



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DESCRIÇÃO MICROSCÓPICA DE ENTROPIA DE  
ESPAÇOS TIPO KERR-de SITTER TRIDIMENSIONAIS**

**Neymar José Nepomuceno Cavalcante**

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DESCRIÇÃO MICROSCÓPICA DE ENTROPIA DE  
ESPAÇOS TIPO KERR-de SITTER TRIDIMENSIONAIS**

**Neymar José Nepomuceno Cavalcante**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

C376d Cavalcante, Neymar José Nepomuceno.  
Descrição microscópica de entropia de espaços tipo Kerr-de Sitter tridimensionais / Neymar José Nepomuceno Cavalcante. – Campina Grande, 2016.  
69f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.  
"Orientação: Prof. Francisco de Assis Brito".  
Referências.

1. Relatividade (Física). 2. Teoria de Cordas. 3. Kerr-de Sitter tridimensionais - Entropia. 4. Fórmula de Cardy. I. Brito, Francisco de Assis. II. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande (PB). III. Título.

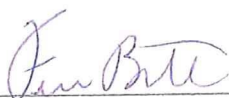
CDU 530.12 (043)

**NEYMAR JOSÉ NEPOMUCENO CAVALCANTE**

**DESCRIÇÃO MICROSCÓPICA DE ENTROPIA DE ESPAÇOS TIPO KERR-de SITTER  
TRIDIMENSIONAIS**

Dissertação aprovada em 30/03/2012

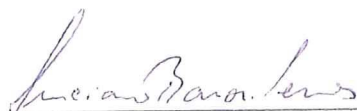
**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

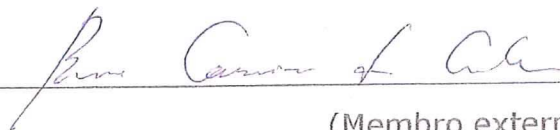
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro interno)

Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro externo)

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha  
Departamento de Física - UFPE

*Se hoje aqui chego,  
Foi porque nunca estive Só!  
A meus Pais,  
Sr. Luiz Nepomuceno Neto  
Sra. Margarida M<sup>a</sup> C. Nepomuceno  
Dedico este trabalho!*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cada oportunidade singular da vida.

Aos meus pais, por acreditar nos meus sonhos e abdicar dos próprios em favor dos meus.

Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, sugestão, estímulo, paciência e competência com que conduziu este trabalho.

Aos Profs. Fábio Dahia, Rômulo Rodrigues da Silva e Adriano Batista pela colaboração que recebi durante a fase de preparação desta dissertação.

Aos professores constituintes da Banca Examinadora que contribuíram para que fosse alcançado o objetivo do trabalho.

Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

Aos meus familiares e a todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho pelo apoio, confiança e incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

*A dúvida é o princípio da sabedoria.*  
*(Aristóteles)*

*A persistência é o caminho do êxito.*  
*(Charles Chaplin)*

## RESUMO

No presente estudo vamos essencialmente considerar o emprego da teoria de cordas e teoria de campos conforme na descrição microscópica de buracos negros ou mais precisamente de espaços tipo Kerr-de Sitter em três dimensões. Esses espaços são assintoticamente de Sitter ou anti-de-Sitter tridimensional ( $dS_3/AdS_3$ ), os quais possuem descrição equivalente em uma teoria de campos conforme bidimensional ( $CFT_2$ ). Na última parte deste trabalho, consideramos a imersão dessas soluções em quatro dimensões através de uma 2-brana. Notamos que no regime em que a gravidade em quatro dimensões é dominante, conseguimos estabelecer uma correspondência entre a entropia desses espaços tridimensionais e a entropia de um buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões.

**Palavra-chave:** Teoria de Cordas, Correspondência dS/CFT, Fórmula de Cardy, Entropia de Bekenstein-Hawking.



## ABSTRACT

In the present study we mainly consider the application of string theory and conformal field theory in order to make a microscopic description of black holes or more precisely of Kerr-de Sitter spaces in three dimensions. Those spaces are asymptotically de Sitter or anti-de-Sitter three dimensional spaces ( $dS_3/AdS_3$ ), which have equivalent description in a two dimensional conformal field theory ( $CFT_2$ ). In the last part of the of this study, we consider the embedding of those solutions in four dimensions through a 2-brane. We note that in the regime in what the four-dimensional gravity is dominant, we can establish a correspondence between the entropy of those three dimensional spaces and the entropy of a Schwarzschild black hole in four dimensions.

**Keywords:** String Theory, Correspondence dS/CFT, Cardy's formula, Bekenstein-Hawking Entropy.

# Conteúdo

|  |            |
|--|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>iii</b> |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2 Teoria de Cordas</b>  | <b>5</b>   |
| 2.1 Teoria de cordas como uma teoria de unificação da Física . . . . .           | 5          |
| 2.2 Partícula pontual relativística . . . . .                                    | 6          |
| 2.3 Ação de Nambu-Goto . . . . .   | 10         |
| 2.4 Equações de Movimento . . . . .  | 13         |
| 2.5 Condições de Fronteira . . . . .   | 15         |
| 2.6 Soluções para Equações de Movimento . . . . .                                | 17         |
| 2.7 Modos de Expansão da Corda . . . . .   | 18         |
| 2.7.1 Corda Fechada . . . . .  | 18         |
| 2.7.2 Corda Aberta . . . . .   | 19         |
| 2.7.3 Tensor Energia-Momento . . . . .   | 19         |
| <b>3 Teoria de Campo Conforme</b>  | <b>21</b>  |
| 3.1 Grupo conforme . . . . .   | 21         |
| 3.1.1 Coordenadas conforme . . . . .   | 22         |
| 3.1.2 Transformação conforme . . . . .   | 23         |
| 3.1.3 Invariância conforme em $d$ dimensões . . . . .                            | 24         |
| 3.1.4 Grupo conforme em duas dimensões . . . . .                                 | 26         |
| 3.1.5 Transformações conformes . . . . .   | 26         |
| 3.2 Tensor energia-momento . . . . .   | 27         |
| 3.3 A Álgebra conforme . . . . .   | 29         |
| 3.4 Transformação do tensor energia-momento . . . . .                            | 34         |
| <b>4 Descrição Microscópica de Entropia de Buracos Negros e Defeitos Cônicos</b> | <b>36</b>  |
| 4.1 Espaços de Sitter e anti-de Sitter . . . . .                                 | 37         |
| 4.2 Tensor de tensão para espaço de Sitter . . . . .                             | 38         |
| 4.3 Ação finita . . . . .  | 41         |
| 4.3.1 Cálculo do tensor de tensão . . . . .                                      | 43         |
| 4.4 Cargas conservadas . . . . .   | 47         |
| 4.5 Espaço-tempo cosmológico tridimensional . . . . .                            | 47         |
| 4.6 Massa e momento angular no espaço-tempo de Kerr-de Sitter . . . . .          | 49         |
| 4.7 Simetria conforme assintótica . . . . .                                      | 50         |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.8      | Fórmula de Cardy e Entropia de Bekenstein-Hawking . . . . .                                   | 55        |
| <b>5</b> | <b>Entropia de Defeitos Cônicos Schwarzschild-dS<sub>3</sub> em <math>\mathbb{M}_4</math></b> | <b>57</b> |
| 5.1      | O cenário de DGP quadridimensional . . . . .  | 57        |
| 5.2      | Soluções circularmente simétricas induzidas na 2-brana . . . . .                              | 59        |
| 5.3      | Entropia microscópica da solução Schwarzschild-dS <sub>3</sub> e uma correspondência          | 62        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>64</b> |
| <b>A</b> | <b>Participação em encontros e trabalho em preparação</b>                                     | <b>65</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>   | <b>66</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | A trajetória clássica de uma partícula minimiza o comprimento da linha mundo. . . . .   | 7  |
| 2.2 | A folha mundo de uma corda aberta se propagando livremente é uma superfície retangular, enquanto que para uma corda fechada é um cilindro.                            | 10 |
| 2.3 | A função $X^\mu(\tau, \sigma)$ descreve a imersão da folha-mundo no espaço-tempo.   | 11 |
| 2.4 | Condições de contorno de Dirichlet (esquerda) e Neumann (direita). As linhas tracejadas representam as posições da corda em tempos diferentes.                        | 16 |
| 3.1 | A folha-mundo da corda como uma região do plano complexo (a) na variável original $\tau$ e $\sigma$ , (b) na variável $z = \exp(\tau + i\sigma)$ . . . . .            | 22 |
| 3.2 | Contorno de integração em $z$ na Eq. (3.3.38). Uma vez que o integrando é ordenado radialmente, a integral em $z$ é realizada em uma pequena região circular. . . . . | 30 |

# Capítulo 1

## Introdução

O interesse por gravidade em 2+1 dimensões foi renovado recentemente [1]. Isto se deve à dificuldade de compreensão da gravidade em quatro dimensões, principalmente no seu aspecto quântico, como também, o fato da gravidade em dimensões menores fornecer um bom cenário para a investigação de questões importantes, no sentido em que lança novas perspectivas para a gravidade em dimensões maiores. Além disso, aspectos holográficos da gravidade em três dimensões estão relacionados com a correspondência  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  [2, 3].

Essa correspondência foi originalmente formulada em teoria de cordas, a qual trata da relação de uma teoria de cordas em um espaço-tempo anti-de Sitter em cinco dimensões ( $\text{AdS}_5$ ) e uma teoria de campos conforme em quatro dimensões ( $\text{CFT}_4$ ). Porém mesmo antes dessa correspondência ser formulada vários estudos em buracos negros apontavam para uma correspondência holográfica. Esses estudos culminaram para a descrição microscópica da entropia de soluções de buracos negros em teoria de cordas [4].

A Teoria das Cordas foi introduzida na década de 1960. Seu objetivo inicial era descrever forças nucleares [5, 6, 7]. Nesse sentido, estas seriam vistas como objetos unidimensionais que ligariam os constituintes da matéria hadrônica. Sua importância, entretanto, só foi reconhecida quando foi identificado em seu espectro um estado as-

sociado ao gráviton, a partícula mensageira das forças gravitacionais.

Havia ainda a necessidade de incorporar uma descrição fermiônica na teoria que originalmente descrevia apenas bósons. Isto foi resolvido nos anos 1970 com a incorporação da supersimetria à teoria de cordas de maneira tal que o espectro de cordas abertas e fechadas passou a apresentar bósons e férmions. A teoria ganhou destaque como uma possível unificação das forças da natureza [6, 7, 8].

Durante o seu desenvolvimento a teoria passou a contar com cinco tipos diferentes de descrição [6, 7, 10], o que, como esperado de uma teoria de unificação, é bastante desagradável. Em um trabalho de 1998, Witten [11] conseguiu conectá-las através de uma série de dualidades, apontando a existência de uma possível teoria em 11 dimensões que daria origem a todas as descrições conhecidas das cordas, a teoria M.

Seguindo a evolução da teoria, no final da década de 1990, Maldacena introduziu a correspondência AdS/CFT [12] que praticamente trouxe um novo ramo de pesquisa para a Física e que impulsionou a teoria de cordas, trazendo-a, uma vez mais, para a vanguarda da Física Teórica e promovendo uma aproximação entre várias áreas de pesquisa.

Por outro lado, a Teoria de Campo Conforme (ou CFT, em inglês) também tem estado no centro das atenções, uma vez que têm contribuído para o desenvolvimento de áreas importantes da Física Moderna — inclusive a Teoria de Cordas. Essencialmente, teorias de campo conforme são teorias quânticas de campo caracterizadas pelas propriedades de simetria do grupo conforme e transformações conformes locais [13].

Nesse sentido, a abordagem para uma teoria de campo conforme é diferente de uma abordagem usual para uma teoria quântica de campos, visto que fazemos uso das simetrias da teoria ao invés de analisarmos a ação clássica e, posteriormente, quantizá-la. A violação da invariância conforme, evidenciada pela presença da carga central  $c$  [10, 8, 7, 6], é vista como uma consequência da inclusão dos efeitos quânticos na transformação de quantidades importantes, como o tensor energia-momento [6, 7],

tratadas em uma teoria conforme.

Ao longo dos anos, as propriedades estatísticas ou microscópicas dos buracos negros têm fornecido testes para as teorias quânticas de gravidade. Apesar de existir várias candidatas a esta teoria, todas devem reproduzir a mesma relação para a entropia macroscópica de Bekenstein-Hawking [42]. Em Teoria de Cordas, essa abordagem estatística é feita por meio da contagem de estados degenerados no espectro da corda. Esses estados somados através de uma função de partição unidimensional conduz à fórmula de Cardy [17] obtida originalmente em uma teoria de campos conforme bidimensional ( $\text{CFT}_2$ ) [8].

Nesta dissertação, vamos revisar boa parte desses estudos e apontar um possível novo resultado. Vamos essencialmente considerar o emprego da teoria de cordas e teoria de campos conforme na descrição microscópica de buracos negros ou mais precisamente de espaços tipo Kerr-de Sitter em três dimensões. Esses espaços são assintoticamente de Sitter ou anti-de-Sitter tridimensional ( $dS_3/\text{AdS}_3$ ), os quais possuem descrição equivalente em uma teoria de campos conforme bidimensional ( $\text{CFT}_2$ ). Na última parte deste trabalho, consideramos a imersão dessas soluções em quatro dimensões através de uma 2-brana. Notamos que no regime em que a gravidade em quatro dimensões é dominante, conseguimos estabelecer uma correspondência entre a entropia desses espaços tridimensionais e a entropia de um buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões.

Esta dissertação está organizado da seguinte maneira:

**Capítulo 2:** Fazemos uma revisão de teoria de cordas enfatizando os pontos essenciais para a presente discussão.

**Capítulo 3:** Aqui revisamos a teoria de campo conforme em duas dimensões, estabelecendo as condições para a invariância conforme. Construímos a álgebra de Virasoro e analisamos o comportamento do tensor-energia momento em uma transformação conforme infinitesimal.

**Capítulo 4:** Aqui, especificamos as características dos espaços dS e AdS. Calculamos o tensor de tensão quase local definido por Brown e York a partir da variação da ação em relação à métrica induzida na fronteira de um espaço-tempo. Reproduzimos o resultado de Brown e Henneaux a partir de simetrias assintóticas do espaço AdS<sub>3</sub>. Reproduzimos a entropia macroscópica de Bekenstein-Hawking para o espaço de Kerr-de Sitter usando a fórmula de Cardy para uma densidade de estados de uma teoria de campos conforme CFT<sub>2</sub>.

**Capítulo 5:** Analisamos as soluções de defeitos cônicos tipo Schwarzschild-de Sitter em três dimensões induzidas sobre uma 2-brana imersa no espaço-tempo plano em quatro dimensões.

**Capítulo 6:** Apresentamos nossas conclusões e perspectivas.



# Capítulo 2

## Teoria de Cordas

A teoria de cordas foi iniciada no final da década de 1960 com a finalidade de descrever a força nuclear forte. No entanto, alguns problemas, como a existência “indesejada” de uma partícula com spin-2 sem massa no espectro de uma corda fundamental impediram que este objetivo fosse alcançado com sucesso. Só em 1974, é que essa partícula foi identificada como o quantum da interação gravitacional, o gráviton. Desde então, a teoria das cordas tornou-se a candidata mais promissora para uma teoria quântica da gravitação [6].

### 2.1 Teoria de cordas como uma teoria de unificação da Física

Embora seja difícil medir os efeitos da gravitação quântica diretamente, em uma teoria quântica da gravitação tal como a teoria de cordas, pode-se obter previsões testáveis sobre todas as outras interações fundamentais da natureza [8]. Em teoria quântica de campos tradicional, os objetos fundamentais são considerados pontos no espaço-tempo. Quando tratamos de teoria de cordas, há uma generalização radical da teoria quântica de campos, onde tais objetos fundamentais são estendidos. Por essa

razão, todas as espécies de partículas elementares existentes na natureza correspondem a diferentes modos de vibração da corda [6, 10, 8, 7].

Em teoria de cordas, o espaço-tempo possui dez dimensões. Se a teoria das cordas estiver correta, algum mecanismo deve garantir que a dimensionalidade observável do espaço-tempo se restrinja a quatro.

As cordas são classificadas em dois tipos: abertas e fechadas [8, 9, 10, 6]. A segunda subdivisão consiste em corda bosônica e supercordas. Cordas bosônicas vivem em 26 dimensões, todas as suas vibrações representam bósons e por isso não são realistas [8].

As supercordas vivem no espaço-tempo com 10 dimensões. Ao contrário da teoria de cordas bosônicas, os férmions são incluídos em seu espectro e se relacionam com os bósons por meio da supersimetria. Todos os modelos realistas das teorias de cordas são construídos a partir de supercordas.

## 2.2 Partícula pontual relativística

Antes de iniciarmos o estudo do comportamento clássico e quântico de uma corda, movendo-se no espaço plano de  $D$ -dimensões com métrica de Minkowski,

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, \dots, +), \quad (2.2.1)$$

vamos revisar a dinâmica de um objeto 0-dimensional, ou seja, uma partícula pontual relativística [10, 7].

O movimento de uma partícula de massa  $m$ , em um espaço-tempo curvo com  $d$ -dimensões, pode ser formulado como um problema variacional. Uma vez que o movimento de uma partícula se dá ao longo de uma geodésica, a ação é proporcional ao comprimento invariante da trajetória da partícula [7]

$$S[X] = -\alpha \int ds, \quad (2.2.2)$$

onde  $\alpha$  é uma constante e  $\hbar = c = 1$ . Esse comprimento é extremizado na teoria clássica como ilustrado na figura (2.1).

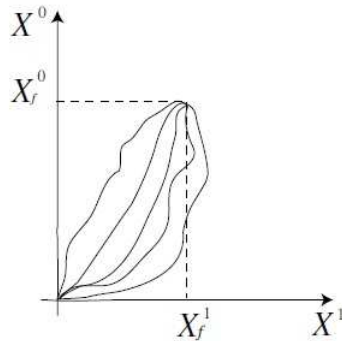


Figura 2.1: A trajetória clássica de uma partícula minimiza o comprimento da linha mundo.

Exigindo que a ação seja adimensional, o  $\alpha$  tem dimensão de inverso do comprimento, sendo portanto equivalente à unidade massa, ou seja, deve ser proporcional a  $m$ . Assim a ação torna-se [7, 6, 10]

$$S[X] = -m \int ds. \quad (2.2.3)$$

Nesta fórmula o elemento de linha é dado por [7]

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu. \quad (2.2.4)$$

Aqui  $g_{\mu\nu}(X)$ , com  $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$ , descreve a geometria de fundo com a assinatura de Minkowski  $(- + \dots +)$ . O sinal de menos foi introduzido para que  $ds$  seja real em uma trajetória tipo-tempo. A trajetória da partícula descrita por [7, 6],

$$X^\mu(\tau) = (X^0(\tau), X^1(\tau), \dots, X^{d-1}(\tau)), \quad (2.2.5)$$

também chamada de linha mundo da partícula, é parametrizada por  $\tau$ , onde  $\tau \in \mathbb{R}$  e não depende da parametrização, ou seja, a ação é invariante.

Para uma partícula de massa  $m$ , a ação é dada pelo comprimento total de sua trajetória no espaço-tempo:

$$S[X] = -m \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.6)$$

onde

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}, \quad (2.2.7)$$

e o ponto representa a derivada com respeito a  $\tau$ . Os mínimos desta ação determinam as trajetórias de menor comprimento da partícula e, portanto, as soluções para as equações clássicas de movimento são as geodésicas da partícula livre no espaço-tempo.

A ação Eq. (2.2.6) tem uma desvantagem: o fato de conter uma raiz quadrada, que dificulta o processo de quantização. Além disso, esta ação, obviamente, não pode ser usada para descrever partícula sem massa [6]. Este problema pode ser contornado através da introdução de uma ação equivalente a ação anterior no nível clássico. Isso é formulado em termos de um campo auxiliar  $e(\tau)$

$$S'[X] = \frac{1}{2} \int d\tau (e^{-1} \dot{X}^2 - m^2 e). \quad (2.2.8)$$

onde  $\dot{X}^2 = g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu$ . Vamos verificar a invariância da ação  $S'[X]$  frente a uma reparametrização [6, 10]

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau - \epsilon(\tau), \quad (2.2.9)$$

onde o campo  $X^\mu$  transforma-se como

$$X^{\mu'}(\tau') = X^\mu(\tau), \quad (2.2.10)$$

e a variação de  $X^\mu$  é dada por

$$\delta X^\mu = X^{\mu'}(\tau) - X^\mu(\tau) = \epsilon(\tau) \dot{X}^\mu. \quad (2.2.11)$$

Ao mesmo tempo, o campo auxiliar transforma-se como

$$e'(\tau') d\tau' = e(\tau) d\tau, \quad (2.2.12)$$

ou seja

$$\delta e = e'(\tau) - e(\tau) = \frac{d}{d\tau}(\epsilon e). \quad (2.2.13)$$

Para o espaço-tempo plano com métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , por exemplo, a expressão da ação  $S'[X]$  tem a seguinte variação

$$\delta S'[X] = \frac{1}{2} \int d\tau \left( \frac{2\dot{X}^\mu \delta \dot{X}_\mu}{e} - \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} \delta e - m^2 \delta e \right). \quad (2.2.14)$$

Aqui,  $\delta \dot{X}_\mu$  é dado por

$$\delta \dot{X}_\mu = \frac{d}{d\tau} \delta X_\mu = \dot{\epsilon} \dot{X}_\mu + \epsilon \dot{X}_\mu, \quad (2.2.15)$$

e juntamente com a expressão de  $\delta e$ , produz [6]

$$\delta S'[X] = \frac{1}{2} \int d\tau \left[ \frac{2\dot{X}^\mu}{e} (\dot{\epsilon} \dot{X}_\mu + \epsilon \dot{X}_\mu) - \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} (\dot{\epsilon} e + \epsilon \dot{e}) - m^2 \frac{d(\epsilon e)}{d\tau} \right]. \quad (2.2.16)$$

ou melhor

$$\delta S'[X] = \frac{1}{2} \int d\tau \left[ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\epsilon}{e} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu \right) - m^2 \frac{d(\epsilon e)}{d\tau} \right]. \quad (2.2.17)$$

Podemos descartar as derivadas totais impondo condições de contorno adequadas.

Portando, vemos claramente que a ação  $S'[X]$  é invariante por reparametrização.

Por outro lado, a equação de movimento para  $e(\tau)$  é obtida variando a ação com respeito a  $e(\tau)$  e, posteriormente, igualando a zero

$$\frac{\delta S'[X]}{\delta e} = \int \frac{1}{2} \left( -e^{-2} \dot{X}^2 - m^2 \right) d\tau = 0, \quad (2.2.18)$$

ou seja

$$m^2 e^2 + \dot{X}^2 = 0. \quad (2.2.19)$$

Substituindo a solução da Eq. (2.2.19)

$$e = \frac{\sqrt{-\dot{X}^2}}{m}, \quad (2.2.20)$$

em  $S'[X]$

$$\begin{aligned} S'[X] &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{m}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \dot{X}^2 - m^2 \frac{\sqrt{-\dot{X}^2}}{m} \right) d\tau, \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{m \dot{X}^2 + m \dot{X}^2}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right) d\tau, \\ &= -m \int \sqrt{-\dot{X}^2} d\tau, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

encontramos

$$S'[X] = S[X]. \quad (2.2.22)$$

Logo, a ação  $S'[X]$  tem simetrias idênticas à da ação  $S[X]$ , ou seja, a invariância de Poincaré e de reparametrização da linha-mundo [10, 7].

Embora as ações  $S[X]$  e  $S'[X]$  sejam classicamente equivalentes, é difícil dá sentido a  $S[X]$  em uma integral de caminho por causa de sua forma complicada, com derivadas dentro de raízes quadradas. Por outro lado,  $S'[X]$  é quadrático na derivada e sua integral de caminho é facilmente calculada [10].

## 2.3 Ação de Nambu-Goto

Nesta seção, discutiremos o caso de uma corda se propagando no espaço-tempo plano de Minkowski. A corda descreve uma superfície bidimensional através do espaço-tempo, que é chamada de folha-mundo. Os pontos sobre a folha-mundo são parametrizados por duas coordenadas  $\sigma^0 = \tau$ , que é tipo-tempo, e  $\sigma^1 = \sigma$ , que é tipo-espaço. Se a variável  $\sigma$  for periódica, a corda é fechada e se a variável cobrir um intervalo finito, a corda é aberta. Portanto, ilustramos esse conceito a partir da Fig.(2.2) [8].

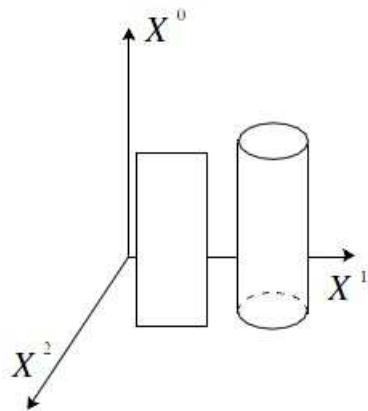


Figura 2.2: A folha mundo de uma corda aberta se propagando livremente é uma superfície retangular, enquanto que para uma corda fechada é um cilindro.

Assim, como no caso da partícula, a ação da corda depende apenas do espaço-tempo e não da parametrização. O fato dessa teoria ter esta propriedade, conforme veremos, é necessária em uma teoria quântica consistente. A ação descrevendo uma corda, propagando-se no espaço de fundo plano, pode ser descrita como um caso especial de uma ação mais geral para uma  $p$ -brana (objeto com  $p$  dimensões espaciais), conhecida como ação de *Nambu – Goto* [6].

Essa ação é proporcional à área da folha-mundo e podemos expressá-la em termos das funções  $X^\mu(\tau, \sigma)$  que descreve o espaço-tempo onde a folha-mundo está imersa — Fig. (2.3).

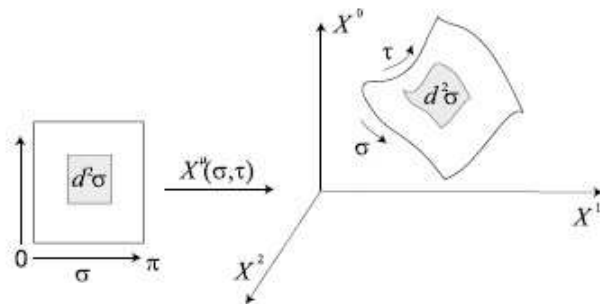


Figura 2.3: A função  $X^\mu(\tau, \sigma)$  descreve a imersão da folha-mundo no espaço-tempo.

Primeiramente, definimos a métrica induzida  $h_{ab}$ , onde  $a, b$  assumem os valores de  $\tau$  e  $\sigma$  [10]

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.3.23)$$

de modo que a ação de Nambu-Goto é escrita na forma

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (2.3.24)$$

ou melhor

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma \sqrt{-h}, \quad (2.3.25)$$

onde  $h = \det(h_{ab})$  e a lagrangeana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-\det(h_{ab})}. \quad (2.3.26)$$

A constante  $\alpha'$ , que tem unidade de área da folha-mundo, é o parâmetro de declive de Regge. A tensão da corda  $T_0$  está relacionada a este declive por meio da expressão

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \quad (2.3.27)$$

A ação de Nambu-Goto é análoga à ação de uma partícula pontual  $S[X]$ , com derivadas na raiz quadrada. Novamente, podemos simplificá-la, introduzindo uma métrica independente  $\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$  na folha-mundo com  $\gamma$  tendo a assinatura de Lorentz  $(-, +)$  [6].

Desta forma, escrevemos a ação como segue:

$$S_P[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.3.28)$$

onde  $M$  representa a folha-mundo. Essa expressão é conhecida como a ação de Polyakov [10, 9, 6].

Podemos verificar a equivalência entre  $S_P$  e  $S_{NG}$ . Usamos a equação de movimento que obtemos quando variamos a ação com relação à métrica

$$\delta_\gamma S_P[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \delta\gamma^{ab} (h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}), \quad (2.3.29)$$

onde  $h_{ab}$  é novamente a métrica induzida Eq. (2.3.23) e usamos a relação geral para a variação do determinante,

$$\delta\gamma = \gamma \gamma^{ab} \delta\gamma_{ab} = -\gamma \gamma_{ab} \delta\gamma^{ab}. \quad (2.3.30)$$

Tomando  $\delta_\gamma S_P = 0$ , obtemos

$$h_{ab} = \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}. \quad (2.3.31)$$

Dividindo esta equação por  $(-h)^{\frac{1}{2}}$ , encontramos

$$h_{ab} (-h)^{-\frac{1}{2}} = \gamma_{ab} (-h)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.3.32)$$

onde  $\gamma_{ab}$  é proporcional a métrica induzida. Isso por sua vez, pode ser usado para eliminar  $\gamma_{ab}$  da ação  $S_P$  de modo que  $S_P[X, \gamma] = S_{NG}[X]$  [6] como segue

$$S_P[X, \gamma] \rightarrow -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (-h)^{\frac{1}{2}} = S_{NG}[X]. \quad (2.3.33)$$



A ação  $S_{\mathcal{P}}$  tem as seguintes simetrias [10]:

(a) Invariância de Poincaré em D-dimensões:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau, \sigma) &= \Lambda_{\nu}^{\mu} X^{\nu}(\tau, \sigma) + a^{\mu}, \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

(b) Derivada invariante:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau', \sigma') &= X^{\mu}(\tau, \sigma), \\ \frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{cd}(\tau', \sigma') &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

para novas coordenadas  $\sigma'^a(\tau, \sigma)$ .

(c) Invariância de Weyl em 2-dimensões:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau', \sigma') &= X^{\mu}(\tau, \sigma), \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= e^{2w(\tau, \sigma)} \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

para um  $w(\tau, \sigma)$  arbitrário.

A ação de Nambu-Goto e de Polyakov definem teorias de campos bi-dimensionais sobre a folha-mundo da corda [10]. Do ponto de vista da folha-mundo, a lei de transformação Eq. (2.3.36) define  $X^{\mu}(\tau, \sigma)$  como um campo escalar. Por outro lado, do ponto de vista bi-dimensional, a ação de Polyakov descreve o escalar de Klein-Gordon covariantemente acoplado a métrica  $\gamma_{ab}$ . Também, deste ponto de vista, a invariância de Poincaré é uma simetria interna e significa que a ação sobre os campos é fixada em  $\tau$  e  $\sigma$  [6].

## 2.4 Equações de Movimento

Supomos agora que a topologia da folha-mundo permite que uma métrica plana seja escolhida [6]. Para uma corda fechada propagando-se livremente, uma escolha natural

é um cilindro infinito. Similarmente, a escolha natural para uma corda aberta é uma faixa infinita. Em ambos os casos, o movimento da corda no espaço de Minkowski é governado pela ação Eq. (2.3.24). Veremos, que a equação de movimento para  $X^\mu$  é uma equação de onda.

Para obter essa equação, vamos variar a ação da corda [6, 8, 9, 10]. Primeiramente, escrevemos a ação Eq. (2.3.24) como uma integral dupla da densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ :

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}), \quad (2.4.37)$$

onde  $\mathcal{L}$  é dado por

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.4.38)$$

Agora, variamos a Eq. (2.4.37),

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \quad (2.4.39)$$

aqui usamos

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau}. \quad (2.4.40)$$

Fazendo  $\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^\mu$ ,  $\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \partial \mathcal{L} / \partial X^{\mu'}$  e, sabendo que [8]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.4.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.4.42)$$

a Eq. (2.4.39) torna-se,

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (2.4.43)$$

Como  $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = 0$ , essa variação passa a ter a forma

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (2.4.44)$$

Impondo condições de contorno adequadas, como discutiremos abaixo, o primeiro termo desaparece. Logo, ficamos com a expressão:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (2.4.45)$$

Finalmente, tomando  $\delta S = 0$ , obtemos a equação de movimento para uma corda relativística [6, 8, 9, 10]

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.4.46)$$

## 2.5 Condições de Fronteira

Na definição completa de um problema variacional, é importante especificarmos as condições de contorno. Em teoria de cordas, convenientemente escolhemos a coordenada  $0 \leq \sigma \leq l$ . Nessa teoria, os pontos estacionários da ação são determinados exigindo a invariância da ação frente a uma transformação

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu. \quad (2.5.47)$$

Como visto em Eq. (2.4.44), o termo

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^l, \quad (2.5.48)$$

é desprezado e, isto pode ser feito de várias maneiras [10, 8, 6, 7]. Para cordas abertas essas possibilidades são ilustradas na Fig. (2.4) e para ambas as cordas; abertas e fechadas, temos as seguintes condições [6, 10]:

**(a) Corda fechada.** Neste caso as funções imersas são periódicas:

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \sigma + l). \quad (2.5.49)$$

**(b) Corda abertas com condições de fronteira de Neumann.** Neste caso as componentes normais do momento na fronteira da folha-mundo se anulam:

$$X'_\mu(\tau, 0) = X'_\mu(\tau, l) = 0. \quad (2.5.50)$$

Essa escolha é feita para todo  $\mu$ . A mesma condição de fronteira respeita a invariância de Poincaré em  $D$  dimensões. Fisicamente, isto significa que não há momento fluindo através da extremidade da corda.

**(d) Corda abertas com condições de fronteira de Dirichlet.** Neste caso as posições das duas extremidades da corda são fixadas de modo que  $\delta X^\mu = 0$  e

$$X^\mu|_{\sigma=0} = X_0^\mu \quad e \quad X^\mu|_{\sigma=l} = X_l^\mu, \quad (2.5.51)$$

onde  $X_0^\mu$  e  $X_l^\mu$  são constantes e  $\mu = 1, \dots, D - p - 1$ .

As condições de fronteira de Neumann são impostas para outras  $p + 1$  coordenadas. As condições de fronteira de Dirichlet quebram a invariância de Poincaré e, por esta razão, não foram utilizadas por muitos anos. Mas, existem determinadas circunstâncias em que essas condições são inevitáveis.

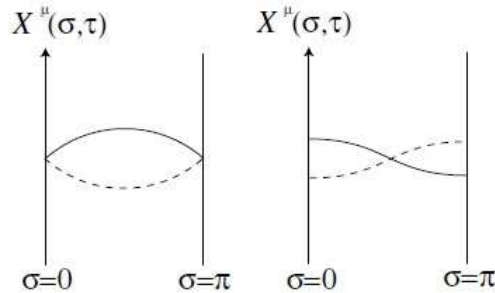


Figura 2.4: Condições de contorno de Dirichlet (esquerda) e Neumann (direita). As linhas tracejadas representam as posições da corda em tempos diferentes.

A interpretação moderna diz que  $X_0^\mu$  e  $X_l^\mu$  representam as posições de uma  $Dp - brana$ , isto é, um tipo especial de  $p - brana$  em que as extremidades de uma corda fundamental pode terminar. A presença de uma  $Dp - brana$  quebra a invariância de Poincaré, a menos que seja um espaço-tempo de “enchimento”, ou seja, quando a  $Dp$ -brana é o próprio espaço-tempo tal que  $p = D - 1$  [6].

A ação de Nambu-Goto e de Polyakov podem ser descritas de maneira mais simples, dadas as simetrias (anteriormente descritas), mas a simplicidade da ação não é um critério em teoria quântica de campos. Simetria é a ideia chave, pois devido às

razões físicas e técnicas devemos normalmente considerar uma ação local mais geral e consistente com todas as simetrias da teoria [10].

## 2.6 Soluções para Equações de Movimento

Para encontrar as soluções das equações de movimento da corda é conveniente introduzir as coordenadas de cone de luz, definidas como [6, 8]

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (2.6.52)$$

Nessas coordenadas as derivadas e a métrica de Lorentz em duas dimensões tem a forma

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.53)$$

Em coordenadas de cone de luz a equação de onda para  $X^\mu$  é

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (2.6.54)$$

As componentes do tensor energia-momento tornam-se

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0, \quad (2.6.55)$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0, \quad (2.6.56)$$

enquanto  $T_{+-} = T_{-+} = 0$  representa a condição de traço nulo. A solução geral da equação de onda Eq. (2.6.54) é dada por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma), \quad (2.6.57)$$

que é a soma dos movimentos direito e esquerdo da corda. Para encontrar a forma explícita de  $X_R$  e  $X_L$  deve-se exigir que  $X^\mu(\tau, \sigma)$  seja real e impor as restrições [6]

$$(\partial_- X_R)^2 = (\partial_+ X_L)^2 = 0. \quad (2.6.58)$$

## 2.7 Modos de Expansão da Corda

### 2.7.1 Corda Fechada

A solução mais geral da equação de onda que satisfaz as condições de contorno da corda fechada é dada por [10, 8, 6, 7]

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{il_s}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.7.59)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{il_s}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (2.7.60)$$

onde  $x^\mu$  é a posição do centro de massa e  $p^\mu$  é o momento total da corda. O último termo representa os modos de oscilação da corda. Aqui, introduzimos um novo parâmetro, a escala de comprimento da corda  $l_s$ , que está relacionado à tensão da corda  $T$  e o declive de Regge  $\alpha'$  por

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}l_s^2 = \alpha'. \quad (2.7.61)$$

O requisito de que  $X_R^\mu$  e  $X_L^\mu$  sejam funções reais implica que  $x^\mu$  e  $p^\mu$  são reais, enquanto que os modos positivos e negativos são iguais aos seus conjugados

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = (\bar{\alpha}_n^\mu)^* \quad (2.7.62)$$

Os termos lineares em  $\sigma$  cancela-se a partir da soma  $X_R^\mu + X_L^\mu$ , de modo que as condições de contorno são satisfeitas. Note que as derivadas da expansão tomam a forma

$$\partial_- X_R^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m^\mu e^{-2im(\tau - \sigma)}, \quad (2.7.63)$$

$$\partial_+ X_L^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{\alpha}_m^\mu e^{-2im(\tau + \sigma)}, \quad (2.7.64)$$

onde

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}l_s p^\mu. \quad (2.7.65)$$

## 2.7.2 Corda Aberta

A solução geral das equações de movimento da corda para uma corda aberta com condições de contorno de Neumann são dadas por [8, 6]

$$X^{\tau,\sigma} = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma). \quad (2.7.66)$$

Note que, para a corda aberta, apenas um conjunto de modos  $\alpha_m^\mu$  aparece, enquanto que para cordas fechadas há dois conjuntos independentes de modos  $\alpha_m^\mu$  e  $\bar{\alpha}_m^\mu$ . As condições de fronteira para cordas abertas forçam os modos de movimento esquerdo e direito a se combinar em uma onda estacionária. Para as cordas abertas

$$2\partial_\pm X^\mu = \dot{X}^\mu \pm X'^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^\mu e^{-im(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.7.67)$$

onde,  $\alpha_0^\mu = l_s p^\mu$ .

## 2.7.3 Tensor Energia-Momento

Vamos agora considerar os modos de expansão do tensor energia-momento. Inserindo os modos de expansão da corda fechada para  $X_L$  e  $X_R$  no tensor energia-momento Eq. (2.6.55), Eq. (2.6.56), obtemos [6, 10, 8]:

$$T_{--} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m e^{-2im(\tau-\sigma)} \quad \text{e} \quad T_{++} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{L}_m e^{-2im(\tau+\sigma)}, \quad (2.7.68)$$

onde os coeficientes de Fourier são os geradores de Virasoro

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad \text{e} \quad \bar{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\alpha}_{m-n} \cdot \bar{\alpha}_n, \quad (2.7.69)$$

que serão definidos mais precisamente no próximo capítulo. Da mesma forma, podemos obter o resultado para os modos do tensor energia-momento da corda aberta.

Coparando com o hamiltoniano, obtemos a expressão

$$\frac{1}{2}H = L_0 + \bar{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n), \quad (2.7.70)$$

para uma corda fechada, enquanto para uma corda aberta

$$H = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.7.71)$$

Esses resultados são classicamente consistentes [10, 8, 6, 7].



## Capítulo 3

# Teoria de Campo Conforme

A abordagem para o estudo de uma teoria de campo conforme é um pouco diferente de uma abordagem usual para uma teoria quântica de campos, porque, em vez de começarmos com a ação clássica para os campos e depois quantizá-los, através da quantização canônica ou método da integral de caminho, fazemos primeiro uso das simetrias da teoria [13].

Neste capítulo, introduzimos noções básicas da teoria de campo conforme em 2 dimensões e estabelecemos o formalismo da invariância conforme. Neste sentido, a simetria conforme é a simetria de um mapa conforme no plano em duas dimensões.

Logo, dentre os argumentos, esperamos que uma teoria conformalmente invariante envolva campos como funções analíticas de coordenadas bidimensionais, tratadas como variáveis complexas. Vamos mostrar como escrever uma teoria invariante conforme explicitamente em termos dos campos analíticos.

### 3.1 Grupo conforme

Inicialmente, introduzimos as transformações conformes, determinando a condição para a invariância conforme. Posteriormente, analisamos o espaço plano bidimensional

euclidiano  $\mathbb{R}^{2,0}$ , onde obtemos o grupo conforme e a álgebra da transformação conforme infinitesimal [13].

### 3.1.1 Coordenadas conforme

Para iniciar nossos estudos, devemos definir uma base de coordenadas. Ao longo desta discussão, descreveremos tanto a folha-mundo da corda quanto o espaço-tempo em que ela está imersa, por meio de suas continuações euclidianas. Sobre a folha-mundo da corda, estas continuações são descritas pela expressão [14]

$$(\tau \pm \sigma) \rightarrow -i(\tau \pm i\sigma), \quad (3.1.1)$$

onde podemos definir

$$w = \tau + i\sigma, \quad (3.1.2)$$

$$\bar{w} = \tau - i\sigma. \quad (3.1.3)$$

A decomposição de um estado da corda em ondas, movendo-se para esquerda e para direita em relação a corda, após esta continuação, pode ser entendida como uma decomposição em funções analíticas e anti-analíticas sobre uma superfície euclidiana bidimensional.

A corda euclidiana cobre apenas um intervalo finito de  $\sigma$  e, portanto, apenas uma faixa do plano bidimensional Fig. (3.1a).

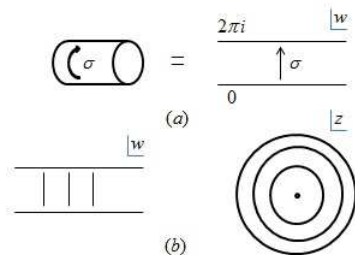


Figura 3.1: A folha-mundo da corda como uma região do plano complexo (a) na variável original  $\tau$  e  $\sigma$ , (b) na variável  $z = \exp(\tau + i\sigma)$ .

No entanto, se anteciparmos que a teoria que construiremos terá simetria completa sob transformação conforme, poderemos mapear esta região em todo o plano complexo através do mapa

$$z = e^{\tau+i\sigma}. \quad (3.1.4)$$

A forma desse mapa é mostrado em Fig.(3.1b). Linhas de constante  $\tau$  são mapeadas em círculos sobre o plano  $z$ , a operação de translação no tempo  $\tau \rightarrow \tau + a$ , produz uma dilatação,

$$z \rightarrow e^a z. \quad (3.1.5)$$

As coordenadas da corda  $X^\mu(\tau, \sigma)$ , separadas em movimentos esquerdo e direito de excitação, correspondem aos campos analítico e não-analítico neste plano complexo. É possível verificar se uma teoria de campo analítico pode ser definida e, a partir desta definição, incluir a identificação de operadores que implementam mapas conformes no plano  $z$ .

Dentro da família de cada operador, podemos identificar o gerador da dilatação Eq. (3.1.5) com o Hamiltoniano da teoria de cordas original. Tal procedimento de identificação de dilatações com a Hamiltoniana, como também o mapeamento em círculos, com superfícies de tempo constante, é chamado de *quantização radial*.

### 3.1.2 Transformação conforme

Vamos considerar espaço plano em  $d$  dimensões e as tranformações que preservam localmente o angulo entre duas linhas. Essas são as transformações conformes.

O tensor métrico satisfaz  $\phi^* g' = \Omega g$ , onde  $\phi$  é o mapa da transformação conforme. Denotando  $x' = \phi(x)$ , podemos expressar esta condição da seguinte forma

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.1.6)$$

onde a função positiva  $\Omega(x)$  é chamada de fator de escala. No espaço plano  $\Omega(x) = 1$

corresponde ao grupo de Poincaré, consistindo em translações e rotações (referentes às transformações de Lorentz) [13].

### 3.1.3 Invariância conforme em $d$ dimensões

Começamos, introduzindo o grupo conforme em  $d$ -dimensões. O objetivo é exibir as restrições impostas por uma invariância conforme no contexto mais geral. Consideramos o espaço  $\mathbb{R}^d$  com métrica plana  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e elemento de linha  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  [15]. Em uma mudança de coordenadas,  $x \rightarrow x'$ , temos:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (3.1.7)$$

Por definição, o grupo conforme é o sub-grupo de transformações de coordenadas que leva a métrica invariante por um fator de escala,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (3.1.8)$$

Os geradores infinitesimais do grupo conforme podem ser determinados considerando a transformação de coordenada infinitesimal  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) + O(\epsilon^2)$  em que

$$ds^2 \rightarrow ds^2 + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.1.9)$$

Para satisfazer Eq. (3.1.8), devemos exigir que  $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$  seja proporcional a  $\eta_{\mu\nu}$ , de modo que

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}, \quad (3.1.10)$$

onde a constante de proporcionalidade é fixada, tomando o traço de ambos os lados com  $\eta^{\mu\nu}$ . Esta equação descreve as “equações de Killing conforme”.

Comparando com Eq. (3.1.8) encontramos,

$$\Omega(x) = 1 + \left(\frac{2}{d}\right) (\partial \cdot \epsilon). \quad (3.1.11)$$

Modificando a Eq. (3.1.10) tomando a derivada  $\partial^\nu$  em ambos os lados e somando sobre  $\nu$ , obtemos

$$\begin{aligned}\partial^\nu(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) &= \frac{2}{d}\partial^\nu(\partial.\epsilon)\eta_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu(\partial.\epsilon) + \square\epsilon_\mu &= \frac{2}{d}\partial_\mu(\partial.\epsilon),\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

onde  $\square = \partial^\mu\partial_\mu$ . Além disso, tomamos a derivada  $\partial_\nu$  de Eq. (3.1.12) para encontrar

$$\partial_\mu\partial_\nu(\partial.\epsilon) + \square\partial_\nu\epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\mu\partial_\nu(\partial.\epsilon),\tag{3.1.13}$$

depois mudando  $\mu \leftrightarrow \nu$  e adicionando o resultado em Eq. (3.1.13), ficamos com

$$\begin{aligned}2\partial_\mu\partial_\nu(\partial.\epsilon) + \square\left(\frac{2}{d}(\partial.\epsilon)\eta_{\mu\nu}\right) &= \frac{4}{d}\partial_\mu\partial_\nu(\partial.\epsilon), \\ (\eta_{\mu\nu}\square + (d-2)\partial_\mu\partial_\nu)(\partial.\epsilon) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

Finalmente, contraindo esta equação com  $\eta^{\mu\nu}$ , encontramos:

$$(d-1)\square(\partial.\epsilon) = 0.\tag{3.1.15}$$

Para  $d > 2$ , Eq. (3.1.14) exige que a terceira derivada de  $\epsilon$  desapareça, de modo que  $\epsilon$  seja no máximo quadrático em  $x$ . Por outro lado,  $d = 2$  não há esta restrição, o que permite, como veremos mais tarde, uma álgebra conforme infinito dimensional.

Abaixo seguem algumas possibilidades para  $\epsilon$  como uma função das coordenadas  $x$ .

1) Para a ordem zero em  $x$ , temos:

◇ Translações ordinárias independentes de  $x$

$$\epsilon^\mu = a^\mu.\tag{3.1.16}$$

2) Para  $\epsilon$  linear em  $x$ , temos:

◇ Rotações e translações respectivamente

$$\epsilon^\mu = w_\nu^\mu x^\nu \quad \epsilon^\mu = \lambda x^\mu.\tag{3.1.17}$$

3) Finalmente, quando  $\epsilon$  é quadrático em  $x$ , temos:

◇ Transformação conforme especial

$$\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x \quad (3.1.18)$$

### 3.1.4 Grupo conforme em duas dimensões

Nesta seção, vamos estudar o grupo conforme bidimensional considerando a métrica euclideana no espaço plano.

### 3.1.5 Transformações conformes

A condição para a invariância em uma transformação conforme bidimensional pode ser expressa na forma

$$\partial_0 \epsilon_0 = +\partial_1 \epsilon_1, \quad \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0, \quad (3.1.19)$$

onde  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  que, por sua vez, são conhecidas como equações de Cauchy-Riemann da análise complexa. Uma função complexa, cujas partes real e imaginária satisfazem Eq. (3.1.19), é uma função holomórfica.

Podemos induzir as seguintes variáveis complexas:

$$z = x^0 + ix^1, \quad \epsilon = \epsilon^0 + i\epsilon^1, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \quad (3.1.20)$$

$$\bar{z} = x^0 - ix^1, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon^0 - i\epsilon^1, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1). \quad (3.1.21)$$

Uma vez que  $\epsilon(z)$  é holomórfica, concluímos que  $f(z) = z + \epsilon(z)$  dá origem a uma transformação conforme infinitesimal em 2 dimensões  $z \mapsto f(z)$ . Isso implica no tensor métrico, transformando-se em uma  $z \mapsto f(z)$  como segue:

$$ds^2 = dzd\bar{z} \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z}, \quad (3.1.22)$$

onde inferimos o fator de escala  $\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$ .

Para calcular a relação de comutação dos geradores da álgebra conforme, tomamos por base

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon_n(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (3.1.23)$$

onde

$$\epsilon_n(z) = -z^{n+1} \quad \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{z}^{-m+1}. \quad (3.1.24)$$

Os correspondentes geradores infinitesimais são

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{-n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (3.1.25)$$

Os  $l_n$  e  $\bar{l}_n$  satisfazem a álgebra

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n} \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n)\bar{l}_{m+n} \quad (3.1.26)$$

e  $[l_m, \bar{l}_n] = 0$ . No caso quântico, a álgebra (3.1.26) terá um termo extra proporcional ao que chamaremos de *carga central* [15, 8].

## 3.2 Tensor energia-momento

Normalmente, uma teoria de campo é definida em termos de uma ação (ou lagrangeana) de onde podemos obter várias propriedades dessa teoria. Em particular, o tensor de energia-momento pode ser deduzido da variação da ação com respeito à métrica, codificando o comportamento da teoria em uma transformação infinitesimal [15]

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.2.27)$$

com

$$\delta g_{\mu\nu} \ll 1. \quad (3.2.28)$$

Uma vez que a álgebra de uma transformação conforme infinitesimal, em duas dimensões tem dimensão infinita, há fortes restrições sobre uma teoria de campo conforme [15]. Em particular, verifica-se a possibilidade de se estudar tal teoria sem conhecer a forma explícita da ação. Para isto, a única informação necessária está no comportamento do tensor energia-momento sob uma transformação conforme.

Afim de estudar o tensor energia-momento em teoria de campo conforme (ou CFT em inglês), lembramos que o teorema de Noether afirma que para cada simetria da teoria, existe uma carga conservada  $Q = \int d^d x j_0(x)$ , construída pela integração em superfícies de tempo fixo.

Em particular, transformações de coordenadas locais são geradas por cargas construídas a partir do tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Em teorias conformalmente invariantes,  $T_{\mu\nu}$  tem traço nulo devido à conservação de corrente  $j_\mu = T_{\mu\nu}x^\nu$ , ou seja,  $0 = \partial \cdot j = T_\mu^\mu$  (associada a uma transformação de escala ordinária).

A corrente associada a outras transformações conformes infinitesimais é dada na forma

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu, \quad (3.2.29)$$

onde  $\epsilon^\mu$  satisfaz Eq. (3.1.10). Esta corrente tem divergência nula

$$\partial \cdot j = \frac{1}{2}T_\mu^\mu(\partial \cdot \epsilon) = 0, \quad (3.2.30)$$

devido à condição de traço nulo  $T_\mu^\mu = 0$  do tensor  $T_{\mu\nu}$ .

Para implementar as cargas conservadas sobre o plano- $z$  conforme, é necessário introduzir uma análise tensorial complexa. O plano euclideo ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ) em coordenadas complexas  $z = x + iy$  tem elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}. \quad (3.2.31)$$

com componentes

$$\begin{aligned} g_{zz} &= g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \\ g_{z\bar{z}} &= g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$



As componentes do tensor energia-momento, neste sistema de coordenadas, têm a forma

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}), & T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}) \quad e \\ T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = \frac{1}{4}T_{\mu}^{\mu}. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Da lei de conservação  $g^{\alpha\mu}\partial_{\alpha}T_{\mu\nu} = 0$  obtemos as duas relações [15]

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad e \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0. \quad (3.2.34)$$

Usando a condição do traço  $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$ , obtemos

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0 \quad e \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (3.2.35)$$

Similarmente, podemos mostrar que  $\partial_z T_{z\bar{z}} = 0$  leva-nos a conclusão de que as componentes do tensor energia-momento são campos chirais e anti-chirais [15]

$$T(z) \equiv T_{zz}(z), \quad e \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}). \quad (3.2.36)$$

### 3.3 A Álgebra conforme

O elemento infinitesimal da transformação conforme correspondendo a  $\epsilon(z) = z^{n+1}$  são gerados pela componente de Fourier de  $T(z)$  sobre o círculo [13] :

$$L_n = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w). \quad (3.3.37)$$

Podemos verificar que  $L_n$  é um operador de Virasoro e satisfaz a seguinte álgebra

$$[L_n, L_m] = \left[ \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right] z^{n+1} T(z) w^{m+1} T(w). \quad (3.3.38)$$

Uma mudança na ordem da integração em  $z$  e  $w$  representa um pequeno deslocamento de  $z$  em torno de  $w$  Fig. (3.2), implementando a definição funcional do comutador. A diferença de integração não é nula em virtude da singularidade do produto de operadores com  $z \rightarrow w$ . Em teoria de campo envolvendo bosôns livres, por exemplo, também

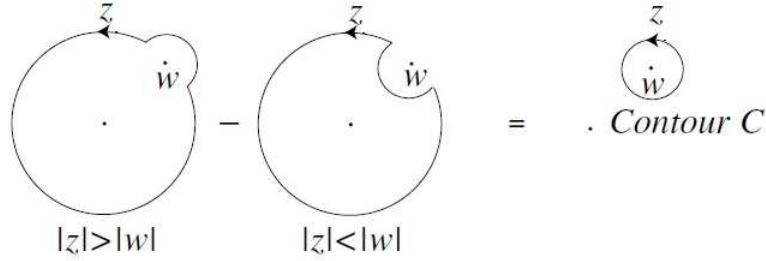


Figura 3.2: Contorno de integração em  $z$  na Eq. (3.3.38). Uma vez que o integrando é ordenado radialmente, a integral em  $z$  é realizada em uma pequena região circular.

chamado de modelo gaussiano [7], podemos calcular esta singularidade [16] usando a ação normalizada

$$S = \int \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \partial_z X \bar{\partial}_{\bar{z}} X, \quad (3.3.39)$$

onde  $X(z, \bar{z})$  obtido das equações de movimento é dado por

$$X(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(X(z) + \bar{X}(\bar{z})), \quad (3.3.40)$$

e o propagador tem a seguinte forma

$$\langle X(z, \bar{z}) X(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{2} \log |z - w|. \quad (3.3.41)$$

Note que  $X(z, \bar{z})$  possui uma dependência holomórfica e não-holomórfica respectivamente [15]. Para essas regiões os propagadores podem ser escritos na forma,

$$\langle X(z) X(w) \rangle = -\log(z - w), \quad \langle \bar{X}(\bar{z}) \bar{X}(\bar{w}) \rangle = -\log(\bar{z} - \bar{w}). \quad (3.3.42)$$

Temos que a derivada expandida em torno de um ponto é dada por

$$\partial X(z) \partial X(w) = -\frac{1}{(z - w)^2} + \dots \quad (3.3.43)$$

Vamos nos concentrar na dependência holomórfica da teoria, definindo o tensor de energia-momento  $T(w)$  via *ordenamento normal*

$$\begin{aligned} T(w) &= -\frac{1}{2} : \partial X(z) \partial X(w) : \\ &\equiv -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow w} \left[ \partial X(z) \partial X(w) + \frac{1}{(z - w)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Usando as regras de Wick e a expansão de Taylor, calculamos a parte singular

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \langle \partial_z X \partial_w X \rangle^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 \cdot \partial_z X \langle \partial_z X \partial_w X \rangle \partial_w X \\
&+ \text{n\~{a}o singularidades,} \\
T(z)T(w) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{(z-w)^2} \right)^2 + \partial_z X \left( \frac{-1}{(z-w)^2} \right) \partial_w X + \dots, \\
T(z)T(w) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} \left[ -\frac{1}{2} (\partial_w X)^2 \right] \\
&+ \frac{1}{(z-w)} \partial_w \left[ -\frac{1}{2} (\partial_w X)^2 \right] + \dots. \tag{3.3.45}
\end{aligned}$$

Os \u00faltimos dois termos s\u00e3o precisamente os termos necess\u00e1rios para que  $T$  se transforme como um tensor de segunda ordem em uma transforma\u00e7\u00e3o conforme. O primeiro termo \u00e9 um n\u00famero extra gerado puramente devido a efeitos qu\u00e2nticos [14]. A forma deste termo \u00e9 determinada por propriedades de transforma\u00e7\u00e3o de escala, uma vez que  $T$  tem dimens\u00e3o de massa ao quadrado (para  $d = 2$ ), devendo o mesmo ser uma pot\u00eancia do tipo  $(z-w)^{-4}$ . No entanto, o coeficiente global deste termo n\u00e3o \u00e9 fixo e pode variar de um sistema para outro. Em uma teoria de campo conforme geral, esperamos que o produto de operadores tome a forma [15, 14]

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{(z-w)} \partial_w T + \dots, \tag{3.3.46}$$

onde  $c$  \u00e9 um n\u00famero fixo que mais tarde o identificaremos como sendo a “carga central”.

Podemos agora encontrar a rela\u00e7\u00e3o de comuta\u00e7\u00e3o de dois operadores  $L_n$  inserindo Eq. (3.3.46) em Eq. (3.3.38) e tra\u00e7ando o contorno  $z$  sobre o ponto  $w$  [13], obtendo

$$\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left[ \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{(z-w)} \partial_w T \right], \\
[L_n, L_m] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \left[ (n+1)w^n \cdot 2T(w) + w^{n+1} \partial_w T + (c/2) \cdot \frac{w^{n-2}}{3!} (n+1)n(n-1) \right], \\
[L_n, L_m] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left[ (2n+2)w^{n+m+1} T(w) - (m+n+2)w^{n+m+1} T(w) \right. \\
&\quad \left. + \frac{c}{12} n(n+1)(n-1)w^{m+n-1} \right], \tag{3.3.47}
\end{aligned}$$

isto nos leva à expressão

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n+1)(n-1)\delta(m+n), \quad (3.3.48)$$

que é conhecida com sendo a álgebra de Virasoro [14, 6, 15]. A constante  $c$  é chamada de *carga central* dessa álgebra; tem valor  $c = 1$  para campo escalar sem massa [14] — isto está de acordo com o nosso exemplo dado em Eq. (3.3.39) cuja carga central é de fato  $c = 1$  como podemos verificar em Eq. (3.3.45).

Podemos ver da Eq. (3.3.46) que a constante  $c$  surge no valor esperado de vácuo da raiz quadrada do operador  $T_{zz}$  e argumentar com base nisso que  $c$  deve ser positivo se o espaço de Hilbert tiver métrica positiva. Neste sentido, um estado  $|0\rangle$  pode ser construído desde que  $L_n|0\rangle = 0$  para  $n \geq 0$ , e  $L_n^\dagger = L_{-n}$ . Usando essas ferramentas podemos escrever:

$$\frac{1}{2}c = \langle 0|L_2, L_{-2}|0\rangle = \langle 0|L_2L_2^\dagger|0\rangle > 0. \quad (3.3.49)$$

O mais importante dos  $L_n$  é o  $L_0$  que é o gerador das dilatações. Deve-se notar que o termo de carga central em Eq. (3.3.48) desaparece para o conjunto dos geradores  $L_{-1}, L_0, L_1$ , que formam um subgrupo da álgebra conforme. Esses operadores geram a transformação infinitesimal [14]

$$\delta z = \alpha + \beta z + \gamma z^2. \quad (3.3.50)$$

De Eq. (3.3.48), vemos que esses geradores formam uma álgebra fechada. O subgrupo de transformações conforme gerado por esta álgebra é o grupo das transformações lineares fracionárias

$$z \rightarrow z' = \left( \frac{az + b}{cz + d} \right). \quad (3.3.51)$$

A álgebra completa das transformações anti-analíticas é gerada por um segundo conjunto de operadores de Virasoro [14]

$$\bar{L}_n = \oint \frac{d\bar{w}}{-2\pi i} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}). \quad (3.3.52)$$

Por analogia, estes operadores também formam uma álgebra fechada, com a carga central desaparecendo para o conjunto de operadores  $(\bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}_1)$ . Juntos os dois conjuntos de operadores, geram transformações infinitesimais da forma [14]

$$\delta z = \alpha + \beta z + \gamma z^2, \quad \delta \bar{z} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \bar{z} + \bar{\gamma} \bar{z}^2, \quad (3.3.53)$$

atuando sobre todos os operadores da teoria de campo conforme. Esta transformação é a forma infinitesimal de uma transformação linear fracionária Eq. (3.3.51) com coeficientes complexos gerais.

Quando se compõe dois mapas da forma Eq. (3.3.51), os parâmetros do mapeamento do produto são obtidos por multiplicação matricial do parâmetro original. Uma vez que os parâmetros de Eq. (3.3.51) são redundantes, podemos fixar o determinante  $(ad - bc) = 1$  [19]. Então, o conjunto de mapas Eq. (3.3.51) com coeficientes complexos, considerados como um subgrupo sob a composição, é isomórfico do grupo de matrizes  $2 \times 2$  com determinante unitário,  $SL(2, \mathbb{C})$ . Este subgrupo do grupo conforme completo desempenha um papel importante na teoria de cordas.

A definição de  $L_n$  pode ser considerada como uma análise de Fourier de  $T(z)$ . Será conveniente introduzir um conjunto de convenções para análises de Fourier do tensor de campo mais geral  $t(z)$ , de dimensão  $d_t$ . Vamos definir

$$t_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d_t-1} t(z), \quad t(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} t_n z^{-n-d_t}. \quad (3.3.54)$$

Para ver a utilidade desta definição, calculamos o comutador da componente de Fourier  $t_n$  com  $L_0$ . Encontramos

$$\begin{aligned} [L_0, t_n] &= \left[ \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} - \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \right] w T(w) z^{n+d_t-1} t(z) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d_t-1} \oint \frac{dw}{2\pi i} w \left[ \frac{d_t}{(w-z)^2} t(z) + \frac{1}{(w-z)} \partial_z t \right] \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d_t-1} [d_t t(z) + z \partial_z t(z)] \\ &= -n \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d_t-1} t(z). \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

Assim,

$$[L_0, t_n] = -nt_n, \quad (3.3.56)$$

isto é,  $t_n$  diminui  $L_0$  por  $n$  unidades. Em teoria de cordas, interpretamos o gerador da dilatação  $L_0$  com o Hamiltoniano da dinâmica da corda. As componentes de Fourier  $t_n$  serão operadores de aniquilação para  $n > 0$  e operadores de criação para  $n < 0$ . Operadores escada do tensor anti-simétrico podem ser definidos de maneira análoga [14].

### 3.4 Transformação do tensor energia-momento

O tensor energia-momento é um exemplo de campo que não obedece à lei de transformação geral para um campo primário  $\Phi(z, \bar{z})$  [19]

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (3.4.57)$$

onde  $h$  e  $\bar{h}$  são parâmetros positivos reais. Nos referimos a esses parâmetros como as dimensões do campo e as combinações  $d_n = h + \bar{h}$  e  $s_n = h - \bar{h}$  são, respectivamente, a escala de dimensão anômala e o spin do campo  $\Phi$  — a Eq. (3.4.57) é a generalização de Eq. (3.1.22) para uma transformação  $z \rightarrow f(z)$ . Ele também não satisfaz a expansão do produto de operadores (ou OPE, em inglês) que define a noção de campo primário

$$\begin{aligned} T(z)\Phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w, \bar{w}) + \dots, \\ \bar{T}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\Phi(w, \bar{w}) + \dots. \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

Neste caso, ao realizarmos sucessivas transformações conformes, obtemos o produto de operadores na forma [14, 15]

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w), \quad (3.4.59)$$

como visto na seção anterior. Por outro lado, usando a equação

$$\delta_\epsilon \Phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) [T(z), \Phi(w, \bar{w})], \quad (3.4.60)$$

podemos calcular a variação de  $T(w)$  em uma transformação conforme infinitesimal, fazendo

$$\delta_\epsilon T(w) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) [T(z), T(w)] = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) T(w). \quad (3.4.61)$$

Usando a Eq. (3.4.59), obtemos [?, 6]

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \left[ \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{\partial}{z-w} T(w) \right], \quad (3.4.62)$$

que, por sua vez, produz [19, 6, 15]

$$\delta_\epsilon T(w) = \epsilon(w) \partial T(w) + 2\partial_\epsilon(w) T(w) + \frac{c}{12} \partial^3 \epsilon(w). \quad (3.4.63)$$

Podemos integrar esta expressão acima, obtendo

$$T(w) \rightarrow (\partial f)^2 T(f(w)) + \frac{c}{12} S(f(w), w), \quad (3.4.64)$$

com  $w \rightarrow f(w)$ , e ainda expressar a quantidade  $S(f(w), w)$ , na forma

$$S(f(w), w) = \frac{2\partial_w f \partial_w^3 f - 3(\partial_w^2 f)^2}{2(\partial_w f)^2}, \quad (3.4.65)$$

conhecida como derivada de Schwartz [15].

## Capítulo 4

# Descrição Microscópica de Entropia de Buracos Negros e Defeitos Cônicos

A lei macroscópica da entropia de buracos negros é dada da forma [21]

$$S = \frac{A}{4G}. \quad (4.0.1)$$

Ela relaciona a entropia termodinâmica com a área do horizonte de eventos. A característica marcante desta lei é a sua aplicabilidade universal, incluindo todas as variedades de buracos negros.

A compreensão da origem microscópica desta lei é sem dúvida a chave para a compreensão da natureza fundamental do espaço-tempo e da mecânica quântica [3]. Alguns progressos foram alcançados com a obtenção da Eq. (4.0.1) para certos buracos negros em teorias de corda [4]. Isso tem levado a uma variedade de percepções que culminaram na correspondência AdS/CFT [11].

Em uma teoria covariante não é natural atribuir uma densidade de energia-momento para o campo gravitacional. Na verdade, podemos considerar um tensor de tensão quasilocal, definido sobre a fronteira de uma dada região do espaço-tempo e pensar na ação gravitacional como um funcional nesta fronteira, com métrica  $h_{\mu\nu}$  [24]. Este



tensor, associado a região do espaço-tempo, foi definido por Brown e York em [25]. Usando esta quantidade, juntamente com propriedades conformes, obtemos uma nova noção de massa e cargas conservadas que estão associados a efeitos da matéria sobre a geometria do espaço-tempo.

## 4.1 Espaços de Sitter e anti-de Sitter

Os espaços com curvatura escalar constante  $R$  são maximalmente simétricos: admitem o mais alto número de vetores de Killing. Dada uma assinatura para a métrica, esse espaço é único para cada valor de  $R$  [29]. O espaço de Minkowski  $\mathbb{M}$ , com  $R = 0$ , é o mais simples. Seu grupo é o grupo de Poincaré  $P = L \otimes T$  que é o produto semi-direto entre o grupo de Lorentz  $L = SO(3, 1)$  e grupo de translações  $T$ .

Entre os espaços curvos, os espaços de Sitter e anti-de Sitter são as únicas possibilidades de espaços maximalmente simétricos. Um deles tem curvatura escalar negativa e o outro positiva. Imersos respectivamente nos espaços pseudo-euclidianos  $\mathbb{E}^{4,1}$  e  $\mathbb{E}^{3,2}$ , eles são superfícies cujos pontos, em coordenadas cartesianas  $(X^A) = (X^0, X^1, X^2, X^3, X^4)$ , satisfazem [22]

$$\eta_{AB}X^AX^B \equiv (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = -l^2, \quad (4.1.2)$$

e

$$\eta_{AB}^AX^B \equiv (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 + (X^4)^2 = l^2, \quad (4.1.3)$$

onde  $l$  é o parâmetro de comprimento de Sitter. Usando o alfabeto latino  $(a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3)$  para denotar os índices em quatro dimensões, com  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , e denotando  $\eta_{44} = s$ , as expressões acima podem ser escritas na forma

$$\eta_{ab}X^aX^b + s(X^4)^2 = sl^2. \quad (4.1.4)$$

Para  $s = -1$ , temos o espaço de Sitter  $dS(4, 1)$ , cuja métrica é induzida pela métrica pseudo-euclideana  $\eta_{AB} = (+1, -1, -1, -1, +1)$ , descrita pelo grupo  $SO(4, 1)$ . O caso

$s = +1$  corresponde ao espaço de anti-de Sitter, denotado aqui por  $AdS(3, 2)$ , cuja métrica vem de  $\eta_{AB} = (+1, -1, -1, -1, +1)$ , descrita pelo grupo  $SO(3, 2)$ . Ambos são espaços homogêneos [20]:

$$dS(4, 1) = SO(4, 1)/L \quad e \quad dS(3, 2) = SO(3, 2)/L, \quad (4.1.5)$$

e são soluções das equações de Einstein com termo cosmológico; o que implica na seguinte relação entre  $\Lambda$  e o parâmetro de comprimento de de Sitter  $l$

$$\Lambda = -\frac{3s}{l^2}. \quad (4.1.6)$$

Na maior parte do nosso trabalho consideramos apenas o espaço de Sitter  $dS(4, 1)$ , para o qual a constante cosmológica é positiva:  $\Lambda > 0$ .

## 4.2 Tensor de tensão para espaço de Sitter

Naturalmente não é comum atribuir uma densidade de energia para o campo gravitacional, mas é útil considerarmos o chamado tensor de tensão quaselocal definido por Brown e York [25]. Vamos pensar na ação gravitacional como um funcional que age na fronteira. Nesse sentido, Brown e York definiram o tensor como uma quantidade que está relacionada a uma região do espaço-tempo da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta S_{grav}}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (4.2.7)$$

Esse tensor tipicamente diverge quando tomamos a fronteira no infinito. No entanto, podemos adicionar termos de fronteira na ação sem que a obtenção das equações de movimento seja afetada. Podemos ainda considerar a relação entre a ação gravitacional, vista como um funcional na fronteira e a ação quântica efetiva de uma teoria de campo conforme, também na fronteira. Segundo esta correspondência, a variação da ação efetiva relaciona-se ao valor esperado do tensor de tensão em CFT [24] por meio

da expressão

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta S_{eff}}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (4.2.8)$$

As divergências que aparecem com a fronteira movendo-se para o infinito, é simplesmente a divergência ultravioleta padrão da teoria quântica de campos e pode ser removida adicionando-se contratermos na ação [24].

Abbott e Deser [27] usam aproximações perturbativas para medir a energia de flutuações. No espaço anti-de Sitter, assim como no espaço de Sitter, o tensor de tensão de Brown-York, leva a um método conveniente para cálculo de quantidades importantes como massa e momento [30].

Inicialmente, podemos escrever a ação euclideana no espaço-tempo com  $d + 1$  dimensões na seguinte forma [28]

$$I_{bulk} + I_{surf} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{d(d-1)}{l^2} \right] + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} K. \quad (4.2.9)$$

O primeiro termo é a ação de Einstein-Hilbert no espaço de Sitter com constante cosmológica

$$\lambda = \frac{d(d-1)}{2l^2}. \quad (4.2.10)$$

A segunda integral na Eq. (4.2.9) é o termo de fronteira de Gibbons-Hawking necessário para que o princípio variacional seja bem definido [36].  $K$  é o traço da curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu n_\nu$  da fronteira  $\partial M$  imersa em  $M$ , com  $n^\mu$  sendo o vetor unitário normal. No contexto anti-de Sitter, ambos os termos da ação são divergentes porque o volume de ambos  $M$  e  $\partial M$  são infinitos.

Uma abordagem tradicional para contornar esse problema consiste na “subtração de fundo”, isto é, produz-se um resultado finito subtraindo da Eq. (4.2.9) a contribuição do espaço-tempo de fundo de referência. Então podemos comparar as propriedades da solução de interesse em relação aos estados de referência. Note, no entanto, que essa subtração requer que o limite assintótico da geometria das duas soluções possam ser combinadas de modo a tornar finita a contribuição da superfície [35].

No espaço de Sitter, as fronteiras do espaço-tempo são superfícies euclidianas. A curvatura extrínseca no termo de fronteira é necessária para que a variação de Euler-Lagrange seja bem definida.

É importante definir a escala de comprimento

$$\Lambda = \frac{d(d-1)}{2l^2}, \quad (4.2.11)$$

onde as soluções de Sitter de vácuo para as equações de movimento podem ser escrita em termos de  $l$ , na forma

$$ds^2 = -dt^2 + l^2 \cosh^2\left(\frac{t}{l}\right) (d\Omega_d^2), \quad (4.2.12)$$

em que superfícies de tempo constante são  $d$ -esferas. O mesmo espaço admite um sistema de coordenadas onde superfícies de tempo constante são planos, descritos como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 + e^{\frac{2\tau}{l}} d\vec{x}^2, \\ &= \frac{l^2}{\eta^2} [-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{l}{2} \ln\left(\frac{l^2}{\eta^2}\right), \\ e^\tau &= e^{\left[\frac{l}{2} \ln\left(\frac{l^2}{\eta^2}\right)\right]}, \\ \eta^2 &= l^2 e^{-(\tau - \frac{l}{2})}, \\ \eta &= l e^{-\frac{1}{2}(\tau - \frac{l}{2})}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

com  $\tau \in [-\infty, +\infty]$ , enquanto,  $\eta \in (0, \infty]$  [30]. Essa região cobre apenas um lado do espaço de Sitter; extendendo-se do big bang (horizonte passado) para uma superfície euclidiana no futuro. O outro lado do espaço de Sitter é coberto quando substituimos

$\tau$  por  $-\tau$  em Eq. (4.2.13), obtendo

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 + e^{-\frac{2\tau}{l}} d\vec{x}^2, \\ &= \frac{l^2}{\eta^2} [-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Finalmente, um observador inercial no espaço de Sitter vê um espaço-tempo com um horizonte cosmológico [30]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (4.2.16)$$

Podemos passar de um espaço de Sitter para um anti-de Sitter por meio de uma continuação analítica  $l \rightarrow il$  em coordenadas de Poincaré ou  $x \rightarrow it$  e  $t \rightarrow ix$ , simultaneamente, em coordenadas cartesianas. Através das propriedades do espaço anti-de Sitter, podemos inferir alguns aspectos físicos do espaço de Sitter.

### 4.3 Ação finita

Em geral, quando analisamos uma solução para as equações de movimento, a ação descrita na Eq. (4.2.9) diverge. Essa divergência se deve à integral sobre o volume infinito do espaço-tempo. No caso da gravidade em de Sitter, um procedimento de regularização proposto em [24, 38, 35], consiste na adição de contratermos construídos a partir de invariantes de curvatura da fronteira. Esses contratermos, que são essencialmente únicos, podem ser facilmente generalizados para o caso de constante cosmológica positiva, produzindo [28]

$$I_{ct} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} \left[ \frac{(d-1)}{l} - \frac{lR}{2(d-2)} \right], \quad (4.3.17)$$

ou ainda

$$I_{ct} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} \mathcal{L}_{ct}, \quad (4.3.18)$$

onde

$$\mathcal{L}_{ct} = \frac{(d-1)}{l} - \frac{l}{2(d-2)}R. \quad (4.3.19)$$

O segundo contratermo em  $\mathcal{L}_{ct}$  surge apenas quando  $d+1 > 3$ . Nesta expressão,  $R$  é a curvatura intrínseca da fronteira e a análise se dá em uma região do espaço de Sitter no tempo finito e, posteriormente, em uma superfície de  $t$  tendendo ao infinito.

Em dimensões ímpares há uma divergência logaritmica na coordenada conforme  $\eta$ . Esta divergência não pode ser cancelada sem incluir uma dependência explícita no contratermo da ação, levando a uma anomalia conforme [30].

Analisando a ação, por exemplo para  $d = 2$ , percebemos o quanto a mesma diverge em uma situação onde  $t \rightarrow \infty$

$$I = \frac{1}{8\pi G} \int d^2x e^{2t/l} \left( \frac{-1}{l} \right) + \textit{finita}. \quad (4.3.20)$$

Segundo Mottola e Manzur [26], espaços assintóticos com constante cosmológica negativa podem ser descritos de forma análoga aos espaços com constante cosmológica positiva. Esse resultado juntamente com [37] e [24] também mostram que a divergência da ação na Eq. (4.2.9) pode ser cancelada adicionando contratermos e que este procedimento não afeta as equações de movimento.

Podemos agora escrever a ação completa, sem o problema da divergência, na forma [28]

$$\begin{aligned} I &= I_{bulk} + I_{surf} + I_{ct}, \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{d(d-1)}{l^2} \right] + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} K \\ &+ \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} \mathcal{L}_{ct}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Em todas as dimensões, a ação tem uma classe de divergentes que são potências da coordenada conforme temporal  $\eta$ . Uma melhor compreensão é obtida analisando a correspondência AdS/CFT em [39].

### 4.3.1 Cálculo do tensor de tensão

Para obtermos informações sobre as propriedades do espaço anti-de Sitter ou de forma análoga sobre o espaço de Sitter, é necessário avaliar a ação sobre a fronteira desse espaço de modo que quantidades importantes sejam obtidas. Uma dessas quantidades é o chamado tensor de tensão que inicialmente foi descrito por Brown e York em [25, 24].

Podemos calcular a curvatura extrínseca por meio da expressão

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_\mu h_{\mu\nu}, \\ &= -h_\mu^i \nabla_i u_\nu, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

onde  $\mathcal{L}_\mu$  é a derivada de Lie ao longo de  $u^\mu$ . A expressão em Eq. (4.3.22) para  $K_{\mu\nu}$  é simétrica em relação a  $\mu$  e  $\nu$ , porque a norma  $u^\mu$  está na superfície e tem fugacidade  $h_\mu^i \nabla_i u_\nu - h_\nu^i \nabla_i u_\mu = 0$ .

O tensor de tensão quaselocal (euclidean) é obtido analisando a resposta da ação avaliada sobre o espaço de soluções clássicas, a uma variação da métrica na fronteira. Podemos calcular esta quantidade por meio da expressão;

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta I}{\delta h_{\mu\nu}}, \quad (4.3.23)$$

onde calculamos a variação de cada termo da ação na Eq. (4.3.21) separadamente.

Inicialmente, variamos a ação no *bulk*. Usando  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  e fazendo

$$\frac{\delta I_{bulk}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta I_{bulk}^1}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta I_{bulk}^2}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.3.24)$$

temos

$$\frac{\delta I_{bulk}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g}(R + 2\Lambda)], \quad (4.3.25)$$

onde

$$\frac{\delta I_{bulk}^1}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}) R, \quad (4.3.26)$$

e

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g.$$

Da fórmula de Jacobi para a diferenciação de determinantes [16], segue:

$$\begin{aligned}\delta g &= g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \\ &= -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}),\end{aligned}\tag{4.3.27}$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}) &= -\frac{(-g)}{2\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\tag{4.3.28}$$

que substituindo na Eq. (4.3.26), obtemos:

$$\frac{\delta I_{bulk}^1}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \left( -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} \right).\tag{4.3.29}$$

Agora, para o segundo termo da ação no *bulk*, temos;

$$\frac{\delta I_{bulk}^2}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g}\delta R,\tag{4.3.30}$$

onde

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\tag{4.3.31}$$

que por sua vez

$$\frac{\delta I_{bulk}^2}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\tag{4.3.32}$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.3.26) e a Eq. (4.3.32) na Eq. (4.3.24), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta I_{bulk}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right], \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu},\end{aligned}$$



ou ainda,

$$\frac{\delta I_{bulk}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^{d+1}x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.3.33)$$

com o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ .

Variando agora o termo de fronteira ( $I_{surf}$ ), encontramos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_{surf}}{\delta h^{\mu\nu}} &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} (\sqrt{h}K), \\ &= \frac{1}{8\pi G} \int_M d^d x \left[ \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} (\sqrt{h})K + \sqrt{h} \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} K \right], \\ &= \frac{1}{8\pi G} \int_M d^d x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{h}h_{\mu\nu}K\delta h^{\mu\nu} + \sqrt{h}K_{\mu\nu}\delta h^{\mu\nu} \right], \\ &= \frac{1}{8\pi G} \int_M d^d x \sqrt{h} \left[ -\frac{1}{2}Kh_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \right] \delta h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Realizando o mesmo procedimento para os contratermos que cancelam a divergência da ação, a variação toma a forma:

$$\frac{\delta I_{ct}}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} \left[ \sqrt{h} \left( \frac{(d-1)}{l} - \frac{lR}{2(d-2)} \right) \right], \quad (4.3.35)$$

calculando separadamente as variações para ambos os termos em parênteses

$$\frac{(d-1)}{l} \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} (\sqrt{h}) = -\frac{(d-1)}{l} \frac{1}{2} \sqrt{h} h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}, \quad (4.3.36)$$

$$\frac{l}{2(d-2)} \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} (\sqrt{h}R) = \frac{l}{2(d-2)} \sqrt{h} \left[ -\frac{1}{2}Rh_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right] \delta h^{\mu\nu}, \quad (4.3.37)$$

e substituindo a Eq. (4.3.36) e a Eq. (4.3.37) na Eq. (4.3.35) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_{ct}}{\delta h^{\mu\nu}} &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \left[ -\frac{(d-1)}{l} \frac{1}{2} \sqrt{h} h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{2(d-2)} \sqrt{h} \left( -\frac{1}{2}Rh_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right) \delta h^{\mu\nu} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_{ct}}{\delta h^{\mu\nu}} &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} \left[ -\frac{(d-1)}{l} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{2(d-2)} \left( -\frac{1}{2}Rh_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right) \right] \delta h^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_{ct}}{\delta h^{\mu\nu}} &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^d x \sqrt{h} \left[ \frac{(d-1)}{l} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{2(d-2)} G_{\mu\nu} \right] \delta h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Com a Eq. (4.3.34) e a Eq. (4.3.38), escrevemos a forma geral para a variação  $\delta I/\delta h_{\mu\nu}$  e, conseqüentemente, obtemos o seguinte tensor de tensão na fronteira [30]:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta I}{\delta h^{\mu\nu}}, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi G} \left[ K_{\mu\nu} - K h_{\mu\nu} - \frac{(d-1)}{l} h_{\mu\nu} - \frac{l G_{\mu\nu}}{(d-2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Para obter o tensor de tensão na fronteira, calculamos a Eq. (4.3.39) no tempo fixo e depois tomamos o mesmo no infinito de modo que a superfície se aproxime da fronteira do espaço-tempo.

É interessante trabalhar com tensores de tensão que serão úteis em situações posteriores. Por exemplo, considerando uma superfície bidimensional ( $d = 2$ ) com o tempo constante em  $ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\tau/l} d\vec{x}^2$ , podemos calcular o tensor de tensão Eq. (4.3.39) sobre esta superfície, da seguinte forma:

$$8\pi G T_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - K \gamma_{\mu\nu}, \quad (4.3.40)$$

para cada componente, temos:

$$8\pi G T_{11} = K_{11} - K \gamma_{11},$$

$$8\pi G T_{22} = K_{22} - K \gamma_{22},$$

com

$$K_{11} = \frac{e^{2\tau/l}}{l}, \quad K_{22} = \frac{e^{2\tau/l}}{l}, \quad K = \frac{2}{l},$$

logo, ficamos com a seguinte expressão:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G l} e^{-2t/l} + \frac{1}{8\pi G l} e^{-2t/l} = 0, \quad (4.3.41)$$

onde concluímos que esse tensor de tensão cancela o contratermo da ação [30].

## 4.4 Cargas conservadas

O tensor de tensão Eq. (4.3.39) avalia a resposta da ação do espaço-tempo a uma mudança na métrica, dessa forma obtemos uma noção de massa. Em analogia com o espaço anti-de Sitter, estudamos uma noção de massa alternativa introduzida em [24] para um espaço de Sitter assintótico. Podemos escrever a métrica  $h_{\mu\nu}$  sobre superfícies de tempo constantes na forma:

$$h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = N_\rho^2 d\rho^2 + \sigma_{ab}(d\phi^a + N_\Sigma^a d\rho)(d\phi^b + N_\Sigma^b d\rho), \quad (4.4.42)$$

onde  $\phi^a$  são variáveis angulares parametrizando superfícies fechadas ao redor da origem.  $\xi^\mu$  são vetores de Killing [20] gerando uma isometria sobre a geometria da fronteira. Segundo [30], podemos relacionar cargas conservadas à  $\xi^\mu$  da seguinte forma:

$$Q = \oint_\Sigma d^{d-1}\phi \sqrt{\sigma} n^\mu \xi^\mu T_{\mu\nu} \quad (4.4.43)$$

onde  $n^\mu$  é o vetor unitário sobre a superfície com  $\rho$  fixo.

Definimos [30] uma noção de massa  $M$  de um espaço assintoticamente de Sitter

$$M = \oint_\Sigma d^{d-1}\phi \sqrt{\sigma} N_\rho n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (4.4.44)$$

onde normalizamos o vetor de Killing na Eq. (4.4.43) da forma  $\xi^\mu = N_\rho n^\mu$ . Da mesma forma, podemos definir momento

$$P_a = \oint_\Sigma d^{d-1}x \sqrt{\sigma} j_a; \quad j_a = \sigma_{ab} n_\mu T^{a\mu}. \quad (4.4.45)$$

Analisamos esta expressão na superfície com tempo fixo e posteriormente num tempo infinito, de modo que a fronteira do espaço-tempo se aproxime de  $\mathcal{I}^\pm$ . Nas próximas seções, vamos obter cargas conservadas em situações específicas usando a definição do tensor de tensão na fronteira.

## 4.5 Espaço-tempo cosmológico tridimensional

Em 3 dimensões só existem buracos negros quando há uma constante cosmológica negativa, mas quando  $\Lambda > 0$  encontramos uma classe de defeitos cônicos que nos

referimos como espaços de Kerr-de Sitter [30, 40]

$$ds^2 = -\frac{(r^2 + r_-^2)(r_+^2 - r^2)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r^2 + r_-^2)(r_+^2 - r^2)} dr^2 + r^2 \left( d\phi + \frac{r_+ r_-}{r^2} dt \right)^2,$$

que é semelhante a solução de buraco negro BTZ [31] com gravidade em  $3d$ , constante cosmológica negativa e horizonte de eventos em  $r = r_+$  de circunferência  $2\pi r_+$ .

Para  $r^2 > r_+^2$ , o tempo passa a ser uma coordenada tipo-espaço enquanto  $r$  torna-se tipo-tempo, logo, a métrica toma a forma [30]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{r^2}{(r^2 + r_-^2)(r^2 - r_+^2)} dr^2 + r^2 \left( d\phi + \frac{r_+ r_-}{r^2} dt \right)^2 \\ &+ \frac{(r^2 + r_-^2)(r^2 - r_+^2)}{r^2} dt^2. \end{aligned} \quad (4.5.46)$$

Para  $|r|$  grande, estamos em uma região próxima a fronteira  $\mathcal{I}^\pm$  no diagrama de Penrose do espaço de Sitter em 3-dimensões.

Perto da fronteira no passado  $\mathcal{I}^-$  a métrica Eq. (4.5.46) torna-se

$$ds^2 \sim -\frac{dr^2}{r^2} + r^2(d\phi^2 + dt^2), \quad (4.5.47)$$

e regiões tipo-espaço são cilindros.

A métrica (4.5.46) com  $r_- = 0$

$$ds^2 = -(r_+^2 - r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(r_+^2 - r^2)} + r^2 d\phi^2 \quad (4.5.48)$$

é um defeito cônico com deficit angular  $2\pi(1 - r_+)$ , descrevendo o espaço-tempo com constante cosmológica positiva e observadores pontuais massivos. Quando  $r_+ = 1$ , obtemos a métrica global de  $dS_3$ .

Outra alternativa de parametrização leva à métrica da forma [30]:

$$ds^2 = -\frac{1}{1+t^2} dt^2 + (1+t^2)d\phi^2 + r_-^2 d\psi^2. \quad (4.5.49)$$

No limite  $t \rightarrow 0$ , o toro descrito pela métrica acima, se contrai em um círculo. Fazendo a reparametrização  $t = \sinh(\tau)$  na Eq. (4.5.49), obtemos:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \cosh^2 \tau d\phi^2 + r_-^2 d\psi^2, \quad (4.5.50)$$

que para  $-\infty < t \leq 0$  temos uma solução tipo “big crunch”, enquanto que para  $0 \leq t < \infty$  a solução é tipo “big bang”.

Existem soluções mais gerais de “big bang” e “big crunch”, com métrica idêntica a Eq. (4.5.46), da forma [30]

$$ds^2 = -\frac{t^2}{(t^2 + r_-^2)(t^2 - r_+^2)} dt^2 + t^2 \left( d\phi + \frac{r_+ r_-}{t^2} dr \right)^2 + \frac{(t^2 + r_-^2)(t^2 - r_+^2)}{t^2} dr^2 \quad (4.5.51)$$

## 4.6 Massa e momento angular no espaço-tempo de Kerr-de Sitter

A métrica de Kerr-de Sitter é escrita convenientemente na forma [30]

$$ds^2 = - \left[ 8Gm - \frac{r^2}{l^2} + \frac{(8GJ)^2}{4r^2} \right] dt^2 + \left[ 8Gm - \frac{r^2}{l^2} + \frac{(8GJ)^2}{4r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 \left( -\frac{8GJ}{2r^2} dt + d\phi \right)^2, \quad (4.6.52)$$

com singularidade em

$$r^{(1)} = \sqrt{\frac{l^2(8Gm) + l\sqrt{l^2(8Gm)^2 + (8GJ)^2}}{2}}, \quad (4.6.53)$$

$$r^{(2)} = \sqrt{\frac{l^2(8Gm) - l\sqrt{l^2(8Gm)^2 + (8GJ)^2}}{2}}. \quad (4.6.54)$$

onde  $J$  e  $G$  são momento angular e constante gravitacional newtoniana, respectivamente. Vamos analisar esta métrica para  $J = 0$  e obter quantidades conservadas, analisando a mesma em uma região específica do espaço-tempo. Nesse caso, podemos escrever a métrica na forma:

$$ds^2 = - \left( 8Gm - \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \left( 8Gm - \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.6.55)$$

com singularidade em  $r = l\sqrt{8Gm}$ .

Essa métrica representa espaços com defeito cônico como mostra a Eq. (4.5.48). Quando temos  $8Gm = 1$ , tais espaços aproximam-se do espaço de Sitter vazio [30].

Na região  $r < l\sqrt{8Gm}$ , as superfícies com tempo constante aproximam-se do horizonte cosmológico, enquanto que na região  $r > l\sqrt{8Gm}$ , onde a métrica tem a forma,

$$ds^2 = \left( \frac{r^2}{l^2} - 8Gm \right) dt^2 - \left( \frac{r^2}{l^2} - 8Gm \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.6.56)$$

a coordenada  $r$  torna-se tipo-tempo e o  $t$  tipo-espaço.

Uma superfície de tempo constante do espaço-tempo com defeito cônico fora do horizonte cosmológico tem uma métrica

$$ds^2 = \left( \frac{r^2}{l^2} - 8Gm \right) dt^2 + r^2 d\phi^2. \quad (4.6.57)$$

Com  $r \rightarrow \infty$  encontramos

$$M = \frac{1}{8\pi G} \oint d\theta \frac{8Gm}{2} = m, \quad (4.6.58)$$

definindo  $8Gm = 1$ , a massa atribuída ao espaço  $dS_3$  é então,  $m = 1/8G$ . Nesse sentido, percebe-se que os defeitos cônicos, nos quais  $8Gm < 1$ , têm massa menor do que o espaço de Sitter puro.

## 4.7 Simetria conforme assintótica

Brown e Henneaux [23] especificaram condições de contorno para espaços  $AdS_3$  assintóticos que admitem uma álgebra de difeomorfismo bem definida. Essas condições também podem ser especificadas para espaços  $dS$  no infinito, definindo uma geometria de Sitter assintótica.

Segundo Brown e Henneaux, a gravidade no espaço-tempo  $AdS_3$  é uma teoria de campo conforme com carga central  $c = 3l/2G$  [24]. Como uma verificação de nossa abordagem e, pelo fato do nosso método covariante oferecer uma alternativa ao formalismo Hamiltoniano adotado em [23], reproduzimos aqui este resultado, lembrando

sempre que o procedimento utilizado pode ser aplicado de forma análoga ao espaço  $dS_3$ .

Do ponto de vista da correspondência AdS/CFT, podemos pensar no grupo de simetria conforme como um grupo surgindo de uma teoria quântica de campos não-gravitacional de 1+1 dimensões, ou seja, uma teoria de campo conforme  $CFT_2$ , vivendo sobre a fronteira do  $AdS_3$  [24].

Seja um espaço-tempo plano bidimensional

$$ds^2 = -dx^+ dx^-, \quad (4.7.59)$$

e difeomorfismos da forma

$$x^+ \rightarrow x^+ - \epsilon^+(x^+), \quad x^- \rightarrow x^- - \epsilon^-(x^-), \quad (4.7.60)$$

o tensor de tensão se transforma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_{++} &\rightarrow T_{++} + (2\partial_+ \epsilon^+ T_{++} + \epsilon^+ \partial_+ T_{++}) - \frac{c}{24\pi} \partial_+^3 \epsilon^+, \\ T_{--} &\rightarrow T_{--} + (2\partial_- \epsilon^- T_{--} + \epsilon^- \partial_- T_{--}) - \frac{c}{24\pi} \partial_-^3 \epsilon^-. \end{aligned} \quad (4.7.61)$$

Veja a demonstração em Eq. (3.4.63). Os termos em parênteses são apenas as regras de transformação clássicas de um tensor, enquanto o último termo tem origem nos efeitos quânticos. Vamos recordar brevemente a origem desse último. Embora a Eq. (4.7.60) seja uma simetria clássica da CFT, a mesma não é uma simetria a nível quântico; o que caracteriza uma anomalia [30].

Focamos nossa atenção na obtenção do último termo em Eq. (4.7.61), iniciando a partir de  $AdS_3$  na forma

$$ds^2 = \frac{l^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^-, \quad (4.7.62)$$

para o qual  $T_{\mu\nu} = 0$ . Pensamos em uma CFT dual vivendo sobre a superfície  $ds^2 = -r^2 dx^+ dx^-$  com  $r$  eventualmente tomado no infinito, ou seja, na fronteira de  $AdS_3$ . Agora, considere o difeomorfismo em Eq.(4.7.60). Conforme vimos previamente, isto

não é uma simetria, visto que introduz um fator de Weyl na métrica da fronteira. Para obter uma simetria, devemos deixar a métrica invariante em sua forma assintótica e as condições necessárias para se fazer isso são dadas por Brown e Henneaux em [23]:

$$g_{+-} = -\frac{r^2}{2} + O(1), \quad g_{++} = O(1), \quad g_{--} = O(1), \quad (4.7.63)$$

$$g_{rr} = \frac{l^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad g_{+r} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad g_{-r} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4.7.64)$$

O difeomorfismo com respeito à essas condições são escritos na forma

$$\begin{aligned} x^+ &\rightarrow x^{+'} = x^+ - \epsilon^+ - \frac{l^2}{2r^2} \partial_-^2 \epsilon^-, \\ x^- &\rightarrow x^{-'} = x^- - \epsilon^- - \frac{l^2}{2r^2} \partial_+^2 \epsilon^+, \\ r &\rightarrow r' = r + \frac{r}{2} (\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-). \end{aligned} \quad (4.7.65)$$

A métrica agora, toma a forma

$$ds'^2 = \frac{l^2}{r'^2} dr'^2 - r'^2 dx^{+'} dx^{-'}, \quad (4.7.66)$$

diferenciando as coordenadas  $x^{+'}$ ,  $x^{-'}$  e  $r'$

$$\begin{aligned} dx^{+'} &= dx^+ - \partial_+ \epsilon^+ dx^+ - \frac{l^2}{2r^2} \partial_-^3 \epsilon^-, \\ dx^{-'} &= dx^- - \partial_- \epsilon^- dx^- - \frac{l^2}{2r^2} \partial_+^3 \epsilon^+, \\ dr' &= dr + \frac{1}{2} (\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-) dr, \end{aligned} \quad (4.7.67)$$

e substituindo na expressão Eq. (4.7.66)

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \frac{l^2}{\left[r + \frac{r}{2} (\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-)\right]^2} \left[1 + \frac{1}{2} (\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-)\right]^2 dr^2 \\ &- \left[r + \frac{r}{2} (\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-)\right]^2 \left[dx^+ - \partial_+ \epsilon^+ dx^+ - \frac{l^2}{2r^2} \partial_-^3 \epsilon^-\right] \\ &\quad \left[dx^- - \partial_- \epsilon^- dx^- - \frac{l^2}{2r^2} \partial_+^3 \epsilon^+\right], \end{aligned} \quad (4.7.68)$$

encontramos a métrica transformada

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = \frac{l^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- - \frac{l^2}{2} (\partial_+^3 \epsilon^+) (dx^+)^2 - \frac{l^2}{2} (\partial_-^3 \epsilon^-) (dx^-)^2. \quad (4.7.69)$$



No limite em que  $r \rightarrow \infty$  a métrica (4.7.69) passa a ser escrita na forma

$$ds'^2 = -r^2 dx^+ dx^- - \frac{l^2}{2} (\partial_+^3 \epsilon^+) (dx^+)^2 - \frac{l^2}{2} (\partial_-^3 \epsilon^-) (dx^-)^2 \quad (4.7.70)$$

com componentes  $\gamma_{ij}$  induzidas na fronteira dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{-+} &= -\frac{r^2}{2}, \\ \gamma_{++} &= -\frac{l^2}{2} (\partial_+^3 \epsilon^+), \\ \gamma_{--} &= -\frac{l^2}{2} (\partial_-^3 \epsilon^-). \end{aligned} \quad (4.7.71)$$

Podemos agora calcular o tensor de tensão analisando a curvatura extrínseca na fronteira. Neste caso, temos

$$8\pi GT_{++} = K_{++} - K\gamma_{++}, \quad (4.7.72)$$

com

$$\begin{aligned} K_{++} &= -\gamma_+^+ \nabla_+ n_+ - \gamma_+^- \nabla_- n_+ - \gamma_+^2 \nabla_2 n_+, \\ &= -g^{++} \gamma_{++} (\partial_+ n_+ - \Gamma_{++}^2 n_2) - g^{-+} \gamma_{++} (\partial_- n_+ - \Gamma_{+-}^2 n_2), \\ &= g^{++} \gamma_{++} \Gamma_{++}^2 n_2 + g^{-+} \gamma_{++} \Gamma_{+-}^2 n_2. \end{aligned} \quad (4.7.73)$$

Agora, para o cálculo das conexões  $\Gamma_{++}^2$  e  $\Gamma_{+-}^2$ , tomamos  $\rho = +, 2, -$  e também  $x^2 = r$ , obtendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{+-}^2 &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left( \frac{\partial g_{+\rho}}{\partial x^-} + \frac{\partial g_{-\rho}}{\partial x^+} - \frac{\partial g_{+-}}{\partial x^\rho} \right), \\ &= \frac{1}{2} g^{22} \left( -\frac{\partial g_{+-}}{\partial r} \right), \\ &= \frac{r^3}{2l^2}, \\ \Gamma_{++}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.7.74)$$

Substituindo Eq. (4.7.74) em Eq. (4.7.73), encontramos o valor para  $K_{++}$

$$\begin{aligned} K_{++} &= -\frac{2}{r^2} \left( -\frac{l^2}{2} \partial_+^3 \epsilon^+ \right) \frac{r^3 l}{2l^2 r}, \\ &= -\frac{2}{r^2} \left( -\frac{l^2}{2} \partial_+^3 \epsilon^+ \right) \frac{r^3 l}{2l^2 r}, \\ &= \frac{l}{2} (\partial_+^3 \epsilon^+). \end{aligned} \quad (4.7.75)$$

Fazendo o mesmo procedimento para  $K_{--}$ , ou seja

$$\begin{aligned}
K_{--} &= -\gamma_-^+ \nabla_+ n_- - \gamma_-^- \nabla_- n_- - \gamma_-^2 \nabla_2 n_-, \\
&= -g^{+-} \gamma_{--} (\partial_+ n_- - \Gamma_{-+}^2 n_2) - g^{--} \gamma_{--} (\partial_- n_- - \Gamma_{--}^2 n_2), \\
&= g^{+-} \gamma_{--} \Gamma_{-+}^2 n_2 + g^{--} \gamma_{--} \Gamma_{--}^2 n_2,
\end{aligned} \tag{4.7.76}$$

agora com  $\Gamma_{-+}^2 = \frac{r^3}{2l^2}$  e  $\Gamma_{--}^2 = 0$ . Desta forma, encontramos

$$\begin{aligned}
K_{--} &= -\frac{2}{r^2} \left( -\frac{l^2}{2} \partial_-^3 \epsilon^- \right) \frac{r^3}{2l^2} \frac{l}{r}, \\
&= -\frac{2}{r^2} \left( -\frac{l^2}{2} \partial_-^3 \epsilon^- \right) \frac{r^3}{2l^2} \frac{l}{r}, \\
&= \frac{l}{2} (\partial_-^3 \epsilon^-).
\end{aligned} \tag{4.7.77}$$

Podemos agora calcular o traço do tensor de curvatura extrínseca

$$\begin{aligned}
K &= \gamma^{++} K_{++} + \gamma^{--} K_{--}, \\
&= -\frac{l}{2},
\end{aligned}$$

e conseqüentemente, obter o tensor de tensão

$$T_{++} = -\frac{l}{16\pi G} \partial_+^3 \epsilon^+, \quad T_{--} = -\frac{l}{16\pi G} \partial_-^3 \epsilon^-. \tag{4.7.78}$$

Comparando esse resultado com a expressão (4.7.61), vemos que a relação entre ambos se dá apenas quando

$$c = \frac{3l}{2G}. \tag{4.7.79}$$

Isto confirma o resultado de Brown e Henneaux obtido para  $AdS_3$  [23].

Restringimos nossa atenção ao difeomorfismo Eq. (4.7.65) porque estamos interessados em simetrias que preservem a forma da métrica na fronteira. Em geral, podemos estudar outras formas de difeomorfismos, no entanto, tais formas modificam uma teoria de campo conforme como também não são simetrias da mesma [24].

## 4.8 Fórmula de Cardy e Entropia de Bekenstein-Hawking

O espaço-tempo de Kerr-de Sitter, descrito pela métrica Eq. (4.6.52), tem horizonte cosmológico em  $r = l\sqrt{8Gm}$  para  $J = 0$  e, conseqüentemente, a entropia tem a forma

$$S = \frac{\pi l\sqrt{8Gm}}{2G}. \quad (4.8.80)$$

Como visto anteriormente, existe uma álgebra conforme assintótica de Sitter que é análoga à álgebra do espaço anti-de Sitter, descrita por Brown e Henneaux em [23]. Portanto, se há um espaço de Sitter dual holográfico, é esperado que seja uma teoria de campo conforme euclideana [3].

Se há dualidade entre espaço de Sitter e um teoria de campo conforme, isto ainda não tem fundamentação sólida. No entanto, podemos supor, naturalmente, que em analogia com  $AdS_3$ , o tensor de tensão no espaço de Sitter esteja relacionado ao tensor de tensão de um espaço dual.

Várias considerações de Strominger [41] sobre a entropia do buraco negro BTZ, sugerem que a entropia do espaço Kerr-dS pode ser explicada aplicando-se a fórmula de Cardy para uma CFT com níveis de energia medidos pelos autovalores de  $L_0$  e  $\bar{L}_0$

Os autovalores de  $L_0$  e  $\bar{L}_0$  estão relacionados à Eq. (4.4.44) e Eq. (4.4.45) por meio da expressão

$$L_0 + \bar{L}_0 = lm; \quad L_0 - \bar{L}_0 = iJ, \quad (4.8.81)$$

podemos ainda escrever [44]

$$L_0 = \frac{1}{2}(ml + iJ) \quad ; \quad \bar{L}_0 = \frac{1}{2}(ml - iJ). \quad (4.8.82)$$

Aplicando a fórmula de Cardy

$$S_c = 2\pi\sqrt{\frac{|c|L_0}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{|c|\bar{L}_0}{6}}, \quad (4.8.83)$$

para uma densidade assintótica de estados de uma CFT com  $J = 0$  e carga central  $c = 3l/2G$ , obtida por Brown e Henneaux em  $AdS_3$  [23], obtemos a entropia

$$S_c = 2\pi\sqrt{\frac{3l}{2G}\frac{m\bar{l}}{12}} + 2\pi\sqrt{\frac{3l}{2G}\frac{m\bar{l}}{12}}, \quad (4.8.84)$$

ou seja

$$S_c = \frac{4\pi l}{2} \sqrt{\frac{m}{2G}}, \quad (4.8.85)$$

ou ainda

$$S_c = \frac{\pi l}{2G} \sqrt{8Gm}. \quad (4.8.86)$$

A expressão Eq. (4.8.86) está de acordo com a entropia macroscópica Eq. (4.8.80).

Agora, observe que o espaço-tempo de Kerr-de Sitter com momento angular, dá origem a autovalores complexos de  $L_0$  e  $\bar{L}_0$ . No entanto, aplicando a fórmula de Cardy Eq. (4.8.83), encontramos

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\sqrt{\frac{|c|(ml+iJ)}{12}} + 2\pi\sqrt{\frac{|c|(ml-iJ)}{12}}, \\ &= \sqrt{\frac{(8Gm)\pi^2 l^2 + \pi^2 il(8GJ)}{16G^2}} + \sqrt{\frac{(8Gm)\pi^2 l^2 + \pi^2 il(8GJ)}{16G^2}}, \\ &= \frac{\pi l}{4G} \left[ \sqrt{(8Gm) + \frac{i(8GJ)}{l}} + \sqrt{(8Gm) - \frac{i(8GJ)}{l}} \right]. \end{aligned} \quad (4.8.87)$$

Usando a relação

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{2}\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}}, \quad (4.8.88)$$

e considerando  $x = 8Gm$  e  $y = i(8GJ)/l$ , obtemos:

$$S = \frac{\sqrt{2}\pi l}{4G} \sqrt{(8Gm) + \sqrt{(8Gm)^2 + \frac{(8GJ)^2}{l^2}}}. \quad (4.8.89)$$

Os autovalores complexos de  $L_0$  sugerem que a fórmula de Cardy não pode ser válida, uma vez que geralmente não se aplica à teorias não-unitárias, no entanto, reproduzimos exatamente a entropia de Kerr-de Sitter. Para uma discussão mais detalhada sobre este problema veja [30].

# Capítulo 5

## Entropia de Defeitos Cônicos Schwarzschild-dS<sub>3</sub> em $\mathbb{M}_4$

Neste capítulo primeiro fazemos uma revisão de um cenário proposto recentemente [33] no qual soluções de defeito cônico tipo Schwarzschild-de Sitter tridimensional foram encontradas numa 2-brana imersa em um espaço de Minkowski quadridimensional ( $\mathbb{M}_4$ ). Esse cenário é idêntico ao cenário de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) originalmente proposto em cinco dimensões [45]. Em seguida comparando com os resultados estudados anteriormente, descrevemos a entropia macroscópica e microscópica desses defeitos. No regime em que a gravitação quadridimensional é dominante, estabelecemos uma correspondência entre essa entropia e a entropia de um buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões.

### 5.1 O cenário de DGP quadridimensional

Consideramos um conjunto em quatro dimensões, análogo ao utilizado no cenário DGP em cinco dimensões. Logo, construímos a teoria sobre uma 2-brana com curvatura escalar imersa no espaço-tempo plano em quatro dimensões. A ação completa

pode ser separada em duas partes [33]

$$S = S_{(4)} + S_{(3)}, \quad (5.1.1)$$

onde

$$S_{(4)} = -\frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{|g|} (R^{(4)} - 2\kappa_4^2 L_m^4), \quad (5.1.2)$$

onde  $\kappa_4$  é o acoplamento gravitacional em quatro dimensões. A métrica do espaço-tempo em quatro dimensões é dada da forma

$$ds_4^2 = g_{ab}(r, z) dx^a dx^b, \quad (5.1.3)$$

sendo  $a, b = 0, 1, 2, 3$ . Em três dimensões temos a ação

$$S_{(3)} = -\frac{1}{2\kappa_3^2} \int d^3x \sqrt{|q|} (R^{(3)} - 2\kappa_3^2 L_m^3), \quad (5.1.4)$$

onde  $\kappa_3$  é o acoplamento gravitacional em três dimensões e  $ds_3^2 = q_{\mu\nu}(r) dx^\mu dx^\nu$  sendo a métrica induzida na 2-brana em  $z = 0$  com  $q_{\mu\nu}(r) \equiv g_{\mu\nu}(r, z = 0)$  onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2$ . Então, a curvatura escalar induzida  $R^{(3)}$  é realizada nesta métrica tridimensional e não depende da quarta coordenada transversal  $z$ . As equações de Einstein em quatro dimensões para esta teoria são

$$G_{AB} = \kappa_{(4)}^2 S_{ab}, \quad (5.1.5)$$

onde

$$S_{ab} = T_{ab} + U_{ab}. \quad (5.1.6)$$

$T_{ab}$  é o tensor energia-momento para o campo de matéria e  $U_{ab}$  é dado pela curvatura devido a métrica induzida sobre a 2-brana. O tensor  $T_{ab}$  pode ser escrito na forma

$$T_{ab} = T_{ab|bulk} + T_{ab|brane}. \quad (5.1.7)$$

Uma vez que investigamos apenas as soluções de vácuo para esta teoria, as lagrangeanas para o campo de matéria são  $L_m^{(3)} = 0$  e  $L_m^{(4)} = 0$ , logo temos

$$T_{ab} = 0. \quad (5.1.8)$$

Como consequência, as equações de Einstein tomam a forma

$$G_{ab} = \kappa_{(4)}^2 U_{ab}, \quad (5.1.9)$$

onde

$$U_b^a = \delta(z) \text{diag}(-\rho_{curv}, p_{curv}, p_{curv}, 0), \quad (5.1.10)$$

define a energia e a pressão na curvatura da brana. Isso é considerado como a componente de um fluido cósmico [47, 48].

## 5.2 Soluções circularmente simétricas induzidas na 2-brana

Na procura por soluções de buraco negro ou defeitos cônicos imersas no espaço-tempo de quatro dimensões, vamos usar o seguinte “Ansatz” [33]

$$ds_4^2 = -A(r, z)dt^2 + \frac{1}{A(r, z)}dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2. \quad (5.2.11)$$

Neste caso, as componentes do tensor de Einstein tem a forma

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{4} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2r} \dot{A} - \frac{1}{2} \frac{A''}{A}, \\ G_r^r &= -\frac{1}{4} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2r} \dot{A} + \frac{1}{2} \frac{A''}{A}, \\ G_\theta^\theta &= \frac{1}{4} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \ddot{A}, \\ G_z^z &= -\frac{1}{4} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \ddot{A} + \frac{1}{r} \dot{A}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Na ausência da 2-brana as equações de Einstein reduzem-se a  $G_{ab} = 0$ , logo

$$G_t^t + G_r^r = 0, \quad (5.2.13)$$

e encontramos uma equação para  $A(r, z)$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{r} \dot{A} = 0. \quad (5.2.14)$$

Devemos reintroduzir a brana através das condições de contorno em  $z = 0$ , de tal modo que  $A(r, z)|_{z=0} \equiv A_0(r)$  e  $\dot{A}(r, z)|_{z=0} \equiv \dot{A}_0(r)$

Vamos agora obter a condição de junção através da 2-brana localizada em  $z = 0$ . A curvatura extrínseca é dada por

$$K_{\mu\nu} = q_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} n_{\nu}, \quad (5.2.15)$$

onde  $n^{\alpha} = (0, 0, 0, 1)$ . Para o Ansatz da métrica que admitimos previamente temos que  $K_{\mu\nu}$  é dado por

$$K_b^a = \left( \frac{A'}{2A}, -\frac{A'}{2A}, 0, 0 \right). \quad (5.2.16)$$

A relação entre  $K_{ab}$  e o tensor energia-momento é dado pela condição de junção de Israel na primeira derivada através da brana em  $z = 0$ , tal que  $[A'] = A'(0^+) - A'(0^-)$ . Se  $A'(0^-) = -A'(0^+)$  então  $[A'] = 2A'(0^+)$  e temos

$$[K_{ab}] = K_{ab}(0^+) = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \left( U_{ab} - \frac{1}{2} U q_{ab} \right). \quad (5.2.17)$$

Assim, usando Eq. (5.2.16), encontramos

$$K_r^r(0^+) = -\frac{A'(0^+)}{2A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \left( p_{curv} - \frac{1}{2} (\rho_{curv} + 2p_{curv}) \right), \quad (5.2.18)$$

que implica

$$\frac{A'(0^+)}{A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \rho_{curv}. \quad (5.2.19)$$

Sobre a 2-brana, as equações de Einstein governam a métrica induzida  $q_{\mu\nu}$  de modo que podemos identificar o tensor de energia-momento induzido na curvatura da brana como  $U_{ab} = \delta(z) U_{\mu\nu}$ . Lembrando que  $U_{\mu\nu}$  não depende da coordenada  $z$ . Agora podemos escrever as equações de Einstein para a métrica induzida

$$G_{\mu\nu} = -\kappa_{(3)}^2 U_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2. \quad (5.2.20)$$

Posteriormente obtemos as componentes

$$U_t^t = U_r^r = -\frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}, \quad (5.2.21)$$



e

$$U_\theta^\theta = -\frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\ddot{A}_0}{2}. \quad (5.2.22)$$

Finalmente, a densidade de energia e a pressão na curvatura da brana pode ser escrita na forma

$$\rho_{curv} = \frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}, \quad (5.2.23)$$

e

$$p_{curv} = -\frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}. \quad (5.2.24)$$

Note que  $p_{curv} = -\rho_{curv}$ , mostra que o fluido cósmico age como uma constante cosmológica. Isso sinaliza a possibilidade de encontrarmos um buraco negro tridimensional tipo BTZ ou um defeito cônico sobre a 2-brana mesmo se iniciarmos com uma teoria sem constante cosmológica ou campo de matéria em 3d.

Usando as equações Eq. (5.2.19) e Eq. (5.2.23), encontramos

$$\frac{A'(0^+)}{A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{4\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{r}. \quad (5.2.25)$$

Aplicando esta solução em Eq. (5.2.14) com a condição de fronteira em  $z = 0$ , encontramos

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_{(4)}^2}{4\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{r} \right]^2 + \frac{\dot{A}_0}{r} = 0, \quad (5.2.26)$$

isto é

$$\dot{A}_0 = -\frac{32\kappa_{(3)}^4}{\kappa_{(4)}^4} r. \quad (5.2.27)$$

podemos integrar esta equação, obtendo [33]

$$A_0(r) = c - \frac{r^2}{2r_0^2}, \quad (5.2.28)$$

onde

$$r_0^2 = \frac{\kappa_{(4)}^4}{32\kappa_{(3)}^4}, \quad (5.2.29)$$

é a “crossover scale” e  $c$  é uma constante de integração. Isto fornece uma solução exata para buraco negro em três dimensões vivendo sobre uma 2-brana que pode ser expressas na forma usual

$$ds_{(3)}^2 = - \left( c - \frac{r^2}{2r_0^2} \right) dt^2 + \left( c - \frac{r^2}{2r_0^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (5.2.30)$$

Para  $c = 1$ , temos o espaço-tempo de Sitter, enquanto para  $c = 8G_3m$  temos um “buraco negro” de Schwarzschild-de Sitter em três dimensões, uma singularidade cônica com massa  $m$  associada e “déficit” angular  $2\pi(1 - 8G_3m)$ . Também definimos  $\kappa_{(3)}^2 \equiv 8\pi G_3$ .

Em [33] ainda foi considerada a possibilidade de soluções de buracos negros tipo BTZ, admitindo que a quarta dimensão  $z$  seja tipo tempo. Deixamos essa solução para estudos futuros.

### 5.3 Entropia microscópica da solução Schwarzschild- $dS_3$ e uma correspondência

Note que para  $\kappa_{(4)}^2 \gg \kappa_{(3)}^2$ , a gravidade em quatro dimensões domina a gravidade em três dimensões, uma vez que  $r_0$  é grande, então a solução Eq. (5.2.28) aproxima-se da solução do espaço plano. No entanto, a gravidade em quatro dimensões isso não é a única solução de vácuo. Em vez disso, há também a solução de buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões, cujo comportamento assintótico varia com  $1/r$  [33].

Nossa solução Eq. (5.2.30) é idêntica à solução de Kerr-de Sitter Eq. (4.6.52) para  $J = 0$ . A entropia de Hawking-Bekenstein para esses casos possui portanto descrição microscópica e é dada por

$$S = \frac{\pi l}{2G} \sqrt{8Gm}. \quad (5.3.31)$$

Fazendo as identificações apropriadas temos que  $l^2 = 2r_0^2$  e  $G \equiv G_3$ . Lembrando que

$\kappa_{(3)}^2 \equiv 8\pi G_3$  e  $\kappa_{(4)}^2 \equiv 8\pi G_4$  podemos escrever

$$r_0^2 = \frac{\kappa_{(4)}^4}{32\kappa_{(3)}^4} = \frac{G_4^2}{32G_3^2}, \quad (5.3.32)$$

ou seja

$$l = \frac{G_4}{4G_3}. \quad (5.3.33)$$

Agora substituindo  $G_3 = G_4/4l$  em  $G_3$  do denominador de Eq. (5.3.31) temos

$$S = \frac{\pi l}{2G_3} \sqrt{8G_3 m} = \frac{4\pi l^2}{4G_4} 2\sqrt{8G_3 m}. \quad (5.3.34)$$

Identificando  $A = 4\pi l^2$  como sendo a área do horizonte de eventos de buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões de raio  $r_S = l$  e que o defeito cônico exige  $2\sqrt{8G_3 m} = 1$ , ou seja,  $8G_3 m = \frac{1}{4} < 1$  temos a entropia

$$S = \frac{A}{4G_4}. \quad (5.3.35)$$

Este resultado demonstra um ponto importante que é a relação entre entropias obtidas em diferentes dimensões.

Isto nos permite estabelecer a seguinte correspondência:

“A descrição microscópica da entropia de um buraco negro de Schwarzschild em *quatro dimensões* pode ser realizada por meio da descrição microscópica da entropia de um defeito cônico tipo Schwarzschild-de Sitter de mesmo raio em *três dimensões*.”

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta dissertação, realizamos um estudo sobre a contagem de microestados de espaços tipo Kerr-de Sitter tridimensional usando a fórmula de Cardy para uma densidade de estados em uma teoria de campo conforme sobre a fronteira de um espaço de Sitter tridimensional ( $dS_3$ ). Estudando as transformações conforme do tensor energia-momento calculamos a carga central  $c = 3l/2G$  obtida por Brown e Henneaux no espaço  $AdS_3$ .

Encontramos soluções de Schwarzschild-de Sitter em três dimensões induzida sobre uma 2-brana, sem constante cosmológica, imersa no espaço-tempo plano em quatro dimensões ( $M_4$ ).

Notamos que no regime em que a gravidade em quatro dimensões é dominante, conseguimos estabelecer uma correspondência entre a entropia desses espaços tridimensionais e a entropia de um buraco negro de Schwarzschild em quatro dimensões.

Como perspectiva, podemos estender nossa análise para buracos negros de BTZ o qual é assintoticamente um espaço  $AdS_3$ .

# Apêndice A

## Participação em encontros e trabalho em preparação

1. Neymar J. N. Cavalcante, Francisco A. Brito, “Microscopic entropy of 3d Schwarzschild - de Sitter solutions in 4d Minkowski space”, em preparação.
2. Neymar J. N. Cavalcante, Francisco A. Brito. Um estudo sobre a correspondência dS/CFT. XXIX Encontro de Física do Norte e Nordeste. 2011, Mossoró, RN, Brasil.
3. Neymar J. N. Cavalcante. Detecção de múons. XVI Escola de Verão Jorge André Swieca de Física Nuclear Experimental. 2010, IFUSP, São Paulo, SP, Brasil.
4. Neymar J. N. Cavalcante. ICTP-CAPES Latin-American String School. 2010, IFT-UNESP, São Paulo, SP-Brasil.

# Bibliografia

- [1] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102**, 201301 (2009) [arXiv:0901.1766 [hep-th]].
- [2] W. Li, W. Song and A. Strominger, JHEP **0804**, 082 (2008) [arXiv:0801.4566 [hep-th]].
- [3] A. Maloney, W. Song and A. Strominger, Phys. Rev. D **81**, 064007 (2010) [arXiv:0903.4573 [hep-th]].
- [4] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99 (1996) [arXiv:hep-th/9601029].
- [5] G. Veneziano, Nuovo Cim. A **57**, 190 (1968).
- [6] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007) 739 p*
- [7] R. J. Szabo, *Imperial College Press, 2004. ISBN 1-86094-427-2. 140p.*
- [8] B. Zwiebach, *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 558 p*
- [9] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **103**, 207 (1981).
- [10] J. Polchinski, *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p*
- [11] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
- [12] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

- [13] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Lect. Notes Phys.* **779**, 1 (2009).
- [14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p*
- [15] P. H. Ginsparg, arXiv:hep-th/9108028.
- [16] M. Kaku, *New York, USA: Springer (2000) 531 p*
- [17] J. L. Cardy, *Nucl. Phys. B* **270**, 186 (1986).
- [18] L. Susskind and E. Witten, arXiv:hep-th/9805114.
- [19] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984).
- [20] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Singapore, Singapore: World Scientific (1995) 699 p*
- [21] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [22] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *Cambridge University Press, Cambridge, 1973*
- [23] J. D. Brown and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986).
- [24] V. Balasubramanian and P. Kraus, *Commun. Math. Phys.* **208**, 413 (1999) [arXiv:hep-th/9902121].
- [25] J. D. Brown and J. W. York, *Phys. Rev. D* **47**, 1407 (1993) [arXiv:gr-qc/9209012].
- [26] P. O. Mazur and E. Mottola, *Phys. Rev. D* **64**, 104022 (2001) [arXiv:hep-th/0106151].
- [27] L. F. Abbott and S. Deser, *Nucl. Phys. B* **195**, 76 (1982).

- [28] D. Klemm, IFUM-690-FT, [arXiv:hep-th/0106247].
- [29] S. Weinberg, John Wiley and Sons, Inc., New York (1972)
- [30] V. Balasubramanian, J. de Boer and D. Minic, Phys. Rev. D **65**, 123508 (2002) [arXiv:hep-th/0110108].
- [31] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [arXiv:hep-th/9204099].
- [32] R. B. Mann, arXiv:gr-qc/9501038.
- [33] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, Phys. Lett. B **704**, 631 (2011) [arXiv:1104.5215 [hep-th]].
- [34] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285 (2000) [arXiv:hep-th/9910219].
- [35] R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, Phys. Rev. D **60**, 104001 (1999) [arXiv:hep-th/9903238].
- [36] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977).
- [37] M. Henningson and K. Skenderis, JHEP **9807**, 023 (1998) [arXiv:hep-th/9806087].
- [38] R. B. Mann, Phys. Rev. D **60**, 104047 (1999) [arXiv:hep-th/9903229].
- [39] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2738 (1977).
- [40] M. I. Park, Phys. Lett. B **440**, 275 (1998) [arXiv:hep-th/9806119].
- [41] A. Strominger, JHEP **9802**, 009 (1998) [arXiv:hep-th/9712251].
- [42] L. Rodriguez and T. Yildirim, IOP Publishing, 27 (2010)
- [43] A. Strominger, JHEP **275** (2001) [arXiv:hep-th/0106113].



- [44] B. G. Carneiro da Cunha, Phys. Rev. D **65**, 104025 (2002) [arXiv:hep-th/0110169].
- [45] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000) [arXiv:hep-th/0005016].
- [46] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois. Nucl. Phys. B **565**, (2000) [arXiv:hep-th/9905012].
- [47] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, Nucl. Phys. B **565**, 269 (2000) [hep-th/9905012].
- [48] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285 (2000) [hep-th/9910219].