UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Antonio Evandro de Macedo Costa

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A GEOMETRIA DA VIDA

Cuité-PB

2014

Antonio Evandro de Macedo Costa

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A GEOMETRIA DA VIDA

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB
2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

C837s Costa, Antonio Evandro de Macedo.

Sequência de Fibonacci e a geometria da vida. / Antonio Evandro de Macedo Costa. – Cuité: CES, 2014.

63 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Co-orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Sequência de Fibonacci. 2. Número de ouro. 3. Aplicações. I. Título.

CDU 510.6

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Antonio Evandro de Macedo Costa

Sequência de Fibonacci e a Geometria da Vida

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

Banca Examinadora

Marcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

Marcelo Carvalho Ferreira
Prof. Marcelo Carvalho Ferreira

Aos meus pais e meus irmãos, pelo apoio incondicional!

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus que me dar forças todos os dias para realizar meus sonhos.

Agradeço a meus pais Edmilson e Sandra e meus irmãos Ailton, Vanessa e André, pois sem eles com certeza eu não teria realizado este sonho. Agradeço a tia Marta, tio Leôncio, vó Alzíra e tia Adélia pelo apoio durante todo o meu curso.

Agradeço a Zete e Padrinho Fernando, pelo apoio no início dessa caminhada, a Gilliard pelas caronas, Eudes pela força.

Agradeço a meus colegas de curso Jebson David, Clebson Huan e Estevão Luís, pois dividimos muitas alegrias e enfrentamos inúmeros obstáculos durante essa difícil trajetória que culminou na realização de nossos sonhos.

Agradeço também a todos os meus professores que agregaram na minha vida muitos conhecimentos e muitos valores, que com toda certeza eu nunca irei esquecer. Dentre eles minha primeira professora Aldilene, aos professores que sempre admirei e os tenho como principais exemplos: Genival, Luís Carlos e o Mestre Robson Rubenilson. E também a Escola Professor Lordão que me projetou para a vida Acadêmica.

Em particular agradeço as professoras da UFCG: Márcia Cristina e Maria Gisélia, pela orientação, apoio, parceria e incentivo, não so na elaboração desse trabalho mas durante todo o meu curso.

Agradeço a gentileza do professor Marcelo Carvalho Ferreira por aceitar o convite para participar da banca e por suas observações que muito contribuíram para o resultado final.

"Não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa vir a ser aplicado, mais cedo ou mais tarde, aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo a respeito da Sequência de Fibonacci, a qual surgiu em um problema apresentado por Leonardo Fibonacci. Provaremos várias propriedades, dentre elas a forte relação existente entre essa sequência e o Número de Ouro (Φ). Tanto a Sequência de Fibonacci quanto o Número de Ouro aparecem em inúmeros lugares inesperados e surpreendentes. Deste modo abordaremos, desde aplicações dentro da própria Matemática até aplicações na fauna, na flora e em nosso próprio corpo humano, evidenciando relações aparentemente inexistentes o que mostra o quanto a Matemática esta ligada ao meio ao qual estamos inseridos.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Número de ouro. Aplicações.

Abstract

In this work we present a study about the Fibonacci sequence, which appeared in an issue presented by Leonardo Fibonacci. We prove several properties, among them the strong relationship existing between this sequence and the Golden Mean (Φ). Both the Fibonacci sequence as the number of gold appear in many unexpected and surprising places. Thus discuss, since applications within mathematics itself to applications in fauna, flora and our own human body, showing apparently nonexistent relationships which shows how mathematics is connected to the environment to which we operate.

Keywords: Fibonacci Sequence. Golden Ratio. Applications.

Sumário

Introdução

O objetivo desse trabalho é fazer um estudo sobre a Sequência de Fibonacci, abordando suas principais propriedades, bem como sua relação como o Número de Ouro(Razão Áurea). Faremos uma abordagem dos aspectos históricos e por fim evidenciaremos algumas das inúmeras aplicações da Razão Áurea e consequentemente da Sequência de Fibonacci.

A Matemática esta presente no nosso dia a dia através de uma sequência que relaciona-se com a razão áurea, razão essa que é encontrada em contextos inesperados como por exemplo: proporções das partes no corpo humano, formatos de conchas de moluscos, árvore genealógica do zangão, crescimento de árvores, dentre outros. Neste trabalho, procuramos despertar a curiosidade para algumas ligações da Matemática com a natureza, um tema que pode ainda ser muito explorado.

No capítulo 1 escrevemos sobre Fibonacci. Sua biografia, a origem do problema que gerou a famosa sequência que leva seu nome.

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados matemáticos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 3 definiremos a sequência de Fibonacci e as principais propriedades dos números de Fibonacci, junto com suas respectivas demonstrações. Abordaremos a razão áurea e sua relação com a sequência de Fibonacci. Descrevemos o retângulo de ouro e são apresentadas algumas considerações sobre a espiral logarítmica.

O capítulo 4 tratará das aplicações e curiosidades dessa sequência, como por exemplo, o estudo da árvore genealógica do zangão, o crescimento dos galhos das árvores, as espirais das conchas dos moluscos assim como as de algumas galáxias, razão entre medidas do corpo humano, além das aplicações na arte e arquitetura.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

1.1 História de Leonardo Fibonacci

Fibonacci é considerado o matemático mais original e criativo da Idade Média, foi um dos mais importantes matemáticos daquela época, e prestou valiosas contribuições para os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria.

O seu nome completo era Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa (Itália) por volta de 1175. Ficou conhecido como Fibonacci, devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de fillius Bonacci, que queria provavelmente dizer filho de Bonacci (o nome de seu pai era, Guglielmo dei Bonnacci). Ocasionalmente, ele também assinava como Leonardo Bigollo (na Toscana, Bigollo significava viajante).

Figura 1.1: Leonardo Fibonacci.

No início do século XII, Pisa era um dos grandes centros comerciais italianos, tais como Gênova e Veneza, e tinha vários entrepostos comerciais espalhados pelos portos do Mediterrâneo.

Desde muito jovem Leonardo visitou o Oriente e o Norte de África, onde o sistema de numeração hindu era já largamente usado. Ao longo de suas viagens conheceu a obra de al-Khwarismi e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas que compilou no seu primeiro livro "Liber Abbaci"(o livro dos ábacos), que teve uma enorme influência para a introdução na Europa do sistema de numeração hindu-Árabe. Fibonacci se familiarizou com o sistema decimal hindu-arábico, que tinha valor posicional e usava o símbolo zero. Nesta época, na Itália, ainda era usada a numeração romana nas operações de cálculo.

Em 1200 Leonardo regressa a Pisa e passa os 25 anos seguintes escrevendo trabalhos onde incorpora os conhecimentos que tinha adquirido com os árabes. Para ensiná-lo aos europeus, Leonardo escreveu em 1202 um livro que é um marco na história da Matemática, o **Liber Abbaci**, cobrindo Aritmética e a Álgebra elementares e alguns tópicos da Geometria. As palavras iniciais do Liber Abbaci são históricas:

" Estes são os nove símbolos dos hindus 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, com estes nove símbolos e com o sinal 0, que os árabes chamam Zéfiro, qualquer número pode ser escrito."

Antes de Fibonacci outros matemáticos europeus já haviam tido conhecimento do sistema indo-arábico mas o papel do Liber Abbaci foi crucial para a aceitação universal que ele veio a ter mais tarde. Em 1220 escreveu Pratica Geometriae e em 1225, Líber Quadratorum e Flos.

As Obras de Fibonacci:

Fibonacci escreveu cinco obras: quatro livros e uma que foi preservada como carta:

- Liber Abbaci (1202): Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci apresentou pela primeira vez do problema dos coelhos.
- Pratica Geometriae (1220): Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.
- Flos (1225): Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do

Imperador Frederico II.

- Líber Quadratorum (1225): É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

Fibonacci difundiu em seus livros os saberes matemáticos de origem indiana e árabe e estudou as operações elementares, assim como os números naturais, a decomposição de números em fatores primos, as frações e as equações entre outros.

O Liber Abbaci

O livro é um clássico, seu título Liber Abbaci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo), não trata de um livro sobre o ábaco, mas de um tratado exaustivo sobre problemas e métodos algébricos em que o emprego de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

Fibonacci escreveu um manual completo explicando como utilizar aqueles numerais nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, indicando como resolver problemas e abordando ainda diversos temas de álgebra e de geometria.

O livro tem uma forte influência árabe, contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outros tipos de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas.

O problema da reprodução dos coelhos

No Livro Liber Abbaci, é apresentado no capítulo 12, o problema mais famoso, entre todos tratados por Fibonacci:

"Um homem coloca um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desse coelho é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês de vida."

Esse problema, aparentemente de solução simples, está relacionado a uma das mais importantes descobertas da matemática.

Iniciamos com um par de coelhos filhotes, no segundo mês esse par ainda permanece e se torna fértil.

No terceiro mês, esse primeiro dá a luz a um outro par, ficando dois pares.

No quarto mês, o par adulto dá à luz a outro par jovem, enquanto o par de coelhos filhotes se torna fértil, portanto ficamos com três pares.

No quinto mês, cada casal fértil dá à luz a um par jovem e o terceiro par se torna adulto e fértil.

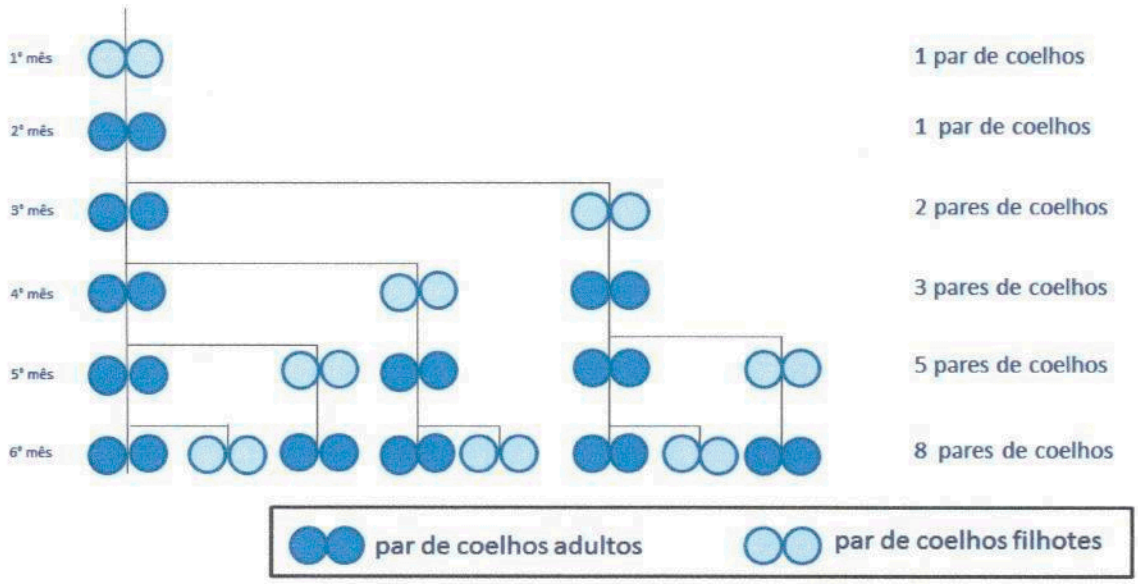

Figura 1.2: Simulação da reprodução de coelhos.

A solução do problema nos dá uma sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Podemos examinar o número de pares de coelhos em um determinado mês, e podemos observar que esse número é formado pela soma dos pares de coelhos dos dois meses anteriores.

É irônico que Fibonacci seja hoje famoso devido a uma sequência numérica que resultou de um obscuro problema existente no seu livro, o Liber Abaci. No entanto, no século XIX, quando o matemático francês Edouard Lucas editou um trabalho em quatro volumes sobre matemática recreativa, ligou o nome de Fibonacci à sequência numérica que era a solução do problema do Liber Abaci.

Por volta da mesma época (século XIX) em que Edouard Lucas escrevera seu livro e falara da referida sequência de números, alguns matemáticos já se mostravam intrigados com ela, com suas propriedades e com as áreas onde surge, como por exemplo, nos seguintes campos:

- Triângulo de Pascal, fórmula binomial e cálculo de probabilidade.
- Identidades matemáticas.
- Curiosos truques matemáticos.
- Natureza e plantas.
- Razão de ouro, retângulo de ouro, triângulo de ouro, pentagrama e espiral logarítmica.

Sequências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A Seqüência de Fibonacci foi à primeira dessas seqüências recursivas conhecida na Europa.

Podemos representar essa seqüência por:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1, \\ f_{n+1} = f_n &+ f_{n-1}, \forall\, n \geq 2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

e essa notação foi introduzida em 1634 pelo Matemático Albert Girard.

Mas é claro que a sequência de Fibonacci não teria despertado tanta atenção se não fosse dotada de propriedades tão interessantes e não se mostrasse tão rica em aplicações.

1.2 O número de ouro

O número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número famoso desde os tempos de Euclides de Alexandria, patriarca da geometria que viveu por volta do ano 300 antes de Cristo. Este número, denotado por Φ, foi definido por Euclides como resultado de uma operação geométrica muito simples.

Tome um segmento de reta AB

e encontre um ponto intermediário, C, tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Essa razão é o número Φ que vale:

$$\Phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1,6180339887\ldots.$$

Definido assim, o número Φ costuma ser chamado de "proporção áurea".

Cercado de muitas lendas e controvérsias, o número de ouro é o número irracional mais misterioso e enigmático. Símbolo da proporcionalidade, ele aparece na natureza, nas grandes construções realizadas pelos homens, na música e na arte.

O número de ouro é representado pela letra Φ, em homenagem a Fídias (490-431 a.C.), famoso escultor grego, por ter usado a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos.

Os pitagóricos utilizavam a razão áurea, embora não conhecessem o número de ouro Φ, na construção e idealização de sua estrela pitagórica. De fato, esse número é a razão entre os segmentos da estrela, por isso ela tem uma aparência regular e simétrica.

Outro matemático que contribuiu para o estudo e divulgação do número de ouro foi Frei Luca Pacioli. Ele publicou, em 1509, um livro com o título de "De Divina Proportione". Este trabalho dizia respeito a polígonos regulares e sólidos e a razão de ouro. Possivelmente o primeiro trabalho que descreve as divinas leis, cujas interpretações e demonstrações foram possivelmente deduzidas pelos gregos, antes de Cristo.

Uma contribuição que não pode ser deixada de referir foi à contribuição de Leonardo Da Vinci (1452-1519). A excelência dos seus desenhos revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garantia de uma perfeição, beleza e harmonia únicas.

Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência.

A contribuição de Fibonacci para o número de ouro está relacionada com a solução do seu problema dos coelhos publicado no seu livro Liber Abbaci, a seqüência de números de Fibonacci.

Johannes Kepler, o célebre astrônomo das três leis planetárias, notou em 1611, que a divisão entre um número de Fibonacci e seu precedente leva ao número Φ quando se avança para valores cada vez maiores na seqüência.

Em termos matemáticos, isto quer dizer que

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}$$

tende para Φ quando n tende para infinito. De modo inverso, os números de Fibonacci podem ser gerados a partir de potências de Φ segundo a expressão:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \frac{1}{\Phi^n}\Big).$$

O interessante nessa expressão é que os números de Fibonacci, que são racionais, podem ser gerados de potências de Φ, que é irracional.

Propriedades curiosas do número Φ

O número Φ é irracional, como o número π. O número Φ é mais sofisticado e imprevisível. Ele pode surgir de expressões matemáticas bastante curiosas.

Por exemplo, considere a expressão abaixo:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}.$$

x é justamente nosso Φ. Tome o quadrado de ambos os lados dessa expressão:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Ora, como o número de raízes é infinito, o segundo termo do lado direito da equação acima é justamente x. Logo, temos

$$x^2 = 1 + x.$$

Como toda equação de segundo grau, esta tem duas soluções que são:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A contribuição de Fibonacci para o número de ouro está relacionada com a solução do seu problema dos coelhos publicado no seu livro Liber Abbaci, a seqüência de números de Fibonacci.

Johannes Kepler, o célebre astrônomo das três leis planetárias, notou em 1611, que a divisão entre um número de Fibonacci e seu precedente leva ao número Φ quando se avança para valores cada vez maiores na seqüência.

Em termos matemáticos, isto quer dizer que

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}$$

tende para Φ quando n tende para infinito. De modo inverso, os números de Fibonacci podem ser gerados a partir de potências de Φ segundo a expressão:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \frac{1}{\Phi^n}\Big).$$

O interessante nessa expressão é que os números de Fibonacci, que são racionais, podem ser gerados de potências de Φ, que é irracional.

Propriedades curiosas do número Φ

O número Φ é irracional, como o número π. O número Φ é mais sofisticado e imprevisível. Ele pode surgir de expressões matemáticas bastante curiosas.

Por exemplo, considere a expressão abaixo:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}.$$

x é justamente nosso Φ. Tome o quadrado de ambos os lados dessa expressão:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Ora, como o número de raízes é infinito, o segundo termo do lado direito da equação acima é justamente x. Logo, temos

$$x^2 = 1 + x.$$

Como toda equação de segundo grau, esta tem duas soluções que são:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

É claro que a solução positiva, x_1, é justamente o número Φ, a "proporção áurea".

Outra expressão curiosa que leva a Φ é essa:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

O número Φ talvez seja o mais irracional dos números irracionais. Pois essa fração converge tão vagarosamente para Φ que parece nos mostrar a relutância de Φ em se associar a uma fração, mesmo que a fração não seja de inteiros.

O quadrado de Φ, vale $2,6180339887\ldots$. Como vemos, o número $\Phi\Phi$ é o próprio número Φ acrescido de 1. Além disso, o inverso de Φ, isto é, $1/\Phi$ é igual a $0,6180339887\ldots$, que é $\Phi - 1$.

1.2.1 Retângulo de ouro

Denomina-se retângulo de ouro, um retângulo que, quando é dividido em duas partes e em que uma dessas partes seja um quadrado, então o que resta terá que ser um retângulo com as mesmas proporções do retângulo inicial.

Consideremos então o seguinte retângulo de ouro:

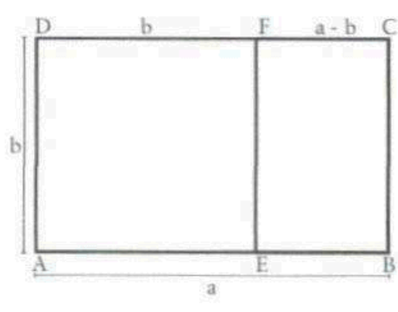

Figura 1.3: Retângulo Áureo.

Se retirarmos a este retângulo o quadrado de lado b, obtém-se o novo retângulo de ouro de dimensões b e $a - b$. E assim se segue sucessivamente quantas vezes forem necessárias. Conforme figura abaixo:

Como podemos observar pelo desenho, os números que vão aparecendo em cada novo quadrado, são números de Fibonacci.

Os arquitetos e artistas da Grécia Antiga, no século V a.C., eram mestres na utilização da razão de ouro na concepção de seus monumentos e esculturas. Eles tinham consciência do seu efeito harmonioso e sentiam que a razão de ouro e o retângulo de ouro aumentavam a atração estética dos monumentos e das esculturas.

O retângulo de ouro é um objeto matemático muito interessante e de grande valor estético que existe para além do reino da matemática.

Presente na arte, na arquitetura, na natureza e hoje em dia muito usado na publicidade e no marketing. A sua popularidade não é acidental. Muitos testes psicológicos demonstraram que o retângulo ouro é um dos retângulos mais agradáveis à vista humana. Muitas embalagens têm a configuração do retângulo de ouro, possivelmente no intuito de apelar ao sentido estético do público. Na verdade, até mesmo objetos comuns, tais como cartões de crédito e formato de livros tem um tamanho próximo ao do retângulo de ouro.

Na verdade, se procurarmos com carinho, onde houver harmonia com certeza lá encontraremos as relações áureas, pois o número de ouro é indicado como a máxima expressão da harmonia e equilíbrio.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns resultados que serão úteis nas provas de propriedades da sequência de Fibonacci. As referências para os estudos realizados são [3], [4] e [7].

Definição 2.1. *Uma* **sequência** *de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *que associa a cada número natural* n *um número real* x_n, *chamado o n-ézimo termo da sequência.*

Definição 2.2. *Toda sequência* (x_n) *de números reais* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *onde um termo depende de seus antecessores será chamada de sequência recorrente.*

Definição 2.3. *Uma recorrência é de* **primeira ordem** *quando um termo* x_{n+1} *depende do termo* x_n, *ou seja, uma recorrência de primeira ordem ocorre quando um termo consequente depende do seu termo antecedente. E será linear, quando a dependência for do primeiro grau. Podemos afirmar que uma recorrência linear de primeira ordem pode ser expressa por*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{c}.$$

Observação 2.1. *Quando* $b = 0$ *dizemos que a recorrência é homogênea.*

Definição 2.4. *Uma recorrência que expressa* x_{n+2} *em função de seus antecessores* x_{n+1} *e* x_n *será chamada de* **recorrência de segunda ordem**. *Será tratado o caso de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja:*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \tag{2.1}$$

Para a resolução deste tipo de equação usa-se a equação característica onde a equação (2.1) será expressa por $r^2 + pr + q = 0$ *que possui solução única.*

Exemplo 2.1. *A sequência definida recursivamente por*

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1, \\ f_{n+1} = f_n &+ f_{n-1}, \ \forall\ n \geq 2. \end{aligned}$$

é um caso de recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, que são da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

onde temos $x_1 = x_2 = 1$ *e* $p = q = -1$. *É necessário que* $q \neq 0$, *pois se* $q = 0$ *temos uma recorrência que é de primeira ordem.*

Teorema 2.1. *Seja* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ *uma fórmula de recorrência linear de segunda ordem, homogênea de coeficientes constantes e cuja equação característica* $r^2 + pr + q = 0$ *possui 2 raízes* r_1 *e* r_2. *Então* $x_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ *é uma solução dessa recorrência com coeficientes constantes* α_1 *e* α_2.

Demonstração. Veja [4]. □

A sequência

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1, \\ f_{n+1} = f_n &+ f_{n-1}, \ \forall\ n \geq 2. \end{aligned}$$

tem equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ cuja raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Usando o Teorema 2.1 temos

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Teorema 2.2 (Princípio de Indução Matemática). *Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $p(n)$. Suponhamos ainda que*

(i) $p(a)$ é verdadeira;

(ii) Para algum $n \geq a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Este princípio admite uma variante que se revela muito útil e que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.3 (Segundo Princípio de Indução Matemática). *Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $p(n)$. Suponhamos ainda que*

(i) $p(a)$ é verdadeira;

(ii) Para todo $r \geq a$, se $p(k)$ é verdadeira sempre que $a \leq k < r$ com $k \in \mathbb{N}$, então $p(r)$ também é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Definição 2.5 (Divisibilidade). *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, dizemos que b divide a, e escrevemos $b \mid a$, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$.*

Proposição 2.1. *Sejam a, b, c inteiros não nulos e x, y inteiros quaisquer.*

a) Se $b \mid a$ e $a \mid b$, então $a = \pm b$.

b) Se $c \mid b$ e $b \mid a$, então $c \mid a$.

c) Se $c \mid b$ e $c \mid a$, então $c \mid (ax + by)$.

d) Se $c \mid b$, então $c \mid ab$.

e) Se $b \mid a$, $bc \mid ac$.

Demonstração.

a) Se a' e b' são inteiros tais que $a = ba'$ e $b = ab'$, então $a = a(a'b')$, e daí $a'b' = 1$. Logo, $a' = \pm 1$, donde segue que $a = \pm b$.

b) Se $a = ba'$ e $b = cb'$ com $a', b' \in \mathbb{Z}$, então $a = c(a'b')$, com $a', b' \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \mid a$.

c) Sejam $b = cb'$ e $a = ca'$ com $a', b' \in \mathbb{Z}$. Então $ax + by = ca'x + cb'y = c(a'x + b'y)$, com $a'x + b'y \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \mid (ax + by)$.

d) Se $b = cb'$, com $b' \in \mathbb{Z}$, então $ab = c(ab')$, com $ab' \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \mid ab$.

e) Se $a = ba'$, com $a' \in \mathbb{Z}$, então $ac = (bc)a'$, e daí $b \mid a$, $bc \mid ac$.

□

Observação 2.2. *O item (c) da proposição acima pode ser facilmente generalizado para provar que, se* $c \mid a_1, \cdots, a_n$, *então* $c \mid (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$, *para todos* $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.4 (Teorema de Eudoxius). *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}$ *inteiros com* $b \neq 0$ *então* a *é um múltiplo de* b *ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de* b, *isto é, a cada par de inteiros* a *e* $b \neq 0$ *existe um inteiro* q *tal que, com* $b \neq 0$, *existe um inteiro* q *tal que,*

$$qb \leq a < (q+1)b, \text{ para } b > 0$$

e

$$qb \leq a < (q-1)b, \text{ para } b < 0.$$

Teorema 2.5 (Divisão Euclidiana). *Dados dois inteiros* a *e* b *com* $b > 0$, *existe um único par de inteiros* q *e* r, *chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de* a *por* b, *tais que tais que*

$$a = qb + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b \qquad (r = 0 \Leftrightarrow b \mid a).$$

Demonstração. Dados os inteiros a e b, temos, pelo o Teorema de Eudoxius, que existe um inteiro q, tal que:

$$qb \leq a < (q+1)b \Rightarrow 0 \leq a - bq < b.$$

Desta forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos garantida, a existência de q e r.

Quanto a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1 verificando:

$$a = q_1 + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Disto segue que

$$0 = a - a = bq + r - (q_1 b + r_1) \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r \Rightarrow b \mid (r_1 - r)$$

Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ mais o fato $b \mid (r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. E da última igualdade acima, obtemos

$$r = r_1 \Rightarrow a - bq_1 = a - bq \Rightarrow bq_1 = bq \Rightarrow q_1 = q.$$

□

Definição 2.6 (Máximo Divisor Comum). *Dados inteiros não nulos a e b , o* **máximo divisor comum** *de a e b , denotado $mdc(a,b)$, é o maior dentre os divisores comuns de $mdc(a,b)$. Os inteiros $mdc(a,b)$ são* **primos entre si**, *ou* **relativamente primos** *quando o $mdc(a,b) = 1$.*

Teorema 2.6. *Se $a, b, q, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $a = qb + r$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.*

Demonstração. De $a = qb+r$, temos que se $c \mid b$ e $c \mid r$ então pela Proposição 2.1, $c \mid a$. E mais, de $r = a - qb$, se $c \mid a$ e $c \mid b$ então novamente pela Proposição 2.1 $c \mid r$. Logo o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r, que nos garante o resultado $mdc(a,b) = mdc(b,r)$. □

Teorema 2.7 (O Algoritmo de Euclides). *Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não-negativos com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter*

$$r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2}, \; 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $mdc(a,b) = r_n$, onde r_n é o último resto não-nulo.

Demonstração. Aplicando o Teorema 2.5 para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$ obtendo $r_0 = q_1 r_1 + r_2$, em seguida dividimos r_1 por r_2 obtendo $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ e assim, sucessivamente, até a obtenção do resto $r_{n+1} = 0$. Como, a cada passo o resto é sempre menor do que o anterior, e estamos lidando com número inteiro positivos, é claro que após um número finito de aplicações do Teorema 2.5, teremos resto nulo.

Temos, pois, a seguinte sequência de equações:

$$\begin{aligned}
r_0 &= q_1r_1 + r_2; \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_2r_2 + r_3; \qquad 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_3r_3 + r_4; \qquad 0 < r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1}r_{n-1} + r_n; \qquad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_nr_n + 0. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

A última destas equações nos diz, pelo o Teorema 2.6, que o máximo divisor comum de r_n e r_{n-1} é r_n. A penúltima, que este número é igual a (r_{n-1}, r_{n-2}) e, prosseguindo desta maneira termos, por repetidas aplicações do Teorema 2.6, a sequência:

$$r_n = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \cdots = (r_1, r_2) = (r_0, r_1) = (a, b).$$

Portanto o máximo divisor comum de a e b é o último resto não-nulo da sequência de divisões descritas. □

Teorema 2.8 (Teorema de Bézout). *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ inteiros não nulos. Se*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_ix_i;\ x_i \in \mathbb{Z},\ \forall\ 1 \leq i \leq n \right\},$$

então $S = d\mathbb{Z}$, onde $d = mdc(a_1, \ldots, a_n)$. Em particular, existem $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$mdc(a_1, \ldots, a_n) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n.$$

Demonstração. É imediato que todo múltiplo de um elemento de S pertence a S. Por outro lado, como d divide $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ para todos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, temos que $S \subset d\mathbb{Z}$.

Para estabelecer a inclusão contrária, note primeiro que S contém inteiros positivos; de fato, escolhendo $x_1 = a_1$ e $x_2 = \cdots = x_n = 0$, por exemplo, concluímos que

$$a_1^2 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in S.$$

Como S contém inteiro positivos, existe um menor inteiro positivo d' em S. Se mostrarmos que $d = d'$, o *mdc* de $a_1, \ldots, a_n$, seguirá que $d \in S$, e nossa observação inicial garantirá que $S = d\mathbb{Z} \subset S$.

Afirmamos inicialmente que $d' \mid a_1, \ldots, a_n$. De fato, como $d' \in S$, existem $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ tais que $d' = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Agora, seja $a_1 = d'q + r$, com $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < d'$. Então

$$\begin{aligned} r &= a_1 - d'q = a_1 - (a_1u_1 + \cdots + a_nu_n)q \\ &= a_1(1 - u_1q) + a_2(-u_2q) + \cdots + a_n(-u_nq), \end{aligned}$$

isto é, $r \in S$. Se $0 < r < d'$, teríamos uma contradição com o fato de ser d' o menor inteiro positivo pertencente a S. Logo, $r = 0$ e $d' \mid a_1$. Analogamente, $d' \mid a_2, \cdots, a_n$.

Para terminar, como d' é um divisor comum de $a_1, \ldots, a_n$, para mostrar que $d' = d$ basta mostrar que $d' \geq d$. Mas, se $a_1 = dq_1, \ldots, a_n = dq_n$, com $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} d' &= a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \\ &= dq_1u_1 + \cdots + dq_nu_n \\ &= d(q_1u_1 + \cdots + q_nu_n), \end{aligned}$$

ou seja, $0 < d \mid d'$. Logo, $d \leq d'$.

□

Corolário 2.1. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ inteiros não nulos e $d = mdc(a_1, \ldots, a_n)$. Se $d' \in \mathbb{N}$, então $d' \mid a_1, \ldots, a_n$ se e só se $d' \mid d$.*

Demonstração. Sejam inteiros $u_1, \ldots, u_n$ tais que $d = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Desde que $d' \mid a_1, \ldots, a_n$ a Observação 2.2 garante que $d' \mid d$. A recíproca é imediata. □

Lema 2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$; então*

$$mdc(a, b) = mdc(a + bc, b).$$

Demonstração. Sejam $d = mdc(a + bc, b)$ e $d' = mdc(a, b)$. Como $d' \mid a, b$ temos que $d' \mid a, a + bc$. Portanto, pelo Corolário 2.1, temos que $d' \mid d$. Reciprocamente com $d \mid (a + bc)$ e $d \mid b$, temos que $d \mid [(a + bc) - bc)]$, isto é, $d \mid a$ e $d \mid b$. Novamente, pelo corolário 2.1, pela temos que $d \mid d'$, e assim $d = d'$. □

Proposição 2.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ não nulos, então $mdc(a, bc)$ é divisível por $mdc(a, b)$.*

Demonstração. De fato, b é divisível por $mdc(a, b)$ logo bc é divisível por $mdc(a, b)$; a é divisível por $mdc(a, b)$, logo $mdc(a, bc)$ é divisível por $mdc(a, b)$. □

Proposição 2.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $mdc(a, c) = 1$, então*

$$mdc(a, bc) = mdc(a, b).$$

Demonstração. Sejam $d = mdc(a, b)$ e $d' = mdc(a, bc)$. De $d \mid b$ segue que $d \mid bc$. Assim, $d \mid a$ e $d \mid bc$, donde $d \mid mdc(a, b) = d'$. Para terminar, mostremos que $d' \mid d$: como $mdc(a, c) = 1$, segue do teorema de Bézout a existência de $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $au + cv = 1$, donde $a(bu) + (bc)v = b$; mas como $d' \mid a$ e $d' \mid bc$, temos que $d' \mid b$. Então $d' \mid a$ e $d' \mid b$, donde $d' \mid mdc(a, b) = d$. □

Definição 2.7. *Dados inteiros n e k, com $0 \leq k \leq n$, definimos o* **número binomial** *por:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por outro lado, para todos os inteiros n e k tais que $0 \leq k \leq n$, tem-se

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Observe que

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1} \quad e \quad \binom{n}{2}$$

(esse último em virtude do fato de que o produto de dois inteiros consecutivos ser par) são todos números naturais.

Por outro lado, a igualdade de números binomiais acima garante que

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} \quad e \quad \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$$

também são naturais.

Proposição 2.4 (Relação de Stiffel). *Se n e k são inteiros tais que $0 \leq k < n$, então*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração. Basta aplicar a definição de número binomial ao segundo membro da igualdade acima:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\,\frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Propriedades dos Números de Fibonacci

Neste capítulo são mostradas as principais propriedades da sequência de Fibonacci e a Fórmula de Binet que prova a relação da sequência de Fibonacci com o Número de ouro. As referências para os estudos realizados são [3], [7] e [8].

Definição 3.1. *Chama-se* **sequência de Fibonacci** *a sequência definida recursivamente por*

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1, \\ f_{n+1} = f_n &+ f_{n-1}, \forall n \geq 2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Propriedades Elementares

Propriedade 3.1 (Soma dos n primeiros Números de Fibonacci). *Para todo* $n \geq 1$,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Demonstraremos a relação por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $f_1 = 1$ e $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = f_{k+2} - 1.$$

Devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, somando f_{k+1} em ambos os membros da hipótese de indução e levando em consideração que

$$f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3},$$

obtemos

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1,$$

estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Propriedade 3.2 (Soma dos Números de Fibonacci de ordem ímpar). *Para todo* $n \geq 1$,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Demonstração. Demonstraremos a relação por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $f_1 = f_2 = 1$ e $f_{2\cdot 1-1} = f_{2\cdot 1} = 1$.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} = f_{2k}.$$

Devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, basta somar o próximo termo ímpar, isto é, f_{2k+1} em ambos os membros da hipótese de indução e iremos obter

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2},$$

estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Propriedade 3.3 (Soma dos Números de Fibonacci de ordem par). *Para todo* $n \geq 1$,

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n-1} - 1.$$

Demonstração. Como a soma de todos os números de Fibonacci até a ordem $2n$ é:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+2} - 1.$$

E a soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar até $2n - 1$ é:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Então, subtraindo membro a membro as duas igualdades, restará somente a soma dos números de Fibonacci de ordem par no primeiro membro e no segundo membro:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n} - 1.$$

Sabemos que:

$$f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n} \Rightarrow f_{2n+1} = f_{2n+2} - f_{2n}$$

Temos então:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n-1} - 1.$$

□

Propriedade 3.4 (Soma dos quadrados dos n primeiros Números de Fibonacci). *Para todo $n \geq 1$,*

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Demonstração. Demonstraremos a relação por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $f_1 = f_2 = 1$ e $f_1^2 = f_1 f_2 = 1 \cdot 1 = 1$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 = f_k f_{k+1}.$$

Devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, somando f_{k+1}^2 em ambos os membros da hipótese de indução e levando em consideração que $f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$, obtemos

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}.$$

estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Propriedade 3.5 (Soma dos Números de Fibonacci com sinais alternados). *Para todo $n \geq 2$,*

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1.$$

Demonstração. Demonstraremos a relação por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois

$$f_1 - f_2 = 1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad (-1)^{2+1} f_{2-1} + 1 = -1 \cdot 1 + 1 = 0.$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{k+1} f_k = (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1,$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, que

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{k+1} f_k + (-1)^{k+2} f_{k+1} = (-1)^{k+2} f_k + 1.$$

De fato, somando $(-1)^{k+2} f_{k+1}$ em ambos os membros da hipótese de indução e notando que $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 + \cdots + (-1)^{k+1} f_k + (-1)^{k+2} f_{k+1} &= (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} f_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} (f_k + f_{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1} f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2} f_k + (-1)^{k+2} f_{k-1}. \end{aligned}$$

Como $(-1)^{k+1} f_{k-1} + (-1)^{k+2} f_{k-1} = 0$, o resultado segue.

□

Propriedade 3.6. *Se* $m \geq 1$ *e* $n > 1$, *então*

$$f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$$

Demonstração. Usaremos o Segundo Princípio de Indução sobre m. A afirmação é verdadeira para $m = 1$, pois

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad e \quad f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_{1+1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} + f_n.$$

Para $m = 2$, a afirmação é também verdadeira, pois

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad e \quad f_{n-1} \cdot f_2 + f_n \cdot f_{2+1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 2 = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_{n+1} + f_n.$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para k inteiro tal que $2 \leq k < r$, com r inteiro. Sendo assim, escrevemos:

$$f_{n+(r-2)} = f_{n-1} f_{r-2} + f_n f_{r-1}$$

e

$$f_{n+(r-1)} = f_{n-1} f_{r-1} + f_n f_r.$$

Somando membro a membro essas igualdades e levando em conta a fórmula recursiva que define (f_n), obtemos:

$$\begin{aligned} f_{n+(r-2)} + f_{n+(r-1)} &= (f_{n-1}f_{r-2} + f_{n-1}f_{r-1}) + (f_n f_{r-1} + f_n f_r) \\ f_{n+r} &= f_{n-1}(f_{r-2} + f_{r-1}) + f_n(f_{r-1} + f_r) \\ f_{n+r} &= f_{n-1}f_r + f_n f_{r+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a propriedade também vale para $k = r$, sempre que $n > 1$, o que conclui a prova. □

Propriedade 3.7. *Para todo* $n > 1$,

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

Demonstração. Fazendo $m = n$ na fórmula da propriedade anterior, temos

$$\begin{aligned} f_{n+n} &= f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} \\ f_{2n} &= f_n(f_{n-1} + f_{n+1}). \end{aligned}$$

Como $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, obtemos

$$f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

o que conclui a demonstração □

Propriedade 3.8 (Identidade de Cassini[1]). *Para todo* $n > 1$,

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Demonstração. A afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois $f_2^2 - f_{2-1} \cdot f_{2+1} = 1 - 1 \cdot 2 = -1$ e $(-1)^{2+1} - 1$.

Supondo a afirmação verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_k^2 - f_{k-1}f_{k+1} = (-1)^{k+1} \Rightarrow f_{k-1}f_{k+1} = f_k^2 - (-1)^{k+1}$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, mostraremos que

$$f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} = (-1)^{k+2}.$$

[1]Jean - Dominique Cassini descobriu essa identidade em 1680, veja J.D. Cassini, Une nouvelle progression de nombres, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Paris, 1 (1733) 496 - 201

De fato, temos

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} &= f_{k+1}f_{k+1} - f_k f_{k+2} \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) - f_k f_{k+2} \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k-1}f_{k+1} - f_k f_{k+2} \end{aligned}$$

e pela hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} &= f_k f_{k+1} + (f_k^2 - (-1)^{k+1}) - f_k f_{k+2} \\ &= (f_k f_{k+1} + f_k^2) + (-1)(-1)^{k+1} - f_k f_{k+2} \\ &= f_k(f_{k+1} + f_k) - f_k f_{k+2} + (-1)^{k+2} \\ &= f_k f_{k+2} - f_k f_{k+2} + (-1)^{k+2} \\ &= (-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Propriedade 3.9. *Para todo* $n \geq 1$,

$$f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 = f_{2n+3}.$$

Demonstração. A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $f_{1+1}^2 + f_{1+2}^2 = 1 + 4 = 5$ e $f_{2\cdot1+3} = 5$.

Supondo a afirmação verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2 = f_{2k+3}.$$

devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, mostraremos que

$$f_{k+2}^2 + f_{k+3}^2 = f_{2k+5}.$$

De fato, basta somar $f_{k+3}^2 - f_{k+1}^2 = f_{2k+4}$, Propriedade 3.7, membro a membro com a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2 + (f_{k+3}^2 - f_{k+1}^2) &= f_{2k+3} + f_{2k+4} \\ f_{k+2}^2 + f_{k+3}^2 &= f_{2k+5}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Em 1876, F. Edouard A. Lucas descobriu a seguinte fórmula para os termos de Fibonacci empregando os coeficientes binomiais:

Teorema 3.1.

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j}$$

onde j é o maior inteiro menor do que ou igual a $n/2$.

Demonstração. Por indução sobre n. É fácil ver para os casos $n = 0, 1, 2$. Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para os inteiros $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$. Da identidade fundamental e da hipótese de indução temos :

$$\begin{aligned} f_{k+1} = f_k + f_{k-1} &= \left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \cdots + \binom{k-j-1}{j}\right] + \\ &+ \left[\binom{k-2}{0} + \binom{k-3}{1} + \binom{k-4}{2} + \cdots + \binom{k-j-1}{j-1}\right] \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= \binom{k-1}{0} + \left[\binom{k-2}{1} + \binom{k-2}{0}\right] + \left[\binom{k-3}{2} + \binom{k-3}{1}\right] + \cdots \\ &+ \left[\binom{k-j-1}{j} + \binom{k-j-1}{j-1}\right] \end{aligned}$$

Agora, aplicando a relação de Stiffel,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

obtemos

$$f_{k+1} = \binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \binom{k-3}{3} + \cdots + \binom{k-j}{j}$$

Para concluir a prova, basta observar que a primeira parcela da soma acima é igual a seguinte expressão; $\binom{k-1}{0}$, para $k > 1$.

□

Propriedades aritméticas

Propriedade 3.10. *Dois números de Fibonacci consecutivos f_n e f_{n+1} são primos entre si.*

Demonstração. Seja $d = mdc(f_n, f_{n+1})$. Como f_n e f_{n+1} são maiores que zero, o mesmo ocorre com d. O fato de d ser divisor de f_n e f_{n+1} implica que $d \mid f_{n-1}$ pois $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$. Dividindo f_n e f_{n-1}, então d divide f_{n-2}. Prosseguindo nesse raciocínio chegaremos à conclusão que $d \mid f_2$. Então $d = 1$, pois $f_2 = 1$. □

Propriedade 3.11. *Se $m \mid n$, então $f_m \mid f_n$.*

Demonstração. Por hipótese $n = mk$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Procederemos por indução sobre k.

Se $k = 1$, então $m = n$ e é imediato que $f_m \mid f_n$.

Suponha o resultado válido para algum valor de k; isto é, $f_m \mid f_{mk}$.

Pela a identidade da Proposição 3.6, temos que:

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk} \cdot f_{m+1}$$

Como $f_m \mid f_{mk-1}f_m$ e $f_m \mid f_{mk}f_{m+1}$ pois, pela hipótese de indução divide f_{mk}, segue-se que f_m divide a soma desses dois produtos. ou seja, $f_m \mid f_{m(k+1)}$. □

Propriedade 3.12. *Se $m = nq + r$, então $mdc(f_m, f_n) = mdc(f_m, f_r)$.*

Demonstração. Pela a identidade da Proposição 3.6:

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq+r}, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r + f_{nq}f_{r+1}, f_n)$$

Considerando porém que $mdc(a, b) = mdc(a + c, b)$, sempre que $b \mid c$, e ainda que $f_n \mid f_{nq}$ (propriedade 3.11), chegamos a:

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r + f_{nq}f_{r+1}, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r, f_n).$$

Mostremos que f_{nq-1} e f_n são primos entre si.

Se d é um divisor comum a esses dois números, então $d \mid f_{nq-1}$ e $d \mid f_{nq}$ (devido 3.11). Daí d é um divisor da soma $f_{nq-1} + f_{nq} = f_{nq+1}$. Mas se $d \mid f_{nq}$ e $d \mid f_{nq+1}$, então 3.10 nos assegura que $d = 1$.

Logo, como $mdc(a,c) = 1$ implica $mdc(a,bc) = (a,b)$ temos

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r, f_n) = mdc(f_r, f_n).$$

□

Propriedade 3.13. *Se $d = mdc(m,n)$, então $mdc(f_m, f_n) = f_d$.*

Demonstração. Supondo $m > n$, e aplicando o processo das divisões sucessivas para se chegar a $d = mdc(m,n)$:

$$\begin{aligned}
m &= nq_1 + r_1 \quad ,(0 < r_1 < n)\\
n &= r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1})\\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \quad (\text{onde } r_n = d
\end{aligned}$$

Aplicamos o resultado da Proposição 3.12 a cada uma das igualdades acima, obtendo

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_n, f_{r_1}) = mdc(f_{r_1}, f_{r_2}) = \cdots = mdc(f_{r_n-1}, f_d)$$

Como $d \mid r_{n-1}$ e portanto, em virtude de 3.11, $f_d \mid f_{rn-1}$, então: $mdc(f_m, f_n) = f_d$.

□

Propriedade 3.14 (Recíproco de 3.11). *Se $f_m \mid f_n$ e $m \neq 2$, então $m \mid n$.*

Demonstração. De $f_m \mid f_n$ decorre que $mdc(f_m, f_n) = f_m$. Mas, devido a 3.13:

$$mdc(f_m, f_n) = f_d$$

onde $d = mdc(m,n)$. Logo $f_m = f_d$. Se $m > 2$, então $f_m \geq 2$, daí $f_d \geq 2$ e portanto $d > 2$, o que implica $m = d$. Assim, para todo $m \neq 2$ vale a igualdade $m = d$, o que obviamente acarreta $m \mid n$. □

O resultado acima nos permite estabelecer alguns critérios de divisibilidade para os termos da sequência de Fibonacci.

Exemplo 3.1. *Para acharmos, os termos f_m da sequência de Fibonacci divisíveis por 2, basta notar que $f_3 = 2$ e que*

$$2 \mid f_m \Leftrightarrow f_{mdc(3,m)} = mdc(f_3, f_m) = mdc(2, f_m) = 2 = f_3,$$

e portanto, $2 \mid f_m$ se, e somente se, $mdc(3, m) = 3$, o que equivale a dizer que $3 \mid m$. Em outras palavras, um número de Fibonacci é divisível por 2 (portanto é par) se, e somente se, seu índice é divisível por 3.

3.1 A Fórmula de Binet

Será possível encontrar uma fórmula fechada que expresse um termo qualquer da Sequência de Fibonacci apenas conhecendo sua posição na sequência? A resposta é afirmativa e foi dada em 1718 por De Moivre. Porém, a fórmula ficou conhecida pelo nome de Binet, que a redescobriu em 1843.

Outra sequência de Fibonacci

Uma progressão geométrica $(q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots)$ é uma sequência de Fibonacci se para todo $n \geq 2$, $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$.

Dividindo a equação acima por $q^{n-1} \neq 0$, obtemos a equação

$$q^2 = q + 1$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A proposição seguinte nos fornece uma fórmula que relaciona um termo qualquer de uma sequência de Fibonacci com os números r_1 e r_2 acima obtidos.

Proposição 3.1. *Seja $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ uma sequência de Fibonacci qualquer. Então, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $n \geq 1$*

$$f_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

onde r_1 e r_2 são as raízes encontradas anteriormente.

Demonstração. Faremos a prova pelo Segundo Princípio de Indução sobre n.

Para $n = 1$ e $n = 2$, formamos o sistema

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = f_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = f_2 \end{cases}$$

nas variáveis α e β, apresenta a solução única:

$$\alpha = \frac{r_2 f_1 - f_2}{r_1(r_2 - r_1)} \qquad e \qquad \beta = \frac{r_1 f_1 - f_2}{r_2(r_1 - r_2)},$$

tendo em vista que $r_1 \neq r_2$.

Supondo que a afirmação seja verdadeira para todo n tal que $1 \leq n \leq k$, com k inteiro, mostraremos que ela é também verdadeira para $k + 1$.

De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\ &= (\alpha r_1^k + \beta r_2^k) + (\alpha r_1^{k-1} + \beta r_2^{k-1}) \\ &= (\alpha r_1^k + \alpha r_1^{k-1}) + (\beta r_2^k + \beta r_2^{k-1}) \\ &= \alpha r_1^{k-1}(r_1 + 1) + \beta r_2^{k-1}(r_2 + 1). \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são as raízes de $q^2 = q + 1$, então $r_1 + 1 = r_1^2$ e $r_2 + 1 = r_2^2$. Logo,

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= \alpha r_1^{k-1} r_1^2 + \beta r_2^{k-1} r_2^2 \\ &= \alpha r_1^{k+1} + \beta r_2^{k+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração por indução, estabelecendo o resultado para todo $n \geq 1$. □

Consideremos a sequência original de Fibonacci, ou seja, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, da proposição 3.1 obtemos a conhecida *fórmula de Binet.*

Proposição 3.2. *O número de Fibonacci f_n pode ser obtido pela fórmula*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \tag{3.2}$$

chamada de Fórmula de Binet.

Demonstração. Basta substituir $f_1 = f_2 = 1$ na proposição anterior e resolver o sistema correspondente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha r_1 & + & \beta r_2 & = & f_1 \\ \alpha r_1^2 & + & \beta r_2^2 & = & f_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + & \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 \\ \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & + & \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & = & 1, \end{array}\right.$$

nas incógnitas α e β. Resolvendo-o, encontramos $\beta = -\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, que substituídos na proposição anterior, chega-se à Fórmula de Binet. □

Com a Fórmula de Binet, demonstraremos, a seguir, mais uma propriedade dos Números de Fibonacci, a qual ficaria bem mais trabalhosa usando o Princípio de Indução.

Fazendo $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, a Fórmula de Binet fica $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$.

Propriedade 3.15. *Para todo $n \geq 1$,*

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2$$

Demonstração. Aplicaremos a Fórmula de Binet e desenvolveremos o primeiro e o segundo membros chegando a duas expressões equivalentes.

$$\begin{aligned} (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 &= \left(\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25}\left(a^{2n+3} - a^n b^{n+3} + b^{2n+3}\right)^2 + \frac{4}{25}\left(a^{2n+3} - a^{n+1}b^{n+2} + a^{n+2}b^{n+1} + b^{2n+3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25}\left(a^{2n+3} - a^n b^n (b^3 + a^3) + b^{2n+3}\right)^2 + \frac{4}{25}\left(a^{2n+3} - a^{n+1}b^{n+1}(b + a) + b^{2n+3}\right)^2. \end{aligned}$$

De $ab = -1, b + a = 1, b^3 + a^3 = 4$, obtemos

$$\begin{aligned} (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 &= \frac{1}{25}\left(a^{2n+3} - 4a^n b^n + b^{2n+3}\right)^2 + \frac{4}{25}\left(a^{2n+3} - a^n b^n + b^{2n+3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25}\left(a^{4n+6} - 16a^{2n}b^{2n} + b^{4n+6} - 8a^{3n+3}b^n + 2a^{2n+3}b^{2n+3} - 8a^n b^{3n+3}\right) + \\ &+ \frac{4}{25}\left(a^{4n+6} + a^{2n}b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{3n+3}b^n + 2a^{2n+3}b^{2n+3} + 2a^n b^{3n+3}\right) \\ &= \frac{5a^{4n+6} + 20a^{2n}b^{2n} + 5b^{4n+6} + 10a^{2n+3}b^{2n+3}}{25} \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 &= \frac{a^{4n+6} + 4a^{2n}b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{2n+3}b^{2n+3}}{5}. \quad (3.3)\\
(f_{2n+3})^2 &= \left(\frac{a^{2n+3} - b^{2n+3}}{\sqrt{5}}\right)^2\\
&= \frac{a^{4n+6} - 2a^{2n+3}b^{2n+3} + b^{4n+6}}{5}. \quad (3.4)
\end{aligned}
$$

Agora devemos mostrar que (3.3) = (3.4). Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{4n+6} + 4a^{2n}b^{2n} + b^{4n+6} + 2a^{2n+3}b^{2n+3}}{5} &= \frac{a^{4n+6} - 2a^{2n+3}b^{2n+3} + b^{4n+6}}{5}\\
4a^{2n}b^{2n} + 2a^{2n+3}b^{2n+3} &= -2a^{2n+3}b^{2n+3}\\
4a^{2n}b^{2n} &= -4a^{2n+3}b^{2n+3}\\
a^{2n}b^{2n} &= -a^{2n+3}b^{2n+3}\\
(ab)^{2n} &= -(ab)^{2n}b^{2n}.(ab)^3\\
1 &= -(ab)^3\\
1 &= -(-1)^3\\
1 &= 1,
\end{aligned}
$$

o que completa a demonstração. □

Da propriedade 3.15, podemos ainda escrever

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2,$$

a qual serve para gerar triplas pitagóricas.

3.2 O Número de Ouro

Definição 3.2. *Dizemos que um ponto C divide um segmento AB na* **razão áurea** *(i.e., em média e extrema razão) se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Figura 3.1: Segmento de reta dividido na proporção áurea.

3.2.1 Definição algébrica

Chamando $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = 1$ e, temos que, $\overline{AB} = x + 1$ obtemos:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Note que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ é a Razão Áurea, ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x}{1} = x = \Phi,$$

Encontramos $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, que é uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$. Resolvendo essa equação quadrática a única solução positiva dessa equação quadrática é a seguinte

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989,$$

que é o número Φ.

Sendo assim, Φ é um número irracional da mesma forma que o π, ou seja, tais números não podem ser representados como uma razão de números inteiros.

Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci

Utilizando-se uma simples calculadora e efetuando-se a divisão de dois temos consecutivos da sequência de Fibonacci, pode-se observar que:

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,666
8/5	1,600
13/8	1,625
21/13	1,6153
34/21	1,61905
55/34	1,61765
89/55	1,61818
144/89	1,61798
233/144	1,61806
377/233	1,61802
610/377	1,61803
⋮	⋮

Tabela 3.1: Razão entre Números de Fibonacci consecutivos.

A razão entre dois números sucessivos, quando n cresce, oscila em torno de Φ, alternando entre maior e menor que $1,618\ldots$. Essa afirmação foi descoberta pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) em 1611.

Teorema 3.2. *A razão entre dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci tende para o Número de Ouro quando n tende a infinito, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi.$$

Demonstração. Pela Fórmula de Binet, temos:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

e

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}\end{aligned}$$

Por outro lado $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

□

Retângulo Áureo e Espiral

Seja $ABCD$ um retângulo áureo. Destacando o quadrado $ADFE$ do retângulo áureo acima, de acordo com a definição,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EB}}.$$

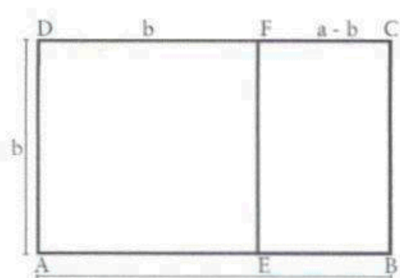

Figura 3.2: Retângulo Áureo.

Como $\overline{FE} = \overline{AD} = b$, $\overline{AB} = a$, temos $\overline{EB} = a - b$ e disso,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0.$$

Como b é positivo, obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Portanto, $\frac{\overline{FE}}{\overline{EB}} = \Phi$ e, então, o novo retângulo $BCFE$, interior ao primeiro, também é áureo.

Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obteremos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas, e este processo é infinito guardando essa proporção conforme a Figura 3.3.

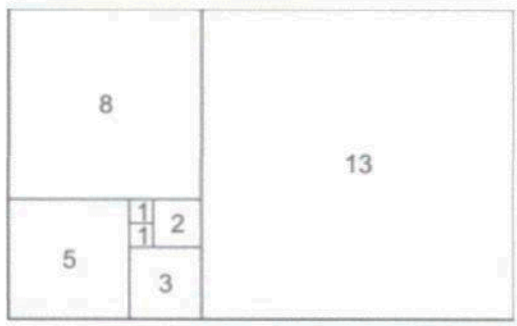

Figura 3.3: Sequência infinita de Retângulos Áureos

Segundo Lívio [5], tal sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável que, devido às propriedades "divinas" atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como "O Olho de Deus". Tal ponto é chamado, na literatura matemática, de foco.

A partir da sequência infinita de retângulos áureos, Figura 3.3, podemos desenhar a espiral áurea, basta tomar o encontro das diagonais, e ir traçando o quarto de circunferência de cada um dos quadrados, resultando na Figura 3.4

Tal curva é também conhecida como *spira mirabilis* [2], *espiral de ouro*, ou *espiral logarítmica*. Esta espiral possui algumas propriedades interessantes.

- As diagonais AC e BF são perpendiculares entre si.

[2]Este nome foi usado como título de um tratado escrito por Jacques Bernoulli (1654-1705) acerca dessa curva. Jacques Bernoulli era tão impressionado com a beleza dessa curva a ponto de pedir que a mesma e o lema que se atribui a ela: "Eadem mutato resurgo" ("embora mudado, ressurjo o mesmo"), fossem gravados em seu túmulo

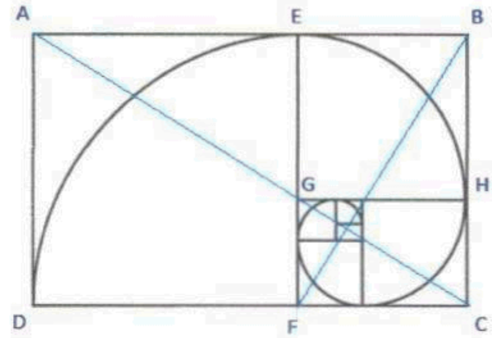

Figura 3.4: Espiral áurea.

- As triplas de pontos AOC, BOF, COG, etc., onde O é o centro (polo) da espiral, são colineares.

- Os quatro ângulos retos com origem em O têm os segmentos EK e DH como bissetrizes.

- As relações relações $\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OF} = \cdots$ são válidas, pois os segmentos de cada uma dessas razões são os catetos de triângulos retângulos que são, cada um deles, exatamente a metade de um retângulo áureo.

A espiral de ouro está intimamente relacionada com a Sequência de Fibonacci, pois se considerarmos o menor quadrado da Figura 3.3 com lado medindo uma unidade de comprimento, os demais quadrados, de dentro para fora, terão comprimentos 1, 2, 3, 5 e, assim por diante, no qual formam a referida sequência.

Capítulo 4

Curiosidades, Manifestações e Aplicações

A Sequência de Fibonacci ficou famosa não apenas porque está associada à reprodução de coelhos. Para além de sua conexão com a referida reprodução e com o Número de Ouro, a Sequência de Fibonacci está associada a diversos fenômenos tais como num comportamento da luz, na árvore genealógica de um zangão, no Triângulo de Pascal, no crescimento das plantas, no formato de diversos seres vivos, etc. Além de fazermos uma abordagem de algumas dessas conexões, faremos uma descrição da aplicação da Razão Áurea no campo das artes e da arquitetura.

4.1 Curiosidades

O número 1/89

A Sequência de Fibonacci contém um número absolutamente notável: o seu 11° termo, 89. O valor de $1/89$ na representação decimal do seu inverso é igual a

$$0,01123595\ldots.$$

Organizaremos os Números de Fibonacci, $11, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, como números decimais da seguinte maneira:

0,01

0,001

0,0002

0,00003

0,000005

0,0000008

0,00000013

0,000000021

0,0000000034

...

Em outras palavras, o dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci esta na segunda casa decimal, e do segundo está na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do n-ésimo número de Fibonacci esta na (n+1)-ésima casa decimal).

Somando todos esses números decimais, obtemos, curiosamente,

$$0,01123595\ldots = 1/89.$$

Essa curiosidade foi descoberto por Cody Birsner, um estudante na universidade de Oklahoma, em 1994.

Periodicidade

Os números de Fibonacci se tornam grandes rapidamente, porque sempre se somam dois números sucessivos para formar o seguinte. Enquanto o 5° número de Fibonacci é 5, o 125° é 59.425.114.757.512.643.212.875.125.

O dígito das unidades aparece com uma periodicidade de 60, ou seja, a cada 60 números. Por exemplo, enquanto o 2° número é 1, o 62° o é 4.052.739.537.881 que também é terminado em 1. O 122° o número 14.028.366.653.498.915.298.923.761 também termina em 1. O mesmo vale para o 182°, e e assim por diante. De mesmo modo, o 14° número é 377, e o 74° é 1.304.969.544.928.657, também termina com 7, e assim por diante.

Esta curiosidade foi descoberta em 1774 pelo matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Os últimos dois dígitos se repetem com uma periodicidade de 300, os três últimos com uma periodicidade de 1500, os últimos quatro dígitos com uma periodicidade de 15 mil, os últimos cinco dígitos a cada 150 mil vezes e os últimos seis dígitos com uma periodicidade de 1.500.000.

O matemático israelense Dov Jarden mostrou a possibilidade de se provar que para qualquer número de Fibonacci com últimos dígitos acima de três, a periodicidade é $15 \cdot 10^{n-1}$, onde n é o número de dígitos que são repetidos.

As informações apresentadas nesta subseção foram obtidas em [?].

Triplas Pitagóricas

Uma relação interessantíssima com a sequência de Fibonacci são triplas pitagóricas. Lembrando que as triplas pitagóricas surge do famoso Teorema de Pitágoras sobre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Em 1948, Charles Raine observou que tomando quaisquer quatro números consecutivos da sequencia de Fibonacci, $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}$, o produto dos termos extremos $f_n \cdot f_{n+3}$ e duas vezes o produto dos termos internos $2 \cdot F_{n+1} \cdot f_{n+3}$ representam os catetos do triângulo retângulo e a hipotenusa é um número de Fibonacci dado por f_{2n+3}.

Considerando um triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa c, temos

$$\begin{aligned} a &= f_n \cdot f_{n+3} \\ b &= 2 \cdot F_{n+1} \cdot f_{n+3} \\ c &= f_{2n+3} \end{aligned}$$

observando a sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ e tomando como exemplo $(1, 2, 3, 5)$, verificamos que:

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot 5 = 5 \\ b &= 2 \cdot (2 \cdot 3) = 12 \\ c &= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 = f_{2 \cdot 2+3} = f_7. \end{aligned}$$

As Propriedades (3.9) e (3.15) combinadas confirmam esse fato.

4.2 Manifestações

Comportamento da luz

Vamos agora ver a sequência de Fibonacci surgindo na física, mais precisamente na ótica dos raios de luz. Tomemos duas placas de vidro, com índices de refração diferentes, justapostas uma sobre a outra. Um raio de luz que incida sobre esse conjunto pode sofrer reflexões e desvios. Vamos contar o número de caminhos possíveis de um raio de luz aumentando, gradualmente, o número de reflexões nesses caminhos.

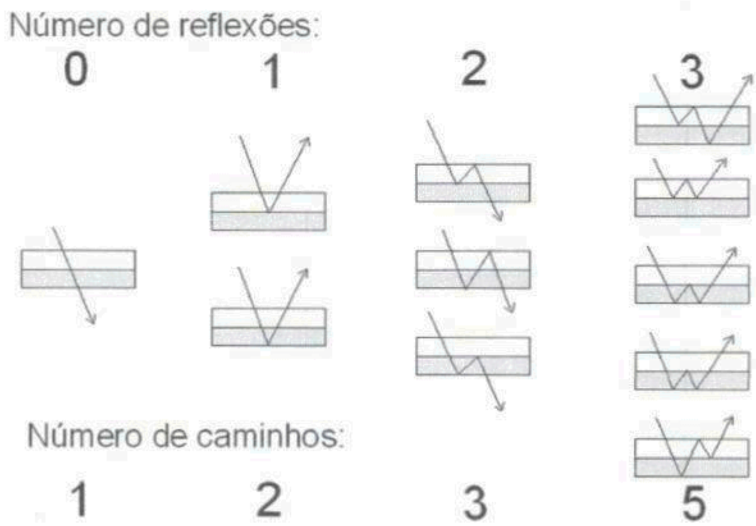

Figura 4.1: Reflexões de luz sobre placas de vidros.

Notemos, então, que as quantidades de caminhos descritos pelo raio de luz formam a Sequência de Fibonacci com supressão do primeiro termo.

Representando o número de reflexões, chamado de "geração", pela letra n, o número de caminhos será $F(n)$, um número de Fibonacci. Por exemplo, a geração $n = 4$ leva a $F(4) = 8$ caminhos.

Os raios de luz podem passar diretamente sem refletir em nada, ou podem ter uma reflexão interna, duas reflexões internas, e assim por diante - potencialmente um número infinito de reflexões internas antes de emergir. Todos esses são caminhos permitidos pelas leis da ótica

Árvore Genealógica do Zangão

Os Números de Fibonacci também surgem de maneira inusitada na árvore genealógica de um zangão, o macho da abelha.

O Zangão é o macho da abelha que é gerado a partir de de um ovo não fecundado de uma abelha, deste modo um Zangão não tem "pai", tem somente uma "mãe". Por outro lado os ovos da abelha que são fertilizados por zangões, se tornam fêmeas. Daí cada abelha fêmea tem um "pai"e uma "mãe".

Assim um zangão terá uma mãe e dois avós(que são os pais de sua mãe), consequentemente três bisavós (os dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e um para seu bisavô), e assim sucessivamente. Daí os números de indivíduos em cada geração do zangão(como mostra a figura 3.1) gera 1, 1, 2, 3, 5, 8,... que é a Sequencia de Fibonacci.

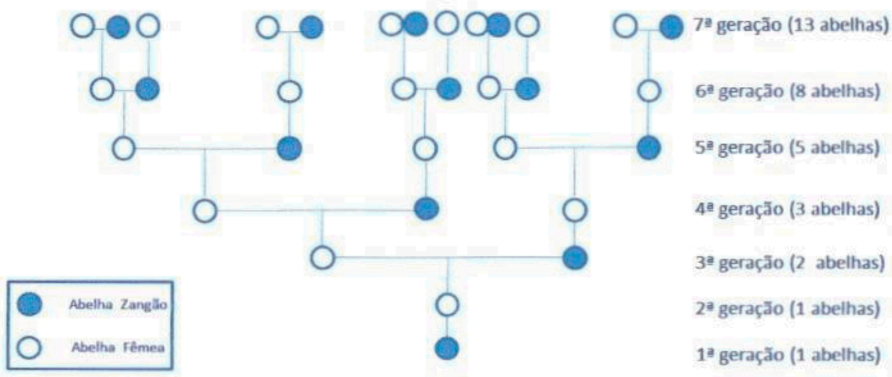

Figura 4.2: Árvore Genealógica do Zangão.

Triângulo de Pascal

Com os números binomiais construímos uma tabela numérica triangular, o **triângulo de Pascal**. O Triângulo de Pascal é um dos padrões numéricos mais notáveis da Matemática. A sua construção é muito simples e segue abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\cdots$$

Calculando os binomiais apresentados acima e substituindo-os pelos seus respectivos valores, o Triângulo de Pascal passa e ter a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

A partir do Triângulo de Pascal podem ser obtidos os números de Fibonacci, basta somar os números das diagonais, como mostra a Figura. Começa a partir da primeira diagonal 1, a segunda 1, em seguida, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

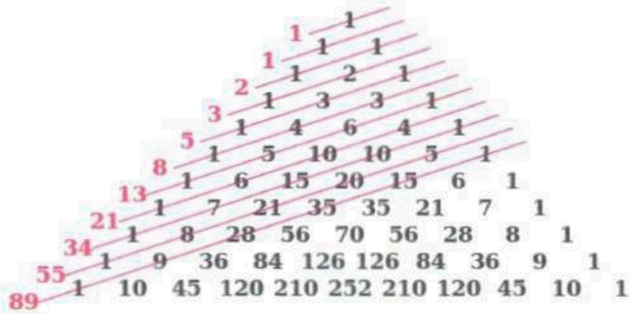

Figura 4.3: Triângulo de Pascal é os Número de Fibonacci.

Teorema 4.1. *A soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa"do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci f_{n+1}.*

Demonstração. Denotaremos a soma dos elementos da n-ésima diagonal inversa por F_n. Primeiramente, observamos que para $n = 0, 1, 2$, temos $F_0 = 1 = f_1$, $F_1 = 1 = f_2$ e $F_2 = 2 = f_3$. Se conseguirmos mostrar que $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$, para todo $n > 2$, teremos finalizado a prova.

De fato,

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_n &= \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots\right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots\right] = \\ &= \binom{n+1}{0}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Aplicando a Relação de Stifel, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ e notando que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0} = 1$, obtemos:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots = F_{n+2},$$

como queríamos demonstrar.

□

4.3 Aplicações da Sequência de Fibonacci

As Grandes Pirâmides

Mais um mistério: cada bloco é 1,618 vezes maior que o bloco do nível imediato acima. Em algumas, as câmaras internas têm comprimento 1,618 vezes maior que sua largura.

Figura 4.4: Pirâmide.

Pártenon

Os gregos já conheciam a "proporção áurea," embora não a fórmula para defini-la. A largura e a altura da fachada deste templo do século V a.C. estão na proporção de 1 para 1,618.

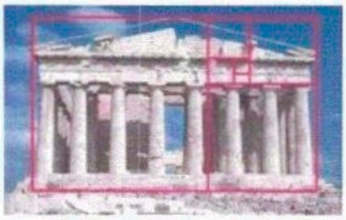

Figura 4.5: Paternon

Artes

Leonardo da Vinci e Michelangelo enfatizam em suas artes o número 1,6, aplicando-o em suas obras sendo umas das principais marcas do Renascimento. A Monalisa (figura ao lado), de Leonardo da Vinci, usa a razão áurea na relação entre o tronco e cabeça e entre elementos do rosto.

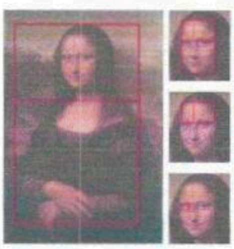

Figura 4.6: Monalisa.

Concha do caramujo Nautilus

O molusco Nautilus constrói sua concha em um formato conhecido como espiral logarítmica, que é obtida pela proporção áurea. A espiral pode se expandir indefinidamente sem perder sua forma original.

Figura 4.7: Nautilus Pompilus.

Camaleão

Ao se observar a contração do rabo do camaleão tem-se uma das representações mais perfeitas da espiral de Fibonacci.

Figura 4.8: Camaleão.

Pinha

As sementes crescem e se organizam em duas espirais que lembram a sequência de Fibonacci: oito no sentido horário e treze no anti-horário.

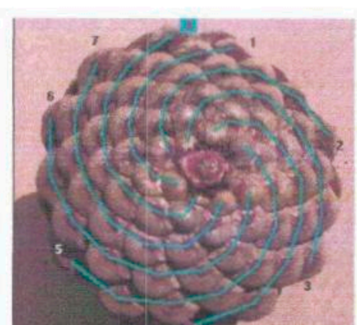

Figura 4.9: Pinha

Abacaxi

As formas hexagonais que se apresentam na casca do abacaxi se organizam em espirais. A maioria dos frutos tem cinco, oito, treze ou 21 espirais - Números de Fibonacci.

Figura 4.10: Abacaxi

A Botânica e Fibonacci

Os números de Fibonacci ligam-se facilmente à natureza. É possível encontrá-los no arranjo das folhas (filotaxia) do ramo de uma planta, nas copas das árvores ou até mesmo no número de pétalas das flores. Podemos também encontrar a espiral de Fibonacci nas sementes das flores, em frutos.

Algumas plantas tem um formato da espiral áurea como podemos observar na Figura 4.11.

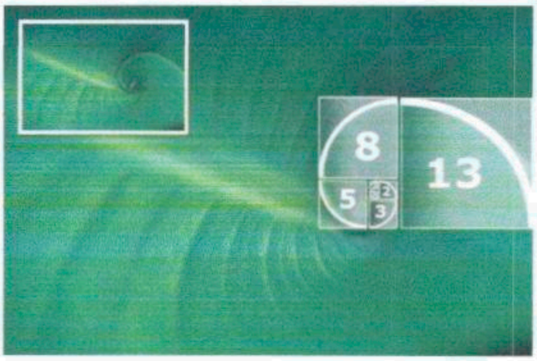

Figura 4.11: Folha de uma bromélia.

Na espiral formada pela folha de uma bromélia, pode ser percebida a sequência de Fibonacci, através da composição de quadrados com lados de medidas proporcionais aos elementos da sequência.

O arranjo das folhas de algumas plantas em torno do caule são número de Fibonacci. Com este arranjo, todas as folhas conseguem apanhar os raios solares de igual forma. Quando chove, o escoamento da água torna-se também fácil.

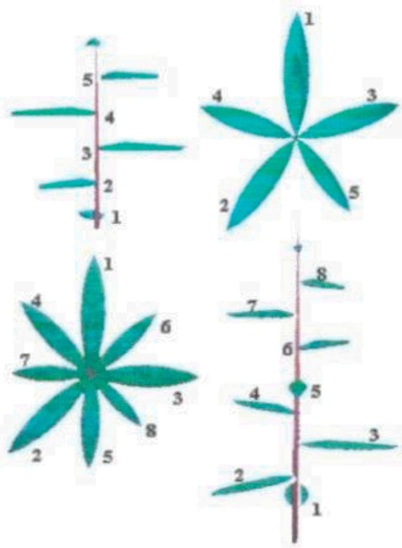

Figura 4.12: Espirais nas plantas.

Outras plantas tem o crescimento e disposição de seus galhos regido pela Sequência de Fibonacci como observamos na Figura 4.13.

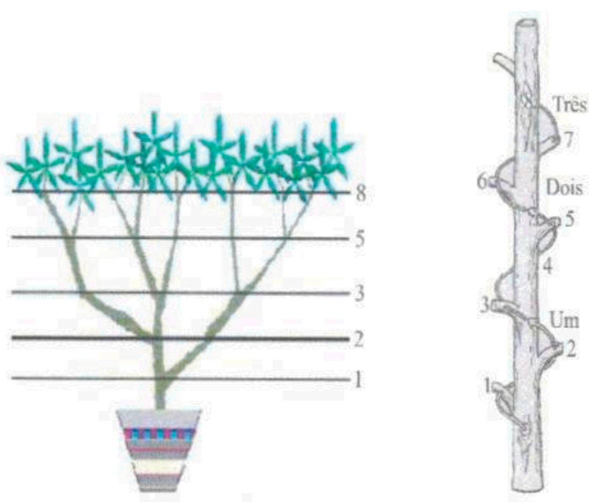

Figura 4.13: Disposição dos galhos e folhas.

Na figura 4.13 (b), temos uma planta qualquer que cresce verticalmente. Consideremos uma folha qualquer como referência e contando as folhas seguintes até chegar à outra folha com a mesma orientação da folha de referência, teremos certamente um número de Fibonacci. Assim como o número de voltas que a espiral percorreu ate chegar a folha desejada também será um número de Fibonacci.

> *"A Natureza "arrumou"as sementes do girassol sem intervalos, na forma mais eficiente possível, formando espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda como para a direita. O curioso é que os números de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na sequencia de Fibonacci."*([9], p.7)

Figura 4.14: Sementes de Girassol em Formato Espiralado.

Além dessa incrível relação com o girassol também é possível observar ligações da Sequência de Fibonacci com o número de pétalas de margaridas que geralmente é treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, ou seja, geralmente é um número de Fibonacci.

Sequência de Fibonacci no Corpo Humano

Leonardo da Vinci evidenciou bem essa relação em uma de suas obras, que foi o **Homem Vitruviano**.

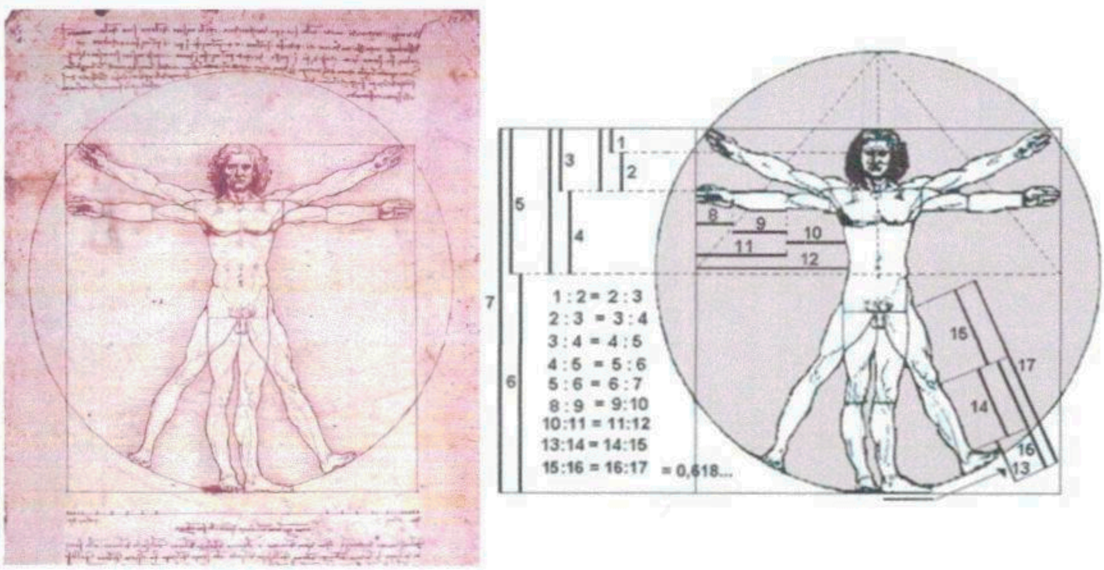

Figura 4.15: Homem Vitruviano.

Nessa obra o homem é representado na forma de estrela de cinco pontas baseada em pentágonos inscritos e regulares na circunferência, e reluz a idéia de Pitágoras de que "o homem é a medida de toda as coisas".

Proporções áureas em um corpo humano.

- A altura do nosso corpo dividida pela altura do umbigo até o chão, resulta em ϕ;
- O comprimento do braço dividido pela medida do cotovelo até o dedo, resulta em ϕ;
- A altura do crânio dividida pela medida da mandíbula ate o alto da cabeça, resulta em ϕ;
- A medida da cintura ate a cabeça dividida pelo tamanho do tórax, resulta em ϕ;
- O comprimento do dedo dividido pelo comprimento da segunda dobra ate a ponta do dedo, resulta em ϕ;

- A medida da dobra central do dedo ate a ponta dividida pela medida da segunda dobra ate a ponta, resulta em ϕ;
- A medida do quadril até o chão dividido pela medida do joelho ate o chão, resulta em ϕ.

Enfim, cada osso do corpo humano é regido pela Divina Proporção.

Conclusão

Sabemos que a matemática é constantemente cobrada a evidenciar aplicações, mas nem sempre isso é possível. Este trabalho evidenciou fortes relações entre conceitos e resultados Matemáticos com fenômenos e regularidades presentes da natureza.

A Sequência de Fibonacci junto com o número de ouro aparecem em nosso cotidiano em inúmeros lugares inesperados, através de regularidades apresentadas na fauna, na flora e em outros locais. Essa versatilidade de lugares onde existem essa regularidade foi o que fez uma simples sequência associada a uma simples razão ser objeto de estudo de matemáticos, físicos, astrônomos, filósofos, biólogos dentre outros, desde a antiguidade até os dias atuais.

Vimos que Leonardo Fibonacci foi quem descobriu a sequência que atualmente leva seu nome e esta sequência tem várias propriedades, uma delas explicita a relação com o número de ouro, número esse que já era conhecido por Euclides através da divisão de um segmento de reta por uma parte sua, que também foi utilizado por Phídias em obras como o Parthenon e a estatua de Zeus onde utilizou de retângulos áureos, o que fez o número ser chamado de phi (Φ).

Enfim, além de aplicações dentro da própria Matemática, como no triângulo de Pascal, a Sequência de Fibonacci esta presente na distribuição de galhos e folhas de certas plantas, na árvore genealógica do zangão no formato de galáxias assim como em conchas de moluscos e até em nosso próprio corpo humano. Mostrando que a Matemática está mais presente na nossa vida do que pensamos, e mais, ela consegue evidenciar inter-relações aparentemente inexistentes, "provando" ou "indicando" que tudo é mais dinâmico e interligado do que pensamos.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B., *História da Matemática.* São Paulo. Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

[2] EVES, H., *Introdução à História da Matemática.* 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp, 2002.

[3] HEFEZ, A., *Elementos de Aritmética.* 2ª ed. SBM, 2004.

[4] LIMA, E.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., *A matemática do ensino médio* - volume 2, SBM, 2006.

[5] LIVIO, M. *Razão Áurea a História de Fi, um número surpreendente.* Tradução Marco Shinobu Matsumura. 2ª ed. Rio de Janeiro. RECORD, 2011.

[6] SÁ, I. P., *A magia da matemática: atividades investigativas, curiosidades e história da matemática.* 3ª ed, Rio de Janeiro. Editora Moderna, 2010.

[7] SANTOS, J. P. O. *Introdução à teoria dos números.* 3ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2007.

[8] ZAHN, M., *Sequência de Fibonacci e número de ouro.* Editora Moderna, 2011.

SITES:

[9] BELUSSI, G. M., GERALDINI, D. A. e PRADO, E. A. *Número de Ouro.*

Disponível em

http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf

Acessado em 24 de dezembro de 2014.

[10] BOAVENTURA, D. B.; CRUZ, D. P. *Sequência de Fibonacci.* Formosa. 2009

Disponível em:

http://pt.scribd.com/doc/64585981/Sequencia-de-Fibonacci

Acessado em 10 de janeiro de 2014.

[11] PEREIRA, L. C. e FERREIRA, M. V. *Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea.*

Disponível em:

http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2008/fibonacci.pdf

Acessado em 20 de dezembro de 2013.

[12] RAMOS, M. G. O. *A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Ilhéus/BA. 2013

Disponível em:

http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf

Acessado em 03 de janeiro de 2014.

[13] *Revista da Olímpiada*/Universidade Federal de Goiás/Instituto de Matemática e Estatística. Nº 4 (jan./dez. 2003). Goiânia: Editora da UFG, 2003-v. Anual.Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Disponível em:

http://omeg.mat.ufg.br/uploads/36/original_r4.pdf

Acessado em 27 de dezembro de 2013.

- Fontes das Figuras do Texto.

Figura 1.1 fonte: RAMOS (2013, p. 4)

Figura 3.3 fonte: Disponível em:

http://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/

Figura 4.1 fonte: disponível em:

http://www.seara.ufc.br/donafifi/fibonacci/fibonacci6.htm

Figura 4.3 fonte: disponível em:

http://pt.wikiversity.org/wiki/Ficheiro:PascalTriangleFibanacci.svg

Figura 4.4 fonte: disponível em:

http://www.novaera-alvorecer.net/piramidesegipto.htm

Figura 4.5 fonte: disponível em:

http://mysundayrest.blogspot.com.br/2010/08/tudo-e-numero-proporcao-aurea-e-suas.html

Figura 4.6 fonte: disponível em:

http://blogs.odiario.com/carlossica/2011/09/01/a-divina-proporcao/

Figura 4.7 fonte: disponível em:

http://kawek.com.br/demedeiros-83696

Figura 4.8 fonte: disponível em:

http://garotadocee.blogspot.com.br/2012/01/o-que-e-sequencia-de-fibonacci.html

Figura 4.9 fonte: disponível em:

http://sophiaofnature.wordpress.com/2014/01/07/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/

Figura 4.10 fonte: disponível em:

http://gnt.globo.com/receitas/E-epoca-de-abacaxi--aprenda-dicas-e-receitas.shtml

Figura 4.11 fonte: disponível em:

http://pt.wikipedia.org/wiki/SequênciadeFibonacci

Figura 4.12 fonte: disponível em:

www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fibonacci/cap3.5.htm

Figura 4.13 fonte: RAMOS (2013, p. 57)

Figura 4.14 fonte: disponível em:

http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

Figura 4.15 fonte: disponível em:

http://www.redegeek.com.br/2012/07/12/episodio-75-leonardo-da-vinci/