UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Jailson Marinho Cardoso

TEOREMA DE PONTO FIXO E APLICAÇÕES

Cuité-PB

2013

Jailson Marinho Cardoso

TEOREMA DE PONTO FIXO E APLICAÇÕES

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

Cuité-PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

C268t Cardoso, Jailson Marinho.

Teorema de Ponto Fixo e Aplicações. / Jailson Marinho Cardoso – Cuité: CES, 2013.

41 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Ponto Fixo. 2. Contração. 3. Aproximações Sucessivas. I. Título.

CDU 514.745.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Jailson Marinho Cardoso

Teorema de Ponto Fixo e Aplicações

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

Banca Examinadora

Prof. Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelas nossas vidas.

Agradeço à minha esposa, Amarilis, pela paciência e pelos incentivos, apoios estes que considero importantes contribuições para que eu pudesse concluir esse Curso.

Agradeço aos meus pais, João Lúcio e Joventina, aos meus filhos, aos meus irmãos, aos meus sobrinhos, aos meus tios, aos meus primos e aos demais familiares, por compreenderem minha abdicação a muitos momentos do convívio familiar para dedicar-me às atividades acadêmicas nestes últimos seis anos.

Agradeço aos meus colegas, que juntos partilhamos essa estapa da vida acadêmica, perseverantes e solidários.

Agradeço a todos os meus professores, pela valiosa contribuição dada para minha formação acadêmica e pessoal. E, especilamente, agradeço às professoras Márcia Cristina Silva Brito (Orientadora desta monografia) e Maria Gisélia Vasconcelos (Coorientadora), que, orientando, exigindo, dedicando-se e suprindo minhas limitações, entregaram-se inteiramente no sentido da concretização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Agradeço também ao professor Jaime Alves Barbosa Sobrinho, pela sua participação na Banca Examinadora e pela sua apreciação a este Trabalho de Conclusão de Curso.

Agradeço ainda a todos os funcionários deste campus universitário, pois também de alguma forma deram sua parcela de contribuição para a realização desse Curso.

A todos, mais uma vez, MUITO OBRIGADO!

Dedico este trabalho ao meu pai, que, apesar de não ter tido oportunidade de aprender mais que as quatro primeiras operações nos números naturais, ensinou-me a gostar da Matemática.

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas aplicações. Este teorema garante a existência e unicidade de solução para variados tipos de equações, e uma das razões de sua importância reside no fato de que ele fornece, junto com seu enunciado, um método aproximativo para a determinação do ponto fixo, método este que é muito eficiente. Aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach no Teorema da Perturbação da Identidade (teorema este que consiste uma etapa crucial na demonstração do importante Teorema da Função Inversa, em Análise), em Equações Numéricas e no Método de Newton para Zeros de Funções.

Palavras-chave: Ponto Fixo. Contração. Aproximações Sucessivas.

Abstract

In this work, we studied the Fixed Point Theorem of Banach and some of its applications. This theorem guarantees the existence and uniqueness of solution for various types of equations, and one of the reasons of its importance lies in the fact that it provides, along with his utterance, an approximate method for determining the fixed point, which method is very efficient. We apply the Fixed Point Theorem of Banach in the Theorem Perturbation of the Identity (this theorem which is a crucial step in demonstrating the important Inverse Function Theorem in Analysis), in Numerical Equations and in the Newton's Method to Zeros of Functions.

Keywords: Fixed Point. Contraction. Successive approximations.

Sumário

Introdução 9

1 Preliminares 11

1.1 Métricas, Normas e Produtos Internos . . . 11

1.2 Espaço Métrico . . . 21

1.2.1 Noções Topológicas . . . 21

1.2.2 Sequências . . . 23

1.2.3 Completude . . . 26

2 Ponto Fixo das Contrações 28

2.1 Ponto Fixo de Banach . . . 28

2.1.1 Uma Generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . 34

3 Aplicações 35

3.1 Teorema da Perturbação da Identidade . . . 35

3.2 Equações Numéricas . . . 37

3.3 Método de Newton para Zeros de Funções . . . 39

Referências Bibliográficas 41

Introdução

Seja X um conjunto não vazio e $f : X \to X$ uma função. Em muitos problemas práticos e teóricos, estamos interessados em encontrar os pontos $x \in X$ que são levados em si mesmos pela função f, ou seja, os pontos $x \in X$ tais que

$$f(x) = x.$$

Os pontos que satisfazem essa equação são chamados de pontos fixos da transformação f e a equação acima é denominada equação de ponto fixo.

Teoremas que nos garantam existência e, por vez, unicidade de soluções de equações de pontos fixos são chamados de teoremas de ponto fixo. Há vários teoremas de tal tipo na literatura matemática, como por exemplo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach[1], o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer[2], o Teorema do Ponto Fixo de Schauder[3] e vários outros, todos com pressupostos distintos sobre o conjunto X e sobre a função f.

Aqui trataremos de um teorema de ponto fixo extremamente útil conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é válido em espaços métricos completos.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach foi estabelecido por Stefan Banach e publicado em 1922, numa revista denominada Fundamentos da Matemática, ver [6]. O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um importante resultado da análise funcional, assegurando a existência e a unicidade de ponto fixo para certos tipos de operadores denominados contrações.

Outra das razões da importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach reside no fato de ele fornecer, junto com seu enunciado, um método iterativo de determinação

[1]Stefan Banach (1892-1945).

[2]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) foi um matemático holandês.

[3]Juliusz Pawel Schauder (1899-1943) foi um matemático polonês.

aproximada do ponto fixo, sendo que a aproximação é tanto melhor quanto mais interações forem feitas, metodo este muito eficiente.

Esse teorema é, de fato, o teorema de ponto fixo com mais aplicações práticas. Seus fortes resultados estendem sua influência aos domínios das equações integrais, equações diferenciais, equações numéricas em $\mathbb{C}$, da análise numérica, dos processos estocásticos nas probabilidades e de outros ramos da matemética pura e aplicada.

Um breve histórico sobre Stefan Banach

Figura 1: Stefan Banach

O matemático Stefan Banach nasceu no ano de 1892 na Cracóvia, na Polônia, e faleceu no ano de 1945 em Lviv, na Ucrânia. Foi professor titular na Universidade Jan Kazimierz de Lviv. Sua principal contribuição para a Matemática foi a moderna Análise Funcional.

Entre os vários trabalhos do matemático polonês Stefan Banach, destacam-se a sua contribuição para a teoria das séries ortogonais e inovações na teoria de medida e integração. Dos trabalhos publicados por Banach, o livro *Théorie des opérations lineaires* (1932, "Teoria das operações lineares") é o mais importante. Outro trabalho considerado de grande importância na época, o *Théorie de Sept Reverse* (1934, "Teoria do Sete Reverso") acabou sendo considerado incompleto na década seguinte. Na tentativa de generalizar equações integrais, Banach introduziu o conceito de Espaços Vetoriais Normados, além de provar vários teoremas dessa área. Dentre os teoremas que recebem o nome de Banach, os mais conhecidos são: o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema de Banach-Alaoglu, o Teorema de Banach-Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Métricas, Normas e Produtos Internos

Métricas

Uma questão importante que se coloca é a de identificar quais propriedades básicas que a noção intuitiva de distância possui para permitir seu emprego em várias instâncias. Surgiu da identificação dessas propriedades a noção matemática de métrica, a qual abstrai e generaliza a noção intuitiva de distância. Vamos a essa definição.

Definição 1.1 (Métrica). *Seja M um conjunto não vazio. Uma* ***métrica*** *é uma função real $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $x, y \in M$ um número real $d(x,y)$, chamado distância de x a y, de modo a serem satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(M1) $d(x,y) = 0$ *se e somente se* $x = y$; (Condição de distância nula)

(M2) $d(x,y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in M$; (Positividade)

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$; (Simetria)

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (Desigualdade Triangular)

A quarta propriedade acima é particularmente importante e é denominada *desigualdade triangular* devido a seu significado geométrico nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com a métrica usual.

Um ponto importante da definição de métrica é a condição que afirma que $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$.

A condição de positividade acima é, em verdade, consequência da desigualdade triangular e da condição de simetria.
De fato, usando essas duas condições, pode-se provar o seguinte fato mais forte:
Para todo $x, y, z \in M$ vale

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$$

o que, em particular, garante que $d(x,y) \geq 0$.
Para provar isso, note-se que, pela desigualdade triangular, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Logo,

$$d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z)$$

Trocando-se x por y e usando-se a condição de simetria, obtemos também

$$d(x,y) = d(y,x) \geq d(y,z) - d(x,z)$$

Ambas as relações dizem que $d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|$, como queríamos demonstrar.

Se M é um conjunto e d é uma métrica em M, dizemos que o par (M,d) é um **espaço métrico**. Ou seja, um espaço métrico vem a ser um conjunto munido de uma métrica.

A noção de Espaço Métrico foi introduzida por Fréchet[1] em sua dissertação de 1906. A expressão *"espaço métrico"*, no entanto, não foi sua invenção, tendo sido utilizada por Hausdorff[2] em 1914.

O exemplo mais básico de uma métrica é oferecido, no caso $M = \mathbb{R}$, pela função $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Outro exemplo essencial idêntico em $M = \mathbb{C}$, é oferecido pela a função $d(z,w) = |z-w|$, $z, w \in \mathbb{C}$. Essas são chamadas métricas usuais em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente.

[1] Maurice René Fréchet (1878-1973). Fréchet também introduziu a noção de compacidade.
[2] Fèlix Hausdorff (1868-1942).

Exemplo 1.1 (O espaço métrico dos números reais $\mathbb{R}$). *Considere a função* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $d(x,y) = |x-y|\,,\quad x,y \in \mathbb{R}$.

*Esta função é a distância usual entre dois ponto $x, y \in \mathbb{R}$. É uma **métrica** em $\mathbb{R}$.*

De fato:

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Segue das propriedades da função módulo que:

(M1) $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$;

(M2) Se $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ e, portanto, $|x-y| > 0$. Logo, $d(x,y) = |x-y| > 0$;

(M3) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$;

(M4) $d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$. □

Exemplo 1.2 (O espaços métrico euclidiano $\mathbb{R}^n$). *Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um números real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$.*

Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevemos:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
d_s(x,y) &= |x_1-y_1| + ... + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \\
d_m(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|, ..., |x_n-y_n|\} = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i-y_i|\}
\end{aligned}
$$

As funções $d, d_s, d_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são **métricas** e são chamadas, respectivamente, *métrica usual*, *métrica da soma* e *métrica do máximo*, no $\mathbb{R}^n$.

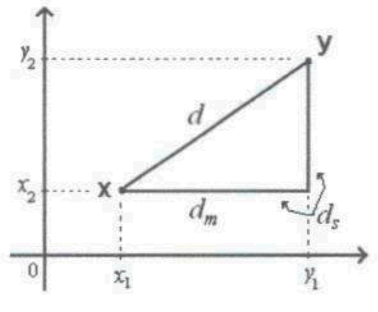

Figura 1.1: As métricas d, d_s e d_m no $\mathbb{R}^2$.

De fato:

Sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Então:

- $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(M1) $d(x,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (0)^2} = 0.$

(M2) Se $x \neq y$, então há pelo menos um "$x_{i_0} \neq y_{i_0}$", com $i_{i_0} \in \{1, ..., n\}$.

Dai, $x_{i_0} - y_{i_0} \neq 0$, donde, $(x_i - y_i)^2 > 0$.

Logo,

$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{i_0} - y_{i_0})^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_{i_0} - y_{i_0})^2} > 0$

(M3) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d(y,x);$

(M4)

$$
\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i)\right| + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \\
&\overset{*}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = [d(x,y) + d(y,z)]^2
\end{aligned}
$$

Daí, $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(*) Desigualdade de Cauchy[3]-Schwarz[4] $\square$

[3] Augustin Louis Cauchy (1780-1857) foi um matemático francês.

[4] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) foi um matemático alemão.

Para demonstrar a propriedade da desigualdade triangular aqui, precisamos da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, em termos das coordenadas dos pontos de x e y:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, vamos demonstrar esta desigualdade.

Considere a função $f(\lambda) = (x_1\lambda - y_1)^2 + ... + (x_n\lambda - y_n)^2$ em $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i\lambda - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2\lambda^2 - 2x_i\lambda y_i + y_i^2) \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

Que é uma função do 2º grau em λ, com valores em $\mathbb{R}$.

Como f é uma soma de quadrados, $f(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Assim, o seu descriminante deve ser $\Delta \leq 0$, isto é:

$$\Delta = \left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0$$

Ou,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

A igualdade ocorre quando $\Delta = 0$. E quando isto ocorre, f possui apena uma raiz (uma raiz dupla) λ_0, o que implica em

$$f(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{n} (x_i\lambda_0 - y_i)^2 = 0$$

Como o λ_0 e os x_i, y_i pertencem a $\mathbb{R}$, segue desta equação, que $x_i\lambda_0 - y_i = 0$, ou , $y_i = \lambda_0 x_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Assim, a igualdade ocorre quando x_i e y_i são proporcionais.

$\square$

- $d_s(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(M1) $d_s(x,x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i| = \sum_{i=1}^{n} |0| = 0.$

(M2) Se $x \neq y$, então há pelo menos um "$x_{i_0} \neq y_{i_0}$", com $i_0 \in \{1, ..., n\}$.

Daí, $x_{i_0} - y_{i_0} \neq 0$, donde $|x_{i_0} - y_{i_0}| > 0$. Logo,

$$d_s(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_{i_0} - y_{i_0}| + ... + |x_n - y_n| \geq |x_{i_0} - y_{i_0}| > 0.$$

(M3) $d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_s(y,x).$

(M4)

$$\begin{aligned} d_s(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = d_s(x,y) + d_s(y,z). \end{aligned}$$

□

- $d_m(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$

(M1) $d_m(x,x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - x_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|0|\} = 0.$

(M2) Se $x \neq y$, então há pelo menos "$x_{i_0} \neq y_{i_0}$"com $i_{i_0} \in \{1, ..., n\}$.

Daí, $x_{i_0} - y_{i_0} \neq 0$, donde $|x_{i_0} - y_{i_0}| > 0$. Logo,
$d_m(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_{i_0} - y_{i_0}|, ..., |x_n - y_n|\} \geq |x_{i_0} - y_{i_0}| > 0;$

(M3) $d_m(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\} = d_m(y,x).$

(M4)

$$|x_i - z_i| \;=\; |(x_i - y) + (y - z_i)| \;\leq\; |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Daí, $\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} \;\leq\; \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \;+\; \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - z_i|\}.$

Ou seja, $d_m(x,z) \leq d_m(x,y) + d_m(y,z).$

□

Proposição 1.1. *Sejam d, d_s e d_m as métricas naturais definidas no $\mathbb{R}^n$. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, valem as desigualdades:*

$$d_m(x,y) \leq d(x,y) \leq d_s(x,y) \leq n.d_m(x,y)$$

Demonstração: Sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Então:

(I) $d_m(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = |x_{i_0} - y_{i_0}|$, com $i_0 \in \{1, ..., n\}$. Logo,

$$\begin{aligned} d_m(x,y) &= |x_{i_0} - y_{i_0}| = \sqrt{(x_{i_0} - y_{i_0})^2} \\ &\leq \sqrt{(x_i - y_i)^2 + ... + (x_{i_0} - y_{i_0})^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = d(x,y). \end{aligned}$$

(II) Como $d_m(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = |x_{i_0} - y_{i_0}|$.

Então, $|x_i - y_i| \leq |x_{i_0} - y_{i_0}|$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo,

$$\begin{aligned} d_s(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n| \\ &\leq |x_{i_0} - y_{i_0}| + |x_{i_0} - y_{i_0}| + ... + |x_{i_0} - y_{i_0}| = n.\,|x_{i_0} - y_{i_0}| = n.d_m(x,y). \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + ... + |x_n - y_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 + 2\sum_{i \neq j} |x_i - y_i|.|x_j - y_j|} \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|)^2} = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\ &= d_s(x,y). \end{aligned}$$

Logo, $d(x,y) \leq d_s(x,y)$.

Portanto, de (I),(II) e (III), segue que

$$d_m(x,y) \leq d(x,y) \leq d_s(x,y) \leq n.d_m(x,y)$$

$\square$

Normas

Definição 1.2. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$. Assumiremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, isto é, consideremos espaço vetoriais reais ou complexos. Uma* ***norma*** *em V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:*

(N1) $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in V$;

(N2) *Se* $\|x\| = 0$ *então* $x = 0$;

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todo* $x \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$; (Homogeneidade)

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in V$. (Desigualdade Triangular)

Um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado *Espaço Vetorial Normado* e denotado por $(V, \|\cdot\|)$.

Exemplo 1.3. *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A função definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall \ x, y \in V$$

é uma métrica em V chamada de métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 1.4 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$). *Os conjuntos $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_s)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_m)$ são exemplos de espaços vetoriais normados, onde, para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$, se tem*

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \\
\|x\|_s &= |x_1| + ... + |x_n| \\
\|x\|_m &= \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}
\end{aligned}$$

As métricas d, d_s e d_m em $\mathbb{R}^n$ vistas na seção anterior são provenientes das normas $\|x\|$, $\|x\|_s$ e $\|x\|_m$, respectivamente. Lembremos que a norma de um vetor x é a distância de x à origem, ou seja, $\|x\| = d(x, 0)$.

Produtos Internos

Definição 1.3. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um* **produto interno** *em V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:*

(P1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para todo* $x \in V$;

(P2) *se* $\langle x, x \rangle = 0$ *então* $x = 0$;

(P3) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ *para todo* $x, y \in V$;

(P4) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *para todo* $x, y, z \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado **Espaço com produto interno** e denotado por $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
É possível definir diferentes produtos internos para um mesmo espaço vetorial.

Segue das propriedades de produto interno que:

1) $\langle 0, x \rangle = 0$ para todo $x \in V$;

2) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

3) $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\mu} \langle x, z \rangle$, para todo $x, y, z \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Exemplo 1.5. *Sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ vetores em $\mathbb{K}^n$. A função dada por*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

é um produto interno em $\mathbb{K}^n$.

Exemplo 1.6. *Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Então a função definida por*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

é uma norma em V.

As normas num espaço vetorial V para as quais existe um produto interno satisfazendo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ são chamadas de *normas induzidas por um produto interno.*

Teorema 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço como produto interno. A função definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall \ x, y \in V$$

Demonstração. Se $y = 0$, a desigualdade é óbvia.
Suponhamos então que $y \neq 0$.
Observe que, para qualquer $t \in \mathbb{K}$ temos que

$$0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle = \|x\|^2 - 2Re\,\langle x, ty\rangle + |t|^2\|y\|^2$$

e em particular, tomando $t = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$ tem-se que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

de onde segue o resultado desejado. □

Vejamos que a função definida por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

é de fato uma norma em V:

(N1): $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$ para todo $x \in V$;

(N2): $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N3): $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\,\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|.\|x\|$;

(N4): $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2Re\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

aplicando a raiz quadrada segue o resultado desejado. □

Proposição 1.2. *Quando uma norma provém de um produto interno vale a chamada* ***Lei do Paralelogramo:***

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Demonstração. Sejam $x, y \in V$.
Suponhamos que a norma $\|\cdot\|$ provém do produto interno

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Como

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

□

1.2 Espaço Métrico

1.2.1 Noções Topológicas

Seja (M, d) um espaço métrico. Então qualquer subconjunto $X \subset M$ também é um espaço métrico com a métrica d herdada de M o qual será chamado de *subespaço métrico.*

Seja (M, d) um espaço métrico. Uma *bola aberta* com centro em $x_0 \in M$ e raio $r > 0$ será um conjunto da forma

$$B(x_0; r) = \{x \in M : \ d(x_0, x) < r\}$$

Definição 1.4. *Dizemos que x_0 é um* ***ponto interior*** *do subconjunto $X \subset M$ se existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$B(x_0; \epsilon) \subset X.$$

O conjunto de todos os pontos interiores a X será denotado por $int(X)$. Segue da definição que $int(X) \subset X$.

Definição 1.5. *Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é **aberto** se $X \subset int(X)$.*

Desde que a inclusão $int(X) \subset X$ é sempre válida, o conjunto X será aberto se, e somente se, $X = int(X)$.

Exemplo 1.7. *Toda bola aberta $B(x_0; r)$ de um espaço métrico M é um conjunto aberto.*

De fato, seja $x_1 \in B(x_0; r)$, considere $\epsilon = r - d(x_1, x_0) > 0$ e verifiquemos que $B(x_1; \epsilon) \subset B(x_0; r)$.
Para $x \in B(x_1; \epsilon)$ temos que $d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \epsilon + d(x_1, x_0) = r$, portanto $x \in B(x_0; r)$ de onde segue que $B(x_1; \epsilon) \subset B(x_0, r)$. Assim, $x_1 \in int(B(x_0; r))$ e da arbitrariedade do ponto tomado temos que $B(x_0; r) \subset int(B(x_0; r))$, o que mostra que o conjunto é aberto.

Definição 1.6. *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é **contínua** no ponto $x_0 \in M$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, tal que*

$$\forall x_0 \in M_1, \ \text{com } d_1(x, x_0) < \delta, \ \text{tem-se } d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon \tag{1.1}$$

Dizemos também que f é contínua em M_1 ou simplesmente contínua, se for contínua em cada ponto $x_0 \in M_1$.

Considerando a notação $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ a afirmação (1.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$f(B(x_0; \delta)) \subset B(f(x_0); \epsilon).$$

Teorema 1.2. *Uma função $f : M_1 \to M_2$ é contínua se, e somente se, o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M_1 : f(x) \in Y\},$$

é aberto em M_1 para todo conjunto aberto Y em M_2.

Demonstração. Ver [5]. □

Definição 1.7. *Sejam (M,d) e (N,d) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se* ***lipschitziana*** *quando existe uma constante $c > 0$ (constante de Lipschitz[5]) tal que, quaisquer que sejam $x, y \in M$, $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x,y)$.*

Neste caso, f é contínua em cada ponto x_0 de M.
De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Então,

$$\forall x \in M,\ d(x,x_0) < \delta \to d(f(x), f(x_0)) \leq c.d(x,x_0) < c.\delta = \epsilon.$$

Logo, f é contínua.

Definição 1.8. *Dizemos que um conjunto X é* ***fechado*** *se X^c é aberto.*

Definição 1.9. *Seja $X \subset M$. Dizemos que $x_0 \in M$ é um* ***ponto aderente*** *de X se*

$$X \cap B(x_0; \epsilon) \neq \emptyset\ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto de pontos aderentes de um conjunto X, também é chamado de **fecho** de X e denotado por $\overline{X}$. Observe que $X \subset \overline{X}$.

Teorema 1.3. *Um subconjunto $X \subset M$ é* ***fechado*** *se, e somente se, $\overline{X} \subset X$.*

Demonstração. Ver [5]. □

1.2.2 Sequências

O conceito de métrica (distância) entre pontos quaisquer de um espaço métrico nos permite definir a noção básica de convergência de sequência.

Definição 1.10. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Dizemos que a sequência é* ***convergente*** *se existe $x \in M$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

x é dito o limite de (x_n) e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ou simplesmente } x_n \to x.$$

[5]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) foi um matemático alemão.

Observe que $d(x_n, x) \to 0$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Teorema 1.4. *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é contínua no ponto $x_0 \in M_1$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) em M_1, tal que $x_n \to x_0$, tem-se que $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.5. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $F \subset M$:*

1. *Seja $x_0 \in M$. Então, $x_0 \in \overline{F}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em F tal que $x_n \to x_0$.*

2. *F é fechado se, e somente se, para toda sequência (x_n) em F, tal que $x_n \to x_0 \in M$, tem-se que $x_0 \in F$.*

Demonstração. Ver [5]. □

Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é *limitado* se existe $C > 0$ tal que

$$d(x, y) < C \quad \forall x, y \in X$$

e dizemos que uma sequência (x_n) em M é limitada se o conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado.

Temos que um conjunto X é limitado se, e somente se, para qualquer $x_0 \in X$ fixado, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < C \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.11 (Série). *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Para cada $n = 1, 2, 3, ...,$ podemos construir a* ***soma parcial (ou reduzida)***

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1, \\ S_2 &= x_1 + x_2, \\ S_3 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 + x_2 + ... + x_n \end{aligned}$$

O termo geral S_n da sequência (S_n) é chamado de ***n-ésima soma parcial (ou reduzida de ordem n)*** *de (x_n). A sequência das somas parciais (S_n) assim obtida é chamada de* ***série*** *e é denotada por $\sum x_n$.*

Se existe $a \in M$ tal que $a = \lim_{n \to \infty} S_n$, dizemos que ***a é soma da série*** *$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, e escrevemos*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$$

Neste caso, dizemos que a série é ***convergente****. Quando a sequência das somas parciais (S_n) não possui limite em M, dizemos que a série é* ***divergente****.*

Um exemplo importante de série é a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Quando $\|x\| < 1$, segue-se que, de

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + x^2 + ... + x^n \\ x.S_n &= x + x^2 + ... + x^{n+1} \end{aligned}$$

tem-se $S_n - x.S_n = 1 - x^{n+1}$, donde $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Daí, $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{1}{1 - x}$ e portanto a série geométrica **converge**, e sua soma é igual a $\dfrac{1}{1 - x}$.
Por outro lado, quando $\|x\| \geq 1$, a série geométrica **diverge**, pois neste caso a n-ésima parcela x^n, não tende para zero, que é condição necessária (mas não suficiente) para a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, pois se $a = \lim_{n \to \infty} S_n$, então $a = \lim_{n \to \infty} S_{n-1}$ também.
Como $x_n = S_n - S_{n-1}$, temos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = 0 - 0 = 0.$$

1.2.3 Completude

Definição 1.12. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Dizemos que* ***a sequência é de Cauchy*** *se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \text{ para todo } m, n \geq n_0.$$

Exemplo 1.8. *A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy, pois se $\epsilon > 0$ é dado, considere $x_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0\epsilon > 2$, cuja existência é garantida pela propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$. Então,*

$$m, n \geq n_0 \rightarrow |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposição 1.3. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M, então dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n_0}) < 1, \ \forall n \geq n_0$.
Tomando $k = \max\{1, d(x_n, x_{n_0}), n = 1, 2, ..., n_0 - 1\}$, segue-se que $d(x_n, x_0) < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_m, x_0) < 2k, \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

□

Proposição 1.4. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) um sequência tal que $x_n \rightarrow a$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$.
Segue-se que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ para todo } n, m \geq n_0.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

- A recíproca da proposição acima é falsa.

Exemplo 1.9. *A sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$ converge no espaço métrico $\mathbb{R}$, para o ponto $0 \in \mathbb{R}$ portanto é de Cauchy. Esta sequência não é convergente no espaço métrico $(0, 1)$, pois neste espaço métrico não existe ponto alguma para o qual ela possa convergir. Logo, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ do espaço métrico $(0, 1)$ é de Cauchy sem ser convergente.*

Definição 1.13. *Dizemos que um espaço métrico (M,d) é* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Proposição 1.5. *Todo subespaço do espaço métrico (M,d) completo, é completo se e somente se é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset M$. Suponhamos F completo. Seja (x_n) um sequência em F convergindo para $x_0 \in M$. Como a sequência é convergente em M, é de Cauchy em M e portanto é de Cauchy em F, logo convergente em F para $x_1 \in F \subset M$, por unicidade do limite segue-se que $x_0 = x_1$ e assim F é fechado. Reciprocamente, seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim x_n = x_0 \in M$. Como F é fechado em M, tem-se $x_0 \in F$. Logo, F é completo. $\square$

Definição 1.14. *Um espaço vetorial normado completo M, chama-se um* ***espaço de Banach***.

Capítulo 2

Ponto Fixo das Contrações

2.1 Ponto Fixo de Banach

Aqui trataremos de um teorema de ponto fixo extremamente útil conhecido como Teorema de Ponto Fixo de Banach, que funciona em espaços métricos completos. Este teorema foi proposto por Stefan Banach em 1922 e é também conhecido como princípio das contrações. Uma das razões de sua importância reside no fato de o Teorema de Ponto Fixo de Banach fornecer, junto com seu enunciado, um método aproximativo para a determinação do ponto fixo, método este que é muito eficiente.

Definição 2.1. *Um **ponto fixo** de uma aplicação $T : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $T(x) = x$.*

Definição 2.2. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $T : M \to N$ chama-se uma **contração** quando existe uma constante λ, com $0 \leq \lambda < 1$, tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \text{ para quaisquer } x, y \in M.$$

Note que uma contração é uma aplicação lipshitziana, com $0 \leq \lambda < 1$, e portanto é uniformemente contínua.

Teorema 2.1. *Se f é uma função de contração sobre um M, então f é contínua.*

Demonstração. Suponha que (x_n) é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, pois $|f(x_n) - f(x)| \leq \lambda |x_n - x| \leq |x_n - x|$. □

O teorema seguinte, apesar da simplicidade de sua demonstração, é um dos mais utilizados na demonstração da existência e unicidade de um ponto fixo. Ele afirma que toda contração em um espaço métrico completo tem um e somente um ponto fixo. E além disso, ele fornece um método iterativo de determinar aproximadamente o ponto fixo, sendo que, a aproximação é tanto melhor quanto mais iterações forem feitas.

Teorema 2.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja M um conjunto dotado de uma métrica d e suponha M completo em relação a d. Seja X um subconjunto fechado de M e seja $T : X \to X$ uma função. Vamos então supor que existe um número λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todos os pontos x e y de X valha*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda . d(x, y), \tag{2.1}$$

Então, a equação de ponto fixo

$$x = T(x), \tag{2.2}$$

tem solução em X e essa solução é única. Além disso, para qualquer $x_0 \in X$, a sequência $x_n = T(x_{n-1})$, $n \geq 1$, obtida aplicando-se repetidamente T a partir de x_0, converge (rapidamente) ao ponto fixo x na métrica d. A saber, tem-se que

$$d(x_n, x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \tag{2.3}$$

Demonstração. Temos que X é completo em relação à métrica d, visto que é um subconjunto fechado de um espaço métrico completo.

Denotaremos por T^n a n-ésima composição de T consigo mesma: $\underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ vezes}}$. Definimos então, para um $x_0 \in X$ arbitrário, $x_n = T^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Vamos agora provar que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Para isto, sejam m e n dois números naturais quaisquer tais que $m < n$. Então, usando a desigualdade triangular $n - m$ vezes, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \\
&\vdots \\
&\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Pela propriedade de contração, temos que

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(T(x_{i-1}), T(x_i)) \leq \lambda d(x_{i-1}, x_i) \leq \lambda^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) \leq \cdots \leq \lambda^i d(x_0, x_1).$$

Daí,

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\lambda^m + \lambda^{m+1} + \lambda^{m+2} + \ldots + \lambda^{n-1}\right) d(x_0, x_1)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lambda^m \left(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1-m}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \lambda^m \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\right) d(x_0, x_1) = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Isto prova que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, pois λ^m pode ser feito arbitrariamente pequeno, tomando m grande, para qualquer $n > m$.

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy em X e X é completo, deve existir um x em X único ao qual a sequência converge. Temos sempre, usando a igualdade triangular, que

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m).$$

Tomando $n > m$ e usando (2.4), temos

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Como (x_n) se aproxima de x para n grande, podemos fazer o termos $d(x, x_n)$ arbitrariamente pequeno, tomando n grande, sem alterar os demais. Daí, concluímos que

$$d(x, x_m) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \tag{2.5}$$

Esta última desigualdade mostra que x_m, de fato, se aproxima exponencialmente rápido de x.

Vamos agora provar que x, o limite da sequência (x_n), é um ponto fixo. Para isso, calculemos $d(x, T(x))$. Teremos, pela desigualdade triangular

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, T(x)),$$

para todo m. Usando (2.5) e a contratividade de T teremos

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda} d(x_0, x_1) + \lambda d(x_m, x) \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda} d(x_0, x_1) + \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda} d(x_0, x_1) = 2\frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como m é arbitrário podemos fazer $m \to \infty$ e obtemos $d(x, T(x)) = 0$, o que implica que $x = T(x)$.

Por fim, resta-nos provar que x é o único ponto fixo de T. Para tal, vamos supor que haja um outro ponto v em X tal que $v = T(v)$. Teríamos, usando a contratividade de T, que

$$d(x, v) = d(T(x), T(v)) \leq \lambda d(x, v)$$

Ou seja, $(1 - \lambda)d(x, v) \leq 0$. Como $0 \leq \lambda < 1$, segue-se que $d(x, v) = 0$, que implica $v = x$. Isto completa a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach. □

Sobre a necessidade das hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Um fato que chama a atenção neste teorema é a presença de apenas duas hipóteses, suficientes para demonstrá-lo. Veremos agora alguns exemplos que mostram ser estas hipóteses também necessárias:

- A condição do espaço métrico ser completo é crucial, sem ela as conclusões do teorema podem não mais ser válidas.

Exemplo 2.1. *Sejam $M = (0, 1)$ e a função $f : M \to M$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.*

O espaço métrico M não é completo.

Temos também que a função f é uma contração e não possui ponto fixo no intervalo $(0, 1)$, pois

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Com este exemplo mostramos que, mesmo tendo uma contração, é impossível obter as conclusões do Teorema do Ponto Fixo de Banach caso o espaço métrico em questão não seja completo.

Apesar da sequência (x_n), construída iterativamente na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, ser de Cauchy, ela não converge para um ponto do domínio da função f. Porém, se estendermos f continuamente no complemento do espaço $(0, 1)$, isto é, no domínio $[0.1]$, então a sequência (x_n) convergirá para o único ponto fixo de f, a saber, o ponto $x = 1$.

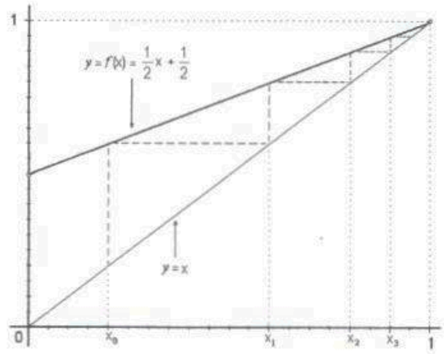

Figura 2.1: Comportamento da sequência (x_n).

- A condição da função ser uma contração é crucial, sem ela as conclusões do teorema podem não mais ser válidas.

Exemplo 2.2. *Consideremos o espaço métrico* $\mathbb{R}$ *com sua métrica usual, e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 + 1$.

Temos que a função f não é uma contração no seu domínio $\mathbb{R}$ e não possui ponto fixo, pois

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0,$$

que não possui solução real. Logo, f não possui nenhum ponto fixo.

Exemplo 2.3. *Consideremos o espaço métrico* $\mathbb{R}$ *com sua métrica usual, e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 - 1$.

Notamos que a função f também não é uma contração, como no exemplo acima, mas agora perdemos a unicidade, pois f possui dois ponto fixos, a saber:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De fato,

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

- A condição $0 \leq \lambda < 1$ é crucial, sem ela as conclusões do teorema podem não mais ser válidas.

Aplicações $f : (M, d) \to (M, d)$ tais que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, $\forall\ x, y \in M$ são ditas *não-expansões*.

Exemplo 2.4. *Consideremos o espaço métrico $\mathbb{R}$ com sua métrica usual, e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$.*

Notemos que a função é uma não-expansão. Neste caso claramente f não possui ponto fixo, caso contrário, teríamos a igualdade $0 = 1$.

Exemplo 2.5. *Consideremos o espaço métrico $\mathbb{R}$ com sua métrica usual, e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.*

Notemos que a função é uma não-expansão. Observe que, em oposição ao exemplo anterior, neste caso todos os pontos do domínio de f são pontos fixos.

Exemplo 2.6. *Seja $M = [1, \infty)$ com sua métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ e seja $f : M \to M$ definida por $f(x) = x + x^{-1}$.*
Então vale que para todo $x, y \in M$, $x \neq y$,

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

De fato, para $1 \leq x < y$,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt < \int_x^y dt = y - x,$$

pois $1 - t^{-2} < 1$ para $t > 1$, sendo esta a melhor estimativa possível.
Assim,

$$|f(y) - f(x)| < |y - x|,$$

Como queríamos provar.
Note agora, porém, que f não tem nenhum ponto fixo.
De fato, $f(x) = x$ significa $x + x^{-1} = x$, ou seja, $x^{-1} = 0$, o que não é possível se $x \in [1, \infty)$.

2.1.1 Uma Generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Vejamos agora, uma pequena generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Ocorre por vezes que a aplicação T, como discutida acima, não é uma contração, mas alguma de suas potências o é. Neste caso podemos também garantir o do Teorema de Banach do Ponto Fixo de Banach.

Proposição 2.1. *Seja M um conjunto dotado de um métrica d e suponha M completo em relação a d. Seja X um subconjunto fechado em M e seja T uma função de X em X, $T : X \to X$. Vamos supor que exista um número $m \in \mathbb{N}$ tal que a aplicação T^m seja uma contração, cujo ponto fixo é $x \in X$. Então T também tem um ponto fixo único, a saber, o mesmo x.*

Demonstração. Para provar que x é também ponto fixo de T, notemos que, como $x = T^m(x)$, temos também que

$$T(x) = T^{m+1}(x) = T^m(T(x)).$$

Isto diz que $T(x)$ é ponto fixo de T^m. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, este último é x e é único. Daí, $T(x) = x$. Ora, isso diz precisamente que x é ponto fixo de T.

Provemos agora que x é também o único ponto fixo de T. Para tal suponha que haja um outro ponto fixo y.

Então, $y = T(y)$. Daqui tiramos que $T(y) = T^2(y)$. Juntando estas duas igualdades, vemos que $y = T(y) = T^2(y)$.

Repetindo este processo, chegamos a

$$y = T(y) = T^2(y) = \ldots = T^m(y).$$

Isso diz que y é ponto fixo de T^m. Agora, pelas hipóteses, o único ponto fixo de T^m é x. Logo, $y = x$. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é, de fato, o teorema de ponto fixo com mais aplicações prática. Seus fortes resultados estendem sua influência aos domínios das equações integrais, equações diferenciais, equações numéricas em $\mathbb{C}$, da análise numérica, dos processos estocásticos nas probabilidades e de outros ramos da matemética pura e aplicada. Um exemplo típico do seu uso é no cálculo por aproximações sucessivas de raízes de funções.

Aqui aplicamos seus resultados no Teorema da Perturbação da Identidade, em Equações Númérica e no Método de Newton para Zeros de Funções.

3.1 Teorema da Perturbação da Identidade

Em certas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, tem-se uma aplicação $f : M \to M$ (onde M é espaço métrico completo), que , restrita a um subconjunto fechado $X \subset M$, é uma contração. Sendo X um espaço métrico completo, a fim de concluir a existência de um ponto fixo de f, basta (e é indispensável) verificar que $f(X) \subset X$, o que exprime dizendo que X é um subconjunto fechado *invariante* por f. Em particular, toda bola fechada invariante por uma contração, contém o ponto fixo dessa contração.

Uma condição suficiente para que uma bola fechada seja invariante por uma contração é dada por:

Lema 3.1. *Seja $f : M \to M$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$, com $0 \leq \lambda < 1$. Dado qualquer $a \in M$, se $r \geq \dfrac{d(a, f(a))}{1-\lambda}$, então a bola aberta $B = B[a,r]$ é invariante por f, isto é, $f(B) \subset B$. Em particular, se M é completo, o ponto fixo de f está em B.*

Demonstração. Para todo $x \in B$, temos $d(x,a) \leq r$.
Disto e das hipóteses, temos que

$$d(f(x),a) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a),a) \leq \lambda d(x,a) + (1-\lambda)r \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Logo, $f(x) \in B$, ou seja, $f(X) \subset B$. □

O Teorema da Perturbação da Identidade é uma versão diferenciável do Teorema da Função Inversa e, ao mesmo tempo, constitui etapas cruciais de sua demonstração. A parte mais importante do que ele afirma é a que assegura ser a imagem $f(U)$ um conjunto aberto. Implícito nesta afirmação está um teorema de existência, em cuja prova utilizamos o método das aproximações sucessivas.

Definição 3.1. *Um **homeomorfismo** é uma bijeção contínua cuja inversa é contínua.*

Definição 3.2. *Seja $g, \varphi : U \subset E \to E$, onde φ é uma contração, a função $f : U \to E$, dada por $f(x) = g(x) + \varphi(x)$ é chamada **perturbação** de g por φ.*

*Se $g(x) = x, x \in U$, f é chamada **perturbação da identidade**.*

Teorema 3.1 (Perturbação da Identidade). *Seja $\varphi : U \to E$ uma contração definida num subconjunto aberto U do espaço de Banach E. A aplicação $f : U \to E$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de E.*

Demonstração. Observe que f é contínua, pois $f = I + \varphi$ e φ é uma contração.
Suponhamos que, para quaisquer $x, y \in U$, se tenha

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda |x-y|, \text{ com } 0 \leq \lambda < 1.$$

Utilizando a desigualdade $|a+b| \geq |a| - |b|$, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y + \varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x-y| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\geq |x-y| - \lambda|x-y| = (1-\lambda)|x-y|, \end{aligned}$$

ou seja, $|f(x) - f(y)| \geq (1-\lambda)|x-y|$.

Isto mostra que f é injetiva e sua inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ é lipschitziana, com constane $\frac{1}{1-\lambda}$. Logo, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$.
Resta provar que $f(U)$ é aberto em E. É agora que usamos a existência do ponto fixo para contrações.
Seja então $b = f(a) = a + \varphi(a)$, $a \in U$, um ponto qualquer de $f(U)$.
Como U é aberto em E, existe um $r > 0$ tal que a bola fechada $B = B[a;r]$ está contida em U.
Afirmação: A bola aberta $B' = B'(b, (1-\lambda)r)$ está contida em $f(U)$.

Ou seja, dado $y \in E$ tal que $d(y,b) = |y - b| < (1-\lambda)r$, devemos mostrar que a equação $f(x) = y$ ou, o que é o mesmo, $x + \varphi(x) = y$ possui uma solução $x \in U$.
Para isto, consideremos a contração $\xi_y : B \to E$, definida por $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$.
Segue-se que $f(x) = y \Leftrightarrow \xi_y(x) = x$. Como a bola fechada B é completa, basta verificar que $\xi_y(B) \subset B$.
Ora,

$$|a - \xi_y(a)| = |a + \varphi(a) - y| = |y - f(a)| = |y - b| < (1-\lambda)r.$$

Logo, pelo Lema 3.1, B é invariante por ξ_y, isto é, $\xi_y(B) \subset B$ e, portanto, $f(U)$ é aberto em E. □

3.2 Equações Numéricas

Apresentamos agora, uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach na estimativa da existência de solução de uma Equação Numérica.

Seja a reta real e a seguinte equação de ponto fixo em $\mathbb{R}$:

$$x = c. \operatorname{sen} x,$$

onde $0 < c < 1$ é uma constante dada. Terá essa equação? Será única?

Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = c. \operatorname{sen} x$. Podemos adotar em $\mathbb{R}$ a métrica usual em relação à qual $\mathbb{R}$ é completo.

Vamos provar que isso é verdade:

$$\begin{aligned} d(T(x),T(y)) &= c|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = c|-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y| \\ &= c\left|\int_y^x \cos t dt\right| \leq c|x-y| = cd(x,y), \end{aligned}$$

pois $|\cos t| \leq 1$. Assim temos que T é uma contração com $\lambda = c$.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach nos afirma então que, partindo-se de qualquer número real x_0, as iteradas sucessivas de T convergem ao mesmo número x, ponto fixo de T:

$$x_n = \underbrace{c \operatorname{sen}(c \operatorname{sen}(c \operatorname{sen}(\cdots c \operatorname{sen} x_0 \cdots)))}_{n \ vezes}$$

No caso de $c = \dfrac{1}{2}$ e $x_0 = 1$, com $x_n = T(x_{n-1})$, considerando seis casas decimais, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= T(1) = \frac{1}{2} sen(1) = 0.420735 \\ x_2 &= T(0.420735) = \frac{1}{2} sen(0.420735) = 0.204216 \\ x_3 &= T(0.204216) = \frac{1}{2} sen(0.204216) = 0.101399 \\ x_4 &= T(0.101399) = \frac{1}{2} sen(0.101399) = 0.050612 \\ x_5 &= T(0.050612) = \frac{1}{2} sen(0.050612) = 0.025295 \\ x_6 &= T(0.025295) = \frac{1}{2} sen(0.025295) = 0.012646 \\ x_7 &= T(0.012646) = \frac{1}{2} sen(0.012646) = 0.006322 \\ x_8 &= T(0.006322) = \frac{1}{2} sen(0.006322) = 0.003160 \\ x_9 &= T(0.003160) = \frac{1}{2} sen(0.003160) = 0.001579 \\ x_{10} &= T(0.001579) = \frac{1}{2} sen(0.001579) = 0.000789 \\ x_{11} &= T(0.000789) = \frac{1}{2} sen(0.000789) = 0.000039 \\ x_{12} &= T(0.000039) = \frac{1}{2} sen(0.000039) = 0.000001 \\ x_{13} &= T(0.000001) = \frac{1}{2} sen(0.000001) = 0.000000 \end{aligned}$$

Ou seja, a solução da $x = c. \operatorname{sen} x$ é o ponto fixo de T, isto é, $x = 0$.

3.3 Método de Newton para Zeros de Funções

Podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para determinar os zeros de funções reais através do Método de Newton[1] .

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função da qual desejamos determinar um zero, ou seja, uma solução da equação $f(\xi) = 0$. Notemos que esta equação equivale à equação $\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, pelo menos se $f'(\xi) \neq 0$. Colocando dessa forma o problema torna-se um problema de ponto fixo para a aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Proposição 3.1. *Se f for pelo menos duas vezes diferenciável, então f possuirá um zero ξ, único, num dado intervalo $[a, b]$ se existir λ, com $0 \leq \lambda < 1$ tal que*

$$\left| \frac{f(x)f(x)''}{(f'(x))^2} \right| \leq \lambda, \qquad \textit{para todo } x \in [a, b] \tag{3.1}$$

e se

$$\left| \frac{f(x)}{f'(\mu)} \right| \leq (1 - \lambda)\alpha, \tag{3.2}$$

onde $\mu = \frac{a+b}{2}$ e $\alpha = \frac{a-b}{2}$, Neste caso, tem-se $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$, onde a sequência $x_n \in [a, b]$ é determinada iterativamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad n \geq 0,$$

sendo $x_0 \in [a, b]$, arbitrário. Ter-se-á,

$$|\xi - x_n| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|T(x_0) - x_0| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|b - a|, \ n \geq 0. \tag{3.3}$$

Se adotarmos $x_0 = \mu$ teremos ainda $|\mu - x_n| \leq \alpha\lambda^n$, $n \geq 0$, por (3.2).

A condição (3.1) pressupõe que $f'(x) \neq 0$ em $[a, b]$. A condição (3.1) é importante para garantir a contratividade de T, enquanto que (3.2) é suficiente para garantir que T leve pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$, podendo ser eventualmente substituída por outra condição que garanta o mesmo. O método de Newton funciona mesmo sob condições mais fracas sobre a f, nesse caso fora do contexto do Teorema do Ponto Fixo de Banach. A convergência das iterações pode, então, ser mais lenta que aquela garantida em (3.3).

[1] Issac Newton (1643-1727), foi um físico e matemático inglês.

Demonstração. Sejam $x, y \in [a,b]$. Tem-se

$$T(y) - T(x) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} - x + \frac{f(x)}{f'(x)} = \int_x^y \frac{d}{dt}\left[t - \frac{f(t)}{f'(t)}\right] = \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}dt.$$

Assim, (3.1) garante que

$$|T(y) - T(x)| \leq \lambda |y - x|$$

Isto estaria dizendo-nos que T é uma contração. Precisamos, porém, garantir que T leve pontos de $[a,b]$ em $[a,b]$. Isso equivale a garantir que $|T(x) - \mu| \leq \alpha$ para todo $x \in [a.b]$, ou seja, para todo x tal que $|x - \mu| \leq \alpha$. Uma maneira de impor isso usando (3.1) é supor válida a condição (3.2).

De fato,

$$\begin{aligned} |T(y) - \mu| = \left|T(x) - T(\mu) + \frac{f(x)}{f'(\mu)}\right| &\leq |T(x) - T(\mu)| + \left|\frac{f(x)}{f'(\mu)}\right| \\ &\overset{por\ (3.1)}{\leq} \lambda|x - \mu| + \left|\frac{f(x)}{f'(\mu)}\right| \\ &\overset{por\ (3.2)}{\leq} \lambda|x - \mu| + (1 - \lambda)\alpha \\ &\overset{pois\ x\in[a,b]}{\leq} \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Com isso, provamos que T é uma contração que mapeia o espaço métrico completo $[a,b]$ em si mesmo. O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante o resto. □

O Método de Newton pode ser motivado geometricamente pela figura

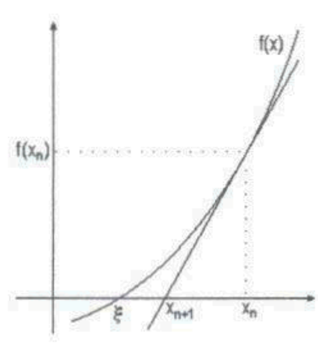

Figura 3.1: Iterações do Método de Newton.

A reta que passa pelo ponto $(x_n, f(x_n))$ tangencia o gráfico da função f. Sua inclinação é, portanto, $f'(x_n)$. Assim o ponto x_{n+1} indicado na figura vale $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Repetindo-se o procedimento a partir do ponto x_{n+1} aproximamo-nos mais ainda do zero ξ de f.

Referências Bibliográficas

[1] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias.* 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[2] DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia.* São Paulo: Atual, 1982.

[3] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* V.1. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[4] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* V.2. 9ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[5] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[6] BANACH, S. Artigo: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales.* Fund. Math. 3 (1922), p.133-181. Disponível em http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/or/or2/or215.pdf (Acessado em 02/09/2013).

[7] BARATA, J. C. A. *Curso de Física-Matemática (Versão de 29 de Novembro de 2005).* Disponível em http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html (Acessado em 02/06/2013).

[8] VIEIRA, M. L.; BONFIM, V. *Sobre a necessidade das hipóteses no Teorema do Ponto Fixo de Banach.* Disponível em http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_09_artigo_.09.pdf (Acessado em 10/06/2013).