}$  e  $\hat{\mathcal{G}}$  a função exponencial fica,

$$e^{-\frac{\gamma \hat{\mathcal{L}} t}{2}} = e^{-\frac{\gamma \hat{\mathcal{F}} t}{2}} e^{\gamma \hat{\mathcal{G}} t}. \quad (4.115)$$

Para atuar com  $\exp\{-(\gamma\hat{\mathcal{L}}t)/2\}$  sobre o estado inicial definido na equação (4.100) vamos ter que expandir  $\exp\{-(\gamma\hat{\mathcal{F}}t)/2\}$  e  $\exp\{\gamma\hat{\mathcal{G}}t\}$ . Expandindo  $\exp\{\gamma\hat{\mathcal{G}}t\}$ , temos

$$e^{\gamma\mathcal{G}t} = 1 + \gamma\mathcal{G}t + \frac{(\gamma\mathcal{G}t)^2}{2!} + \frac{(\gamma\mathcal{G}t)^3}{3!} + \frac{(\gamma\mathcal{G}t)^4}{4!} + \dots \quad (4.116)$$

Usando o auxilio das equações que vão de (4.103) a (4.110), teremos facilidade em atuar com os termos da expansão sobre o estado, uma vez que  $\hat{\mathcal{G}} = A\tilde{A}$ . Portanto, vamos agora atuar com  $e^{\gamma\mathcal{G}t}$  expandindo sobre o vetor de estado inicial, mas por cautela, vamos analisar termo a termo.

- Atuando com  $e^{\gamma\mathcal{G}t}$  sobre  $|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle & , & & \mathcal{G}^2|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \\ \mathcal{G}^3|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle & , & & \mathcal{G}^4|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \end{aligned}$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \gamma t|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma t)^2}{2!}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma t)^3}{3!}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \dots$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = \cosh(\gamma t)|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \sinh(\gamma t)|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.117)$$

- Atuando com  $e^{\gamma\mathcal{G}t}$  sobre  $|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle & , & & \mathcal{G}^2|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle, \\ \mathcal{G}^3|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle & , & & \mathcal{G}^4|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle, \end{aligned}$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \gamma t|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma t)^2}{2!}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma t)^3}{3!}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \dots$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = \cosh(\gamma t)|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \sinh(\gamma t)|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.118)$$

- Atuando com  $e^{\gamma\mathcal{G}t}$  sobre  $|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle & , & & \mathcal{G}^2|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \\ \mathcal{G}^3|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle & , & & \mathcal{G}^4|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle &= |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \end{aligned}$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \gamma t|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma t)^2}{2!}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma t)^3}{3!}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \dots$$

$$e^{\gamma\mathcal{G}t}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = \cosh(\gamma t)|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \sinh(\gamma t)|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.119)$$

- Atuando com  $e^{\gamma \hat{G}t}$  sobre  $|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle & , & \quad \mathcal{G}^2|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle, \\ \mathcal{G}^3|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle &= |0, e, \tilde{e}, \tilde{e}\rangle & , & \quad \mathcal{G}^4|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle,\end{aligned}$$

$$e^{\gamma \hat{G}t}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \gamma t|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \frac{(\gamma t)^2}{2!}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \frac{(\gamma t)^3}{3!}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + \dots$$

$$e^{\gamma \hat{G}t}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = \cosh(\gamma t)|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + \sinh(\gamma t)|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle. \quad (4.120)$$

Com estes resultados podemos escrever como atua sobre o vetor de estado inicial a função de operadores  $e^{\gamma \hat{G}t}$ . Assim,

$$\begin{aligned}e^{\gamma \hat{G}t}|\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{\gamma \hat{G}t}\alpha_1|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + e^{\gamma \hat{G}t}\alpha_2|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle + e^{\gamma \hat{G}t}\alpha_3|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + e^{\gamma \hat{G}t}\alpha_4|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle, \\ e^{\gamma \hat{G}t}|\Psi_0^{diss}\rangle &= (\alpha_1 \cosh(\gamma t) + \alpha_4 \sinh(\gamma t))|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \\ &\quad + (\alpha_4 \cosh(\gamma t) + \alpha_1 \sinh(\gamma t))|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\ &\quad + (\alpha_2 \cosh(\gamma t) + \alpha_3 \sinh(\gamma t))|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\ &\quad + (\alpha_3 \cosh(\gamma t) + \alpha_2 \sinh(\gamma t))|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle.\end{aligned} \quad (4.121)$$

O próximo passo é expandir  $\exp\{-(\gamma \hat{\mathcal{F}}t)/2\}$ , mas antes vamos verificar como  $\hat{\mathcal{F}}$  atua sobre os kets de base do vetor de estado dissipativo inicial.

$$\hat{\mathcal{F}}|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = 2|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \quad (4.122)$$

$$\hat{\mathcal{F}}|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = 2|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle, \quad (4.123)$$

$$\hat{\mathcal{F}}|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = 2|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle, \quad (4.124)$$

$$\hat{\mathcal{F}}|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = 2|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle. \quad (4.125)$$

As equações de (4.122) a (4.125) mostram que o vetor de estado dissipativo inicial  $|\Psi_0\rangle$  é um autoestado de  $\hat{\mathcal{F}}$  com autovalor 2. Neste caso, não precisamos expandir  $\hat{\mathcal{F}}$ , podemos aplicar diretamente sobre  $\exp\{\gamma \hat{G}t\}|\Psi_0^{diss}\rangle$ . Portanto,

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\gamma \hat{\mathcal{F}}t}{2}} e^{\gamma \hat{G}t}|\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{-\gamma t}[(\alpha_1 \cosh(\gamma t) + \alpha_4 \sinh(\gamma t))|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \\ &\quad + (\alpha_4 \cosh(\gamma t) + \alpha_1 \sinh(\gamma t))|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\ &\quad + (\alpha_2 \cosh(\gamma t) + \alpha_3 \sinh(\gamma t))|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\ &\quad + (\alpha_3 \cosh(\gamma t) + \alpha_2 \sinh(\gamma t))|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle].\end{aligned} \quad (4.126)$$

Após esta etapa, precisamos saber como atua o hamiltoniano livre  $\hat{\mathcal{H}}_0$  sobre as bases do vetor de estado inicial, para atuar com  $\hat{\mathcal{U}}_0$  na equação (4.126). No entanto, na equação (4.99) é necessário fazer as operações entre dois sistemas distintos, para isso é preciso duplicar cada termo do sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(\sigma_e\sigma_f \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}_e\tilde{\sigma}_f) + \hbar\omega_c(\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}}) \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a[|e\rangle\langle e| \otimes (|\tilde{e}\rangle\langle\tilde{e}| + |\tilde{f}\rangle\langle\tilde{f}|) - (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|) \otimes \tilde{e}\rangle\langle\tilde{e}|] + \hbar\omega_c(\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}}) \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(|e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}| - |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}|) + \hbar\omega_c(\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}}) \\
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hbar\omega_a(|e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}|) + \hbar\omega_c(\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\mathcal{N}}). \tag{4.127}
\end{aligned}$$

Atuando com o hamiltoniano livre sobre os vetores de bases encontramos,

$$\hat{\mathcal{H}}_0|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = 0 \tag{4.128}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = \hbar\Delta|0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \tag{4.129}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle = -\hbar\Delta|1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \tag{4.130}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle = 0 \tag{4.131}$$

onde  $\Delta = \omega_a - \omega_c$  é a dessintonia.

Finalmente, atuando com  $\hat{\mathcal{U}}_0$  na equação (4.126) encontramos,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle &= e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{\gamma \hat{\mathcal{F}} t}{2}} e^{\gamma \hat{\mathcal{G}} t} |\Psi_0^{diss}\rangle = \\
&e^{-\gamma t} [(\alpha_1 \cosh(\gamma t) + \alpha_4 \sinh(\gamma t)) |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \\
&+ (\alpha_4 \cosh(\gamma t) + \alpha_1 \sinh(\gamma t)) |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{-i\Delta t} (\alpha_2 \cosh(\gamma t) + \alpha_3 \sinh(\gamma t)) |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\Delta t} (\alpha_3 \cosh(\gamma t) + \alpha_2 \sinh(\gamma t)) |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle]. \tag{4.132}
\end{aligned}$$

O vetor de estado dissipativo para o caso quântico  $|\Psi^{diss}(t)\rangle = \langle \hat{\mathcal{U}}(t) \rangle_R |\Psi_0^{diss}\rangle$  é definido como:

$$\begin{aligned}
|\Psi^{diss}(t)\rangle &= e^{-\gamma t} [(\alpha_1 \cosh(\gamma t) + \alpha_4 \sinh(\gamma t)) |0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle \\
&+ (\alpha_4 \cosh(\gamma t) + \alpha_1 \sinh(\gamma t)) |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{-i\Delta t} (\alpha_2 \cosh(\gamma t) + \alpha_3 \sinh(\gamma t)) |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\Delta t} (\alpha_3 \cosh(\gamma t) + \alpha_2 \sinh(\gamma t)) |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle]. \tag{4.133}
\end{aligned}$$

O fator dissipativo está intimamente ligado aos termos coerentes, pois se  $\alpha_1 = \alpha_2$  a população não dissipa com o tempo. Isso foi visto na equação (4.98), quando tentamos

aproximar o vetor de estado para um formato semelhante ao do artigo. Analogamente ao que foi feito no caso semi-clássico, onde  $\alpha_1 = \alpha_2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
|\Psi^{diss}(t)\rangle &= \alpha(|0, e, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle + |1, f, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle) \\
&+ e^{-\gamma t} [e^{-i\Delta t} (\alpha_2 \cosh(\gamma t) + \alpha_3 \sinh(\gamma t)) |0, e, \tilde{1}, \tilde{f}\rangle \\
&+ e^{i\Delta t} (\alpha_3 \cosh(\gamma t) + \alpha_2 \sinh(\gamma t)) |1, f, \tilde{0}, \tilde{e}\rangle]. \tag{4.134}
\end{aligned}$$

O vetor de estado dissipativo dado pela equação (4.133) é equivalente ao caso semi-clássico, equação (4.96). No entanto, o campo quantizado contribui de forma efetiva, pois os termos de oscilação vinculados aos termos fora da diagonal principal, depende da dessintonia, que nada mais é que a diferença entre as frequências do átomo e campo. Este não difere, em princípio, da conhecidas Oscilações de Bohr, que correspondem à diferença de frequência entre os níveis excitado e fundamental.

A partir da equação (4.133), podemos calcular a inversão de população e em seguida plotar o seu gráfico. Sabemos que  $\sigma_z = [\sigma_e, \sigma_f]$ , mas antes de atuar com ele sobre o vetor de estado dissipativo precisamos duplicar e estender, ou seja

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_z &= \sigma_z \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes \tilde{\sigma}_z \\
&= (\sigma_e \sigma_f - \sigma_f \sigma_e) \otimes \tilde{\mathbb{I}} - \mathbb{I} \otimes (\tilde{\sigma}_e \tilde{\sigma}_f - \tilde{\sigma}_f \tilde{\sigma}_e) \\
&= (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) \otimes (|\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}| + |\tilde{f}\rangle\langle \tilde{f}|) - [(|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|) \otimes (|\tilde{e}\rangle\langle \tilde{e}| - |\tilde{f}\rangle\langle \tilde{f}|)] \\
&= |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}| - |f, \tilde{f}\rangle\langle f, \tilde{f}| - |e, \tilde{e}\rangle\langle e, \tilde{e}| + |e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| \\
&\quad - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}| + |f, \tilde{f}\rangle\langle f, \tilde{f}| \\
\hat{\sigma}_z &= 2|e, \tilde{f}\rangle\langle e, \tilde{f}| - |f, \tilde{e}\rangle\langle f, \tilde{e}|. \tag{4.135}
\end{aligned}$$

Com este resultado em mãos, podemos obter a inversão de população de modo simples. Para o nosso caso, teremos  $\langle \Psi^{diss}(t) | \hat{\sigma}_z | \Psi^{diss}(t) \rangle$  cuja o resultado é simples,

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \Psi^{diss}(t) | \hat{\sigma}_z | \Psi^{diss}(t) \rangle = 2(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) e^{-2\gamma t}. \tag{4.136}$$

A curva de inversão de população vai depender dos coeficientes  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , neste caso, quando  $\alpha_2 = \alpha_3$  temos  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = 0$ , ou seja, o sistema não afetado pelo processo de dissipação térmica; podemos reinterpretar este caso da seguinte forma: com o estado preparado com "pesos" iguais, os termos correspondente à coerência (fora da diagonal principal) se

cancelam, restando apenas probabilidade idêntica de encontrar o sistema tanto no estado excitado quanto no fundamental. Para prosseguirmos, vamos plotar o gráfico, assumindo valores para estes coeficientes e levando em consideração dois casos possíveis, quando  $\alpha_2 > \alpha_3$  e quando  $\alpha_2 < \alpha_3$ . Lembrando que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  são reais e que  $\sum_{j=1}^4 \alpha_j^2$ .

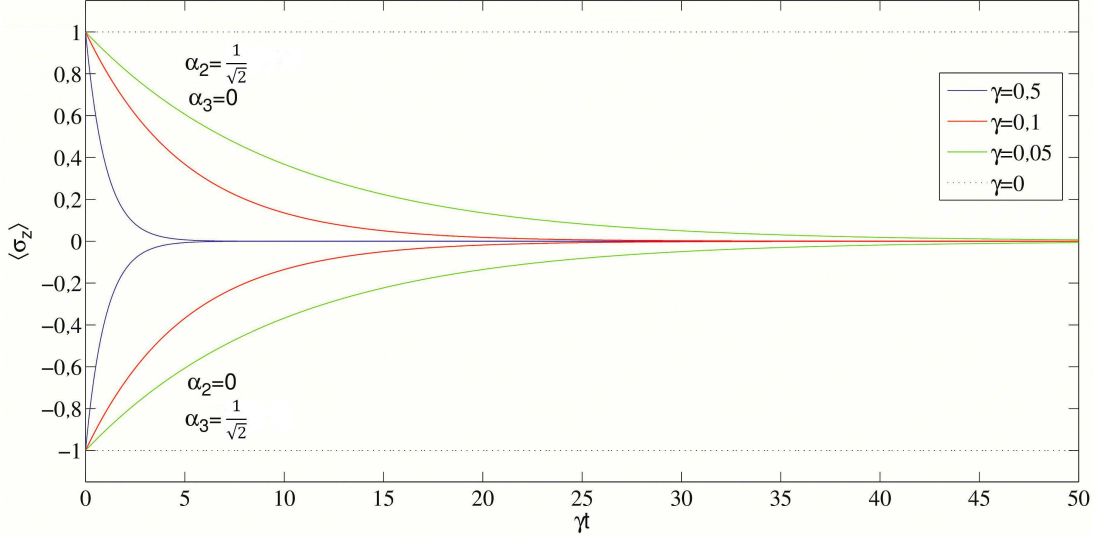


Figura 4.2: Inversão de população para o caso em que exista apenas um fóton na cavidade.

Utilizamos o MJC com a condição de que exista apenas um fóton dentro da cavidade. Neste caso, a inversão de população varia entre 1 e  $-1$ . Quando for  $-1$ , o átomo se encontra no estado fundamental e quando for 1 o átomo se encontra no estado excitado, este resultado está de acordo com o encontrado na literatura. Porém, podemos ver na equação (4.136) que a inversão de população converge para 0 devido à dissipação. Verificando as curvas, fica mais evidente a atuação da dissipação nos termos da coerência, onde esse fator dissipativo é dominado pelo parâmetro  $\gamma$ . Quanto maior o  $\gamma$ , maior a dissipação e mais rápido a inversão de população colapsa.

No capítulo 3 foi feita uma revisão dos modelos de Sistema de dois níveis, Sistema de três níveis - EIT e Modelo de Jaynes-Cummings, focando em aspectos do processo de relaxação. Esta revisão nos permite traçar um paralelo com o resultado obtido neste capítulo. Para o sistema de dois níveis, assim como o sistema de três níveis -EIT, a interação com o meio resulta na relaxação do sistema devido a decoerência, isso também ocorre no modelo de Jaynes-Cummings, mas a relaxação presente tem maior contribuição devido a perda de fótons provocada pela interação do sistema com o meio, neste caso, a cavidade. Em nosso trabalho adotamos o MJC para uma cavidade com um fator de qualidade ele-



vado, restringindo assim, a perda de fótons. Mas, em termos microscópicos, levamos em consideração a ação do reservatório térmico que foi introduzido através do ruído. A partir desta consideração o fator dissipativo surgiu de forma explícita e diretamente ligado aos termos da coerência, como mostra a equação (4.134). Esse comportamento fica evidenciado na figura 3.6, onde a coerência dissipa ao ponto do valor da inversão de população, que é a diferença entre a população do estado excitado e do fundamental, tender a 0.

# Capítulo 5

## Conclusão e perspectiva

Neste trabalho de dissertação apresentamos um estudo teórico da aplicação da dinâmica de campo térmico sobre o modelo de Jaynes-Cummings. Adotamos como base conceitos usados no artigo, “*A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics*” e revisamos sistemas quânticos simples sobre a ótica do processo de relaxação, para que tivéssemos a possibilidade de estabelecer uma comparação com o resultado obtido em nossa pesquisa. No modelo de Jaynes-Cummings que utilizamos, levamos em consideração que a cavidade tem um fator de qualidade elevado e assim não há interação com o átomo devido as irregularidades, porém não desprezamos o reservatório térmico e além disso, fixamos que as transições de estado libera apenas um fóton por vez. Com essas considerações, usamos a dinâmica de campo térmico para investigar o comportamento deste modelo, e conseguimos encontrar um vetor de estado, que chamamos de, “vetor de estado dissipativo“, pois nele, a dissipação aparece de forma explícita, ligado diretamente aos termos responsáveis pela coerência. Em nossa análise, observamos que dissipação dilui a coerência ao passar do tempo, e esse comportamento fica claro ao traçarmos as curvas de inversão de população. Neste gráfico, apresentado na figura 4.2, a inversão de população colapsa e este comportamento está diretamente ligado a perda de coerência devido a dissipação. A figura 4.2, foi traçada, variando o parâmetro  $\gamma$ , que rege a dissipação, de modo que quanto maior o seu valor, mais rapidamente a curva de inversão de população colapsa.

Este resultado, demonstra um comportamento adverso ao que foi observado em nossa revisão no capítulo 3, pois nos modelos revisados a relaxação é advinda da decoerência, para o caso do Sistema de dois níveis e Sistema de três níveis -EIT e devido a perda

de fótons no caso do Modelo de Jaynes-Cummings. O processo de relaxação em nosso trabalho é fruto da dissipação dos termos responsáveis pela coerência. O átomo será encontrado, praticamente, ou no estado fundamental ou no excitado, ou seja, a interferência entre os níveis tende a 0 devido a dissipação.

Utilizamos o MJC, no qual há apenas um fóton na cavidade, mas este trabalho pode ser estendido para o caso de mais de um fóton, além disso o sistema que usamos exigiu a inclusão de um ruído branco para representar as flutuações térmicas envolvidas, mas é possível adotar um sistema que exija um tipo de ruído colorido, que é mais complexo que o ruído branco. Diretamente ligado ao resultado encontrado pode ser feitos um paralelo com outros trabalhos que investigam comportamento similar, via outras teorias.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Araki and E. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5):637–662, 1963.
- [2] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [3] S. M. Ashrafi and M. R. Bazrafkan. New approach to solving master equations of density operator for the jaynes cummings model with cavity damping. *Chinese Physics B*, 23(9):090303, 2014.
- [4] H. Azuma and M. Ban. Thermal effects in jaynes–cummings model derived with low-temperature expansion. *International Journal of Modern Physics C*, 22(10):1015–1062, 2011.
- [5] S. M. Barnett and P. M. Radmore. *Methods in theoretical quantum optics*, volume 15. Oxford University Press, 2002.
- [6] P. Berman and G. Ford. Spectrum in spontaneous emission: Beyond the weisskopf-wigner approximation. *Physical Review A*, 82(2):023818, 2010.
- [7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH.
- [8] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, and P. Thickstun. *Atom-photon interactions: basic processes and applications*. Wiley Online Library, 1992.
- [9] C. d. V. da Silva Lima. Efeitos dissipativos na inversao atômica segundo o modelo de jaynes-cummings. 2006.
- [10] V. Dorobantu. The postulates of quantum mechanics. Technical report, 2006.

- [11] E. Figueroa, F. Vewinger, J. Appel, and A. Lvovsky. Decoherence of electromagnetically induced transparency in atomic vapor. *Optics letters*, 31(17):2625–2627, 2006.
- [12] A. d. Freitas Neto. Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades. 2013.
- [13] C. Gardiner and P. Zoller. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, volume 56. Springer Science & Business Media, 2004.
- [14] C. W. Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*, volume 3. Springer Berlin, 1985.
- [15] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [16] S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency. IEEE, 1997.
- [17] Y. Hashizume, M. Suzuki, and S. Okamura. A new perspective to formulate a dissipative thermo field dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 419:506–512, 2015.
- [18] W. Israel. Thermo-field dynamics of black holes. *Physics Letters A*, 57(2):107–110, 1976.
- [19] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [20] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [21] F. C. Khanna, A. P. Malbouisson, J. Malbouisson, and A. E. Santana. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. World Scientific Books, 2009.
- [22] H. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Physical Review Letters*, 39(11):691, 1977.

- [23] R. Loudon. *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.
- [24] J. Maldacena. Eternal black holes in anti-de sitter. *Journal of High Energy Physics*, 2003(04):021, 2003.
- [25] D. Mi, H.-S. Song, and Y. An. A physical explanation for the tilde system in thermo field dynamics. *Modern Physics Letters A*, 16(10):655–661, 2001.
- [26] D. Moretti, D. Felinto, J. Tabosa, and A. Lezama. Dynamics of a stored zeeman coherence grating in an external magnetic field. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(11):115502, 2010.
- [27] S. Pustelny, D. J. Kimball, S. Rochester, V. Yashchuk, and D. Budker. Influence of magnetic-field inhomogeneity on nonlinear magneto-optical resonances. *Physical Review A*, 74(6):063406, 2006.
- [28] M. Scala, B. Militello, A. Messina, S. Maniscalco, J. Piilo, and K. Suominen. Cavity losses for the dissipative jaynes–cummings hamiltonian beyond rotating wave approximation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(48):14527, 2007.
- [29] J. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2(3):407–432, 1961.
- [30] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum optics*. Cambridge university press, 1997.
- [31] R. Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [32] J. B. Soares. Notas de aula de mecânica quântica. *Departamento de Física Nuclear e Altas Energias (UERJ)*, 2011.
- [33] Y. Takahashi. Collective phenom. 2 55 umezawa h, matsumoto h and tachiki m 1982 thermo field dynamics and condensed states, 1975.
- [34] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko, and H. Umezawa. Spin relaxation in terms of thermo field dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 149(1-2):26–48, 1988.

- [35] N. G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*, volume 1. Elsevier, 1992.
- [36] V. Weisskopf and E. Wigner. Berechnung der natürlichen linienbreite auf grund der diracschen lichttheorie. *Zeitschrift für Physik*, 63(1-2):54–73, 1930.