



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

GUACIRA MANAUARA DE SOUZA MELO

# Formalismo das matrizes densidade na descrição de sistemas ópticos interagindo com dispositivos e o ambiente

Campina Grande, PB  
19 de setembro de 2018

GUACIRA MANAUARA DE SOUZA MELO

# Formalismo das matrizes densidade na descrição de sistemas ópticos interagindo com dispositivos e o ambiente

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. BERTÚLIO DE LIMA BERNARDO

Campina Grande, PB  
19 de setembro de 2018

M528f

Melo, Guacira Manauara de Souza.

Formalismo das matrizes densidade na descrição de sistemas ópticos interagindo com dispositivos e o ambiente / Guacira Manauara de Souza Melo. - Campina Grande-PB, 2018.

42 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo".

Referências.

1. Matriz Densidade. 2. Polarização. 3. Coerência - Física. 4. Entropia - Física. 5. Emaranhamento - Física. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

CDU 535.51(043)

GUACIRA MANAUARA DE SOUZA MELO

# Formalismo das matrizes densidade na descrição de sistemas ópticos interagindo com dispositivos e o ambiente

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

## BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo  
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG  
Orientador

---

Prof. Dr. Danievertton Moretti  
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG  
Examinador Interno

Campina Grande, 19 de setembro de 2018

*“Viver é como andar de bicicleta.  
É preciso estar em constante movimento  
para manter o equilíbrio.” A. Einstein*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por guiar meus passos em mais esta jornada.

A minha família por todo apoio e compreensão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, pela paciência na realização deste trabalho.

À Andréa Freire pelo companheirismo, risadas e choros compartilhados.

Ao velho amigo Alisson Rodrigues, por toda sua sinceridade e horas gastas em frente ao Skype tornando meus dias mais alegres.

Aos novos amigos conquistados, em especial a Klécio Lima, João Paulo Gois, Bárbara Macedo e Beatriz Macedo.

Aos professores do programa de pós graduação em física por contribuírem na produção do conhecimento, especialmente aos queridos Prof. Dr. João Rafael Santos, Prof. Dr. Eduardo Passos e Prof. Dr. Francisco Brito.

A todos os amigos que estão longe, mas que se fazem presente todos os dias.

À Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeir

# Resumo

Tendo em vista as propriedades de polarização e coerência da luz como as mais investigadas por auxiliarem na compreensão do fenômeno de interferência e possuírem grande aplicabilidade tecnológica, recentemente foi proposta uma teoria baseada na álgebra de matriz densidade capaz de descrever tais propriedades em conjunto. Com isso, neste trabalho, aplicamos o método da matriz densidade unificada de polarização e coerência na descrição matemática do efeito de alguns dispositivos ópticos lineares e verificamos a sua aplicabilidade em experimentos que envolvem apagadores quânticos. Além disso, considerando a evolução temporal da matriz densidade reduzida após interações entre os fótons e constituintes do ambiente, observamos que é possível verificar a conexão entre o grau de emaranhamento entre o sistema e o ambiente e a perda de coerência quântica através da entropia reduzida de von Neumann.

**Palavras-chave:** matriz densidade, polarização, coerência, entropia, emaranhamento.

# Abstract

In considering the polarization and coherence properties of light as the most investigated, both for helping to understand many phenomena of interference and for having large technological applicability, it was recently proposed a theory based on density matrix algebra, which is able to describe such properties jointly. In a similar fashion, in this study we apply the coherence and polarization density matrix method to mathematically describe the effect of some optical devices and verify its applicability in experiments involving quantum erasers. Furthermore, by taking the temporal evolution of the reduced density matrix into account, we see that after interactions between the photons and environmental constituents, it is possible to verify the connection of the degree of entanglement between the system and the environment with the loss of quantum coherence by means of the von Neumann reduced entropy.

**Keywords:** density matrix, polarization, coherence, entropy, entanglement.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Elementos da teoria quântica</b>	<b>4</b>
1.1 Operador densidade.....	4
1.2 Emaranhamento quântico .....	7
1.3 Matriz densidade reduzida .....	9
1.4 Informação de caminho .....	11
1.5 Entropia.....	13
<b>2 Teoria unificada da polarização e da coerência</b>	<b>17</b>
2.1 Coerência e polarização em conjunto.....	17
2.2 Interações com o ambiente.....	19
<b>3 Entropia reduzida de von Neumann</b>	<b>25</b>
<b>4 Aplicação da teoria unificada</b>	<b>29</b>
4.1 Dispositivos ópticos .....	29
4.1.1 Espelho .....	29
4.1.2 Placa $\lambda/2$ .....	31
4.1.3 Divisor de feixe.....	32
4.2 Apagador quântico .....	34
4.2.1 Teoria unificada no apagamento de informação.....	35
<b>Bibliografia</b>	<b>3</b>

# Introdução

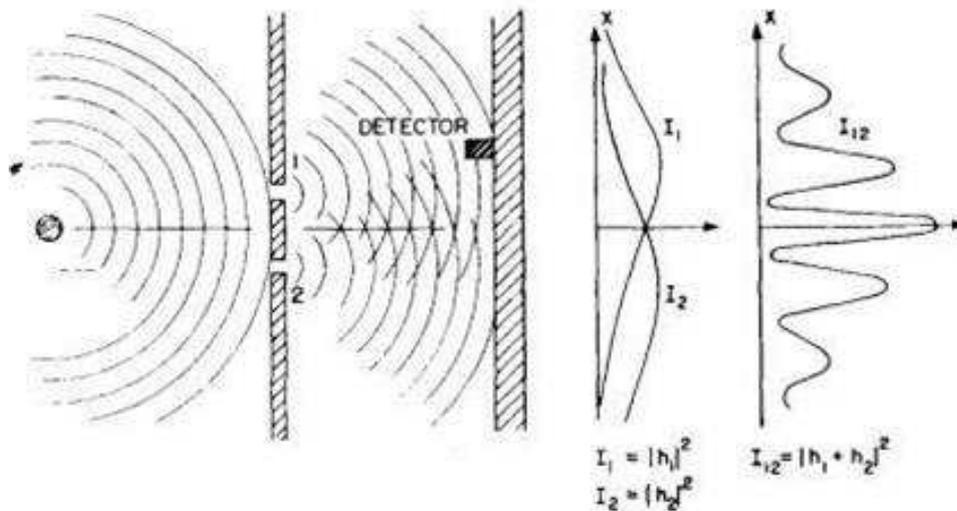


Figura 1: Experimento de dupla-fenda. Esquerda: um grupo de partículas incidem sobre um aparato com duas fendas e, posteriormente, tem suas posições registradas em uma tela de detecção. Centro: corresponde ao comportamento clássico da densidade de probabilidade de partículas. Direita: visualização do efeito de interferência quântica em que agora corresponde ao comportamento de ondas [2].

O efeito de interferência foi introduzido por Young, em 1801, com o seu famoso experimento de dupla-fenda para explicar o comportamento ondulatório da luz [1]. Para exemplificar, as ondas podem interferir formando pontos de iluminação máxima e mínima, conhecidos como franjas de interferência. Estendido para o comportamento quântico das ondas de matéria, o efeito de interferência é tido como “o coração da mecânica quântica”, onde reside todo o mistério da teoria [2]. Sob a perspectiva da mecânica quântica, o experimento de dupla-fenda consiste num grupo de partículas, tais como elétrons, passando por um aparato com duas fendas e, posteriormente, uma tela de detecção registra suas posições (veja figura 1). Se não houver informação sobre qual das fendas a partícula passou, então um padrão de interferência é registrado na tela, que é descrito por meio da densidade de probabilidade de partículas,  $q(x) = \frac{1}{2} |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$ , onde  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  correspondem às ondas parciais das partículas que atravessaram respectivamente as fendas 1 e 2. Entretanto, se houver

alguma informação a respeito de qual das fendas a partícula passou, então a interferência desaparece e a função de probabilidade  $q(x) = \frac{1}{2} |\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_2(x)|^2$  passa a descrever tal comportamento; ou seja, a tela de detecção passa a registrar um comportamento clássico em que a densidade de probabilidade é representada pela soma das funções de onda oriundas de cada fenda individualmente. Desse modo, “a interferência quântica é incompatível com a informação de caminho” [3]. Esse fato exhibe o famoso princípio da complementaridade proposto por Bohr em 1928 [4].

Agora, se considerarmos o ambiente em que as partículas estão imersas, estas interagem a todo momento por meio de colisões com os constituintes do ambiente que podem ser luz, fótons térmicos, moléculas de gás, etc. Estas interações carregam informação sobre a posição da partícula no espaço devido à posição de espalhamento e ângulos de deflexão. Dessa forma, tais interações entre partícula e constituintes ambientais resultam no *emaranhamento quântico* entre o sistema e o ambiente de modo que informações físicas sobre a partícula estão codificadas no ambiente. Em outras palavras, a informação de caminho da partícula é transferida para o ambiente suprimindo assim o efeito de interferência. Assim, quanto maior o número de interações, maior o grau de emaranhamento entre o sistema e o ambiente, e maior a perda da coerência quântica entre as fases relativas das funções de onda parciais. Esse efeito é denominado *decoerência*, que determina como o comportamento clássico surge a partir de propriedades quânticas [3, 5, 6].

A coerência quântica tem sido objeto de vários estudos por sua gama de aplicabilidade tecnológica e nas subáreas da física [7]. Quase dois séculos depois do experimento de Young, tendo como base a exibição de interferência de dois feixes de luz e a indistinguibilidade de caminho dos fótons, Mandel estabeleceu a conexão entre coerência e indistinguibilidade de caminho utilizando a álgebra da matriz de densidade [8].

E foi com base na álgebra da matriz de densidade que Bernardo propôs uma teoria capaz de tratar de forma unificada os efeitos de coerência e polarização de um feixe de luz [9].

Por outro lado, a mecânica quântica e a termodinâmica estão ligadas mediante uma entidade quantitativa de desordem chamada de entropia de von Neumann [10], definida por meio do operador densidade  $\hat{\rho}$ :

$$S = -\kappa_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (1)$$

onde  $\kappa_B$  é a constante de Boltzmann e  $Tr$  é o traço. E, na forma diagonalizada, temos uma entropia, sob perspectiva quântica, análoga à entropia clássica de Gibbs:

$$S = -\kappa_B \sum_n \lambda_n \ln \lambda_n. \quad (2)$$

Aqui,  $\lambda_n$  representa os autovalores da matriz densidade.

Quando aplicada a subsistemas emaranhados, a entropia de von Neumann passa a deter a peculiaridade de quantificar o emaranhamento quântico de um sistema bipartido com estado puro de forma que fica evidente a conexão íntima entre emaranhamento e decoerência quântica [11].

O presente trabalho é um estudo sobre a teoria unificada da polarização e da coerência (ver capítulo 2), o qual estendemos sua simples metodologia para a descrição matemática de dispositivos ópticos comuns em experimentos de interferência, assim como a sua aplicabilidade em experimentos que envolvem *apagador quântico* (ver capítulo 4). Além do mais, este trabalho tem também como objetivo verificar a correlação entre o grau de emaranhamento e a decoerência quântica sofrida pelo sistema sujeito a dois diferentes tipos de interações ambientais (ver capítulo 3). Após explorarmos esses quatro capítulos, apresentaremos nossas conclusões.

# Capítulo 1

## Elementos da teoria quântica

### 1.1 Operador densidade

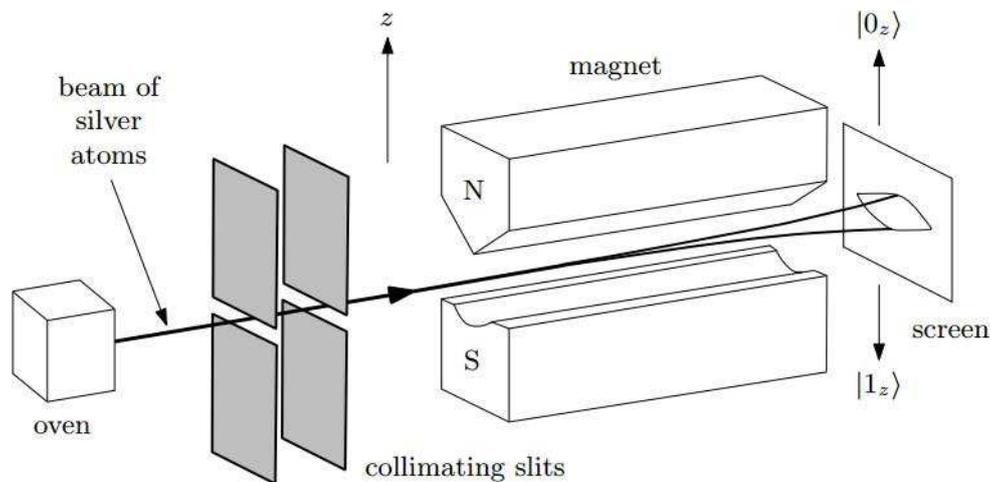


Figura 1.1: Experimento de Stern-Gerlach. Os átomos produzidos pelo forno representam estados mistos por possuírem direções aleatórias de spins. Entretanto, ao passar pelo eletroímã, separamos a mistura de estados em dois estados puros (up e down) [5].

O operador densidade é uma importante ferramenta algébrica capaz de descrever qualquer estado quântico, puro ou misto. Uma única função de onda é capaz de descrever qualquer estado puro (polarizado), mas não é capaz de descrever o estado de ensembles randômicos [12]. Para melhor compreensão, tomamos como exemplo o experimento de Stern-Gerlach. Os átomos que saem do forno possuem direção completamente aleatória e atribuímos pesos probabilísticos à mistura de estados de spins em que não podem ser descritos por um único ket; dessa forma, definimos estado misto, que representa o feixe não

polarizado. Após a passagem pelo eletroímã, temos dois feixes defletidos em duas direções (para cima e para baixo). Neste caso, os feixes são polarizados e chamamos de estados puros podendo ser escritos como um ket geral para descrevê-los. Em outras palavras, podemos dizer também que o estado misto nada mais é que uma mistura de estados puros.

Deste modo, ao realizar uma medida sobre um estado misto de algum observável  $\hat{A}$ , deve-se ter em mente de que o valor esperado de  $\hat{A}$  combina informações a respeito da fração probabilística  $\alpha_i$  da mistura de estados  $|\Psi_i\rangle$  (conceito de probabilidade clássica) e do valor esperado quântico de  $\hat{A}$  em relação ao estado  $|\Psi_i\rangle$  [5]. Assim, o valor esperado de  $\hat{A}$  é definido como:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \sum \alpha_i \langle \Psi_i | \hat{A} | \Psi_i \rangle \\
 &= \sum_i \alpha_i \sum_{\square} \sum_{\kappa} (\Psi_i | b_{\square}) (b_{\square} | \hat{A} | b_{\kappa}) (b_{\kappa} | \Psi_i) \\
 &= \sum_{\square} \sum_{\kappa} \sum_i \alpha_i (b_{\kappa} | \Psi_i) (\Psi_i | b_{\square}) (b_{\square} | \hat{A} | b_{\kappa}), \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

em que definimos:

$$\hat{\rho} = \sum_i \alpha_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \tag{1.2}$$

como o operador densidade. E a matriz densidade correspondente é, portanto:

$$(b_{\square} | \hat{\rho} | b_{\kappa}) = \sum_i \alpha_i (b_{\square} | \Psi_i) (\Psi_i | b_{\kappa}). \tag{1.3}$$

Reescrevendo a eq. (1.1), temos que:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\square} \sum_{\kappa} (b_{\kappa} | \hat{\rho} | b_{\square}) (b_{\square} | \hat{A} | b_{\kappa}) = \sum_{\kappa} (b_{\kappa} | \hat{\rho} \hat{A} | b_{\kappa}) = Tr(\hat{\rho} \hat{A}). \tag{1.4}$$

Assim, podemos obter a média de um observável  $\hat{A}$  aplicando o operador traço a  $\hat{\rho} \hat{A}$ . Tenha em mente de que o operador traço independe da base do espaço de Hilbert.

Agora, vejamos algumas propriedades as quais o operador densidade obedece:

● Para estados puros:

1. O operador densidade é hermitiano:  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ ;

2. Satisfaz a condição de normalização:  $Tr(\hat{\rho}) = 1$ ;

3. O operador densidade é projetor:  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ ;

4. Os autovalores do operador densidade são 0 ou 1;

5.  $Tr(\hat{\rho}^2) = 1$ .

**C** Para estados mistos:

1. O operador densidade é hermitiano:  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ ;

2. Satisfaz a condição de normalização:  $Tr(\hat{\rho}) = 1$ ;

3. O operador densidade é não projetor:  $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ ;

4.  $0 < Tr(\hat{\rho}^2) < 1$ .

Aqui, chamamos a atenção para a última propriedade. Ela é chamada de grau de pureza  $P$  e define o quão puro o estado é:

$$P = Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1 \quad (1.5)$$

## Evolução temporal

Sabendo que a equação de Schrödinger é dada por:

$$\hat{H}|\Psi, t_0; t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t_0; t\rangle, \quad (1.6)$$

em que  $\hat{H}$  é o operador hamiltoniano com estado ket  $|\Psi_i\rangle$  que evolui de  $t_0 \rightarrow |\Psi_i, t_0; t\rangle$ , podemos analisar o comportamento de  $\hat{\rho}$  da equação (1.2) variando em função do tempo de

modo que:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= i\hbar \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} (|\Psi_i, t; t\rangle \langle \Psi_i, t; t|) \\
 &= i\hbar \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} (|\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t|) \\
 &= i\hbar \sum_i \alpha_i \left( \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t| + |\Psi_i, t_0; t\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_i, t_0; t| \right) \\
 &= \sum_i \alpha_i \hat{H} |\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t| - |\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t| \hat{H} \\
 &= \hat{H} \sum_i \alpha_i |\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t| - \sum_i \alpha_i |\Psi_i, t_0; t\rangle \langle \Psi_i, t_0; t| \hat{H} \\
 &= \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto, obtemos a conhecida equação de von Neumann:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \tag{1.8}$$

que descreve o comportamento de evolução temporal do operador densidade obtido por meio da equação de Schrödinger. Note que quando

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0, \tag{1.9}$$

então, tem-se

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0, \tag{1.10}$$

o que significa que o estado “ $\hat{\rho}$ ” não evolui.

## 1.2 Emaranhamento quântico

Nesta seção, buscamos esclarecer o que é emaranhamento quântico e qual o seu significado. Primeiro, para entender o que é emaranhamento, suponha um dado sistema  $S$ ,

descrito por um vetor estado  $|\Psi\rangle$ , composto pelos subsistemas  $A$  e  $B$ . Se não pudermos escrever o estado  $|\Psi\rangle$  de  $S$  na forma de produto tensorial tal que  $|\Psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ , onde  $|a\rangle$  e

$|b\rangle$  são respectivamente os estados de  $A$  e  $B$ , então dizemos que os subsistemas  $A$  e  $B$  estão emaranhados [5]. A consequência física disso implica que se  $A$  e  $B$  estão emaranhados, esses subsistemas não podem mais ser descritos pelos seus estados quânticos individuais de modo que não podemos descrever um sem considerar o outro, podendo os subsistemas apenas serem descritos por um estado quântico composto  $|\Psi\rangle = |a\rangle|b\rangle$ .

Como exemplo de estados emaranhados puros, consideramos duas partículas de spin  $1/2$  descritas pelos estados ortogonais  $|0\rangle_i$  e  $|1\rangle_i$ ,  $i = 1, 2$ , correspondendo às partículas de spin “up” e “down”, respectivamente. Estes estados são chamados de estados de Bell [13], que são e dados por

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2), \quad (1.11)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2). \quad (1.12)$$

Os estados  $|0\rangle_1$  e  $|1\rangle_1$  estão correlacionados com os estados  $|0\rangle_2$  e  $|1\rangle_2$ , e vice versa, de modo que é impossível escrevê-los na forma de produto tensorial.

Um dos fatos mais curiosos a respeito do emaranhamento quântico se deve quando são realizadas medições em pares de partículas com tal propriedade. Tomamos, por exemplo, um par de partículas de spin  $1/2$  cujo estado é descrito por um dos estados de Bell da eq. (1.12). Temos igual probabilidade de se obter os estados “up” ou “down” após uma medida. Consequentemente, o ato de medir uma partícula é totalmente probabilístico. Qualquer medição é realizada no sistema emaranhado como um todo, já que não se pode considerar um estado próprio de cada partícula. No entanto, ao medir uma das partículas, o estado quântico da outra será instantaneamente colapsado de modo que ela parece “sentir” o resultado da primeira independentemente da distância em que se encontram [14, 15]. Em outras palavras, se medirmos o estado de uma das partícula e encontrarmos o estado “up”, instantaneamente podemos afirmar que o estado da outra é “down” na mesma direção em que a primeira foi medida. Este fenômeno foi definido nas palavras de Einstein como uma “ação fantasmagórica à distância” devido à instantaneidade do colapso do estado independente da distância [13], cuja natureza quântica é questionada pelo *paradoxo EPR*, pois, à primeira vista, isto parece violar o princípio da relatividade especial visto que nenhuma informação pode viajar mais rápido do que a velocidade da luz. No entanto, esta violação de fato não

ocorre mesmo sendo instantânea a definição do estado da segunda partícula. Isto porque, sendo o resultado da medida da primeira partícula completamente aleatório, o que acarreta na aleatoriedade do resultado da segunda, dois observadores que possuem estas partículas não poderiam utilizar este canal para estabelecer uma comunicação [5, 16, 17]. Assim, o resultado da medida da segunda partícula é determinado apenas pelas correlações quânticas codificadas no estado quântico emaranhado do sistema total. Tal fato já foi comprovado por inúmeros experimentos utilizando pares de fótons emaranhados separados por milhares de quilômetros [18, 19].

### 1.3 Matriz densidade reduzida

A principal motivação da matriz densidade reduzida surge da necessidade de descrever sistemas quânticos emaranhados, onde apenas um desses sistemas pode ser medido ou possui informações de interesse. Mas devemos ter em mente de que a matriz densidade reduzida não é aplicada apenas a sistemas emaranhados. Desse modo, vamos considerar um estado emaranhado de dois sistemas  $A$  e  $B$ , tal que:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|b_1\rangle + |a_2\rangle|b_2\rangle), \quad (1.13)$$

e seu correspondente operador densidade:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j|. \quad (1.14)$$

No entanto, só podem ser realizadas medições em  $A$ . Então, dado que  $|\psi_k\rangle$  e  $|\varphi_A\rangle$  são as respectivas bases ortonormais dos espaços de Hilbert  $H_A$  e  $H_B$  de  $A$  e  $B$ , tomamos um observável que atua somente no sistema  $A$  e que pode ser reescrito como  $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \hat{I}_B$ , onde  $\hat{I}_B$  é o operador identidade no espaço de Hilbert de  $B$ . O valor esperado pode ser calculado

usando a equação (1.4). Logo:

$$\begin{aligned}
(\hat{O}) &= Tr(\hat{\rho}\hat{O}) \\
&= \sum_{\kappa} (\varphi_A | \psi_{\kappa} | \hat{\rho} \hat{O} | \psi_{\kappa} | \varphi_A) \\
&= \sum_{\kappa} (\varphi_A | \psi_{\kappa} | \hat{\rho} (\hat{O}_A \otimes \hat{I}_B) | \psi_{\kappa} | \varphi_A) \\
&= \sum_{\kappa} (\psi_{\kappa} | \sum_{A=1}^{\kappa} (\varphi_A | \hat{\rho} | \varphi_A) \hat{O}_A | \psi_{\kappa}) \\
&= \sum_{\kappa} (\psi_{\kappa} | (Tr_B \hat{\rho}) \hat{O}_A | \psi_{\kappa}) \\
&= \sum_{\kappa} (\psi_{\kappa} | \hat{\rho}_A \hat{O}_A | \psi_{\kappa}) \\
&= Tr_A(\hat{\rho}_A \hat{O}_A), \tag{1.15}
\end{aligned}$$

onde  $\hat{\rho}_A$  é a matriz densidade reduzida. Ou seja, a matriz densidade reduzida é dada por:

$$\hat{\rho}_A \equiv Tr_B \hat{\rho}. \tag{1.16}$$

Isto significa que a obtenção das informações físicas acerca do sistema observado  $A$  é feita através do traço sobre os estados do sistema  $B$ . Ou seja, a descrição completa do observável  $A$  está contida em uma matriz densidade  $\hat{\rho}_A$  que é uma média sobre os graus de liberdade do sistema não observado  $B$  [5]. Além disso, ela possui um outro curioso resultado. Expandindo os estados  $|b_{\iota}\rangle$ ,  $\iota = 1, 2$  de  $B$  na eq. (1.14), ou seja:

$$|b_{\iota}\rangle = \sum_A \alpha_A^{(\iota)} |\varphi_A\rangle, \tag{1.17}$$

e substituindo na eq. (1.16), temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_A &= \text{Tr}_B \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i| \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| \sum_{\mu} (\varphi_{A\mu}^{(i)} | \varphi_{Aj}^{(i)} \rangle \langle \varphi_{A\mu}^{(i)} | \varphi_{Aj}^{(i)} \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(i)} \cdot \alpha_{\mu}^{(i)*} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| (|b_i\rangle\langle b_i|) \\
 &= \frac{1}{2} (|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| + |a_1\rangle\langle a_2| (|b_2\rangle\langle b_1| + |a_2\rangle\langle a_1| (|b_1\rangle\langle b_2|)), \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

onde os dois últimos termos são conhecidos como termos de interferência e estão relacionados à visibilidade das franjas de interferência e informação de caminho. Analisaremos isto com mais detalhes na próxima secção.

## 1.4 Informação de caminho

Para melhor compreensão acerca deste ponto, tomamos como base o experimento de dupla-fenda em que partículas incidem sobre um aparato com duas fendas e, após a passagem pelas fendas, atingem uma tela de detecção (figura 1.2).

Sob esse contexto, há dois diferentes cenários:

1. *cenário onda*; quando não se pode dizer, ou se abstém de medir, por qual fenda a partícula passou. Então, a tela de detecção registra um padrão de interferência que corresponde à densidade de probabilidade de encontrar as partículas  $q(x) = \frac{1}{2} |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$  como uma superposição das componentes de estado  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  que atravessaram as respectivas fendas 1 e 2.
2. *cenário partícula*; se colocarmos um detector atrás de uma das fendas, podemos medir por qual das fendas a partícula passou, e a interferência desaparece. Então, na tela de detecção é observada uma densidade de probabilidade clássica  $q(x) = \frac{1}{2} |\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_2(x)|^2$ . Por que isso acontece? O estado da partícula é dado pela superposição

de  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  representado pela função de onda  $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$ . Logo, medir por qual fenda a partícula passou, significa colapsar  $\Psi(x)$  para qualquer uma das componentes de estado. Assim,  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  deixam de interferir entre elas e o padrão de interferência desaparece.

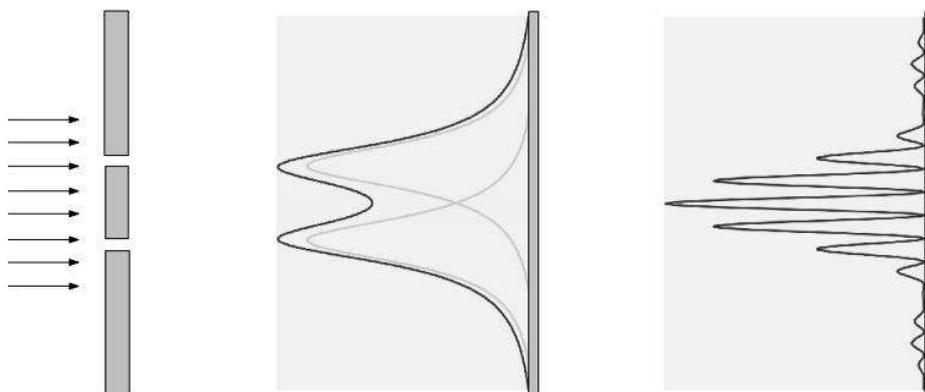


Figura 1.2: Experimento de dupla-fenda. Esquerda: partículas incidem sobre um aparato de duas fendas. Centro: na tela de detecção, tem-se a densidade de partículas que corresponde ao caso clássico. Ou seja, não se obtém franjas de interferência devido ao conhecimento sobre qual das fendas a partícula passou. Direita: o fenômeno quântico de interferência é observado devido à ignorância do observador a respeito da informação de caminho da partícula [5].

Diante destas duas configurações experimentais em que, ora observamos o comportamento de onda, mas que quando resolvemos obter informação do caminho da partícula destruimos a propriedade quântica de interferência [5], apresentando um comportamento clássico, Bohr apresentou seu famoso *princípio de complementariedade* [4].

Entretanto, seria possível obter alguma informação de caminho preservando partes do padrão de interferência? Wooteers e Zurek [20], e mais tarde Scully e Drühl [21], mostraram que isto é possível desde que não haja uma mudança significativa na função de onda [5]. Desse modo, sob perspectiva matemática puramente quântica, retornamos à matriz densidade de um estado puro  $A$  dado na eq.(1.18) com a correspondente densidade de probabilidade de encontrar a partícula,

$$q(x) = \frac{1}{2} |a(x)|^2 + \frac{1}{2} |a(x)|^2 + \text{Re}\{a(x)a^*(x) \langle b|b_2 \rangle\} \quad (1.19)$$

onde a sobreposição  $\langle b_2|b_1 \rangle$  quantifica a visibilidade do padrão de interferência de modo que quando  $\langle b_2|b_1 \rangle = 0$ , temos o cenário partícula. Contudo, se  $\langle b_2|b_1 \rangle = 1$ , temos a densidade de probabilidade correspondente ao cenário onda. Além disso, na situação em que  $0 < \langle b_2|b_1 \rangle <$

1 podemos obter alguma, mas não completa, informação de caminho ao mesmo tempo em que se observa uma certa visibilidade do padrão de interferência devido à codificação do caminho por conta do emaranhamento [5, 20].

## 1.5 Entropia

A palavra *entropia* tem origem grega cujo significado é “*conteúdo de transformação*” (uma alusão ao fato de ser a grandeza chave para a compreensão da irreversibilidade espontânea dos processos termodinâmicos) e foi usada por Clausius em 1865 [22] para denominar uma nova função de estado (tal como a energia interna) e formular a segunda lei da termodinâmica.

Apesar de seu conceito físico ainda ser obscuro, a entropia é comumente associada ao grau de desordem do sistema. E, seguindo a segunda lei da termodinâmica, a entropia total de um sistema fechado nunca diminui; ela só pode aumentar (processos irreversíveis) ou permanecer constante (processos reversíveis). Em mecânica estatística, um exemplo de aumento de entropia pode ser visto mediante à remoção de um vínculo interno de um reservatório contendo dois fluidos puros [23]. O vínculo pode ser uma parede adiabática, fixa e impermeável, de modo que, em algum instante, ela passe a ser diatérmica permitindo flutuações de energia, por exemplo, ou simplesmente podendo ser removida (figura 1.3).

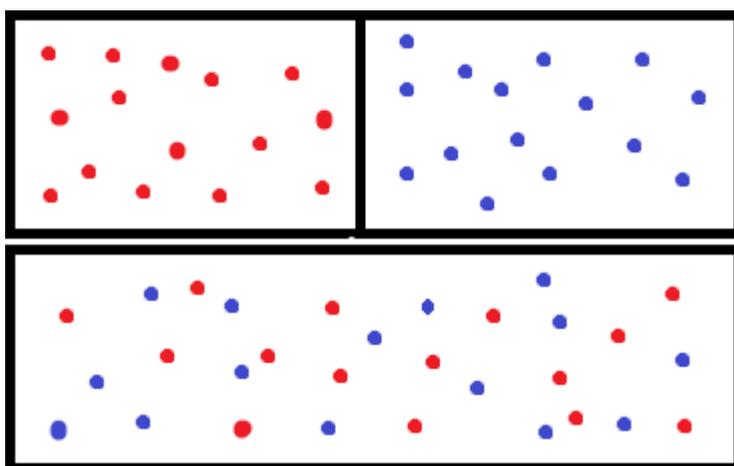


Figura 1.3: Dois fluidos separados por uma parede adiabática, em que o aumento de entropia ocorre mediante à remoção do vínculo.

Em 1877, coube a Ludwig Boltzmann [24] obter a equação que associa a entropia ao

número de microestados acessíveis de um sistema:

$$S = \kappa_B \ln \Omega, \quad (1.20)$$

onde  $\Omega$  é o número de microestados acessíveis. Além disso, sob condições de equilíbrio térmico, a equação (1.20) equivale à *entropia maximizada*. Por esse, e seus outros grandes feitos, Boltzmann é considerado o pai da mecânica estatística.

Mais de 50 anos depois, o conceito de entropia foi estendido por John von Neumann à mecânica quântica através da álgebra de operador densidade [10], como visto na equação (1). Neste contexto, a interpretação de entropia como grau de desordem admite caráter de quantificador de misturas de estados [25], de modo que:

$$S \geq 0, \quad (1.21)$$

em que o sinal de igualdade corresponde a um ensemble puro, enquanto que a entropia é sempre positiva para o ensemble misto [26, 27]. No entanto, se considerarmos dois sistemas independentes  $A$  e  $B$  descritos pelas matrizes densidade  $\hat{\rho}_A$  e  $\hat{\rho}_B$ , respectivamente, então a entropia é sempre aditiva,

$$S(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B), \quad (1.22)$$

e subaditiva se  $\hat{\rho}_A$  e  $\hat{\rho}_B$  forem matrizes densidade reduzida da matriz densidade geral  $\hat{\rho}_{AB}$ , dado que

$$|S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_B)| \leq S(\hat{\rho}_{AB}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B). \quad (1.23)$$

A equação (1.23) é o teorema de Araki e Lieb [28], em que se o sistema total é puro ( $S(\rho_{AB}) = 0$ ), então  $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B)$ . Por outro lado, se  $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) > 0$ , sendo o estado total puro, então não podemos escrever o estado na forma de produto, isto porque os sistemas  $A$  e  $B$  estão emaranhados [29].

## Ensemble Grand Canônico

Seguindo a premissa básica de que a natureza tende maximizar a entropia [26], o objetivo é obter o operador densidade que descreve a distribuição do ensemble com entropia máxima.

Sabendo que o sistema obedece às restrições de energia interna média

$$\bar{E} = \sum_i \rho_i E_i, \quad (1.24)$$

e número médio de partículas

$$\bar{N} = \sum_i \rho_i N_i, \quad (1.25)$$

e que a entropia e o operador densidade são dados pelas equações (2) e (1.2), respectivamente, podemos usar o método de multiplicadores de Lagrange para maximizar a função [12, 27]:

$$f(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots) \equiv -\kappa_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i + \gamma (E - \sum_i \rho_i E_i) + \gamma^j (N - \sum_i \rho_i N_i) + \gamma^{jj} (1 - \sum_i \rho_i), \quad (1.26)$$

onde  $\gamma$ ,  $\gamma^j$  e  $\gamma^{jj}$  são os multiplicadores de Lagrange.

Fazendo a derivada para  $\rho_i$  com volume fixo:

$$\frac{\partial f}{\partial P_{i,v}} = -\kappa (\ln \rho_i + 1) - \gamma E_i - \gamma^j N_i - \gamma^{jj} = 0, \quad (1.27)$$

logo,

$$\kappa_B \ln \rho_i = -\kappa_B - \gamma E_i - \gamma^j - \gamma^j N_i - \gamma^{jj} \quad (1.28)$$

$$\ln \rho_i = -1 + (-\gamma E_i - \gamma^j N_i - \gamma^{jj}) \frac{1}{\kappa_B}, \quad (1.29)$$

e portanto:

$$\rho_i = e^{[\gamma E_i - \gamma^j - \gamma^j N_i] \frac{1}{\kappa_B}} e^{-\frac{\gamma^{jj}}{\kappa_B}}, \quad (1.30)$$

em que

$$e^{-\frac{\gamma^{jj}}{\kappa_B} - 1} = c. \quad (1.31)$$

Tomamos que  $\beta \equiv \frac{\gamma}{\kappa_B} \equiv \frac{1}{\kappa_B T}$ ,  $\beta \mu \equiv -\frac{\gamma^j}{\kappa_B}$  e  $c$  é uma constante. A equação anterior então fica:

$$\rho_i = c e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}. \quad (1.32)$$

Lembrando que  $\sum_i \rho_i = 1$ , é fácil ver que:

$$c = \sum_i \frac{1}{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}. \quad (1.33)$$

Desse modo, obtemos a equação correspondente ao análogo clássico da distribuição de Boltzmann:

$$\rho_i = \frac{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}} \quad (1.34)$$

$$= \frac{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{\Xi}, \quad (1.35)$$

onde,

$$\Xi = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} \quad (1.36)$$

é a função de partição grand canônica da mecânica estatística para um autoestado de energia com autovalor  $E_i$  que também pode ser escrita como:

$$\Xi = \text{Tr} \left[ e^{-\beta(H - \mu N)} \right]. \quad (1.37)$$

Finalmente, podemos reescrever o operador densidade que pode ser utilizado para calcular as propriedades termodinâmicas do ensemble:

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H - \mu N)}}{\Xi}. \quad (1.38)$$

## Capítulo 2

# Teoria unificada da polarização e da coerência

Este capítulo é uma breve revisão da teoria unificada apresentada por Bernardo e de como o ambiente pode suprimir as propriedades de coerência e polarização da luz [9].

### 2.1 Coerência e polarização em conjunto

A matriz densidade de polarização e coerência é uma ferramenta matemática capaz de descrever, de forma conjunta, as propriedades de coerência e polarização da luz baseada na álgebra de operador densidade [9]. A ideia chave parte do princípio de que um operador densidade é capaz de descrever quanticamente um cenário análogo ao experimento clássico de dupla fenda de Young em que um conjunto de fótons polarizados linearmente nas direções vertical e horizontal, cujos estados são descritos, respectivamente, por  $|V\rangle$  e  $|H\rangle$ , passa através das fendas  $Q_0$  e  $Q_1$  com os respectivos estados:  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Veja a figura 2.1.

Desse modo, o estado geral puro dos fótons é escrito como:

$$|\Psi\rangle = a|H, 0\rangle + b|H, 1\rangle + c|V, 0\rangle + d|V, 1\rangle, \quad (2.1)$$

com  $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ . E, sabendo que  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , o operador densidade na forma

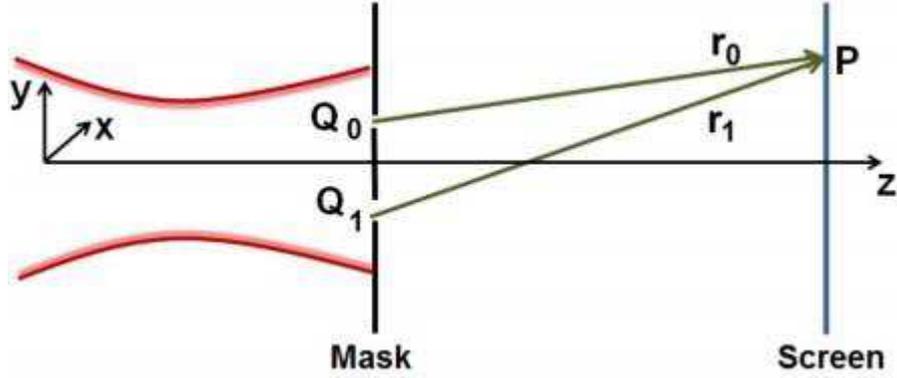


Figura 2.1: O experimento de dupla fenda em que um conjunto de fótons incide sobre um aparato com duas fendas  $Q_0$  e  $Q_1$ , cuja informação sobre caminho por qual das fendas os fótons passaram é registrada em uma tela distante [9].

matricial é dado por:

$$\hat{\rho}_S = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* & ac^* & ad^* \\ ba^* & |b|^2 & bc^* & bd^* \\ bc^* & |c|^2 & cd^* & da^* \\ dc^* & db^* & da^* & |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Consequentemente, pode-se obter a densidade de probabilidade  $\hat{\rho}_P$  de se encontrar um fóton em um dado ponto  $P$  na tela de detecção:

$$\hat{\rho}_P = \rho_0(P) + \rho_1(P) + 2 \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_0(P)}} \sqrt{\frac{\rho_{33}}{\rho_1(P)}} \text{Re} \sum_{\mu} e^{ik(r_0 - r_1)} \Sigma_{\mu}, \quad (2.3)$$

em que

$$\rho_0(P) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2} \quad (2.4)$$

é a densidade de probabilidade de encontrar um fóton, que emergiu de  $Q_0$ , em  $P$ . Analogamente,  $\rho_1(P)$  é a densidade de probabilidade de encontrar um fóton emergido de  $Q_1$  em  $P$ :

$$\rho_1(P) = \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2}. \quad (2.5)$$

Ademais,  $k$  representa o número de onda, enquanto  $r_0$  e  $r_1$  são as respectivas distâncias entre as fendas  $Q_0$  e  $Q_1$  e o ponto  $P$ . O parâmetro que quantifica o termo de interferência na

equação (2.3) é denominado de *grau de coerência*  $\mu$  e é definido como:

$$\mu = \sqrt{\frac{\rho_{12} + \rho_{34}}{\rho_{11} + \rho_{33}}} \sqrt{\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{\rho_{11} + \rho_{33}}}, \quad (2.6)$$

onde  $\rho_{i\bar{j}}$  são elementos da matriz do operador densidade.

O grau de coerência  $\mu$  quantifica o quão coerente é um estado e varia entre  $0 \leq |\mu| \leq 1$ . Quando  $\mu = 1$ , tem-se coerência máxima pois a interferência é máxima e dizemos que o estado é *coerente*. No entanto, se  $\mu = 0$ , não há efeito de interferência, e o estado do ensemble é *incoerente*. Por sua vez, quando  $0 < |\mu| < 1$  chamamos a luz de *parcialmente coerente*.

Por outro lado, o *grau de polarização*  $p_i$  do fóton que passa pelas fendas  $Q_0$  e  $Q_1$  é obtido por meio da versão quântica dos parâmetros de Stokes que são, respectivamente, expressos por:

$$p_0 = \frac{1 - \frac{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31})}{(\rho_{11} + \rho_{33})^2}}{2} \quad (2.7)$$

e,

$$p_1 = \frac{1 - \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42})}{(\rho_{22} + \rho_{44})^2}}{2}. \quad (2.8)$$

O grau de polarização também varia entre  $0 \leq p_i \leq 1$ . Se  $p_i = 1$ , o ensemble é dito *polarizado*; se  $p_i = 0$ , *não polarizado*, e, caso  $0 < p_i < 1$ , o chamamos de *parcialmente polarizado*.

## 2.2 Interações com o ambiente

Sob o mesmo contexto do experimento da dupla-fenda, pode-se analisar os efeitos de interação do ensemble de fótons com constituintes do ambiente. Tais efeitos, que têm sido reconhecidos como a causa do comportamento clássico da luz e da matéria, são chamados de *decoerência induzida pelo ambiente* [3, 5, 6, 30]. Assim, pode-se escrever um operador densidade de forma que:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0), \quad (2.9)$$

onde  $\hat{\rho}_E(0)$  é o operador densidade do ambiente que pode ser decomposto como  $\hat{\rho}_E(0) = \sum_i \omega_i |E_i\rangle \langle E_i|$ . A matriz  $\hat{\rho}_S(0)$  representa o operador densidade dos fótons carregando in-

formações sobre polarização e coerência. Ela é escrita como:

$$\hat{\rho}_S(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

com cada elemento dado por  $\rho_{nm} = \sum_i \omega_i \rho_{nm}^{(i)}$ . Além disso,  $\hat{\rho}_S(0)$  evolui com o tempo através de uma transformação unitária  $\hat{U}(t)$  se o sistema fótons-ambiente for isolado:

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_E \left[ \hat{U}(t) \hat{\rho}_S(0) \otimes \sum_i \omega_i |E_i\rangle \langle E_i| \hat{U}^\dagger(t) \right], \quad (2.11)$$

onde  $Tr_E$  é o traço parcial sobre o ambiente. Desse modo:

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_{i \square} \omega_i \langle E_i | \hat{U}(t) | E_i \rangle \hat{\rho}_S(0) \langle E_i | \hat{U}^\dagger(t) | E_i \rangle, \quad (2.12)$$

com

$$\hat{K}_{i \square} = \sqrt{\omega_i} \langle E_i | \hat{U}(t) | E_i \rangle, \quad (2.13)$$

onde  $\hat{K}_{i \square}$  são os chamados *operador de Kraus* [31], que satisfaz a relação de completudeza  $\sum_{i \square} \hat{K}_{i \square} \hat{K}_{i \square}^\dagger = I$ . Portanto, reescrevemos a equação (2.12) da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_{i \square} \hat{K}_{i \square} \hat{\rho}_S(0) \hat{K}_{i \square}^\dagger, \quad (2.14)$$

que é denominada de *canal quântico*, cujo nome é uma alusão à emissão de um estado  $\hat{\rho}$  através de um canal de comunicação a um destinatário que recebe o estado já modificado [32].

Agora, considerando que os fótons se propagam em um ambiente refrativo composto de pequenas partículas distribuídas aleatoriamente provocando interações que modificam exclusivamente o estado do ambiente, cujas interações podem ser descritas por uma transfor-

mação unitária que atua sobre os estados do ambiente, podemos escrever o seguinte mapa::

$$|H, 0\rangle|E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P}|H, 0\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, 0\rangle|E_1\rangle, \quad (2.15)$$

$$|H, 1\rangle|E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P}|H, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, 1\rangle|E_2\rangle, \quad (2.16)$$

$$|V, 0\rangle|E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P}|V, 0\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, 0\rangle|E_1\rangle, \quad (2.17)$$

$$|V, 1\rangle|E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P}|V, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, 1\rangle|E_2\rangle, \quad (2.18)$$

em que  $|E_0\rangle$ ,  $|E_1\rangle$  e  $|E_2\rangle$  representam o estado inicial do ambiente e os estados após interação do fóton com o ambiente em  $Q_0$  e  $Q_1$ , respectivamente. O fator  $\sqrt{1-P}$  representa a probabilidade que o ambiente tem de permanecer no estado inicial ou seja, de não haver interação com os fótons. Consequentemente, o termo  $\sqrt{P}$  representa a probabilidade de o ambiente evoluir para outro estado. Um aspecto importante deste mapa se deve ao fato de que a mudança nos estados do ambiente podem ocorrer apenas pela interação local entre o fóton e os constituintes do ambiente. Usando as equações (2.13) e (2.15), podemos encontrar facilmente os seguintes operadores de Kraus:

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-P}[|H, 0\rangle\langle H, 0| + |H, 1\rangle\langle H, 1| + |V, 0\rangle\langle V, 0| + |V, 1\rangle\langle V, 1|], \quad (2.19)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{P}[|H, 0\rangle\langle H, 0| + |V, 0\rangle\langle V, 0|], \quad (2.20)$$

$$\hat{K}_2 = \sqrt{P}[|H, 1\rangle\langle H, 1| + |V, 1\rangle\langle V, 1|]. \quad (2.21)$$

Ou na forma matricial:

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_1 = \sqrt{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_2 = \sqrt{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Neste caso, a equação (2.14) pode, então, ser reescrita como:

$$\hat{\rho}_S(t) = \hat{K}_0 \hat{\rho}_S \hat{K}_0^\dagger + \hat{K}_1 \hat{\rho}_S \hat{K}_1^\dagger + \hat{K}_2 \hat{\rho}_S \hat{K}_2^\dagger, \quad (2.23)$$

e, portanto, temos que a evolução temporal do operador densidade em um intervalo de

tempo  $\Delta t$  é dada por:

$$\hat{\rho}^S(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & (1-P)\rho_{12} & \rho_{13} & (1-P)\rho_{14} \\ (1-P)\rho_{21} & \rho_{22} & (1-P)\rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & (1-P)\rho_{32} & \rho_{33} & (1-P)\rho_{34} \\ (1-P)\rho_{41} & \rho_{42} & (1-P)\rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Observe, que em  $n$  tempos consecutivos, o termo  $(1-P)$  se torna  $(1-P)^n$ . Mas, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , se assumirmos que  $P$  tem a forma  $\Gamma\Delta t$ , onde  $\Gamma$  é a probabilidade de interação de um fóton com um constituinte do ambiente por unidade de tempo, em um tempo  $t = n\Delta t$ , temos que  $(1-P)^n = (1 - \Gamma t/n)^n$ . Fazendo,  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $(1-P)^n \approx e^{-\Gamma t}$  [32]. A evolução temporal da matriz densidade é, então, dada por:

$$\hat{\rho}_S(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-\Gamma t} & \rho_{13} & \rho_{14}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{21}e^{-\Gamma t} & \rho_{22} & \rho_{23}e^{-\Gamma t} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32}e^{-\Gamma t} & \rho_{33} & \rho_{34}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{41}e^{-\Gamma t} & \rho_{42} & \rho_{43}e^{-\Gamma t} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

O grau de coerência dos fótons submetidos a interações com o ambiente pode ser obtido usando a eq.(2.6), que representa um decaimento com o tempo de forma que:

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{(\rho_{12} + \rho_{34})e^{-\Gamma t}}{\rho_{11} + \rho_{33} \rho_{22} + \rho_{44}}} = \mu(0)e^{-\Gamma t}. \quad (2.26)$$

Agora, se considerarmos que o ambiente seja birrefringente, as mudanças provocadas pelos fótons no estado do ambiente dependem, não somente, da interação local entre o fóton e o constituinte do ambiente, como também, do estado de polarização do fóton. Desse modo, as possíveis interações podem ser descritas da seguinte forma:

$$|H, 0\rangle |E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P} |H, 0\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |H, 0\rangle |E_1\rangle, \quad (2.27)$$

$$|H, 1\rangle |E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P} |\overline{H}, 1\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\overline{H}, 1\rangle |E_2\rangle, \quad (2.28)$$

$$|V, 0\rangle |E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P} |\overline{V}, 0\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\overline{V}, 0\rangle |E_3\rangle, \quad (2.29)$$

$$|V, 1\rangle |E_0\rangle \rightarrow \sqrt{1-P} |\overline{V}, 1\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\overline{V}, 1\rangle |E_4\rangle. \quad (2.30)$$



$$\rho_{42}e^{-\Gamma t} \rho_{43}e^{-\Gamma t} \rho_{44} \quad . \quad (2.38)$$

Podemos ver que o grau de coerência dos fótons sob interações com o ambiente decai com o tempo de acordo com  $\mu(t) = \mu(0)e^{-\Gamma t}$ , como no caso anterior. Além disso, os graus de polarização, obtidos através das eqs. (2.7) e (2.8), também decaem com o tempo,

$$p_0 = \frac{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31}e^{-2\Gamma t})}{(\rho_{11} + \rho_{33})^2} \quad (2.39)$$

e,

$$p_1 = \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42}e^{-2\Gamma t})}{(\rho_{22} + \rho_{44})^2}. \quad (2.40)$$

Como vemos, a ação do ambiente constituído por partículas birrefringentes é destruir as propriedades de coerência e polarização da luz.

## Capítulo 3

### Entropia reduzida de von Neumann

Como uma extensão do trabalho apresentado no capítulo anterior, vamos verificar o comportamento da entropia de emaranhamento da luz nos ambientes refrativo e birrefringente, respectivamente. Para isso, consideremos, primeiro, a evolução temporal da matriz densidade que descreve as interações de um fóton com um constituinte do ambiente refrativo dada em (2.25), de modo que, em sua forma normalizada, pode ser reescrita como:

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} & 1 \\ 1 & e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

cujos autovalores são:

$$\lambda_A = 0, 0, \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}), \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 + e^{\Gamma t}). \quad (3.2)$$

Lembrando que a entropia de von Neumann é dada por  $S = -\kappa_B \sum_n \lambda_n \ln \lambda_n$ , temos que

$$S_A(t) = -\kappa_B \left[ \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}) \ln \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}) + \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 + e^{\Gamma t}) \ln \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 + e^{\Gamma t}) \right] \quad (3.3)$$

Agora, assumindo que a probabilidade de interação de um fóton com um constituinte

do ambiente por unidade de tempo é unitária, ou seja,  $\Gamma = 1$ . Temos que a entropia de von

Neumann expressa em unidades da contante de Boltzmann é dada por:

$$S_A(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - (-1 + e^{-t}) \ln \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - (1 + e^{-t}) \ln \frac{1}{2} (1 + e^{-t}) \quad (3.4)$$

Note que o resultado acima foi obtido aplicando a equação da entropia de von Neumann a uma matriz densidade reduzida dada por (2.25). Não por acaso, esta é a chamada entropia de emaranhamento ou entropia reduzida de von Neumann, pois quantifica o grau de emaranhamento entre sistema e o ambiente, e, conseqüentemente serve como indicador da taxa com que a decoerência ocorre [5, 29]. Podemos observar na figura (3.1) que, de acordo com a segunda lei da termodinâmica, a entropia aumenta com o tempo até atingir um valor máximo. Tal aumento é atribuído ao aumento do emaranhamento e da decoerência sofrida pelo sistema [11, 29].

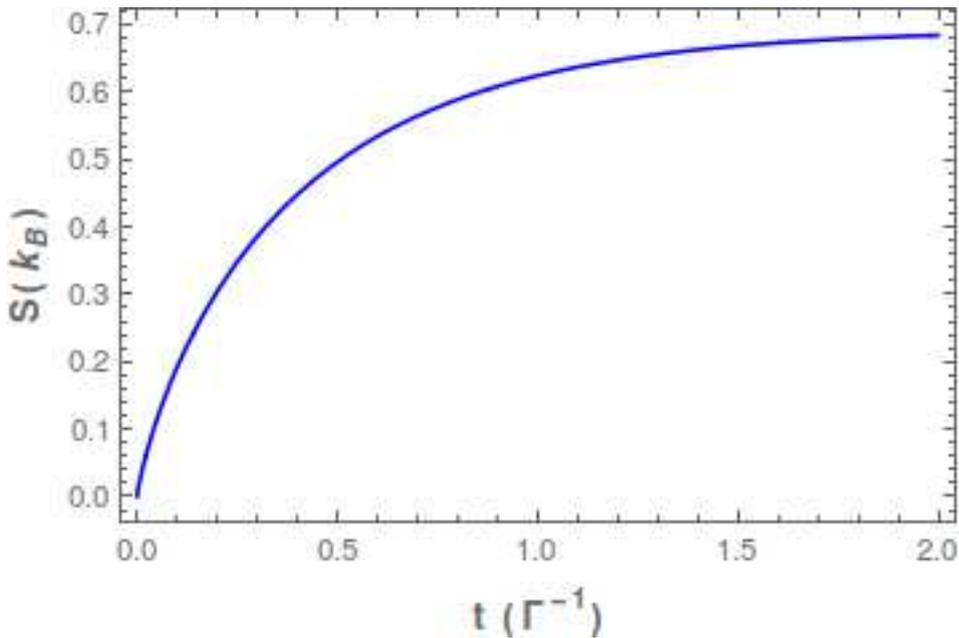


Figura 3.1: Evolução temporal da entropia reduzida de von Neumann para um ambiente refringente. Ela atua como quantificador do emaranhamento quântico e, devido às interações entre o sistema e o ambiente, está relacionada à decoerência.

Prosseguindo da mesma forma como anteriormente, normalizamos a matriz densidade que descreve a interação fóton-ambiente, cujo ambiente é birrefringente (eq. 2.38), e a rees-

crevemos como

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} & 1 & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} & e^{-\Gamma t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

com os respectivos autovalores:

$$\lambda_B = \frac{1}{4} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}), \frac{1}{4} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}), \frac{1}{4} e^{-\Gamma t} (-1 + e^{\Gamma t}), \frac{1}{4} e^{-\Gamma t} (3 + e^{\Gamma t}). \quad (3.6)$$

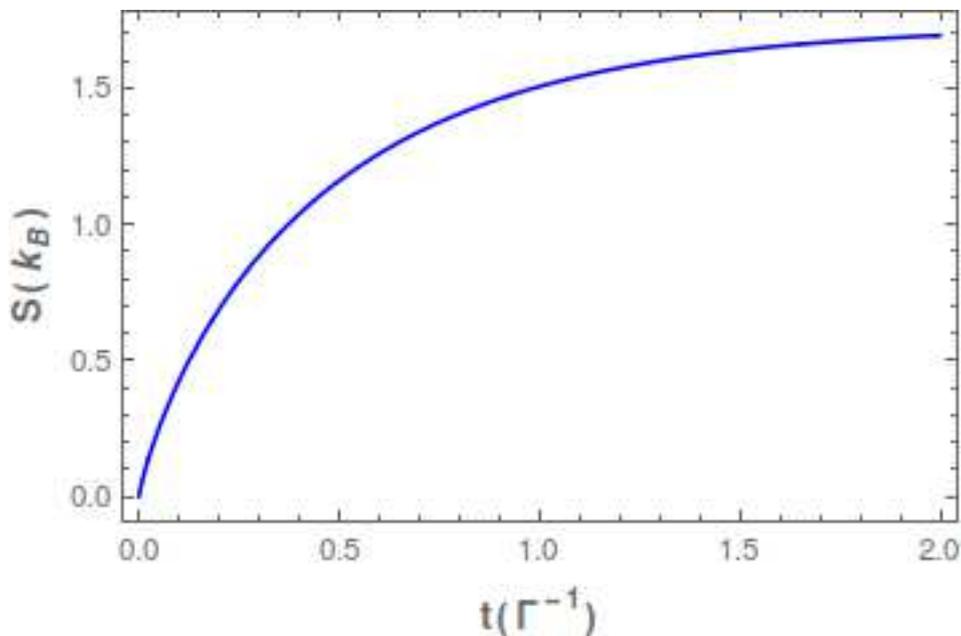


Figura 3.2: Entropia de emaranhamento vs tempo, considerando interações em um ambiente birrefringente onde o sistema sofre, além da decoerência, uma depolarização e, portanto, têm-se um maior grau de emaranhamento.

Usando a equação de von Neumann e realizando algumas simplificações, temos que a entropia de emaranhamento, após a interação com um ambiente birrefringente, evolui com o tempo de acordo com:

$$S_B(t) = \frac{1}{4} e^{-\Gamma t} [-4(-1 + e^{\Gamma t}) \ln \frac{1}{4} - \frac{e^{-\Gamma t}}{4} - (3 + e^{\Gamma t}) \ln \frac{1}{4} + \frac{3e^{-\Gamma t}}{4}]. \quad (3.7)$$

De acordo com o gráfico da figura (3.2), o grau de emaranhamento agora é muito maior

do que o obtido para o caso anterior em que o ambiente era refrativo. Atribuimos este comportamento à interação provocada pelo ambiente birrefringente de dois graus de liberdade (coerência e polarização). Sendo assim, o aumento do emaranhamento quântico está relacionado à decoerência e, também, pela depolarização sofrida pelo sistema.

Isto conclui a nossa análise que demonstra a ligação que os sistemas ópticos podem ter com conceitos termodinâmicos.

# Capítulo 4

## Aplicação da teoria unificada

### 4.1 Dispositivos ópticos

Tendo em vista a simplicidade do formalismo da matriz densidade unificada (capítulo 2) e dos vetores de Jones, os quais descrevem o estado de polarização da luz [33, 34, 35], podemos descrever facilmente a operação quântica realizada por cada dispositivo óptico linear. Vejamos, portanto, como alguns desses dispositivos podem ser descritos.

#### 4.1.1 Espelho

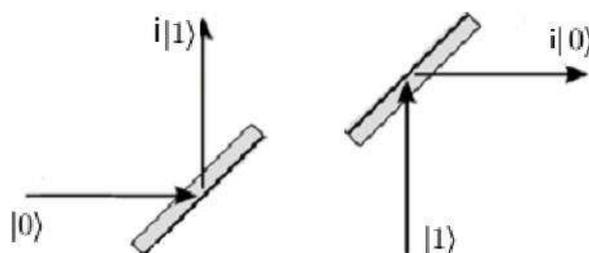


Figura 4.1: Feixe de luz com polarização linear nas direções horizontal e vertical, respectivamente, incidindo sob a superfície de um espelho com ângulo de 45°.

Dado que um feixe de luz linearmente polarizada nas direções vertical e horizontal,  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$ , respectivamente, incide com um ângulo de 45° em relação à superfície de um espelho

(figura 4.1), podemos descrever sua operação analisando o estado da luz refletida como:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

e

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde o fator  $i$  que aparece no estado refletido é justificado por uma diferença de fase de  $\pi/2$  adquirida devido à reflexão. Logo, temos as seguintes operações:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Assim, obtemos que:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

O espelho só tem efeito no caminho (coerência) do fóton, não na polarização. Para os dispositivos ópticos, consideramos a denominação coerência para o grau de liberdade de posição. Assim, considerando tudo, a matriz do espelho fica

$$M = M_p \otimes M_c = I_p \otimes M_c, \quad (4.6)$$

onde  $I_p$  representa a matriz identidade no espaço da polarização, e  $M$  corresponde a matriz

que descreve o espelho. Temos, portanto, que:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Placa $\lambda/2$

A placa  $\lambda/2$  tem a propriedade de rotacionar a polarização linear incidente para um ângulo arbitrário  $\theta$  [36]. Desse modo, os vetores  $|V\rangle$  e  $|H\rangle$  são transformados na seguinte forma:

$$|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

e

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Podemos, então, realizar os seguintes procedimentos:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

e

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Logo,

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Considerando as propriedades de polarização e de coerência (esta última não é alterada), temos:

$$\Omega = \Omega_p \otimes \Omega_c = \Omega_p \otimes I_c. \quad (4.13)$$

Portanto:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

### 4.1.3 Divisor de feixe

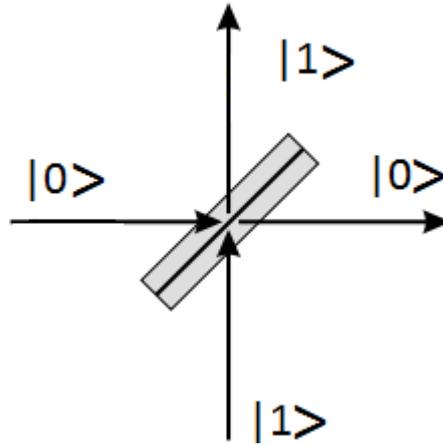


Figura 4.2: Ação de um divisor de feixe com 50% de probabilidade de reflexão e 50% de transmitância.

Considerando um feixe de luz incidindo em um divisor de feixe 50/50 (fig. 4.2), temos que qualquer um dos estados de entrada  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  tem 50% de probabilidade de ser transmitido ou refletido [37], de modo que a operação quântica do divisor de feixe pode ser escrita da seguinte forma:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad (4.15)$$

e,

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle + |1\rangle). \quad (4.16)$$

Seguindo o cálculo de Jones, os respectivos vetores acima podem ser reescritos como:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

e

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Dessa forma, obtemos que

$$Y_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Assim, realizando a operação

$$Y = I_p \otimes Y_c, \quad (4.20)$$

obtemos a matriz que descreve o divisor de feixe:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

De acordo com o formalismo unificado que desenvolvemos, que é baseado no uso de matrizes densidade, qualquer transformação unitária como essas devido à operação dos dispositivos ópticos acima deverá ser efetuada da seguinte forma:

$$\tilde{\rho}^j = \hat{A} \hat{\rho} \hat{A}^\dagger, \quad (4.22)$$

onde  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\rho}^j$  são, respectivamente, os estados inicial e final dos fótons.  $\hat{A}$  representa a matriz de um dispositivo arbitrário. Faremos uma aplicação desse artifício na seção seguinte.

## 4.2 Apagador quântico

Para entender o que é ou como funciona um apagador quântico pensemos primeiro na seguinte pergunta “o que significa apagar informação?” ou “como apagar informação?”. Como já discutido na secção (1.4), a visibilidade do padrão de interferência depende da informação de caminho, portanto, se soubermos por qual fenda o fóton passou não haverá interferência. No entanto, seria possível recuperar a interferência? Os físicos Marlan O. Scully e Kai Drühl [38], em 1991, pensaram neste problema e propuseram a ideia de apagador quântico que consiste em recuperar a interferência “apagando” a informação de caminho. O próprio Scully juntamente com os físicos Englert e Walther [39] chegaram a propor, algum tempo depois, um experimento de apagador quântico em que um átomo em estado excitado passa por um aparato de dupla-fenda. Atrás de cada fenda há uma cavidade de micro-ondas responsável por “registrar” a informação de caminho pela emissão de um fóton quando o átomo decai. Neste caso, em vez de franjas de interferência, apenas um borrão aparece na tela de detecção. No entanto, a interferência seria recuperada caso fosse removida a parede que separa as cavidades de micro-ondas.

O experimento descrito acima nunca chegou a ser realizado em laboratório. Porém, pode-se obter o mesmo efeito de apagador quântico usando dispositivos ópticos. Walborn *et. al.* [40] realizaram um experimento análogo ao que foi proposto por Scully-Englert-Walther, mas em vez de cavidades de micro-ondas, foi usado um polarizador e duas placas  $\lambda/4$ . As placas  $\lambda/4$  foram colocadas atrás de cada fenda servindo como marcador de caminho já que tem a funcionalidade de converter a polarização linear dos fótons em circularmente polarizada (para direita e esquerda, respectivamente). Mais uma vez, com a informação de caminho registrada, não se obtém interferência; e então, o polarizador horizontal entra com o papel de apagador quântico. Posicionado entre as placas de onda e a tela de detecção, o polarizador horizontal absorve a componente vertical do feixe deixando passar apenas a componente horizontal. Agora, os fótons são indistinguíveis, portanto, as franjas de interferência reaparecem. Se, ao invés do polarizador horizontal, for usado um polarizador vertical, anti-franjas de interferência serão vistas.

É importante ressaltar que como a polarização e a posição não são variáveis complementares, não se aplica o princípio de incerteza de Heisenberg. Aqui, o emaranhamento

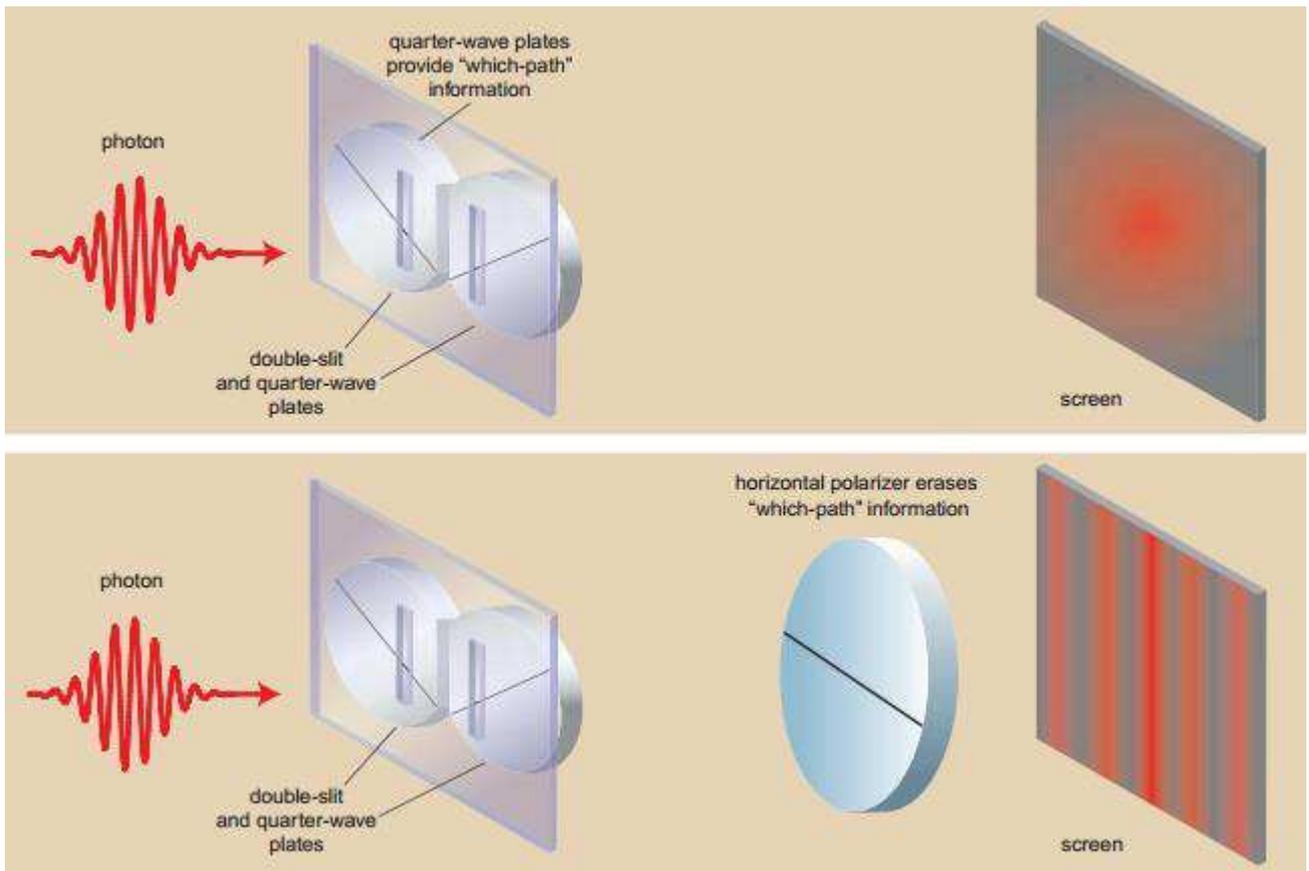


Figura 4.3: (Figura de cima) placas de quarto de onda com polarização circular à direita e circular à esquerda, respectivamente, são colocadas atrás de cada fenda. Elas servem como marcador de caminho dando ao observador a informação acerca do caminho do fóton. Deste modo, a interferência é apagada. (Figura de baixo) Entretanto, após passar por um polarizador horizontal, todos os fótons têm a mesma polarização e é impossível distinguí-los. Assim, a interferência é recuperada quando se apaga a informação do caminho [40].

quântico é responsável pela complementariedade. O fóton, ao passar pelas placas de onda, tem a polarização emaranhada ao caminho e seu estado é descrito pela superposição: (fenda 1 e polarização circular para direita) + (fenda 2 e polarização circular para esquerda). Deste modo, alterando a distinção entre os estados da polarização, automaticamente se altera a informação de caminho: (franjas e polarização horizontal) + (anti-franjas e polarização vertical) [40, 41].

A seguir, descrevemos um sistema envolvendo apagador quântico semelhante ao realizado por Walborn utilizando a álgebra da teoria unificada de polarização e coerência.

#### 4.2.1 Teoria unificada no apagamento de informação

Suponha que um feixe de fótons incide em um aparato dupla-fenda cujo estado é descrito como uma superposição dos estados dos fótons que passam pela fenda de cima com polari-

zação diagonal  $|D\rangle$  e os estados dos fótons que passam pela fenda de baixo com polarização antiagonal  $|A\rangle$ ):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D, 0\rangle + |A, 1\rangle), \quad (4.23)$$

onde,

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad (4.24)$$

e

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \quad (4.25)$$

Uma forma de produzir o estado  $|\psi\rangle$  é colocando filtros polarizadores com alinhamentos dados de acordo com os estados  $|D\rangle$  e  $|A\rangle$  atrás das fendas 0 e 1, respectivamente. Contudo, por motivos de simplificação, consideramos que os fótons já incidem sobre as fendas 0 e 1 como descrito pela equação (4.23). Sendo assim, devido à ortogonalidade entre os estados  $|D\rangle$  e  $|A\rangle$ , franjas de interferência não podem ser observadas na tela de detecção.

Substituindo as equações (4.24 e 4.25) na eq. (4.23), podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \otimes |1\rangle \\ |\psi\rangle &= \frac{1}{2} [|H, 0\rangle + |H, 1\rangle + |V, 0\rangle - |V, 1\rangle]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, um polarizador vertical  $\hat{P}_V$  é posicionado entre o aparato das fendas e a tela de detecção. Ele é descrito como:

$$\hat{P}_V = [|V, 0\rangle\langle V, 0| + |V, 1\rangle\langle V, 1|]. \quad (4.27)$$

Lembrando que o operador densidade do feixe incidente é obtido por  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , e que o polarizador é responsável por uma transformação tal que,  $\hat{\rho}_V = \hat{P}_V \hat{\rho} \hat{P}_V^\dagger$ . Deste modo, é fácil ver que:

$$\hat{\rho}_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

o que nos dá:

$$|\psi^j\rangle_V = \frac{1}{2}(|V, 0\rangle - |V, 1\rangle). \quad (4.29)$$

O fator  $1/2$  na equação acima indica que metade dos fótons foram absorvidos pelo polarizador vertical, que realiza uma operação não unitária, e, assim, a interferência aparece no anteparo mas com metade da intensidade.

Analogamente, se aplicarmos um polarizador horizontal  $\hat{P}_H$  como na figura 4.3, temos que:

$$\hat{P}_H = (|H, 0\rangle\langle H, 0| + |H, 1\rangle\langle H, 1|). \quad (4.30)$$

Dessa forma, realizando a transformação não unitária, similar àquela feita anteriormente, temos que

$$\hat{\rho}_H^j = \begin{array}{cccccc} & & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \\ & \square & & & & & \square \\ & \square & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \square \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \square \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}, \quad (4.31)$$

o que resulta em:

$$|\psi^j\rangle_H = \frac{1}{2}(|H, 0\rangle + |H, 1\rangle). \quad (4.32)$$

Novamente, tem-se interferência com metade da intensidade inicial devido à absorção dos fótons pelo polarizador. Vale ressaltar que os estados finais dos fótons (equações 4.29 e 4.32) se complementam evidenciando a eficácia da utilização da teoria unificada para descrever interações quânticas envolvendo dispositivos ópticos.

# Conclusão

Como já sabido, a matriz densidade é uma ferramenta poderosa na descrição física de sistemas quânticos compostos por elementos descritos por estados distintos, os chamados estados mistos. Com isso, revisitamos a descrição unificada da coerência e da polarização de um ensemble geral de fótons, proposta recentemente por Bernardo [9]. A partir disso, fizemos uma extensão dessa teoria para englobar a descrição de alguns dispositivos ópticos, de acordo com o formalismo. No caso deste trabalho, descrevemos três dispositivos lineares: o espelho, o rotor de polarização e o divisor de feixe.

A eficácia de tal descrição realizada e, conseqüentemente, a aplicabilidade da teoria da matriz densidade unificada foi verificada a partir de um interferômetro de duas fendas envolvendo o fenômeno do apagamento quântico, observando como a interferência pode ser recuperada a partir de um padrão clássico por meio da utilização de um polarizador. Tal aplicação nos dá um indício de que a teoria unificada se mostra como um método simples, elegante e eficiente para o tratamento teórico de experimentos quântico-ópticos como interferômetros e a propagação da luz em ambientes perturbativos, por exemplo.

De fato, o efeito de decoerência que age sobre um dado sistema fotônico após a interação com os constituintes de dois tipos diferentes de ambiente, refrativo e birrefringente, foi analisado através da aplicação do formalismo de Kraus, bem como a entropia de von Neumann. O resultado obtido mostra que, como esperado, o emaranhamento entre o sistema e o ambiente aumenta com o tempo até atingir um limite máximo e, conseqüentemente, o sistema sofre uma perda de coerência quântica e, também, do grau de polarização.

# Referências Bibliográficas

- [1] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. Fundamentos de física: Volume 4: Óptica e física moderna. 9ª edição, 2012.
- [2] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. The feynman lectures on physics; vol. i. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752, 1965.
- [3] Bertúlio de Lima Bernardo. Time correlation and decoherence in a two-particle interferometer. *Brazilian Journal of Physics*, 44(2-3):202–207, 2014.
- [4] Niels Bohr. The quantum postulate and the recent development of atomic theory, 1928.
- [5] Maximilian A Schlosshauer. *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [6] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, 75(3):715, 2003.
- [7] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso, and Martin B Plenio. Colloquium: quantum coherence as a resource. *Reviews of Modern Physics*, 89(4):041003, 2017.
- [8] Leonard Mandel. Coherence and indistinguishability. *Optics letters*, 16(23):1882–1883, 1991.
- [9] Bertúlio de Lima Bernardo. Unified quantum density matrix description of coherence and polarization. *Physics Letters A*, 381(28):2239–2245, 2017.
- [10] John Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton university press, 2018.

- [11] Wojciech Hubert Zurek and Juan Pablo Paz. Quantum chaos: a decoherent definition. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 83(1-3):300–308, 1995.
- [12] Germán Lugones. Física estatística, 2018. URL: [http://professor.ufabc.edu.br/~german.lugones/site/FIS104\\_Fisica\\_Estatistica\\_files/](http://professor.ufabc.edu.br/~german.lugones/site/FIS104_Fisica_Estatistica_files/).
- [13] John S Bell and John Stewart Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. Cambridge university press, 2004.
- [14] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.
- [15] R.W. Anderson. *The Cosmic Compendium: Interstellar Travel*. Lulu.com, 2015. URL: <https://books.google.com.br/books?id=JxauCQAAQBAJ>.
- [16] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, 2002.
- [17] John D Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of schrödinger's "cat paradox" paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, pages 323–338, 1980.
- [18] Rainer Kaltenbaek, Markus Aspelmeyer, Thomas Jennewein, Caslav Brukner, Anton Zeilinger, Martin Pfennigbauer, and Walter R Leeb. Proof-of-concept experiments for quantum physics in space. In *Quantum Communications and Quantum Imaging*, volume 5161, pages 252–269. International Society for Optics and Photonics, 2004.
- [19] Charles H Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, 70(13):1895, 1993.
- [20] William K Wootters and Wojciech H Zurek. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr's principle. *Physical Review D*, 19(2):473, 1979.

- [21] Marlan O Scully and Kai Drühl. Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics. *Physical Review A*, 25(4):2208, 1982.
- [22] Rudolf Clausius. Über verschiedene für die anwendung bequeme formen der hauptgleichungen der mechanischen wärmetheorie. *Annalen der Physik*, 201(7):353–400, 1865.
- [23] Sílvio RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [24] Ludwig Boltzmann. *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze des mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärme-gleichgewicht*. Kk Hof-und Staatsdruckerei, 1877.
- [25] Guilherme Monteiro Oliveira. *Termodinâmica quântica: termalização de sistemas quânticos de baixa dimensionalidade*. 2015.
- [26] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. *Modern quantum mechanics, revised edition*, 1995.
- [27] Victor S. Batista. *Introduction to Statistical Mechanics lecture notes chem 530b*, 2018. URL: <http://ursula.chem.yale.edu/~batista/classes/vaa/>.
- [28] Huzihiro Araki and Elliott H Lieb. Entropy inequalities. In *Inequalities*, pages 47–57. Springer, 2002.
- [29] Jochen Gemmer, M Michel, and Günter Mahler. Quantum thermodynamcis-emergence of thermodynamic behavior within composite quantum systems. *Lecture Notes in Physics 2nd ed.(Springer, 2009)*, 2004.
- [30] Maximilian Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern physics*, 76(4):1267, 2005.
- [31] Alexander Aehle, RA Bertlmann, K Durstberger, BC Hiesmayr, and P Krammer. Decoherence of open quantum systems. 2008.
- [32] J. P. Preskill. *Quantum Computation lecture notes for physics 219/computer science 219*, 2018. URL: <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>.

- [33]R. Clark Jones. A new calculus for the treatment of optical systemsi. description and discussion of the calculus. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):488–493, Jul 1941. URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-31-7-488>, doi:10.1364/JOSA.31.000488.
- [34]Henry Hurwitz and R. Clark Jones. A new calculus for the treatment of optical systemsii. proof of three general equivalence theorems. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):493–499, Jul 1941. URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-31-7-493>, doi:10.1364/JOSA.31.000493.
- [35]R. Clark Jones. A new calculus for the treatment of optical systemsiii. the sohncke theory of optical activity. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):500–503, Jul 1941. URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-31-7-500>, doi:10.1364/JOSA.31.000500.
- [36]Mayukh Lahiri, Armin Hochrainer, Radek Lapkiewicz, Gabriela Barreto Lemos, and Anton Zeilinger. Partial polarization by quantum distinguishability. *Physical Review A*, 95(3):033816, 2017.
- [37]GREGOR Weihs and ANTON Zeilinger. Photon statistics at beam-splitters: an essential tool in quantum information and teleportation. *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, pages 262–288, 2001.
- [38]Marlan O Scully, Berthold-Georg Englert, and Herbert Walther. Quantum optical tests of complementarity. *Nature*, 351(6322):111–116, 1991.
- [39]MO Scully and MS Zubairy. Quantum optics. new york, 1997.
- [40]Stephen P Walborn, Marcelo O Terra Cunha, Sebastião Pádua, and Carlos H Monken. Quantum erasure: In quantum mechanics, there are two sides to every story, but only one can be seen at a time. experiments show that"erasing"one allows the other to appear. *American Scientist*, 91(4):336–343, 2003.
- [41]SP Walborn, MO Terra Cunha, S Pádua, and CH Monken. Double-slit quantum eraser. *Physical Review A*, 65(3):033818, 2002.