



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Elizangela Sousa Silva

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA:
máximos e mínimos em geometria euclidiana plana.

UFPG / BIBLIOTECA

Cuité-PB

2013

Elizangela Sousa Silva

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA:
máximos e mínimos em geometria euclidiana plana.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB

2013





Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586d

Silva, Elizangela Sousa.

Desigualdade Isoperimétrica: máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. / Elizangela Sousa Silva – Cuité: CES, 2013.

62 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2013.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Desigualdade Isoperimétrica. 2. Curvas regulares. 3. Áreas. I. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Elizangela Sousa Silva

**Desigualdade Isoperimétrica: máximos e mínimos em
geometria euclidiana plana**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

Banca Examinadora



Prof. Geraldo de Oliveira Filho



Prof. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)



Prof. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

UFCG BIBLIOTECA

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos.

À minha mãe Maria Neide, que sonhou o tempo todo em me ver formada e infelizmente não pôde esperar para ver a concretização do seu sonho e se orgulhar entre amigos.

À minha filha Lívia, que mesmo pequena teve que suportar a minha ausência durante o tempo que durou meu curso, mesmo nos momentos difíceis que precisou de mim e não pude estar perto.

Ao meu companheiro David Denner pelo apoio indispensável que tornou possível essa conquista, ao carinho, dedicação e paciência que sempre teve comigo.

À minha orientadora Márcia Cristina Silva Brito que aceitou me orientar nesse trabalho e o fez com tanto compromisso e responsabilidade. Obrigado por ter acreditado em minha competência e por ter me ajudado a descobrir uma força e uma capacidade em mim, que eu própria desconhecia.

À minha coorientadora Maria Gisélia Vasconcelos que soube me motivar, instigando-me à leitura e à pesquisa, fazendo-me acreditar em mim mesma.

Ao Professor Geraldo de Oliveira Filho, pela disponibilidade de compor a banca além de suas valorosas contribuições.

Ao meu pai José Egidio e meu irmão Victor que apesar da distância do dia à dia, estão torcendo orgulhosos de mim e da minha força de vontade.

A minha família Ferreira da Silva em especial a minha sogra Juliêta Ferreira que soube me acolher e me dar carinho nos momentos difíceis.

A todos aqueles que foram meus professores durante esses anos no curso de Licenciatura em matemática.

Aos meus colegas Leonardo, Fagner, José Filho, Bosoerg e Jessica. Com eles vivi momentos de descontração e deles recebi bastante apoio nos momentos de dificuldades. Juntos desenvolvemos a capacidade de sorrir para driblar nosso próprio cansaço.

A minha mãe Maria Neide, minha filha Lívia.

Ao meu companheiro David Denner.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

UFMG / BIBLIOTECA

"É preciso amar as pessoas como se não houvesse amanhã, porque se você parar para pensar, na verdade não há"

Renato Russo

Resumo

Neste trabalho apresentamos talvez o mais antigo teorema global em geometria diferencial e está relacionado com o seguinte problema isoperimétrico. *Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento l , qual delas limita a maior área?* O problema dessa forma, já era conhecido pelos gregos, que também conheciam sua solução, um círculo. No entanto, demorou um longo tempo para que surgisse uma prova satisfatória para o fato do círculo ser uma solução do problema isoperimétrico. Apenas em 1870, que K. Weierstrass deu uma prova completa da existência de uma solução, que surgiu como corolário de uma teoria desenvolvida por ele, na área de cálculo variacional. Mais tarde algumas provas mais diretas foram encontradas. A que apresentaremos aqui é devida a E. Schimid (1939).

Palavras-chave: Desigualdade Isoperimétrica. Curvas Regulares. Áreas.

Abstract

We present perhaps the oldest theorem global differential geometry and is related to the following isoperimetric problem. *Of all simple closed curves in the plane with a given length l , which restricts them the largest area?* The problem this way, it was known to the Greeks, who also knew their solution, a circle. However, it took a long time to spring satisfactory proof to the fact that the circle is a solution of the isoperimetric problem. Only in 1870, which K. Weierstrass gave a complete proof of the existence of a solution, which has emerged as a corollary of a theory developed by him, in the area of variational calculus. Later some more direct evidence were found. What we present here is due to E. Schmid (1939).

Keywords: Isoperimetric Inequality. The Legend of Dido. Pappus problem.

Sumário

Introdução	9
1 Problemas Clássicos	16
1.1 Polígonos	16
1.2 Argumento de Continuidade	20
1.3 Problemas de Heron	21
1.4 Problema de Dido	25
1.5 Problemas Isoperimétricos	29
2 A Desigualdade Isoperimétrica	37
2.1 Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos	37
2.2 Curvas Parametrizadas Diferenciável	41
2.3 Desigualdade Isoperimétrica	46
3 Aplicações	50
Referências Bibliográficas	61

UFCCG / BIBLIOTECA

Introdução

Os primeiros problemas envolvendo máximo e mínimos são encontrados na geometria euclidiana e envolvem perímetros, áreas e volumes. Segundo o historiador Dirk Jan Struik (1894 – 2000), o primeiro problema de máximo que chegou até nós encontra-se no Livro VI de Os Elementos de Euclides (330 – 275 a.C.), proposição 27, e consiste na prova que todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é que tem a área máxima. Problemas isoperimétricos, como o referido acima, foram muito importantes no desenvolvimento da matemática, tendo inclusive uma referência na literatura romana. É conhecida como Lenda de Dido, e faz parte do Cântico I da "Eneida", obra em que de Virgílio (70 – 19 a.C.) narra a epopéia de Enéias de Tróia.

Um dos pioneiros trabalhos a abordar o assunto, com mais profundidade, foi realizado por Pappus de Alexandria (século IV d.C.) em sua Coleção Matemática, composta por oito livros (ou volumes). No livro V ele discorreu sobre isoperimetria no plano e no espaço e fez uma curiosa observação a respeito da sagacidade das abelhas.

Após ter provado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área, Pappus concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construírem suas células como prismas com secções hexagonais, em vez de quadradas ou triangulares. Desse modo a opção teria sido para maximizar o volume do mel armazenado para uma mesma quantidade de cera utilizada. O livro examinou, ainda, outros problemas de isoperimetria, inclusive apresentando uma prova de que, para um perímetro dado, o círculo tem maior área que qualquer polígono regular.

Entre os antigos gregos que trabalharam no problema isoperimétrico são encontrados, Zenodoro (200 – 140 a.C) astrônomo e matemático grego nascido em Atenas, mas que viveu na Arcádia e é mais conhecido por seu tratado *Em isométricas figuras*,

hoje desaparecido, mas citado por vários historiadores da antiguidade. Seus trabalhos são citados nos escritos de Diocles, Filonides e Pappus.

Pappus fez uso do *Em isométricas figuras* no livro V, onde mostra a melhor qualidade deste texto em relação ao de Téon de Alexandria. Dedicado ao estudo da geometria, em *Nas figuras isométricas*, um tratado escrito em vários livros e hoje infelizmente perdido, seguiu o estilo de Euclides e de Arquimedes e referiu-se ao tratado deste sobre a medição do círculo. Descreveu estudos sobre áreas e perímetros de figuras, especialmente poligonais regulares, e volumes de sólidos e suas superfícies. Mostrou que um círculo apresentava uma área maior que um polígono de mesmo perímetro, fazendo uso das conclusões de Arquimedes em relação a área de um círculo. Demonstrou que, em um conjunto de polígonos isoperimétricos, o que tem maior número de lados também tem a maior superfície, e também concluiu, em termos de geometria tridimensional, que para uma dada superfície, a esfera seria o sólido que apresentava a maior área para um dado volume. Morreu na Grécia.

A Lenda de Dido

A princesa Elisa, ou Dido, no século IX a.C., após ter o marido assassinado por seu irmão, ela precisou fugir com seguidores para fundar uma nova cidade. Encontrando um lugar adequado ela negociou com o Rei Jarbas a compra das terras. Ficou acertado que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um touro.



Figura 1: Imagem de Dido e seu povo, cortando o couro de um boi

Ela e seu séquito decidem então cortar a pele em tiras muito finas, e emendá-

las formando uma corda bastante comprida. Assim, eles puderam cercar uma grande quantidade de terras para construir uma nova cidade. Como a região a ser escolhida ficava na beira do mar elas decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado por esta corda. A cidade fundada por Dido recebeu o nome de Cartago (inicialmente Birsa, que significa couro) e ficava no norte da África, na região onde hoje é a Tunísia.



Figura 2: A imagem mostra a forma da cidade original

Ela tinha resolvido o que hoje se chama de problema isoperimétrico. Este relato aparece na Eneida de Virgílio.

Essa mulher extraordinária Dido abriu as portas que estão longe de terminar, brilhou a luz da bela construção matemática.

Entretanto as referências históricas para a solução do problema não se restringem apenas à literatura. Durante a idade média era comum a construção de muros de proteção para as cidades. Ao consultar alguns mapas disponíveis na época, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material. Abaixo apresentamos os mapas das cidades de Paris - França, Colônia - Alemanha e Braga - Portugal, que tinham formatos circulares (Braga) ou semicirculares (Paris e Colônia), quando as cidades eram banhadas por rios.

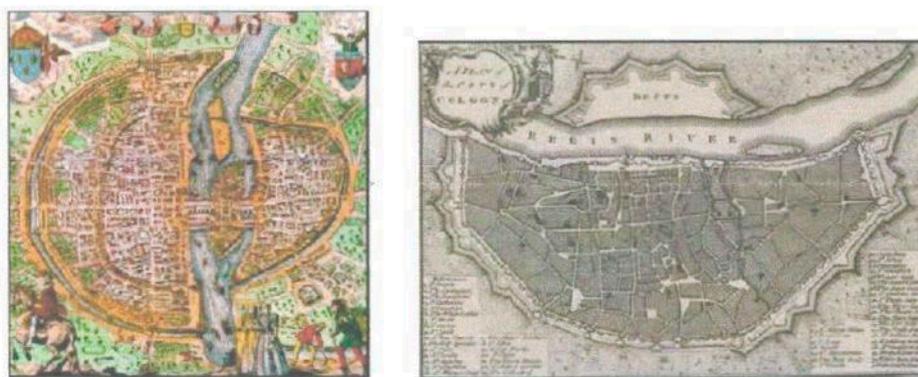


Figura 3: A esquerda o mapa de Paris e a direita o mapa de Colônia



Figura 4: Mapa da cidade de Braga

Problemas Isoperimétricos

Isoperimétricos significa que com o mesmo perímetro. O problema matemático que teve por motivação essa lenda (ver [10]) denota-se por **problema isoperimétrico clássico** e pode ser reformulado da seguinte forma:

Problema: *Dentre as curvas simples fechadas do plano, com um dado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível?*

É notável observar que problemas de enunciados tão simples como estes possam ser tão complexos e tenham sido colocados e resolvidos naqueles tempos míticos (ver [2]). Apesar de terem sido resolvidos naquela altura (com base em intuições geométricas, evidentemente), só muitos séculos depois puderam ser justificados. O estudo do problema isoperimétrico clássico permite estabelecer uma propriedade da circunferência usualmente designada por propriedade isoperimétrica da circunferência.

A primeira demonstração desta propriedade aparece num comentário de Téon (335 – 404 a.C) à obra Almagesto de Ptolomeu (85 – 165 a.C.) e nos trabalhos de

Pappus (290 – 350 a.C), mais o seu autor é Zenodoro (200 – 140 a.C.)¹. Apesar de, nessa época, os gregos terem conhecimento de que a circunferência era a solução do problema isoperimétrico, só a partir de 1880 foi conhecida uma demonstração completa e rigorosa da propriedade isoperimétrica da circunferência, apresentada por Weierstrass (1815 – 1897) nos seus seminários na Universidade de Berlim (ver [9]).

As primeiras abordagens ao estudo do problema isoperimétrico foram obtidas no contexto da Geometria. Zenodoro foi um dos grandes impulsionadores do desenvolvimento do problema, mostrando que, dentre os n -polígonos de comprimento fixo, o n -polígono regular é que tem a maior área (assumindo que n -polígono existe, isto é, supondo que n -polígono podia ser construído com régua e compasso).

Só muitos séculos depois surgiram trabalhos de igual impacto. Clara e inegável é também a importância dos trabalhos de Steiner (1796 – 1863). Steiner apresentou várias demonstrações da propriedade isoperimétrica para a circunferência e para as bolas em espaços euclidianos de dimensão superior, usando, entre outros métodos, a chamada simetrização de Steiner.

Tal como Zenodoro, Steiner e os seus antecessores ignoram o problema da existência de solução, fato mais tarde apontado por Dirichlet (1805 – 1859).

Apesar dos fatos acima expostos, uma demonstração formal amplamente aceita surgiu apenas em 1870, com Weierstrass, época em que houve maior apego dos matemáticos ao conceito de "prova rigorosa". Ela aparece como corolário nos estudos da teoria de "Cálculo das Variações", sendo o problema isoperimétrico, um dos problemas abordados. Outros matemáticos, após Weierstrass obtiveram provas mais concisas do problema, como o alemão Erhard Schmidt, em 1939. Esta demonstração é justamente a apresentada neste trabalho [4], porém uma outra demonstração, proposta por Adolf Hurwitz, em 1902, faz uso essencial das séries de Fourier e pode ser encontrada na referência [1].

¹Zenodoro viveu entre as épocas de Arquimedes (287 – 212 a.C) e Pappus, pois Zenodoro refere Arquimedes e é citado por Pappus

Problema de Heron

Um outro conhecido problema é o de Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C. Dos trabalhos geométricos feito por ele, o mais importante é sua obra *A Métrica* escrita em três livros, e só descoberta em 1896 em Constantinopla, por R. Scahne. No primeiro livro encontra-se a dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados. Heron se interessava por mensuração em todas as formas, na ótica e na mecânica tanto quanto na geodésia. A lei da reflexão da luz já era conhecida por Euclides e Aristóteles, mais foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto e como veremos adiante, o caminho mais curto possível SPE é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais [2].

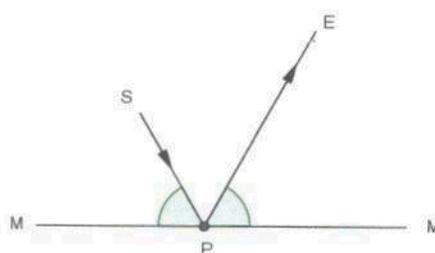


Figura 5: Caminho mais curto da luz para ir de S a E

O estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos é ainda alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são ainda estudadas em diferentes áreas de investigação matemática.

O cálculo das variações tem se desenvolvido muito e tem sido um fator importante para a evolução da geometria diferencial moderna e vários temas em análise funcional. É uma ferramenta essencial na matemática aplicada.

Tendo em conta que o desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos foi acompanhando os progressos obtidos na resolução do problema isoperimétrico, é objetivo do presente trabalho apresentar algumas formulações do problema e as respectivas

soluções.

Neste trabalho temos por objetivo trabalhar com alguns problemas históricos e suas variações. Na resolução desses problemas utilizaremos basicamente métodos geométricos. Na resolução dos problemas faremos uma abordagem sobre a questão da existência de solução (soluções). Apresenta-se a demonstração de Steiner para o Teorema Isoperimétrico que se baseia em conceito de convexidade e simetria. Embora as demonstrações utilizem somente conceitos da Geometria Euclidiana Plana, apresentam construções bastante distintas.

No segundo capítulo realizamos a demonstração da desigualdade isoperimétrica para polígonos, e de posse desse resultado, generalizamos a desigualdade para a curva fechada simples qualquer a prova que apresentaremos é devida a E. Schmidt (1939).

Para finalizar, vamos passar a investigar se, quando a região é triangular (excluir a possibilidade de ser um círculo), há uma inequação análogo de $A \leq \frac{1}{4\pi}l^2$. Faremos uma análise do problema das abelhas que ao construírem suas células como prismas com seções hexagonais maximizam o volume do mel armazenado para uma mesma quantidade de cera utilizada.

Capítulo 1

Problemas Clássicos

Neste capítulo iremos tratar um problema de extremo clássico. Este problema vem da antiguidade. Os matemáticos gregos antigos propuseram esse problema e os resolveram usando as técnicas da Geometria Euclidiana. A questão da existência de solução de um problema deste tipo muitas vezes não era considerada pelos gregos, no entanto, veremos que ela é, em geral, fundamental para as soluções que discutiremos aqui. Para garantimos a existência de solução faremos uso de um argumento de continuidade, qual será abordado neste capítulo. As referências para os estudos realizados neste capítulo são [8], [10] e [13].

1.1 Polígonos

Definição 1.1. *Dado um conjunto de pontos ordenados no plano P_1, P_2, \dots, P_n com $n \geq 3$ tal que três pontos consecutivos não sejam colineares. Denomina-se **polígono** a reunião dos segmentos consecutivos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$.*

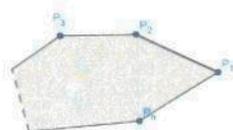


Figura 1.1: Polígono

Os pontos P_i , $1 \leq i \leq n$, são chamados de **vértices** e os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ são os **lados** do polígono. O comprimento do lado denotamos por $\overline{P_iP_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n$, $\overline{P_nP_1}$ ou $\overline{P_1P_n}$. E a soma das medidas dos lados será o **perímetro** do polígono.

Definição 1.2. Um polígono $P_1P_2P_3 \dots P_n$ é **convexo** quando a reta P_iP_{i+1} , determinada por dois vértices consecutivos, deixa os demais pontos do polígono num mesmo semi-plano, dentre os gerados pela reta. Caso contrário dizemos que o polígono é **não convexo**.

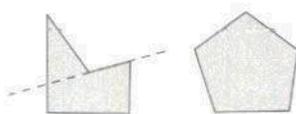


Figura 1.2: Polígono não convexo e Polígono convexo

Um polígono convexo de n lados é denominado n -*ágono* e classificamos os polígonos com respeito ao número de lados por:

nome	n° de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8

nome	n° de lados
eneágono	9
decágono	10
undecágono	11
dodecágono	12
...	...
icoságono	20

Dois polígonos convexos são congruentes, quando é possível coincidir-los por superposição. E têm portanto seus elementos de mesmo nome com medidas respectivamente iguais.

Definição 1.3. Um polígono convexo é **regular** quando seus lados são congruentes e seus ângulos internos são congruentes, caso contrário dizemos que o polígono é **não regular**. Se um polígono convexo tiver apenas seus lados congruentes chamaremos de **polígono equilátero**. E denominaremos de **polígono equiângulo** aqueles que tiverem apenas seus ângulos internos congruentes.

Os polígonos regulares de três e quatro lados são chamados respectivamente de **triângulo nequilátero** e **quadrado** enquanto os demais polígonos acrescentamos a expressão **regular** no seu nome, conforme a tabela.

Definição 1.4. *Uma **curva fechada simples** é um conjunto de pontos que delimitam o plano em duas regiões, uma interna e outra externa a curva. Caso contrário, dizemos que a **curva** é **aberta simples**.*



Figura 1.3: Curva fechada e Curva aberta

Definição 1.5. *Quando qualquer segmento, determinado por dois pontos de uma curva simples, está contido no interior da mesma, dizemos que a **curva** é **convexa**. Caso exista um segmento que esteja contido no exterior da curva dizemos que ela é **não convexa**.*

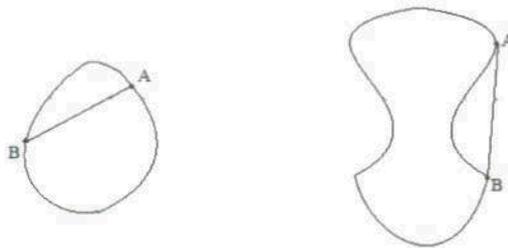
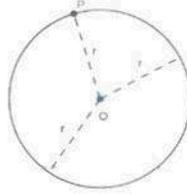


Figura 1.4: Curva convexa e Curva não convexa

Definição 1.6. *Círculo ou circunferência de centro O pertence ao plano, é o conjunto de pontos P do plano tais que a distância de P até O é constante, igual a r , denominado de raio.*

Figura 1.5: Circunferência de centro O e raio r

Definição 1.7. Um polígono convexo está **inscrito** numa circunferência quando seus vértices também são pontos da circunferência.

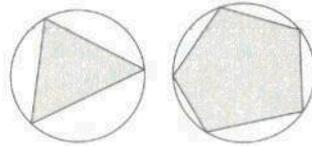


Figura 1.6: Polígonos inscritos

Definição 1.8. A mediatriz do lado AB de um triângulo ABC é uma reta r perpendicular a reta AB que passa pelo ponto médio M de AB .

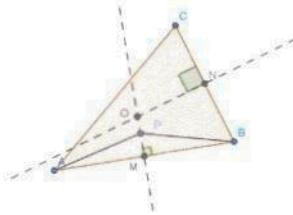


Figura 1.7: Mediatriz no triângulo

Note que qualquer ponto P pertencente a mediatriz AB está a mesma distância dos vértices A e B , pois os triângulos retângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LAL , logo $\overline{PA} = \overline{PB}$. Essa observação também vale para as mediatrizes dos demais lados do triângulo e dizemos que o ponto P pertence a mediatriz é equidistante aos vértices do lado correspondente. Outra característica importante é que as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram num único ponto denominado circuncentro.

1.2 Argumento de Continuidade

O argumento de continuidade, de forma intuitiva, pode ser enunciado da seguinte maneira: "Se uma certa grandeza (perímetro, área ou um ângulo), que depende de um outro valor (um lado, uma altura etc) que varia continuamente entre dois números (todos números reais), também varia de forma contínua em relação aquele valor, então esta grandeza pode assumir um valor máximo e/ou um valor mínimo". Mais especificamente, se uma certa grandeza varia de um valor próximo a zero crescendo, e depois decrescendo novamente, então ela deve passar por um valor máximo. Se uma certa grandeza varia de um "valor grande", decresce a volta a crescer, então ela deve passar por um mínimo. E assim há outras argumentações deste tipo.

Estes argumentos estão fundamentados de forma precisa em resultados do cálculo relativos a funções contínuas que são meras aplicações do teorema de Weierstrass:

Teorema 1.1. *(Teorema de Weierstrass) Seja f uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada e assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$.*

Demonstração. Ver [8] □

Corolário 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Então f assume um mínimo absoluto em algum x real.*

Demonstração. Ver [8] □

Uma generalização do Teorema (1.1) que será utilizada no argumento de continuidade para problemas isoperimétricos é o seguinte:

Teorema 1.2. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado limitado. Então f atinge um máximo e um mínimo em D .*

Demonstração. Ver [8] □

1.3 Problemas de Heron

O problema de otimização de Heron foi apresentado pela primeira vez pelo matemático Heron de Alexandria (10 – 75 d.C.) na *Catoptrica* de Euclides em *On Mirrors*.

Problema 1.1. (Heron) *Sejam uma reta l e dois pontos P e Q no mesmo lado de l . Achar um ponto R sobre l de tal forma que a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ seja mínima, ou seja, qual o caminho mais curto de P a Q tocando l ?*

Solução do Problema de Heron

Pelo argumento de continuidade percebe-se que o problema tem solução. Ou seja, se o ponto R estiver "infinitamente à direita" na reta l , podemos perceber que a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é muito grande. Se deslocarmos o ponto R para a esquerda em l , podemos perceber que a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$, variando continuamente, diminui e torna-se novamente muito grande quando estiver "infinitamente à esquerda" em l . Portanto, a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ passa por (pelo menos) um ponto em que ela é mínima. Logo o problema tem solução.

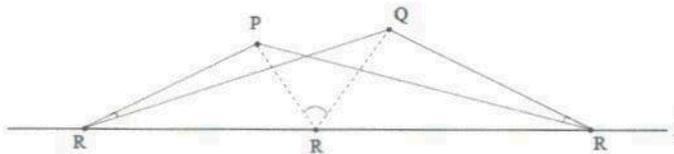


Figura 1.8: Análise da existência da solução

Para encontrar a solução do problema de Heron, basta refletirmos o ponto P em l (simétrico de P em relação a reta l) obtendo o ponto P' , de modo que a reta l seja a mediatriz do segmento PP' . Traçando a reta $P'Q$, percebemos que esta corta a reta l no ponto R . Agora é necessário provar que $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é o menor caminho de P a Q tocando em l . Escolhemos arbitrariamente um ponto R' sobre l . Vejamos que, se $R \neq R'$ então $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é menor do que $\overline{PR'} + \overline{R'Q}$.

Notemos que $\overline{PR} = \overline{P'R}$ e $\overline{PR'} = \overline{P'R'}$ portanto, $\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{P'R} + \overline{RQ} = \overline{P'Q}$ e $\overline{PR'} + \overline{R'Q} = \overline{P'R'} + \overline{R'Q}$. Analisando o triângulo $P'R'Q$, podemos observar que a soma $\overline{P'R'} + \overline{R'Q}$ é maior do que $\overline{P'Q}$ pela desigualdade triangular: em todo triângulo cada

lado é menor que a soma dos outros dois. Logo $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é o menor caminho de P a Q tocando l (a resolução seria análoga se refletíssemos o ponto Q no lugar de P , obtendo o mesmo ponto R). Note que a solução é única pois, como vimos anteriormente, o ponto R fornece a menor soma $\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{P'Q}$ em relação a qualquer outro ponto R' em l .

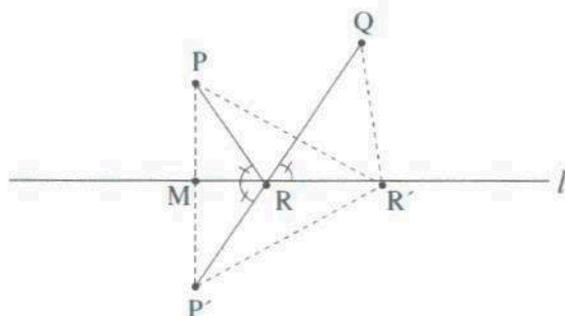


Figura 1.9: Solução do problema de Heron

Note ainda, que se a reta que passa por P e Q for perpendicular à reta l , a menor soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é dada pelos segmentos, PR e RQ perpendiculares a l , ou seja, o ponto R está situado no pé da reta perpendicular à reta l que passa por P e Q . Se a reta que passa por P e Q for paralela à reta l então é fácil ver que $\overline{PR} = \overline{RQ}$.

Observemos que as medidas $P\hat{R}M$, $P'\hat{R}M$, $Q\hat{R}R'$, são iguais pois, os ângulos $\angle P'RM$ e $\angle QRR'$ são opostos pelo vértice (dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro) e portanto $P'\hat{R}M = Q\hat{R}R'$, e como l é mediatriz do segmento de reta PP' , temos que $P\hat{R}M = P'\hat{R}M$. Logo $P\hat{R}M = P'\hat{R}M = Q\hat{R}R'$, ou seja, R é o ponto tal que PR e QR formam ângulos iguais com l .

Observação 1.1. Heron pensou em l como um espelho e considerou que a menor distância entre P e Q coincide com o caminho atravessado por um raio de luz emitido de P e observado de Q , deduzindo que quando a luz é refletida num espelho, a amplitude do ângulo de incidência ϕ_1 é igual à amplitude do ângulo de reflexão ϕ_2 , sendo os ângulos formados por $[PR]$ e $[QR]$ com a perpendicular a l em R (figura 1.10). Estes estudos permitiram investigar as leis da reflexão da luz e obter propriedades dos espelhos.

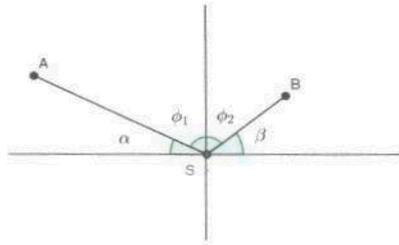


Figura 1.10: Ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão

Variação do Problema de Heron

Problema 1.2. *Sejam dados a área S e um lado de um triângulo ABC . Encontrar entre todos os triângulos aquele que tem a soma mínima dos outros dois lados (ou seja, o perímetro mínimo).*

Solução

Seja AB o lado do triângulo. Como a área S é dada então a sua altura h é dada por $h = \frac{2S}{AB}$. Escolher um lado e a área de um triângulo é equivalente a escolher o lado e a altura sobre esse lado. Então o problema consiste em encontrar um ponto C de tal forma que a distância de C ao segmento AB seja igual a altura h dada (dada a reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto C , temos que a distância do ponto C ao ponto de intersecção da reta com o segmento deve ser igual a altura), e tal que a soma dos lados $\overline{AC} + \overline{CB}$ seja a menor possível. Portanto o ponto C deve estar sobre a reta l paralela ao segmento AB e a distância h deste segmento. A solução deste problema é dada da mesma forma da solução do problema de Heron. Basta então, refletir o ponto A em relação a l , obtendo assim o ponto simétrico A' .

Traçando a reta que passa pelos pontos A' e B podemos observar que esta corta a reta l em um ponto C , o qual fornece a menor soma $\overline{AC} + \overline{CB}$. Notemos ainda que a reta que passa pelos pontos A' e A corta a reta l em um ponto M , tal que $\overline{A'M} = \overline{AM}$ (M é o ponto médio do segmento $A'A$). Então, como l é paralela a AB , l cruza o segmento $A'B$ em seu ponto médio (que é C). Portanto temos que $\overline{A'C} = \overline{BC}$. Mas $\overline{A'C} = \overline{AC}$, logo $\overline{AC} = \overline{BC}$, formando assim um triângulo isósceles. Este é o caso especial do problema de Heron em que os pontos estão a uma mesma distância da reta.

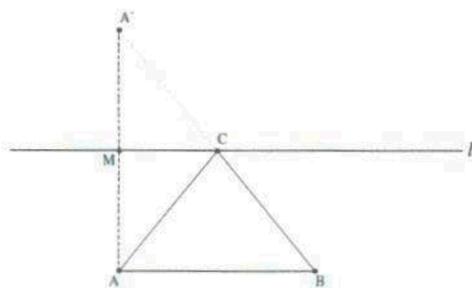


Figura 1.11: $\overline{AC} + \overline{CB}$ mínima

Problema 1.3. *Sejam dados um lado de um triângulo e a soma dos outros dois lados desse triângulo. Encontrar entre todos os triângulos o de área máxima.*

Solução

Seja AB , o lado dado do triângulo ABC e seja k a soma dos outros dois lados: $\overline{AC} + \overline{CB} = k$. Queremos encontrar o triângulo ABC de área máxima. O lugar geométrico de todos os pontos C para os quais a soma $\overline{AC} + \overline{CB}$ é dada, é a elipse, com focos em A e B com medida do eixo maior igual á soma $\overline{AC} + \overline{CB}$. Agora, precisamos encontrar em que lugar da elipse C deve estar de modo que a área do triângulo ABC seja máxima. Esta área máxima é alcançada quando a altura for máxima. A altura máxima é obtida quando ela for a metade do eixo menor, ou seja, a reta perpendicular ao centro O da elipse corta a elipse em um ponto C , fornecendo a maior altura \overline{OC} .

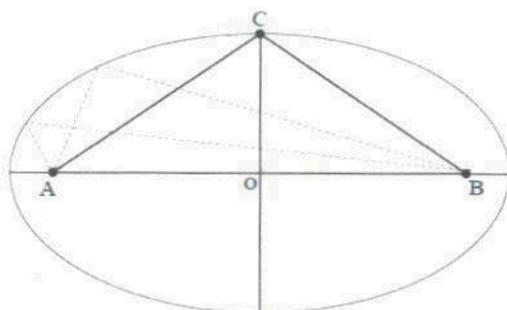


Figura 1.12: O triângulo ABC tem área máxima

Como o ponto C está sobre a reta perpendicular à origem, então $\overline{AO} = \overline{BO}$, ou seja, O é o ponto médio do segmento AB . Portanto $\overline{AC} = \overline{CB}$ e o triângulo procurado é o triângulo isósceles.

Este problema também pode ser resolvido alternativamente sem o uso da elipse utilizando apenas o problema (1.2) (o problema (1.3) é o "dual" do problema (1.2))

no seguinte sentido: em ambos os problemas temos a base dos triângulos fixadas; no problema (1.2) a área é dada e o perímetro deve ser mínimo; no problema (1.3) o perímetro é dado e a área deve ser máxima).

Consideremos então o triângulo isósceles ABC , com $\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{k}{2}$. Seja l a reta paralela ao segmento AB passando por C .

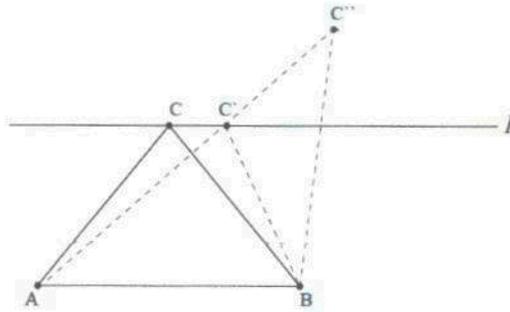


Figura 1.13: $\overline{AC''} + \overline{C''B} > \overline{AC'} + \overline{C'B} > \overline{AC} + \overline{BC}$

Para qualquer ponto $C \neq C'$ em l teremos $\overline{AC'} + \overline{C'B} > \overline{AC} + \overline{BC}$ (veja problema (1.2)). Para qualquer ponto C'' acima de l (ou seja, tal que C'' e AB estejam em semiplanos distintos em relação à reta l) também teremos $\overline{AC''} + \overline{C''B} = \overline{AC'} + \overline{C'C''} + \overline{C''B} > \overline{AC'} + \overline{C'B} > \overline{AC} + \overline{BC}$. Logo, somente abaixo da reta l podemos ter outros pontos D tais que $\overline{AD} + \overline{DB} = k$, mas então a área do triângulo ABD será menor do que a área de triângulo ABC . Logo, o triângulo ABC tem área máxima com perímetro dado.

1.4 Problema de Dido

Problema 1.4. *Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L encontrar aquela que engloba maior área*

Solução de Steiner

A solução do problema de Dido foi feita em 1836 pelo matemático Jacob Steiner. Steiner provou que a circunferência encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado.

A demonstração de Steiner parte da hipótese de que a solução do problema existe, supondo que a curva C com comprimento L seja a solução do problema. Steiner provou

inicialmente que a curva C procurada deve ser convexa, no sentido de que ela delimita uma região convexa (qualquer segmento de reta unindo dois pontos quaisquer da região deve estar inteiramente contido na região - a curva C incluída na região).

Suponhamos que a curva C não seja convexa, ou seja, possui uma reentrância σ entre dois pontos quaisquer A e B sobre C . Mais exatamente, se C não é convexa então existem dois pontos A e B de C tais que nenhum ponto de segmento AB (exceto A e B) está na região delimitada por C . Fazendo a reflexão da reentrância σ em relação à reta AB , obtém-se o arco σ' que forma juntamente com o resto do arco AB uma curva de mesmo comprimento L que engloba maior área que a curva C inicial. Isto contradiz a suposição inicial de que C englobaria a maior área para uma curva fechada de comprimento L . Portanto, a curva C procurada deve ser convexa.

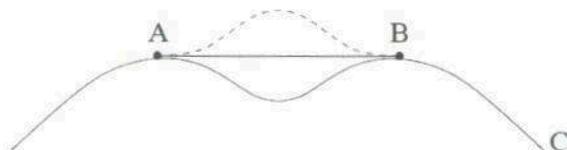


Figura 1.14: A figura convexa tem área maior

Considere agora, dois pontos A e B sobre a curva C (de comprimento L), de modo que eles dividam a curva em dois arcos com o mesmo comprimento $\frac{L}{2}$ (é sempre possível, partindo de um ponto A na curva, encontrar um outro ponto B nesta mesma curva tal que eles dividam a curva em duas curvas de mesmo comprimento; a justificativa para isso é vista com maior rigor utilizando a noção de comprimento de arco visto em cálculo). Então a reta que passa pelos pontos A e B divide a área da curva em duas partes de mesma área pois, caso contrário, se uma das partes tivesse área maior, refletindo tal parte em relação à reta AB , obteríamos uma outra curva C' com o mesmo comprimento de C , só que englobando maior área do que C .

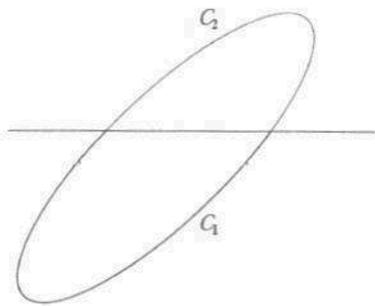


Figura 1.15: $C = C_1 \cup C_2$

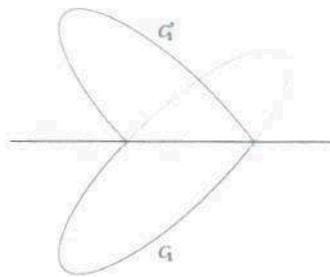


Figura 1.16: $C' = C_1 \cup C_1'$

Considerando então apenas metade da solução (pois, as duas partes possuem mesma área e mesmo comprimento), o que queremos é encontrar o arco de comprimento $\frac{L}{2}$ delimitado pela reta AB , que encerra maior área entre o arco e a reta. Se encontramos a solução da metade do problema teremos encontrado a solução completa para o problema de Dido.

Seja P um ponto qualquer sobre o arco \widehat{AB} . Fixado o ponto P de maneira que os segmentos AP e BP não se alterem e de maneira que os arcos C_1 e C_2 também não se alterem (ou seja, de modo que as regiões R_1 e R_2 não se alterem - ver figura), e se variarmos o ângulo $\angle APB$, então o comprimento do arco APB não se alterará (igual a $\frac{L}{2}$) mas a área englobada por ele e pelo segmento AB variará.

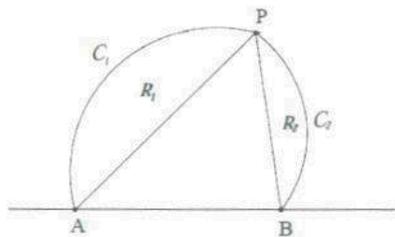


Figura 1.17: Análise do problema

Para obtermos a curva APB que engloba a maior área, basta encontrarmos o triângulo de maior área inscrito nela. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , portanto $0^\circ < \widehat{APB} < 180^\circ$, se \widehat{APB} for 0° ou 180° a área do triângulo APB irá se degenerar (área zero).

Variação do Problema de Dido

Problema 1.5. Cercar a região de área máxima delimita por uma reta m e por um arco de comprimento L , cujas extremidades devem estar sobre esta reta.

Solução

Dada um reta m assumindo a existência da solução do problema, consideramos a curva C de comprimento L , com extremidade sobre m , que maximiza a área. Para resolvermos este problema teremos apenas que refletir a curva C em relação à reta m , obtendo uma nova curva fechada de comprimento $2L$. Da solução do problema de Dido, sabemos que entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento $2L$ aquela que engloba a maior área é a circunferência. Portanto a região de área máxima é a metade da solução do problema de Dido, que é a semicircunferência de comprimento L .

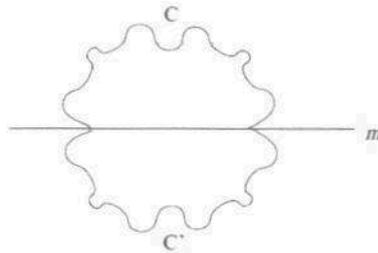


Figura 1.21: Curva de comprimento $2L$

1.5 Problemas Isoperimétricos

Problema 1.6. Entre todos os triângulos de perímetro dado qual o que possui área máxima?

Solução

Pelo argumento de continuidade podemos perceber que o problema tem solução. Fixado o perímetro consideremos todas as possíveis bases do triângulos isósceles (porque os triângulos isósceles são os que tem a maior área, fixados a base e o perímetro - ver problema (1.3) da seção 1.3). Ou seja, podemos partir de uma base muito pequena e teremos um certa altura do triângulo isósceles em relação a essa base (a altura não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado), e neste caso a área estará próximo a zero. No início, à medida que aumentarmos a base (a altura diminuindo),

a área aumentará. Depois, quando a altura se aproxima de zero, a base não sendo maior do que a metade do perímetro dado pois, pela desigualdade triangular a soma de dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro lado, e a área estará novamente próxima de zero. Portanto, podemos perceber que este triângulo de perímetro dado alcança uma área máxima com uma determinada base.

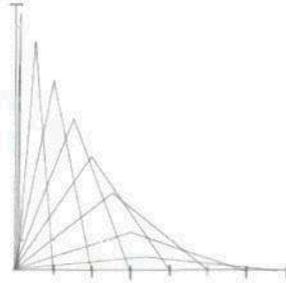


Figura 1.22: Análise de existência da solução

Seja ABC o triângulo solução. Se fixamos inicialmente com base o lado AB e a soma dos outros dois lados desse triângulo estará fixada. O que tem área máxima é o triângulo isósceles, como vimos anteriormente, e então temos que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

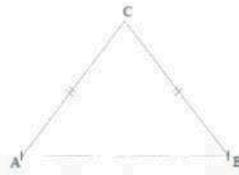


Figura 1.23: $\overline{AC} = \overline{BC}$

Agora se olharmos o triângulo ABC , considerando a base do lado BC , a soma dos outros dois lados estará fixada. O triângulo que tem a maior área continua sendo isósceles, logo temos que $\overline{AB} = \overline{AC}$

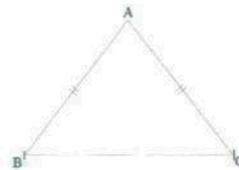


Figura 1.24: $\overline{AB} = \overline{AC}$

Portanto podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, ou seja, os lados do triângulos são todos iguais. Logo entre todos os triângulo de perímetro dado o que engloba a

maior área é o triângulo equilátero.

Problema 1.7. *Entre todos os retângulos de perímetro dado qual possui área máxima?*

Solução

Inicialmente iremos analisar se o problema tem solução. Partindo de uma base muito pequena teremos uma certa altura em relação a essa base (o retângulo irá se degenerar quando tivermos a base igual a zero e a altura á metade do perímetro dado). À medida que formos aumentando a base podemos perceber que a altura em relação a essa base diminui (a base não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado e a altura ficará próxima de zero, ou seja, a área do retângulo estará próxima a zero). Pelo argumento de continuidade percebemos que a área do retângulo começa muito pequena, vai aumentando e torna-se novamente muito pequena, ou seja, passa por uma base onde atinge a área máxima, e portanto o problema tem solução.

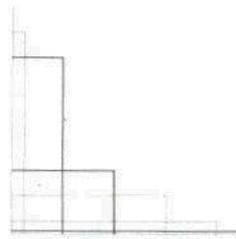


Figura 1.25: Análise da existência da solução

A área S de um retângulo pode ser calculada pelo produto da base pela altura. Suponhamos que o semi-perímetro dado seja $p = x + y$, então $S = xy$. O que queremos é maximizar a área S . Então usando média geométrica podemos calcular este produto geometricamente de uma forma bastante simples. Sejam $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = y$ as medidas de dois segmentos de reta. O segmento de reta que representa o semi-perímetro é dada pela junção dos segmentos de medida x e y , ou seja, $p = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Obtendo o ponto médio O do segmento AB e com um compasso centrado em O e raio $\frac{\overline{AB}}{2}$, tracemos um semicircunferência. O segmento vertical traçado para cima partir de C encontrará um ponto D na semicircunferência. A medida do segmento CD corresponde à média geométrica das medidas dos segmentos AC e CB , ou seja, \overline{CD}^2 representa geometricamente a área do retângulo. Teremos a maior média geométrica (maior área) quando CD for igual ao raio da semicircunferência e neste caso $\overline{AC} = \overline{CB}$. Portanto

teremos área máxima quando $x = y$, o que nos leva a concluir que o retângulo de perímetro dado que tem área máxima é o quadrado (figura 1.26).

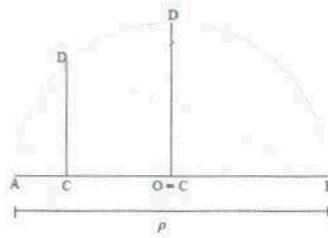


Figura 1.26: Média geométrica: $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}$

Partindo-se do quadrado com perímetro igual ao perímetro dado, pode-se mostrar que qualquer outro retângulo do mesmo perímetro tem área menor que a área deste quadrado. Então consideremos que o quadrado $ABCD$ tenha o perímetro dado. Inicialmente, iremos traçar o segmento EF , com extremidade E no lado AD e a extremidade F no lado BC , paralelo aos lados AB e CD do quadrado. Agora se transferirmos os segmentos AE e BF como continuação dos segmentos EF e DC respectivamente, obtemos segmentos EG e DH sendo,

$$\begin{aligned} \overline{EG} &= \overline{EF} + \overline{FG} = \overline{AB} + \overline{AE} \text{ e} \\ \overline{DH} &= \overline{DC} + \overline{CH} = \overline{DC} + \overline{BF} \quad (\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{FG} = \overline{CH}) \end{aligned}$$

Agora, se traçarmos o segmento GH podemos perceber que $\overline{GH} = \overline{CF}$

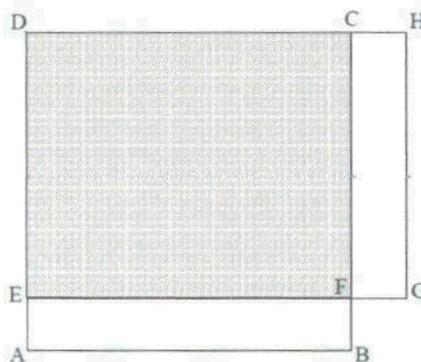


Figura I.27: O quadrado é o retângulo de área máxima

O perímetro do quadrado $ABCD$ é igual ao perímetro do retângulo $EGHD$, mais a área do quadrado é maior que a do retângulo. Vejamos por que. A área do retângulo $EFCD$ é comum a ambos, mas a área do retângulo $ABFE$ (incluído no quadrado

$ABCD$) é maior que a área do retângulo $FGHC$ (incluído no retângulo $EGHD$) pois,

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{FG} = \overline{CH} \text{ e}$$

$$\overline{AB} = \overline{EF} > \overline{GH} = \overline{CF} = \overline{CB} - \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{FB}.$$

Analogamente, podemos tomar E em DC e F em AB e prolongamos DA e EF obtendo um triângulo de mesmo perímetro do quadrado $ABCD$, porém com área menor. Portanto o quadrado $ABCD$ é o retângulo de perímetro dado que engloba a maior área.

Problema 1.8. *Entre todos os quadriláteros de perímetro dado qual o que possui área máxima?*

Solução

Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer de perímetro dado. Traçando o segmento BD , podemos observar que este divide o quadrilátero em dois triângulos BAD e BCD . A soma das áreas dos triângulos é igual a área do quadrilátero. Então podemos analisar o triângulo BAD , o lado \overline{BD} é fixo e a soma $\overline{AB} + \overline{AD}$ é constante. Do problema (1.3) da seção 1.3 temos que dado um lado e a soma dos outros dois lados de um triângulo, o triângulo que possui área máxima é o isósceles. Seja então A' tal que $\overline{A'B} + \overline{A'D} = \overline{AB} + \overline{AD}$ e $\overline{A'B} = \overline{A'D}$, e seja C' tal que $\overline{C'B} + \overline{C'D} = \overline{CB} + \overline{CD}$ e $\overline{C'D} = \overline{C'B}$.

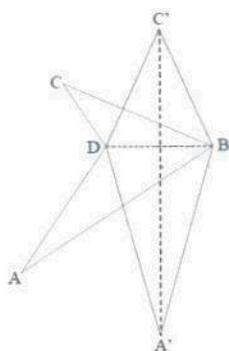


Figura 1.28: $\overline{A'B} = \overline{A'D}$ e $\overline{C'D} = \overline{C'B}$

Agora, temos um novo quadrilátero $A'BC'D$ de perímetro igual ao perímetro do quadrilátero $ABCD$ mas com área maior ou igual (se $A = A'$ e $C = C'$ teremos a igualdade) à daquele quadrilátero. Traçando agora, o segmento $A'C'$ percebemos que

ele divide o novo quadrilátero em dois outros triângulos $A'DC'$ e $A'BC'$, o lado $A'C'$ é fixo para ambos e $\overline{A'D} + \overline{C'D} = \overline{A'B} + \overline{C'B}$. Escolhendo agora pontos D' e B' tais que $\overline{A'D'} + \overline{C'D'} = \overline{A'D} + \overline{C'D}$ com $\overline{A'D'} = \overline{C'D'}$, e ainda $\overline{A'B'} + \overline{C'B'} = \overline{A'B} + \overline{C'B}$ com $\overline{A'B'} = \overline{C'B'}$, teremos um outro quadrilátero $A'B'C'D'$, de perímetro igual ao perímetro dos outros dois anteriores, e tal que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'}$ e com área maior ou igual à área de $A'BC'D$.

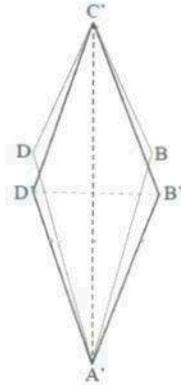


Figura 1.29: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'}$

O quadrilátero que possui os quatro lados iguais é o losango. Vamos agora mostrar que o quadrado é o losango que encerra a maior área para o quadrilátero de perímetro dado.

Podemos ver na figura, que o quadrado encerra a maior área entre todos os losangos de perímetro dado.

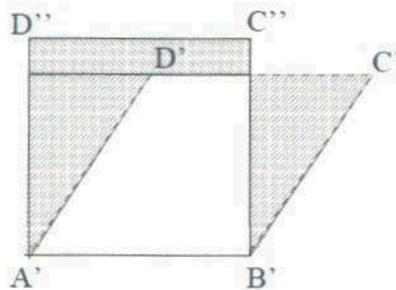


Figura 1.30: O quadrado é o losango de maior área

De fato, temos o quadrilátero $A'B'C'D'$ e o quadrado $A'B'C''D''$, os dois com o mesmo perímetro. Podemos fazer a comparação deste dois quadriláteros, ou seja, as áreas hachuradas dos triângulos na figura são iguais. O quadrado possui área maior

pois, a área total do quadrado é a área do losango mais a área do retângulo hachurado na figura. Portanto o quadrado é o quadrilátero de perímetro dado que possui a maior área.

Problema 1.9. *Entre todos os polígonos de n lados e perímetro fixado l , o que tem maior área é o polígono regular.*

Solução

A existência deste problema é consequência do teorema (1.2) da seção (1.2) pois, a área é uma função contínua de $2n$ variáveis (as coordenadas dos n vértices) sujeita à restrição de que o polígono tenha perímetro fixado (e isto restringe o domínio a um conjunto fechado e limitado em \mathbb{R}^{2n}).

Inicialmente provamos que o polígono solução é equilátero, ou seja, todos os lados têm o mesmo comprimento. Suponha que isso não ocorre. Então existem dois lados consecutivos de medidas distintas, digamos $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Mas então, substituindo o ponto B por um ponto B' tal que $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ com $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$ teremos que a área do triângulo $AB'C$ será maior do que a área do triângulo ABC (veja problema (1.3) na seção 1.3), e obtemos um novo polígono com área maior do que o polígono original, o que contradiz o fato de que ele teria área máxima.

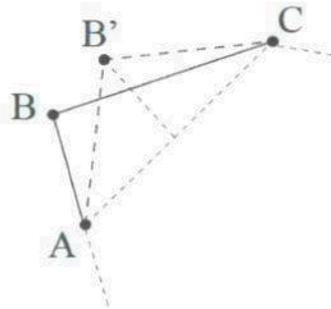


Figura 1.31: $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Agora vamos provar que o polígono solução é equiângulo. Suponhamos que n seja par, ou seja, $n = 2k$. Então, se A_1, A_2, \dots, A_{2k} são os vértices do polígono, a reta A_1A_k dividirá o polígono em duas partes de mesma área (caso contrário, poderíamos refletir a parte da área maior na reta A_1A_k e obter um polígono de área maior). Vamos então analisar uma dessas partes.

Considere então qualquer vértices A_j entre A_1 e A_k . Então $A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$, caso contrário poderíamos modificar este ângulo até 90° (mantendo as partes entre A_1 e A_j , e A_j e A_k inalteradas - exatamente como na argumentação do problema de Dido) obtendo então uma área maior para a metade do polígono, e que contradiria o fato do polígono original ser a solução.

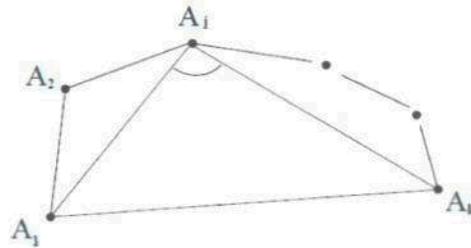


Figura 1.32: $A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$

Logo, como $A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$ para todo $1 < j < k$, e teremos que o polígono solução terá que ser, necessariamente inscrito em uma circunferência e, como ele é equilátero, ele deve ser regular. Portanto, se n é par, só existe um polígono de perímetro dado e área máxima: o polígono regular.

Suponha agora que n seja ímpar. Seja P o polígono de n lados com perímetro l , que é a solução do problema e suponha que P não seja equiângulo, ou seja, possui 2 ângulos internos adjacentes distintos. Seja P_n o polígono regular de n lados e perímetro l . Construamos sobre P_n o polígono regular de $2n$ lados inscrito no mesmo círculo que circunscreve P_n . Chamemos de P_{2n} tal polígono que terá um perímetro $l' > l$. Pela argumentação anterior, este é o único polígono de $2n$ lados e, de perímetro l' e área máxima. Observe que, ligando 2 vértices alternados de P_{2n} , obtemos uma diagonal que é igual aos lados de P_n (e de P). Agora, se a área de P_n for menor ou igual à área de P , então recortando os n triângulos formados por 2 lados consecutivos de P_{2n} e pela diagonal de vértices alternados, e colando-os sobre os lados de P , obteríamos um polígono de $2n$ lados com perímetro l' mas não regular, e com área maior ou igual à área de P_{2n} . Mais isto é uma contradição já que P_{2n} é o único polígono de $2n$ lados e perímetro l' de área máxima. Assim termina a prova de que o polígono de n lados e perímetro l dado deve ser o polígono regular.

Capítulo 2

A Desigualdade Isoperimétrica

Neste capítulo demonstraremos a desigualdade isoperimétrica para polígonos, utilizando elementos de cálculo diferencial e algumas fórmulas trigonométricas. E finalmente provaremos a desigualdade isoperimétrica utilizando geometria diferencial. As referências para os estudos realizados neste capítulo são [3], [5], [11] e [15].

2.1 Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos

A desigualdade para polígonos, pode ser demonstrada utilizando elementos de cálculo diferencial e algumas fórmulas trigonométricas. A demonstração envolve conceitos de cálculo normalmente ensinados no primeiro ano de cursos superiores.

A solução clássica associada a polígonos regulares isoperimétricos é consequência imediata de dois fatos geométricos simples:

- (1) A área é função estritamente crescente do número de lados;
- (2) O círculo é o polígono limite quando o número de lados tende ao infinito.

De (1) e (2) temos que, dado o perímetro, o círculo é, no limite, o "polígono regular" que encerra a maior área.

Uma solução clássica

Consideremos um polígono regular convexo de n lados, com perímetro fixo $2p$ e sejam l_n o comprimento de um lado, a_n o comprimento de seu apótema e 0 o seu

centro.

Para deduzirmos a expressão da área $A(n)$ do polígono em função do número n de lados, consideremos o n -polígono regular da figura (2.1).

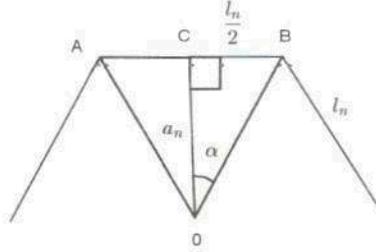


Figura 2.1:

Observe que $\overline{BC} = \frac{l_n}{2}$, $\overline{OC} = a_n$ e $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

Considerando o triângulo OCB temos:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{l_n}{2}}{a_n} = \frac{l_n}{2a_n}.$$

Então

$$a_n = \frac{l_n}{2 \tan \alpha}.$$

Visto que $\alpha = \frac{\pi}{n}$, temos

$$a_n = \frac{\frac{l_n}{2}}{\tan \left(\frac{\pi}{n} \right)}.$$

Sabemos também que $2p = nl_n$, assim

$$\frac{p}{n} = \frac{l_n}{2}.$$

Assim,

$$a_n = \frac{\frac{p}{n}}{\tan \left(\frac{\pi}{n} \right)}.$$

A área do triângulo é igual a $A = \frac{l_n}{2} a_n$.

Portanto, a área $A(n)$ do n -polígono é

$$A(n) = n \frac{l_n}{2} a_n.$$

Substituindo-se a_n e l_n , temos

$$A(n) = \frac{p^2}{n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)}.$$

Seja $(x_x)_n = (n \tan(\frac{\pi}{n}))$ uma sequência de números reais com n natural e $n \geq 3$. Observe a tabela e veja o que acontece com a sequência quando n se torna suficientemente grande, ou seja, $n \rightarrow \infty$.

n	$n \tan(\frac{\pi}{n})$
3	5,19615 ...
4	4
10	3,24919 ...
100	3,14562 ...
1000	3,14160 ...
2000	3,14159 ...
10000	3,14159 ...
100000	3,14159 ...

A partir de $n = 100$ a sequência $(x_n)_n$ se aproxima de π com duas decimais. E observe que a partir de $n = 2000$ a sequência se aproxima cada vez mais de π com erro inferior a 10^{-6} .

Analisando a tabela acima, vemos que a sequência $(x_n)_n$ é decrescente e utilizando uma linguagem formal da Matemática podemos escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = \pi.$$

Como

$$n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) = \pi \frac{\tan \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}},$$

fazendo

$$\frac{\pi}{n} = t$$

temos que

$$\pi \frac{\tan \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi \frac{\tan t}{t} = \pi \frac{\text{sen } t}{t} \frac{1}{\text{cos } t}.$$

Pelo limite fundamental do Cálculo, vem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

e sabendo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\text{cos } t} = 1$$

podemos garantir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = \pi.$$

O gráfico da sequência $(x_n)_n = \left(n \cdot \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)_n$ é:

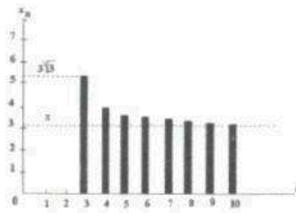


Figura 2.2:

Pelo gráfico temos que:

$$\begin{aligned} \pi &\leq n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \leq 3\sqrt{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)} \leq \frac{1}{\pi} \\ \frac{p^2}{3\sqrt{3}} &\leq \frac{p^2}{n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)} \leq \frac{p^2}{\pi} \\ \frac{p^2}{3\sqrt{3}} &\leq A(n) \leq \frac{p^2}{\pi}. \end{aligned}$$

Temos então que a área máxima de um polígono regular é $\frac{p^2}{\pi}$.

Da relação

$$A(n) \leq \frac{p^2}{\pi}$$

podemos escrever

$$\pi \leq p^2$$

e portanto

$$4\pi A(n) \leq 4p^2 = (2p)^2,$$

ou seja,

$$A(n) \leq \frac{(2p)^2}{4\pi}$$

que é conhecida por **Desigualdade Isoperimétrica para polígonos**.

2.2 Curvas Parametrizadas Diferenciável

Intuitivamente, gostaríamos de pensar em uma curva no plano como um subconjunto que tenha dimensão igual a 1, por exemplo, o gráfico de funções de uma variável real ou figuras "desenhadas" com um único traço, sem tirar o lápis do papel. Uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano.

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ onde as funções $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$ (ver figura (2.3)).*

O traço de α é a imagem da aplicação α :

Traço $(\alpha) = \text{Im}(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$.

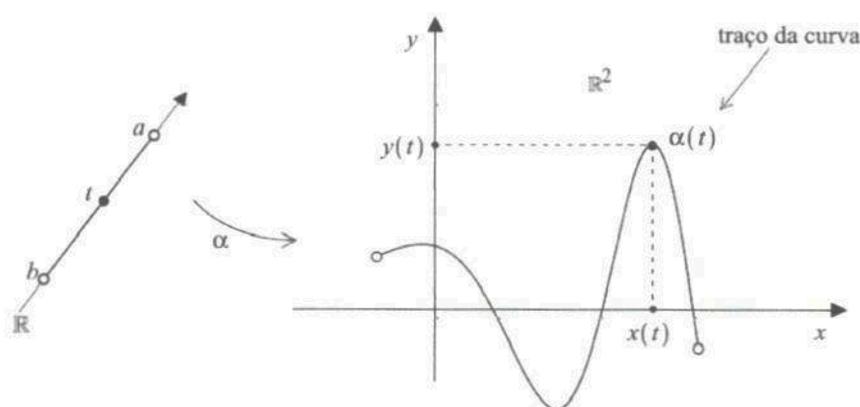


Figura 2.3: Curva Parametrizada diferenciável

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$

são diferenciáveis de classe C^∞ . Neste trabalho iremos denotar curva parametrizada diferenciável como curva parametrizada.

Veamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1. A aplicação $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in (0, 2\pi),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é uma circunferência de centro na origem de raio igual a 1, menos um ponto. (ver figura (2.4)).

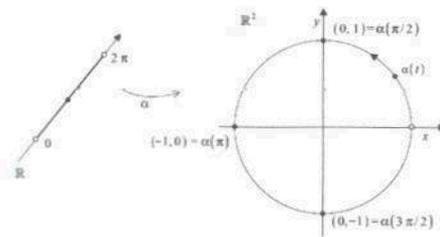


Figura 2.4: Circunferência

Exemplo 2.2. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

não é uma curva parametrizada já que $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. Porém a restrição de α , a qualquer intervalo que não contém o ponto $t = 0$, é uma curva parametrizada (ver figura (2.5))

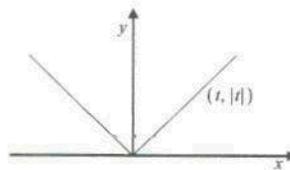


Figura 2.5: Módulo

Definição 2.2. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Do Cálculo Diferencial temos que

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado vetor tangente a α em t .

Definição 2.3. Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se para todo $t \in I, \alpha'(t) \neq (0, 0)$.

Definição 2.4. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}, \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞), cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Podemos então considerar uma nova curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva β é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , chamada a reparametrização de α por h . A função h é dita mudança de parâmetro (ver figura (2.6)). Pela regra da cadeia, temos que

$$\beta'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)),$$

ou ainda

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t).$$

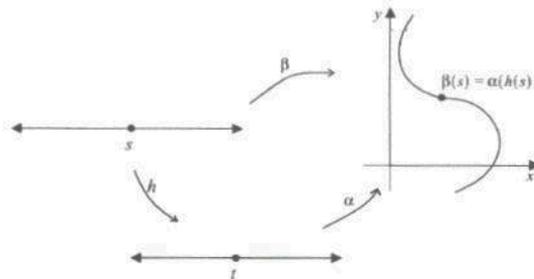


Figura 2.6: Reparametrização de α por h

Definição 2.5. A orientação de uma curva regular plana α é o sentido de percurso do traço de α , (ver figura (2.7)).

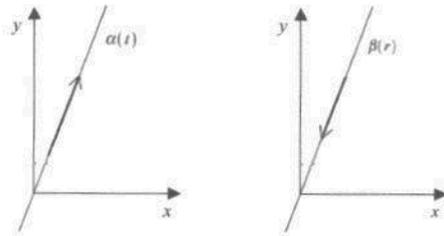


Figura 2.7: Orientação oposta

Definição 2.6. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 pontos do intervalo I : A aplicação*

$$S(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

é denominada a função comprimento de arco da curva α a parti de t_0 . Esta função é diferenciável de classe C^∞ , pois α é uma curva regular.

Proposição 2.1. *Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se, e somente se, para todo $t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.*

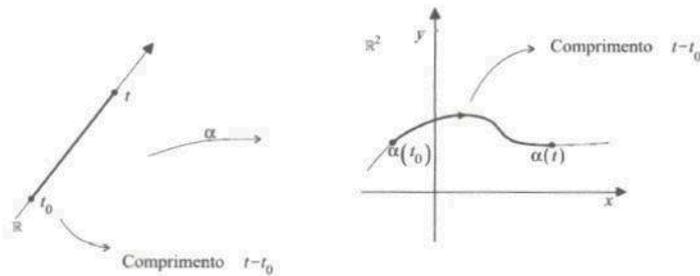


Figura 2.8: Curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $t \in I$, associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Se $t_0 \leq t$, temos

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0.$$

Se $t \leq t_0$, temos

$$-s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t_0 - t.$$

Portanto para cada $t \in I$, $s(t) = t - t_0$. donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluimos que $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

(\Leftarrow) Se $|\alpha'| = 1$, para todo $t \in I$, então $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t - t_0$, para quaisquer $t_0, t \in I$, $t_0 \leq t$. \square

Proposição 2.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Se α é uma curva regular, então

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa de s , $h : J \rightarrow I$. Como para todo $t \in I$, $h(s(t)) = t$, temos que

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} s'(t) = 1,$$

logo,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s), s \in J,$$

é uma reparametrização de α e

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{dt} = |\alpha'(t)| \frac{1}{|\alpha'(t)|} = 1.$$

Portanto, pela Proposição 2.1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Definição 2.7. *A aplicação β da Proposição 2.2 é dita reparametrização de α pelo comprimento de arco.*

UFMG/BIBLIOTECA

2.3 Desigualdade Isoperimétrica

O teorema a seguir é talvez o mais antigo teorema global em geometria diferencial e está relacionado com o seguinte problema isoperimétrico. *Dentre todas as curvas simples e fechadas no plano com um dado comprimento l , qual delas limita a maior área?* A prova que apresentaremos aqui é devida a E. Schimidt (1939).

Definição 2.8. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados ponto inicial e final da curva, respectivamente e se $\alpha(a) = \alpha(b)$ então dizemos que α é uma curva fechada (ver figura (2.9)).*



Figura 2.9: Curva fechada.

Definição 2.9. *A curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se não possui auto interseções, isto é, se a restrição $\alpha|_{[a,b]}$ é uma aplicação injetiva, isto é $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [a, b]$ (ver figura 2.9 – 2.2).*

Utilizaremos a seguinte fórmula para área A limitada por uma curva simples fechada com orientação positiva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$ é um parâmetro arbitrário. A demonstração deste resultado pode-se encontrar em [5].

Lema 2.1. *Seja α uma curva fechada, simples, orientada positivamente (sentido anti-horário) no plano cuja a imagem limita uma região R . Então a área A da região limitada pela curva α é:*

$$A = \int_{\alpha} xdy = - \int_{\alpha} ydx \tag{2.1}$$

Lema 2.2. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Se $u, v \in V$, então $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$. Além disso, $|\langle u, v \rangle| = |u||v|$ se e somente se u e v são linearmente dependente.*

Lema 2.3. *(Desigualdade entre as Médias Aritméticas e Geométrica) Para qualquer dois números positivos a e b ,*

$$ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2, \tag{2.2}$$

e a igualdade vale exatamente quando $a = b$.

Teorema 2.1. *Seja α uma curva plana simples fechada com comprimento L . Seja A a área da região limitada por α . Então*

$$l^2 \geq 4\pi A \tag{2.3}$$

e verifica-se a igualdade se e somente se α é um círculo. Assim, de todas curvas de comprimento fixo L , o círculo limita a maior área.

Demonstração. Seja E e E' duas retas paralelas que não tocam a curva fechada C , e considere o movimento destas retas até que elas toquem C pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas, L e L' tangentes à curva C ; de forma que C está totalmente contida na faixa limitada por L e L' . Considere agora um círculo S^1 que seja tangente a L e L' e não intercepta C . Seja O o centro de S^1 e introduza o sistema de coordenadas cartesianas com origem em O e o eixo Ox perpendicular a L e L' (ver Figura 2.10).

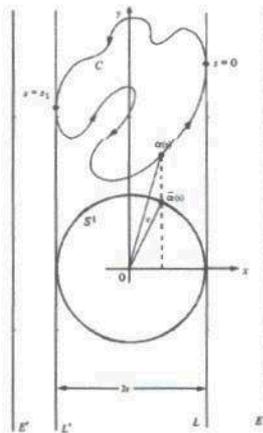


Figura 2.10: Retas E e E' paralelas, retas L e L' paralelas e tangentes a C e o círculo S^1 tangentes a L e L' .

UFPA / DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A idéia da prova é comparar área da região limitada por α com a área do círculo de raio r .

Considere C parametrizada pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ onde $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$, de modo que C tenha orientação positiva e os pontos de tangência com L e L' sejam, respectivamente, $s = 0$ e $s = s_1$

Podemos supor que a equação de S^1 é $\beta(s) = (z(s), w(s))$ onde

$$\begin{aligned} z(s) &= x(s) \\ w(s) &= \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x^2}, & \text{se } 0 \leq s \leq s_2 \\ \sqrt{r^2 - x^2}, & \text{se } s_2 \leq s \leq l \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Note que s é o comprimento de arco de α , mas não de β . De fato, com esta parametrização β não é regular, mas é de classe C^2 .

Pelo Lema 2.1 a área limitada por α é $A = \int_{\alpha} xdy = \int_0^l xy'ds$. A área limitada por β é $\pi r^2 = - \int_{\beta} ydx = - \int_0^l wz'ds = - \int_0^l wx'ds$. Portanto,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - wx')ds \leq \int_0^l |xy' - wx'|ds \\ &= \int_0^l |\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| ds. \end{aligned}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 2.2) junto com o fato que α é parametrizada pelo o comprimento de arco nos diz que,

$$|\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| \leq |(x', y')| |(-w, x)| = \sqrt{w^2 + x^2} = r$$

(ver Equação 2.4). Assim,

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^l |\langle (x', y'), (-w, x) \rangle| ds \leq \int_0^l r ds = rl.$$

Mostramos que

$$A + \pi r^2 \leq rl. \quad (2.5)$$

Agora, usaremos o fato de a média geométrica de dois números positivos ser menor ou igual que a média aritmética destes dois números, e vale a igualdade se e somente se os números são igual. Assim, teremos

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{rl}{2} \quad (2.6)$$

elevando ambos os membros da inequação acima ao quadrado, temos $A\pi r^2 \leq \frac{r^2 l^2}{4}$, ou $l^2 \geq 4\pi A$, a qual é a desigualdade isoperimétrica.

Supondo que $L^2 = 4\pi A$. Devemos mostrar que α é um círculo.

Mostremos primeiro que $x = ry'$.

Como $L^2 = 4\pi A$, a inequação (2.6) torna-se uma igualdade. Supondo a igualdade em (2.6) temos $A = \pi r^2$. A inequação (2.5) deve também ser uma igualdade. De (2.5) devemos ter igualdade, onde foi utilizada a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Pelo Lema 2.2 existe um número real c tal que

$$(-w, x) = c(x', y'). \quad (2.7)$$

Tomando o comprimento em cada lado de (2.7) temos

$$\sqrt{w^2 + x^2} = |c|\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = |c|$$

e assim (2.4) implica que $c = \pm r$. Por outro lado, (2.7) também diz que

$$c = \langle (x', y'), (-w, x) \rangle$$

(uma vez que a primeira desigualdade de (2.5) deve também ser uma igualdade) é não negativo. Portanto $c = r$ e (2.7) mostra que $x = ry'$.

$A = \pi r^2$ implica que r depende de A e não da escolha de L' . Assim, se as retas L_1 e L_2 ortogonal a L' e L são usadas, um círculo de raio r é tangente a elas. Se coordenadas \bar{x} e \bar{y} com origem no centro deste círculo são usadas, obteremos $\bar{x} = r\bar{y}'$. Como o eixo y é paralelo e tem a mesma direção do eixo \bar{x} e o eixo x é paralelo e tem a direção $-\bar{y}$ existem constantes d e e tal que $\bar{x} = y - d$, $\bar{y} = e - x$. Assim,

$$y - d = \bar{x} = r\bar{y}' = -rx'$$

e

$$x^2 + (y - d)^2 = (ry')^2 + (-rx')^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2.$$

Portanto α é um círculo de raio r centrado em $(0, d)$ no plano (x, y) .

□

Capítulo 3

Aplicações

Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos

Nesta seção demonstraremos um problema de tipo isoperimétrico para triângulos. Cabe notar que uma ferramenta fundamental para demonstrar este teorema é a fórmula de Heron. As referências para os estudos realizados neste capítulo são [4], [16] e [17].

Vamos verificar se a inequação (2.3) é verdadeira quando a região é triângulo, caso em que C é apenas de um triângulo.

A fórmula usual para a área do triângulo envolve a altura h e a base b e não parece estar relacionada com l . Acontece que existe uma fórmula que expressa diretamente em termos de l .

Proposição 3.1. (*Fórmula de Heron*) *Se um triângulo ABC tem lados medindo a , b e c com perímetro $2p$, então a área desse triângulo será dada por:*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (3.1)$$

onde $2p = a + b + c$.

Dado um triângulo ABC de lados a , b e c e altura h relativa ao lado c , conforme a figura (3.1).

Podemos determinar a área desse triângulo em função da base c e da altura h , mas queremos em relação aos lados, logo devemos escrever h em função de a , b e c . Sendo o ponto H o pé da perpendicular baixada do vértice C ao lado AB , temos que AHC

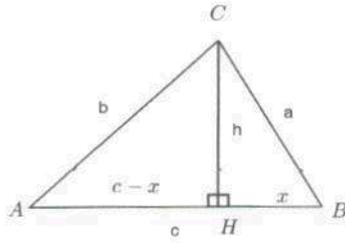


Figura 3.1: Triângulo isósceles

e BHC são triângulos retângulos, assim aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$b^2 = h^2 + (c-x)^2 \quad (3.2)$$

e

$$a^2 = h^2 + x^2 \quad (3.3)$$

Efetuando a diferença em ambos lados da igualdade temos:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (c-x)^2 - x^2 \\ &= c^2 - 2cx + x^2 - x^2 \\ &= c^2 - 2cx \end{aligned}$$

Assim,

$$2cx = c^2 + a^2 - b^2.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \quad (3.4)$$

Substituindo x em (3.3), obtemos

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2,$$

assim,

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c} \quad (3.5)$$

Assim, a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{ch}{2} = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[2ac + (c^2 + a^2 - b^2)] \cdot [2ac - (c^2 + a^2 - b^2)]}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[(a+c)^2 - b^2] \cdot [-(a-c)^2 + b^2]}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[(a+c+b)(a+c-b)] \cdot [(b+a-c)(b-a+c)]}}{4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \sqrt{\frac{(a+c+b)}{2} \cdot \frac{(a+c-b)}{2} \cdot \frac{(b+a-c)}{2} \cdot \frac{(b-a+c)}{2}} \quad (3.6)$$

Note que $2p = a + c + b$; então $a + c = 2p - b$, $a + b = 2p - c$ e $c + b = 2p - a$. Logo fazendo as devidas substituições em (3.6), obtemos:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Teorema 3.1. *Se um triângulo T tem lados medido a , b e c com perímetro $l = 2p$ e seja A a área da região limitada por T . Então:*

$$A \leq \frac{p^2}{\pi} \quad (3.7)$$

onde $2p = a + b + c$.

Se a , b e c indicam os comprimentos dos três lados de um triângulo, então:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

onde $2p = a + b + c$. Resulta da equação (2.2) que:

$$\begin{aligned} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{p(p-a)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-c)} \\ &\leq \frac{1}{2}[p+(p-a)] \frac{1}{2}[(p-b)+(p-c)] \quad (\text{por (2.2)}) \\ &= \frac{1}{4}[2p-a][2p-(b+c)] \\ &\leq \left(\frac{(2p-a)+(2p-(b+c))}{2} \right)^2 \quad (\text{por (2.2)}) \\ &= \frac{1}{16}(4p-(a+b+c))^2 = \frac{1}{16}(4p-2p)^2 = \frac{1}{4}p^2 \end{aligned}$$

onde fizemos uso do fato de que $2p = a + b + c$. Em vista (3.1), esta implica que, para um triângulo com área A e $2p$ de perímetro,

$$A \leq \frac{1}{4}p^2.$$

Como $4 > \pi$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$. Deste modo (3.7) está provada.

Observação 3.1. A prova da desigualdade (3.7) mostra que, para regiões triangular, a igualdade $A \leq \frac{1}{4}p^2$ nunca pode acontecer.

A razão é simples: se a igualdade é alcançada em (3.7), então a cadeia de inequações anterior a (3.7) devem ser todas igualdades. Em particular, a primeira desigualdade (3.7) trata da aplicação de (2.2), então

$$\sqrt{p(p-a)} \leq \frac{1}{2}(p+(p-a)).$$

De acordo com (2.2), a igualdade é possível apenas quando $p = p-a$, o que é equivalente a $a = 0$. Uma vez que a é o comprimento de um lado do triângulo, isto é impossível.

Assim, resta a tarefa de obter a constante menor possível β_0 de modo que, para todas as regiões triangulares, $A \leq \beta_0 p^2$ e, além disso, precisamos caracterizar essas regiões triangulares que satisfaçam $A = \beta_0 p^2$.

Queremos provar a desigualdade isoperimétrica para regiões triangulares.

Teorema 3.2. Se A e l são a área e o perímetro de um triângulo, então

$$A \leq \frac{l^2}{12\sqrt{3}} \quad (3.8)$$

e verifica-se a igualdade se e somente se o triângulo é equilátero.

Pela formula de Heron, a área A é dada por (3.1). Aplicando a equação (2.2) a (3.1) e fazendo uso do fato que $2p = a + b + c$, resulta,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p}[(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{p} \left[\left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{p} \left[\left(\frac{(3p - (a+b+c))}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{p} \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Como o perímetro l é igual a $2p$, obtemos:

$$A \leq \frac{l^2}{12\sqrt{3}}.$$

A equação (2.2) diz que a cadeia de desigualdades seria igualdade (e portanto igualdade se em (3.8) exatamente quando $s - a = s - b = s - c$, que é o mesmo que $a = b = c$. Assim, a área atinge o seu valor máximo $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ exatamente quando o triângulo é equilátero.

A matemática das abelhas

Faremos uma análise do problema das abelhas a que Pappus se refere. Primeiramente considera-se um resultado, já conhecido desde os pitagóricos (século V a.C.), de que triângulo, quadrado e hexágono são únicos polígonos regulares que tornam possível a pavimentação de um plano. Após ter provado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que maior números de lados tem maior área, Pappus concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construírem suas células como primas com secções hexagonais, em vez de quadradas ou triangulares. Deste modo a opção teria sido para maximizar o volume do mel armazenado para uma mesma quantidade de cera utilizada.



Figura 3.2: Abelhas

Proposição 3.2. *Se $i < j$, i e j inteiros positivos, então a área de um polígono regular de i lados é menor de que a área de um polígono regular de j lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados. Desta forma, tem-se que o lado l do polígono é $\frac{p}{n}$.

Podemos dividir o polígono regular em n triângulos isósceles de base l e altura a ,

$$a = \frac{l}{2} \frac{1}{\tan \frac{\lambda}{n}}$$

Assim, a área S deste polígono é dada por:

$$S = n \frac{la}{2},$$

é equivalente a

$$S = \frac{p^2}{4n} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}},$$

que, após a multiplicação do numerador e do denominador da fração por $\frac{\pi}{n}$, pode ser reescrita como

$$S = \frac{p^2}{4n} \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}},$$

Para ver o modo como a área S varia, faremos $x = \frac{\pi}{n}$ e estuda-se a função

$$f(x) = \frac{x}{\tan x}$$

para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, uma vez que isso fornecerá informações sobre S para $n > 2$. Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Além disso, f é contínua em $(0, \frac{\pi}{2})$ e neste intervalo $f'(x) < 0$, sendo

$$f'(x) = \frac{\tan x - x \sec^2 x}{\tan^2 x}.$$

Concluimos então que a área S é estritamente crescente, quando n cresce. Logo se $i < j$ a área do polígono regular de i lados será menor do que a área do polígono regular de j lados.

Além disto, como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, temos que a área S de um polígono regular de n lados satisfaz

$$S < \frac{p^2}{4\pi}.$$

Para demonstrar a segunda parte da proposição, tomamos um círculo de perímetro p . Neste caso seu raio r será $r = \frac{p}{2\pi}$, e sua área S será $S = \frac{p^2}{4\pi}$. Temos, portanto, que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

Seja L uma linha poligonal simples e fechada. Uma **pavimentação** da região poligonal P limitada por L é uma subdivisão de P em um número finito de polígonos tais que:

- (1) a união de todos esses polígonos e suas fronteiras é igual a de P ;
- (2) a intersecção de dois desses polígonos é vazia.

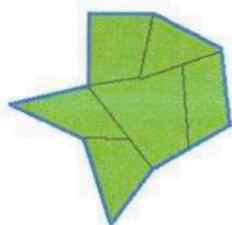


Figura 3.3: Pavimentação parcial construída de 6 polígonos, da linha poligonal azul

Uma pavimentação de uma região poligonal também é chamada de uma **pavimentação parcial** do Plano Euclidiano.

Uma **pavimentação ideal** do Plano Euclidiano é uma subdivisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos tais que:

- (1) a união de todos essas polígonos e sua fronteiras é todo o plano;
- (2) a intersecção de dois desses polígonos é vazia.

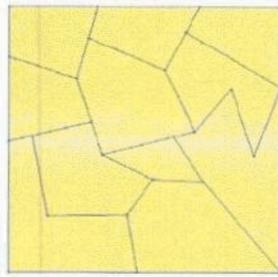


Figura 3.4: Pavimentação Ideal

Proposição 3.3. *Os únicos polígonos regulares que pavimentam um plano são o triângulo, o quadrado e o hexágono.*

Sabe-se que um polígono regular de n lados, $n \geq 3$, possui ângulos internos dados pela fórmula $(n - 2)180^\circ$.

Suponhamos que se tenha uma pavimentação do plano formada exclusivamente por polígonos regulares de n lados. Se em um vértice dos polígonos da pavimentação aparecem m polígonos, então a soma dos ângulos internos, neste vértice, deve ser igual a 360° ; ou seja, $m \left[\frac{n-2}{n} 180^\circ \right] = 360^\circ$. Simplificando esta igualdade, obtém-se $m = \frac{2n}{n-2}$. Como $n \geq 3$, segue que $\frac{2n}{n-2} \geq 3$ e, portanto, $m \geq 3$: Assim, conclui-se que os únicos candidatos a ladrilhos de uma pavimentação do plano são: o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono. Analisaremos agora quais desses polígonos realmente pavimentam o plano.

- Se $n = 3$; obtém-se $m = \frac{2n}{n-2} = 6$. A figura 3.5 ilustra uma pavimentação do plano por triângulos equiláteros, sendo que em cada vértice concorrem 6 triângulos.

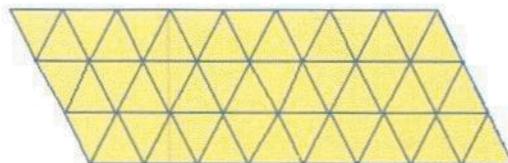


Figura 3.5: Pavimentação do plano por triângulos

- Se $n = 4$; obtém-se $m = \frac{2n}{n-2} = 4$. A figura 3.6 ilustra uma pavimentação do plano por quadrados, sendo que em cada vértice concorrem 4 triângulos.

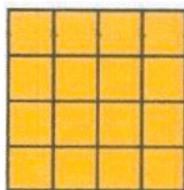


Figura 3.6: Pavimentação do plano por quadrados

- Se $n = 5$; obtém-se $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{10}{3} = 3,333\dots$. Como m deve ser um número inteiro, conclui-se que o pentágono não pode ser utilizado para pavimentar o plano.

De fato, como está ilustrado na figura 3.7, podemos colocar três pentágonos ao redor de um vértice, perfazendo 324° , com falta de 36° , mais se colocarmos o quarto pentágono, este irá se sobrepor ao primeiro.

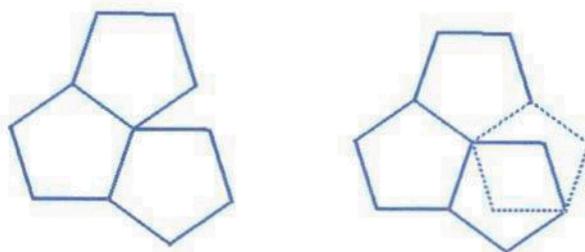


Figura 3.7: Impossibilidade de pavimentar o plano por pentágonos

- Se $n = 6$; obtém-se $m = \frac{2n}{n-2} = 3$. A figura 3.8 ilustra uma pavimentação do plano por hexágonos, sendo que em cada vértice concorrem 3 hexágonos.

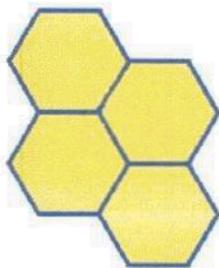


Figura 3.8: Pavimentação do plano por hexágonos

Proposição 3.4. *Dentre os polígonos que pavimentam o plano, com perímetro p fixo, o hexágono é o de maior área.*

- Triângulo: lado $l = \frac{p}{3}$, ver figura 3.9.

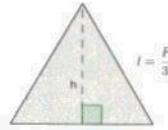


Figura 3.9: Triângulo

Temos $\left(\frac{p}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ou seja, $h = \frac{\sqrt{3}}{6}p$.

Desse modo, a área do triângulo é

$$S = \frac{\frac{p}{3} \frac{\sqrt{3}}{6} p}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36} p^2 \simeq 0,048p^2.$$

- Quadrado: lado $l = \frac{p}{4}$, ver figura 3.10.



Figura 3.10: Quadrado

Nesse caso, a área é dada por

$$S = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} p^2 = 0,0625p^2.$$

- Hexágono: lado $l = \frac{p}{6}$, ver figura 3.11.

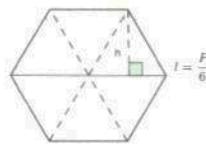


Figura 3.11: Hexágono

Como pode se observar pela figura, o hexágono é construído por 6 triângulos de base $\frac{p}{6}$ e altura $h = \frac{\sqrt{3}}{12}p$, uma vez que

$$h^2 = \left(\frac{p}{6}\right)^2 - \left(\frac{p}{12}\right)^2.$$

Assim, a área de cada um desses triângulos é dada por $S' = \frac{\frac{p}{6} \frac{\sqrt{3}}{12} p}{2} = \frac{\sqrt{3}}{144} p^2$, logo a área do hexágono é dada por

$$S = 6S' = \frac{6\sqrt{3}}{144} p^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} p^2 \simeq 0,0721p^2.$$

Portanto, da análise realizada conclui-se que, de fato, o hexágono é o de maior área.

Observação 3.2. *Embora o círculo de perímetro $p = 2\pi r$ tenha a área $S = \pi r^2 = \frac{1}{4\pi}p^2 \simeq 0,0795p^2$ maior do que a área dos polígonos tratados na Proposição anterior, não foi escolhido, por não pavimentar o plano.*

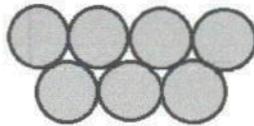


Figura 3.12: "Pavimentação" com círculos

A questão que se coloca agora é sobre a escolha das abelhas para o formato dos alvéolos, onde será depositado o mel.

Proposição 3.5. *Dentre os prismas de base triangulares, quadrados e hexagonais com mesmo perímetro, o de base hexagonal é o de maior volume.*

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura e a área lateral é igual ao produto do perímetro do polígono pela altura. Como o perímetro da base é o mesmo para os três prismas em questão, a área lateral é a mesma.

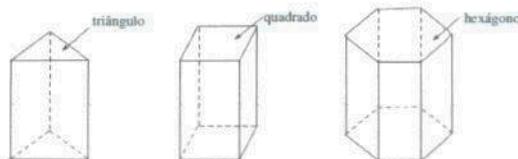


Figura 3.13: Prismas

Assim, o prisma que tiver maior área da base será o de volume máximo e, portanto, o de base hexagonal é o que satisfaz essa condição.

Analisando os resultados acima pode-se constatar que de fato a pavimentação hexagonal é a que contém uma quantidade maior de mel.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [3] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª edição, 2008.
- [4] CASTRO, R. F. C. R. *Pavimentações no plano euclidiano*, Monografia do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, Belo Horizonte, 2008.
- [5] COURANT, R. e JOHN, F. - *Introduction to Calculus and Analysis*. Volume 2. Wiley - Interscience Publication, New York, 1974.
- [6] COURANT, R. e ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.
- [7] FIGUEIREDO, D. G. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana* In; *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro 9/10, 69-108, 1989.
- [8] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol.1. 12ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [9] LIMBERGER, R. *Abordagens do Problema Isoperimétrico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [10] MADEIRA, T. M. *O Problema Isoperimétrico Clássico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005.
- [11] MORAES, P. S. A. *Abordagens da Desigualdade Isoperimétrica no Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Bahia, 2013.

- [12] PASQUALI, K. C. *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*. Dissertação de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- [13] SILVA, C. C. A. *A Desigualdade Isoperimétrica*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [14] STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*, 3.ed. Trad. João C. S. Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.
- [15] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2008.
- [16] *The Isoperimetric Inequality: the Algebraic Viewpoint*. Disponível em <http://math.berkeley.edu/~wu/HSI1.pdf>
(Acessado em 27/07/2013.)
- [17] *Máx e mín na geometria euclidiana: uma abordagem histórica*. Disponível em <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2e2/v2e2.art4.pdf>
(Acessado em 17/01/2013.)
- [18] VIRGÍLIO, P. *Eneida*. Tradução de Manoel Odorico Mendes. Disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>
(Acessado em 01/08/2013.)