



Universidade Federal
de Campina Grande

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ondas Gravitacionais a partir de Buracos Negros
Auto-duais em Gravidade Quântica de Laços

Messias de Brito Cruz

CAMPINA GRANDE

- Julho 2015 –

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ondas Gravitacionais a partir de Buracos Negros

Auto-duais em Gravidade Quântica de Laços

Messias de Brito Cruz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

Co-orientador: Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva.

CAMPINA GRANDE

- Julho 2015 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C957o Cruz, Messias de Brito.
Ondas gravitacionais a partir de buracos negros auto-duais em gravidade quântica de laços / Messias de Brito Cruz . – Campina Grande, 2015.
56 f. : il.

Dissertação (Mestrado em física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva".
Referências.

1. Gravidade Quântica em Laços. 2. Buracos Negros Auto-Duais. 3. Ondas Gravitacionais. 4. Modos Quasinormais. 5. Estabilidade de Buracos Negros. I. Brito, Francisco de Assis. II. Silva, Carlos Alex Souza da. III. Título.

CDU 53:524.882(043)

MESSIAS DE BRITO CRUZ

**ONDAS GRAVITACIONAIS A PARTIR DE BURACOS NEGROS AUTO-DUAIS EM
GRAVIDADE QUÂNTICA DE LAÇOS**

Dissertação aprovada em 31/07/2015

BANCA EXAMINADORA



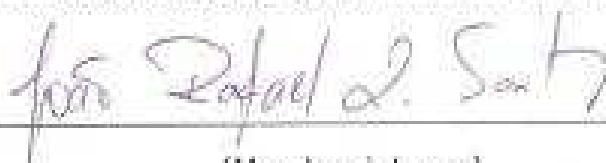
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG




(Co-Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Curso Superior de Licenciatura em Física - IFPB



(Membro interno)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Departamento de Física - UEPB

À minha família.

Agradecimentos

A Deus.

Agradeço aos meus pais Maria das Graças de Brito Cruz e Clementino Carlos da Cruz pela confiança depositada em mim. Pelas orações e preces para que Deus me protegesse e me sustentasse durante os percalços deste difícil caminho.

Aos meus irmãos Maria Eduarda de Brito Cruz e Breno de Brito Cruz, obrigado pelo carinho de sempre. Ninguém nos entente como nós mesmos.

Aos meus tios e primos, obrigado por toda ajuda contínua. Família, vocês são o que tenho de mais precioso!

A minha namorada Joyce Aristércia Siqueira, pelo carinho e compreensão e pela ajuda nos momentos que mais precisei. Obrigado pela paciência, amor.

A meu orientador Francisco de Assis de Brito, por nunca me abandonar, pela paciência, amizade e acima de tudo por acreditar em mim. Tenho certeza! você foi o “pai” que sempre me ajudou e me orientou. “Ensinar não é dar respostas”.

A meu co-orientador Carlos Alex da Silva, pelas contínuas lições, observações e comentários sobre esse texto. Muito obrigado pela sua amizade e pela força que você me deu no momento mais difícil dessa caminhada.

A todos que formam a UAF-UFCG, pelo apoio e amizade.

A todos os meus amigos, que diretamente e indiretamente contribuíram para que eu pudesse continuar nesse meu objetivo.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

*Quanto mais vejo, mais vejo que
muito há para se ver.*

John Sebastien

Lista de Figuras

2.1	Trajectoria dinâmica semiclássica no plano $(\sqrt{ p_b^2 }/p_b^0, \log(p_c))$	11
2.2	Gráfico do escalar de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ para $m = 10$, $p_b^0 = 1/10$ e $\gamma\delta \sim 1, \forall t \geq 0$; o comportamento quando t grande e $1/t^6$	12
2.3	Gráfico de $p_b^2(t)$ para diferentes valores de massa ($m = 10, 15, 20$). Máximo (absoluto) e mínimo (relativo) de $p_b^2(t)$ são independentes da massa m . . .	13
2.4	Gráfico do invariante de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}(m, r)$ para $m \in [0, 10^6], t \in [0, 2]$ $\gamma\delta \sim 1$	15
2.5	Gráfico do invariante de Kretschmann como função de $t \in [0, 0.5]$ e o parâmetro polimérico $\delta \in [0, 1]$	17
2.6	A figura no lado esquerdo representa o diagrama de Carter-Penrose na região fora r_- e a figura do lado direito o diagrama para $r_- \leq r \leq 0$	19
2.7	Gráfico de $V_{ef}(r)$. No lado esquerdo está uma ampliação do V_{ef} para $r \sim 0$	20
2.8	Extensão do espaço-tempo máxima do LQBH no lado esquerdo e a extensão análoga para o buraco negro de Reissner-Nordström.	21
3.1	Representação esquemática do potencial de Regge-Wheeler $V(r)$ e do seu efeito sobre uma perturbação incidente que é parcialmente transmitida e parcialmente refletida.	28
4.1	Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada r , ($m = 10m_P$)	37
4.2	Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada tartaruga r_* , ($m = 10m_P$)	37
4.3	Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada r , ($m = 10^{-1}m_P$)	38
4.4	Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada tartaruga r_* , ($m = 10^{-1}m_P$)	38

Lista de Tabelas

2.1	Resumo da solução	16
2.2	Propriedade auto-dualidade da métrica	22
3.1	Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos de radiação mais baixa ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional do buraco negro de Schwarzschild.	32
4.1	Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional axial do buraco negro auto-dual com massa maior que a massa de Planck ($m = 10m_p$).	37
4.2	Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional axial do buraco negro auto-dual com massa menor que a massa de Planck ($m = 10^{-1}m_p$).	38

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 Buraco Negro Auto-Dual	4
2.1 Solução de Schwarzschild em variáveis de Ashtekar	5
2.2 Uma classe mais geral de vínculos Hamiltoniano	7
2.2.1 A solução na forma de métrica	10
2.3 Buraco negro auto-dual em todo o espaço-tempo	12
2.4 Estrutura causal e diagrama de Carter-Penrose	17
2.5 Núcleo de Schwarzschild assintótico próximo a $r \sim 0$	20
2.6 Alto-Dualidade	22
3 Ondas Gravitacionais a partir de Buracos Negros	23
3.1 Perturbações Lineares de Buracos Negros	24
3.2 Perturbações gravitacionais axiais	26
3.3 Perturbações gravitacionais polares	29
3.4 Modos quasinormais	31

4 Ondas Gravitacionais a partir de Buraco Negro Auto-Dual	33
4.1 Perturbações gravitacionais axiais	33
5 Conclusões e Perspectivas	39
Referências Bibliográficas	40

Resumo

Nesta dissertação estudou-se as perturbações gravitacionais axiais para o espaço-tempo do buraco negro auto-dual. Essa classe de buracos negros esfericamente simétricos são advindos da teoria de gravidade quântica em laços, possuindo uma interessante propriedade de autodualidade, que permite que tais buracos negros possam ter uma massa menor que a de Planck. A partir de uma perturbação da métrica em primeira ordem, encontrou-se uma equação tipo-Schrödinger (Regge-Wheeler) e, então, utilizando-se o método WKB, calculou-se os modos quasinormais associados a equação de onda encontrada. Os buracos negros auto-duais mostraram-se estáveis quando submetidos a essas perturbações gravitacionais. Com isso, torna-se possível a existência de tais buracos negros em nosso universo.

Palavras-chave: gravidade quântica em laços, buracos negros auto-duais, ondas gravitacionais, modos quasinormais, estabilidade de buracos negros.

Abstract

In this thesis we studied the axial gravitational perturbations to the self-dual black hole spacetime. This class of black holes is spherically symmetric, it arises from loop quantum gravity, and it has an interesting property of self-duality, which allows such black hole may have a smaller mass than the Planck mass. From a perturbation of the metric in the first order, found a Schrödinger-type equation (Regge-Wheeler) and then by using the WKB method, we were able to calculate the quasinormal modes associated with the wave equation. The self dual black holes were stable when subjected to these gravitational perturbations. Thus, it is possible the existence of such black holes in our universe.

Keywords: loop quantum gravity, self-dual black holes, gravitational waves, quasinormal modes, black hole stability.

Capítulo 1

Introdução

Neste final de século, o homem teve o privilégio de poder contemplar as grandes revoluções do pensamento contemporâneo. Na física, em particular, a mecânica quântica mostrou uma nova maneira de encarar o mundo em uma escala muito pequena. Por outro lado, a relatividade geral forneceu uma nova visão do mundo em uma escala muito grande.

Apesar do sucesso em seus respectivos domínios, estes dois grandes pilares do nosso século não são compatíveis entre si. Quando se tenta aplicar as ideias da mecânica quântica na relatividade geral para se obter uma teoria de gravitação quântica, obtém-se resultados absurdos que contradizem as próprias bases sobre as quais essas teorias foram erguidas. A incompatibilidade conceitual mútua entre relatividade geral e a mecânica quântica (Teoria Quântica de Campos) é geralmente vista como a motivação mais fundamental para o desenvolvimento de uma teoria de gravidade quântica. Essa incompatibilidade manifesta-se claramente quando estuda-se a mecânica quântica de buracos negros.

Várias tentativas foram feitas para solucionar o problema: Uma dessas tentativas ocorreu na década de 70 e consistia em considerar versões supersimétricas da relatividade geral, as chamadas teorias de supergravidade. Entretanto, as teorias de supergravidade não foram capazes de gerar uma teoria quântica consistente para a relatividade geral. Na década de 80, surgiu uma teoria que se mostrou uma forte candidata ao cumprimento da missão de unificar a relatividade geral e a mecânica quântica, chamada de teoria das cordas. Nas teorias de supercordas a supersimetria tem um papel essencial e permite a formulação de uma teoria de gravitação quântica que é consistente. Por outro lado, as modernas teorias de supercordas são formuladas em 11 dimensões, enquanto observa-se um universo em 4 dimensões (1 dimensão temporal e 3 dimensões espaciais). Outro aspecto

problemático das supercordas é a dependência de fundo, o que rompe com o princípio da covariância geral da relatividade geral. Uma outra teoria proposta para quantizar a gravidade é, a gravidade quântica de laços a qual não apresenta os problemas das supercordas.

A teoria da gravidade quântica de laços, abreviada para LQG (do inglês Loop Quantum Gravity), também conhecida como gravidade em “loop”, é uma teoria quântica de espaço-tempo proposta com o objetivo de reconciliar as evidentes incompatibilidades teóricas da mecânica quântica e da relatividade geral.

LQG é uma teoria proposta de espaço-tempo que é construída com a ideia da quantização do espaço-tempo via a matematicamente rigorosa teoria da quantização em loop. Ela preserva muitas das mais importantes ideias da relatividade geral, enquanto ao mesmo tempo emprega a quantização tanto do espaço e do tempo na escala de Planck na tradição da mecânica quântica. Graças a esses avanços recentes, alguns problemas parecem ter sido resolvidos.

Um buraco negro é, por definição, uma região no espaço-tempo em que o campo gravitacional é tão forte que impede até mesmo a luz de escapar para o infinito. Isto do ponto de vista da relatividade geral. Por outro lado, para a mecânica quântica, o buraco negro não é tão negro assim (Radiação Hawking). Devido a essas controvérsias, os buracos negros são lugares interessantes para investigar a validade de uma teoria quântica da gravidade. Normalmente, pode-se falar sobre os seguintes tipos de buracos negros: i) buracos negros supermassivos no centro de galáxias com massas $M \sim (10^5 - 10^9)M_\odot$, ii) buracos negros com massas intermediárias $M \sim 10^3M_\odot$, iii) buracos negros com massas estelares $M \sim 10M_\odot$ e iv) buracos negros com massas de pelo menos algumas massas de Planck.

Buraco negro auto-dual, consiste de uma correção de gravidade quântica que aparece do buraco negro de Schwarzschild a partir de um modelo simplificado da gravidade quântica de laços. A solução de buraco negro auto-dual tem uma interessante propriedade de auto-dualidade que resolve o problema de singularidade do buraco negro. Essa propriedade garante que a singularidade no centro do buraco negro é substituída por uma outra região assintótica que corresponde a um buraco de minhoca com dimensões da ordem da escala de Planck descrito pela solução de Kantowski-Sachs. Com isso surge a possibilidade teórica da existência de buracos negros com massas menores que a massa de Planck.[1].

Sempre que se quer saber alguma coisa sobre a estabilidade, radiação Hawking

de buracos negros, ou sobre a interação de buracos negros com seu ambiente astrofísico, tem-se que começar a partir de uma análise das suas perturbações. Uma vez que um buraco negro é perturbado ele responde as perturbações através da emissão de ondas gravitacionais. As ondas gravitacionais são ondulações que se na curvatura de espaço-tempo que se propagam como ondas viajando para o exterior a partir do buraco negro. Tais ondas têm uma frequência associada conhecida como modos quasinormais.

Os modos quasinormais são os sons característicos do buraco negro, que foram apontados pela primeira vez por Vishveshwara [2]. Chandrasekhar e Detweller [3] estudaram os modos quasinormais do buraco negro de Schwarzschild. Desde então, uma série de trabalhos apareceram neste campo. Para uma revisão sobre eles consulte [4] e [5]. O estudo dos modos quasinormais tornou-se relevante porque permite uma maneira direta para detectar buracos negros usando ondas gravitacionais. Há um número de métodos para avaliar as frequências quasinormais, mas o método WKB desenvolvido por Schutz, Will e Iyer é o mais simples [6], [7], [8].

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de ondas gravitacionais a partir do buraco negro auto-dual. Tomando como base os estudos pioneiros para o caso de Schwarzschild feitos por Regge-Wheller, e em seguida encontrar os modos quasinormais.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresenta-se uma breve introdução ao buraco negro auto-dual, obtendo-se uma solução e discutindo-se suas propriedades. No capítulo 3, apresenta-se uma revisão de perturbações gravitacionais no espaço-tempo de Schwarzschild, assim como calcula-se os modos quasinormais associados a esse caso. No capítulo 4, estuda-se perturbações gravitacionais de buraco negro auto-dual, usando o estudo de Regge-Wheeler e também calcula-se os modos quasinormais associados. Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as considerações finais e as conclusões. No decorrer da dissertação usa-se unidades geometrizadas $\hbar = c = G_N = 1$.

Capítulo 2

Buraco Negro Auto-Dual

Gravidade quântica é a teoria que busca conciliar a mecânica quântica (a qual descreve três das forças fundamentais) com a relatividade geral, ou seja, a teoria da quarta força: a gravidade. A dificuldade para unificar estas duas teorias é devida as hipóteses extremamente diferentes de como o Universo funciona. O aspecto fundamental da relatividade geral é que não existe um referencial preferencial para tempo e espaço, como exposto na mecânica newtoniana e relatividade restrita, uma vez que a geometria do espaço-tempo é dinâmica. Por outro lado, a mecânica quântica tem uma estrutura de fundo não-dinâmico desde sua concepção. Sendo assim, uma teoria de gravidade quântica se torna necessária para compreender problemas onde estão envolvidas uma combinação de grandes massas e energias, onde se têm dimensões espaciais muito reduzidas, tais como, o comportamento de buracos negros e a origem do Universo.

Gravidade quântica de laços [9], [10], [11] é uma teoria quântica de espaço-tempo proposta com o objetivo de reconciliar as evidentes incompatibilidades teóricas da mecânica quântica e da relatividade geral. É uma das abordagens não perturbativas de fundo independente para a gravidade quântica. Sendo LQG uma teoria fundamental de geometria quântica que concilia a relatividade geral e a mecânica quântica na escala de Planck, espera-se que esta teoria possa resolver os problemas de singularidades clássicas da relatividade geral. Muito progresso foi feito nessa direção nos últimos anos, em particular, a aplicação da LQG para o início do Universo no contexto de modelos de minisuperespaço é uma proposta para resolver o problema da singularidade inicial [12] e [13].

Os buracos negros são outros lugares interessantes para testar a validade da LQG, uma vez que, efeitos quânticos da gravidade surgem no interior do buraco negro e nas

proximidades das singularidades. Nos últimos anos, aplicações das ideias de LQG ao espaço-tempo de Kantowski-Sachs [14], [15] levou a alguns resultados interessantes. Em particular, foi demonstrado [16], [17] que é possível resolver o problema de singularidade de buraco negro usando ferramentas e ideias desenvolvidas completamente em LQG. Outros resultados notáveis também foram obtidos no caso não homogêneo [18]. Sendo assim, pensa-se que a resolução do problema de singularidade do buraco negro é um passo crucial para resolver o problema de perda de informação [19].

Há também alguns trabalhos de natureza semiclassical que tentam resolver o problema da singularidade de buraco negro [20], [21]. Nestes, os autores utilizam um vínculo Hamiltoniano efetivo obtido substituindo a conexão Ashtekar A com a holonomia $h(A)$ e resolvem as equações clássicas de Hamilton de forma exata ou numérica.

Com uma modificação para a versão holonômica do vínculo Hamiltoniano, o principal resultado é que a área mínima da LQG é o objeto fundamental para resolver o problema da singularidade do espaço-tempo do buraco negro em $r = 0$. Neste caso, uma esfera S^2 cuja área mínima é dada por $A_{\text{mín}} = 8\pi a_0$ toma o lugar da singularidade no centro do buraco negro. O invariante de Kretschmann é regular em todo espaço-tempo e a posição do máximo é independente da massa e do parâmetro polimérico introduzido para definir a versão holonômica do vínculo escalar. A posição radial da curvatura máxima depende apenas de G_N e \hbar .

2.1 Solução de Schwarzschild em variáveis de Ashtekar

Nesta seção calcula-se a solução de Schwarzschild dentro do horizonte de evento [22], [23]. Para o espaço-tempo de Kantowski-Sachs homogêneo mas não isotrópico, as variáveis de Ashtekar são [24]:

$$A = \tilde{c}\tau_3 dx + \tilde{b}\tau_2 d\theta - \tilde{b}\tau_1 \sin\theta d\phi + \tau_3 \cos\theta d\phi, \quad (2.1)$$

$$E = \tilde{p}_c \tau_3 \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{p}_b \tau_2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \tilde{p}_b \tau_1 \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

onde $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ e σ_i são as matrizes de Pauli. As componentes das variáveis no espaço de fase tem dimensão de comprimento $[\tilde{c}] = L^{-1}$, $[\tilde{p}_c] = L^2$, $[\tilde{b}] = L^0$, $[\tilde{p}_b] = L$. O vínculo

Hamiltoniano é:

$$\mathcal{C}_H = - \int \frac{N dx \sin\theta d\theta d\phi}{8\pi G_N \gamma^2} \left[(\tilde{b}^2 + \gamma^2) \frac{\tilde{p}_b \text{sgn}(\tilde{p}_c)}{\sqrt{|\tilde{p}_c|}} + 2\tilde{b}\tilde{c}\sqrt{|\tilde{p}_c|} \right]. \quad (2.2)$$

Usando a relação geral $E_i^a E_j^b \delta^{ij} = \det(q) q^{ab}$ (q_{ab} é a métrica na parte espacial), obtêm-se $q_{ab} = (\tilde{p}_b^2/|\tilde{p}_c|, |\tilde{p}_c|, |\tilde{p}_c| \sin^2\theta)$.

Restringindo a integração sob x a um intervalo finito L_0 , o Hamiltoniano toma a seguinte forma [23]:

$$\mathcal{C}_H = - \frac{N}{2G_N \gamma^2} \left[(b^2 + \gamma^2) \frac{p_b \text{sgn}(p_c)}{\sqrt{|p_c|}} + 2bc\sqrt{|p_c|} \right]. \quad (2.3)$$

As variáveis redefinidas são: $b = \tilde{b}$, $c = L_0 \tilde{c}$, $p_b = L_0 \tilde{p}_b$, $p_c = \tilde{p}_c$. As dimensões de comprimento das novas variáveis no espaço de fase são: $[c] = L^0$, $[p_c] = L^2$, $[b] = L^0$, $[p_b] = L^2$. A partir da simetria da conexão reduzida e da densidade tríade pode-se representar as componentes no espaço de fase como: (b, p_b) , (c, p_c) , com a álgebra de Poisson $\{c, p_c\} = 2\gamma G_N$, $\{b, p_b\} = \gamma G_N$. Fazendo a escolha do seguinte calibre $N = \gamma \sqrt{|p_c|} \text{sgn}(p_c)/b$, o Hamiltoniano reduz-se a:

$$\mathcal{C}_H = - \frac{1}{2G_N \gamma} \left[(b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{b} + 2cp_c \right]. \quad (2.4)$$

As equações de movimento de Hamilton são:

$$\dot{b} = \{b, \mathcal{C}_H\} = - \frac{b^2 + \gamma^2}{2b}, \quad \dot{p}_b = \{p_b, \mathcal{C}_H\} = \frac{1}{2} \left[p_b - \frac{\gamma^2 p_b}{b^2} \right], \quad (2.5)$$

$$\dot{c} = \{c, \mathcal{C}_H\} = -2c, \quad \dot{p}_c = \{p_c, \mathcal{C}_H\} = 2p_c.$$

As soluções das equações (2.5) usando o parâmetro $t \equiv e^T$ e redefinindo a constante de integração $\equiv e^{T_0} = 2m$ (ver em [22], [23]) são:

$$b(t) = \pm \gamma \sqrt{2m/t - 1}, \quad p_b(t) = p_b^0 \sqrt{t(2m - t)},$$

$$c(t) = \mp \gamma m p_b^0 t^{-2}, \quad p_c(t) = \pm t^2. \quad (2.6)$$

Esta é exatamente a solução de Schwarzschild dentro e também fora do horizonte de evento como pode-se verificar com a passagem da forma da métrica definida por $h_{ab} = \text{diag}(p_b^2/|p_c| L_0^2, |p_c|, |p_c| \sin^2\theta)$ (onde a constante da gravidade G_N está contida em m). O elemento de linha é:

$$ds^2 = -N^2 \frac{dt^2}{t^2} + \frac{p_b^2}{|p_c| L_0^2} dx^2 + |p_c| (\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (2.7)$$

Introduzindo as soluções (2.6) em (2.7) obtém-se a solução de Schwarzschild em todo espaço-tempo, exceto em $t = 0$ e $t = 2m$, onde está localizado a singularidade de curvatura clássica e a singularidade de coordenada, respectivamente,

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\frac{2m}{t} - 1} + \frac{(p_b^0)^2}{L_0^2} \left(\frac{2m}{t} - 1 \right) dx^2 + t^2 d\Omega^{(2)}, \quad (2.8)$$

onde $d\Omega^{(2)} = \sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2$. Para obter a métrica de Schwarzschild escolhe-se $L_0 = p_b^0$. Desta maneira fixa-se a célula radial para ter comprimento L_0 e p_b^0 desaparece da métrica. Na métrica semiclássica do buraco negro auto-dual p_b^0 não desaparece quando L_0 é fixado. Neste nível não temos p_b^0 fixo, mas somente a dimensão da célula radial. Esta é a escolha correta para reproduzir a solução de Schwarzschild. Definindo-se a dimensão da célula na direção x para ser $L_0 = p_b^0$ obtém-se a métrica de Schwarzschild correta em todo espaço-tempo. Faz-se a mesma escolha para a métrica semiclássica. Com esta escolha p_b^0 não desaparecerá da métrica semiclássica e em particular da solução $p_c(t)$. Usa-se a área mínima da LQG para fixar p_b^0 .

2.2 Uma classe mais geral de vínculos Hamiltoniano

A dinâmica correta da gravidade quântica de laços é o principal problema da teoria. A teoria está bem definida para o caso da cinemática, mas não está claro qual é a versão correta do vínculo Hamiltoniano, ou mais genericamente, na aproximação covariante, qual é o modelo correto da espuma de spin [25]. Um princípio empírico para construir o vínculo Hamiltoniano correto é lembrar do limite semiclássico correto [26]. Supondo simetria esférica e homogeneidade, a conexão e a densidade tríade assumem a forma dada em (2.1). Pode-se escolher uma grande classe de vínculos Hamiltonianos, expressos em termos das holonomias $h^{(\delta)}(A)$, que reduz-se ao mesmo clássico (2.3) quando o parâmetro polimérico δ se aproxima de zero. Introduzindo uma função paramétrica $\sigma(\delta)$ que identifica os elementos na categoria de vínculos Hamiltoniano compatíveis com a simetria esférica e homogeneidade. Chama-se \mathcal{C}_{LQG} o vínculo para a teoria geral e $\mathcal{C}_{\sigma(\delta)}$ o vínculo para o modelo de minisuperespaço esfericamente homogêneo. A redução a partir da teoria geral para o modelo de minisuperespaço é:

$$\mathcal{C}_{LQG} \longrightarrow \mathcal{C}_{\sigma(\delta)}. \quad (2.9)$$

Para obter o vínculo Hamiltoniano clássico (2.3) no limite $\delta \rightarrow 0$, lembrando que a função $\sigma(\delta)$ satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(\delta) = 1 \quad \longrightarrow \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_{\sigma(\delta)} = \mathcal{C}_H. \quad (2.10)$$

Uma escolha particular de $\sigma(\delta)$ dá o limite assintoticamente plano correto para o buraco negro de Schwarzschild. De fato, a condição de contorno assintótica seleciona a forma particular da função $\sigma(\delta)$.

O vínculo Hamiltoniano clássico pode ser escrito na seguinte forma:

$$\mathcal{C}_H = \frac{1}{\gamma^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} e^{-1} E^{ai} E^{bj} [\gamma^2 \Omega_{ab}^k - \bar{F}_{ab}^k], \quad (2.11)$$

onde $\Omega = -\sin\theta\tau_3 d\theta \wedge d\phi$ e $\bar{F} = dK + [K, K]$ (K é a curvatura extrínseca, $A = \Gamma + \gamma K$ e $\Gamma = \cos\theta\tau_3 d\phi$). As holonomias nas direções x , θ , ϕ para um caminho genérico l são definidas por:

$$h_1^{(l)} = \cos \frac{lc}{2} + 2\tau_3 \sin \frac{lc}{2}, \quad h_2^{(l)} = \cos \frac{lb}{2} - 2\tau_1 \sin \frac{lb}{2}, \quad h_3^{(l)} = \cos \frac{lb}{2} + 2\tau_2 \sin \frac{lb}{2}. \quad (2.12)$$

Definindo o campo \bar{F}_{ab}^i em termos das holonomias da seguinte maneira:

$$\bar{F}_{ab}^i \tau_i = \bar{F}_{ij}^i \bar{\omega}_a^i \bar{\omega}_b^j \left[\frac{h_i^{(\delta_i)} h_j^{(\delta_j)} h_i^{(\delta_i)-1} h_j^{(\delta_j)-1}}{\delta^2} \right], \quad \delta_i = (\delta c, \sigma(\delta)\delta b, \sigma(\delta)\delta b), \quad (2.13)$$

quando $\delta \rightarrow 0$ em (2.13), obtém-se o campo clássico. O vínculo Hamiltoniano em termos das holonomias é:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\sigma(\delta)} &= -\frac{N}{(8\pi G_N)^2 \gamma^3 \delta^3} \times Tr \left[\sum_{ijk} \epsilon^{ijk} h_i^{(\delta_i)} h_j^{(\delta_j)} h_i^{(\delta_i)-1} h_j^{(\delta_j)-1} h_k^{(\delta)} \left\{ h_k^{(\delta)-1}, V \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma^2 \delta^2 \tau_3 h_1^{(\delta)} \left\{ h_1^{(\delta)-1}, V \right\} \right] \\ &= -\frac{N}{2G_N \gamma^2} \left\{ 2 \frac{\sin\delta c}{\delta} \frac{\sin(\sigma(\delta)\delta b)}{\delta} \sqrt{|p_c|} + \left[\frac{\sin^2(\sigma(\delta)\delta b)}{\delta^2} + \gamma^2 \right] \frac{p_b \text{sgn}(p_c)}{\sqrt{|p_c|}} \right\}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

$V = 4\pi\sqrt{|p_c|}p_b$ é o volume da parte espacial. Introduziu-se as modificações da função $\sigma(\delta)$ somente no campo, mas isto é suficiente para ter uma grande classe de vínculos Hamiltonianos semiclássicos compatíveis com a simetria esférica. O Hamiltoniano \mathcal{C}^δ em (2.14) pode ser consideravelmente simplificado com a escolha do calibre $N = (\gamma\sqrt{|p_c|}\text{sgn}(p_c)\delta)/(\sin\sigma(\delta)\delta b)$:

$$\mathcal{C}_{\sigma(\delta)} = -\frac{1}{2\gamma G_N} \left\{ 2 \frac{\sin\delta c}{\delta} p_c + \left[\frac{\sin\sigma(\delta)\delta b}{\delta} + \frac{\gamma^2 \delta}{\sin\sigma(\delta)\delta b} \right] p_b \right\}. \quad (2.15)$$

A partir de (2.15) obtém-se dois conjuntos independentes de equações de movimento no espaço de fase:

$$\dot{c} = -2\frac{\text{sen}\delta c}{\delta}, \quad \dot{p}_c = 2p_c \cos \delta c, \quad (2.16)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}\sigma(\delta)\delta b}{\delta} + \frac{\gamma^2\delta}{\text{sen}\sigma(\delta)\delta b} \right), \quad \dot{p}_b = \frac{\sigma(\delta)}{2} \cos \sigma(\delta)\delta b \left(1 - \frac{\gamma^2\delta^2}{\text{sen}^2\sigma(\delta)\delta b} \right) p_b.$$

Resolvendo as três primeiras equações e usando o vínculo Hamiltoniano $\mathcal{C}^\delta = 0$, com a parametrização temporal $e^T = t$ e impondo o horizonte de evento de Schwarzschild em $t = 2m$, obtém-se:

$$c(t) = \frac{2}{\delta} \text{arctg} \left(\mp \frac{\gamma\delta m p_b^0}{2t^2} \right), \quad p_c(t) = \pm \frac{1}{t^2} \left[\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2} \right)^2 + t^4 \right], \quad (2.17)$$

$$\cos \sigma(\delta)\delta b = \rho(\delta) \left[\frac{1 - \left(\frac{2m}{t}\right)^{\sigma(\delta)\rho(\delta)} \mathcal{P}(\delta)}{1 + \left(\frac{2m}{t}\right)^{\sigma(\delta)\rho(\delta)} \mathcal{P}(\delta)} \right], \quad p_b(t) = -\frac{2 \text{sen}\delta c \text{ sen}\sigma(\delta)\delta b p_c}{\text{sen}^2\sigma(\delta)\delta b + \gamma^2\delta^2},$$

onde as seguintes quantidades foram definidas por:

$$\rho(\delta) = \sqrt{1 + \gamma^2\delta^2}, \quad \mathcal{P}(\delta) = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2} - 1}{\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2} + 1}. \quad (2.18)$$

Agora o foco da atenção é no termo $(2m/t)^{\sigma(\delta)\rho(\delta)}$. A escolha deste termo e em particular a escolha do expoente será crucial para ter o limite assintótico plano correto. O expoente está na forma $(2m/t)^{1+\epsilon}$ e expandindo em potências do parâmetro pequeno $\epsilon \sim \delta^2$ obtém-se $(2m/t)^{1+\epsilon} \sim -(2m/t) \log(t/2m)$ para grandes distâncias ($t \gg 2m$) (lembrando que fora do horizonte de evento a coordenada t assume o papel da coordenada radial). É fácil de ver que existe apenas uma maneira possível para obter o limite assintótico correto, ele é dado pela escolha $\sigma(\delta) = 1/\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2}$. Em outras palavras, pode-se dizer que qualquer função $x^\epsilon \sim \epsilon \log(x)$ diverge logicamente para ϵ pequeno e grandes distâncias ($x \gg 1$).

Tomando $\sigma(\delta) = 1/\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2}$. Para forçar o limite correto para grandes distâncias e também forçar a regularidade do invariante de curvatura em todo espaço-tempo, estende-se a solução fora do horizonte de evento com a redefinição $t \leftrightarrow r$, como será apresentada na próxima seção.

Uma diferença crucial com a solução de Schwarzschild clássica é que p_c tem um mínimo em $t_{\text{mín}} = (\gamma\delta m p_b^0/2)^{1/2}$, e $p_c(t_{\text{mín}}) = \gamma\delta m p_b^0$. A solução tem uma estrutura

do espaço-tempo muito parecida com a métrica de Reissner-Nordström e apresenta um horizonte no interior:

$$r_- = 2m\mathcal{P}(\delta)^2 = 2m \left(\frac{2 + \gamma^2\delta^2 - 2\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2}}{2 + \gamma^2\delta^2 + 2\sqrt{1 + \gamma^2\delta^2}} \right). \quad (2.19)$$

Para $\delta \rightarrow 0$, $r_- \sim m\gamma^4\delta^4/\delta$. Observa-se que a posição do horizonte interno $r_- \neq 2m \quad \forall \gamma \in \mathfrak{R}$ (γ é o parâmetro de Barbero- Immirzi). Agora estudando a trajetória no plano $(p_b/p_b^0, \log(p_c))$ e comparando o resultado com a solução de Schwarzschild. Na Fig. 2.1 tem-se um gráfico paramétrico de $(|p_b|, \log(p_c))$; seguindo a trajetória de $t > 2m$ onde a solução clássica (trajetória pontilhada) e a solução semiclássica (trajetória contínua) estão muito claras. Para $t = 2m$, $p_c \rightarrow (2m)^2$ e $p_b \rightarrow 0$ (este ponto corresponde ao raio de Schwarzschild). A partir deste ponto diminuindo t alcança-se um valor mínimo para $p_{c,m} \equiv p_c(t_{\min}) > 0$. A partir de $t = t_{\min}$, p_c começa a crescer novamente até que $p_b = 0$, este ponto corresponde a um novo horizonte localizado em $t = r_-$. No intervalo de tempo $t < t_{\min}$, p_c cresce juntamente com $|p_b|$ e como é muito claro a partir da figura, a solução aproxima-se a um segundo buraco negro especular para $t \rightarrow 0$. Em particular tem-se uma segunda região assintoticamente plana para $t \sim 0$.

2.2.1 A solução na forma de métrica

Nesta subseção será escrita a solução na forma métrica e estendida para todo o espaço-tempo. Lembrando que a métrica de Kantowski-Sachs é:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + X^2(t)dx^2 + Y^2(t)(d\theta^2 + \text{sen}\theta d\phi^2). \quad (2.20)$$

As componentes da métrica estão relacionadas com as variáveis de conexão por:

$$N^2(t) = \frac{\gamma^2\delta^2|p_c(t)|}{t^2 \text{sen}^2\sigma(\delta)\delta b}, \quad X^2(t) = \frac{p_b^2(t)}{L_0^2|p_c(t)|}\Omega(\delta), \quad Y^2(t) = |p_c(t)|. \quad (2.21)$$

Introduziu-se $\Omega(\delta)$ por uma transformação de coordenada $x \rightarrow \sqrt{\Omega(\delta)}x$,

$$\Omega(\delta) = \frac{16(1 + \gamma^2\delta^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + \gamma^2\delta^2})^4}. \quad (2.22)$$

Esta transformação de coordenada é útil para obter a métrica de Minkowski no limite $t \rightarrow \infty$. A forma explícita da função $N^2(t)$ em termos da coordenada t é:

$$N^2(t) = \frac{\gamma^2\delta^2 \left[\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2t^2} \right)^2 + 1 \right]}{1 - \rho^2(\delta) \left[\frac{1 - \left(\frac{2m}{t}\right)\mathcal{P}(\delta)}{1 + \left(\frac{2m}{t}\right)\mathcal{P}(\delta)} \right]^2}. \quad (2.23)$$

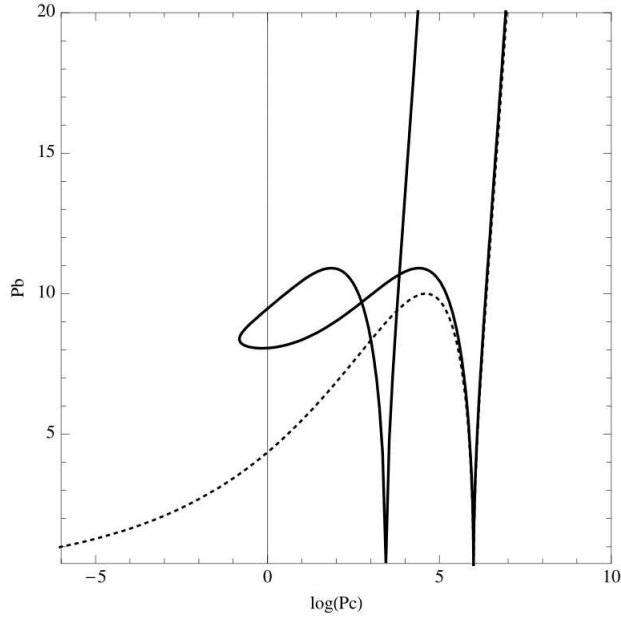


Figura 2.1: Trajetória dinâmica semiclassica no plano $(\sqrt{|p_b^2|}/p_b^0, \log(p_c))$ para valores positivos de p_c . A trajetória tracejada corresponde a solução de Schwarzschild clássica e a trajetória contínua corresponde a solução semiclassica. O gráfico refere-se a $m = 10$, $p_b = 1/10$ e $\gamma\delta = \log(4)/\pi$.

Usando a segunda relação de (2.17) pode-se obter a componente da métrica $X^2(t)$,

$$X^2(t) = \frac{(2\gamma\delta m)^2 \Omega(\delta) \left(1 - \rho^2(\delta) \left[\frac{1 - (\frac{2m}{t})\mathcal{P}(\delta)}{1 + (\frac{2m}{t})\mathcal{P}(\delta)}\right]^2\right) t^2}{\rho^4(\delta) \left(1 - \left[\frac{1 - (\frac{2m}{t})\mathcal{P}(\delta)}{1 + (\frac{2m}{t})\mathcal{P}(\delta)}\right]^2\right)^2 \left[\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2}\right)^2 + t^4\right]}. \quad (2.24)$$

A função $Y^2(t)$ corresponde a $|p_c(t)|$ dado em (2.17). A métrica obtida tem o limite assintótico correto para $t \rightarrow \infty$ e de fato $N^2(t \rightarrow 0) \rightarrow -1$, $X^2(t \rightarrow 0) \rightarrow -1$, $Y^2(t \rightarrow 0) \rightarrow t^2$. Pode-se dizer que o buraco negro auto-dual é uma interpolação entre duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo. A métrica obtida nesta subseção tem o limite assintoticamente plano correto para $t \rightarrow +\infty$ e reproduz a métrica de Minkowski para $m \rightarrow 0$. Ambos os limites não são satisfeitos no trabalho [27]. A pequena modificação introduzida na forma da holonomia do vínculo Hamiltoniano é necessária para os dois limites fundamentais estarem consistentes.

2.3 Buraco negro auto-dual em todo o espaço-tempo

Nesta seção foi estendida a solução semiclássica (métrica) obtida na seção anterior para todo o espaço-tempo. Como explicado na subseção (2.2.1), a solução métrica tem o limite plano correto para $t \rightarrow 0$ e vai para Minkowski para $m \rightarrow 0$. Mostra-se que o escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ é regular em todo o espaço-tempo. Em termos de $N(t)$, $X(t)$, $Y(t)$ o escalar de Kretschmann é:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 4 \left[\left(\frac{1}{XN} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \frac{dX}{dt} \right) \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{YN} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \frac{dY}{dt} \right) \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{XN} \frac{dX}{dt} \frac{1}{YN} \frac{dY}{dt} \right)^2 + \frac{1}{Y^4 N^4} \left(N^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right)^2 \right]. \quad (2.25)$$

Na Fig. 2.2 é apresentado um gráfico de K , sendo ele é regular em todo o espaço-tempo e o comportamento para valores grandes de t é o escalar singular clássico $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48m^2/t^6$. O que acontece com p_b^0 ? Agora fixa-se o parâmetro p_b^0 usando a teoria quântica

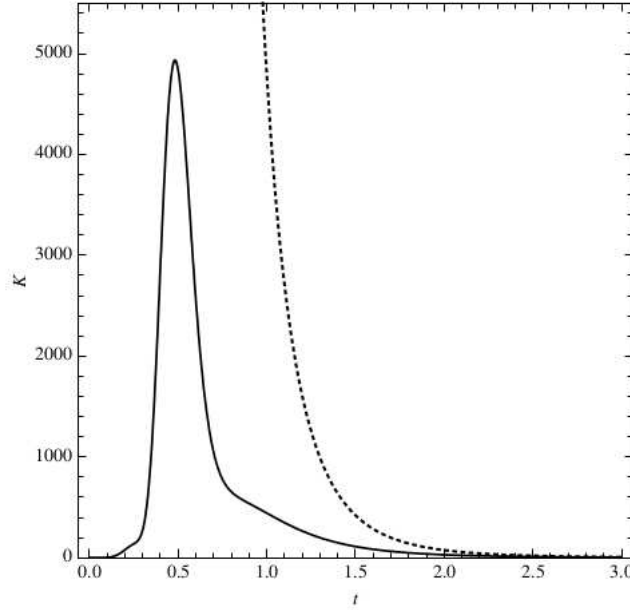


Figura 2.2: Gráfico do escalar de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ para $m = 10$, $p_b^0 = 1/10$ e $\gamma\delta \sim 1$, $\forall t \geq 0$; o comportamento quando t grande e $1/t^6$

de laços. Em particular fazendo a escolha p_b^0 de tal maneira que a posição r_{\max} do máximo do invariante de Kretschmann é independente da massa do buraco negro. Isso significa

que a esfera S^2 toma o lugar do raio mínimo que é independente da massa do buraco negro e de p_b^0 e que depende apenas de l_P (comprimento de Planck). Considerando-se a solução $p_c(t)$ e impondo a área mínima $A_{\text{mín}} = 4\pi\gamma\delta mp_b^0$ da esfera S^2 para ser igual a área da lacuna mínima da gravidade quântica de laços $a_0 = 2\sqrt{3}\pi\gamma l_P^2$. Com a escolha $\gamma\delta mp_b^0 = a_0/4\pi$ obtém-se um resultado físico significativo. Não impondo $p_c(t)$ para ter um mínimo em a_0 , mas impondo que o mínimo de $p_c(t)$ é a área mínima da LQG. A área mínima das duas esferas é um resultado e não uma imposição. Observa-se que esta escolha de p_b^0 fixa o máximo absoluto e o mínimo relativo de $p_b(t)$ para ser independente da massa m como está mostrado na Fig. 2.3.

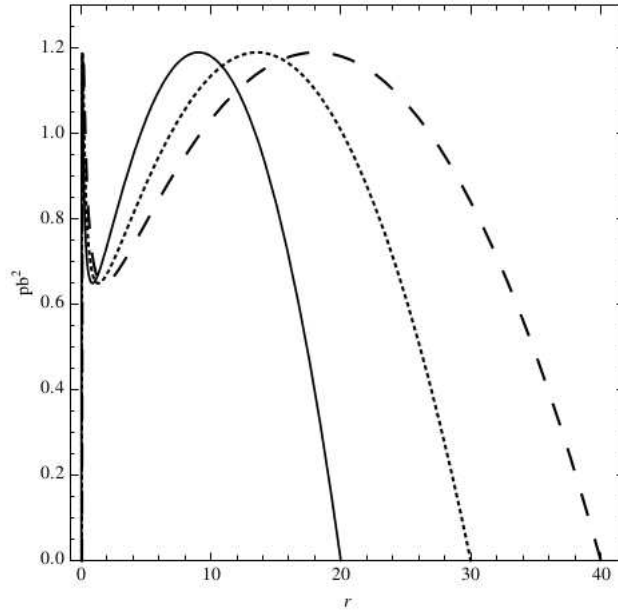


Figura 2.3: Gráfico de $p_b^2(t)$ para diferentes valores de massa ($m = 10, 15, 20$). Máximo (absoluto) e mínimo (relativo) de $p_b^2(t)$ são independentes da massa m .

Buscou-se providenciar algum argumento para apoiar a escolha $p_b^0 \sim a_0/m$. No trabalho [28] é mostrado o espaço de fase parametrizado por m e o momento conjugado p_m o qual mostra que ambas são constantes de movimento (na notação $p_m = p_b^0$). Como usualmente em mecânica quântica elementar, para derivar a relação de incerteza de Heisenberg, pode-se introduzir o estado $|\phi\rangle = (\hat{m} + i\lambda\hat{p}_m)|\psi\rangle$, onde \hat{m} e \hat{p}_m são os operadores de massa e momento, respectivamente, e $\lambda \in \Re$. Ao estabelecer norma positiva $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\hat{m}^2\rangle + i\lambda\langle[\hat{m}, \hat{p}_m]\rangle + \lambda^2\langle\hat{p}_m^2\rangle \geq 0$ tem-se o discriminante, de segunda ordem

em λ , é negativo ou zero. A condição do discriminante dá $\langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{p}_m^2 \rangle \geq -\langle [\hat{m}, \hat{p}_m] \rangle^2/4$. Introduzindo o comutador $[\hat{m}, \hat{p}_m] = i l_P^2$ obtém-se $\langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{p}_m^2 \rangle \geq l_P^4$. Pode-se calcular $\langle \hat{m}^2 \rangle$ no estado gaussiano semiclássico,

$$\psi(m)_{m_0, p_0} = \frac{e^{-\frac{(m-m_0)^2}{4\Delta^2}} e^{\frac{i p_0 m}{l_P^2}}}{(2\pi\Delta^2)^{1/4}}, \quad (2.26)$$

e o resultado é $\langle \hat{m}^2 \rangle = 4m_0^2$ (para $\Delta = \sqrt{3}m_0$). Usando a relação de incerteza de Heisenberg determina-se $\langle \hat{p}_m^2 \rangle = l_P^4/16m_0^2$. Ao identificar $\langle \hat{p}_m^2 \rangle = (p_b^0)^2$ obtém-se $m_0 p_b^0 = l_P^2/4$, que é exatamente $m p_b^0 = a_0/4\pi\gamma\delta$ para $\delta = 2\sqrt{3}$, $a_0 = 2\sqrt{3}\pi\gamma l_P^2$ e $m_0 \equiv m$. Introduzindo explicitamente todos os coeficientes, mas o principal resultado é $p_b^0 \sim a_0/m$. Porém, o que foi apresentado aqui é um argumento e não uma prova. No final da seção (2.5) será apresentada uma interpretação física de p_b^0 .

Buscando realçar a semelhança entre a equação de movimento para $p_c(t)$ e a equação de Friedmann da cosmologia quântica de laços. Pode-se escrever a equação diferencial para $p_c(t)$ da seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{p}_c}{p_c}\right)^2 = 4 \left(1 - \frac{a_0^2}{16\pi^2 p_c^2}\right). \quad (2.27)$$

A partir desta equação é expressado p_c no lugar do valor $a_0/4\pi$. Esta é bastante semelhante ao que é ressaltado na cosmologia quântica de laços [29]. Como está evidente a partir da Fig. 2.4, o máximo do invariante de Kretschmann é independente da massa, e está localizado em $r_{\max} \sim \sqrt{a_0}$ ($a_0 \sim l_P^2$). Neste ponto redefine-se a variável $t \leftrightarrow x$ (com a subsequente identificação $x \equiv r$) e as componentes da métrica levam a solução de Schwarzschild na forma padrão:

$$\begin{aligned} -N^2(t) &\longrightarrow g_{rr}(r), \\ X^2(t) &\longrightarrow g_{tt}(r), \\ Y^2(t) &\longrightarrow g_{\theta\theta}(r) = g_{\phi\phi}/\text{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esquemáticamente as propriedades da métrica são as seguintes:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} g_{\mu\nu}(r) &= \eta_{\mu\nu}, \\ \lim_{r \rightarrow 0} g_{\mu\nu}(r) &= \eta_{\mu\nu}, \\ \lim_{m, a_0 \rightarrow 0} g_{\mu\nu}(r) &= \eta_{\mu\nu}, \\ k(g) &< \infty \forall r, \\ r_{\max}(k(g)) &\sim \sqrt{a_0}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

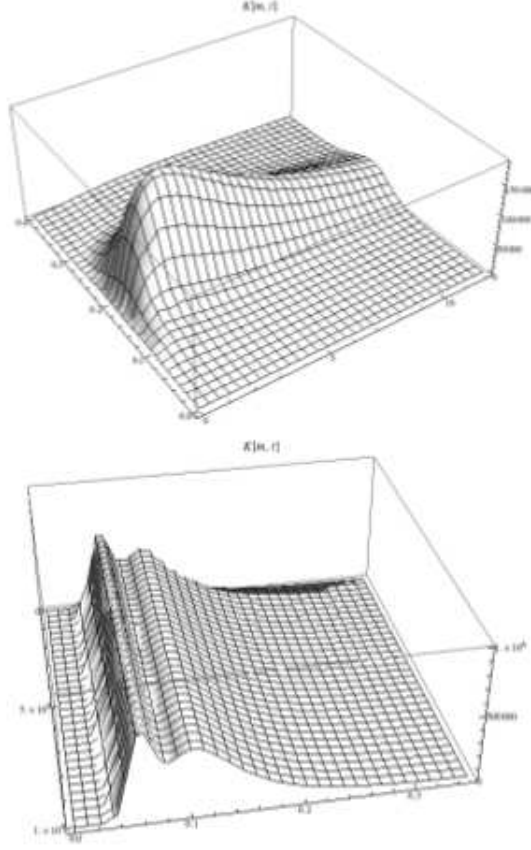


Figura 2.4: Gráfico do invariante de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}(m,r)$ para $m \in [0, 10^6], t \in [0, 2] \gamma\delta \sim 1$.

Considerando-se as propriedades (2.29) suficientes para estender a solução em todo espaço-tempo. A solução está resumida na Tab. 2.1 (na tabela não é fixado o parâmetro p_b^0). Falou-se na seção anterior que a solução métrica tem dois horizontes de eventos. Um horizonte de evento é definido por uma superfície nula $\Sigma(r, \theta) = \text{const.}$. A superfície $\Sigma(r, \theta) = \text{const.}$ é uma superfície nula se a normal $n_i = \partial \Sigma / \partial x^i$ é um vetor nulo ou satisfaz a condição $n_i n^i = 0$. A última identidade diz que o vetor n^i está na própria superfície, de fato $d\Sigma = dx^i \partial \Sigma / \partial x^i$ e $dx^i \parallel n^i$. A norma do vetor n_i é dado por:

$$n_i n^i = g^{ij} \frac{\partial \Sigma}{\partial x^i} \frac{\partial \Sigma}{\partial x^j} = 0. \quad (2.30)$$

Nesse caso (2.32) reduz-se à:

$$g^{rr} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} + g^{\theta\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = 0, \quad (2.31)$$

$g_{\mu\nu}$	LQBH	Clássico
$g_{tt}(r)$	$\frac{(2\gamma\delta m)^2 \omega(\delta) \left(1 - \rho^2(\delta) \left(\frac{1 - \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}{1 + \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{1 - \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}{1 + \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}\right)^2\right)^2 \left[\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2r}\right)^2 + r^2\right]}$	$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$
$g_{rr}(r)$	$-\frac{\gamma^2 \delta^2 \left[\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2r^2}\right)^2 + 1\right]}{1 - \rho^2(\delta) \left(\frac{1 - \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}{1 + \frac{2m}{r} \mathcal{P}(\delta)}\right)^2}$	$\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$
$g_{\theta\theta}$	$\left(\frac{\gamma\delta m p_b^0}{2r}\right)^2 + r^2$	r^2

Tabela 2.1: Resumo da solução

e esta equação é satisfeita onde $g^{rr}(r) = 0$ e se a superfície é independente de θ , $\Sigma(r, \theta) = \Sigma(r)$. Os pontos onde $g^{rr} = 0$ são r_- e $r_+ = 2m$.

Pode-se escrever a métrica em outra forma que é mais semelhante ao espaço-tempo de Reissner-Nordström. A métrica pode ser escrita na seguinte forma:

$$ds^2 = -\frac{64\pi^2(r-r_+)(r-r_-)(r+r_+\mathcal{P}(\delta))^2}{64\pi^2r^4 + a_0^2} dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{64\pi^2(r-r_+)(r-r_-)r^4}{(r+r_+\mathcal{P}(\delta))^2(64\pi^2r^4 + a_0^2)}} \quad (2.32)$$

$$+ \left(\frac{a_0^2}{64\pi^2r^2} + r^2\right) d\Omega^{(2)}.$$

Ao desenvolver a métrica (2.32) pelo parâmetro δ e a área mínima a_0 em ordem zero, obtém-se a solução de Schwarzschild: $g_{tt}(r) = -(1 - 2m/r) + \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(a_0^2)$, $r_{rr}(r) = 1/(1 - 2m/r) + \mathcal{O}(\delta^2) + \mathcal{O}(a_0^2)$ e $g_{\theta\theta}(r) = g_{\phi\phi}/\sin^2\theta = r^2 + \mathcal{O}(a_0^2)$. Tem-se correções para a métrica a partir do parâmetro polimérico e também da área mínima a_0 .

Para checar o limite semiclássico calcula-se a expansão perturbativa do invariante de curvatura para δ e a_0 pequenos, e obtém-se uma quantidade divergente em $r = 0$ em qualquer ordem do desenvolvimento. A regularidade de K não é um resultado perturbativo, de fato, para pequenos valores da coordenada r , $K \sim 3145728\pi^4 r^6 / a_0^4 \gamma^8 \delta^8 m^2$ diverge quando $a_0 \rightarrow 0$. (Para a solução semiclássica o traço do tensor de Ricci ($R = R^\mu_\mu$) não é identicamente zero como para a solução de Schwarzschild. Calcula-se também este operador e obtém-se uma quantidade regular em $r = 0$).

Conclui-se esta seção mostrando a independência da posição do pico do invariante de Kretschmann a partir do parâmetro polimérico δ . Tem-se o gráfico do invariante $K(\delta, r)$ e obtém-se o resultado na Fig. 2.5. A partir da figura é evidente que a posição do máximo do invariante de Kretschmann é independente de δ .

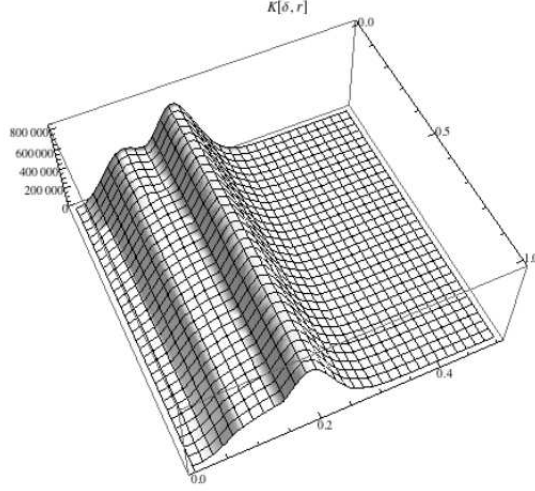


Figura 2.5: Gráfico do invariante de Kretschmann como função de $t \in [0, 0.5]$ e o parâmetro polimérico $\delta \in [0, 1]$.

2.4 Estrutura causal e diagrama de Carter-Penrose

Nesta seção serão construídos os diagramas de Carter-Penrose [30] para a métrica semiclássica (2.32). Para obter os diagramas serão feitas algumas mudanças de coordenadas enumeradas de 1-8.

1) Pode-se expressar a métrica (2.32) na forma $ds^2 = g_{00}(r(r_*))(dt^2 - dr_*^2)$ introduzindo a coordenada tartaruga r_* definida por:

$$r_* = \int \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}} dr = \frac{1}{512\pi^2} \left[-\frac{2a_0^2}{\mathcal{P}(\delta)^2 m^2 r} + 512\pi^2 r + \frac{a_0^2(\mathcal{P}(\delta)^2 + 1)}{\mathcal{P}(\delta)^4 m^3} \log(r) - \frac{a_0^2 + 1024\pi^2 m^4}{(\mathcal{P}(\delta)^2 - 1)m^3} \log|r - r_+| + \frac{a_0^2 + 1024\pi^2 \mathcal{P}(\delta)^4 m^4}{(\mathcal{P}(\delta)^2 - 1)\mathcal{P}(\delta)^4 m^3} \log|r - r_-| \right]; \quad (2.33)$$

2) O segundo conjunto de coordenadas a ser usado é (u, v, θ, ϕ) , onde $u = t - r_*$ e $v = t + r_*$. A métrica torna-se $ds^2 = g_{00}(u, v) du dv$;

3) A singularidade no horizonte de evento r_+ desaparece usando as coordenadas (U^+, V^+, θ, ϕ) definidas por $U^+ = -\exp(-k_+ u)/k_+$, $V^+ = \exp(-k_+ v)/k_+$, onde

$$k_+ = \frac{256\pi^2(1 - \mathcal{P}(\delta)^2)m^3}{(a_0^2 + 1024\pi^2 m^4)}. \quad (2.34)$$

Introduzindo a função paramétrica:

$$k_- = \frac{256\pi^2(\mathcal{P}(\delta)^2 - 1)\mathcal{P}(\delta)^4 m^3}{(a_0^2 + 1024\pi^2 \mathcal{P}(\delta)^4 m^4)}. \quad (2.35)$$

Note que $k_+ > 0$ e $k_- < 0$. Nestas coordenadas a métrica é:

$$ds^2 = -\frac{64\pi^2(r+r_+\mathcal{P}(\delta))^2}{64\pi^2r^4+a_0^2}(r-r_-)^{1-\frac{k_+}{k_-}}e^{-\frac{k_+}{256\pi^2}\left[-\frac{2a_0^2}{\mathcal{P}(\delta)^2m^2r}+512\pi^2r\right.}$$

$$\left.+\frac{a_0^2(\mathcal{P}(\delta)^2+1)}{\mathcal{P}(\delta)^4m^3}\log(r)\right]}dU^+dV^+ = -F(r)^2dU^+dV^+, \quad (2.36)$$

onde introduz-se a função $F(r)^2 = -g_{00}(r)(\partial u/\partial U^+)(\partial v/\partial V^+)$ que é definida explicitamente em termos de U^+ e V^+ .

4) Usando as coordenadas (t', x', θ, ϕ) definidas por $x' = (U^+ - V^+)/2$, $t' = (U^+ + V^+)/2$, a métrica (2.32) assume a forma conformalmente plana $ds^2 = F(r)^2(-dt'^2 + dx'^2)$.

Nestas coordenadas as trajetórias da coordenada r são:

$$U^+V^+ = t'^2 - x'^2 = -\frac{e^{2k_+r_*}}{k_+^2} = -\frac{1}{k_+^2}(r-r_+)(r-r_-)^{\frac{k_+}{k_-}}$$

$$e^{-\frac{k_+}{256\pi^2}\left[-\frac{2a_0^2}{\mathcal{P}(\delta)^2m^2r}+512\pi^2r+\frac{a_0^2(\mathcal{P}(\delta)^2+1)}{\mathcal{P}(\delta)^4m^3}\log(r)\right]}. \quad (2.37)$$

Os horizontes de eventos r_+ e r_- estão localizados em:

$$U^+V^+ = t'^2 - x'^2 = 0, \quad r = r_+, \quad (2.38)$$

$$U^+V^+ = t'^2 - x'^2 = +\infty, \quad r = r_-. \quad (2.39)$$

5) Um primeiro diagrama Carter-Penrose para a região $r > r_-$ pode ser construído usando as coordenadas $(\psi, \xi, \theta, \phi)$ definido por $U^+ \sim \text{tg}[(\psi - \xi)/2]$, $V^+ \sim \text{tg}[(\psi + \xi)/2]$ e $-\pi \leq \psi \leq \pi$, $-\pi \leq \xi \leq \pi$. O horizonte de evento $r = r_+$ está localizado em $U^+V^+ = 0$ ou $\psi = \pm\xi$. O horizonte de evento $r = r_-$ está localizado em $U^+V^+ = +\infty$ ou $\psi = \pm\xi \pm \pi$ para $-\pi/2 \leq \xi \leq 0$, $\psi = \mp\xi \pm \pi$ para $0 \leq \xi \leq \pi/2$. Outras regiões assintóticas são: I^+ , $I^-(\psi = \mp\xi \pm \pi)$, $i^0(\psi = 0, \xi = \pi)$, $i^+(\psi = \pi/2, \xi = \pi/2)$, $i^0(\psi = -\pi/2, \xi = \pi/2)$. O diagrama de Carter-Penrose para esta região é mostrado no lado esquerdo na Fig. 2.6.

6) Nas coordenadas introduzidas acima, a métrica (2.32) não é regular em r_- . Para remover a singularidade em r_- introduziu-se as coordenadas (U^-, V^-, θ, ϕ) definidas por $U^- = -\exp(-k_-u)/k_-$, $V^- = \exp(-k_-v)/k_-$. Nestas coordenadas a métrica é:

$$ds^2 = -\frac{64\pi^2(r+r_+\mathcal{P}(\delta))^2}{64\pi^2r^4+a_0^2}(r_+-r)^{1-\frac{k_-}{k_+}}$$

$$e^{-\frac{k_+}{256\pi^2}\left[-\frac{2a_0^2}{\mathcal{P}(\delta)^2m^2r}+512\pi^2r+\frac{a_0^2(\mathcal{P}(\delta)^2+1)}{\mathcal{P}(\delta)^4m^3}\log(r)\right]}dU^-dV^- = -F'(r)^2dU^-dV^-, \quad (2.40)$$

onde $F'(r) = -g_{00}(r)(\partial u/\partial U^-)(\partial v/\partial V^-)$. Agora a métrica é regular em $r = r_-$, mas é singular em $r = r_+$.

7) Como nesta região $r > r_-$, introduz-se as coordenadas $(t'', x'', \theta'', \phi'')$ em termos de que $ds^2 = F'^2(r)(-dt''^2 + dx''^2)$. As trajetórias r const. são definidas pelas curvas

$$U^-V^- = t''^2 - x''^2 = -\frac{1}{k_-^2}(r_- - r)(r_+ - r)^{\frac{k_+}{k_-}} e^{2\frac{k_+}{256\pi^2} \left[-\frac{2a_0^2}{\mathcal{P}(\delta)^2 m^2 r} + 512\pi^2 r + \frac{a_0^2(\mathcal{P}(\delta)^2 + 1)}{\mathcal{P}(\delta)^4 m^3} \log(r) \right]}. \quad (2.41)$$

Em particular os horizontes r_+ , r_- e o ponto $r = 0$ estão definidos pelas curvas:

$$\begin{aligned} U^-V^- = t''^2 - x''^2 &= +\infty, & r &= r_+, \\ U^-V^- = t''^2 - x''^2 &= 0, & r &= r_-, \\ U^-V^- = t''^2 - x''^2 &= -\infty, & r &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

8) Em coordenadas $(\psi', \phi', \theta, \phi)$ definidas por $U^- \sim \text{tg}[(\psi' - \xi')/2]$, $V^+ \sim \text{tg}[(\psi' + \xi')/2]$. O horizonte de evento $r = r_-$ está localizado em $U^-V^- = 0$ ou $\psi' = \pm\xi'$, o horizonte de evento $r = r_+$ está localizado em $U^-V^- = +\infty$ ou $\psi' = \mp\xi' \pm \pi$ para $0 \leq \xi' \leq \pi/2$, $\psi' = \pm\xi' \pm \pi$ para $0 \leq \xi' \leq \pi/2$. As outras regiões assintóticas são definidas por $r = 0$: $\psi' = \pm\xi' \mp \pi$ para $\pi/2 \leq \xi' \leq \pi$ e $\psi' = \pm\xi' \pm \pi$ para $-\pi \leq \xi' \leq -\pi/2$. O diagrama de Carter-Penrose para esta região está no lado direito da Fig. 2.6.

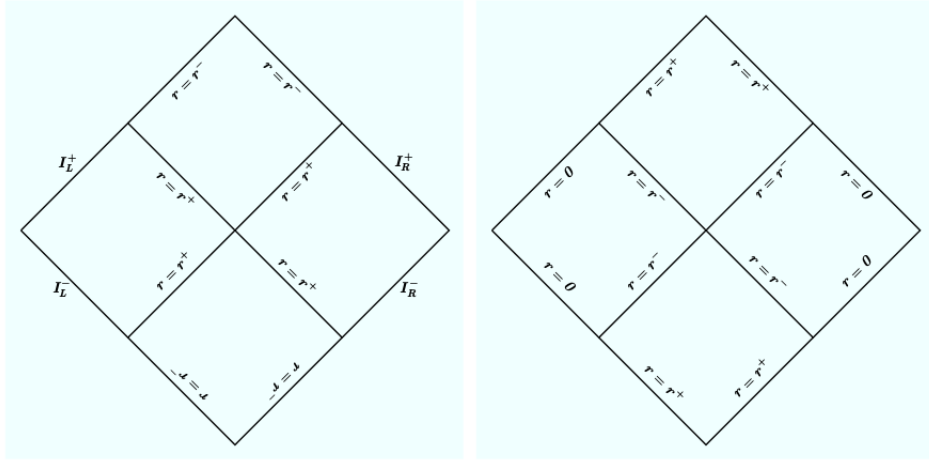


Figura 2.6: A figura no lado esquerdo representa o diagrama de Carter-Penrose na região fora r_- e a figura do lado direito o diagrama para $r_- \leq r \leq 0$.

Agora mostra-se que qualquer partícula massiva não pode alcançar $r = 0$ em um tempo próprio finito. Considera-se a equação da geodésica radial para uma partícula pontual com massa:

$$(-g_{tt}g_{rr})\dot{r}^2 = E_n^2 + g_{tt}, \quad (2.43)$$

onde “.” é a derivada com relação ao tempo próprio (τ) e E_n é a energia da partícula pontual. Se a partícula cair a partir do infinito com velocidade radial inicial zero, a energia é $E_n = 1$. Pode-se escrever (2.43) em uma forma mais familiar:

$$(-g_{tt}g_{rr})\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = E, \quad (2.44)$$

um gráfico de V_{ef} está na Fig. 2.7. Para $r = 0$, $V_{ef}(r = 0) = 4m^4\pi^2\gamma^8\delta^8/a_0^2$ então qualquer partícula com $E_n < V_{ef}(0)$ não pode alcançar $r = 0$. Se a energia da partícula é $E_n > V_{ef}(0)$, a equação da geodésica para $r \sim 0$ é $\dot{r}^2 \sim r^4$ e integrando $\tau \sim 1/r - 1/r_0$ ou $\Delta\tau \equiv \tau(r_0) - \tau(0) \rightarrow +\infty$. Pode-se construir os diagramas da Fig. 2.6 para obter uma extensão máxima similar ao de Reissner-Nordström. O resultado está expressado na Fig. 2.8.

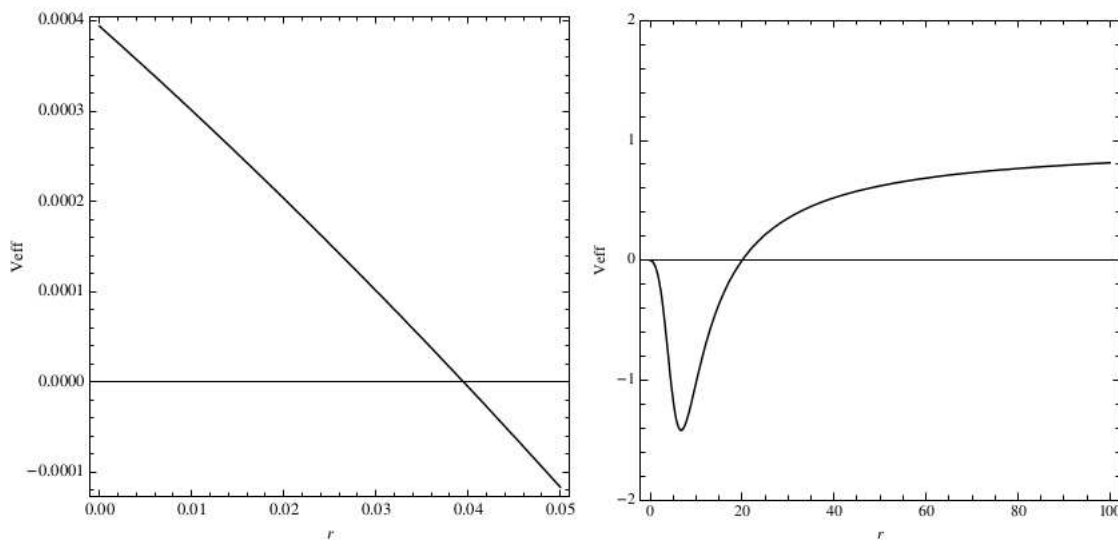


Figura 2.7: Gráfico de $V_{ef}(r)$. No lado esquerdo está uma ampliação do V_{ef} para $r \sim 0$.

2.5 Núcleo de Schwarzschild assintótico próximo a $r \sim 0$

Nesta seção será estudado o limite quando $r \sim 0$ da métrica (2.32). Ao desenvolver a métrica muito próximo ao ponto $r \sim 0$, obtém-se:

$$ds^2 = -(a - br)dt^2 + \frac{dr^2}{cr^4 - dr^5} + \frac{d\Omega^{(2)}}{cr^2}. \quad (2.45)$$

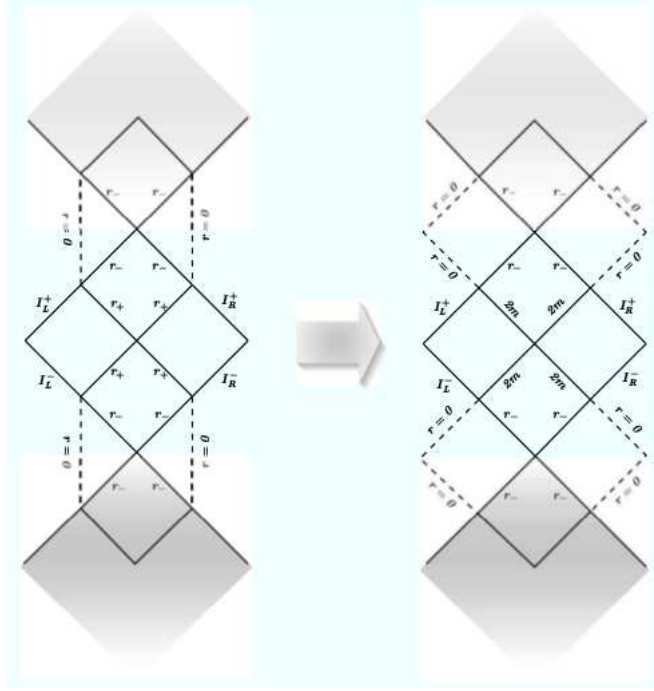


Figura 2.8: Extensão do espaço-tempo máxima do LQBH no lado esquerdo e a extensão análoga para o buraco negro de Reissner-Nordström.

As funções paramétricas a , b , c , d são:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{64\Omega(\delta)m^4\pi^2\gamma^4\mathcal{P}(\delta)^2}{a_0^2(1+\gamma^2\delta^2)^2}, & b &= \frac{128\Omega(\delta)m^3\pi^2\gamma^2\delta^2\mathcal{P}(\delta)}{a_0^2(1+\gamma^2\delta^2)}, \\
 c &= \frac{64\pi^2}{a_0^2}, & d &= \frac{128\pi^2(1+\gamma^2\delta^2)\mathcal{P}(\delta)}{a_0^2m\gamma^2\delta^2}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Considerando a mudança de coordenada $R = 1/r\sqrt{c}$. O ponto $r = 0$ é mapeado no ponto $R = +\infty$. A métrica nas novas coordenadas é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{m_1}{R}\right) dt^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{m_2}{R}} + R^2 d\Omega^{(2)}, \tag{2.47}$$

onde m_1 e m_2 são funções de m , a_0 , δ , e γ com:

$$m_1 = \frac{b}{a\sqrt{c}} = \frac{a_0}{4\pi m\gamma^2\delta^2(\delta)}, \quad m_2 = \frac{d}{c^{3/2}} = \frac{a_0(1+\gamma^2\delta^2)}{4\pi m\gamma^2\delta^2\mathcal{P}(\delta)}. \tag{2.48}$$

Para δ pequeno obtém-se $m_1 \sim m_2$ e (2.47) converge para a métrica de Schwarzschild de massa $M \sim a_0/2m\pi\gamma^4\delta^4$. Pode-se concluir que o espaço-tempo perto do ponto $r \sim 0$ é descrito por uma métrica de Schwarzschild efetiva de massa $M \sim a_0/m$ no limite de grandes distâncias $R \gg M$. Um observador na região assintótica $r = 0$ observa uma métrica de Schwarzschild de massa $M \sim a_0/m$.

Uma possível interpretação física de p_b^0 . Ao reintroduzir $p_b^0 \sim a_0/m$ no núcleo de massa M definido acima obtém-se $M \sim p_b^0$, então, pode-se interpretar p_b^0 como a massa do buraco negro visto a partir de um observador em $r \sim 0$. Em [31] os autores interpretam p_b^0 como sendo a massa de um segundo buraco negro. Nesta interpretação p_b^0 é visto como sendo a massa do buraco negro, mas do ponto de vista de um observador na região assintótica $r \sim 0$.

2.6 Alto-Dualidade

Nesta seção mostra-se explicitamente que a solução de buraco negro obtida em LQG é auto-dual no sentido da métrica ser invariante sob a transformação $r \rightarrow a_0/r$. Esta transformará as quantidades como é mostrado na tabela a seguir: (note que $R_+ > R_- \quad \forall \delta$)

Auto-Dualidade
$r \rightarrow R = \frac{a_0}{r}$
$r_+ \rightarrow R_- = \frac{a_0}{r_+} = \frac{a_0}{2m}$
$r_- \rightarrow R_+ = \frac{a_0}{r_-} = \frac{a_0}{2m\mathcal{P}(\delta)^2}$
$r_\star \rightarrow R_\star = \frac{a_0}{r_\star}$

Tabela 2.2: Propriedade auto-dualidade da métrica

porque $\mathcal{P}(\delta) < 1$). Ao aplicar esta transformação a métrica (2.32), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{64\pi^2(R - R_+)(R - R_-)(R + R_\star)^2}{64\pi^2R^4 + a_0^2} dt^2 + \frac{dR^2}{\frac{64\pi^2(R - R_+)(R - R_-)R^4}{(R + R_\star)^2(64\pi^2R^4 + a_0^2)}} \\
 & + \left(\frac{a_0^2}{64\pi^2R^2} + R^2 \right) d\Omega^{(2)}, \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

onde $r_\star = 2m\mathcal{P}(\delta)$. A transformação $r \rightarrow a_0/r$ é complementada com uma redefinição da coordenada temporal $t \rightarrow \mathcal{P}(\delta)(r_+^{3/2}r_-^{1/2}/a_0)t$. É evidente a partir da forma explícita (2.49) que a métrica é auto-dual.

Capítulo 3

Ondas Gravitacionais a partir de Buracos Negros

Perturbações gravitacionais ($s = 2$) de buracos negros são de um interesse especial por causa da contínua busca por ondas gravitacionais. Ao conseguir detectar ondas gravitacionais, é importante que se tenha algum entendimento da física envolvida na geração de tais ondas. Os buracos negros com seu campo gravitacional extremamente grande são considerados entre as mais promissoras fontes de ondas gravitacionais no universo [ver Thorne (1987,1994a) para uma discussão sobre os detectores de ondas gravitacionais].

Assim, tem-se desenvolvido muitos trabalhos dedicados a buracos negros gravitacionalmente perturbados.

Perturbações gravitacionais são fundamentalmente diferentes das escalares e eletromagnéticas. Considerando as duas últimas que correspondem aos campos de onda que envolvem em um fundo com geometria fixa, o caso gravitacional corresponde a mudanças de instantes na própria métrica.

Que existem ondas gravitacionais é uma previsão inequívoca da relatividade geral. Em contraste com as ondas eletromagnéticas que são geradas, principalmente, nos processos que envolvem átomos individuais, as ondas gravitacionais são criadas pelo movimento em massa. Provavelmente, ondas gravitacionais virão de processos que envolvem objetos massivos e compactos. Por isso, os buracos negros serão as fontes mais prováveis de ondas gravitacionais no Universo. A maioria dos processos dinâmicos que envolvem buracos negros devem dar origem a ondas gravitacionais características. Além disso, as ondas gravitacionais devem interagir fracamente com a matéria, para que possam escapar

da região perto do buraco negro quase não afetado por um possível disco de acreção. Assim, as ondas gravitacionais fornecem uma sonda ideal para o campo da relatividade geral.

3.1 Perturbações Lineares de Buracos Negros

As perturbações gravitacionais de fato, são o caso mais interessante a ser estudado, principalmente no que se refere à estabilidade de soluções das equações de Einstein. Ao contrário das perturbações escalares e eletromagnéticas, perturbações gravitacionais afetam levemente a métrica de fundo. Considere que a evolução de campos gravitacionais em um espaço-tempo esfericamente simétrico é governada pelas equações de Einstein. A perturbação causada por campos gravitacionais pode ser dividida em axiais e polares devido a simetria do problema. Essas nomenclaturas devem-se ao modo como elas se transformam sobre uma inversão espacial na coordenada azimutal ϕ e foi introduzida por Chandrasekhar em 1983 [32].

Perturbações axiais transformam-se como $(-1)^{l+1}$ e induzem um efeito de rotação no buraco negro. Já as perturbações polares, transformam-se como $(-1)^l$ e como independem do sinal da coordenada ϕ não induzem rotação.

Considera-se apenas perturbações de primeira ordem na métrica $\check{g}_{\mu\nu}$. A métrica esfericamente simétrica (Schwarzschild) é dada por:

$$ds^2 = \check{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^{(2)}, \quad (3.1)$$

e as equações de Einstein (3+1)-dimensões para o vácuo, ou seja, no exterior do buraco negro são:

$$\check{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\check{g}_{\mu\nu}\check{R} = \check{T}_{\mu\nu} \longrightarrow \check{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\check{g}_{\mu\nu}\check{R} = 0, \quad (3.2)$$

onde a notação ($\check{}$) indica que o objeto será calculado com respeito a métrica de fundo $\check{g}_{\mu\nu}$, ou seja, o objeto não é perturbado.

O escalar de Ricci será obtido ao contrair o tensor de Ricci ($\check{R}_{\mu\nu}$) com $\check{g}^{\mu\nu}$. Entretanto, ele também pode ser calculado ao contrair a equação (3.2) com a métrica. No caso

do espaço-tempo vazio, o escalar de Ricci será:

$$\begin{aligned}\check{g}^{\mu\nu}\check{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\check{g}^{\mu\nu}\check{g}_{\mu\nu}\check{R} &= 0, \\ \check{R} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}\check{R} &= 0, \\ \check{R} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Consequentemente a equação (3.2) reduz-se a:

$$\check{R}_{\mu\nu} = 0.\tag{3.4}$$

A equação acima será a equação a ser perturbada.

Para uma perturbação em primeira ordem a nova métrica pode ser escrita como:

$$g_{\mu\nu} = \check{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \check{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + \mathcal{O}(h^2),\tag{3.5}$$

onde $h_{\mu\nu} \ll \check{g}_{\mu\nu}$. Como essa perturbação é pequena os termos de segunda ordem $\mathcal{O}(h^2)$, podem ser desprezados por serem muito menores do que a perturbação $h_{\mu\nu}$. As derivadas covariantes das quantidades perturbadas serão efetuadas com os símbolos de Christoffel não perturbados $\check{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$. Entretanto, para calcular o tensor de Ricci perturbado será preciso utilizar os símbolos de Christoffel perturbados $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$.

Os símbolos de Christoffel perturbados são dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu;\nu} + g_{\beta\nu;\mu} - g_{\mu\nu;\beta}) \\ &= \check{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2),\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde o termo $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\check{g}^{\alpha\beta}(h_{\beta\mu;\nu} + h_{\beta\nu;\mu} - h_{\mu\nu;\beta}),\tag{3.7}$$

onde “;” representa a derivada covariante. O tensor de Ricci perturbado é dado pelas equações:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}.\tag{3.8}$$

Assim, substituindo a métrica perturbada $g_{\mu\nu}$ na equação (3.4) e identificando-a com o tensor de Ricci perturbado tem-se as equações de campo perturbadas para o vácuo como sendo:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \check{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} = 0, \\ \delta R_{\mu\nu} &= \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}, \\ \delta R_{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Essa é a equação que governa a propagação de campos gravitacionais no vácuo de um espaço-tempo esfericamente simétrico. Pode-se expressar as perturbações métricas em termos de uma parte puramente temporal (h_{00}), de uma parte puramente espacial (h_{ij}) e de uma parte mista (espaço-tempo) (h_{0i}):

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{i0} \\ h_{0i} & h_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Nas próximas seções deste capítulo, será utilizada a métrica de Schwarzschild para explicitar as equações que governam a propagação de campos gravitacionais neste espaço-tempo.

3.2 Perturbações gravitacionais axiais

Serão consideradas as partes da métrica perturbada que são de "paridade ímpar". Neste caso, é comum introduzir as funções desconhecidas $h_0(t, r)$, $h_1(t, r)$ e $h_2(t, r)$ de modo que as componentes de (3.10) podem ser escritas como:

$$h_{0i} = h_0(t, r) \begin{bmatrix} 0, -\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \sum_{l,m} \partial_\phi Y_{lm}, \text{sen}(\theta) \sum_{l,m} \partial_\theta Y_{lm} \end{bmatrix}, \quad h_{00} = 0, \quad (3.11)$$

$$h_{ij} = h_1(t, r)(\hat{e}_1)_{ij} + h_2(t, r)(\hat{e}_2)_{ij},$$

onde $(\hat{e}_{1,2})_{ij} = \sum_{l,m} [(\hat{e}_{1,2})_{ij}]$. Serão omitidos os índices (l, m) e o somatório para manter as expressões mais compactas. Os tensores harmônicos esféricos $(\hat{e}_{1,2})_{ij}$ em (3.11) têm expressões bastante complicadas, mas de uma forma mais simples podem ser expressos como:

$$(\hat{e}_1)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \partial_\phi Y_{lm} & \text{sen}(\theta) \partial_\theta Y_{lm} \\ -\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \partial_\phi Y_{lm} & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) \partial_\theta Y_{lm} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$(\hat{e}_2)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}(\theta)} (\partial_\theta^2 - \text{ctg}(\theta) \partial_\phi) Y_{lm} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \partial_\phi^2 - \cos(\theta) \partial_\phi - \text{sen}(\theta) \partial_\theta^2 \right] Y_{lm} \\ 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \partial_\phi^2 - \cos(\theta) \partial_\phi - \text{sen}(\theta) \partial_\theta^2 \right] Y_{lm} & - \left[\text{sen}(\theta) \partial_\theta^2 - \cos(\theta) \partial_\phi \right] Y_{lm} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

As equações de Einstein com as perturbações métricas (3.11)-(3.13) podem ser simplificadas, se for feita uma escolha adequada do calibre. Lembrando que, por causa da aproximação linear, qualquer transformação de coordenadas infinitesimal conduzirá a novas perturbações métricas que são determinadas após a especificação adequada das condições para o deslocamento do quadrivetor-vetor ξ^μ . Enquanto essas condições são totalmente arbitrárias, é conveniente escolher as que produzem uma simplificação das equações, e no caso das perturbações axiais, a escolha é feita usualmente tal que:

$$h_2(t, r) = 0. \quad (3.14)$$

Neste calibre, que é normalmente referido como o calibre de Regge-Wheeler [33], as perturbações métricas de paridade ímpares assumem a forma mais simples:

$$h_{\mu\nu}^{\text{axiais}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{sen}\theta \partial_\theta P_l(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (3.15)$$

onde $P_l(\cos(\theta))$ são os polinômio de Legendre de ordem l . Além de ser mais simples, as equações neste calibre são independentes de m , assim pode-se trabalhar com o caso mais simples onde $m = 0$. Como resultado, as equações de Einstein para a métrica perturbada (3.15) conduzem ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial r_*^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] Q = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* Q), \quad (3.17)$$

onde define-se,

$$Q \equiv \frac{h_1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (3.18)$$

Devido $r_* \rightarrow r$ quando $r \rightarrow \infty$ e $r_* \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 2M^+$, a coordenada tartaruga é particularmente adequada para estudar a propagação das perturbações próximo ao horizonte de evento do buraco negro, que neste sistema de equações, é localizado em $-\infty$ e portanto não deve apresentar singularidade de coordenadas.

Uma maneira conveniente de olhar a equação (3.16) conhecida como “equação de Regge-Wheeler”, é considerando-a como uma equação de onda em um potencial barreira

$V(r)$, onde:

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + p\right], \quad p = -\frac{6m}{r^3}. \quad (3.19)$$

O potencial (3.19) é algumas vezes referido como o “potencial de Regge-Wheeler” e tem um máximo justamente fora do horizonte de evento, em $r \sim 3,3m$ em coordenadas de Schwarzschild, como está mostrado na representação esquemática na figura 3.1.

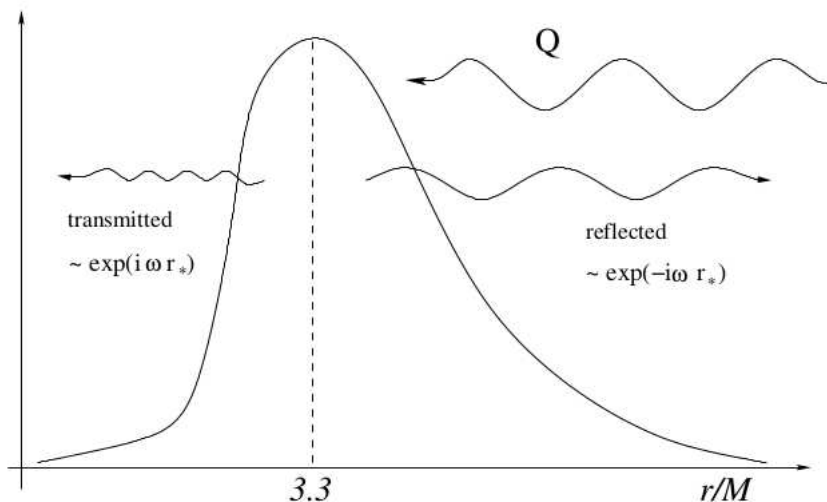


Figura 3.1: Representação esquemática do potencial de Regge-Wheeler $V(r)$ e do seu efeito sobre uma perturbação incidente que é parcialmente transmitida e parcialmente refletida.

Observa-se que a equação de Regge-Wheeler compartilha todas as propriedades bem conhecidas de uma equação de onda em um potencial de espalhamento e os numerosos resultados que têm sido encontrados para este tipo de equação (Eq. tipo-Schrödinger) pode também ser aplicado para a propagação das perturbações no espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild (ver [34] para uma discussão mais detalhada).

Como um exemplo, perturbações métricas atingindo o buraco negro a partir do infinito espacial podem ser consideradas como um pacote de onda que vai espalhar contra o potencial barreira $V(r)$. Como na mecânica quântica, nem todos os pacotes de ondas serão transmitidos através do potencial e algumas deles, dependendo das propriedades do próprio pacote, serão refletidos e alcançarão o infinito espacial novamente (ver figura 3.1). Isso é bem diferente do que acontece, por exemplo, quando uma massa esférica cai

radialmente para o buraco negro, estas diferenças radicais realçam a importância de uma análise perturbativa do espaço-tempo de buracos negros.

Outro aspecto interessante da equação de Regge-Wheeler é que ela mantém uma forma análoga também para as perturbações escalares e vetoriais, com a única diferença que aparece no potencial efetivo (3.19), onde $p = 2M/r^3$ para as perturbações escalares e $p = 0$ para as vetoriais [35].

3.3 Perturbações gravitacionais polares

Em seguida, serão consideradas perturbações da métrica que são de “paridade par”. A abordagem matemática é semelhante ao que foi feito para as perturbações de paridade ímpar e também neste caso, é útil introduzir um número de funções desconhecidas $h_0(t, r)$, $h_1(t, r)$, $H_0(t, r)$, $H_1(t, r)$, $H_2(t, r)$, $K(t, r)$ e $G(t, r)$ de modo que as funções da métrica perturbada podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} H_0 Y_{lm}, \\ h_{0i} &= [H_1 Y_{lm}, h_0 \partial_\theta Y_{lm}, h_0 \partial_\phi Y_{lm}], \\ h_{ij} &= h_1 (\hat{f}_1)_{ij} + \frac{H_2}{1 - \frac{2M}{r}} (\hat{f}_2)_{ij} + r^2 K (\hat{f}_3)_{ij} + r^2 G (\hat{f}_4)_{ij}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde os tensores harmônicos esféricos $(\hat{f}_{1-4})_{ij}$ têm as formas:

$$(\hat{f}_1)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_\theta Y_{lm} & \partial_\phi Y_{lm} \\ \partial_\theta Y_{lm} & 0 & 0 \\ \partial_\phi Y_{lm} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$(\hat{f}_2)_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$(\hat{f}_3)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{lm} & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}^2 \theta Y_{lm} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

e

$$(\hat{f}_4)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\theta^2 Y_{lm} & (\partial_\theta^2 - \text{ctg} \theta \partial_\phi) Y_{lm} \\ 0 & (\partial_\theta^2 - \text{ctg} \theta \partial_\phi) Y_{lm} & (\partial_\phi^2 - \text{sen} \theta \cos \theta \partial_\theta) Y_{lm} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Também para as perturbações de paridade par, a liberdade do calibre pode ser explorada e em particular um calibre pode ser escolhido em que:

$$G(r, t) = h_0(r, t) = h_1(r, t) = 0. \quad (3.25)$$

Como resultado desta escolha de calibre, as perturbações da métrica assumem a forma mais compacta:

$$h_{\mu\nu}^{\text{polar}} = \begin{bmatrix} H_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K \end{bmatrix} P_l(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (3.26)$$

Escrevendo agora as equações de Einstein para métrica perturbada (3.26) conduz-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial r_*^2} + \tilde{V}(r)Z = 0, \quad (3.27)$$

que é também conhecida como a “equação de Zerilli”. A forma explícita da “função de Zerilli” é um pouco complicada, mas pode ser expressada independentemente da escolha do calibre, como:

$$Z \equiv \frac{4re^{-4\lambda}k_2 + l(l+1)rk_1}{l(l+1) - 2 + 6M/r}, \quad (3.28)$$

onde $e^{-\lambda} \equiv 1 - 2M/r$ e as funções k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são introduzidas no lugar de G , h_1 , K , H_2 e são definidas através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} G &= k_3, \\ h_1 &= k_4, \\ K &= k_1 - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[r^2 \frac{\partial k_3}{\partial r} - 2k_4 \right], \\ H_2 &= 2e^{-2\lambda}k_2 + r \frac{\partial k_1}{\partial r} + \left(1 + r \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) k_1 - e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 e^{-\lambda} \frac{\partial k_3}{\partial r} - 2e^{-\lambda} k_4 \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Note que como para as perturbações axiais, as equações de Einstein podem ser redefinidas na forma de uma equação de onda em um potencial de barreira $\tilde{V}(r)$, definido como:

$$\tilde{V} \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{2q(q+1)r^3 + 6q^2Mr^2 + 18qM^2r + 18M^3}{r^3(qr + 3M)^2} \right], \quad (3.30)$$

onde

$$q \equiv \frac{(l-1)(l+2)}{2}. \quad (3.31)$$

Curiosamente, a equação de Regge-Wheeler e Zerilli (3.16) e (3.27) estão intimamente relacionadas, sendo possível transformar a primeira (modos axial) na segunda (modos polar) através dos operadores diferenciais adequados [34].

3.4 Modos quasinormais

Um dos aspectos mais interessantes da detecção de ondas gravitacionais será a conexão destas com a existência de buracos negros [36]. Apesar de existirem várias formas indiretas de identificar buracos negros no universo, ondas gravitacionais emitidas por eles carregam uma “impressão digital” que conduzirá à uma identificação direta da sua existência. A radiação gravitacional de buracos negros oscilantes apresenta certas frequências características (modos quasinormais), que são independentes dos processos que dão origem a essas oscilações. Os modos quasinormais são diretamente ligados aos parâmetros do buraco negro (massa, carga e momento angular). Para estudar o espectro quasinormal de buraco negro é conveniente fazer a transformação de Fourier da função:

$$Q(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \Phi_{\omega_n}(r). \quad (3.32)$$

Substituindo a equação (3.32) em (3.16), obtém-se:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega_n^2 - V_l(r) \right] \Phi(r) = 0, \quad (3.33)$$

logo, a procura dos modos quasinormais reduziu-se ao problema de obter as frequências da equação (3.33), onde as soluções aceitáveis devem ter $\Im[\omega_n < 0]$. Há vários métodos desenvolvidos para avaliar os modos quasinormais, entre eles estão:

1) A aproximação WKB; 2) Utilização do potencial do buraco negro invertido; 3) Transformação de Laplace combinada com a continuação analítica; 4) Integração numérica usando coordenadas complexas.

Devido a simplicidade do método WKB desenvolvido por Schutz e Will e, depois modificado por Iyer e Will [37], pode-se obter as frequências pela seguinte relação:

$$\omega^2 = [V_0 + \Delta] - i \left(n + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} (1 + \Omega), \quad (3.34)$$

onde:

$$\Delta = \frac{1}{8} \left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right] \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2),$$

$$\Omega = \frac{1}{-2V_0''} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left(\frac{(V_0''')^2 (V_0^{(4)})}{(V_0'')^3} \right) (51 + 100\alpha^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (65 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left(\frac{V_0''' V_0^{(5)}}{(V_0'')^2} \right) (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\alpha^2) \right],$$

com $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

Agora, usando a relação acima para as frequências e o potencial de Regge-Wheller (3.19), pode-se calcular os modos quasinormais para as perturbações gravitacionais axiais, relatados na tabela (3.1).

n	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
0	0,3731077743 - 0,08899009911i	0,5992476055 - 0,09261516057i	0,8090899525 - 0,09410349710i
1	0,3456384197 - 0,2744383876i	0,5822144716 - 0,2811157931i	0,79664328299 - 0,2841812650i
2	0,3022607897 - 0,4706309237i	0,5528894322 - 0,4763235963i	0,7734757541 - 0,4787150773i
3	0,2466397843 - 0,6725958069i	0,5152927928 - 0,6770832114i	0,7430526525 - 0,6780155556i

Tabela 3.1: Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos de radiação mais baixa ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional do buraco negro de Schwarzschild.

Capítulo 4

Ondas Gravitacionais a partir de Buraco Negro Auto-Dual

No capítulo anterior estudou-se as perturbações gravitacionais no espaço-tempo de Schwarzschild. Obtendo-se duas equações de onda, Regge-Wheeler e Zerilli. Em seguida fez-se os cálculos dos modos quasinormais a partir da equação de Regge-Wheeler, usando o método WKB. Os quais são importantes porque são as frequências características do buraco negro e que trazem em si informação sobre a geometria dos mesmos.

Neste capítulo fez-se um estudo sobre as perturbações axiais, obtendo a equação de Regge-Wheeler para os buracos negros auto-duais. Devido a ausência da singularidade no interior do buraco negro auto-dual, espera-se uma diferença no comportamento do potencial com relação ao potencial clássico (3.19). Em seguida foram calculados os modos quasinormais do buraco negro auto-dual para os casos em que este possui massa maior e menor que a massa de Planck. Espera-se que os modos quasinormais revelem alguma diferença em relação ao caso clássico, devido efeitos quânticos da gravidade e, através dos mesmos será investigada a estabilidade desse tipo de buraco negro.

4.1 Perturbações gravitacionais axiais

Para o cálculo das perturbações gravitacionais axiais em uma métrica dada pela equação (2.32), tomou-se a área mínima como sendo $A_{\text{mín}} = 8\pi a_0$. Utilizou-se o método desenvolvido por Regge e Wheeler [38]:

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2 + H(r)d\Omega^{(2)}, \quad (4.1)$$

com as seguintes componentes:

$$G(r) \equiv g_{tt}(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r + r_*)^2}{r^4 + a_0^2}, \quad F(r) \equiv g_{rr}(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)r^4}{(r + r_*)^2(r^4 + a_0^2)},$$

$$H(r) \equiv g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} / \text{sen}^2\theta = \left(\frac{a_0^2}{r^2} + r^2 \right),$$

onde $r_+ = 2m$, $r_- = 2m\mathcal{P}(\delta_b)^2$ e $r_* = 2m\mathcal{P}(\delta_b)$.

Devido a simetria do problema ser esférica, pode-se decompor o tensor $h_{\mu\nu}$ em uma parte angular, em termos de harmônicos esféricos tensoriais e uma parte dependente das coordenadas r e t . Utilizando o resultado (3.15) pode-se ver que a componente axial da perturbação gravitacional para a métrica em estudo é dada por:

$$h_{\mu\nu}^{axial} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(t, r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(t, r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0(t, r) & h_1(t, r) & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{sen}\theta \partial_\theta P_l(\cos\theta) e^{im\phi}. \quad (4.2)$$

Substituindo o tensor $h_{\mu\nu}^{axial}$ na equação de campo perturbada:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^\alpha - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^\alpha = 0, \quad (4.3)$$

obtém-se as seguintes equações acopladas:

$$\delta R_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[-G^{-1} \frac{\partial h_0}{\partial t} + F \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{1}{2} F' h_1 + \frac{1}{2} \frac{G'}{G} F h_1 \right] \times \left\{ \cos\theta \frac{\partial P_l(\cos\theta)}{\partial\theta} - \text{sen}\theta \frac{\partial^2 P_l(\cos\theta)}{\partial\theta^2} \right\} = 0, \quad (4.4)$$

$$\delta R_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[G^{-1} \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial r} - \frac{H'}{H} \frac{\partial h_0}{\partial t} \right) + \left(-\frac{l(l+1)}{H} h_1 - G^{-1} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} + \frac{1}{2} F' \frac{H'}{H} h_1 + F \frac{H''}{H} h_1 + \frac{1}{2} \frac{G'}{G} F \frac{H'}{H} h_1 \right) \right] \times \left\{ \text{sen}\theta \frac{\partial_l(\cos\theta)}{\partial\theta} \right\} = 0, \quad (4.5)$$

Essas equações podem ser simplificadas considerando as propriedades dos Polinômios de Legendre $P_l(\cos\theta)$, ou seja, analisando os índices de multipolos l .

Para $l = 0$ tem-se que $P_0 = 1$ e por consequência, a parte angular das equações acima são identicamente nulas. Para $l = 1$ tem-se que $P_1(\cos\theta) = -\text{sen}\theta$. Nesse caso a equação $\delta R_{\theta\phi}$ é identicamente nula. Como esses índices de multipolos $l = 0, 1$ são menores que o valor do spin da perturbação ($s = 2$), eles não são modos dinâmicos, ou seja, eles não evoluem no tempo. Correspondendo a quantidades conservadas.

Uma perturbação gravitacional com índice $l = 0$ descreve uma mudança na massa do buraco negro. Já uma Perturbação com índice $l = 1$ corresponde a um deslocamento além de gerar um pequeno incremento de momento angular, fazendo o buraco negro girar.

Interessa-se nos índices de multipolos, que são capazes de se propagar por um intervalo de tempo suficientemente grande de modo que se possa detectar tal onda. Portanto, apenas multipolos com $l \geq 2$ são relevantes. Para $l \geq 2$ tem-se $P_{l \geq 2} \neq 0$. Desta forma os fatores entre colchetes nas equações devem se anular para que elas sejam satisfeitas, resultando nas seguintes equações radiais:

$$-G^{-1} \frac{\partial h_0}{\partial t} + F \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{1}{2} F' h_1 + \frac{1}{2} \frac{G'}{G} F h_1 = 0, \quad (4.6)$$

$$-\frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial r} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} + \frac{H'}{H} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \left[\frac{G}{H} l(l+1) - \frac{1}{2} G F' \frac{H'}{H} - \frac{G F H''}{H} - \frac{1}{2} \frac{G' F H'}{H} \right] h_1 = 0. \quad (4.7)$$

A partir da equação (4.6), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial t} &= (GF)^{1/2} \left\{ (GF)^{1/2} \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{1}{2} (GF)^{-1/2} G F' h_1 + \frac{1}{2} (GF)^{-1/2} G' F h_1 \right\} \\ &= (GF)^{1/2} \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r} = \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r_*}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Onde definiu-se a função $Q(t, r)$, como:

$$Q(t, r) \equiv (GF)^{1/2} h_1(t, r), \quad (4.9)$$

e também a coordenada tartaruga da seguinte forma:

$$\frac{\partial r}{\partial r_*} = (GF)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Integrando essa última equação, obtém-se a coordenada tartaruga como sendo:

$$\begin{aligned} r_* &= r - \frac{a_0^2}{r r_- r_+} + \frac{a_0^2 (r_- + r_+)}{r_-^2 r_+^2} \log(r) + \frac{(a_0^2 + r_-^4)}{r_-^2 (r_- - r_+)} \log(r - r_-) \\ &+ \frac{(a_0^2 + r_+^4)}{r_+^2 (r_+ - r_-)} \log(r - r_+). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, substituindo (4.9), (4.10) em (4.7), tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr} \frac{dQ}{dr_*} + (GF)^{-1/2} \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{H'}{H} \frac{dQ}{dr_*} + \left[\frac{G}{H} l(l+1) - \frac{1}{2} G F' \frac{H'}{H} - G F \frac{H''}{H} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} G' F \frac{H'}{H} \right] (GF)^{-1/2} Q = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Fazendo uma nova definição da seguinte forma:

$$\Psi(t, r_*(r)) \equiv \frac{Q(t, r)}{H^{1/2}}, \quad (4.13)$$

substituindo (4.13) em (4.12) obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr} \frac{d}{dr_*} (H^{1/2} \Psi) + \left(\frac{GF}{H} \right)^{-1/2} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{H'}{H} \frac{d}{dr_*} (H^{1/2} \Psi) + \left[\frac{G}{H} l(l+1) - \frac{1}{2} GF' \frac{H'}{H} \right. \\ \left. - GF \frac{H''}{H} - \frac{1}{2} G' F \frac{H'}{H} \right] \left(\frac{GF}{H} \right)^{-1/2} \Psi = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

fazendo algumas manipulações matemáticas, obtém-se uma equação tipo-Schrödinger dada por:

$$-\frac{d^2 \Psi}{dr_*^2} + \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + V_{\text{ef}}(r) \Psi = 0, \quad (4.15)$$

com o potencial efetivo dado por:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}(r) &= \frac{G}{H} l(l+1) - \frac{1}{2} GF' \frac{H'}{H} - GF \frac{H''}{H} - \frac{1}{2} G' F \frac{H'}{H} - \frac{1}{4} \frac{H'}{H} (G' F + F' G) \\ &+ \frac{1}{4} GF \frac{H'^2}{H^2} - \frac{1}{2} GF \frac{H''}{H} + \frac{1}{2} \frac{H'}{H} GF \frac{H'}{H}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

ou explicitando-o:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}(r) &= \frac{1}{(r^4 + a_0^2)^4} [(-3r_- r a_0^4 + 30r_- r^5 a_0^2 + 6r_+ r_- r^8 - 3r_+ r a_0^4 + 30r_+ r^5 a_0^2 \\ &- 30r_+ r_- a_0^2 r^4 + 2r^9 r_* l^2 + 2r^9 r_* l + r^8 r_*^2 l + r^8 r_*^2 l^2 + 2r^6 l a_0^2 + 2r^6 l^2 a_0^2 \\ &+ r^2 l a_0^4 + r^2 l^2 a_0^4 + 4r^5 r_* l^2 a_0^2 + 4r^5 r_* l a_0^2 + 2r^4 r_*^2 l a_0^2 + 2r^4 r_*^2 l^2 a_0^2 \\ &+ 2r r_* l a_0^4 + 2r r_* l^2 a_0^4 - 30r^6 a_0^2 + 6r^2 a_0^4 - 3r_- r^9 - 3r_+ r^9 + r^{10} l + r^{10} l^2 \\ &+ r_*^2 l^2 a_0^4 + r_*^2 l a_0^4) r^2 (r - r_-)(r - r_+)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

O comportamento do $V_{\text{ef}}(r)$ é mostrado nas figuras logo abaixo, e em seguida as tabelas com os modos quasinormais.

Para determinar os modos quasinormais para buraco negro auto-dual, deve-se impor as mesmas condições impostas para o caso de Schwarzschild, tal que, no horizonte de evento ($r_* \rightarrow -\infty$) e no infinito espacial ($r_* \rightarrow \infty$). Supondo que $\Psi(t, r_*(r))$ tem um comportamento harmônico com t , logo a equação de onda (4.15) toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2 \Psi}{dr_*^2} + (\omega_n^2 - V_{\text{ef}}(r)) \Psi = 0. \quad (4.18)$$

No espaço-tempo de interesse $V_{\text{ef}}(r) \rightarrow 0$ com as condições impostas acima, e neste limite, as soluções para equação de onda (4.15) comportam-se como $\Psi \sim e^{-i\omega(t \pm r_*)}$. Finalmente, usando a relação (3.34), constrói-se as tabelas (4.1) e (4.2) para os modos quasinormais.

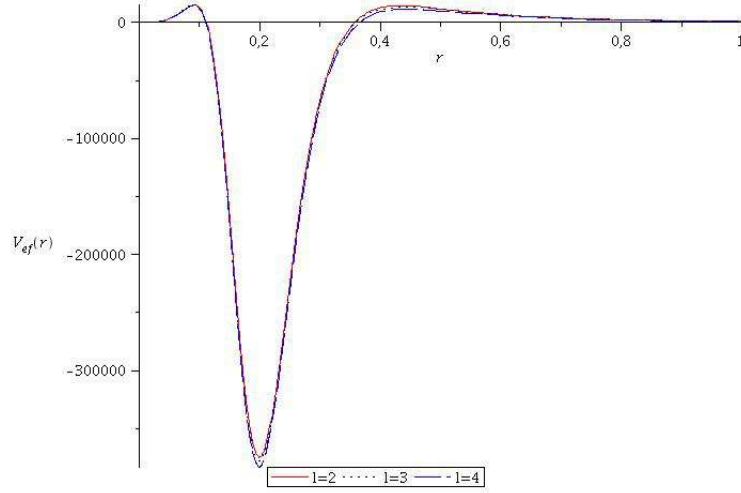


Figura 4.1: Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada r , ($m = 10m_P$)

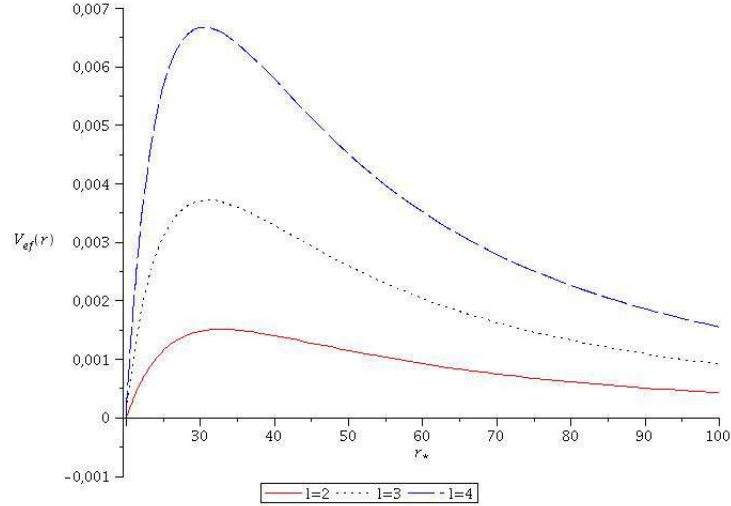


Figura 4.2: Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada tartaruga r_* , ($m = 10m_P$)

n	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
0	$0.03731110609 - 0.008898978785i$	$0.05992513001 - 0.00926084783i$	$0.08090959146 - 0.009410389457i$
1	$0.03456400676 - 0.02744367459i$	$0.05821995122 - 0.02810748883i$	$0.07964392578 - 0.02841830748i$
2	$0.03022578040 - 0.04706278323i$	$0.05527996758 - 0.04762137384i$	$0.07734840673 - 0.04787196471i$
3	$0.02466295102 - 0.06725922611i$	$0.05150475551 - 0.06768927983i$	$0.07430653271 - 0.06780239915i$

Tabela 4.1: Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional axial do buraco negro auto-dual com massa maior que a massa de Planck ($m = 10m_p$).

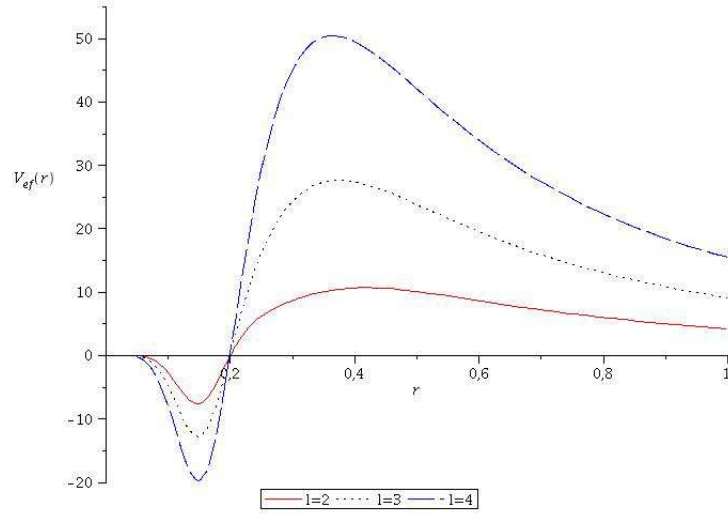


Figura 4.3: Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada r , ($m = 10^{-1}m_P$)

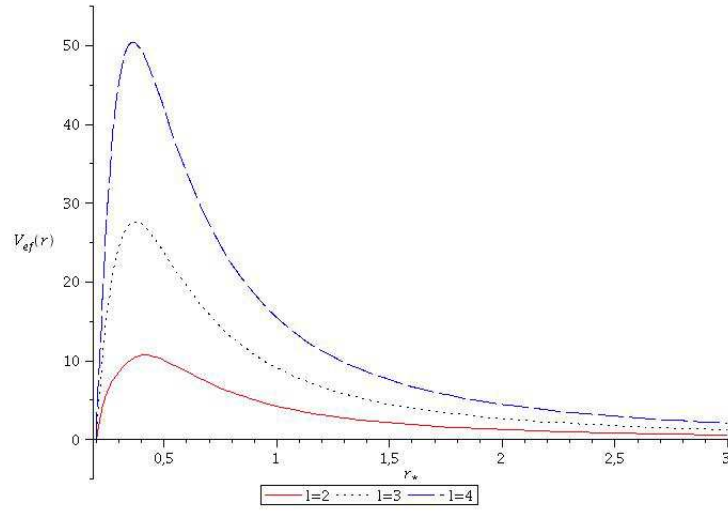


Figura 4.4: Comportamento do potencial auto-dual com a coordenada tartaruga r_* , ($m = 10^{-1}m_P$)

\mathbf{n}	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
0	$2.926736009 - 0.7731439315i$	$5.095544976 - 0.7955536357i$	$6.992438414 - 0.8620694389i$
1	$2.102184258 - 2.761026648i$	$4.680933829 - 2.373385721i$	$6.760309078 - 2.597556316i$
2	$1.229006152 - 5.201806307i$	$3.758182997 - 3.994088165i$	$6.297611811 - 4.370187296i$
3	$0.2680130946 - 7.690027867i$	$2.327580868 - 5.865740138i$	$5.614946316 - 6.209339608i$

Tabela 4.2: Os primeiros quatro modos quasinormais para os três multipolos ($l \geq 2$) de uma perturbação gravitacional axial do buraco negro auto-dual com massa menor que a massa de Planck ($m = 10^{-1}m_p$).

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação mostrou-se o estudo de ondas gravitacionais a partir de buracos negros auto-duais. A partir de perturbações gravitacionais axiais no espaço-tempo do buraco negro auto-dual, encontrou-se uma equação de Regge-Wheller. Supôs-se um comportamento harmônico na coordenada t , e usando o método WKB, encontrou-se os modos quasinormais associados a equação de onda.

Esses modos quasinormais por sua vez contém informação da massa do buraco negro auto-dual. Analisando os modos quasinormais encontrados, pode-se concluir que o buraco negro auto-dual, o qual pode ter massa menor que a massa de Planck, é estável. Devido a parte imaginária dos modos quasinormais serem negativas, portanto, tal buraco negro pode existir no universo.

Um outro ponto importante, é quando o buraco negro auto-dual tem massa maior que a massa de Planck, os resultados convergem para os resultados do caso de Schwarzschild, ou seja, as correções quânticas são negligenciadas, isso se torna claro quando comparamos os resultados da tabela 3.1 com os da tabela 4.1.

Nossos resultados se juntam a um grande número de pesquisas na área de ondas gravitacionais a partir de buracos negros, sendo que a maioria destas pesquisas concentram-se no caso do buraco negro de Schwarzschild.

Como trabalho futuro, deve-se considerar perturbações gravitacionais polares no espaço-tempo do buraco negro auto-dual.

Referências Bibliográficas

- [1] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, Alexander. Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 83, n. 3, p. 793, 2011.
- [2] VISHVESHWARA, C. V. Stability of the Schwarzschild metric. **Physical Review D**, v. 1, n. 10, p. 2870, 1970.
- [3] CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan; DETWEILER, Steven. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. In: **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. The Royal Society, 1975. p. 441-452.
- [4] KOKKOTAS, Kostas D.; SCHMIDT, Bernd G. Quasi-normal modes of stars and black holes. **Living Rev. Rel**, v. 2, n. 2, p. 262, 1999.
- [5] NOLLERT, Hans-Peter. Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars. **Classical and Quantum Gravity**, v. 16, n. 12, p. R159, 1999.
- [6] SCHUTZ, Bernard F.; WILL, Clifford M. Black hole normal modes-A semianalytic approach. **The Astrophysical Journal**, v. 291, p. L33-L36, 1985.
- [7] IYER, Sai; WILL, Clifford M. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. **Physical Review D**, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987.
- [8] IYER, Sai; WILL, Clifford M. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. **Physical Review D**, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987.

- [9] ASHTEKAR, Abhay; LEWANDOWSKI, Jerzy. Background independent quantum gravity: a status report. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 15, p. R53, 2004.
- [10] CONRADY, Florian; FREIDEL, Laurent. Quantum geometry from phase space reduction. **Journal of Mathematical Physics**, v. 50, n. 12, p. 123510, 2009.
- [11] MODESTO, Leonardo. Fractal structure of loop quantum gravity. **arXiv preprint arXiv:0812.2214**, 2008.
- [12] BOJOWALD, Martin. Absence of a singularity in loop quantum cosmology. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 23, p. 5227, 2001.
- [13] ASHTEKAR, Abhay et al. Mathematical structure of loop quantum cosmology. **Advances in Theoretical and Mathematical Physics**, v. 7, n. 2, p. 233-268, 2003.
- [14] BOMBELLI, Luca; TORRENCE, R. J. Perfect fluids and Ashtekar variables, with applications to Kantowski-Sachs models. **Classical and Quantum Gravity**, v. 7, n. 10, p. 1747, 1990.
- [15] KUCHAR, Karel V. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. **Physical Review D**, v. 50, n. 6, p. 3961, 1994.
- [16] MODESTO, Leonardo. Disappearance of the black hole singularity in loop quantum gravity. **Physical Review D**, v. 70, n. 12, p. 124009, 2004.
- [17] ASHTEKAR, Abhay; BOJOWALD, Martin. Quantum geometry and the Schwarzschild singularity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 23, n. 2, p. 391, 2006.
- [18] GAMBINI, Rodolfo; PULLIN, Jorge. Black holes in loop quantum gravity: the complete space-time. **Physical review letters**, v. 101, n. 16, p. 161301, 2008.
- [19] HOSSENFELDER, Sabine; SMOLIN, Lee. Conservative solutions to the black hole information problem. **Physical Review D**, v. 81, n. 6, p. 064009, 2010.
- [20] MODESTO, Leonardo. Black hole interior from loop quantum gravity. **Advances in High Energy Physics**, v. 2008, 2009.

- [21] CHIOU, Dah-Wei. Phenomenological loop quantum geometry of the Schwarzschild black hole. **Physical Review D**, v. 78, n. 6, p. 064040, 2008.
- [22] MODESTO, Leonardo. Disappearance of the black hole singularity in loop quantum gravity. **Physical Review D**, v. 70, n. 12, p. 124009, 2004.
- [23] MODESTO, Leonardo. Loop quantum black hole. **Classical and Quantum Gravity**, v. 23, n. 18, p. 5587, 2006.
- [24] ASHTEKAR, Abhay. New Hamiltonian formulation of general relativity. **Physical Review D**, v. 36, n. 6, p. 1587, 1987.
- [25] CONRADY, Florian; FREIDEL, Laurent. Path integral representation of spin foam models of 4d gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 25, n. 24, p. 245010, 2008.
- [26] CONRADY, Florian; FREIDEL, Laurent. Semiclassical limit of 4-dimensional spin foam models. **Physical Review D**, v. 78, n. 10, p. 104023, 2008.
- [27] MODESTO, Leonardo. Black hole interior from loop quantum gravity. **Advances in High Energy Physics**, v. 2008, 2009.
- [28] KUCHAR, Karel V. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. **Physical Review D**, v. 50, n. 6, p. 3961, 1994.
- [29] ASHTEKAR, Abhay; PAWLOWSKI, Tomasz; SINGH, Parampreet. Quantum nature of the big bang. **Physical review letters**, v. 96, n. 14, p. 141301, 2006.
- [30] FABBRI, Alessandro; NAVARRO-SALAS, José. **Modeling black hole evaporation**. Imperial College Press, 2005.
- [31] BÖHMER, Christian G.; VANDERSLOOT, Kevin. Loop quantum dynamics of the Schwarzschild interior. **Physical Review D**, v. 76, n. 10, p. 104030, 2007.
- [32] CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. **The mathematical theory of black holes**. Oxford University Press, 1998.
- [33] REGGE, Tullio; WHEELER, John A. Stability of a Schwarzschild singularity. **Physical Review**, v. 108, n. 4, p. 1063, 1957.

- [34] CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. **The mathematical theory of black holes**. Oxford University Press, 1998.
- [35] KOKKOTAS, Kostas D.; SCHMIDT, Bernd G. Quasi-normal modes of stars and black holes. **Living Rev. Rel**, v. 2, n. 2, p. 262, 1999.
- [36] THOME, Kip S. Probing black holes and relativistic stars with gravitational waves. **Black holes and relativistic stars**, p. 41-78, 1999.
- [37] IYER, Sai; WILL, Clifford M. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. **Physical Review D**, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987.
- [38] REGGE, Tullio; WHEELER, John A. Stability of a Schwarzschild singularity. **Physical Review**, v. 108, n. 4, p. 1063, 1957.