UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Adriana Maria de Oliveira Silva

NUMERAÇÃO DECIMAL E MATERIAL DOURADO

Cuité-PB

2014

Adriana Maria de Oliveira Silva

NUMERAÇÃO DECIMAL E MATERIAL DOURADO

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB
2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586n Silva, Adriana Maria de Oliveira.

Numeração decimal e material dourado. / Adriana Maria de Oliveira Silva – Cuité: CES, 2014.

80 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Número. 2. Sistema decimal. 3. Material dourado. I. Título.

CDU 511

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Adriana Maria de Oliveira Silva

Numeração Decimal e Material Dourado

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 15 de setembro de 2014.

Banca Examinadora

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

Joseilson R. Lima
Prof. Joseilson Raimundo de Lima

Ao meu filho Adrian David, pelo carinho, paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria de cada momento da vida.

Agradecimentos

Considerando este trabalho como resultado de uma caminhada que não foi fácil. Em primeiro lugar, agradeço a Deus que me deu a vida e está sempre presente em meus caminhos, dando-me força e coragem para persistir sempre sem desanimar.

Aos meus queridos pais, Margarida Maria de Oliveira Silva e José Batista da Silva pelo carinho, incentivo e dedicação.

Ao meu filho Adrian David Silva Porto pelo incentivo, paciência e compreensão nos momentos que não pude está ao seu lado devido ao compromisso com o estudo.

A todos os meus irmãos que acompanharam de perto e me apoiaram nessa trajetória e em especial a minha irmã Josefa Nelice pelos cuidados ao meu filho quando tive de me ausentar para estudar.

As professoras Márcia Cristina Silva Brito e Maria Gisélia Vasconcelos, pela orientação e incentivo durante todo o curso. E a todos os professores do curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité pela contribuição em conhecimento para a minha vida profissional.

Ao professor Joseilson Raimundo de Lima pela gentileza em ter se disponibilizado de participar da banca examinadora, e por suas contribuições.

Aos meus amigos da graduação pelo companheirismo, incentivo, ajuda e carinho. Em particular a Gerivaldo, Socorro, Jucileide, Jaqueline, Ricardo, José de Brito e Aparecida.

Aos meus amigos da vida pelo apoio Pe.Onaldo, Pablo Diego e Márcia Janielly.

Por fim agradeço a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização deste sonho.

" A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo."

Pitágoras.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o surgimento da noção dos números dentre seu contexto histórico desenvolvido por algumas civilizações que elaboraram sistemas de numeração e processos de contagem que precederam e encaminharam para o surgimento do sistema decimal que hoje usamos (indo-arábico), buscando compreender a expansão dos números naturais da soma aos critérios de divisibilidade. Também, abordaremos a importância do material concreto, Material Dourado, e exemplificações no processo de ensino-aprendizagem dos números naturais, ordem (unidades, dezenas, centenas e milhares) e das quatro operações fundamentais da aritmética (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Palavras-chave: Números. Sistema Decimal. Material Dourado.

Abstract

In this work we present the emergence of the concept of numbers among its historical context developed by some civilizations that developed number systems and counting processes that preceded and headed for the emergence of the decimal system that we use today (Indo-Arabic), seeking to understand the expansion of natural numbers the sum of divisibility criteria. Also, we discuss the importance of concrete material, Gold Material, and examples in the teaching and learning of natural order (ones, tens, hundreds and thousands) and the four basic arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication and division) process numbers.

Keywords: Numbers. Decimal System. Gold material.

Sumário

Introdução

Ao longo da História, diferentes civilizações se organizaram em grupos, pastorearam animais, produziram e estocaram alimentos. Paralelamente a essas atividades, desenvolveram o sentido de número por uma questão de sobrevivência.

Nos escritos de antigas civilizações encontramos as diferentes formas de representação de números e de seus sistemas de numeração. Quando observamos esses sistemas de numeração podemos ter uma ideia da cultura dos povos antigos e da forma como foi desenvolvido seu conhecimento matemático.

É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Como a ideia de relacionar todos os carneiros do rebanho com uma pedrinha, nós em cordas, riscos nas pedras ou talhes em ossos, dessa forma, eles tinham a correspondência um a um.

Um método concreto, desempenhou um papel ainda mais importante na história da aritmética e da contabilidade: é o dos "montes de pedras"(ou dos agrupamentos de pauzinhos, conchas, frutos duros etc.). No início, portanto, este método é um dos mais primitivos, pois como a prática mais rudimentar do entalhe, ele marca por assim dizer, o "grau zero"de qualquer técnica do número: oferece igualmente um sistema de "contabilidade silenciosa"que não exige nenhuma memória nem conhecimento abstrato dos números, fazendo intervir unicamente o princípio da correspondência um a um.

Com o acesso à abstração dos números e a compreensão dos aspectos cardinal e ordinal, foi possível o surgimento de símbolos numéricos e a evolução da criação dos nomes dos números, os quais permitiram que os sons substituíssem, os objetos (pedras, entalhes e dedos) que os originaram.

Com a evolução das sociedades e a criação de símbolos mais simples chegou-se ao sistema de numeração decimal.

Presume-se que foram os indianos que primeiramente observaram que, adotando-se uma pequena coleção de símbolos (9 no caso), a posição de um símbolo em relação a outro bastaria para indicar grandezas maiores que o número de símbolos. A idéia foi adotada e propagada pelos árabes, que denominaram símbolos de algarismos (em homenagem ao famoso matemático al Khowarizmi). Também foram os inventores do zero, símbolo indispensável ao sistema de numeração posicional. Nesse sistemas de numeração que adotam o conceito de ordem, temos a primeira ordem representando as unidades com cada unidade representada por um símbolo diferente e em seguida, outras ordens (dezena, centena, milhar, etc). Todos eles foram inventados baseados em 2 conveniências haver poucos símbolos para memorização e possibilitar a representação de quantidades muito grandes.

O trabalho está organizado em três capítulos.

O Capítulo 1 faz um resgate histórico do desenvolvimento dos sistemas de numeração, desde o momento em que os homens aprenderam a contar até a introdução na Europa do engenhoso sistema de numeração hindu, que ali chegou por meio dos árabes.

No Capítulo 2 apresentaremos alguns resultados básicos de extrema importância para a formalização do sistema de numeração posicional e estabelecemos formas de encontrar critérios de divisibilidade para os números naturais.

Finalmente, no Capítulo 3 é apresentada a resolução do sistema de numeração decimal utilizando o material dourado como instrumento capaz de ajudar os educandos quanto ao aprendizado do cálculo aritmético.

Além de tudo o que foi dito antes, este trabalho também é fruto de pesquisa feita nas mais variadas fontes, como livros sobre História da Matemática e Teoria dos Números, revistas como a RPM (Revista do Professor de Matemática), livros digitais relacionados à Informática, além da consulta a sites pela internet.

Capítulo 1

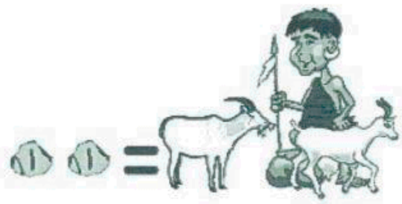
Aspectos Históricos

O uso dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, nos parece tão evidente que chegamos considerá-los como uma aptidão inata do ser humano. É preciso conhecer a história de que os números foram criados, transmitidos ao longo dos anos para diferentes povos e entender que nem sempre foram como se apresentam atualmente. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [2], [3], [6] e [7].

1.1 Números

No decorrer da história, o ato de contar e registrar quantidades por meio de símbolos não foi uma atividade simples. Ao deixar de ser nômade, com o surgimento da agricultura e pecuária, há cerca de 30.000 anos, nossos antepassados começaram a se preocupar em registrar quantidades.

Segundo Eves [6], quando o homem primitivo começou a perceber a necessidade de contagem de seu rebanho, ele começou a desenvolver uma forma de quantificar seu rebanho, surgindo assim às primeiras ideias de contagem. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Como a ideia de relacionar todas as ovelha do rebanho com uma pedrinha, nós em cordas, riscos nas pedras ou talhes em ossos, dessa forma, eles tinham a correspondência um a um.



Ele fazia a correspondência de um-para-um, colocando uma marca para cada ovelha, mas não conseguia distinguir grande quantidade de marcas. Esta percepção é denominada como "senso numérico".

Não podemos confundir senso numérico com contagem, que é um atributo exclusivamente do ser humano e que necessita de um processo mental para relacionar quantidades a símbolos de representação, já o senso é a faculdade natural de reconhecimento que permite reconhecer que alguma coisa mudou em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto for tirado ou adicionado, à coleção.

Exemplo:

Observe as figuras:

Agora veja estas figuras

Em qual dos dois casos foi mais fácil perceber onde há mais pessoas? No primeiro bastou uma simples olhada, não é mesmo? Mas no segundo, provavelmente, você precisou contar.

Somos capazes de distinguir visualmente pequenas quantidades (até quatro, cinco... talvez seis objetos). Entretanto este senso numérico não nos permite distinguir quantidades maiores.

No entanto é preciso esclarecer: ter senso numérico não significa ter a capacidade de contar, pois estudos com corvos mostraram que os pássaros podem identificar conjuntos de até quatro elementos.

Falando nessa capacidade de alguns animais que se assemelham a do homem, existe uma história muito interessante que demonstra bem toda essa capacidade de alguns pássaros de conseguir distinguir certas quantidades.

Um fazendeiro estava disposto a matar um corvo que fez seu ninho na torre de observação de sua mansão. Por diversas vezes, tentou surpreender o pássaro, mas em vão: à aproximação do homem, o corvo saía do ninho. De uma árvore distante, ele esperava atentamente até que o homem saísse da torre e só então voltava ao ninho. Um dia, o fazendeiro tentou enganá-lo: dois homens entraram na torre, um ficou dentro e o outro saiu e se afastou. Mas o pássaro não foi enganado: manteve-se afastado até que o outro homem saísse da torre. A experiência foi repetida nos dias subsequentes com três homens, ainda sem sucesso, pois o corvo conseguia distinguir essa quantidade. O fazendeiro quase desistiu de sua empreitada, mas tentou novamente com quatro homens, mas novamente o pássaro esperou que o último homem saísse da torre. Finalmente, foram utilizados cinco homens como antes, todos entraram na torre e um permaneceu lá dentro enquanto os outros quatro saíam e se afastavam. Desta vez o corvo perdeu a conta. Incapaz de distinguir entre quatro e cinco, voltou imediatamente ao ninho, e infelizmente foi enganado pelo fazendeiro.

Apesar do ser humano conseguir contar, fazer a relação entre símbolos e quantidades, no que diz respeito ao senso numérico, nós temos a mesma capacidade do corvo citado na história acima, conseguimos distinguir apenas até a quantidade de quatro elementos.

Aos poucos, o homem foi desenvolvendo novas capacidades e perceberam que se fizessem alguns tipos de agrupamentos, facilitaria a visualização das marcas, segundo a citação de Ifrah [7].

> No início, portanto, este método é um dos mais primitivos, pois como a prática mais rudimentar do entalhe, ele marca, por assim dizer, o "grau zero" de qualquer técnica do número: oferece igualmente um sistema de "contabilidade silenciosa" que não exige nenhuma memória nem conhecimento abstrato dos números, fazendo intervir unicamente o princípio da correspondência um a um.
>
> Mas, a partir do momento em que o homem aprendeu a contar abstratamente segundo o princípio da base, ele se revelou suficientemente maleável para permitir todos os tipos de progresso.

No momento em que o homem teve acesso à abstração dos números e aprendeu a distinção entre o número chamado cardinal, baseado no principio da equiparação, e o chamado ordinal, em que se tem o processo de agrupamento e o da sucessão, passou a fazer entalhes em pedras, cordas, bastões etc.(existem entalhes em ossos e pedaços de madeira encontrados na Europa datados de 35000 a.C.), que revelam o intuito de contar, transformando esses objetos em registros matemáticos, guardando informações por um tempo indeterminado.

Aprendeu a conceber conjuntos cada vez maiores, mas teve novas dificuldades: para representar números maiores não podia multiplicar pedras, pauzinhos, entalhes ou nós em cordas. Assim, também o número de dedos da mão não é extensível por nossa vontade. Do mesmo modo não podia repetir uma mesma palavra de maneira sem parar, nem criar novos nomes de números ou novos símbolos.

Foi então que o ser humano se deparou com um problema a ser resolvido: como enunciar (concretamente, oralmente ou, mais tarde, por escrito) números elevados com o mínimo de símbolos possível?

Surge a necessidade de criar símbolos ou métodos para registro de grandes números.

Com o surgimento das primeiras civilizações, é necessário fixar um determinado número de símbolos, e ordenar a sua repetição de forma a facilitar a sua escrita e a sua pronúncia, assim são adotados vários critérios, sempre ou quase sempre, relacionados com a anatomia humana.

Em culturas em que nas fases mais antigas usavam-se os dedos de uma das mãos para contar, a quantidade de elementos de um grupo fixou-se em cinco e consequentemente a base numérica adotada é a quinária; quando foram usados os dedos das duas mãos a base adotada foi a decimal,

e no caso do uso dos dedos dos pés a base adotada foi vigesimal.

Assim surgiram os principais sistemas de numeração das civilizações antigas, o de base dez ou decimal, de base cinco ou quinária, de base vinte ou vigesimal além da base sessenta ou sexagesimal e o de base doze ou duodecimal.

Mais tarde outras bases, conforme a conveniência ou a necessidade, foram criadas, e mesmo variando o número de elementos básicos de um grupo, os conceitos de formação do sistema num todo foram mantidos. São exemplos destas bases o sistema de base dois ou binário e o sistema de base dezesseis ou hexadecimal.

1.2 Sistemas de numeração antigos

De acordo com Ifrah [7], a região do planeta onde aconteceu o desenvolvimento das "invenções" e uso numéricos está nas proximidades das margens do mediterrâneo e no Oriente Médio, onde se localizavam as civilizações dos babilônios, egípcios, romanos e hindus.

Sistema de Numeração Egípcio

A civilização egípcia desenvolveu-se no nordeste africano nas margens do rio Nilo entre 3200 a.C., teve seu crescimento ligado aos recursos fornecidos pelo Rio Nilo.

Tomando conhecimento do sistema de cheias desse grande rio, eles organizaram uma avançada atividade agrícola que garantiu o sustento de um grande número de pessoas. No entanto com todo esse desenvolvimento uma questão era ainda um grande desafio para os egípcios, como efetuar cálculos rápidos e precisos com pedras, nós ou riscos em um osso? Foi partindo dessa necessidade imediata que estudiosos do Antigo Egito passaram a representar a quantidade de objetos de uma coleção através de desenhos (os símbolos).

Por volta de 3000 antes da nossa era, os egípcios criaram um sistema de numeração cujos símbolos eram chamados hieróglifos. A criação dos símbolos foi um passo muito importante para o desenvolvimento de conhecimentos na área da Matemática.

Registros arqueológicos encontrados no Egito comprovam sua forte contribuição para a matemática. No século XVIII d.C. foram descobertos vários papiros em escavações no Egito. Do ponto de vista matemático os mais importantes são os papiros de Moscou e os Papiros de Rhind. Estes papiros trazem uma série de problemas e coleções matemáticas em linguagem hieróglifo.

Os símbolos adotados para 1 e para as primeiras potências de 10 são

Número atual	Símbolo egípcio	Objeto representado
1	𓏺	Traço ou bastão vertical
10	𓎆	Calcanhar
100	𓍢	Corda enrolada ou rolo
1000	𓆼	Flor de lótus
10 000	𓂭	Dedo dobrado
100 000	𓆐	Girino
1 000 000	𓁨	Homem assustado (espantado)

O sistema egípcio permitia representar números até milhões e apresentava a seguinte estrutura:

1) Cada dez símbolos iguais eram trocados por um novo símbolo;

𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺	eram trocados por 𓎆
𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆 𓎆	eram trocados por 𓍢
𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢 𓍢	eram trocados por 𓆼

e assim por diante.

2) Na representação dos números, os símbolos eram colocados uns ao lado dos outros, sem posição definida, e seus valores eram adicionados.

> 𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 ou 𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆
> 𓎆𓎆 𓎆𓎆
>
> representavam o mesmo número: 53.

3) Não utilizada símbolo para zero.

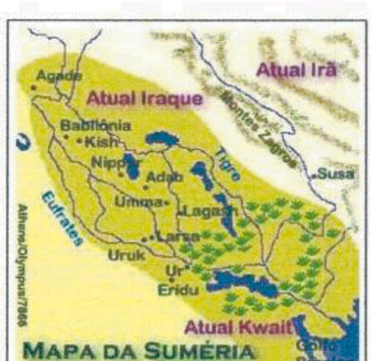
Veja outros exemplos de como os egípcios registravam os números:

Símbolos atuais	Símbolos egípcios	Significado
5	𓏺 𓏺 𓏺 𓏺 𓏺	1+1+1+1+1
13	𓎆 𓏺 𓏺 𓏺	10 + 1+1+1
122	𓍢 𓎆 𓎆 𓏺 𓏺	100 + 10 + 10+ 1 + 1
302	𓍢 𓍢 𓍢 𓏺 𓏺	100 + 100+ 100+ 1+ 1
1111	𓆼 𓍢 𓎆 𓏺	1 000 + 100 +10+1
2003	𓆼 𓆼 𓏺 𓏺 𓏺	1000 + 1000 + 1 + 1+ 1

O sistema egípcio era de base dez, assim como nosso sistema atual, a diferença entre eles era que o dos egípcios não era posicional, seus símbolos eram adicionados uns aos outros não importando a posição, cada símbolo podia ser repetido no máximo nove vezes e não tinham símbolo para o zero.

Sistema de Numeração Babilônico

A Mesopotâmia é uma região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Eufrates e Tigre, ocupando territórios onde atualmente se situam o Iraque, parte do Irã e parte da Síria até ao Golfo Pérsico. Essa terra era habitada por povos de diferentes grupos humanos. As antigas civilizações que habitavam a Mesopotâmia são chamadas, freqüentemente de Babilônios.



Os Sumérios possuíam uma civilização avançada com uma organização social e econômica complexas, estruturas políticas e religiosas. Como os recursos naturais eram escassos, as trocas comerciais com os povos vizinhos revestiam-se de grande importância. Desta forma, e com o aumento do volume de trocas comerciais, torna-se necessário um controle administrativo mais eficaz.

Para fazer cálculos os sumérios utilizavam objetos que, consoante a sua forma e tamanho, representavam as diferentes ordens de unidade do sistema sexagesimal:

1		pequeno cone
10		bilha
60		grande cone
600		grande cone perfurado
3600		esfera
36000		esfera perfurada

- uma unidade simples por um pequeno cone;
- uma dezena por uma bolinha;
- sessenta unidades por um grande cone;
- o número 600 (= 6 x 10)x 10 por um grande cone perfurado;
- o número 3.600 (= 10 x 6 x 10)x 6 por uma esfera;
- o número 36000(= 10 x 6 x 10 x 6) x 10 por uma esfera perfurada.

Os sistemas de registro foram-se desenvolvendo num complexo sistema numérico que permitia registrar grandes quantidades de bens. Um destes sistemas de grafia evoluiu para uma escrita moldada em caracteres "cuneiformes", ou seja, em forma de cunha, gravados em placas de argila que depois eram cozidas.

Os babilônicos usavam dois símbolos, cujos valores, assim como os egípcios eram adicionados.

- O símbolo do cravo representava a unidade e o símbolo asna representava a quantidade dez.

Boyer [2], ressalta que a numeração cuneiforme babilônica, para os inteiros menores, seguia a mesma linha que a hieroglífica egípcia, com repetições de símbolos para as unidades e as dezenas. Entretanto, a semelhança na escrita entre egípcios e babilônios iam somente até o número 59. A partir daí, a forma de registro divergia entre as duas culturas.

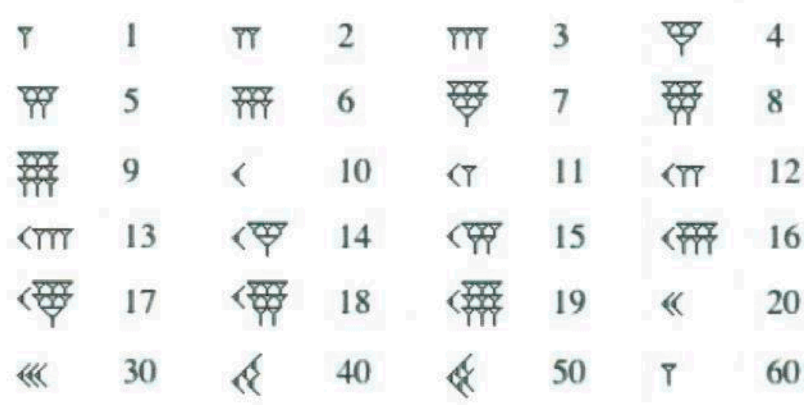
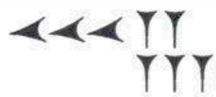
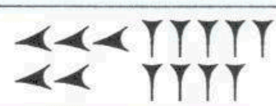


Figura 1.1: Escrita cuneiforme (Conhecida, aproximadamente, desde Século XVII)

Representação de um número no sistema babilônico

1. Os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois símbolos tantas vezes quantas fosse necessário.

2. Para números maiores que 59, as quantidades eram reunidas e representadas em grupos de 60.

Numeração babilônia	Numeração atual
	1
	2
	5
	12
	35
	59

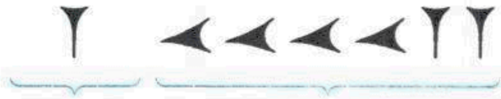
Na numeração babilônica,

$$1 \qquad 13$$

$$1 \cdot 60 + 13 = 73$$

significa um grupo de sessenta mais treze. O símbolo da esquerda, separado dos outros quatro, vale sessenta.

Na numeração babilônica,



1 42

$$1 \cdot 60 + 42 = 102$$

significa um grupo de sessenta mais quarenta e dois.

Podemos atribuir também aos babilônicos o início do uso de um sistema posicional, pois ao contrário dos egípcios que usava apenas um sistema aditivo, os babilônicos inovaram, usando um sistema aditivo e também posicional, pois dependendo do número seriam usados os dois princípios. Na escrita dos números de 1 a 59, o sistema de numeração dos babilônios se parecia muito com o sistema de numeração desenvolvida pelos egípcios; ambos eram aditivos. Quando o número era maior que sessenta, seria necessária a mudança da posição dos símbolos.

O sistema numérico da babilônia exige alguns cuidados em sua representação. Seus símbolos são parecidos e o que muda é a distância entre eles. Qualquer representação menos cuidadosa, certamente causaria confusão.

Embora poucos historiadores apresentem o símbolo que representa a ausência de unidades, ou seja, o zero, este símbolo existiu no sistema de numeração Babilônico. Sendo importante e necessário porque caracterizava o sistema posicional, pois ele permitia diferenciar a quantidade 1 da quantidade 60.

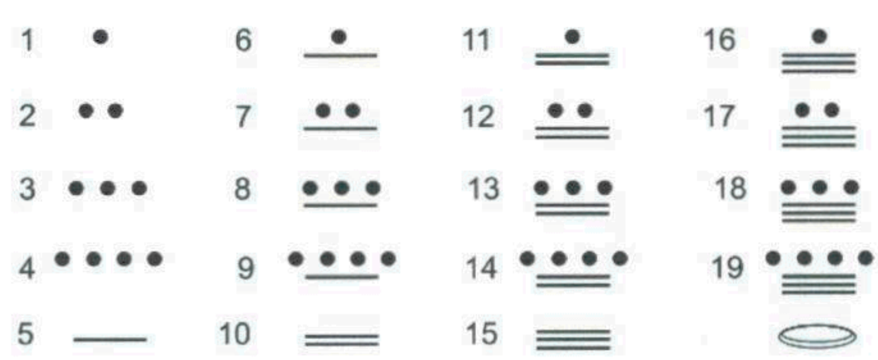
- Portanto é um sistema misto de numeração.

Alguns vestígios dessa antiga civilização nos acompanham até os dias de hoje. Na contagem do tempo, sessenta segundos compõem um minuto e sessenta minutos compõem uma hora. Essa contagem por grupos de sessenta é devida à base sessenta do sistema de numeração babilônico.

Sistema de Numeração Maia

Os historiadores chamam de maias um conjunto de tribos que viveram na região da América Central, atualmente o sul do México, há cerca de 1500 anos atrás. Assim como os egípcios, os maias eram muito voltados para a atividade agrícola. Por isso, eles desenvolveram e aperfeiçoaram algumas técnicas que ajudavam no cultivo, como canais de irrigação e utilização de adubos. A maioria da aldeia trabalhava na lavoura.

Eles usavam um sistema de numeração de base 20, isto é, agrupavam de 20 em 20 suas quantidades. Os números eram representados por uma combinação de pontos e traços.



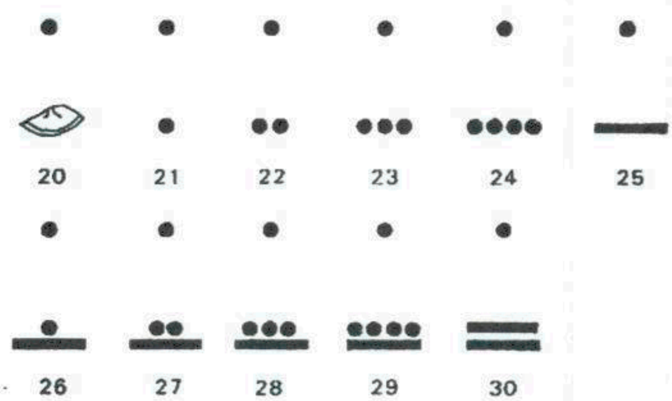
O último símbolo que lembra uma concha representa o nada, já o ponto representa a unidade e o traço horizontal, a quantidade cinco. Segundo Ifrah [7]:

> Os maias estavam interessados na contagem do tempo e nas observações astronômicas. Esse interesse justifica o motivo pelo qual o sistema não é todo vigesimal, e possui uma irregularidade mudando na terceira ordem para os múltiplos de 360.

O zero é a grande surpresa deste sistema de numeração. Ele facilitava operações matemáticas e auxiliava no caráter posicional da numeração maia. Nos números maias importava a ordem como os símbolos apareciam. Eles eram escritos na vertical, de cima para baixo.

Representação Maia de algumas quantidades

Cada número superior a 20 era escrito em seguida numa coluna vertical com uma fileira para cada ordem de unidades.



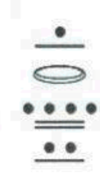
"Deste modo, dispomos de duas provas indiscutíveis do gênio matemático dos astrônomos maias: - eles realmente elaboraram uma numeração de posição; - eles realmente inventaram o zero."(Ifrah [7])

Vejamos o exemplo:

Segundo Eves [6], esse sistema é essencialmente vigesimal, mas seu segundo grupo vale $(18)(20) = 360$ em vez de $20^2 = 400$.

A seguir um exemplo de um número grande, escrito verticalmente à maneira maia

$$43\,487 = 6(18)(20^2) + 0(18)(20) + 14(20) + 7 =$$



Sistema de Numeração Romano

Roma foi o centro de uma das mais notáveis civilizações da antiguidade que se manteve entre os anos 753 a.C. (data atribuída à sua fundação) e 1453 (data atribuída à queda do Império Romano do Oriente). Roma contribuiu imensuravelmente para o desenvolvimento no Mundo Ocidental de várias áreas de estudo, como o direito, teoria militar, arte, literatura, arquitetura, linguística, e a sua história persiste como uma grande influência mundial, mesmo nos dias de hoje.

Em relação ao sistema romano, como a maioria dos povos da antiguidade, não se destinavam a efetuar operações aritméticas, mas a fazer abreviações para anotar e reter os números. A numeração romana era regida pelo princípio de adição.

Os símbolos gráficos a que este sistema recorre, tal como os conhecemos hoje, parecem ter sido extraídos de letras do alfabeto latino.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Os demais números eram escritos combinando os símbolos que aparecem no quadro.

Os símbolos eram escritos da esquerda para a direita,por ordem decrescente. A principal característica do sistema de numeração romana é a de ser aditivo, ou seja, os valores dos símbolos usados na representação de um numeral são adicionados; o valor dos símbolos é o mesmo independentemente da ordem em que figura.

A escrita dos números, no sistema de numeração romano, obedece às regras seguintes.

- As letras I, X, C e M podem ser repetidas, seguidamente, até três vezes.
- Os símbolos V, L, D, só podem aparecer uma única vez.

Veja alguns exemplos:

$$
\begin{aligned}
VI &= 6 \\
XXVII &= 27 \\
CLXXXIV &= 184 \\
MMMCDLXXIV &= 3474
\end{aligned}
$$

Os romanos acabaram complicando este sistema introduzindo nele a regra segundo a qual todo signo numérico colocado a esquerda de um algarismo de valor superior indica uma subtração.

Veja alguns exemplos:

$$
\begin{aligned}
IV &= 5-1 \\
IX &= 10-1 \\
XIX = 10 &+ 10-1 = 20-1 \\
XL &= 50-10 \\
XC &= 100-10 \\
CD &= 500-100 \\
CM &= 1000-100
\end{aligned}
$$

No sistema romano de numeração, não há símbolo para representar o número zero.

Ifrah [7], observa que: "um povo que atingiu em poucos séculos um elevado nível técnico conservou, curiosamente, durante toda a sua existência um sistema inutilmente complicado, não operatório, e comportando um arcaísmo de pensamento característico".

Este sistema de numeração, foi utilizado em todo Ocidente por aproximadamente dois mil anos e ainda hoje é utilizado em diversas situações, como nos mostradores de alguns relógios, na escrita dos números dos séculos, na numeração de capítulos de livros e de leis, na designação de reis e papas de mesmo nome, etc.

Sistema de Numeração Indo-arábico

A origem do nosso sistema de numeração é bastante antiga. Ele surgiu na Ásia, há muitos séculos, no vale do rio Indo, onde hoje é o Paquistão .

Há mais de 4000 anos, os hindus construíram várias cidades com ruas, calçadas, sistemas de fornecimento de água e canalizações de esgoto. Possuíam piscinas para banhos públicos e casas construídas com tijolos de barro. Como não poderia deixar de ser, seus habitantes tinham um comércio bastante intenso, inclusive trocando mercadorias com outros povos.

Segundo Ifrah [7], "foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia"

Para a criação de seu sistema decimal posicional os indianos receberam influências de muitos dos povos com os quais tiveram contato.

- O princípio posicional já aparecia no sistema dos mesopotâmicos.
- A base dez era usada pelos egípcios e chineses.
- Quanto ao zero, existem indícios de que já era usado pelos mesopotâmicos na fase final de sua civilização.

Sabe-se que desde o século III a.C. eram utilizados na Índia símbolos gráficos para identificar os números, isso por que foram encontradas inscrições em pedra desse período. Nessas inscrições ficava claro que Hindus adotavam nove símbolos independentes para representar quantidades de 1 a 9.

Como não podiam representar os números grandes por algarismos, eles tiveram desde muito cedo a ideia de exprimi-los, como se diria hoje, "por extenso". Sem o saber, eles tomavam o caminho que os levaria um dia à descoberta do princípio de posição e, consequentemente, a criação do zero. Apesar de oral, esta numeração foi de excelente qualidade (Ifrah [7]).

Era atribuído um nome particular a cada um dos nove primeiros números inteiros:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
eka	dvi	tri	catur	pañca	sat	sapta	asta	nava

E também atribuía as potências de 10 nomes totalmente independentes uns dos outros:

10	dasa
100	sata
1000	sahasra
10.000	ayuta
100.000	laksa
1.000.000	prayuta
10.000.000	koti

De acordo com as potências decrescentes de 10, os hindus escreviam os números em ordem crescente das potências de 10 por volta do século IV d. C. Eles começavam pelas unidades, depois pelas dezenas, pelas centenas e assim por diante. O número 4.937 ficava:

7	30	900	4000
[redacted]			
sete	três dezenas	nove centenas	quatro milhar

Por causa da grande repetição que ocorria com as potências de 10, por volta do século V d.C., os matemáticos e astrônomos hindus suprimiram, qualquer menção aos indicadores da base e de suas potências. Do enunciado de um número, retiveram apenas a sucessão dos nomes das unidades correspondentes, respeitando evidentemente a ordem de sua sequência regular e se conformando no sentido da leitura de acordo com as potências crescentes de 10.

Um número como 9267 foi a partir de então expresso por:

"SETE. SEIS. DOIS. NOVE"

$$(=7 + 6 \times 10 + 2 \times 100 + 9 \times 1000\ )$$

Ao operar tal simplificação, os sábios hindus tinham elaborado uma verdadeira numeração oral de posição, recebendo desse modo os nomes das nove unidades simples um valor variável dependente de sua posição na enunciação do número.

Mas começaram a acontecer alguns problemas como escrever os números 123 e 103.

Neste sistema, um número como 123 é expresso facilmente dizendo:

"TRÊS. DOIS. UM"

$$(=3 + 2 \times 10 + 1 \times 100\ )$$

Por outro lado, temos dificuldade para exprimir um número como 103, onde falta um decimal. Não basta dizer

"TRÊS. UM"

o que significaria 13, e não 103.

Era preciso uma palavra, significando que não há dezenas. Então os sábios Hindus resolveram o problema com a palavra *śūnya*, que significa "vazio". E, nosso 103 foi enunciado da seguinte maneira:

"tri *śūnya* eka"

("TRÊS. VAZIO. UM")

Não havia mais a possibilidade de erros. Os hindus tinham acabado de descobrir o zero.

Todos os ingredientes necessários da numeração moderna se encontram à disposição dos sábios da Índia:

- para as unidades de 1 a 9, eles dispunham realmente de algarismos distintos e independentes;
- eles já conheciam o princípio de posição;
- e acabavam de descobrir o zero.

Porém, estas notações só serviam para as palavras e não para os números. Foi porém a reunião dessas três grandes ideias que produziu o atual sistema de notação posicional.

Quando se viram diante da numeração e dos métodos de cálculo vindos da Índia, os árabes souberam apreciar suas vantagens, reconhecer sua superioridade e adotá-los.

Mohammed Ibn Mussa al-Khowarizmi, matemático, astrônomo e geógrafo muçulmano do século IX, foi um dos responsáveis pela divulgação do sistema de numeração indo-arábico na Europa.

Num dos vários livros que escreveu, intitulado "Sobre a arte hindu de calcular", ele explica minuciosamente o sistema de numeração hindu. Na Europa, este livro foi traduzido para o latim e passou a ser muito consultado por aqueles que queriam aprender a nova numeração. Apesar de al-Khowarizmi, honestamente, explicar que a origem daquelas ideias era hindu, a nova numeração tornou-se conhecida como a de al-Khowarizmi. Com o tempo, o nome do matemático árabe foi modificado para algorismi que, na língua portuguesa, acabou por se tornar algarismo.

Por terem os árabes, dessa forma, difundido o sistema numérico indiano, ele passou a ser conhecido como indo-arábico.

Não se sabe exatamente quando, nem como os algarismos indo-arábicos chegaram à Europa. Provavelmente mercadores e viajantes do mar Mediterrâneo adquiriram esse conhecimento através das relações comerciais que estabeleciam com os árabes. Também as Cruzadas e a invasão dos mouros na Espanha devem ter contribuído para a introdução dos novos algarismos na Europa.

No entanto os europeus demoraram muito para aceitar a novidade.

Dois parecem ser os principais fatores que ocasionaram essa resistência por parte dos europeus.

- O primeiro deles, de cunho religioso, pois encontramo-nos no final da Idade Média, e os árabes muçulmanos são vistos como infiéis, e o islamismo como obra do demônio, assim, qualquer conhecimento adquirido por meio deles ganhava uma conotação diabólica.

- O outro, de cunho socioeconômico, pois, na Europa desta época, os cálculos eram ainda realizados utilizando o inadequado sistema de numeração romano com o auxílio do ábaco e apenas uma casta privilegiada sabia manusear essas calculadoras, os demais viviam na mais completa ignorância.

Assim, na Europa, travou-se uma batalha entre Abacistas, aqueles que defendiam o cálculo com o ábaco através do obsoleto sistema de numeração romano e Algoristas, aqueles que defendiam o algoritmo, como ficou conhecido, na Europa da época, o novo sistema de cálculo escrito. A querela entre "abacistas"(defensores dos números romanos e do cálculo em ábaco de fichas) e os "algoristas"(defensores do cálculo por algarismos de origem hindu) durou vários séculos.

Mas de qualquer forma, o nome de al-Khowarizmi se tornou o símbolo da importância da matemática árabe. Dele surgiram termos como algoritmo e também algarismo, este último termo é utilizado para designar os símbolos do nosso atual sistema de numeração

As novas técnicas foram, assim, difundidas por toda Europa.

No início do século XIII, surge outro matemático que contribuiu grandemente para a difusão do sistema de numeração hindu. Desta vez, tratava-se de um europeu, o ilustre matemático renascentista Leonardo de Pisa (c. 1175-1250), mais conhecido como Fibonacci que visitou a África muçulmana e conheceu o Oriente Próximo.

Foi ele que encontrou os mestres árabes, que lhe explicaram a fundo seu sistema numérico, as regras do cálculo algébrico e os princípios fundamentais da geometria.

Iniciado nesta ciência, ele redigiu em 1202 uma obra chamada Liber abaci, na qual explicava as regras de cálculo com os algarismos indo-arábicos.

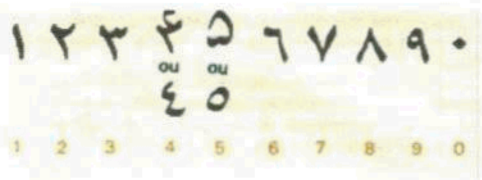
Apesar de esse sistema de numeração ter sido introduzido na Europa Ocidental antes do ano 1000, foi somente a partir do século XVII que ele substitui os sistemas já existentes.

O traçado dos algarismos sofreu várias mudanças, devido ao fato de todos os registros da época ser escritos a mão. Com a invenção da imprensa, a forma dos numerais foi fixada. A influência da imprensa foi tão estabilizadora que os algarismos atuais têm, essencialmente, a mesma aparência dos do século XV.

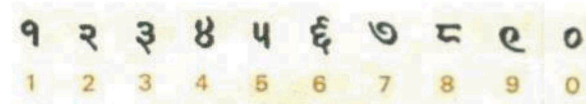
Além disso, como o sistema de numeração criado na índia foi adotado pelos árabes e passado aos europeus, é natural que a forma de escrever os dez algarismos fosse sofrendo alterações

Figura 1.2: Evolução do traçado dos símbolos do sistema de numeração indo-arábico

Entre os árabes, os símbolos acabaram por tomar a seguinte configuração, que é por eles utilizada atualmente :



Na Índia, os símbolos também continuaram a se modificar. Uma das formas hoje ali utilizadas é esta



E quanto a nós, hoje em dia, representamos os dez algarismos assim:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Finalizamos com uma citação de Ifrah [7],

> Diante desses exemplos, podemos afirmar, portanto, que dois acontecimentos foram, na história da humanidade, tão revolucionários quanto o domínio do fogo, o desenvolvimento da agricultura ou o progresso do urbanismo e da tecnologia: a invenção da escrita e a invenção do zero e dos algarismos denominados "arábicos". Do mesmo modo que os primeiros, elas modificaram completamente a existência do ser humano.

Capítulo 2

Representação dos Números Naturais

O Sistema de Numeração posicional baseiam-se em um resultado que é uma aplicação da divisão euclidiana. Com base neste fato, apresentaremos alguns resultados básicos de extrema importância para a formalização do sistema de numeração posicional. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [6] e [9].

2.1 Divisão nos Naturais

Como a divisão de um número natural por outro nem sempre é possível, expressa-se esta impossibilidade através da relação de divisibilidade.

Quando não existe uma relação de divisibilidade entre dois números, ainda assim, será possível efetuar uma divisão com resto pequeno, chamada de *divisão euclidiana*. O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por inúmeras propriedades dos naturais.

Definição 2.1. *Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, dizemos que a divide b, denotado por $a \mid b$, se existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso, diremos que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda que b é um múltiplo de a.*

Se a não divide b escrevemos $a \nmid b$

A notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{N}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade que existe c tal que $b = a \cdot c$. Vejamos algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 2.1. *Sejam $a \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Tem-se que $1 \mid c$, $a \mid a$, e $a \mid 0$.*

Demonstração. Isto decorre das igualdades

$$c = 1 \cdot c, \qquad a = a \cdot 1 \qquad \text{e} \qquad a \cdot 0 = 0.$$

□

Proposição 2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Como $a \mid b$ e $b \mid c$, existem naturais s_1 e s_2 com $b = s_1 a$ e $c = s_2 b$. Substituindo o valor de b na equação $c = s_2 b$ teremos $c = s_2 s_1 a$ o que implica que $a \mid c$. □

Proposição 2.3. *Se a, b, c, m e n são naturais, $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid (ma + nb)$.*

Demonstração. Como $c \mid a$ e $c \mid b$, existem naturais s_1 e s_2 com $a = s_1 c$ e $b = s_2 c$. Multiplicando-se estas duas equação respectivamente por m e n teremos $ma = ms_1 c$ e $nb = ns_2 c$. Somando-se membro a membro obtemos $ma + nb = (ms_1 + ns_2)c$, o que nos diz que $c \mid (ma + nb)$. □

Divisão Euclidiana

Mesmo quando um número natural a não divide o número natural b, Euclides, nos seus *Elementos*, utiliza, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que sempre é possível efetuar a divisão de b por a, com resto.

Teorema 2.1 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a \cdot q + r, \quad \textit{com} \quad r < a.$$

Demonstração. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, b - a, b - 2a, \cdots, b - n \cdot a, \cdots$$

Pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$.

Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, $r < a$.

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar.

Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, e portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$.

De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$ Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$, teríamos

$$c = b - (q+1) \cdot a \in S, \quad com \quad c < r,$$

contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Agora, vamos provar a unicidade.

Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geqslant a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto $r = r'$.

Dai segue que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto, $q = q'$. $\square$

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b por a. O resto da divisão de b por a é zero se, e somente se a divide b.

A demonstração do teorema fornece um algoritmo para calcular o quociente e o resto da divisão de um número por outro, por subtração sucessiva.

Exemplo 2.1. *Encontremos e o resto da divisão de* 27 *por* 5.

Considere as diferenças sucessivas:

$$\begin{aligned} 27 - 1 \cdot 5 &= 22 \\ 27 - 2 \cdot 5 &= 17 \\ 27 - 3 \cdot 5 &= 12 \\ 27 - 4 \cdot 5 &= 7 \\ 27 - 5 \cdot 5 &= 2 < 5 \end{aligned}$$

Isto nos dá que $q = 5$ *e* $r = 2$.

2.2 Sistema de Numeração

No sistema decimal, todo número é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

acrescidos do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismos. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado de decimal.

O sistema é também chamado de posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse peso, sempre uma potência de dez, varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita peso 1; o seguinte, sempre da direita para esquerda, tem peso dez, o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil; etc.

Portanto, os números de um a nove são representados pelos algarismos de 1 a 9, correspondentes. O número dez é representado por 10, o número cem por 100, o número mil por 1000.

Por exemplo, o número 21015, na base 10, é representado por

$$2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10 + 5$$

Cada algarismo de um número possui uma *ordem* contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, sempre da direita para a esquerda, o primeiro 1 que aparece é de segunda ordem, enquanto que o último é que quarta ordem. O 5 é de primeira ordem, enquanto que o 2 é de quinta ordem.

Cada terna de ordens, também contadas da direita para esquerda, formam uma *classe*. As classes são às vezes separadas umas das outras por meio de um ponto.

Damos a seguir os nomes das primeiras classes e ordens:

Classe da Unidades	unidades	1ª ordem
	dezenas	2ª ordem
	centenas	3ª ordem
Classe do Milhar	unidades de milhar	4ª ordem
	dezenas de milhar	5ª ordem
	centenas de milhar	6ª ordem
Classe do Milhão	unidades de milhão	7ª ordem
	dezenas de milhão	8ª ordem
	centenas de milhão	9ª ordem

O sistema de numeração posicionais baseiam-se no seguinte resultado, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 2.2. *Dados a, $b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \ldots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_n b^n$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a.

Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } r < b$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \ldots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + d_2 b^2 + \cdots + d_{n'} b^{n'}$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + d_2 b^2 + \cdots + d_{n'} b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r, n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n$.

A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas. □

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b.

- Quando $b = 10$, essa expansão é chamada **expansão decimal**,
- Quando $b = 2$, ela é dita **expansão binária**.

A demonstração do Teorema também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, & r_0 &< b, \\ q_0 &= bq_1 + r_1, & r_1 &< b, \\ q_1 &= bq_2 + r_2, & r_2 &< b, \\ q_2 &= bq_3 + r_3, & r_3 &< b \end{aligned}$$

e assim por diante. Com $a > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n,$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = r_{n+3} = \cdots$.

Temos, então, que

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n.$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais.

Para tanto, escolhamos um conjunto S de b símbolos

$$S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{b-1}\},$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b-1$. Um número a na base b se escreve na forma

$$a = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0,$$

com $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$, e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + x_2 b^2 + \cdots + x_n b^n.$$

Se cada um dos elementos do conjunto $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{b-1}\}$ é representado por um símbolo especial, então cada um desses símbolos é chamado de *algarismo* do *sistema posicional de base b*. Assim, é válido representar cada número

$$a = x_0 + x_1 b + x_2 b^2 + \cdots + x_n b^n.$$

pela sequência de algarismos que nele figuram da seguinte maneira

$$a = (x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0)_b.$$

No caso em que $b = 10$ omitem-se os parênteses e o índice.

- No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Se $b \leqslant 10$, utilizam-se os símbolos $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Se $b > 10$, costuma-se usar os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para $10, \ldots, b-1$.

- No sistema binário, de base $b = 2$, temos que

$$S = \{0, 1\},$$

e todo número natural é representado por uma sequência de 0 e 1.

Vejamos alguns exemplos:

O número $(10)_2$, representa o número 2 na base 10. De fato,

$(10)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$

Temos também que

$$\begin{aligned}
(11)_2 &= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3, \\
(100)_2 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4 + 0 + 0 = 4, \\
(101)_2 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 0 + 1 = 5, \\
(111)_2 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 + 1 = 6, \\
(1011)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11
\end{aligned}$$

- No sistema de base $b = 5$, temos que

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Vamos representar o número 413 na base 5.

Por divisão euclidiana sucessiva,

$$\begin{aligned}
413 &= 82 \cdot 5 + 3, \\
82 &= 16 \cdot 5 + 2, \\
16 &= 3 \cdot 5 + 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$413 = 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3$$

e, consequentimente, 413 na base 5 se representa por 3123, isto é,

$413 = (3123)_5$.

Do Teorema (2.2) segue o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Todo número natural se escreve de modo único como soma de potência distintas de* 2.

A representação binária tem peculiaridades interessantes.

Determinar a expansão binária de um número a é ainda mais fácil do que determinar a sua expansão relativamente a um número $b \neq 2$.

De fato, escreve-se a lista de números

$$\begin{aligned}
a &= q_0 \cdot 2 + r_0, & r_0 < 2 \\
q_0 &= q_1 \cdot 2 + r_1, & r_1 < 2 \\
q_1 &= q_2 \cdot 2 + r_2, & r_2 < 2 \\
q_2 &= q_3 \cdot 2 + r_3, & r_3 < 2 \\
q_3 &= q_4 \cdot 2 + r_4, & r_4 < 2 \\
&\vdots \\
q_{n-1} &= 0 \cdot 2 + r_n, & r_n < 2,
\end{aligned}$$

Na divisão euclidiana sucessiva, temos que, se a é ímpar, então $r_0 = 1$; caso contrário, temos $r_0 = 0$; temos que $r_1 = 1$ se q_1 é ímpar, e $r_1 = 0$ caso contrário. Em geral, $r_{i+1} = 1$ se q_i é ímpar, e $r_{i+1} = 0$ caso contrário. Até encontramos $q_{n-1} = 1$, quando colocamos $r_n = 1$. Segue-se portanto que

$$a = r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + \cdots + r_n \cdot 2^n.$$

O Método acima, para determinar expansões binárias, permite desenvolver um algoritmo utilizado pelos antigos egípcios para calcular o produto de dois números usando apenas multiplicações e divisões por 2, além de adições. Este Método tem a vantagem de apenas necessitar do conhecimento da tabuada de 2.

De fato, para efetuar a multiplicação de a por b, escreve-se a como soma de potências de 2

$$a = r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + \cdots + r_n \cdot 2^n.$$

com cada r_i zero ou um. Logo,

$$a \cdot b = r_0 \cdot b + r_1 \cdot 2b + r_2 \cdot 2^2 b + \cdots + r_n \cdot 2^n b.$$

Escrevem-se duas colunas de números, uma ao lado da outra, onde na coluna da esquerda, colocam-se, um em cada linha os números $a, q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ (como descritos acima) e, na coluna da direita, também em cada linha, os números $b, 2b, 4b, \ldots, 2^n b$. Como segue,

a	b
q_0	$2b$
q_1	$4b$
$\vdots$	$\vdots$
q_{n-1}	$2^n b$

Temos que a paridade do elemento da coluna da esquerda na linha $i-1$ determina se $r_i = 0$ ou $r_i = 1$, quando somarmos os elementos da coluna da direita que corresponde a elementos ímpares da coluna da esquerda, obteremos $a \cdot b$.

Exemplo 2.2. *Utilizando o método dos antigos egípcios vamos calcular* $237 \cdot 53$.

Primeiro, determinemos a expansão binária do número 53 *utilizando divisão euclidiana sucessiva.*

Temos que

$$\begin{aligned} 53 &= 26 \cdot 2 + 1 \\ 26 &= 13 \cdot 2 + 0 \\ 13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Assim, a expansão binária do número 53 *é*

$$53 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2_4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$$

Agora, escrevendo a tabela, temos

53	237
26	474
13	948
6	1896
3	3792
1	7584

Quando somarmos os elementos da coluna da direita que corresponde a elementos ímpares da coluna da esquerda, obteremos

$$53 \cdot 237 = 237 + 948 + 3792 + 7584 = 12561$$

Exemplo 2.3. *Utilize o método dos antigos egípcios para calcular* $527 \cdot 72$.

Primeiro, determinemos a expansão binária do número 72 *utilizando divisão euclidiana sucessiva.*

Temos que

$$
\begin{aligned}
72 &= 36 \cdot 2 + 0 \\
36 &= 18 \cdot 2 + 0 \\
18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\
9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
$$

Assim, a expansão binária do número 72 *é*

$$72 = 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^6$$

Agora, escrevendo a tabela, temos

72	527
36	1054
18	2108
9	4216
4	8432
2	16864
1	33728

Quando somarmos os elementos da coluna da direita que corresponde a elementos ímpares da coluna da esquerda, obteremos

$$527 \cdot 72 = 4216 + 33728 = 37944$$

2.3 Critérios de Divisibilidade

Os critérios de divisibilidade da aritmética elementar são bem conhecidos. Mas, como justificá-los? De que maneira dependem eles de nosso sistema de numeração? Daremos resposta a essas perguntas em alguns casos.

2.3.1 Alguns Critérios de Divisibilidade na base 10

No que segue vamos considerar um número x com expansão decimal da forma

$$x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r \cdot 10^r$$

Critério de Divisibilidade por Potência de 2

Proposição 2.4. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que 2^k divida x é que o número $a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ seja divisível por 2^k.

Demonstração. Temos que $2^k \mid 10^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Como $x = a_r \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, podemos escrever x na forma

$$x = 10^k (a_r \cdots a_k) + a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

Assim, se 2^k divide x, como $2^k | 10^k$, temos que 2^k divide $a_{k-1} \ldots a_1 a_0$.

Reciprocamente, se $a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ é divisível por 2^k, com 10^k é divisível por 2^k temos que x é divisível por 2^k. $\square$

Em particular, segue da proposição acima, os critérios de divisibilidade por 2, por 4 e por 8.

- **Critério de Divisibilidade por 2:** *Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 2 é que $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.*

- **Critério de Divisibilidade por 4:** *Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 4 é que $a_1 a_0$ seja divisível por 4.*

- **Critério de Divisibilidade por 8:** *Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 8 é que $a_2a_1a_0$ seja divisível por 8.*

Observação 2.1. *Como todo número natural pode ser escrito na forma $10k + j$, onde j é o dígito das unidades, e como 10 é divisível por 2, então ele será divisível por 2 se, e somente se, j for múltiplo de 2. Em outras palavras se, e somente se, ele for par.*

Critério de Divisibilidade por 3

Proposição 2.5. *Seja $x = a_r \cdots a_2a_1a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 3 é que $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ seja divisível por 3.

Demonstração. Primeiramente, observamos que o resto da divisão de $10^k (k \geqslant 0)$ por 3 é sempre 1. De fato,

$$10^0 = 3 \cdot 0 + 1$$

Vamos supor que $10^r = 3s + 1$, onde $r \geqslant 0$. Então,

$10^{r+1} = 10^r \cdot 10 = (3s + 1 \cdot (3 \cdot 3 + 1) = 3(9s) + 3s + 3 \cdot 3 + 1 = 3(9s + s + 1) + 1$

Assim, para todo $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r \cdot 10^r \\ &= a_0 + a_1(3q_1 + 1) + a_2(3q_2 + 1) + \cdots + a_r(3q_r + 1) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r) + 3(a_1q_1 + a_2q_2) + \cdots + a_rq_r \end{aligned}$$

Logo, $x = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r) + 3q$ Portanto, x é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r$, é divisível por 3. $\square$

Critério de Divisibilidade por 6

Proposição 2.6. *Seja $x = a_r \cdots a_2a_1a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 6 é que ele seja divisível por 2 e por 3.

Critério de Divisibilidade por 12

Proposição 2.7. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 12 é que ele seja divisível por 3 e por 4.

Critério de Divisibilidade por 9

O critério da divisibilidade de um número x por 9 é semelhante ao critério de divisibilidade por 3.

$$9 \mid x \Leftrightarrow 9 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r).$$

O motivo é que, também neste caso, $10^k = 9 \cdot s + 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato,

Para todo $n = 0$, temos que

$$10^0 = 9 \cdot 0 + 1;$$

Portanto, o resultado vale.

Suponha, agora, o resultado válido para um dado n, isto é, vamos supor que $10^n = 9s + 1$. Então, considere a igualdade

$$\begin{aligned} 10^{n+1} &= 10^n \cdot 10 = (9s+1) \cdot (9 \cdot 1 + 1) = 9(9s) + 9s + 9 \cdot 1 + 1 \\ &= 9(9s + s + 1) + 1 = 9q + 1. \end{aligned}$$

Provando que o resultado vale para $n + 1$ e, consequentemente, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.8. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 9 é que $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ seja divisível por 9.

Demonstração. Para todo $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r \cdot 10^r \\ &= a_0 + a_1(9q_1 + 1) + a_2(9q_2 + 1) + \cdots + a_r(9q_r + 1) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r) + 9(a_1 q_1 + a_2 q_2) + \cdots + a_r q_r \end{aligned}$$

Logo,

$$x = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r) + 9q$$

Portanto, x é divisível por 9 se, e somente se, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_r$, é divisível por 9. □

Critério de Divisibilidade por 5 e por 10

Proposição 2.9. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 5 (e respectivamente por 10) é que a_0 seja 0 ou 5 (respectivamente 0).

Demonstração. Seja $x = 10 \cdot (a_r \cdots a_2 a_1) + a_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente se, a_0 é divisível por 5, e, portanto, $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

Por outro lado, x é divisível por 10 se, e somente se, a_0 é divisível por 10, o que ocorre somente quando $a_0 = 0$. □

Critério de Divisibilidade por 7

Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.

Para saber se x é divisível por 7, procedemos da seguinte forma.

Seja $y = a_r \cdots a_2 a_1$ a representação decimal do número obtido retirando do número x o dígito das unidades.

Sabemos que todo número natural pode ser escrito na forma $10y + a_0$, onde a_0 é o dígito das unidades.

Seja z obtido fazendo $y - 2a_0$.

Em seguida repetimos o processo até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer, facilmente, se é ou não divisível por 7.

Feitas as observações, será suficiente provar que os números $10y + a_0$ e $y - 2a_0$ são tais que, se um deles é múltiplo de 7, o outro também o é.

Proposição 2.10. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal. Seja $y = a_r \cdots a_2 a_1$ a representação decimal do número obtido retirando do número x o dígito das unidades. Desta forma x pode ser escrito na forma $10y + a_0$, onde a_0 é o dígito das unidades. O número x é divisível por 7 se verifica a seguinte equivalência:*

$$10y + a_0 \text{ é múltiplo de } 7 \Leftrightarrow y - 2a_0 \text{ é múltiplo de } 7.$$

Demonstração.

($\Rightarrow$) Se $10y + a_0$ é múltiplo de 7, então existe um natural m tal que $10y + a_0 = 7m$ e, portanto,

$$\begin{aligned} y - 2a_0 &= y - 2(7m - 10y) = y - 14m + 20y = 21y - 14m \\ y - 2a_0 &= 7(3y - 2m) = 7p \end{aligned}$$

o que implica que $10y + a_0$ é múltiplo de 7. ($\Leftarrow$) Se $y - 2a_0$ é múltiplo de 7, então existe um natural r tal que $y - 2a_0 = 7r$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 10y + 2a_0 &= 10(7r + 2a_0) + a_0 = 70r + 20a_0 + a_0 \\ 10y + a_0 &= 7(10r + 3a_0) = 7s \end{aligned}$$

o que implica que $10y + a_0$ é múltiplo de 7. □

Exemplo 2.4. *Vejamos se o número 145096 é divisível por 7*

Seja $x = 145096$. Separamos o dígito 6 das unidades e do número restante 14509, subtraímos o dobro desse dígito, isto é

$$14509 - 2 \cdot 6 = 14509 - 12 = 14497$$

Em seguida repetimos o processo até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer, facilmente, se é ou não divisível por 7.

$$\begin{aligned} 1449 - 2 \cdot 7 &= 1449 - 14 = 1435 \\ 143 - 2 \cdot 5 &= 143 - 10 = 133 \\ 13 - 2 \cdot 3 &= 13 - 6 = 7 \end{aligned}$$

Como 7 é divisível por 7, o critério que provamos garante esse fato implica que o número original 145096 é divisível por 7.

Critério de Divisibilidade por 11

Proposição 2.11. *Seja $x = a_r \cdots a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 11 é que 11 divida a soma alternada

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{r-1} a_{r-1} + (-1)^r a_r$$

A prova do critério de divisibilidade por 11. segue das seguintes observações:

Observação 2.2.

Primeiro observe que

$$\begin{aligned} 10 &= 11 - 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1000 &= 1001 - 1 \\ 10000 &= 999 + 1 \end{aligned}$$

Consideremos 10^k, para todo $k \geq 1$ temos que:

a) Se k for um número par, podemos escrever 10^k como

$$10^k = 999 \cdots 9 + 1$$

onde o número de "9"s é par.

b) Se k for um número ímpar, podemos escrever 10^k como

$$10^k = 1000 \cdots 01 - 1$$

onde o número de "0"s entre os dois "uns" é par.

Observação 2.3.

i) Todo número da forma $999 \cdots 9$, onde o número de "9"s é par, é divisível por 11.

ii) Todo número da forma $1000 \cdots 01$, onde o número de "0"s entre os dois "uns" é par, também é divisível por 11.

Para a prova, observe que

$$\begin{aligned} 9999 &= 9900 + 99 \\ 999999 &= 999900 + 99, \cdots, \quad e \;\; que \\ 1001 &= 990 + 11 \\ 100001 &= 99990 + 11, \cdots \end{aligned}$$

Critério de Divisibilidade por 13

Seja $x = a_r \cdots a_2a_1a_0$ um número representado no sistema decimal.

Para saber se x é divisível por 13, procedemos da seguinte forma.

Seja $y = a_r \cdots a_2a_1a_0$ a representação decimal do número obtido retirando do número x o dígito das unidades.

Sabemos que todo número natural pode ser escrito na forma $10y + a_0$, onde a_0 é o dígito das unidades.

Seja z obtido fazendo $y - 4a_0$.

Em seguida repetimos o processo até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer, facilmente, se é ou não divisível por 13.

Feitas as observações, será suficiente provar que os números $10y + a_0$ e $y - 4a_0$ são tais que, se um deles é múltiplo de 13, o outro também o é.

Proposição 2.12. *Seja $x = a_r \cdots a_2a_1a_0$ um número representado no sistema decimal.*

Seja $y = a_r \cdots a_2a_1$ a representação decimal do número obtido retirando do número x o dígito das unidades. Desta forma x pode ser escrito na forma $10y + a_0$, onde a_0 é o dígito das unidades. O número x é divisível por 13 se verifica a seguinte equivalência:

$$10y + a_0 \text{ é múltiplo de } 13 \Leftrightarrow y - 4a_0 \text{ é múltiplo de } 13.$$

2.3.2 Critério de Divisibilidade em outra Base

Critérios de divisibilidade podem ser estipulados, mesmo que a base numérica não seja decimal.

A título da ilustração, faremos um exemplo de critério de divisibilidade no sistema duodecimal.

Considere o número $a = (r_kr_{k-1} \cdots r_1r_0)_{12}$ escrito na base numérica duodecimal.

Critério de Divisibilidade por 8 na base 12

Um número $a = (r_kr_{k-1} \cdots r_1r_0)_{12}$ é divisível por 8 se, e somente se, o número $(r_1r_0)_{12}$ formado pelos dois últimos algarismos de a é divisível por 8.

Primeiro notemos que:

$$a = (r_1r_0)_{12} + r_2 \cdot 12^2 + r_3 \cdot 12^3 + \cdots + r_k \cdot 12^k$$

Mas, para $j \geq 2, 12^j$ é divisível por 8.

De fato, $12^2 = 144$ que é múltiplos de 8. E se $12^s = 8 \cdot q_s, (s \geq 2)$, então

$$12^{s+1} = 12^s \cdot 12 = (8q_s)12 = 8(12q_s)$$

Assim,

$$\begin{aligned} a &= (r_1r_0)_{12} + r_2(8q_2) + r_3(8q_3) + \cdots + r_k(8q_k) \\ &= (r_1r_0)_{12} + 8q \end{aligned}$$

Portanto, o número a na base 12 é divisível por 8 se, e somente se, $(r_1r_0)_{12}$ é divisível por 8.

Capítulo 3

Material Dourado

Utilizaremos o Material Dourado, considerado o Sistema Decimal feito de Madeira, para o estudo das quatro operações fundamentais, mostrando-se muito eficaz para o ensino de numeração e iniciação aritmética. Manipulando suas peças da forma correta, é possível somar, subtrair, multiplicar e dividir sem grandes dificuldades.

Para melhor esclarecimento vide referência [1].

3.1 Material Dourado

O Material Dourado foi um recurso inventado pela educadora italiana Maria Montessori (1870-1954) no início do século XX para representar a base 10, com o intuito de facilitar a aprendizagem das quatro operações. Maria Montessori foi uma das pioneiras no uso de peças para representar o sistema decimal. Seu material dourado, assim chamado pela cor da madeira de que é feito (quando foi industrializado, esse material passou a ser feito de madeira mantendo o nome original), divide-se em peças originalmente conhecidas como unidades, dezenas, centenas e milhar.

Atualmente, alguns educadores preferem utilizar outra nomenclatura que não se prende ao valor representado, como os termos "cubinho"(unidades), "barra"(dezenas), "placa"(cetenas) e o "cubão"(milhar). Essa liberdade permite fixa o valor 1 para peças diferentes, dando margens ao estudo das frações decimais. Sendo definido que a barra vale 1, o cubinho passa a vale 1/10, a placa, 10 e o cubão, 100. Mas, se o cubão representar 1, o cubinho valerá 1/1000, a barra, 1/100 e a placa, 1/10. A principal função do material dourado, entretanto, ainda é o estudo das quatro operações fundamentais.

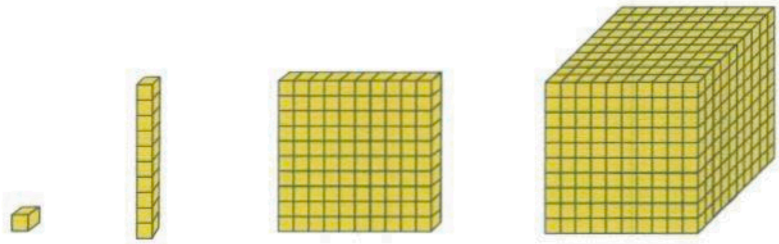


Figura 3.1: Material Dourado

Conhecendo as Peças do Material Dourado

Este material, também conhecido como material montessoriano de contagem, é constituído por cubinho, barra, placa e cubo, apresentando as regras de agrupamento na base 10, de modo que:

- um cubo pequeno, de $1cm$ x $1cm$ x $1cm$, representa a unidade.
- uma barra, com 10 cubos unidos, representa 1 dezena.
- uma placa com 100 cubos unidos (ou 10 barras unidas), representa a centena.
- um cubo grande com 1000 cubos unidos (ou 10 placas unidas ou 100 barras unidas), representa o milhar.

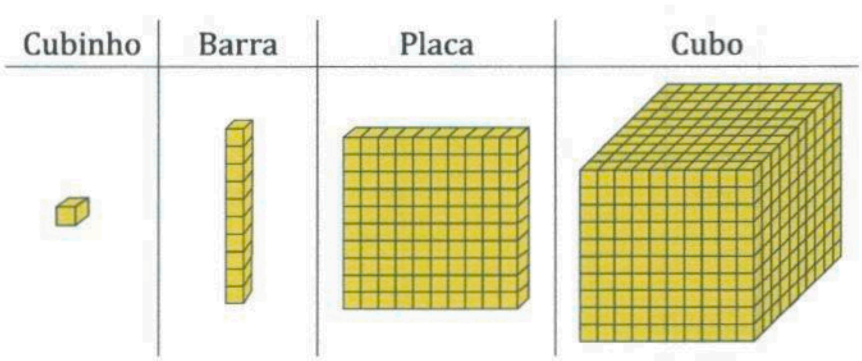


Figura 3.2: Material Dourado Montessori

A manipulação e uso desse recurso podem ajudar na compreensão da adição e subtração com dezenas e reforçar a noção de troca no sistema posicional. O material dourado propicia aos alunos descobrirem as relações entre as peças, como por exemplo, uma barra tem dez cubinhos, uma placa tem dez barras e o cubo tem dez placas.

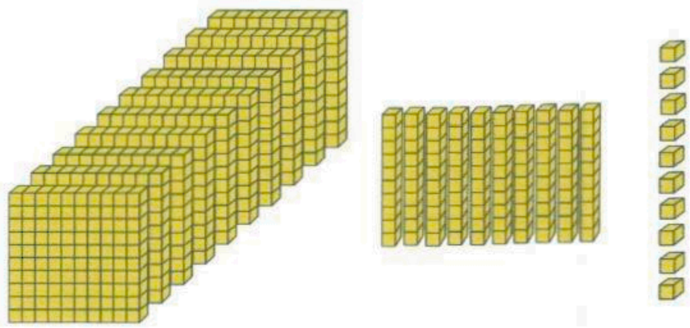


Figura 3.3: Material Dourado Montessori

O material dourado também pode ser utilizado para o ensino dos números decimais nas quatro operações básicas, da seguinte forma. Utilizamos o cubo para representar um inteiro, a placa para representar um décimo, a barra para representar um centésimo e o cubinho para representar um milésimo.

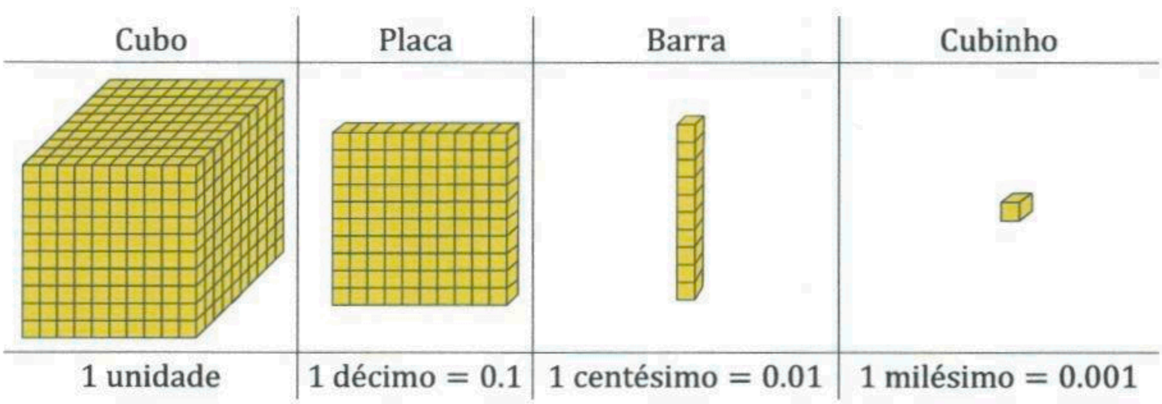


Figura 3.4: Números decimais com o Material Dourado

Mesmo tendo sido criado com o intuito de destinar-se a atividades que auxiliassem o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais (ou seja, os algoritmos), a utilização do Material Dourado Montessori evoluiu e hoje esse material pode ser utilizado para o estudo de frações, conceituação e calculo de áreas e volumes, trabalhando com números decimais, raiz quadrada e outras atividades criativas.

3.2 Sistema de Numeração Decimal com o Material Dourado

Para o aprofundamento progressivo do estudo das quatro operações fundamentais, é necessário que se tenha construído a noção de número e compreendido as regras básicas do sistema de numeração decimal.

Utilizaremos o Material Dourado para efetuar as operações de: adição, subtração, multiplicação e divisão. Para cada uma das operações, há uma manipulação diferente para efetuar a operação. Os valores atribuídos a cada peça serão os propostos originalmente para o material. Ou seja, o cubinho vale 1, a barra vale 10, a placa vale 100 e o cubo maior vale 1000.

Exemplo 3.1. *Consideremos o número 354 no sistema decimal.*

A expansão deste número no sistema decimal é dada por

$$354 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

A representação deste número com o material dourado é:

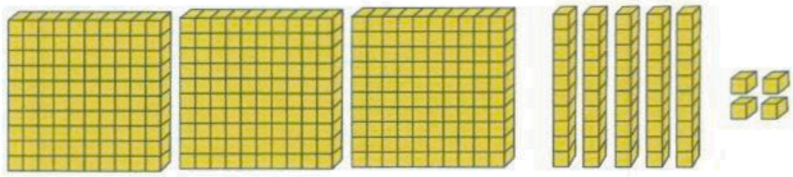


Figura 3.5: Representação do número 354

Exemplo 3.2. *Consideremos o número 2314 no sistema decimal.*

A expansão deste número no sistema decimal é dada por

$$2314 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

A representação deste número com o material dourado é:

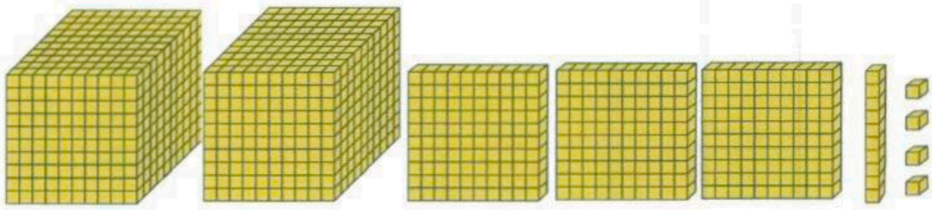


Figura 3.6: Representação do número 2314

Adição

A adição está ligada a situações que envolvem as ações de reunir, juntar ou acrescentar. No entanto, quando reunimos, concretamente, conjuntos de objetos, não estamos efetuando a operação matemática de adicionar, para tal, é necessário que deixemos de pensar nas coleções de objetos em si e passemos a considerar apenas as quantidades de objetos que estamos reunindo.

Assim, primeiro aprender a contar e escrever os números para então, só depois, aprender as operações. Porém essas ideias intuitivas (de juntar, reunir e acrescentar), que adquirimos na vida e levamos conosco para a escola, constituem os pontos de partida para o aprendizado da adição e, já estão presentes na própria noção de número e na construção do sistema de numeração decimal.

Teremos dois casos na adição:

- Quando a soma dos algarismos em qualquer posição não ultrapassa 9.

Exemplo 3.3. *Efetue a operação 2314 + 354.*

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

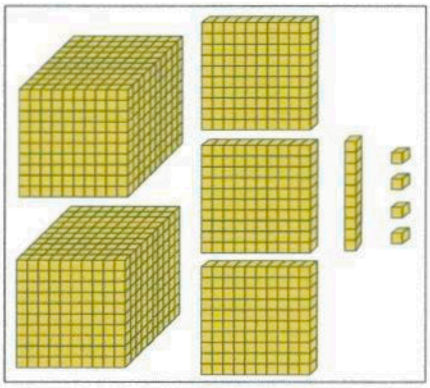
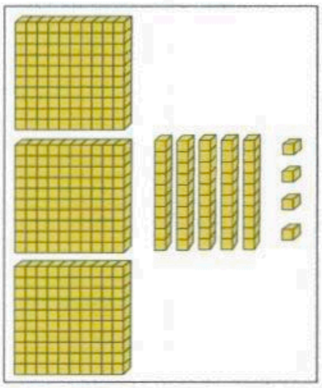



Figura 3.7: Representação dos números 2314 e 354

Em seguida reunimos todas as peças, e a representação destes números com o material dourado é

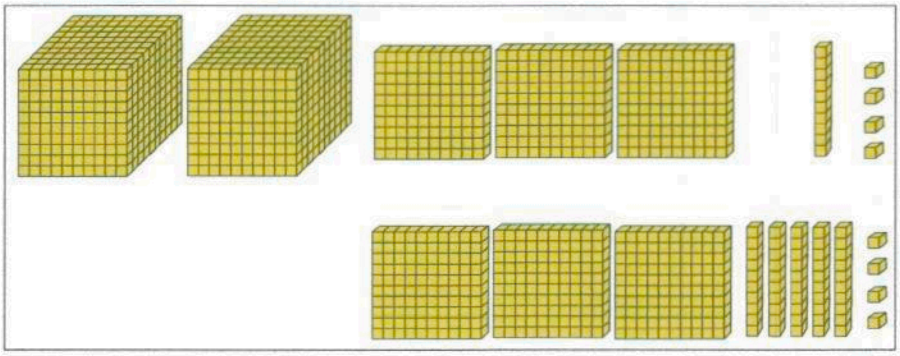


Figura 3.8: Representação do número 2314 + 354

A representação do resultado da operação com o material dourado é

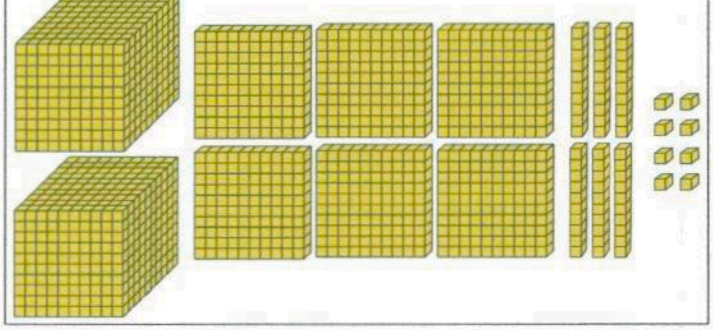


Figura 3.9: Representação do resultado da operação o número 2668

b) Agora vejamos o Algoritmo:

A expansão destes números no sistema decimal é dada por

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2314 & = & 2\cdot 10^3 & + & 3\cdot 10^2 & + & 1\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \\ 354 & = & & & 3\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \end{array}$$

Efetuando a operação de adição, temos

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2314 & = & 2\cdot 10^3 & + & 3\cdot 10^2 & + & 1\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \\ +354 & = & & & 3\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \\ \hline & = & 2\cdot 10^3 & + & (3+3)\cdot 10^2 & + & (1+5)\cdot 10 & + & (4+4)\cdot 1 \\ & = & 2\cdot 10^3 & + & 6\cdot 10^2 & + & 6\cdot 10 & + & 8\cdot 1 \\ & = & 2668 & & & & & & \end{array}$$

- Quando a soma dos algarismos em qualquer posição ultrapassa 9, ou seja, quando acontece o *vai um*.

Exemplo 3.4. *Efetue a operação 2314 + 358*

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

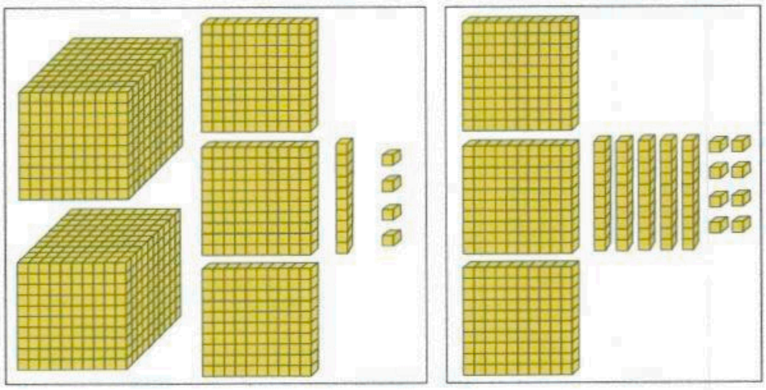


Figura 3.10: Representação dos números 2314 e 358

Em seguida reunimos todas as peças, e a representação destes números com o material dourado é

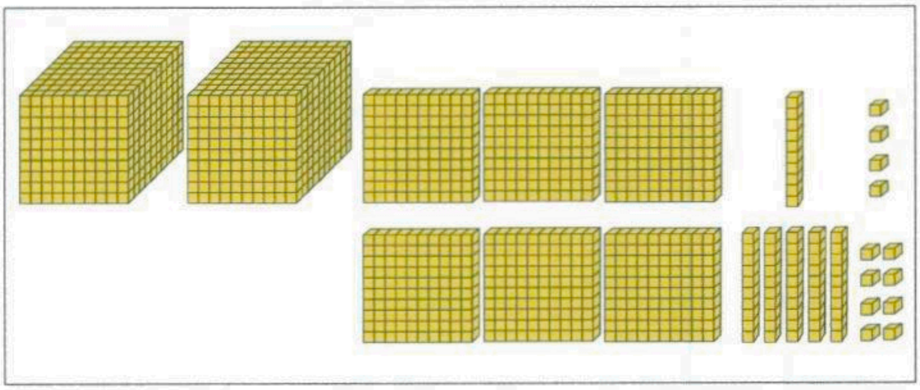


Figura 3.11: Representação de $2314 + 358$

Observe que ao efetuar 4 unidades com 8 unidades, obtemos 12 unidades. Neste caso efetuamos a troca de dez unidades por uma dezena.

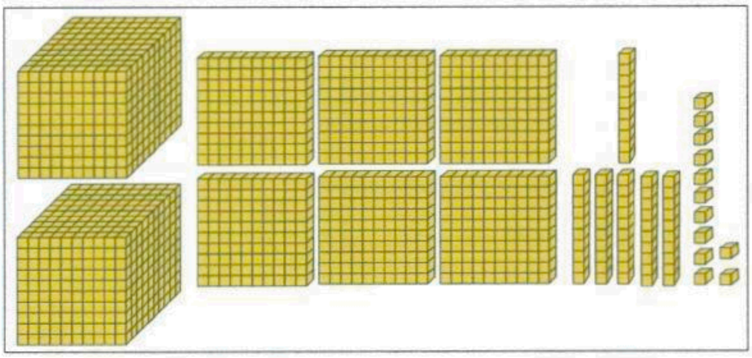


Figura 3.12: Troca de dez unidades por uma dezena.

A representação do resultado da operação com o material dourado é

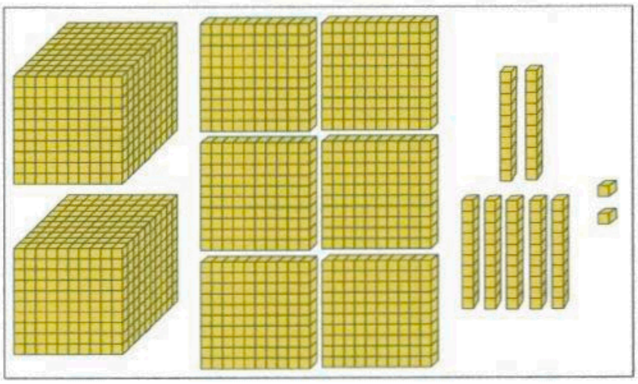


Figura 3.13: Representação do resultado da operação o número 2672

b) Agora vejamos o Algoritmo:

A expansão destes números no sistema decimal é dada por

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2314 & = & 2\cdot 10^3 & + & 3\cdot 10^2 & + & 1\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \\ 358 & = & & & 3\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 8\cdot 1 \end{array}$$

Efetuando a operação de adição, temos

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2314 & = & 2\cdot 10^3 & + & 3\cdot 10^2 & + & 1\cdot 10 & + & 4\cdot 1 \\ \underline{+358} & = & & & 3\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 8\cdot 1 \\ \hline & = & 2\cdot 10^3 & + & (3+3)\cdot 10^2 & + & (1+5)\cdot 10 & + & (4+8)\cdot 1 \\ & = & 2\cdot 10^3 & + & 6\cdot 10^2 & + & 6\cdot 10 & + & 12\cdot 1 \\ & = & 2\cdot 10^3 & + & 6\cdot 10^2 & + & 6\cdot 10 & + & (10+2)\cdot 1 \\ & = & 2\cdot 10^3 & + & 6\cdot 10^2 & + & (6+1)\cdot 10 & + & 2\cdot 1 \\ & = & 2\cdot 10^3 & + & 6\cdot 10^2 & + & 7\cdot 10 & + & 2\cdot 1 \\ & = & 2672 & & & & & & \end{array}$$

Subtração

A ideia de tirar (subtrativa) é aquela que é mais facilmente identificada como a subtração. No entanto esta não é a única ideia associada à subtração. As ideias de completar (aditiva) e de comparar (comparativa) precisam ser trabalhadas, pois não é tão imediato perceber que a subtração resolve problemas desse tipo.

O que está por trás de cada uma destas ideias:

- Subtrativa: *Quanto fica?*
- Aditiva: *Quanto é preciso para?*
- Comparativa: *Quanto há a mais quê? Ou, quanto há a menos quê?*

Na subtração é necessário iniciar as operações sempre pelas unidades.

Temos dois casos na subtração

- Quando no minuendo aparecem algarismos, em qualquer posição maiores do que no subtraendo.

Exemplo 3.5. *Efetue a operação* 354 − 232.

a)Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

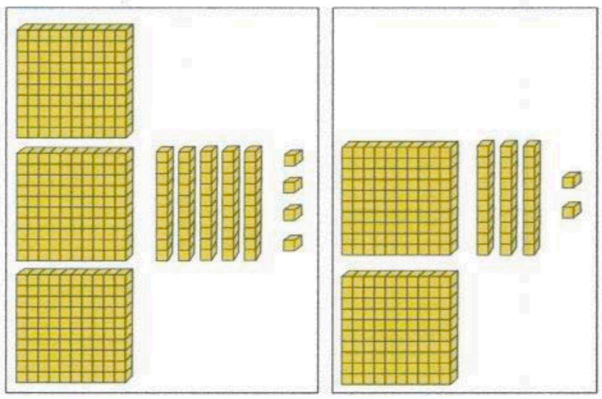


Figura 3.14: Representação dos números 354 e 232

Como no minuendo 354 *cada algarismo é maior que no subtraendo* 232, *o resultado é imediato.*

A representação do resultado da operação com o material dourado é

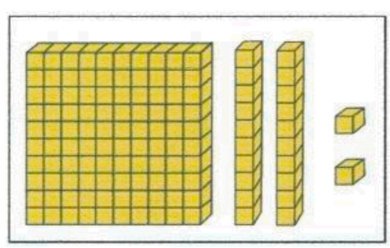


Figura 3.15: Representação do resultado da operação o número 122

b) Agora vejamos o Algoritmo:

A expansão destes números no sistema decimal é dada por

$$
\begin{aligned}
354 &= 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 \\
232 &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1
\end{aligned}
$$

Efetuando a operação de subtração, temos

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
354 & = & 3 \cdot 10^2 & + & 5 \cdot 10 & + & 4 \cdot 1 \\
\underline{-232} & = & \underline{2 \cdot 10^2} & \underline{+} & \underline{3 \cdot 10} & \underline{+} & \underline{2 \cdot 1} \\
 & = & (3-2) \cdot 10^2 & + & (5-3) \cdot 10 & + & (4-2) \cdot 1 \\
 & = & 1 \cdot 10^2 & + & 2 \cdot 10 & + & 2 \cdot 1 \\
 & = & 122 & & & &
\end{array}
$$

- Quando o minuendo apresenta em qualquer posição algarismos menores que o subtraendo,exceto na maior ordem.

Neste caso, é comum usar-se a expressão *empresta um*. O que na realidade não acontece, pois se algo é emprestado, supões-se a devolução. Este algoritmo apoia-se nas propriedades do nosso sistema decimal e posicional de numeração. O que se faz na subtração é decompor uma dezena em dez unidades a acrescentá-las às unidades, ou decompor uma centena em dez dezenas e acrescentá-las as dezenas, e assim por diante.

Exemplo 3.6. *Efetue a operação* $314 - 152$.

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

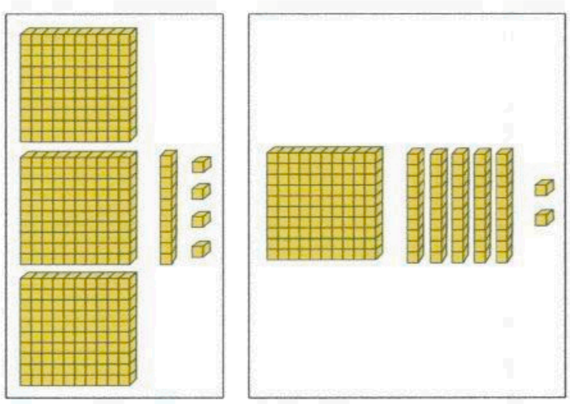


Figura 3.16: Representação dos números 314 e 152

Observe que a operação deste modo não pode ser efetuada de imediato, pois o número das dezenas do minuendo é menor do que o número das dezenas do subtraendo. Então, devemos decompor uma centena em dez dezenas.

Essa transformação com o material dourado é

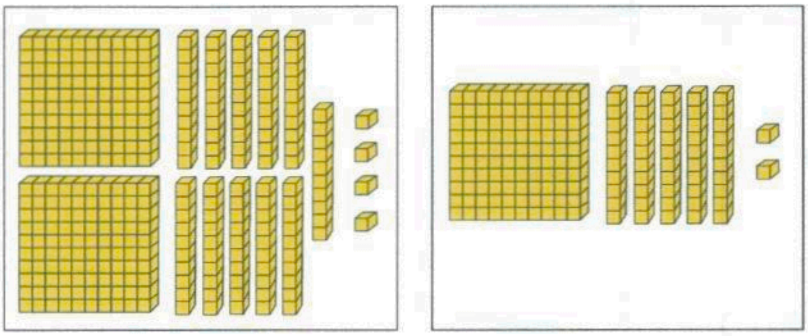


Figura 3.17: Transformação de uma centena em dezenas no número 314

Agora a subtração pode ser realizada e, a representação do resultado da operação com o material dourado é

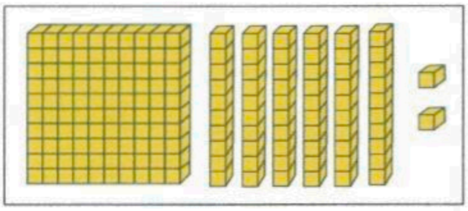


Figura 3.18: Representação do resultado da operação o número 162

b) Agora vejamos o Algoritmo:

A expansão destes números no sistema decimal é dada por

$$\begin{aligned} 314 &= 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\ 152 &= 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Observe que devemos transferir uma centena da ordem das centenas para a ordem das dezenas, e assim poder efetuar a operação desejada. Efetuando a operação de subtração, temos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 314 & = & 3 \cdot 10^2 & + & 1 \cdot 10 & + & 4 \cdot 1 \\ -152 & = & 1 \cdot 10^2 & + & 5 \cdot 10 & + & 2 \cdot 1 \\ \hline & = & 2 \cdot 10^2 & + & 11 \cdot 10 & + & 4 \cdot 1 \\ & = & 1 \cdot 10^2 & + & 5 \cdot 10 & + & 2 \cdot 1 \\ (314 - 152) & = & (2-1) \cdot 10^2 & + & (11-5) \cdot 10 & + & (4-2) \cdot 1 \\ \hline & = & 1 \cdot 10^2 & + & 6 \cdot 10 & + & 2 \cdot 1 \\ & = & 162 & & & & \end{array}$$

Multiplicação

A multiplicação, às vezes, está presente sem que a percebamos. Ela aparece, por exemplo, em nossa maneira de escrever os números e nem sempre temos consciência disto.

Multiplicar nada mais é do que uma adição sucessiva de parcelas iguais. O processo de multiplicação pode ser entendido da propriedade distributiva, conceito essencial ao entendimento do algoritmo da multiplicação.

Exemplo 3.7. *Efetue a operação* 4×12.

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

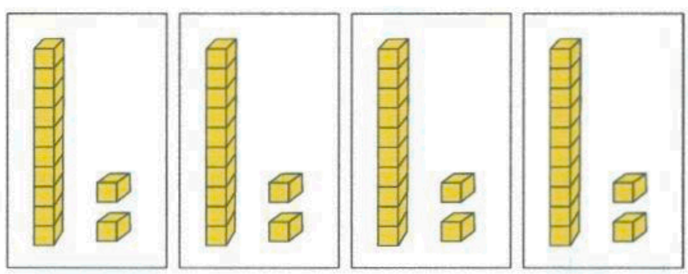


Figura 3.19: Representação do número 4×12

Em seguida reunimos todas as peças, e a representação destes números com o material dourado é

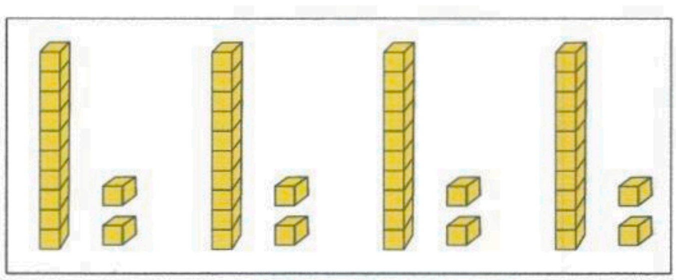


Figura 3.20: Reunião das peças

A representação do resultado da operação com o material dourado é

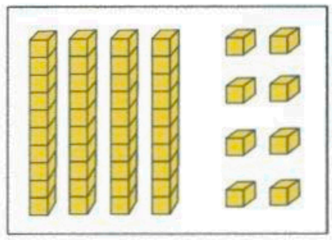


Figura 3.21: Representação do resultado da operação o número 48

b) Agora vejamos o Algoritmo:

$$\begin{array}{rcrcr} 12 & = & 1 \cdot 10 & + & 2 \cdot 1 \\ \underline{\times 4} & = & & & 4 \cdot 1 \\ \hline & = & (4 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 1 & + & (4 \cdot 2) \cdot 1 \cdot 1 \\ & = & 4 \cdot 10 & + & 8 \cdot 1 \\ & = & 48 & & \end{array}$$

Exemplo 3.8. *Efetue a operação* 3×152.

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

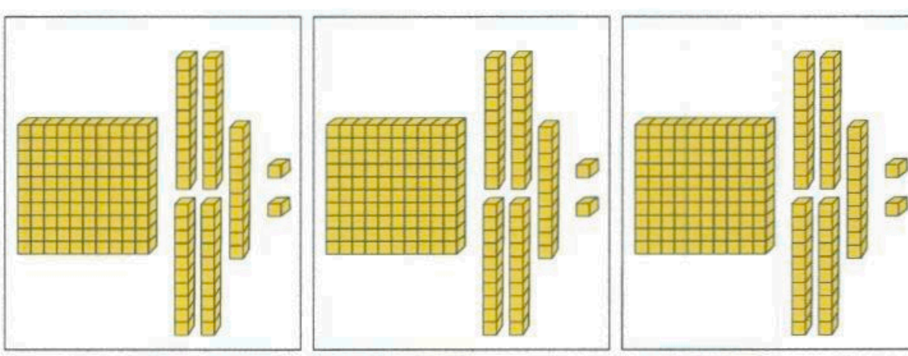


Figura 3.22: Representação do número 3×152

Agora reunimos todas as peças, cuja representação com o material dourado é

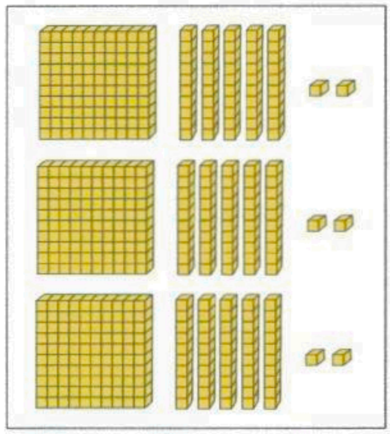


Figura 3.23: Reunião das peças

Note que ao reunir todas as peças, a ordem das dezenas ultrapassa 9 dezenas, desse forma é necessário transferir dez dezenas para a ordem das centenas.

A representação do resultado da operação com o material dourado é

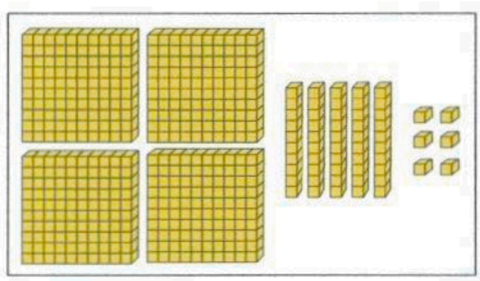


Figura 3.24: Representação do resultado da operação o número 456

b) Agora vejamos o Algoritmo:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
152 & = & 1\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 2\cdot 1 \\
\times 3 & = & & & & & 3\cdot 1 \\
\hline
 & = & (3\cdot 1)\cdot 10^2\cdot 1 & + & (3\cdot 5)\cdot 10\cdot 1 & + & (3\cdot 2)\cdot 1\cdot 1 \\
 & = & 3\cdot 10^2 & + & 15\cdot 10 & + & 6\cdot 1 \\
 & = & 3\cdot 10^2 & + & (10+5)\cdot 10 & + & 6\cdot 1 \\
 & = & 3\cdot 10^2 & + & 10\cdot 10+5\cdot 10 & + & 6\cdot 1 \\
 & = & 3\cdot 10^2 & + & 1\cdot 10^2+5\cdot 10 & + & 6\cdot 1 \\
 & = & 4\cdot 10^2 & + & 5\cdot 10 & + & 6\cdot 1 \\
 & = & 456 & & & &
\end{array}
$$

Divisão

Na divisão temos duas ideias básicas, a de repartir em partes iguais e a de medir.

O que esta por trás de cada uma destas ideias:

- Repartir: *Quantos para cada?*
- Medir: *Quantos cabem em?*

Exemplo 3.9. *Efetue a operação* $57 \div 3$.

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

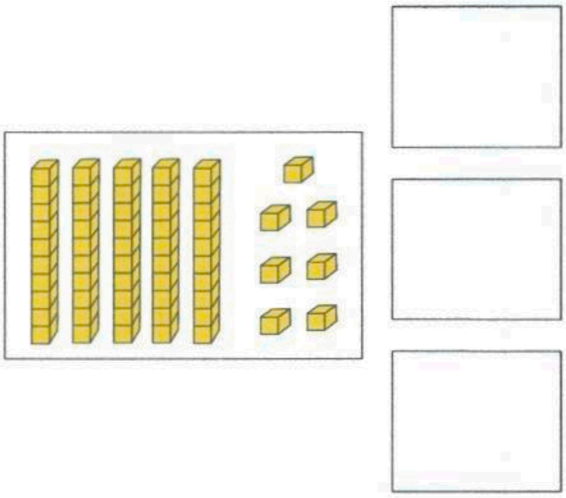


Figura 3.25: Representação do número $57 \div 3$

Em seguida começamos a efetuar a operação dividindo pela maior posição que neste caso são as dezenas. Isto é vamos dividir cinco dezenas por três.

E a representação deste operação com o material dourado é

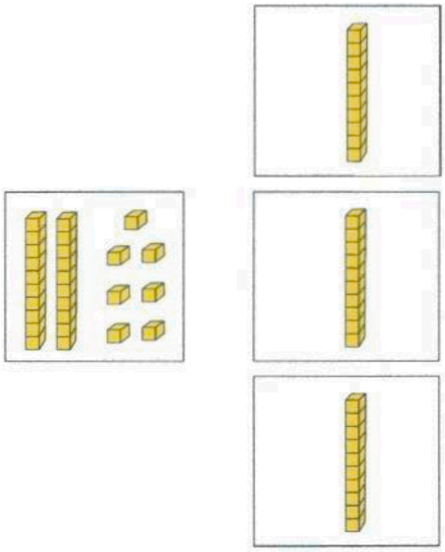


Figura 3.26: Operação de divisão de cinco dezenas por três unidades

Como não é possível dividir duas dezenas por três, devemos transformar estas dezenas em unidades, para em seguida podermos efetuar a divisão.

A representação da transformação das dezenas com o material dourado é

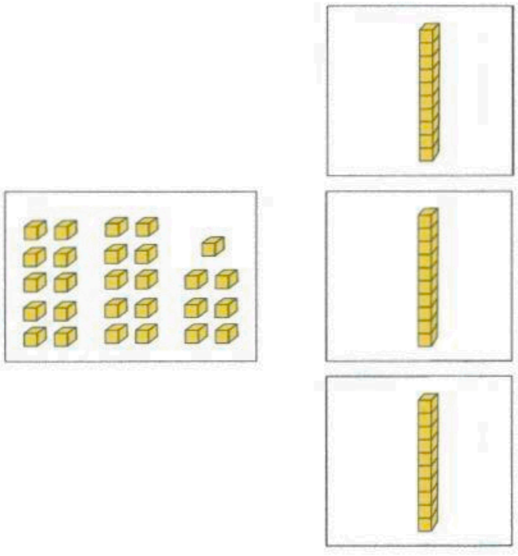


Figura 3.27: Transformação de duas dezenas em vinte unidades

Agora, podemos efetuamos a divisão das vinte e sete unidades por três unidades.

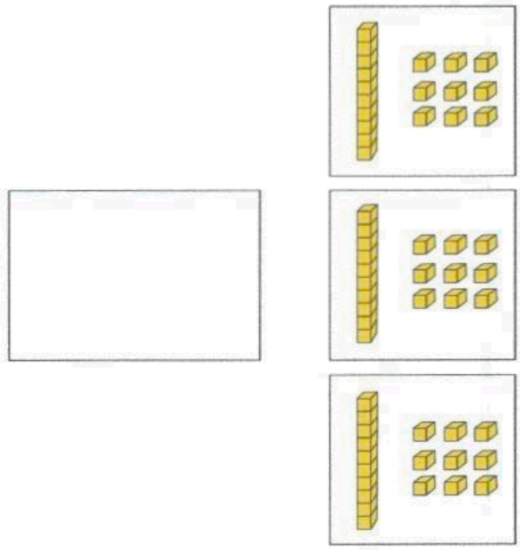


Figura 3.28: Resultado da operação de $57 \div 3$

E o resultado obtido é:

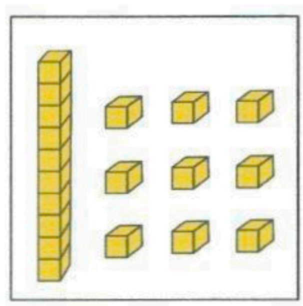


Figura 3.29: Representação do resultado da operação o 19

b) Agora vejamos o Algoritmo:

$$\begin{array}{r|l}
57 & \underline{\;3\;} \\
\underline{-30} & 10 \\
27 & \underline{+9} \\
\underline{-27} & 19 \\
0 &
\end{array}$$

Assim, $57 \div 3 = 19$.

Exemplo 3.10. *Efetue a Operação* $252 \div 2$

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação destes números com o material dourado é

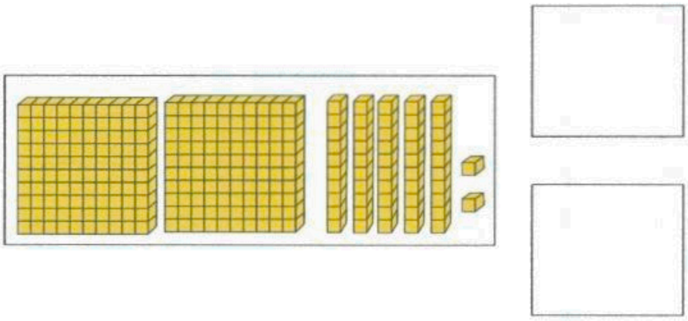


Figura 3.30: Representação do número 252

Em seguida começamos a efetuar a operação dividindo pela maior posição que neste caso é as centenas. Isto é, vamos dividir duas centenas por dois.

E a representação desta operação com o material dourado é

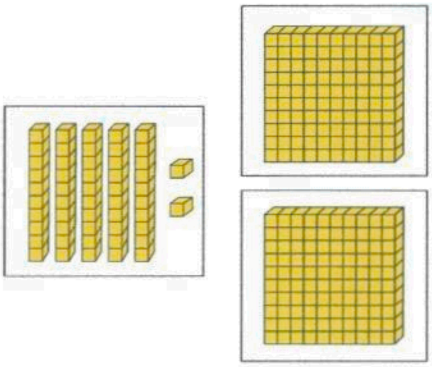


Figura 3.31: Operação de divisão de duas centenas por duas unidades

Agora, efetuamos a operação dividindo pela maior posição que resta, neste caso é as dezenas. Isto é vamos dividir cinco dezenas por dois.

E a representação desta operação com o material dourado é

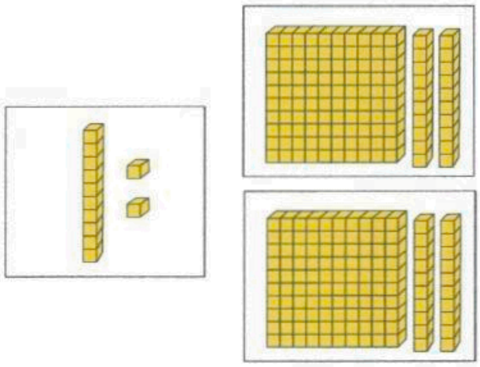


Figura 3.32: Operação de divisão de cinco dezenas por duas unidades

Dando continuidade a divisão, devemos dividir a dezena restante por duas unidades. Como não é possível realizar esta operação, devemos transformar uma dezena em dez unidades. A representação da transformação da dezena em unidades com o material dourado é

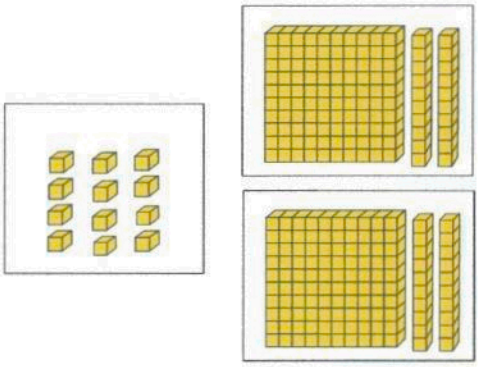


Figura 3.33: Transformação de uma dezena em dez unidades

Efetuando a divisão das doze unidades por duas unidades, temos

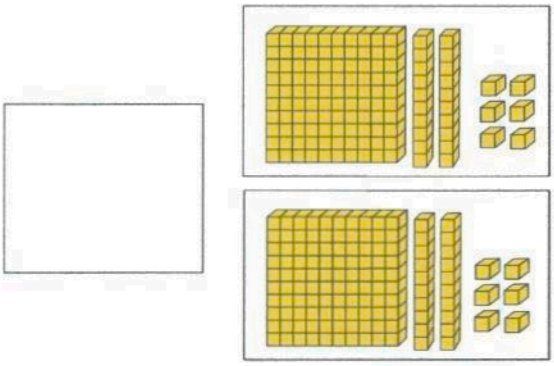


Figura 3.34: Resultado da operação de $252 \div 2$

Exemplo 3.11. *Efetue a operação* $155 \div 3$

a) Primeiro efetuamos a operação com o material dourado:

A representação deste número com o material dourado é

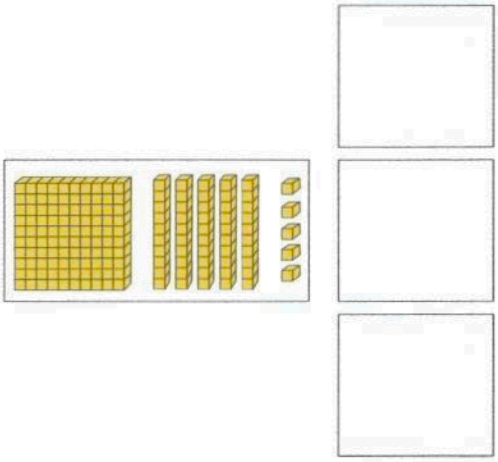


Figura 3.35: Representação do número 155

Em seguida começamos a efetuar a operação dividindo pela maior posição que neste caso é as centenas. Isto é, vamos dividir uma centenas por três.

Como não é possível dividir uma centena por três, devemos transformar esta centena em dezenas, para em seguida podermos efetuar a divisão.

A representação desta transformação com o material dourado é

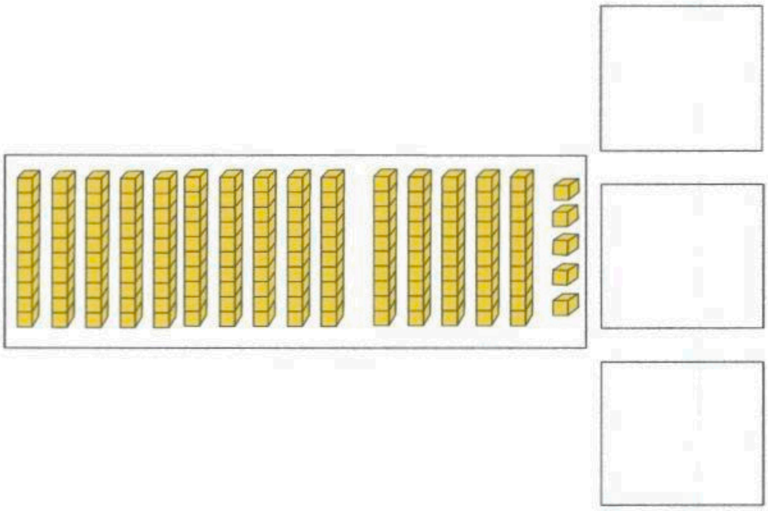


Figura 3.36: Transformação de uma centena em dezenas

Agora dividindo as dezenas com o material dourado, temos

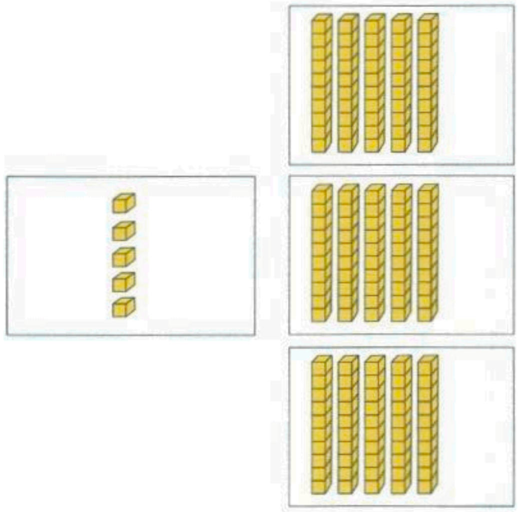


Figura 3.37: Divisão das dezenas por 3

Dando continuidade a divisão, devemos dividir as unidades por três.

E a representação desta operação com o material dourado é

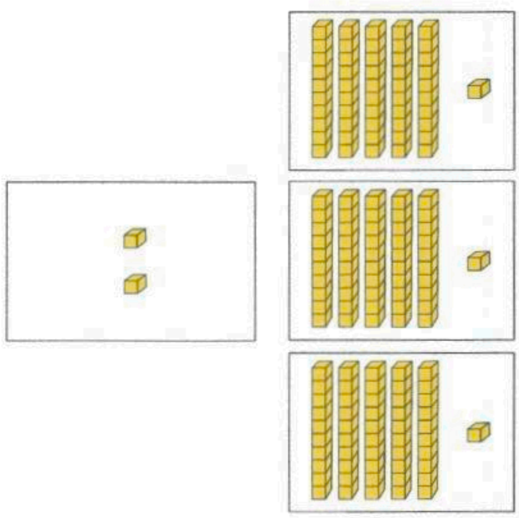


Figura 3.38: Divisão das unidades por 3

Observe que as duas unidades restantes não podem ser divididas por 3. Então, dizemos que dois é o resto da divisão de 155 por 3.

b) Agora vejamos o Algoritmo:

Queremos dividir 155 por 3, um número que tem centenas, então começamos preguntando se cabe alguma centena e qual a quantidade máxima de centenas que cabe. Como a quantidade de centenas é menor que três, então perguntamos quantas dezenas cabem e em seguida quantas unidades.

$$\begin{array}{r|l} 155 & \underline{\ 3\ } \\ \underline{-150} & 50 \\ 5 & \underline{+\ 1} \\ \underline{-3} & 51 \\ (2) & \end{array}$$

Assim, $155 \div 3 = 51$, *e fica como resto* 2.

Conclusão

Neste trabalho observarmos que as descobertas dos números estão relacionadas com os avanços intelectuais e comerciais obtidos pela sociedade. Se no princípio o número era essencialmente prático, visto que as sociedades eram rudimentares, com o desenvolvimento destas sociedades os números também evoluíram, passando de uma simples ferramenta que auxiliava aos problemas práticos para uma ciência que serviu como chave para analisar o mundo e a natureza em que vivemos.

Observamos que os sistemas de numeração que permitem a representação dos números, constituem um dos principais objeto de estudo da Matemática. É através deles que podemos justificar os procedimentos adotados para efetuar as quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

É, importante que se tenha uma compreensão profunda do funcionamento dos sistemas de numeração, em especial, do sistema de numeração posicional decimal, que está fundado sobre a base decimal e no chamado princípio de posição.

Nesse texto vimos que o material dourado, é um recurso muito bom para auxiliar no processo de ensino aprendizagem. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser trabalhadas com mais qualidade, sendo uma das formas mais fáceis do aluno compreender as transformações das classes de numeração decimal.

É importante ressaltar que ao utilizar o modelo proposto a ênfase deve estar centrada na ideia matemática e não no material dourado. Tal modelo apresenta-se como uma alternativa metodológica viável na abordagem do estudo da álgebra.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRÉ, T. C. *O Sistema de Numeração Decimal no Ensino Inicial de Matemática: Costruções do Ábaco e do Material Dourado.* Revista Ideação (2009). Disponível em: http://e-revista.unioeste.br/index.php/ideacao/issue/view/380/showToc. Acessado em: 04 de dezembro de 2013.

[2] BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[3] CONTADOR, P. R. M. *Matemática,uma breve história* - vol. I - 2ª ed. São Paulo: Livraria da Fisíca, 2006.

[4] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2007.

[5] DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética* - São Paulo: Atual, 1991.

[6] EVES, H. *Introdução à História da Matemática* - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[7] IFRAH, G. *Os Números: história de uma grande invenção* - 11ª ed. - São Paulo: Globo, 2005.

[8] MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática.* Editora: EDUSP.

[9] SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números.* Coleção Matemática Aplicada.

Apêndice

Axioma de Indução

Axioma .1. *(Axioma de Indução). Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que*

i) $0 \in S$.

ii) S é fechado com respeito á operação de "somar 1"a seus elementos, ou seja,

$$\forall n, n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$$

Então, $S = N$.

Se $A \subset \mathbb{N}$, e $a\mathbb{N}$, usaremos a seguinte a seguinte notação

$$a + A = \{a + x; x \in X\}.$$

É imediato verificar que

$$a + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m \geq a\}.$$

segue-se, do Axioma de Indução, o seguinte importante instrumento para provar teoremas:

Teorema .1. *(Princípio de Indução Matemática). Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n.Suponhamos que*

i) $p(1)$ é verdade, e que

ii) $\forall n \geq a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade, então, $p(n)$ é verdade $\forall n \geq a$.

Demonstração. Veja [9] □

Teorema .2. *(Princípio de Indução Matemática, 2ª Forma). Seja $p(n)$ uma sentença aberta tal que*

i) $p(a)$ *é verdade, e que*

ii) $\forall n$, $p(a)$ *e* $p(a+1)$ *e* $\cdots$ *e* $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ *é verdade,*

então, $p(n)$ *é verdade para todo* $n \geq a$.

Demonstração. Veja [9] □

Propriedade de Boa Ordem

Definição .1. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$.*

Dizemos que um número natural maior a é elemento de S se possui as seguintes propriedades:

i) $a \in S$.

ii) $\forall n \in S, a \leq n$

O Axioma de Indução tem a seguinte consequência notável.

Teorema .3. *(Propriedade de Boa Ordem) Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Veja [9] □